



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

## Modelos de Decisión en la Gestión del Riesgo Operacional y Problemas del Sector Asegurador Mediante Operadores de Agregación OWA

Agustín Torres Martínez

**ADVERTIMENT.** La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX ([www.tdx.cat](http://www.tdx.cat)) i a través del Dipòsit Digital de la UB ([diposit.ub.edu](http://diposit.ub.edu)) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX ni al Dipòsit Digital de la UB. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX o al Dipòsit Digital de la UB (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

**ADVERTENCIA.** La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR ([www.tdx.cat](http://www.tdx.cat)) y a través del Repositorio Digital de la UB ([diposit.ub.edu](http://diposit.ub.edu)) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR o al Repositorio Digital de la UB. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR o al Repositorio Digital de la UB (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

**WARNING.** On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX ([www.tdx.cat](http://www.tdx.cat)) service and by the UB Digital Repository ([diposit.ub.edu](http://diposit.ub.edu)) has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized nor its spreading and availability from a site foreign to the TDX service or to the UB Digital Repository. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service or to the UB Digital Repository is not authorized (framing). Those rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.

UNIVERSITAT DE  
BARCELONA



PhD in Business | Agustín Torres Martínez

2017

PhD in Business

**Modelos de Decisión en la Gestión  
del Riesgo Operacional y Problemas  
del Sector Asegurador Mediante  
Operadores de Agregación OWA**

**Agustín Torres Martínez**



UNIVE  
BARC

# PhD in Business

---

**Thesis title:**

Modelos de Decisión en la Gestión  
del Riesgo Operacional y Problemas  
del Sector Asegurador Mediante  
Operadores de Agregación OWA

**PhD student:**

Agustín Torres Martínez

**Advisors:**

Anna Maria Gil Lafuente  
José Maria Merigó Lindahl

**Date:**

July 2017



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA



*Dedicatoria*

*A la memoria de mis padres*



## **Agradecimientos**

A la Dra. Anna María Gil Lafuente directora de esta tesis, por su alto grado de compromiso para formarme como investigador, por su generosidad para compartir sus conocimientos y experiencias en el apasionante mundo de la lógica difusa, por sus consejos y apoyo incondicional tanto en lo profesional como en lo personal para mantener viva la ilusión y la motivación en esta tesis, por su capacidad para comprender mis momentos difíciles y situaciones personales, por brindarme una red de apoyo e integrarme en otros proyectos de investigación para mejorar mi cualificación.

Al Dr. José María Merigó Lindahl, codirector de esta tesis, por su inagotable capacidad de trabajo, sin límites de tiempo ni horario, por compartir sin restricción sus conocimientos de inteligencia computacional, por su gran capacidad humana para mi formación como investigador, por creer en mis capacidades y proyectarme en este campo para que mis aportaciones se divulguen.

A la Dra. Montserrat Casanovas Ramón, por las oportunidades brindadas y por su decisivo apoyo para ampliar mis conocimientos en el campo de la inteligencia computacional y los seguros, por compartir su valiosa experiencia como investigadora de larga y reconocida trayectoria en la Universidad de Barcelona y por el afecto demostrado en todos estos años de trabajo investigativo.

A la Fundación Mapfre y la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras de España, por la oportunidad de trabajar como investigador en proyectos de gran importancia para mi tesis y mi vida profesional.

A mis padres, por su amor y entrega para inculcarme muchos valores y darme una buena educación, por la capacidad que tuvieron siempre para comprender, apoyar y dar ejemplo para hacerme una persona íntegra y feliz. Sé que, aunque ya no estén conmigo, sus enseñanzas y amor siempre guiarán mis pasos.

A Mariela, mi segunda madre, por su amor incondicional y por estar siempre con mis padres apoyando y guiando todas las etapas de mi vida, por su generosidad sin límites para apoyar todos mis sueños y metas.

A las familias Londoño Gutiérrez, Zuluaga Gutiérrez y Martínez Yepes; a Eider Gutiérrez, Clarisa Osorio, Alexandra Osorio, Sandra Duque,

Magnolia Ríos, Raquel Caicedo, Leonor Escalante; a mis tías Leonor y Hermelinda, a mis hermanos Roberto, Humberto y Reinaldo; y a toda mi familia por el apoyo incondicional en todo momento y vivir con ilusión todos mis sueños.

A mis amigas en Colombia Florentina Alzate, Luz Eugenia Toro, Marlene Moscoso y Nelcy Sanchez, porque a pesar del tiempo y la distancia mantener siempre viva la amistad y estar siempre en todo momento.

A Alonso, Gloria, Kelly, Yelmi y Olga, por hacerme parte de su familia, apoyarme en todo momento, por comprender siempre y brindarme su amistad incondicional.

A mis amigos Ferney Piedrahita, Jordi Perez, Anton Canales, Antonio Corona, Ferran Soler, Jaume Cuxart por escuchar y apoyarme.

A todos mis compañeros del doctorado y en especial a Jaime López, Hugo Baier, Keivan, Amirbagueri, Magaly Gaviria, Helen Castellón, Milena Gómez y Fabio Blanco por todas las vivencias compartidas durante estos años.

Hanni Amiri (Q.E.P.D.) no puede leer estas líneas ni compartir este momento tan especial que siempre soñamos, pero estaré eternamente agradecido con la vida, por haberla puesto en mi camino y transmitirme tantas cosas positivas.



## Contenido

|  |    |
|--|----|
| Capítulo 1 Introducción.....   | 1  |
| 1.1 Presentación.....  | 3  |
| 1.2 Justificación.....   | 4  |
| 1.3 Objetivos.....   | 5  |
| 1.4 Metodología.....   | 6  |
| 1.4.1 Teoría de los Efectos Olvidados.....                             | 6  |
| 1.4.2 Agregación de Información con Operadores OWA.....                | 7  |
| 1.5 Estructura.....  | 10 |
| Capítulo 2 Estado de la Cuestión .....                                 | 13 |
| 2.1 Análisis Bibliométrico.....  | 10 |
| 2.1.1 Análisis del Operador OWA.....                                   | 10 |
| 2.1.2 Análisis del Riesgo Operacional.....                             | 20 |
| 2.2 Operadores de Agregación OWA.....                                  | 24 |
| 2.2.1 Criterios de Decisión Clásicos.....                              | 27 |
| 2.2.2 Familias de Operadores OWA.....                                  | 29 |
| 2.3 Introducción a la Gestión del Riesgo Operacional.....              | 32 |
| 2.3.1 Metodologías de Estimación del Riesgo Operativo.....             | 32 |
| 2.3.1.1 Método del Indicador Básico.....                               | 32 |
| 2.3.1.2 Método Estándar.....   | 33 |
| 2.3.1.3 Métodos Avanzados.....   | 34 |
| 2.3.2 Clases de Riesgo.....  | 35 |
| 2.3.3 Criterios para Métodos Avanzados.....                            | 36 |
| 2.3.4 Metodologías Avanzadas de Modelación del Riesgo Operacional..... | 39 |
| Capítulo 3 Modelo de Causalidad Multiexperto con Operadores OWA...45   |    |

|  |     |
|--|-----|
| Capítulo 4 Operadores de Agregación OWA Inducidos y Generalizados en la Teoría de la Utilidad Multiatributo .....          | 73  |
| Capítulo 5 Decisiones en Reaseguros con Operadores OWA Inducidos y Distancias de Minkowski.....                            | 101 |
| Capítulo 6 Modelo de Decisión Multiexperto y Multicriterio con el Operador OWA de Distancias Inducido Probabilístico ..... | 127 |
| Capítulo 7 Modelo de Decisiones de Precios en Seguros con Lógica Difusa y Operadores OWA.....                              | 157 |
| Capítulo 8 Herramientas de Lógica Difusa para una Estrategia de Precios en el Sector Asegurador .....                      | 181 |
| Capítulo 9 Conclusiones.....   | 217 |
| Referencias.....   | 225 |
| Apéndice .....   | 233 |

## Lista De Tablas

|  |    |
|--|----|
| Tabla 1.1 Metodología Aplicada en las Contribuciones .....                     | 8  |
| Tabla 2-1 Revistas con más Publicaciones del Operador OWA .....                | 16 |
| Tabla 2-2 Autores con más Publicaciones del Operador OWA .....                 | 17 |
| Tabla 2-3 Volumen de Publicaciones del Operador OWA por Países .....           | 17 |
| Tabla 2-4 Volumen de Publicaciones del Operador OWA por Institución            | 18 |
| Tabla 2-5 Artículos más Citados del Operador OWA .....                         | 19 |
| Tabla 2-6 Revistas con más Publicaciones de Riesgo Operacional por .....       | 21 |
| Tabla 2-7 Autores con más Publicaciones de Riesgo Operacional.....             | 21 |
| Tabla 2-8 Volumen de Publicaciones de Riesgo Operacional por Países ..         | 22 |
| Tabla 2-9 Volumen de Publicaciones de Riesgo Operacional por Institución ..... | 22 |
| Tabla 2-10 Artículos más Citados de Riesgo Operacional .....                   | 23 |
| Tabla 2-11 Criterios de Decisión Clásicos .....                                | 28 |
| Table 3-1 Matrix M of the Expert 1 .....                                       | 62 |
| Table 3-2 Matrix C of the Expert 1 .....                                       | 62 |
| Table 3-3 Matrix E of the Expert 1 .....                                       | 62 |
| Table 3-4 Matrix M of the Expert 2 .....                                       | 63 |
| Table 3-5 Matrix C of the Expert 2.....  | 63 |
| Table 3-6 Matrix E of the Expert 2 .....                                       | 63 |
| Table 3-7 Matrix M of the Expert 3 .....                                       | 63 |
| Table 3-8 Matrix C of the Expert 3 .....                                       | 64 |
| Table 3-9 Matrix E of the Expert 3 .....                                       | 64 |
| Table 3-10 Matrix M of the Expert 4 .....                                      | 64 |
| Table 3-11 Matrix C of the Expert 4.....                                       | 64 |
| Table 3-12 Matrix E of the Expert 4 .....                                      | 65 |
| Table 3-13 Matrix M of the Expert 5 .....                                      | 65 |
| Table 3-14 Matrix C of the Expert 5.....                                       | 65 |
| Table 3-15 Matrix E of the Expert 5 .....                                      | 65 |

|   |     |
|---|-----|
| Table 3-16 Matrixes M' of Aggregated Results .....            | 66  |
| Table 3-17 Matrixes C' of Aggregated Results .....            | 66  |
| Table 3-18 Matrixes E' of Aggregated Results .....            | 67  |
| Table 3-19 Convolution among Matrixes Max-Min M" .....        | 67  |
| Table 3-20 Forgotten Effects Matrix O.....                    | 67  |
| Tabla 4-1 Evaluación del Experto 1 .....                      | 90  |
| Tabla 4-2 Evaluación del Experto 2.....                       | 90  |
| Tabla 4-3 Evaluación del Experto 3.....                       | 90  |
| Tabla 4-4 Utilidades Esperadas del Experto 1 .....            | 91  |
| Tabla 4-5 Utilidades Esperadas del Experto 2 .....            | 91  |
| Tabla 4-6 Utilidades Esperadas del Experto 3 .....            | 91  |
| Tabla 4-7 Resultados Colectivos de Utilidades Esperadas ..... | 91  |
| Tabla 4-8 Variables de Inducción .....                        | 92  |
| Tabla 4-9 Resultados Agregados .....                          | 92  |
| Tabla 4-10 Orden de Prioridad de Riesgos .....                | 93  |
| Table 5-1 Characteristics of Reinsurance Programs .....       | 117 |
| Table 5-2 Degrees of Membership of Criteria .....             | 118 |
| Table 5-3 Optimal Level of Criteria .....                     | 119 |
| Table 5-4 Optimal Reinsurance .....                           | 119 |
| Table 5-5 Aggregated Results 1 .....                          | 119 |
| Table 5-6 Aggregated Results 2.....                           | 120 |
| Table 5-7 Ranking of Alternatives.....                        | 120 |
| Table 6-2 Indicators of the Insurance Market.....             | 145 |
| Table 6-3 Indicators of the Ideal Profile .....               | 145 |
| Table 6-4 Matrix of Distances .....                           | 146 |
| Table 6-5 Matrix of Induced Variables - Expert 1.....         | 146 |
| Table 6-6 Matrix of Induced Variables - Expert 2.....         | 146 |
| Table 6-7 Matrix of Induced Variables - Expert 3.....         | 147 |
| Table 6-8 Matrix of Induced Variables Aggregated .....        | 147 |

|   |     |
|---|-----|
| Table 6-9 Aggregated Results .....                                | 148 |
| Table 7-1 Example of Risk Profiles .....                          | 169 |
| Table 7-2 Risk profiles for the Application .....                 | 169 |
| Table 7-3 Expert Forecast 1 for Profile 1 .....                   | 170 |
| Table 7-4 Expert Forecast 2 for Profile 2 .....                   | 170 |
| Table 7-5 Expert Forecast 3 for Profile 3 .....                   | 170 |
| Table 7-6 Expert Forecast 4 for Profile 4 .....                   | 170 |
| Table 7-7 Expert Forecast 5 for Profile 5 .....                   | 170 |
| Table 7-8 Aggregated Results of Profile 1 .....                   | 171 |
| Table 7-9 Aggregated Results of Profile 2 .....                   | 172 |
| Table 7-10 Aggregated Results of Profile 3 .....                  | 172 |
| Table 7-11 Aggregated Results of Profile 4 .....                  | 172 |
| Table 7-12 Aggregated Results of Profile 5 .....                  | 172 |
| Table 7-13 Maximum Results Summary .....                          | 173 |
| Table 7-14 Minimum Result Summary .....                           | 173 |
| Table 7-15 Summary of the Results with the Arithmetic Mean .....  | 173 |
| Table 7-16 Summary of the Results with the Weighted Average ..... | 173 |
| Table 7-17 Summary of the Results with the UOWA Operators .....   | 173 |
| Table 7-18 Summary of the Results with the AUOWA Operators .....  | 174 |
| Table 7-19 Summary of the Results with the UPOWA Operators .....  | 174 |
| Table 7-20 Securities of the Operator UPOWA .....                 | 174 |
| Table 7-21 Results Aggregate with Heavy OWA.....                  | 175 |
| Table 7-22 Ranking Alternatives .....                             | 176 |
| Tabla 8-1 Predicción Experto 1 .....                              | 196 |
| Tabla 8-2 Predicción Experto 2 .....                              | 197 |
| Tabla 8-3 Predicción Experto 3 .....                              | 197 |
| Tabla 8-4 Resultados Colectivos.....                              | 197 |
| Tabla 8-5 Resultados Agregados I.....                             | 198 |
| Tabla 8-6 Resultados Agregados II.....                            | 198 |

|  |     |
|--|-----|
| Tabla 8-7 Ranking de Estrategias .....   | 199 |
| Tabla 8-8 Predicción Experto 1 .....   | 199 |
| Tabla 8-9 Predicción Experto 2 .....   | 200 |
| Tabla 8-10 Predicción Experto 3 .....  | 200 |
| Tabla 8-11 Predicción Experto 4 .....  | 200 |
| Tabla 8-12 Predicción Experto 5 .....  | 200 |
| Tabla 8-13 Expertón para la Alternativa 1 y Situación 1.....                       | 201 |
| Tabla 8-14 Valor Esperado de los Expertones para cada Alternativa y Situación..... | 202 |
| Tabla 8-15 Resultados Agregados .....  | 202 |
| Tabla 8-16 Ranking de Estrategias .....  | 203 |
| Tabla 8-17 Predicción Experto 1 .....  | 204 |
| Tabla 8-18 Predicción Experto 2 .....  | 204 |
| Tabla 8-19 Predicción Experto 3 .....  | 204 |
| Tabla 8-20 Resultados Colectivos.....  | 205 |
| Tabla 8-21 Resultados Agregados .....  | 206 |
| Tabla 8-22 Ranking de Estrategias .....  | 206 |

## **Lista de Gráficos**

|   |    |
|---|----|
| Gráfico 2-1 Evolución de Publicaciones del Operador OWA.....      | 16 |
| Gráfico 2-2 Evolución de Publicaciones de Riesgo Operacional..... | 20 |
| Graphic 3-1 Forgotten Effect 1 .....                              | 68 |
| Graphic 3-2 Forgotten Effect 2 .....                              | 69 |





# **Capítulo 1**

## **Introducción**



## 1.1 Presentación

A partir de la teoría de conjuntos borrosos introducida por Zadeh (1965) en su artículo *fuzzy sets* se originaron una serie de conceptos, teorías, métodos, operaciones y medidas que son aplicables al campo de la economía y empresa. El análisis de la decisión es precisamente una de las disciplinas que más cambios ha experimentado en las últimas décadas con la introducción de nuevos conceptos provenientes de la lógica difusa. Uno de los aspectos más relevantes que la lógica difusa aporta al campo de las ciencias sociales es el poder trabajar con información incompleta, vaga o imprecisa, y desde esta perspectiva poder analizar problemas en un entorno de incertidumbre. Estos modelos son bastante convenientes y de gran aplicabilidad cuando se toman decisiones que requieran consenso, transparencia y ponderación de situaciones, que por la naturaleza de la información disponible hacen difícil el análisis.

En las organizaciones y en la mayoría de las actividades humanas las situaciones problemáticas y complejas son constantes. Es por ello, que la gestión del riesgo es un factor clave para el éxito de las organizaciones, ya que el uso de recursos necesarios para el funcionamiento de las empresas, implica que pueda haber fallos o que se cometan errores que ocasionen pérdidas que afectan directamente su rentabilidad. Dichas pérdidas en ocasiones pueden ser muy catastróficas y generar una gran pérdida económica o la quiebra por insolvencia de las empresas. En el caso del riesgo operacional un ejemplo clásico es el caso del Banco Barings de Inglaterra en el año 1995, cuando la falta de control y las malas decisiones de un empleado le condujeron a pérdidas millonarias y cuyas consecuencias lo llevaron a la quiebra. A partir de este suceso, en los mercados financieros surgió la necesidad de tomar medidas para que casos como este no se vuelvan a repetir, y que las consecuencias por riesgo operacional tengan el menor impacto posible para una entidad.

Desde el inicio el trabajo se enfocó en los modelos de toma de decisiones para el tratamiento del riesgo operacional, ya que por la complejidad del tema vi la oportunidad de desarrollar una investigación en la que se pudiera tratar la información cualitativa e implementar modelos que incluyan las opiniones de expertos para mejorar la gestión del riesgo. Sin embargo, en el transcurso de la tesis también tuve la oportunidad de trabajar en el proyecto de investigación “Inteligencia computacional aplicada al

sector asegurador” financiado por la Fundación Mapfre junto a uno de los directores de la tesis, el Dr. José María Merigó Lindahl de la Universidad de Barcelona. En dicho proyecto se llevaron a cabo trabajos de investigación dentro del campo de la lógica difusa y particularmente con operadores de agregación OWA y mi trabajo de investigación se amplió a otros problemas del sector asegurador relacionados con la toma de decisiones en procesos de tarificación, reaseguro y selección de proveedores, los cuales influyen directa o indirectamente en la gestión del riesgo operacional y otros tipos de riesgos.

El interés de desarrollar esta investigación está influenciado por los trabajos en este campo que ha llevado a cabo del Dr. Jaime Gil Aluja, en los que se demuestra todo el potencial que tiene esta disciplina para llevar a cabo investigaciones aplicables a temas de economía y empresa. La teoría de los efectos olvidados (Kaufmann y Gil Aluja 1988) y los operadores de agregación OWA son las dos herramientas que más se han aplicado en las contribuciones que se presentan en esta investigación.

## **1.2 Justificación**

Las decisiones que se toman en todos los niveles de las organizaciones son la clave para el cumplimiento de los objetivos empresariales y en muchos casos para la supervivencia y sostenibilidad en el largo plazo. Sin embargo, en dichas decisiones se deben enfrentar los riesgos propios de la actividad económica y de diversos factores, tanto del entorno como de sus agentes internos. Por tanto, un elemento muy importante para el éxito empresarial, consiste en conocer los riesgos a los que está expuesta una organización y poder darles un tratamiento adecuado para mitigar su impacto o evitarlos. Uno de los principales riesgos a los que están expuestas las empresas es el riesgo operacional. Dicho riesgo cuenta con una gran limitante en cuanto a la disponibilidad de datos, haciendo que su gestión requiera de novedosas técnicas que solventen la ausencia de información, ambigüedad o imprecisión.

A diferencia del riesgo de mercado y de crédito, el riesgo operacional es mucho más difícil de medir y predecir, pues no solo basta con basarnos en las estadísticas de lo que ocurrió en el pasado, sino que se presenta en una situación de mayor incertidumbre. En este tipo de riesgo, no es fácil predecir en qué momento los procesos, la infraestructura o las personas fallaran, siendo necesario recurrir en algunos casos a métodos cualitativos para el tratamiento de la incertidumbre, en los cuales se requiere conocer la opinión

de expertos, empleados y/o clientes. Dichas opiniones, son muy necesarias para anticiparse ante los riesgos, pero tienen la desventaja de ser muy subjetivas y difícilmente medibles con los métodos estadísticos tradicionales. Algunas entidades han venido trabajando con metodologías que involucran matemática borrosa en sus análisis, pero su implementación es muy limitada y hay mucho camino por recorrer en el desarrollo de modelos que permitan medir y mitigar el impacto del riesgo operacional. Desde esta perspectiva, es importante desarrollar nuevos proyectos de investigación para aportar nuevas metodologías y puntos de vista en este tema. En esta tesis se tratan diferentes modelos de toma de decisiones tanto del riesgo operacional como de otros problemas del sector asegurador. La razón de tratar problemas de seguros radica en la oportunidad del investigador de trabajar en otros proyectos de investigación que aportan elementos metodológicos que tienen gran aplicabilidad en las decisiones para gestionar diferentes tipos de riesgo en las organizaciones.

### **1.3 Objetivos**

A través de este proyecto se pretende hacer nuevas aportaciones a los modelos existentes para la toma de decisiones en la gestión del riesgo operacional y problemas del sector asegurador, utilizando principalmente métodos de lógica de difusa, para lo cual se plantean los siguientes objetivos:

- Realizar un análisis cuantitativo sobre el estado de la cuestión, en cuanto a cantidad de publicaciones, principales revistas y autores, artículos más citados, para identificar tendencias y principales fuentes de información, como también una revisión de la literatura sobre los conceptos básicos de los operadores OWA y el riesgo operacional.

Con este objetivo se pretende mostrar información cuantitativa relevante sobre la evolución y tendencia sobre los temas que se incluyen en la tesis principalmente riesgo operacional y operadores OWA para conocer la productividad y la influencia del tema, a partir de las publicaciones indexadas en la *Web of Science*. También se muestra un marco conceptual sobre los operadores OWA y el riesgo operacional.

- Contribuir a la literatura actual con nuevas perspectivas sobre el tema aplicando técnicas de lógica difusa para el desarrollo de nuevos modelos para la toma de decisiones en la gestión del riesgo operacional.

Una de las motivaciones principales de esta tesis es aportar desde el campo de la lógica difusa nuevos modelos para tomar decisiones en la gestión del riesgo operacional, En este caso, las aportaciones corresponden a la utilización de la teoría de expertones, los operadores OWA, la teoría de la utilidad multiatributo, la teoría de expertones, conjuntos borrosos, etiquetas lingüísticas y las distancias de Hamming y Minkowski, aplicados en el caso del riesgo operacional al análisis de causalidad multiexperto y en la priorización de riesgos. Sin embargo, como se explicó anteriormente también se presentan otros modelos aplicados a problemas del sector asegurador como: tarificación, decisiones de reaseguro y selección de proveedores.

- Publicar artículos en revista indexadas o de reconocida calidad y presentar ponencias en congresos de áreas de conocimiento afín para difundir las contribuciones de la tesis.

Los resultados de los modelos desarrollados en el anterior objetivo se presentan como contribuciones dos artículos publicados en *Journal of Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research* y *Cybernetics and Systems Journal*, un artículo aceptado en *Kybernetes: The International Journal of Cybernetics, Systems and Management Sciences* un artículo en evaluación en *Group Decision and Negotiation Journal*, dos documentos de trabajo pendientes de envío y un paper presentado *International Conference on Modeling and Simulation in Engineering, Economics and Management (MS'2016)* - Santiago de Chile (Chile), Enero 20 – 22, 2016

## **1.4 Metodología**

En la presente tesis doctoral se han utilizado diferentes técnicas de lógica difusa que permiten desarrollar modelos para gestionar los problemas de información, cuando esta es vaga, incompleta o imprecisa. Las técnicas más relevantes utilizadas son:

### **1.4.1 Teoría de los Efectos Olvidados**

El modelo de los efectos olvidados (Kaufmann & Gil Aluja, 1988) permite establecer un sistema para obtener todas las relaciones directas e indirectas que asocian diferentes conjuntos de causas y efectos. La importancia de este modelo, radica en el tratamiento de las relaciones de incidencia en diferentes niveles, recuperando aquellas relaciones que

inicialmente no fueron identificadas, por tener un nivel relacional débil o nulo. Estas conexiones entre causas y efectos se pueden establecer descubriendo aquellas incidencias entre elementos que inicialmente podrían no haberse considerado y que se denominan “efectos olvidados”. Este modelo ha sido aplicado por diferentes investigadores en el campo de la lógica difusa en temas como: sector salud (Martorell-Cunill et. al., 2014), emprendimiento (Maqueda et. al., 2013) responsabilidad social (Vizuete et. al., 2013) crecimiento económico ( Gil-Lafuente et. al., 2015).

#### **1.4.2 Agregación de Información con Operadores OWA**

La agregación de información es un factor fundamental para el desarrollo de modelos de toma de decisiones y poder obtener valores representativos de las alternativas evaluadas. Dichas decisiones generalmente suceden bajo incertidumbre, haciendo necesario utilizar diferentes criterios, escenarios u opiniones de expertos para valorar las alternativas en función de determinados objetivos y resultados esperados. El operador OWA propuesto por Yager (1988), es una de las técnicas más completas para obtener un valor representativo a partir de diferentes datos. Una característica importante de estos operadores OWA es que es posible incluir la actitud optimista o pesimista de los decisores o analistas a través de un vector de ponderación que permite sobrevalorar o infravalorar la información, según sea el caso. La esencia de estos operadores está en el reordenamiento de los datos para obtener un valor representativo que varía entre el mínimo para el caso más pesimista y el máximo para el caso más optimista. Por otro lado, es importante destacar la gran variedad de casos que se pueden explorar con diferentes familias del vector de ponderación (Yager, 1993) y la combinación de otras técnicas de lógica difusa y modelos de decisión, a través de sus extensiones (Merigó, 2008). También se puede distinguir según el reordenamiento de los argumentos en forma descendente o ascendente se obtendrá *Descending OWA (DOWA) operator* o el *Ascending OWA (AOWA) operator* y cabe destacar que cumple con las propiedades de conmutatividad, monotonía, limitación e idempotencia (Yager, 1988). En la tabla 1-1 se muestran las diferentes herramientas utilizadas en cada una de las contribuciones de esta investigación.

*Tabla 1-1 Metodología Aplicada en las Contribuciones*

| <b>Contribución</b>  | <b>Metodología</b>   | <b>Aplicación</b>   |
|--|--|---|
| Modelo de Causalidad Multiexperto con Operadores OWA.  | Teoría de efectos olvidados (Kaufmann & Gil Aluja, 1988).<br>Operadores OWA (Yager, 1993; Yager, 1988).  | Relaciones de incidencia entre causas y tipos de pérdidas del riesgo operacional. |
| Aplicación de la Teoría de los Efectos Olvidados al Análisis Cualitativo del Riesgo Operacional.           | Teoría de efectos olvidados (Kaufmann & Gil Aluja, 1988).  | Relaciones de incidencia entre causas y tipos de pérdidas del riesgo operacional. |
| Operadores de Agregación OWA Inducidos y Generalizados en la Teoría de la Utilidad Multiatributo.          | MAUT (Collins, et. al., 2006; Keeney, and Raiffa, 1976).<br>Operador OWA (Yager, 1988; Yager, 1993).<br>Operador IOWA (Yager & Filev, 1999).<br>Operador GOWA (Yager, 2004).       | Priorización de tipos de riesgos operacionales.                                   |
| Decisiones en Reaseguros con Operadores OWA Inducidos y Distancias de Minkowski                            | Conjuntos borrosos (Zadeh, 1965).<br>Operador OWA (Yager, 1988; Yager, 1993).<br>Operador IMOWAD (Merigo & Casanovas, 2011).<br>Operador MPOWAD (Merigo, et. al., 2013).           | Decisiones de nivel de reaseguro  |
| Modelo de Decisión Multiexperto y Multicriterio con el Operador OWA de Distancias Inducido Probabilístico. | Medidas de distancias (Gil Aluja, 1999).<br>Operador OWA (Yager, 1988; Yager, 1993).<br>Operador OWAD (Merigó & Gil-Lafuente, 2010).<br>Operador IOWAD (Merigo & Casanovas, 2011). | Selección de proveedores de seguros.  |
| Modelo de Decisiones de Precios en Seguros con Lógica Difusa y Operadores OWA.                             | Operador OWA (Yager, 1988; Yager, 1993).<br>Operador UOWA (Xu & Da, 2002a).<br>Operador UPOWA (Merigo & Wei, 2011).  | Selección de nivel tarifa de prima comercial de seguros con                       |



| <b>Contribución</b>  | <b>Metodología</b>  | <b>Aplicación</b>   |
|--|---|---|
|  | Operador Heavy OWA (Yager, 2002)  | diferentes escenarios de la economía  |
| Herramientas de Lógica Difusa para una Estrategia de Precios en el Sector Asegurador | Operador OWA (Yager, 1988; Yager, 1993)<br>Operador FGPOWA (Merigó, Casanovas, & Xu, 2014)<br>Operador UGPWA (Merigó, Casanovas, & Yang, 2014)<br>Operador ILPOWA (Merigó, Casanovas, & Palacios-Marqués, 2014) | Evaluación de estrategia de precios en seguros con herramientas de lógica difusa. |

Fuente: elaboración propia.

## 1.5 Estructura

Esta tesis está estructurada en 9 capítulos que se agrupan en dos partes: la primera parte preliminar comprende los dos primeros capítulos con la introducción y el estado de la cuestión; y en la segunda parte se presentan las contribuciones en forma de artículos publicados o en proceso de publicación, finalizando con las conclusiones y futuras líneas de investigación. A continuación, se resume el contenido de cada uno de los capítulos.

En el capítulo 1 se presenta la introducción como parte preliminar de la investigación, incluyendo la presentación, justificación, metodología y estructura de la tesis.

En el capítulo 2 se presenta un estado de la cuestión, a partir de un análisis bibliométrico de las publicaciones en el *Web of Science* de los operadores de agregación OWA y la gestión del riesgo operacional. Dicho análisis, se presenta con el fin de mostrar información relevante de la evolución, tendencias y productividad de ambos temas. La segunda parte de este capítulo muestra conceptos teóricos importantes sobre los operadores OWA y el riesgo operacional.

En el capítulo 3 se presenta un modelo multiexperto de relaciones de causalidad utilizando el operador OWA. En dicho modelo se combina el operador OWA y la teoría de efectos olvidados para analizar información sobre causas y efectos del riesgo operacional. Este artículo está aceptado para publicación en *Kybernetes: The International Journal of Cybernetics, Systems and Management Sciences* (factor de impacto JCR 2016: 0.811).

En el capítulo 4 se presenta un nuevo modelo de decisión que comprende la teoría de la utilidad multiatributo, variables de inducción y el operador OWA. Como resultado se propone un nuevo operador denominado *induced generalized OWA multi-attribute utility theory generalized (IGOWA-MAUT) operator*, con una aplicación ilustrativa de priorización de riesgos. Este capítulo es un documento de trabajo para enviar a publicación.

En el capítulo 5 se presenta un modelo de toma de decisiones multicriterio aplicado a reaseguros. Dicho modelo incluye el operador OWA con medidas de distancia, variables inducidas y conjuntos borrosos. Este artículo está publicado en *Cybernetics and Systems Journal* (factor de impacto JCR 2016: 1.434).

En el capítulo 6 se presenta un modelo de toma de decisiones multicriterio para consensuar la opinión de un grupo de expertos aplicado a la selección de proveedores. En este caso se presenta el operador denominado *multi-person multi-criteria induced ordered weighted average distance (MP-MC-IOWAD) operator*. Este artículo está en proceso de evaluación en *Group Decision and Negotiation Journal* (factor de impacto JCR 2016: 1.688)

En el capítulo 7 se presenta un modelo de toma de decisiones aplicado a un problema de estrategia de precios en seguros. Este método combina en el análisis, diferentes operadores OWA con números intervalo. Este artículo esta publicado en *Journal of Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research* (factor de impacto JCR 2016: 0.299).

En el capítulo 8 se evalúa la aplicabilidad de los operadores: *Fuzzy Generalized Probabilistic OWA (FGPOWA) operator*, *Uncertain Generalized Probabilistic Weighted Averaging (UGPWA) operator* e *Induced Linguistic Probabilistic Ordered Weighted Averaging (ILPOWA) operator*. En este caso se utiliza un problema de estrategia de precios para evaluar las ventajas y desventajas de utilizar cada uno de los operadores. Este capítulo es un documento de trabajo para enviar a publicación.

En el capítulo 9 se presentan las conclusiones de esta investigación y las futuras líneas de investigación.

Finalmente, en el apartado de anexos se presentan otras aportaciones relevantes que el doctorando ha llevado a cabo en la tesis y otros proyectos de investigación.

**Capítulo 2**  
**Estado de la Cuestión**

## **2.1. Análisis Bibliométrico**

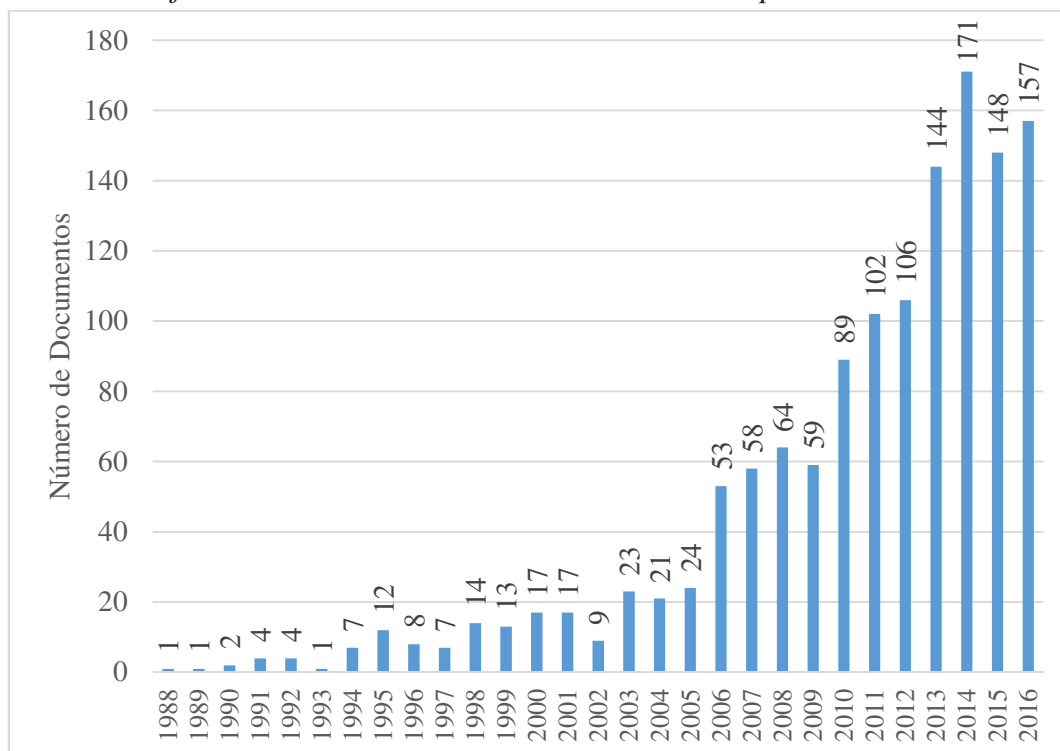
El análisis de las publicaciones científicas constituye una parte fundamental en el proceso de investigación, para conocer de forma genérica la evolución y el impacto de las publicaciones en los últimos años. Para este caso, el análisis se llevó a cabo, a partir de las publicaciones en la *Web of Science* por su reconocido prestigio en cuanto a la cantidad y calidad de las publicaciones que contiene. Sin embargo, es importante notar en los resultados, la existencia de posibles errores en algunos documentos que contengan las palabras clave de la búsqueda, pero que su contenido no se corresponda con el tema de estudio. A pesar de que en esta tesis se tratan diferentes técnicas de la lógica difusa, el análisis estará enfocado en los operadores OWA y el riesgo operacional, por ser los temas más relevantes de la tesis.

### **2.1.1. Análisis del Operador OWA**

En el proceso de búsqueda se ha enfocado en las palabras clave “*ordered weighted averaging*” o “OWA” para el período 1988 – 2016 obteniéndose 1935 registros. Posteriormente se eligieron por su importancia 1336 registros (1325 artículo, 7 revisiones, 2 cartas y 2 notas). A partir de estos datos se presentan los resultados del análisis.

El gráfico 2.1 muestra el número de publicaciones por año de artículos relacionados con el operador OWA. Como se puede notar, desde que Yager (1988) presentó el primer artículo, la evolución del tema ha sido muy positiva con una tendencia creciente, alcanzando un máximo de 171 artículos en 2014 y manteniéndose por encima de los 100 artículos en los últimos 6 años.

Gráfico 2-1 Evolución de Publicaciones del Operador OWA



Fuente: elaboración propia a partir de *Web of Science*

En cuanto, a las revistas con mayor número de publicaciones del operador OWA, se puede destacar en la tabla 2-1, que la mayoría las revistas pertenecen al área de ciencias de la computación y específicamente al campo de la lógica difusa.

Tabla 2-1 Revistas con más Publicaciones del Operador OWA

| Revista  | Documentos | Participación (%) |
|--|------------|-------------------|
| International Journal of Intelligent Systems                               | 108        | 8,09%             |
| Fuzzy Sets and Systems   | 82         | 6,14%             |
| Information Sciences   | 66         | 4,94%             |
| International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge Based Systems | 62         | 4,64%             |
| Expert Systems with Applications   | 58         | 4,34%             |
| Journal of Intelligent Fuzzy Systems                                       | 58         | 4,34%             |
| IEEE Transactions on Fuzzy Systems   | 49         | 3,67%             |
| Knowledge Based Systems  | 40         | 3,00%             |
| Computers Industrial Engineering   | 34         | 2,55%             |
| International Journal of Approximate Reasoning                             | 28         | 2,10%             |

Fuente: elaboración propia a partir de *Web of Science*

La tabla 2-2 muestra los 10 autores con mayor número de publicaciones del operador OWA, En esta tabla se puede destacar que Yager, R.R., además de dar a conocer el concepto del operador OWA, sigue siendo el autor con mayor número de publicaciones. En segundo lugar, se encuentra Merigó J.M. (director de esta tesis doctoral) con 73 publicaciones.

*Tabla 2-2 Autores con más Publicaciones del Operador OWA*

| <b>Autor</b>       | <b>Documentos</b> | <b>Participación (%)</b> |
|--------------------|-------------------|--------------------------|
| Yager, R.R.        | 89                | 6,38%                    |
| Merigó, J.M.       | 73                | 5,23%                    |
| Xu, Z.S.           | 64                | 4,59%                    |
| Chen, H.Y.         | 41                | 2,94%                    |
| Herrera-Viedma, E. | 40                | 2,87%                    |
| Zhou, L.G.         | 39                | 2,80%                    |
| Liu, X.W.          | 38                | 2,72%                    |
| Zeng, S.Z.         | 31                | 2,22%                    |
| Chen, X.H.         | 26                | 1,86%                    |
| Chiclana, F.       | 24                | 1,72%                    |

Fuente: elaboración propia a partir de *Web of Science*

Después de China, España es el segundo país con mayor número de artículos publicados, con una participación del 16% sobre el total de publicaciones.

*Tabla 2-3 Volumen de Publicaciones del Operador OWA por Países*

| <b>País</b>             | <b>Documentos</b> | <b>Participación (%)</b> |
|-------------------------|-------------------|--------------------------|
| República Popular China | 522               | 37%                      |
| España                  | 223               | 16%                      |
| Estados Unidos          | 182               | 13%                      |
| Reino Unido             | 71                | 5%                       |
| Irán                    | 68                | 5%                       |
| Taiwán                  | 55                | 4%                       |
| Canadá                  | 50                | 4%                       |
| Italia                  | 48                | 3%                       |
| India                   | 34                | 2%                       |
| Polonia                 | 33                | 2%                       |

Fuente: elaboración propia a partir de *Web of Science*

En cuanto las instituciones con mayor presencia en este campo de investigación, se hace notar la presencia de dos universidades españolas (Universidad de Barcelona y Universidad de Granada) entre las 10 con mayor número de publicaciones como se muestra en la tabla 2-4.

*Tabla 2-4 Volumen de Publicaciones del Operador OWA por Institución*

| <b>Institución</b>                         | <b>Documentos</b> | <b>Participación (%)</b> |
|--|-------------------|--------------------------|
| IONA College                               | 92                | 6,59%                    |
| Southeast University China                 | 73                | 5,23%                    |
| University of Barcelona                    | 62                | 4,44%                    |
| University of Granada                      | 52                | 3,73%                    |
| ANHUI University                           | 42                | 3,01%                    |
| Central South University                   | 34                | 2,44%                    |
| Slovak University of Technology Bratislava | 27                | 1,94%                    |
| University of Manchester                   | 27                | 1,94%                    |
| Zhejiang Wanli University                  | 27                | 1,94%                    |
| Zhejiang University of Finance Economics   | 26                | 1,86%                    |

Fuente: elaboración propia a partir de *Web of Science*

En la tabla 2-5 se muestran los 10 artículos más importantes de acuerdo al número de citas recibidas.



Tabla 2-5 Artículos más Citados del Operador OWA

| Documento  | Año  | Autores   | Revista   | Citas |
|--|------|---|---|-------|
| On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision-making   | 1988 | Yager, R.R.   | IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics                    | 3012  |
| Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information                                       | 2000 | Herrera, F.<br>Herrera-Viedma, E.                   | Fuzzy Sets and Systems  | 711   |
| Families of OWA Operators  | 1993 | Yager, R.R.   | Fuzzy Sets and Systems  | 641   |
| Intuitionistic fuzzy aggregation operators   | 2007 | Xu, Z.S.  | IEEE Transactions on Fuzzy Systems                                  | 589   |
| Quantifier guided aggregation using OWA operators  | 1996 | Yager, R.R.   | International Journal of Intelligent Systems                        | 523   |
| Induced ordered weighted averaging operators   | 1999 | Yager R.R.<br>Filev, D.P.                           | IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Part B-Cybernetics | 452   |
| Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations                    | 1998 | Chiclana, F.<br>Herrera, F.<br>Herrera-Viedma, E.   | Fuzzy Sets and Systems  | 450   |
| A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranular hierarchical linguistic contexts in multi-expert decision-making | 2001 | Herrera, F.<br>Martinez, L.                         | IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Part B-Cybernetics | 437   |
| An overview of operators for aggregating information   | 2003 | Xu, Z.S.<br>Da, Q.L.                                | International Journal of Intelligent Systems                        | 436   |
| Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators  | 1996 | Herrera, F.<br>Herrera-Viedma, E.<br>Verdegay, J.L. | Fuzzy Sets and Systems  | 385   |

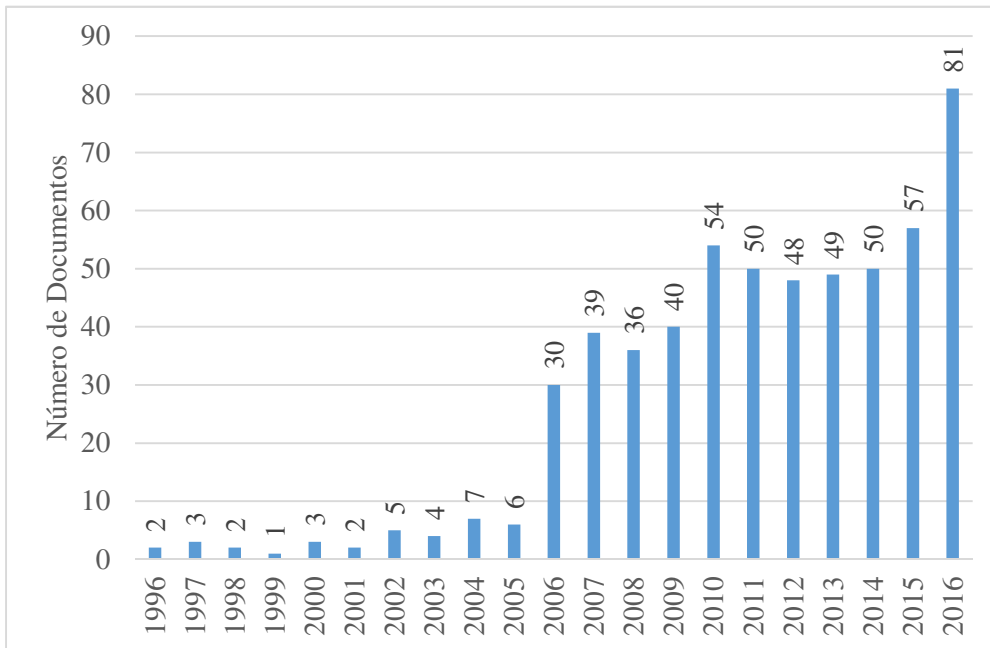
Fuente: elaboración propia a partir de *Web of Science*

### 2.1.2. Análisis del Riesgo Operacional

En el proceso de búsqueda se ha enfocado en las palabras clave “*operational risk*” para el período 1995 – 2016 obteniéndose 1130 registros. Posteriormente se seleccionaron los artículos de las áreas de economía, empresa, investigación de operaciones, ciencias de la computación, matemática y estadística, excluyéndose los artículos del área de medicina y salud. Finalmente, el análisis se hace sobre 569 documentos (562 artículos y 7 revisiones). A partir de estos datos se presentan los resultados del análisis.

En el gráfico 2.2 se muestra la evolución de las publicaciones en los últimos años. En este caso, se puede observar que a finales de los noventa y principios de los años dos mil se publican los primeros artículos sobre el tema. Sin embargo, después del acuerdo de Basilea II en el 2004, el interés por este tema ha sido muy significativo, alcanzando el máximo de 81 artículos en 2016.

Gráfico 2-2 Evolución de Publicaciones de Riesgo Operacional



Fuente: elaboración propia a partir de *Web of Science*

La tabla 2-6 presenta las diez revistas con mayor número de publicaciones de riesgo operacional. En este caso, se destaca el *Journal of Operational Risk*, con el 26.89% de los artículos. Siendo esta revista la única especializada en el tema con una gran distancia en número de publicaciones frente a otras revistas del campo.

*Tabla 2-6 Revistas con más Publicaciones de Riesgo Operacional*

| <b>Revista</b>                                       | <b>Documentos</b> | <b>Participación (%)</b> |
|--|-------------------|--------------------------|
| Journal of Operational Risk                          | 153               | 26,89%                   |
| Journal of Banking Finance                           | 17                | 2,99%                    |
| Safety Science                                       | 9                 | 1,58%                    |
| BT Technology Journal                                | 8                 | 1,41%                    |
| Insurance Mathematics Economics                      | 8                 | 1,41%                    |
| Journal of Loss Prevention in The Process Industries | 7                 | 1,23%                    |
| Journal of Risk And Insurance                        | 7                 | 1,23%                    |
| Methodology and Computing in Applied Probability     | 6                 | 1,05%                    |
| Quantitative Finance                                 | 6                 | 1,05%                    |
| Reliability Engineering System Safety                | 6                 | 1,05%                    |

Fuente: elaboración propia a partir de *Web of Science*

El número de publicaciones por autor, como muestra la tabla 2-7 solamente llegan hasta un máximo de 15 publicados por Embrechts, P. Esto como consecuencia de que el tema es reciente.

*Tabla 2-7 Autores con más Publicaciones de Riesgo Operacional*

| <b>Autor</b>     | <b>Documentos</b> | <b>Participación (%)</b> |
|------------------|-------------------|--------------------------|
| Embrechts, P.    | 15                | 2,64%                    |
| Li, J.P.         | 14                | 2,46%                    |
| Shevchenko, P.V. | 14                | 2,46%                    |
| Gao, L.J.        | 13                | 2,28%                    |
| Feng, J.C.       | 10                | 1,76%                    |
| Peters, G.W.     | 9                 | 1,58%                    |
| Giudici, P.      | 8                 | 1,41%                    |
| Mcconnell, P.    | 8                 | 1,41%                    |
| Chernobai, A.    | 7                 | 1,23%                    |
| Cope, E.W.       | 7                 | 1,23%                    |
| Michalski, G.    | 7                 | 1,23%                    |
| Moosa, I.        | 7                 | 1,23%                    |
| Nielsen, J.P.    | 7                 | 1,23%                    |
| Teply, P.        | 7                 | 1,23%                    |
| Vinnem, J.E.     | 7                 | 1,23%                    |

Fuente: elaboración propia a partir de *Web of Science*

La tabla 2-8 muestra los diez primeros países por número de publicaciones del riesgo operacional. En esta clasificación España ocupa el noveno lugar con 23 publicaciones.

*Tabla 2-8 Volumen de Publicaciones de Riesgo Operacional por Países*

| <b>País</b>             | <b>Documentos</b> | <b>Participación (%)</b> |
|-------------------------|-------------------|--------------------------|
| Estados Unidos          | 147               | 25,83%                   |
| Inglaterra              | 68                | 11,95%                   |
| Australia               | 54                | 9,49%                    |
| República Popular China | 48                | 8,44%                    |
| Alemania                | 44                | 7,73%                    |
| Italia                  | 44                | 7,73%                    |
| Suiza                   | 39                | 6,85%                    |
| Canadá                  | 35                | 6,15%                    |
| España                  | 23                | 4,04%                    |
| Francia                 | 17                | 2,99%                    |

Fuente: elaboración propia a partir de *Web of Science*

La tabla 2-9 muestra las 10 principales instituciones por número de publicaciones de riesgo operacional.

*Tabla 2-9 Volumen de Publicaciones de Riesgo Operacional por Institución*

| <b>Institución</b>   | <b>Documentos</b> | <b>Participación (%)</b> |
|--|-------------------|--------------------------|
| Swiss Federal Institute of Technology Zurich                   | 23                | 4,04%                    |
| Commonwealth Scientific Industrial Research Organisation CSIRO | 14                | 2,46%                    |
| University of London   | 12                | 2,11%                    |
| International Business Machines IBM                            | 11                | 1,93%                    |
| University of Pavia  | 11                | 1,93%                    |
| Macquarie University   | 9                 | 1,58%                    |
| Monash University  | 9                 | 1,58%                    |
| North West University South Africa                             | 9                 | 1,58%                    |
| Universitetet I Stavanger                                      | 9                 | 1,58%                    |
| University of California System                                | 9                 | 1,58%                    |

Fuente: elaboración propia a partir de *Web of Science*

La tabla 2-10 muestra los diez artículos más citados de riesgo operacional.

Tabla 2-10 Artículos más Citados de Riesgo Operacional

| Artículo   | Año  | Autores   | Revista  | Citas |
|--|------|---|--|-------|
| Getting offshoring right   | 2005 | Aron, R.<br>Singh, J. V.  | Harvard Business<br>Review                                 | 113   |
| Risk aversion in inventory management  | 2007 | Chen, Xin; Sim, Melvyn; Simchi-Levi, David; Sun, Peng                       | Operations Research  | 99    |
| A general approach to integrated risk management with skewed, fat-tailed risks                             | 2006 | Rosenberg, JV; Schuermann, T  | Journal of Financial<br>Economics                          | 91    |
| Quantitative models for operational risk: Extremes, dependence and aggregation                             | 2006 | Chavez-Demoulin, V.; Embrechts, P.; Neslehova, J.                           | Journal of Banking &<br>Finance                            | 80    |
| Infinite-mean models and the LDA for operational risk  | 2006 | Neslehova, Johanna; Embrechts, Paul; Chavez-Demoulin, Valerie               | Journal of Operational<br>Risk                             | 73    |
| Barrier and operational risk analysis of hydrocarbon releases (BORA-Release) Part I. Method description    | 2006 | Aven, Terje; Sklet, Snorre; Vinnem, Jan Erik                                | Journal of Hazardous<br>Materials                          | 60    |
| Operational risk assessment of chemical industries by exploiting accident databases                        | 2007 | Meel, A.; O'Neill, L. M.; Levin, J. H.; Seider, W. D.; Oktem, U.; Keren, N. | Journal of Loss<br>Prevention In The<br>Process Industries | 58    |
| The market value impact of operational loss events for US banks and insurers                               | 2006 | Cummins, J. David; Lewis, Christopher M.; Wei, Ran                          | Journal of Banking &<br>Finance                            | 54    |
| Model uncertainty and VaR aggregation  | 2013 | Embrechts, Paul; Puccetti, Giovanni; Rueschendorf, Ludger                   | Journal of Banking &<br>Finance                            | 53    |
| Optimal Allocation of Energy Storage System for Risk Mitigation of DISCOs With High Renewable Penetrations | 2014 | Zheng, Yu; Dong, Zhao Yang; Luo, Feng Ji; Meng, Ke; Qiu, Jing; Wong, Kit Po | IEEE Transactions on<br>Power Systems                      | 52    |

Fuente: elaboración propia a partir de *Web of Science*

## 2.2. Operadores de Agregación OWA

El operador OWA fue propuesto por Yager (1988), como un instrumento para agregar información. Con este operador se generalizan los criterios clásicos de decisión en un único modelo, siendo los criterios: optimista, pesimista, de Hurwicz y de Laplace casos particulares del operador OWA

**Definición 1:** un operador OWA se define como una función de dimensión  $n$   $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  a la que se asocia un vector  $W$  de dimensión  $n$   $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ , que cumple las siguientes condiciones:

$$w_j \in [0,1].$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot b_j \quad (1)$$

Donde  $b_j$ , es el  $j$ -ésimo más grande de los  $a_j$ , o sea, que  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ . La esencia de los OWA es el reordenamiento de los elementos o argumentos, haciendo que en la agregación los  $a_j$  no estén asociados con una ponderación  $w_j$ , pero, los  $w_j$  si estarán asociados con la posición en el orden para la agregación.

Ejemplo: si se tiene:

$$W = [0.5, 0.3, 0.1, 0.1]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f(0.3, 0.2, 1, 0.6) &= (0.5)(1) + (0.3)(0.6) + (0.1)(0.3) + (0.1)(0.2) \\ &= 0.73 \end{aligned}$$

Algunas de las propiedades más importantes son:

Propiedad 1. (Conmutatividad): la evaluación es igual para cualquier permutación de los elementos, es decir, si  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  son los argumentos a agregar y  $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$  es una permutación de los mismos, se cumple que:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = F(d_1, d_2, \dots, d_n) \quad (2)$$

Propiedad 2. (Monotonía): si  $a_i$  y  $c_i$  son elementos a agregar con  $c_i \leq a_i$ , entonces:

$$F(c_1, c_2, \dots, c_n) \leq F(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (3)$$

Propiedad 3. (Delimitación): existen unos límites superior e inferior para los operadores OWA, de modo que:

$$\text{Min}(a_i) \leq F(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \text{Max}(a_i) \quad (4)$$

Propiedad 4. (Idempotencia): si  $a_i = a$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  se tiene que:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = a \quad (5)$$

Obteniéndose siempre el mismo resultado.

También existen varias medidas importantes que caracterizan un vector de pesos (Yager, 1988; Yager, 1996a):

La primera de ellas denominada dispersión o entropía, se define así:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^n w_j \ln w_j \quad (6)$$

De modo que si  $w_j = 1$  para cualquier  $j$ , entonces  $H(W) = 0$ , indicando que la información utilizada es mínima y si  $w_j = \frac{1}{n}$  para todo  $j$ , se tiene la máxima entropía de dispersión.

La segunda medida está relacionada con el carácter actitudinal del decisor y se define así:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^n w_j \left( \frac{n-j}{n-1} \right) \quad (7)$$

En este caso se tiene que:

$\alpha = 1$ , para el criterio optimista.

$\alpha = 0$ , para el criterio pesimista.

$\alpha = 0.5$ , para el criterio de Laplace.

La tercera medida conocida como *Balance Operator* establece la preferencia hacia valores pesimistas u optimistas. Se define así:

$$\text{Bal}(W) = \sum_{j=1}^n \frac{(n+1-2j)}{(n-1)} w_j \quad (8)$$

$Bal(W) \in [0,1]$ , de modo que:

$Bal(W) = 1$ , para el criterio optimista.

$Bal(W) = -1$ , para el criterio pesimista.

$Bal(W) = 0$ , para el criterio de Laplace.

La cuarta medida determina el grado de divergencia del vector  $W$  y se define así:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^n w_j \left( \frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \quad (9)$$

Esta medida se utiliza cuando  $H(W)$  y  $\alpha(W)$  resultan incompletos, siendo  $Div(W) = 0$  para el criterio optimista y pesimista.

Operadores de Agregación *Ascending OWA (AOWA)*

En el caso de las reordenaciones, es importante diferenciar que estas se pueden hacer de forma descendente utilizándose el *Descending OWA (DOWA) operator* o ascendente con el *Ascending OWA (AOWA) operator* (Yager, 1992). El *DOWA* es el mismo *OWA* explicado anteriormente.

Definición 2: el operador *AOWA* se define como una función de dimensión  $n$ ,  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  a la que se asocia un vector  $W$  de dimensión  $n$   $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ , que cumple las siguientes condiciones:

$$w_j \in [0,1].$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot b_j \quad (10)$$

Donde  $b_j$ , es el  $j$ -ésimo más pequeño de los  $a_i$ , o sea, que  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ , diferenciándose así de los *OWA*, donde  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ .

Las propiedades de conmutatividad, monotonía, delimitación e idempotencia de los *OWA* explicadas anteriormente, también se cumplen para los *AOWA*.

En cuanto a las medidas que caracterizan el vector de pesos en los *AOWA* tenemos:



En la dispersión o entropía:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^n w_j \ln w_j \quad (11)$$

Obteniéndose el mismo resultado del OWA, aunque la ordenación sea diferente.

En el carácter actitudinal del decisor:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^n w_j \left( \frac{n-j}{n-1} \right) \quad (12)$$

Se tiene que:

$\alpha = 1$ , para el criterio optimista.

$\alpha = 0$ , para el criterio pesimista.

$\alpha = 0.5$ , para el criterio de Laplace.

En el Balance Operator:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^n \frac{(n+1-2j)}{(n-1)} w_j \quad (13)$$

Se tiene que:

$Bal(W) = 1$ , para el criterio optimista.

$Bal(W) = -1$ , para el criterio pesimista.

$Bal(W) = 0$ , para el criterio de Laplace.

En el grado de divergencia del vector  $W$ :

$$Div(W) = \sum_{j=1}^n w_j \left( \frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \quad (14)$$

$Div(W) = 0$ , tanto para el criterio optimista como pesimista.

### 2.2.1. Criterios de Decisión Clásicos

En la teoría de la decisión existen varios criterios que se han utilizado tradicionalmente para elegir entre una u otra alternativa en situaciones de incertidumbre en las que además desconocerse el resultado final no es posible predecir su probabilidad objetiva. Algunos de estos criterios son:

Criterio Optimista: en este caso el decisor considera que para cualquier decisión la situación será la más favorable, también se denomina Criterio

Maximax, donde la mejor alternativa es la que ofrezca el mejor resultado posible.

Criterio Pesimista: en este supuesto el decisor considera que la situación será la menos favorable, también conocido como Criterio Minimax, en el que la decisión óptima es elegir la menor perdida entre las mayores pérdidas.

Criterio de Laplace: se basa en el principio de la razón insuficiente, ya que, al no tener información sobre la probabilidad de ocurrencia de ninguno de los estados, se considera que todos tienen la misma probabilidad. De modo que para n estados se le asignaría una probabilidad de 1/n a cada uno.

Criterio de Hurwicz: en este caso se establece una suma ponderada entre los extremos optimista y pesimista, estableciendo un punto intermedio entre los criterios Maximin y Minimax, donde el mejor resultado se pondera con coeficiente de optimismo  $\alpha$  y el peor con un coeficiente de pesimismo  $(1-\alpha)$ .

En la tabla 3.1 se puede ver los anteriores criterios como casos particulares los operadores OWA y AOWA:

*Tabla 2-11 Criterios de Decisión Clásicos*

| Criterio  | OWA   | AOWA  |
|-----------|---|---|
| Pesimista | $w_n = 1$ y $w_j = 0, \forall j \neq n$<br>$f(a_1 \dots a_n) = \text{Min}\{a_j\}$   | $w_1 = 1$ y $w_j = 0, \forall j \neq 1$<br>$f(a_1 \dots a_n) = \text{Min}\{a_j\}$   |
| Optimista | $w_1 = 1$ y $w_j = 0, \forall j \neq 1$<br>$f(a_1 \dots a_n) = \text{Max}\{a_j\}$   | $w_n = 1$ y $w_j = 0, \forall j \neq n$<br>$f(a_1 \dots a_n) = \text{Max}\{a_j\}$   |
| Laplace   | $w_j = \frac{1}{n}, \forall j$<br>$f(a_1 \dots a_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$   | $w_j = \frac{1}{n}, \forall j$<br>$f(a_1 \dots a_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$   |
| Hurwicz   | $w_1 = \alpha; w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0, \forall j \neq 1, n$<br>$f(a_1 \dots a_n) = \alpha \text{Max}\{a_j\} + (1 - \alpha) \text{Min } a_j$ | $w_1 = 1 - \alpha; w_n = \alpha$ , y $w_j = 0, \forall j \neq 1, n$<br>$f(a_1 \dots a_n) = (1 - \alpha) \text{Min } a_j + \alpha \text{Max}\{a_j\}$ |

Fuente: elaboración propia.

### 2.2.2. Familias de Operadores OWA

Una de las principales características de los operadores OWA es la gran flexibilidad que para obtener el vector de pesos  $W$  que permite hacer la agregación de los argumentos. Algunas de las familias más conocidas son:

#### ME-OWA

Los operadores de máxima entropía ME OWA, definidos por O'Hagan (1990), se calcula a través de un valor  $\alpha$  (nivel de optimismo) que maximice la dispersión. Se define como:

$$\text{Maximizar}(-\sum_{j=1}^n w_j \ln w_j) \quad (15)$$

Sujeto a:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (n-j)w_j = \alpha(W) = \alpha \quad \alpha \in [0,1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1,$$

$$w_j \in [0,1] \quad j = 1, 2, \dots, n$$

#### Step-OWA

Los operadores Step OWA o tipo escalón (Yager, 1993), proporcionan una ponderación única diferente de cero y se definen así:

$$F_{step(k)}(a_1 \dots a_n) = b_k \quad (16)$$

Con:

$$w_k = 1$$

$$w_j = 0, \forall j \neq k$$

Donde  $b_k$  corresponde al  $k$ -ésimo elemento más grande del conjunto de argumentos  $a_j$ , obteniéndose el máximo si  $k = 1$  y el mínimo si  $k = n$ .

#### Window-OWA

Los operadores *Window OWA* (Yager, 1993), se obtienen a través de  $m$  ponderaciones de idéntico valor  $\frac{1}{m}$  diferentes de cero, que se definen así:

$$F_w(a_1 \dots a_n) = \frac{1}{m} \sum_{j=k}^{k+m-1} b_j \quad (17)$$

Donde,  $k$  y  $m$  son enteros positivos, de modo que  $k + m - 1 \leq n$  y  $k$  es la posición donde comienza el vector no nulo, o sea que:

$$w_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < k \\ \frac{1}{m} & \text{si } k \leq j < k + m \\ 0 & \text{si } j \geq k + m \end{cases} \quad (18)$$

Este operador se convierte en el máximo si  $m = k = 1$ , en el mínimo si  $m = 1, k = n$  y en la media aritmética si  $m = n$  y  $k = 1$ .

#### *Olympic-OWA*

El operador *Olympic OWA* (Yager, 1996b) son otra familia que se define a través de un vector de ponderaciones así:

$$w_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1 \\ \frac{1}{n-2} & \text{si } 2 \leq j < n - 1 \\ 0 & \text{si } j = n \end{cases} \quad (19)$$

En caso de  $n = 3$  o  $n = 4$ , se obtiene la mediana y si  $m = n - 2$  y  $k = 2$ , sería un *Window-OWA*.

#### *S-OWA*

Los operadores *S-OWA* (Yager, 1994) son otra familia que se clasifica en tres tipos: *orlike*, *andlike* y *generalizado*, los cuales se explican a continuación:

Los operadores *S-OWA* tipo *orlike*, definen sus ponderaciones como:

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{n}(1 - \alpha) + \alpha & j = 1 \\ \frac{1}{n}(1 - \alpha) & j = 2, \dots, n \end{cases} \quad (20)$$

Obteniéndose una agregación de la siguiente forma:

$$f_{so}(a_1, \dots, a_n) = \alpha \text{Max}(a_j) + \frac{1}{n}(1 - \alpha) \sum a_i \quad (21)$$

De esta manera se produce un promedio ponderado entre el máximo y la media de los argumentos. Si  $\alpha = 0$  se obtiene la media aritmética y si  $\alpha = 1$  se obtiene el máximo.

Los operadores S-OWA tipo andlike, definen sus ponderaciones como:

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{n}(1 - \beta) & j \neq n \\ \frac{1}{n}(1 - \beta) + \beta & j = n \end{cases} \quad (22)$$

Obteniéndose una agregación de la siguiente forma:

$$f_{SA}(a_1, \dots, a_n) = \beta \text{Min}(a_j) + \frac{1}{n}(1 - \beta) \sum a_j \quad (23)$$

El resultado de este operador genera un promedio entre el mínimo y la media de los argumentos. Si  $\beta=0$  se obtiene la media aritmética y si  $\beta = 1$  se obtiene el mínimo.

El operador S-OWA generalizado se estima combinando las dos familias de operadores  $\alpha$  y  $\beta$  de modo que:

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{n}(1 - (\alpha + \beta) + \alpha) & j = 1 \\ \frac{1}{n}(1 - (\alpha + \beta)) & j \neq 1, n \\ \frac{1}{n}(1 - (\alpha + \beta) + \beta) & j = n \end{cases} \quad (24)$$

Donde,  $\alpha \in [0,1]$  y  $\alpha + \beta \leq 1$

Obteniéndose una agregación de la forma:

$$f_S(a_1, \dots, a_n) = \alpha \text{Max}(a_j) + \beta \text{Min}(a_j) + \frac{1}{n}(1 - (\alpha + \beta)) \sum a_j \quad (25)$$

Cuando  $\alpha + \beta = 1$ , se obtiene el criterio de Hurwicz.

#### *EZ-OWA*

En los operadores *EZ-OWA* (Yager, 2003), se pueden diferenciar dos clases:

La primera define su vector de ponderaciones así:

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{k} & 1 \leq j \leq k \\ 0 & j > k \end{cases} \quad (26)$$

La segunda define su vector de ponderaciones así:

$$w_j = \begin{cases} 0 & 1 \leq j \leq n - k \\ \frac{1}{k} & n - k < j \leq n \end{cases} \quad (26)$$

### 2.3. Introducción a la Gestión del Riesgo Operacional

El Acuerdo de Basilea II<sup>1</sup> elaborado define el riesgo operacional como: “el riesgo de pérdida debido a la inadecuación o a fallos de los procesos, el personal y los sistemas internos o bien a causa de acontecimientos externos” Esta definición incluye el riesgo legal<sup>2</sup>, pero excluye el riesgo estratégico<sup>3</sup> y reputacional<sup>4</sup>.

#### 2.3.1. Metodologías de Estimación del Riesgo Operativo

El pilar I de Basilea II propone tres métodos para el cálculo del capital regulatorio por riesgo operacional (Banco Internacional de Pagos, 2006)

##### 2.3.1.1. Método del Indicador Básico

El Método del Indicador Básico o *The Basic Indicator Approach* BIA (Basilea II, epígrafe 649), es el método más sencillo de los propuestos por el comité y consiste en aplicar un factor  $\alpha$  del 15% sobre el promedio de los ingresos positivos brutos anuales de los últimos tres años, matemáticamente expresado de la siguiente manera:

---

<sup>1</sup> es el segundo de los Acuerdos de Basilea. Dichos acuerdos consisten en recomendaciones sobre la legislación y regulación bancaria y son emitidos por el Comité de supervisión bancaria de Basilea. El propósito de Basilea II, publicado inicialmente en junio de 2004, es la creación de un estándar internacional que sirva de referencia a los reguladores bancarios, con objeto de establecer los requerimientos de capital necesarios para asegurar la protección de las entidades frente a los riesgos financieros y operativos

<sup>2</sup> Riesgo legal: es la posibilidad de ser sancionado, multado u obligado a pagar daños punitivos como resultado de acciones del supervisor o de acuerdos privados entre las partes.

<sup>3</sup> Riesgo estratégico: es la posibilidad de elegir una estrategia errónea que pueda afectar los resultados.

<sup>4</sup> Riesgo reputacional: es la posibilidad de sufrir pérdidas cuando es nombre de la entidad es afectado disminuyendo la confianza en la integridad de la institución.

$$KBIA = \frac{\sum_{i=1}^n GI_i * \alpha}{n} \quad (27)$$

Donde:

$KBIA$  = la exigencia de capital en el Método del Indicador Básico.

$GI_i$  = Ingresos brutos anuales medios, cuando sean positivos, de los tres últimos años.

$n$  = número de años (entre los tres últimos) en los que los ingresos brutos fueron positivos

Este es el método con mayor exigencia de capital y adoptado por algunas entidades, principalmente las más pequeñas por la simplicidad de su cálculo, cuando no se cuenta con datos y herramientas para la utilización de otros métodos más complejos.

### 2.3.1.2. Método Estándar

El método estándar o *The Standardised Approach* (STA) (Basilea II, epígrafe 652), en este método el cálculo de los requerimientos de capital por riesgo operacional es muy similar a la del método del indicador básico, con la diferencia que se utiliza una clasificación de ocho líneas de negocio. El método de cálculo corresponde a la suma ponderada de los ingresos brutos anuales de cada una de las líneas de negocio multiplicado por un factor  $\beta$  asociado a cada una de ellas, matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$K_{TSA} = \{\sum_{años\ 1-3} \text{MAX} [\sum(GI_{1-8} * \beta_{1-8}), 0]\} / 3 \quad (28)$$

$K_{TSA}$  = la exigencia de capital en el método estándar

$GI_i$  = los ingresos brutos anuales de un año dado, para cada una de las ocho líneas de negocio.

Tabla 2-12 Factores  $\beta$  por línea de negocio de Basilea II

| Líneas de Negocio         | Factores $\beta$ |
|---------------------------|------------------|
| Finanzas Corporativas     | 18%              |
| Negociación y Ventas      | 18%              |
| Banca Minorista           | 12%              |
| Banca Comercial           | 15%              |
| Liquidación y Pagos       | 18%              |
| Servicios de Agencia      | 15%              |
| Administración de Activos | 12%              |
| Intermediación Minorista  | 12%              |

Este método es tan simple en su cálculo como el del indicador básico, con la diferencia que incorpora las líneas de negocio, bajo la premisa de que cada una está expuesta a un riesgo diferente por las funciones que realiza, también se deben cumplir criterios cualitativos incluidos en el documento de Buenas Prácticas.

### 2.3.1.3. Métodos Avanzados

Los métodos avanzados o *Advanced Measurement Approaches* (AMA) (Basilea II, epígrafe 655), responden a la necesidad de las entidades de lograr disminuciones en la exigencia de capital requerido frente a los métodos del indicador básico y estándar, al aplicar metodologías más complejas que generan una mejor estimación del riesgo operativo.

Los modelos AMA tienen notables diferencias con respecto a los métodos del indicador básico y estándar (Ferrerías Salagre, 2008) en los siguientes aspectos:

- Las entidades tienen más flexibilidad para elegir su propio modelo, ya que no se especifica a priori el modelo a implementar. Sino que se permite a efectos regulatorios establecer un método de interno de cálculo de acuerdo establecido por la entidad.
- Se permite la reducción, de hasta un 20% de la provisión por riesgo operacional en función de los seguros contratados.
- Se incluye una clasificación adicional por tipo de eventos de pérdida, teniendo en cuenta que no todas las líneas de negocio están



expuestas a las mismas fuentes de riesgo. De este modo el cálculo de capital debe

### **2.3.2. Clases de Riesgo**

El comité ha definido la siguiente clasificación de tipos de evento de pérdida (Banco Internacional de Pagos, 2006):

**Fraude interno:** pérdidas derivadas de algún tipo de actuación encaminada a defraudar, apropiarse de bienes indebidamente o soslayar regulaciones, leyes o políticas empresariales (excluidos los eventos de diversidad / discriminación) en las que se encuentra implicada, al menos, una parte interna a la empresa.

**Fraude externo:** pérdidas derivadas de algún tipo de actuación encaminada a defraudar, apropiarse de bienes indebidamente o soslayar la legislación, por parte un tercero.

**Relaciones laborales y seguridad en el puesto de trabajo:** pérdidas derivadas de actuaciones incompatibles con la legislación o acuerdos laborales, sobre higiene o seguridad en el trabajo, sobre el pago de reclamaciones por daños personales, o sobre casos relacionados con la diversidad /discriminación.

**Prácticas con clientes, productos y negocios:** pérdidas derivadas del incumplimiento involuntario o negligente de una obligación profesional frente a clientes concretos (incluidos requisitos fiduciarios y de adecuación), o de la naturaleza o diseño de un producto.

**Daños a activos materiales:** pérdidas derivadas de daños o perjuicios a activos materiales como consecuencia de desastres naturales u otros acontecimientos.

**Incidencias en el negocio y fallos en los sistemas:** pérdidas derivadas de incidencias en el negocio y de fallos en los sistemas.

**Ejecución, entrega y gestión de procesos:** pérdidas derivadas de errores en el procesamiento de operaciones o en la gestión de procesos, así como de relaciones con contrapartes comerciales y proveedores.

### **2.3.3. Criterios para Métodos Avanzados**

Por otro lado, si bien es cierto que Basilea II no especifica el modelo que debe utilizar cada entidad para el cálculo del riesgo operacional, pero si ha definido unos criterios que deben demostrar a su supervisor (Banco Internacional de Pagos, 2006)

#### **Criterios Generales**

Su consejo de administración y su Alta Dirección, según corresponda, participan activamente en la vigilancia del marco de gestión del riesgo operacional.

Posee un sistema de gestión del riesgo operacional conceptualmente sólido que aplica con integridad.

Cuenta con recursos suficientes para utilizar la metodología en las principales líneas de negocio, así como en los ámbitos de control y auditoría.

#### **Criterios Cualitativos**

Contar con una unidad de gestión del riesgo operacional que se encargue del diseño y aplicación de su marco de gestión en la entidad.

El sistema de medición interna del riesgo operacional con que cuente la entidad deberá estar perfectamente integrado dentro de los procesos habituales de gestión del riesgo y utilizar los resultados en el seguimiento y control del perfil de riesgo operacional del banco.

Deberá informarse periódicamente a la dirección de las unidades de negocio, a la Alta Dirección y al consejo de administración acerca de las exposiciones al riesgo operacional y del historial de pérdidas debidas a este riesgo.

El sistema de gestión del riesgo operacional del banco deberá estar bien documentado.

Los auditores externos y/o internos deberán llevar a cabo exámenes periódicos de los procesos de gestión y los sistemas de medición del riesgo operacional.

El sistema de medición debe estar validado por auditores externos y/o las autoridades supervisoras.

## **Criterios Cuantitativos (Solidez)**

Dada la continua evolución de los métodos analíticos de tratamiento del riesgo operacional, el Comité especifica qué método o qué supuestos sobre distribuciones de probabilidad se deben utilizar para estimar el riesgo operacional a efectos de capital regulador. Sin embargo, el banco deberá ser capaz de demostrar que su método identifica eventos situados en las “colas” de la distribución de probabilidad, generadores de pérdidas graves. Con independencia del método utilizado, el banco deberá demostrar que su estimación del riesgo operacional satisface un criterio de solidez comparable al exigido en el método de tratamiento del riesgo de crédito basado en calificaciones internas (es decir, comparable a un periodo de mantenimiento de 1 año y con un intervalo de confianza del 99,9 por ciento).

## **Criterios Detallados**

Los supervisores exigirán al banco que calcule su requerimiento de capital regulador como la suma de la pérdida esperada y de la pérdida inesperada, a menos que el banco pueda demostrar que ya contempla adecuadamente la pérdida esperada en sus prácticas internas de negocio.

El sistema de medición del riesgo del banco deberá estar suficientemente “atomizado” (granular) para identificar los principales factores de riesgo operacional que influyen en la forma de las colas de la distribución de las estimaciones de pérdida.

Deberán añadirse las distintas estimaciones de riesgo operacional a efectos de calcular la exigencia del capital mínimo regulador, utilizando técnicas cuantitativas y cualitativas adecuadas para validar sus supuestos de correlación.

El sistema de cálculo deberá incluir la utilización de datos internos, datos externos relevantes, análisis de escenarios y factores que reflejen el entorno del negocio y los sistemas de control interno.

El banco deberá contar con un proceso creíble, transparente, bien documentado y comprobable para ponderar estos elementos fundamentales dentro de su sistema general de medición del riesgo operacional.

## **Datos Internos**

Para un modelo interno son los datos más importantes, ya que se generan a partir de eventos operacionales de la propia entidad, se considera semipública (Ferrerías Salagre, 2008), ya que al reflejarse contablemente es publicada de manera agregada en los estados contables, el gran problema se presenta en la escasez de los datos para la implementación de modelos estadísticos, siendo necesario complementarlo con datos externos, principalmente aquellos de alta severidad a los que está expuesta la entidad, aunque no los haya experimentado (Nieto Giménez-Montesinos, 2006).

## **Datos Externos**

Los datos externos relevantes para complementar la información interna pueden provenir de bases públicas, privadas o de consorcios contando con procesos para determinar en qué situaciones deberán incluirse, y las metodologías a utilizar para su tratamiento, siendo regularmente revisadas, documentadas y sometidas a exámenes periódicos independientes sus condiciones y prácticas de utilización.

## **Análisis de Escenarios**

Las entidades también deberán utilizar análisis de escenarios u opiniones de expertos para evaluar su exposición a eventos de pérdida muy graves, las cuales se pueden presentar en forma de parámetros de una distribución estadística supuesta de las pérdidas, teniendo en cuenta que estos resultados se deben validar y reevaluar a lo largo del tiempo al compararlos con el historial de pérdidas efectivas.

## **Factores Relacionados con el Entorno del Negocio y el Control Interno**

La entidad deberá identificar factores básicos de su entorno y control interno que pueden modificar su perfil de riesgo operacional, permitiendo que las evaluaciones estén más orientadas hacia el futuro, reflejen de forma más directa la calidad de los entornos operativos y de control de la institución, contribuyan a alinear las evaluaciones de capital con los objetivos de la gestión de riesgos y reconozcan de una manera más inmediata tanto la mejora como el deterioro de los perfiles de riesgo operacional.

## **Cobertura del Riesgo**

Si el banco utiliza un método avanzado, estará autorizado a reconocer el efecto reductor del riesgo que generan los seguros en las medidas del riesgo operacional utilizadas al calcular los requerimientos mínimos de capital regulador. El reconocimiento de la cobertura de los seguros se limitará al 20% del requerimiento total de capital por riesgo operacional calculado con dicho método.

### **2.3.4. Metodologías Avanzadas de Modelación del Riesgo Operacional**

A partir de Basilea II cuando se incluyó el riesgo operacional para el cálculo de requerimientos de capital, tanto las entidades como académicos e investigadores han propuesto diferentes modelos que cumplan con los requisitos generales, cuantitativos y cualitativos planteados en el acuerdo, aunque en él se proponen los siguientes:

#### **Cuadros de Mando (*Scorecards*)**

Este enfoque se basa en indicadores que representan la exposición, desempeño y control del riesgo operacional y es aplicado a cada una de las líneas de negocio, a través de una autoevaluación que como mínimo contiene información de los eventos, probabilidad de ocurrencia e impacto de los riesgos y en general el proceso se desarrolla de la siguiente manera:

Para cada una de las líneas de negocio se desarrolla un cuestionario que permita evaluar los principales factores de riesgo operacional.

Obtenidas las respuestas de los expertos se identifican los indicadores relevantes del riesgo.

Se investigan los niveles de los factores del riesgo operacional y la calidad de los controles de los eventos de pérdida.

Teniendo en cuenta la información cualitativa de diferentes fuentes de información se asigna el requerimiento de capital inicial para cada tipo de pérdida.

Posteriormente se hace una distribución inicial del capital asignado para cada uno de los componentes de la matriz línea de negocio vs tipo de pérdida.

En este método el cargo de capital se calcula como:

$$C_s = \sum_{i=1}^8 K_i R_i \quad (29)$$

Donde

$K_i$ : es el cargo del capital inicial basado en el método del indicador básico o en el estándar.

$R_i$ : es un factor de riesgo para reescalar el cargo de capital inicial.

Este método es muy subjetivo principalmente por que las puntuaciones de frecuencia y severidad son asignadas por los mismos gestores del riesgo.

### **Modelo de Medición Interna**

Este enfoque fue introducido por el comité en 2001, el cual está basado en mediciones internas para estimar los requerimientos de capital por riesgo operativo, combinando las ocho líneas de negocio  $i$  con los siete eventos  $j$  en una matriz de riesgo, donde se busca determinar la pérdida esperada para cada componente así:

$$E[P_{ij}] = IE_{ij} * Pr(N_{ij} = 1) * E[X_{1ij}] * IPR_{ij} \quad (30)$$

Dónde:

$E[P_{ij}]$ : Pérdida esperada.

$IE_{ij}$ : Indicador de exposición

$Pr(N_{ij} = 1)$  Probabilidad de que se dé un evento de Riesgo operativo  $j$

$E[X_{1ij}]$ : Severidad media asociada a la ocurrencia de un evento  $j$

$IPR_{ij}$ : Índice del perfil de riesgo de la entidad en comparación con la industria.

Luego la entidad tiene la libertad de determinar un factor gamma ( $\gamma$ ), previa autorización del supervisor para convertir la pérdida esperada  $E[P_{ij}]$  en una carga de capital:

$$K_{ij} = \gamma_{ij} * E[P_{ij}] \quad (31)$$

Así, el total de capital requerido por riesgo operativo es:

$$K_{MMI} = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^7 \gamma_{ij} * E[P_{ij}] \quad (32)$$

### **Modelo de Distribución de Pérdidas (*Loss Distribution Approach, LDA*)**

Este método tiene sus orígenes en las aplicaciones actuariales, y es uno de los desafíos más grandes dentro de los métodos avanzados de Basilea II, basándose en la recopilación de datos internos de frecuencia y severidad de las pérdidas operacionales, que son complementados con datos externos por la escasez de los mismos dentro de las entidades (Chaudhury, 2010). Estos datos son registrados en una matriz compuesta por ocho líneas de negocio y siete eventos operacionales, propuesta en el acuerdo. El enfoque LDA se define como:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad (33)$$

Donde:

$S(t)$ : representa la suma agregada de las pérdidas.

$X_i$ : representa las pérdidas generadas por eventos de riesgo operativo (severidad de la pérdida) y generalmente se asume que sigue una distribución continua para la simulación del proceso.

$N(t)$ : representa el número de eventos del riesgo (frecuencia de eventos) y generalmente se asume que sigue una distribución discreta para la simulación del proceso.

En términos generales el proceso para este tipo de enfoque sería el siguiente (Ferrerías Salagre, 2008):

**Base de datos:** contar con una base de datos interna de los eventos operacionales que contenga como mínimo la fecha del evento y el importe de la pérdida, que generalmente es complementada con datos externos principalmente en los casos de eventos de baja frecuencia y severidad alta, que en ocasiones no ha experimentado la entidad, pero a los que puede estar expuesta.

**Ajuste de Distribuciones:** se debe estimar de manera independiente las distribuciones que mejor se ajusten tanto a la frecuencia (distribución

discreta) como a la severidad (distribución continua) con los datos disponibles y validarlos utilizando test de bondad del ajuste.

Distribución de Pérdidas Agregadas: cuando son validadas y aceptadas las distribuciones de pérdida y severidad, se combinan ambas para obtener una distribución de pérdidas agregadas, generalmente de un percentil de 99,9%.

Capital Económico: cuando se obtiene un valor del percentil establecido por la norma o la entidad sobre la distribución de pérdidas agregadas, se puede calcular el capital económico restándole el valor de la pérdida esperada de la misma distribución.

Validación: el modelo debe ser validado con pruebas de estrés para comprobar si el valor obtenido es consistente, fiable, robusto y estable enfrentándolo a condiciones extremas de incremento en los parámetros e inclusión de grandes eventos catastróficos.

### **Distribuciones de Frecuencia**

La frecuencia representa el número de eventos operacionales en un periodo establecido, definida como la distribución de probabilidad  $P_{ij}$  que sigue la variable aleatoria discreta  $N_{ij}$  que representa el número de eventos de riesgo, siendo  $i = 1, \dots, m$  con  $m = 8$  el tipo de evento de pérdida y  $j = 1, \dots, n$  con  $n = 7$  las líneas de negocio. La frecuencia se calcula con la siguiente formula:

$$P_{ij}(n) = \Pr(N_{ij} = n) \quad (34)$$

Pavel Schevchenko (2010) propone la distribución de Poisson como la de mayores ventajas para modelar la frecuencia, aunque también recomienda tener en cuenta otras alternativas como la binomial o binomial negativas.

### **Distribuciones de Severidad**

La severidad representa el valor de la pérdida de eventos operacionales en un periodo establecido, definida como la distribución de probabilidad  $F_{ij}$  que sigue la variable continua  $X_{ij}$  que representa el monto de la pérdida, siendo  $i = 1, \dots, m$  con  $m = 8$  el tipo de evento de pérdida y  $j = 1, \dots, n$  con  $n = 7$  las líneas de negocio. La severidad se calcula con la siguiente formula:

$$F_{ij}(x) = \Pr(X_{ij} \leq x) \quad (35)$$



Pavel Schevchenko (2010) propone la distribución Lognormal o la de Weibull como las que mejor se ajustan para modelar la severidad, aunque también existen otras alternativas como: Lognormal pesada, Gamma, Gausiana Inversa, Pareto, Gev, o G y H, por otro lado, asegura que ninguna distribución simple se ajusta a los datos adecuadamente siendo necesario recurrir a una mixtura de distribuciones continuas.

### **Contrastes o Test de Bondad de Ajuste**

Para las distribuciones de severidad se utiliza principalmente:

Contraste de Kolmogorov-Smirnov: se basa en una comparación entre las funciones de distribución acumulativa que se observan en la muestra ordenada y la distribución propuesta bajo la hipótesis nula.

$$\text{Donde: } D_n = \text{Max}|S_n(x) - F(x)| \quad (36)$$

En este caso se rechaza la hipótesis nula si la diferencia entre la distribución de probabilidad muestral y propuesta es suficientemente grande.

Contraste de Anderson-Darling: determina si los datos vienen de una distribución específica. La fórmula para el estadístico  $A$ , determina si los datos  $\{Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n\}$  (los datos se deben ordenar) vienen de una distribución con función acumulativa  $F$ . En este caso se tiene:

$$A^2 = -N - S \quad (37)$$

$$S = \sum_{k=1}^N \frac{2k-1}{N} [\ln F(Y_k) + \ln(1 - F(Y_{N+1-k}))] \quad (38)$$

Decisión: Se rechaza  $H_0$  si  $A > F$

Para la distribución de frecuencia se utiliza principalmente la prueba de Chi-cuadrado  $X^2$ , donde:

$H_0$  : Los datos provienen de una distribución específica.

Decisión se rechaza  $H_0$  si  $X^2$  calculada  $>$   $X^2$  teórica

### **Distribución de Pérdidas Agregadas**

Una vez obtenidas las distribuciones de frecuencia y severidad del modelo, lo siguiente es obtener la distribución de pérdidas agregadas como

resultado de la combinación de ambas mediante un proceso estadístico conocido como convolución<sup>5</sup>.

Como  $N_{ij}$  es una variable aleatoria que representa el número de eventos en la celda  $i, j$  de la matriz de eventos, para un plazo comprendido entre  $t$  y  $t + \tau$  con una distribución de probabilidad asociada  $P_{ij}(n)$  y  $X_{ij}$  otra variable aleatoria que expresa la cuantía de la pérdida para un determinado evento con una función de densidad asociada  $F_{ij}(x)$ , si se asume independencia entre la frecuencia y la severidad, entonces la pérdida total para un tipo de evento en el intervalo temporal  $(t, t + \tau)$  adopta la expresión dada en la ecuación:

$$S(x) \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}(n) F_{ij}^{n*}(x) & x > 0 \\ P_{ij}(0) & x = 0 \end{cases} \quad (39)$$

Donde:

$F(x)$  es la probabilidad de que la cantidad agregada de  $n$  pérdidas sea  $x$  y el asterisco denota la convolución en la función  $F$ , y  $F^{n*}$  es  $n$ -veces la convolución de  $F$  consigo misma.

El método más utilizado para obtener la distribución de pérdidas agregadas es el Método de Montecarlo, aunque es lento, pero de fácil aplicación. También existen otros métodos como la Transformada Rápida de Fourier y el Algoritmo de Panjer que se recomienda para frecuencias grandes (Shevchenko, 2010).

---

<sup>5</sup> Una convolución es un operador matemático que transforma dos funciones  $f$  y  $g$  en una tercera función que en cierto sentido representa la magnitud en la que se superponen  $f$  y una versión trasladada e invertida de  $g$ .

## **Capítulo 3**

### **Modelo de Causalidad Multiexperto con Operadores OWA**

**“Multiexpert Causality Model with OWA Operators”**



## Multiexpert Causality Model with OWA Operators<sup>6</sup>

Agustín Torres-Martínez

*Department of Business Administration, University of Barcelona*

Anna Maria Gil Lafuente

*Department of Business Administration, University of Barcelona*

Aras Keropyan

GRIT-EAE Research Group, EAE Business School

José Maria Merigó Lindahl

*Department of Management Control and Information Systems,  
University of Chile*

### Abstract

**Purpose:** this work aims to improve the analysis of causality model of the forgotten effects theory, through the aggregation of multiple expert opinions with the use of OWA operators.

**Design/methodology/approach:** taking into account the experts' opinions, causality relationships can be obtained to get an overall view of different direct causal relationships and from there the second and higher order relations can be estimated as well as the forgotten effects or initially ignored incidence relationships.

**Findings:** theoretically the applicability of the use of operators and also through an illustrative application the causes and effects of operational risk is demonstrated.

**Originality/value:** this article provides a new approach to the forgotten effects model by adding opinions of experts to improve the analysis and including the optimistic or pessimistic perspectives throughout a weight vector.

**Keywords:** forgotten effects theory, operational risk, fuzzy logic, OWA operators.

---

<sup>6</sup> Article accepted for publication in *Kybernetes: The International Journal of Cybernetics, Systems and Management Science*. Journal Citation Report, Thomson Reuters Impact Factor: 0.811. Indexed in (ISI) Current Contents: Engineering, Computing and Technology, (ISI) SciSearch; (ISI) Science Citation Index; (ISI) COMPUMATH Citation Index, Scopus, The Publication Forum (Finland)

## 1. Introduction

The forgotten effects theory developed by Kaufmann and Gil Aluja (1988), was a breakthrough for the analysis of a lot of phenomena's in the field of economy and business, based on the approach that when a certain causality is analyzed, there may be errors in the assessment of the level of incidences between two entities, mostly when the opinions of experts are involved in the estimations. The loss of information also takes place in the chain of events that are made through indirect relationships, since two entities apparently have little or no relationship, nevertheless finally it can be demonstrated an existence of a high level of incidence, through intermediate relations. This shows the essence of the forgotten effects model.

The applicability of this theory and its importance for the diagnosis of complex problems has been widely demonstrated by different researchers in different fields: hospital industry (Martorell et. al., 2013), entrepreneurship (Maqueda et. al., 2013) social and environmental responsibility (Vizuetete et. al., 2013) economic growth and wealth (Gil Lafuente et.al., 2015), public health (Gil Lafuente 2015), customer relationship management (Gil Lafuente and Luis Bassa, 2010), among others.

From the forgotten effect theory (Kaufmann and Gil Aluja, 1988), the use of fuzzy random matrices and expertons is common, which involve the opinion of multiple experts to obtain incidence relationships with a broader view of the problem, since in important and complex cases multi expert models can be an appropriate to obtain information, especially when there is ambiguity and subjectivity, but at the same time which very useful in diagnosis and decision making. It is also important to note that in multi expert systems, it is mandatory to use comparisons and aggregations in the analysis. To carry out these aggregations, a lot of tools can be used, from classical criteria aggregation tools (maximax or optimistic, pessimistic or minimax, Laplace and Hurwicz) and even more complex ones.

In the literature there are different types of aggregation operators and one of the most common is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced by Yager (1988). This operator is very useful to assess information, because the operator a part from taking into account different opinions of experts or information sources, it can include the optimistic or pessimistic attitude of the analysts and decision makers. This last aspect is

very important in the analysis, because it allows overestimating or underestimating the information, assuming a quantifiable criterion, through a weighting vector. The OWA operator has proved to be very effective in many multi expert methods (Herrera et. al., 1996; Mata et. al., 2009; Xu, 2006; Merigó et. al., 2012; Merigó, 2013; Xia et. al., 2013; Merigó et. al., 2014; Wang et. al., 2016; Xian et. al., 2016).

An interesting contribution to the forgotten effects theory is the in addition to the use of subjective probabilities to estimate incidence relationships, which may be necessary to underestimate or overestimate information according to the optimistic or pessimistic views of the experts or analysts, since there can be some factors, criteria or opinions that may have greater weight, influencing the final result. The aim of this article is to propose a new methodology for analyzing incidence relationships, including an alternative tool where aggregations of information are made using the OWA operator, to the proposal of Kaufmann and Gil Aluja (1988).

The article is structured as following: section 2 describes some basic concepts such as incidence relationships of the first and second degree, the semantic scales and the OWA operator; section 3 presents different ways of adding incidence matrices; section 4 describes the new model; the section 5 presents an illustrative application and finally the section 6 presents the conclusions and future research.

## 2. Preliminaries

### Incidence Relations

Incidence refers to the influence or consequence act or to the impact that a set of arguments over belonging arguments to the other sets or on itself and could be associated to the function idea (Kaufmann and Gil Aluja, 1988). Below incidence ratios that are applied in this study are described:

### Incidents of First Order

**Definition 1:** Two sets;  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$  with  $i = 1, 2, \dots, n$  and  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_j\}$  with  $j = 1, 2, \dots, m$ . The incidence relations of direct causalities between  $a_i$  and  $b_j$  will be defined by  $u_{a_i b_j}$  values, where  $u_{a_i b_j} \in [0, 1]$ . And resulting in the incident matrix  $M$ . Thus:

$$M = \begin{bmatrix} u_{a_1b_1} & \cdots & u_{a_ib_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{a_1b_j} & \cdots & u_{a_ib_j} \end{bmatrix} \quad (1)$$

### Incidents of Second Order and Higher

**Definition 2:** Three sets  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$  with  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_j\}$  with  $j = 1, 2, \dots, m$  and  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  with  $k = 1, 2, \dots, p$ . There is a direct incidence relation ( $u_{a_ib_j}$ ) between the elements of sets A and B and also between the elements of sets B and C ( $u_{b_jc_k}$ ), from where a second order relation ( $u_{a_ic_k}$ ) is obtained between A and C by means of B. If more relation sets are counted, the incident relations are going to be higher (third, fourth or a higher order).

Depending on the complexity of the problem, in some cases it will be necessary to evaluate both the cause and effect incident relationships between themselves. This is represented as following:

**Definition 3:** Two sets  $A' = \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$  with  $i = 1, 2, \dots, n$  and  $A'' = \{a_1, a_2, \dots, a_j\}$  with  $j = 1, 2, \dots, n$  corresponding to the causes, then the incidents relations of causes with causes can be obtained ( $u_{a_ia_j}$ ) where  $0 \leq u_{a_ia_j} \leq 1$  for all  $i \neq j$  and  $u_{a_ia_j} = 1$  for all  $i = j$ . Resulting in the following matrix:

$$A = \begin{bmatrix} u_{a_1a_1} & \cdots & u_{a_ia_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{a_1a_j} & \cdots & u_{a_ia_j} \end{bmatrix} \quad (2)$$

**Definition 4:** Two sets  $B' = \{b_1, b_2, \dots, b_i\}$  with  $i = 1, 2, \dots, m$  and  $B'' = \{b_1, b_2, \dots, b_j\}$  with  $j = 1, 2, \dots, m$  corresponding to the effects, then the incidents relations of effects with effects can be obtained ( $u_{b_ib_j}$ ) where  $0 \leq u_{b_ib_j} \leq 1$  for all  $j \neq j$  and  $u_{b_ib_j} = 1$  for all  $i = j$ . Resulting in the following matrix:

$$B = \begin{bmatrix} u_{b_1b_1} & \cdots & u_{b_ib_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{b_1b_j} & \cdots & u_{b_ib_j} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Thus, A and B matrix' are reflective and square but not symmetrical.



## Incidence Values

By definition, the values that reflect the incidence relations in all matrices are established, both for first and second order, between 0 and 1, which means  $a_{ij}, b_{ij}, u_{ij} \in [0,1]$  being one of the most used endecedaria scale, where the numeric values have a corresponding semantics. For instance:

- 0: Without incidence.
- 0.1: Practically without incidence.
- 0.2: Almost without incidence.
- 0.3: Very week incidence.
- 0.4: Week incidence.
- 0.5: Medium incidence.
- 0.6: Sensitive incidence.
- 0.7: Fairly incidence.
- 0.8: Strong incidence.
- 0.9: Very strong incidence.
- 1: The major incidence.

On the other hand, if the impact is measurable in the  $[0,a]$  segment, this reference interval can be taken for  $k$  values, if  $k \in [0, a]$  and be calculated as following:

$$u_{ij} = \frac{k}{a} \quad (4)$$

In case of the  $[a_1, a_2]$  segment, the calculation will be:

$$u_{ij} = \frac{k-a_1}{a_2-a_1} \quad k, a_1, a_2 \in \mathfrak{R}^+ \quad (5)$$

It is also possible to use other diffuse functions, according to the complexity of the problem to be analyzed.

## Forgotten Effects Theory

According to definition 1, when there is only one matrix that relates two sets of causes and effects, there will be a relationship of the first order.

However, if in addition to the matrix  $M$ , there are one or more additional matrices such as  $A$  and/or  $B$ , then we can talk about a second-order or higher-order relationship as described above in definitions 2,3 and 4.

To determine the second or higher order relationships, the maximum-minimum composition (max-min) is used, based on the idea that if there is a  $(a_i, b_j, c_k)$  relationship, there will be an indirect  $(a_i, c_k)$  relation. The mathematical formula is as following:

**Definition 5:** Three sets  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$  with  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_j\}$  with  $j = 1, 2, \dots, m$  and  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  with  $k = 1, 2, \dots, p$  where there is a incidence relationship between the elements  $a_i$  with  $b_j$  and between the elements  $b_j$  with  $c_k$ . The existing relationship between the elements  $a_i$  with  $c_k$  is calculated as:

$$u_{a_i c_k} = v(u_{a_i b_j} \wedge u_{b_j c_k}) \quad (6)$$

Example:

$$u_{a_1 c_1} = (u_{a_1 b_1} \wedge u_{b_1 c_1}) \vee (u_{a_1 b_2} \wedge u_{b_2 c_1}) \vee \dots \vee (u_{a_1 b_j} \wedge u_{b_j c_1})$$

where  $\wedge$  is the minimum (the minor value between two) and  $\vee$  is the maximum (the higher value of all).

The calculation of all  $v(a_i, c_k)$  will give a result as matrix:

$$M' = A \circ M \circ B \quad (\circ \text{ refers to the maxmin composition})$$

$$M' = \begin{bmatrix} u_{a_1 c_1} & \dots & u_{a_i c_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{a_1 c_k} & \dots & u_{a_i c_k} \end{bmatrix} \quad (7)$$

In summary,  $M'$  matrix gathers the incidences between causes and effects of the first and second generation, which means that in addition to the initial causal relationships, other possible intervening incidence of some cause or effect can be added as well.

From the difference between  $M$  and  $M'$ , the degree to which have been omitted or forgotten of some of the causal relationships can be obtained. The resulting matrix includes the forgotten effects model and is obtained by applying:

$$[O] = [M' - M] \quad (8)$$

In the result analysis of the matrix  $[O]$  which shows the order of some incidents that might have been forgotten or ignored, it is also possible to obtain the elements (causes or effects) that work as links. On the other hand, it is important to define from what level the ignorance is relevant.

### The OWA Aggregation Operator

The OWA operator have been introduced by Yager (1988)

**Definition 6:** An OWA operator is a dimension function  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , to which a  $W$  dimension vector is associated being  $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ , where  $w_i \in [0,1]$  and  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ . From the following formula:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n w_i b_i \quad (9)$$

Where  $b_i$  is the largest  $i$ -th of  $a_i$ , meaning that the vector  $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$  is the realignment of  $a_i$  from higher to lower. The OWA operators can be re-aligned in descending or ascending order Yager (1993) where the case ascending OWA operator  $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$  is the reorder of  $a_i$  from low to high.

### Properties of the OWA Operators

The OWA operators fulfill the following properties Yager (1988):

**Property 1. Commutativity:** any permutation of the arguments has the same evaluation, meaning that if  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  are the arguments to add and  $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$  is a permutation of themselves, is complied with:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(d_1, d_2, \dots, d_n) \quad (10)$$

**Property 2. Monotony:** if  $a_i$  and  $c_i$  are arguments to be added with  $a_i \geq c_i$ , then:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (11)$$

**Property 3. Delimitation:** there are lower and upper limits for all operators for all OWA operators, such that:

$$\text{Min}(a_i) \leq f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \text{Max}(a_i) \quad (12)$$

**Property 4. Idempotency:** if  $a_i = a$  for all  $i = 1, 2, \dots, n$  it has to be shown:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = a \quad (13)$$

### Weighting Vector Measures

To characterize the weight vector, some measures was taken (Yager 1988, 1993, 1996):

**Attitudinal character of the decision maker:** is defined through the following formula:

$$\alpha(W) = \sum_{i=1}^n w_i \frac{(n-i)}{(n-1)} \quad (14)$$

where  $\alpha(W) \in [0,1]$  with  $\alpha(W) = 1$  for the maximum or optimistic criteria,  $\alpha(W) = 0$  for the minimum or pessimistic criteria and  $\alpha(W) = 0.5$  for the Laplace criteria:

**Entropy or dispersion:** is calculated as following:

$$H(W) = - \sum_{i=1}^n w_i \ln(w_i) \quad (15)$$

This measure for the amount of information that is being used in the aggregation, for  $w_i = 1$  for any  $i$ , then  $H(W) = 0$  indicating the used information is minimum and if  $w_i = \frac{1}{n}$  for all  $i$  has the maximum entropy.

**Balance:** this measure estimates the degree of preference towards the optimistic or pessimistic values. It is calculated as:

$$Bal(W) = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1-2i)}{n-1} w_i \quad (16)$$

Where,  $Bal(W) \in [0,1]$  with  $Bal(W) = 1$  for the optimistic criteria,  $Bal(W) = -1$  for the pessimistic criteria and  $Bal(W) = 0$  for the Laplace criteria:

**Divergence Degree:** is used when the attitudinal character  $\alpha(W)$  and the dispersion order  $H(W)$  are incomplete.

$$Div(W) = \sum_{i=1}^n w_i \left( \frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \quad (17)$$

Being  $Div(W) = 0$  for all optimistic and pessimistic criterias'.

### 3. Incidence Matrix Aggregation with OWA Operators

In order to have a broader vision for the problems to be analyzed, sometimes it is necessary to establish incidence relations considering opinions of several experts. These analysis' provided by the experts, can be unified with different statistical tools such as the arithmetic mean giving the same weight to each data or the weighted average in which the data will have greater or lesser importance depending, depending in most cases on their knowledge and experience. Nevertheless, a new interesting insight is the use of OWA operators within the forgotten effects model, adding data depending on its order in the data alignment, regardless of from which of the experts it comes. This brings a new vision where a part from the obtained information, the optimistic or pessimistic attitude of decision makers can also be included, which enables to evaluate the risk in a more in the valuations.

**Definition 7:** Two sets  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$  and  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_j\}$  where the elements of  $A$  have an indirect relation over the elements of  $B$  defined by values  $u_{a_i b_j}$ , where  $0 \leq u_{a_i b_j} \leq 1$  to obtain  $M_n$  matrix' for  $n$  experts, expressed by the following form:

$$M_n = \begin{bmatrix} u_{a_1 b_1} & \cdots & u_{a_i b_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{a_1 b_j} & \cdots & u_{a_i b_j} \end{bmatrix} \quad (18)$$

**Definition 8:** The incidence relations are established from  $A \rightarrow B$ , but also from  $A \rightarrow A$  or from  $B \rightarrow B$ , depending on the circumstances where incidence relations are analyzed. Therefore, a part from  $M_n$  matrices,  $A_n$  y  $B_n$  can also be obtained for each of the  $n$  experts, defined by  $u_{a_i a_j}$  and  $u_{b_i b_j}$  values, as appropriate, expressed as following:

$$A_n = \begin{bmatrix} u_{a_1 a_1} & \cdots & u_{a_i a_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{a_1 a_j} & \cdots & u_{a_i a_j} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$B_n = \begin{bmatrix} u_{b_1 b_1} & \cdots & u_{b_i b_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{b_1 b_j} & \cdots & u_{b_i b_j} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$A_n$  y  $B_n$  matrices represent the indirect causality or second generation relationships.

**Definition 9:**  $M_n$  matrices can be added by the arithmetic mean to obtain a  $M^*$  matrix, using the following formula:

$$\begin{aligned} u_{a_1 b_1}^* &= \frac{u_{a_1 b_1}^1 + u_{a_1 b_1}^2 + \dots + u_{a_1 b_1}^n}{n} \\ &\vdots \\ u_{a_i b_j}^* &= \frac{u_{a_i b_j}^1 + u_{a_i b_j}^2 + \dots + u_{a_i b_j}^n}{n} \end{aligned} \quad (21)$$

So that:

$$M^* = \begin{bmatrix} u_{a_1 b_1}^* & \dots & u_{a_i b_1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{a_1 b_j}^* & \dots & u_{a_i b_j}^* \end{bmatrix} \quad (22)$$

The same formula is applied to find  $A^*$  y  $B^*$  matrices as a result of adding  $A_n$  y  $B_n$  matrices respectively using the arithmetic mean.

**Definition 10:**  $M_n$  matrices can be added through the weighted average with the vector  $V$  of dimension  $n$ , such that  $v_k \in [0,1]$  and  $\sum_{k=1}^n v_k = 1$ , using the following formula:

$$\begin{aligned} u_{a_1 b_1}^* &= \sum_{k=1}^n v_k u_{a_1 b_1}^k \\ &\vdots \\ u_{a_i b_j}^* &= \sum_{k=1}^n v_k u_{a_i b_j}^k \end{aligned} \quad (23)$$

That:

$$M^* = \begin{bmatrix} u_{a_1 b_1}^* & \dots & u_{a_i b_1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{a_1 b_j}^* & \dots & u_{a_i b_j}^* \end{bmatrix} \quad (24)$$

The same formula is applied to find  $A^*$  y  $B^*$  matrices as a result of adding  $A_n$  y  $B_n$  respectively using the weighted average.

**Definition 11:**  $M_n$  matrices can be added through the OWA operator with the  $W$  vector of dimension  $n$ , such that  $w_k \in [0,1]$  and  $\sum_{k=1}^n w_k = 1$ , using the following formula:

$$u_{a_1 b_1}^* (u_{a_1 b_1}^1, u_{a_1 b_1}^2, \dots, u_{a_1 b_1}^n) = \sum_{k=1}^n w_k b_{a_1 b_1}^k \quad (25)$$

Where  $b_{a_1 b_1}^k$  is the  $k$ -th highest of  $u_{a_1 b_1}^k$ , such that  $b_{a_1 b_1}^1 \geq b_{a_1 b_1}^2 \geq \dots \geq b_{a_1 b_1}^n$

Generally, the rest of the elements of the matrix is calculated as following:

$$u_{a_i b_j}^* (u_{a_i b_j}^1, u_{a_i b_j}^2, \dots, u_{a_i b_j}^n) = \sum_{k=1}^n w_k b_{a_i b_j}^k \quad (26)$$

Where  $b_{a_i b_j}^k$  is the  $k$ -th highest of  $u_{a_i b_j}^k$ , such that  $b_{a_i b_j}^1 \geq b_{a_i b_j}^2 \geq \dots \geq b_{a_i b_j}^n$

So  $M^*$ :

$$M^* = \begin{bmatrix} u_{a_1 b_1}^* & \dots & u_{a_i b_1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{a_1 b_j}^* & \dots & u_{a_i b_j}^* \end{bmatrix} \quad (27)$$

All  $u_{a_i b_j}^*$  meet the properties of commutativity, monotony, delimitation and idempotence explained in section 2.3.1.

The same formula is applied to find  $A^*$  y  $B^*$  matrices as a result of adding  $A_n$  y  $B_n$  matrices respectively using the OWA operator.

Depending on the nature of the data, incidence matrices can be obtained using multiple expert opinions for all of the relationships or only some of them, including the usage of different experts in each house, as each matrix can have its own process to obtain the incidences.

From the aggregated  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $M^*$  matrices and others depending of the applied model to the problem to analyze, it is possible to calculate the incidences between causes and effects of first and second generation, like the forgotten effects matrix and analyze the link elements applying the model explained in section 2.2.

#### 4. Methodology

Causality analysis through the forgotten effects model in many cases requires incorporating expert opinions and from the collective results to estimating the incidence relationships of first and second order or higher. The proposal developed in this work unifies the multi-expert information using the OWA operator. The procedure is carried out using the following steps:

Step 1: Define the causality relationships, referring to the different sequential causes and effects to analyze. Note that in many models the relations can be causes with causes and/or effects with effects, according to the definitions 3 and 4. In general they can be equation matrices 1, 2, and 3. The measurement scale is also established for the incidence relations, being the endecadary scale one of the most common scale forms as explained in section 2.1.3.

Step 2: Identify the causality relationships that are needed to be evaluated by experts, since incidence relations can be estimated by multi-expert systems as a whole or only for a part of them. This will depend on the quality of available information and related uncertainty.

Step 3: Collect information from the  $n$  experts to analyze the causal relationships according to step 2.

Step 4: Define the weight vector for the OWA operator and calculate its characteristics measures, as explained in section 2.3.2.

Step 5: Get the collective results using the OWA operator with the weighting vector defined in step 4. There may be other aggregations such as maximum, minimum or arithmetic mean, which will serve as a reference in the analysis of the model.

Step 5: Get the collective results using the OWA operator with the weighting vector defined in step 4. There may be other aggregations such as maximum, minimum or arithmetic mean, which are particular cases of OWA operator and are also useful as reference in the analysis of the model.

Step 6: Present all the obtained results, either with expert opinions or with other methods, according to the incidents model defined in step 1.

Step 7: Calculate relationship matrix of second-order or higher using the maximin composition ( $\circ$ ) for the results presented in step 6.



Step 8: Identify and analyze the forgotten effects in the matrix indicated in the previous step, which are greater than or equal to  $\alpha$  level set by analysts.

## 5. Illustrative Application

An illustrative application about incidence relationships between events and types of operational risk losses is presented in this section. This qualitative analysis is realized in order to improve the management of this type of risk, so that through experts there can be obtained more information to mitigate or avoid the risks and their effects in the decision making process. It is important to highlight that, these types of tools are appropriate to use when the information to assess the problem is insufficient, fuzzy and imprecise, which makes more difficult the use of other statistical methods.

The Basel II Committee defines the operational risk as the:

*“Risk of loss resulting from inadequate or failed internal processes, people and systems or from external events.”*

This definition includes the legal risk<sup>7</sup>, but excludes the strategic<sup>8</sup> and reputational risks<sup>9</sup>

In this example it is assumed that five experts evaluated the relationships of incidence described below, according to the methodology proposed:

Step 1: The variables to be analyzed according to the classification of events and effects of operational risk defined by Basel II (Bank for International Settlements, 2001) are as following:

### **Variables of operational risk events:**

$c_1$ . Internal fraud: losses due to acts of a type intended to defraud, misappropriate property or circumvent regulations, the law or company

---

<sup>7</sup> Legal Risk: the possibility of being punished, fined or forced to pay punitive damages resulting from supervisory actions or private agreements between the parties.

<sup>8</sup> Strategic Risk: the possibility of choosing a wrong strategy that may affect the results.

<sup>9</sup> Reputational risk: the possibility of causing loss when the entity's name is affected by the decrease of the confidence of the whole institution.

policy, excluding diversity/ discrimination events, which involves at least one internal party.

$c_2$ . External fraud: losses due to acts of a type intended to defraud, misappropriate property or circumvent the law, by a third party.

$c_3$ . Employment practices and workplace safety: losses arising from acts inconsistent with employment, health or safety laws or agreements, from payment of personal injury claims, or from diversity / discrimination events.

$c_4$ . Clients, products and business practices: losses arising from an unintentional or negligent failure to meet a professional obligation to specific clients (including fiduciary and suitability requirements), or from the nature or design of a product.

$c_5$ . Damage to physical assets: losses arising from loss or damage to physical assets from natural disaster or other events.

$c_6$ . Business disruption and system failures: losses arising from disruption of business or system failures

$c_7$ . Execution, delivery and process management: Losses from failed transaction processing or process management, from relations with trade counterparties and vendors.

**Variables of types of losses of operational risk:**

$e_1$ . Legal liability: judgments, settlements and other legal costs.

$e_2$ . Regulatory action: Fines or the direct payment of any other penalties, such as license revocations.

$e_3$ . Loss or damage to assets: direct reduction in value of physical assets due to some kind of accident (e.g., neglect, accident, fire, earthquake).

$e_4$ . Restitution: payments to third parties on account of operational losses for which the bank is legally responsible.

$e_5$ . Loss of recourse: losses experienced when a third party does not meet its obligations to the bank, and which are attributable to an operational mistake or event (i.e., which could have been avoided even though the counterparty refused or was unable to pay).

$e_6$ . Write-down: direct reduction in the value of assets due to theft, fraud, unauthorized activity or market or credit losses arising as a result of operational events.

To analyze the relationships between these variables, the following semantic scale has been used:

- 0: Without incidence
- 0.1: Virtually without incidence
- 0.2: Almost without incidence
- 0.3: Very weak incidence
- 0.4: Weak incidence
- 0.5: Average incidence
- 0.6: Substantial incidence
- 0.7: Sufficient incidence
- 0.8: Strong incidence
- 0.9: Very Strong incidence
- 1: The highest incidence

Step 2: the causal relationships will be evaluated in its entirety with expert opinions for the incidences of the following matrices:

$$C = \begin{bmatrix} u_{c_1c_1} & \cdots & u_{c_1c_7} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{c_7c_1} & \cdots & u_{c_7c_7} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} u_{c_1e_1} & \cdots & u_{c_1e_6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{c_7e_1} & \cdots & u_{c_7e_6} \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} u_{e_1e_1} & \cdots & u_{e_1e_6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{e_6e_1} & \cdots & u_{e_6e_6} \end{bmatrix}$$

Step 3: information evaluated by a group of five experts is presented in the following tables:

*Table 3-1 Matrix M of the Expert 1*

| $M_1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $c_1$ | 0,7   | 0,8   | 0,4   | 0,9   | 0,6   | 0,8   |
| $c_2$ | 0,8   | 0,5   | 0,9   | 0,6   | 0,6   | 0,8   |
| $c_3$ | 0,7   | 0,7   | 0,8   | 0,5   | 0,3   | 0,1   |
| $c_4$ | 0,8   | 0,9   | 0,3   | 0,8   | 0,7   | 0,5   |
| $c_5$ | 0,2   | 0,3   | 0,9   | 0,1   | 0,2   | 0,1   |
| $c_6$ | 0,2   | 0,3   | 0,7   | 0,4   | 0,8   | 0,7   |
| $c_7$ | 0,9   | 0,8   | 0,5   | 0,7   | 0,8   | 0,9   |

*Table 3-2 Matrix C of the Expert 1*

| $C_1$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ | $c_6$ | $c_7$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $c_1$ | 1     | 0,9   | 0,6   | 0,5   | 0,4   | 0,7   | 0,6   |
| $c_2$ | 0,8   | 1     | 0,3   | 0,6   | 0,5   | 0,7   | 0,4   |
| $c_3$ | 0,4   | 0,6   | 1     | 0,4   | 0,8   | 0,8   | 0,5   |
| $c_4$ | 0,5   | 0,5   | 0,4   | 1     | 0,3   | 0,6   | 0,8   |
| $c_5$ | 0,2   | 0,4   | 0,6   | 0,3   | 1     | 0,5   | 0,4   |
| $c_6$ | 0,9   | 0,7   | 0,5   | 0,5   | 0,6   | 1     | 0,4   |
| $c_7$ | 0,7   | 0,6   | 0,4   | 0,5   | 0,5   | 0,6   | 1     |

*Table 3-3 Matrix E of the Expert 1*

| $E_1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $e_1$ | 1     | 0,9   | 0,4   | 0,7   | 0,8   | 0,7   |
| $e_2$ | 0,8   | 1     | 0     | 0,9   | 0,6   | 0,5   |
| $e_3$ | 0,5   | 0,3   | 1     | 0,6   | 0,2   | 0,2   |
| $e_4$ | 0,8   | 0,9   | 0,3   | 1     | 0,4   | 0,3   |
| $e_5$ | 0,5   | 0,5   | 0,6   | 0,7   | 1     | 0,8   |
| $e_6$ | 0,9   | 0,9   | 0,1   | 0,5   | 0,6   | 1     |

*Table 3-4 Matrix M of the Expert 2*

| $M_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $c_1$ | 0,8   | 0,6   | 0,2   | 0,7   | 0,5   | 0,7   |
| $c_2$ | 0,6   | 0,4   | 0,8   | 0,3   | 0,5   | 0,8   |
| $c_3$ | 0,7   | 0,8   | 0,5   | 0,7   | 0,2   | 0,1   |
| $c_4$ | 0,9   | 0,6   | 0,3   | 0,8   | 0,7   | 0,6   |
| $c_5$ | 0,2   | 0,2   | 1     | 0,3   | 0,3   | 0,1   |
| $c_6$ | 0,4   | 0,5   | 0,7   | 0,4   | 1     | 0,6   |
| $c_7$ | 0,7   | 0,8   | 0,5   | 0,6   | 0,8   | 1     |

*Table 3-5 Matrix C of the Expert 2*

| $C_2$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ | $c_6$ | $c_7$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $c_1$ | 1     | 0,6   | 0,4   | 0,4   | 0,3   | 0,5   | 0,4   |
| $c_2$ | 0,6   | 1     | 0,2   | 0,5   | 0,4   | 0,5   | 0,3   |
| $c_3$ | 0,3   | 0,4   | 1     | 0,3   | 0,6   | 0,6   | 0,4   |
| $c_4$ | 0,4   | 0,4   | 0,3   | 1     | 0,2   | 0,4   | 0,6   |
| $c_5$ | 0,1   | 0,3   | 0,4   | 0,2   | 1     | 0,4   | 0,3   |
| $c_6$ | 0,6   | 0,5   | 0,4   | 0,4   | 0,4   | 1     | 0,3   |
| $c_7$ | 0,5   | 0,4   | 0,3   | 0,4   | 0,4   | 0,4   | 1     |

*Table 3-6 Matrix E of the Expert 2*

| $E_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $e_1$ | 1     | 0,7   | 0,3   | 0,6   | 0,6   | 0,6   |
| $e_2$ | 0,6   | 1     | 0     | 0,7   | 0,5   | 0,4   |
| $e_3$ | 0,4   | 0,2   | 1     | 0,5   | 0,2   | 0,2   |
| $e_4$ | 0,7   | 0,7   | 0,2   | 1     | 0,3   | 0,2   |
| $e_5$ | 0,4   | 0,4   | 0,5   | 0,6   | 1     | 0,6   |
| $e_6$ | 0,7   | 0,7   | 0     | 0,4   | 0,5   | 1     |

*Table 3-7 Matrix M of the Expert 3*

| $M_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $c_1$ | 0,9   | 0,7   | 0,5   | 0,8   | 0,7   | 0,9   |
| $c_2$ | 0,7   | 0,5   | 0,9   | 0,5   | 0,8   | 0,9   |
| $c_3$ | 0,8   | 0,6   | 0,9   | 0,6   | 0,4   | 0,2   |
| $c_4$ | 0,8   | 0,7   | 0,1   | 0,9   | 0,6   | 0,6   |
| $c_5$ | 0,2   | 0,2   | 0,9   | 0,3   | 0,3   | 0,1   |
| $c_6$ | 0,3   | 0,4   | 0,8   | 0,5   | 0,9   | 0,7   |
| $c_7$ | 0,8   | 0,7   | 0,4   | 0,7   | 0,9   | 0,8   |

Table 3-8 Matrix C of the Expert 3

| $C_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ | $c_6$ | $c_7$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $c_1$ | 1     | 1     | 0,7   | 0,6   | 0,4   | 0,8   | 0,7   |
| $c_2$ | 0,9   | 1     | 0,3   | 0,7   | 0,6   | 0,8   | 0,4   |
| $c_3$ | 0,5   | 0,7   | 1     | 0,4   | 0,9   | 0,9   | 0,6   |
| $c_4$ | 0,6   | 0,6   | 0,4   | 1     | 0,3   | 0,7   | 0,9   |
| $c_5$ | 0,2   | 0,4   | 0,7   | 0,3   | 1     | 0,6   | 0,5   |
| $c_6$ | 1     | 0,8   | 0,6   | 0,6   | 0,6   | 1     | 0,4   |
| $c_7$ | 0,8   | 0,7   | 0,4   | 0,6   | 0,6   | 0,7   | 1     |

Table 3-9 Matrix E of the Expert 3

| $E_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $e_1$ | 1     | 0,9   | 0,5   | 0,8   | 0,8   | 0,8   |
| $e_2$ | 0,9   | 1     | 0,1   | 0,8   | 0,7   | 0,6   |
| $e_3$ | 0,6   | 0,3   | 1     | 0,7   | 0,2   | 0,4   |
| $e_4$ | 0,9   | 0,9   | 0,33  | 1     | 0,5   | 0,3   |
| $e_5$ | 0,6   | 0,6   | 0,7   | 0,7   | 1     | 0,9   |
| $e_6$ | 0,9   | 0,9   | 0,3   | 0,6   | 0,7   | 1     |

Table 3-10 Matrix M of the Expert 4

| $M_4$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $c_1$ | 0,9   | 0,7   | 0,5   | 0,8   | 0,7   | 0,9   |
| $c_2$ | 0,7   | 0,5   | 0,9   | 0,5   | 0,8   | 0,9   |
| $c_3$ | 0,8   | 0,6   | 0,9   | 0,6   | 0,4   | 0,2   |
| $c_4$ | 0,7   | 0,6   | 0,1   | 0,8   | 0,5   | 0,5   |
| $c_5$ | 0,1   | 0,1   | 0,8   | 0,3   | 0,3   | 0,1   |
| $c_6$ | 0,2   | 0,3   | 0,7   | 0,5   | 0,8   | 0,6   |
| $c_7$ | 0,7   | 0,6   | 0,3   | 0,6   | 0,8   | 0,7   |

Table 3-11 Matrix C of the Expert 4

| $C_4$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ | $c_6$ | $c_7$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $c_1$ | 1     | 0,8   | 0,5   | 0,5   | 0,4   | 0,6   | 0,5   |
| $c_2$ | 0,7   | 1     | 0,3   | 0,5   | 0,5   | 0,6   | 0,4   |
| $c_3$ | 0,4   | 0,5   | 1     | 0,4   | 0,7   | 0,7   | 0,5   |
| $c_4$ | 0,5   | 0,5   | 0,4   | 1     | 0,3   | 0,5   | 0,7   |
| $c_5$ | 0,2   | 0,4   | 0,5   | 0,3   | 1     | 0,5   | 0,4   |
| $c_6$ | 0,8   | 0,6   | 0,5   | 0,5   | 0,5   | 1     | 0,4   |
| $c_7$ | 0,6   | 0,5   | 0,4   | 0,5   | 0,5   | 0,5   | 1     |

*Table 3-12 Matrix E of the Expert 4*

| $E_4$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $e_1$ | 1     | 0,7   | 0,3   | 0,7   | 0,8   | 0,7   |
| $e_2$ | 0,9   | 1     | 0     | 0,7   | 0,5   | 0,4   |
| $e_3$ | 0,5   | 0,4   | 1     | 0,6   | 0,4   | 0,3   |
| $e_4$ | 0,8   | 0,9   | 0,3   | 1     | 0,4   | 0,4   |
| $e_5$ | 0,4   | 0,6   | 0,6   | 0,7   | 1     | 0,7   |
| $e_6$ | 0,7   | 0,8   | 0,2   | 0,5   | 0,6   | 1     |

*Table 3-13 Matrix M of the Expert 5*

| $M_5$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $c_1$ | 0,8   | 0,6   | 0,4   | 0,7   | 0,6   | 0,8   |
| $c_2$ | 0,6   | 0,4   | 0,8   | 0,4   | 0,7   | 0,8   |
| $c_3$ | 0,7   | 0,5   | 0,8   | 0,5   | 0,3   | 0,1   |
| $c_4$ | 0,8   | 0,7   | 0,2   | 0,9   | 0,6   | 0,6   |
| $c_5$ | 0,2   | 0,2   | 0,9   | 0,3   | 0,3   | 0,2   |
| $c_6$ | 0,3   | 0,4   | 0,8   | 0,5   | 0,9   | 0,7   |
| $c_7$ | 0,8   | 0,7   | 0,4   | 0,7   | 0,9   | 0,8   |

*Table 3-14 Matrix C of the Expert 5*

| $C_5$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ | $c_6$ | $c_7$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $c_1$ | 1     | 0,8   | 0,5   | 0,5   | 0,4   | 0,6   | 0,5   |
| $c_2$ | 0,6   | 1     | 0,3   | 0,5   | 0,4   | 0,5   | 0,3   |
| $c_3$ | 0,4   | 0,7   | 1     | 0,4   | 0,9   | 0,9   | 0,6   |
| $c_4$ | 0,5   | 0,5   | 0,4   | 1     | 0,3   | 0,6   | 0,8   |
| $c_5$ | 0,1   | 0,3   | 0,4   | 0,2   | 1     | 0,4   | 0,3   |
| $c_6$ | 0,7   | 0,5   | 0,5   | 0,4   | 0,5   | 1     | 0,3   |
| $c_7$ | 0,6   | 0,6   | 0,3   | 0,5   | 0,4   | 0,5   | 1     |

*Table 3-15 Matrix E of the Expert 5*

| $E_5$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $e_1$ | 1     | 0,8   | 0,4   | 0,6   | 0,7   | 0,9   |
| $e_2$ | 0,8   | 1     | 0,2   | 0,9   | 0,5   | 0,6   |
| $e_3$ | 0,5   | 0,4   | 1     | 0,7   | 0,3   | 0,4   |
| $e_4$ | 0,8   | 0,9   | 0,3   | 1     | 0,4   | 0,3   |
| $e_5$ | 0,5   | 0,5   | 0,6   | 0,7   | 1     | 0,8   |
| $e_6$ | 0,9   | 0,8   | 0,1   | 0,6   | 0,5   | 1     |

Step 4: The weight vector for the OWA operator is  $W = (0.1, 0.1, 0.25, 0.25, 0.3)$  with the following measures

Attitudinal character:

$$\alpha(W) = 0.36$$

Entropy or dispersion:

$$H(W) = 1.51$$

Balance:

$$Bal(W) = -0.28$$

Step 5: The aggregated results of the five experts with the OWA operator are:

*Table 3-16 Matrixes M' of Aggregated Results*

| $M'$  | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $c_1$ | 0,79  | 0,66  | 0,36  | 0,76  | 0,59  | 0,79  |
| $c_2$ | 0,71  | 0,45  | 0,85  | 0,43  | 0,64  | 0,82  |
| $c_3$ | 0,72  | 0,60  | 0,73  | 0,56  | 0,16  | 0,12  |
| $c_4$ | 0,78  | 0,67  | 0,17  | 0,82  | 0,59  | 0,55  |
| $c_5$ | 0,17  | 0,18  | 0,88  | 0,24  | 0,27  | 0,11  |
| $c_6$ | 0,26  | 0,36  | 0,72  | 0,45  | 0,86  | 0,65  |
| $c_7$ | 0,76  | 0,69  | 0,39  | 0,65  | 0,82  | 0,80  |

*Table 3-17 Matrixes C' of Aggregated Results*

| $C'$  | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ | $c_6$ | $c_7$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $c_1$ | 1     | 0,78  | 0,51  | 0,48  | 0,37  | 0,61  | 0,51  |
| $c_2$ | 0,68  | 1     | 0,27  | 0,54  | 0,46  | 0,58  | 0,35  |
| $c_3$ | 0,41  | 0,60  | 1     | 0,39  | 0,80  | 0,83  | 0,50  |
| $c_4$ | 0,48  | 0,48  | 0,37  | 1     | 0,27  | 0,53  | 0,73  |
| $c_5$ | 0,15  | 0,35  | 0,48  | 0,25  | 1     | 0,46  | 0,36  |
| $c_6$ | 0,75  | 0,58  | 0,48  | 0,46  | 0,50  | 1     | 0,35  |
| $c_7$ | 0,61  | 0,53  | 0,35  | 0,48  | 0,45  | 0,51  | 1     |



*Table 3-18 Matrixes E' of Aggregated Results*

| <i>E'</i>            | <b>e<sub>1</sub></b> | <b>e<sub>2</sub></b> | <b>e<sub>3</sub></b> | <b>e<sub>4</sub></b> | <b>e<sub>5</sub></b> | <b>e<sub>6</sub></b> |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| <b>e<sub>1</sub></b> | 1,00                 | 0,77                 | 0,36                 | 0,66                 | 0,72                 | 0,70                 |
| <b>e<sub>2</sub></b> | 0,76                 | 1,00                 | 0,03                 | 0,77                 | 0,53                 | 0,47                 |
| <b>e<sub>3</sub></b> | 0,48                 | 0,29                 | 1,00                 | 0,59                 | 0,23                 | 0,27                 |
| <b>e<sub>4</sub></b> | 0,78                 | 0,82                 | 0,28                 | 1,00                 | 0,38                 | 0,28                 |
| <b>e<sub>5</sub></b> | 0,46                 | 0,49                 | 0,58                 | 0,67                 | 1,00                 | 0,85                 |
| <b>e<sub>6</sub></b> | 0,79                 | 0,79                 | 0,10                 | 0,49                 | 0,56                 | 1,00                 |

Steps 6 and 7: After obtaining the above matrices, we proceed to calculate the second order matrix with cumulative effects, through the maxmin composition ( $M'' = [C'] \circ [M'] \circ [E']$ ):

*Table 3-19 Convolution among Matrixes Max-Min M''*

| <i>M''</i>           | <b>e<sub>1</sub></b> | <b>e<sub>2</sub></b> | <b>e<sub>3</sub></b> | <b>e<sub>4</sub></b> | <b>e<sub>5</sub></b> | <b>e<sub>6</sub></b> |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| <b>c<sub>1</sub></b> | 0,79                 | 0,79                 | 0,78                 | 0,76                 | 0,72                 | 0,79                 |
| <b>c<sub>2</sub></b> | 0,79                 | 0,79                 | 0,85                 | 0,68                 | 0,71                 | 0,82                 |
| <b>c<sub>3</sub></b> | 0,72                 | 0,72                 | 0,80                 | 0,67                 | 0,83                 | 0,83                 |
| <b>c<sub>4</sub></b> | 0,78                 | 0,82                 | 0,58                 | 0,82                 | 0,73                 | 0,73                 |
| <b>c<sub>5</sub></b> | 0,48                 | 0,48                 | 0,88                 | 0,59                 | 0,48                 | 0,48                 |
| <b>c<sub>6</sub></b> | 0,75                 | 0,75                 | 0,72                 | 0,75                 | 0,86                 | 0,85                 |
| <b>c<sub>7</sub></b> | 0,79                 | 0,79                 | 0,58                 | 0,69                 | 0,82                 | 0,82                 |

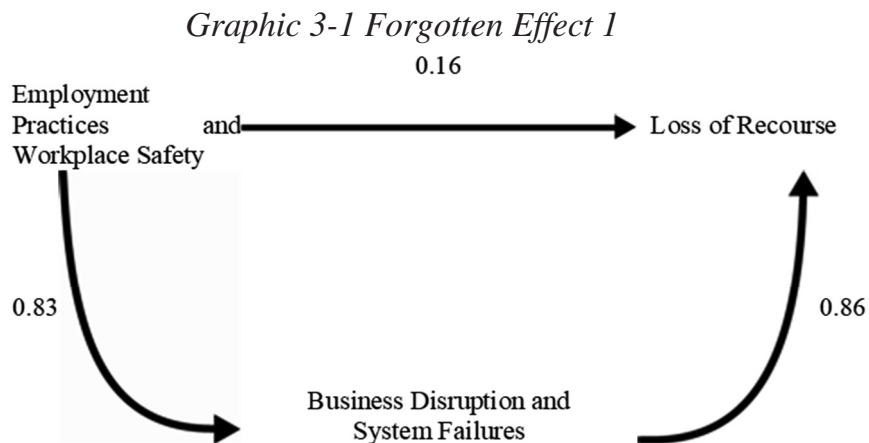
Step 8: Finally, the forgotten effect matrix is calculated ( $O = [M''] - [M']$ ), by the difference between the matrix of indirect effects  $[M'']$  and the matrix of direct effects  $[M']$

*Table 3-20 Forgotten Effects Matrix O*

| <i>O</i>             | <b>e<sub>1</sub></b> | <b>e<sub>2</sub></b> | <b>e<sub>3</sub></b> | <b>e<sub>4</sub></b> | <b>e<sub>5</sub></b> | <b>e<sub>6</sub></b> |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| <b>c<sub>1</sub></b> | 0,00                 | 0,14                 | 0,42                 | 0,00                 | 0,13                 | 0,00                 |
| <b>c<sub>2</sub></b> | 0,08                 | 0,35                 | 0,00                 | 0,26                 | 0,08                 | 0,00                 |
| <b>c<sub>3</sub></b> | 0,00                 | 0,12                 | 0,06                 | 0,12                 | 0,67                 | 0,71                 |
| <b>c<sub>4</sub></b> | 0,00                 | 0,15                 | 0,42                 | 0,00                 | 0,14                 | 0,18                 |
| <b>c<sub>5</sub></b> | 0,31                 | 0,30                 | 0,00                 | 0,35                 | 0,21                 | 0,37                 |
| <b>c<sub>6</sub></b> | 0,50                 | 0,40                 | 0,00                 | 0,31                 | 0,00                 | 0,20                 |
| <b>c<sub>7</sub></b> | 0,04                 | 0,10                 | 0,19                 | 0,04                 | 0,00                 | 0,02                 |

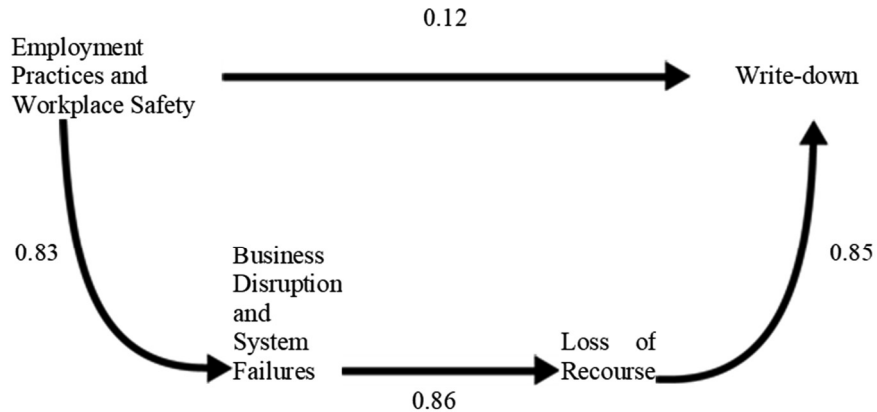
The table 3.20 with the forgotten effects matrix shows us the causalities relations that have not been qualified by the experts. In this case, for the  $\alpha = 0.6$  level two incidences have been taken, which are  $u_{c_3e_5} = 0.67$  and  $u_{c_3e_6} = 0.71$ .

The first case shows that, the experts had qualified the impact between  $C_3$  (Employment Practices and Workplace Safety) and  $E_5$  (Loss of Recourse) with the value 0.16 (almost without incidence), but throughout the forgotten effects theory, the impact is found as 0.67 when the relationship between these two variables are analyzed with  $C_6$  (Business Disruption and System Failures). This can be shown graphically as following:



In the second case, the relation between  $C_3$  (Employment Practices and Workplace Safety) and  $E_6$  (Write-down) the experts qualified it initially with the 0.12 value (virtually without incidence). Nevertheless, the impact of those two variables is 0.71 taking into account the forgotten effect impact in which is involved  $C_6$  (Business Disruption and System Failures) and  $E_5$  (Loss of Recourse). It is important to underline that the first case is included in the second case. This can be shown graphically as following:

Graphic 3-2 Forgotten Effect 2



## 6. Conclusions

A new model has been introduced for the analysis of causality direct and indirect relationships taking into account multiple expert opinions and using the OWA aggregation operator. This operator allows us to grant more or less weights to the data, depending on the descending or ascending order of the arguments. From these aggregated results, it is possible to apply the forgotten effects model to obtain the second or higher generation incidents. The usage of these tools may allow analyzing more precisely the problems of many economic and business problems and to establish policies or make decisions with better arguments.

The application presents a qualitative operational risk analysis, where the applicability of the proposed method is shown to discover causality indirect relationships that have not been taken into account initially, especially when the information is insufficient, fuzzy and imprecise.

In future research OWA operator extensions and diffuse tools might be included, which would be more appropriate for other types of causality analysis where multiple expert opinions or combination of data from different sources may be required. It is also possible to consider the applicability of the model of causality analysis in other fields.

## References

- Bank for International Settlements (BIS), (2001). QIS 2 - Operational Risk Loss Data, access on line, 05 Sept 2015: <http://www.bis.org/bcbs/qisoprisknote.pdf>
- Gil-Lafuente, A. M. (2015). Application of the Forgotten Effects Model to the Economic Effects for Public European Health Systems by the Early Diagnostics of Emergent and Rare Diseases. *Procedia Economics and Finance*, 22, 10-19.
- Gil-Lafuente, A. M., & Luis Bassa, C. (2012). Identificación de los atributos contemplados por los clientes en una estrategia CRM utilizando el modelo de efectos olvidados. *Cuadernos del CIMBAGE*, (13).
- Gil-Lafuente, A. M., Keropyan, A., & Balvey, J. (2015). Analysis of the relationship between the economic activity of regions and welfare of its inhabitants. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, 49(3), 215–232.
- Herrera, F., Herrera-Viedma, E., & Verdegay, J. L. (1996). Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. *Fuzzy Sets and systems*, 79(2), 175-190.
- Kaufmann, A., & Gil Aluja, J. (1988). *Modelos para la investigación de efectos olvidados*. Vigo: Milladoiro.
- Maqueda Lafuente, F.J., Gil Lafuente, A.M., Guzman-Parra, V.F., & Gil Lafuente, J. (2013). Key factors for entrepreneurial success. *Management Decision*, 51(10), 1932–1944.
- Martorell-Cunill, O., Gil-Lafuente, A. M., Socias Salvà, A., & Mulet Forteza, C. (2013). The growth strategies in the hospitality industry from the perspective of the forgotten effects. *Computational and Mathematical Organization Theory*, 20(2), 195–210.
- Mata, F., Martínez, L., & Herrera-Viedma, E. (2009). An adaptive consensus support model for group decision-making problems in a multigranular fuzzy linguistic context. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(2), 279-290.

- Merigo, J. M. (2013). The probabilistic weighted averaging distance and its application in group decision making. *Kybernetes*, 42(5), 686-697
- Merigó, J. M., Casanovas, M., & Yang, J. B. (2014). Group decision making with expertons and uncertain generalized probabilistic weighted aggregation operators. *European Journal of Operational Research*, 235(1), 215-224.
- Merigó, J. M., Gil-Lafuente, A. M., Zhou, L. G., & Chen, H. Y. (2012). Induced and linguistic generalized aggregation operators and their application in linguistic group decision making. *Group Decision and Negotiation*, 21(4), 531-549.
- Vizuet Luciano, E., Gil-Lafuente, A. M., García González, A., & Boria-Reverter, S. (2013). Forgotten effects of corporate social and environmental responsibility. *Kybernetes*, 42(5), 736–753.
- Wang, J., Wang, J. Q., Zhang, H. Y., & Chen, X. H. (2016). Multi-criteria group decision-making approach based on 2-tuple linguistic aggregation operators with multi-hesitant fuzzy linguistic information. *International Journal of Fuzzy Systems*, 18(1), 81-97.
- Xia, M., Xu, Z., & Chen, N. (2013). Some hesitant fuzzy aggregation operators with their application in group decision making. *Group Decision and Negotiation*, 22(2), 259-279.
- Xian, S., Sun, W., Xu, S., & Gao, Y. (2016). Fuzzy linguistic induced OWA Minkowski distance operator and its application in group decision making. *Pattern Analysis and Applications*, 19(2), 325-335.
- Xu, Z. (2006). Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making. *Information Fusion*, 7(2), 231-238.
- Yager, R.R., (1988). On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18(1), 183-190.
- Yager, R.R. (1993). Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59, 125–148.
- Yager, R.R. (1996). Constrained OWA aggregation. *Fuzzy Sets and Systems*, 81(1), 89-101.



## **Capítulo 4**

### **Operadores de Agregación OWA Inducidos y Generalizados en la Teoría de la Utilidad Multiatributo**

**“Induced and Generalized Aggregation Operators in Multi-Attribute Utility Theory”**





# Induced and Generalized Aggregation Operators in Multi-Attribute Utility Theory<sup>10</sup>

Agustín Torres Martínez  
*Department of Business Administration,  
Faculty of Economic and Business Science, University of Barcelona,  
Barcelona, Spain*

Anna Maria Gil Lafuente  
*Department of Business Administration,  
Faculty of Economic and Business Science, University of Barcelona,  
Barcelona, Spain*

José Maria Merigó Lindahl  
*Department of Management Control and Information Systems,  
University of Chile  
Santiago, Chile*

## Abstract

En este artículo se presenta un nuevo operador denominado *induced generalized OWA multi-attribute utility theory (IGOWA-MAUT) operator*. Este operador permite agregar información que incluye valores de utilidad en modelos de decisión multi-atributo, que incluye el método *MAUT*, variables de inducción y el *induced generalized OWA (IGOWA) operator*. Con el *IGOWA-MAUT operator* se pueden estudiar una gran cantidad de casos particulares, al analizar el vector de ponderación  $W$  y el parámetro  $\lambda$ . Finalmente se presenta una aplicación ilustrativa de este nuevo operador en un problema de priorización de riesgos

**Keywords:** multi-attribute utility theory (MAUT), OWA operator, multicriteria decision making,

---

<sup>10</sup> Documento de trabajo para enviar a publicación

## 1. Introducción

Constantemente las organizaciones están enfrentadas a procesos complejos de toma de decisiones, en los cuales las consecuencias pueden comprometer sus objetivos y en muchos casos su supervivencia. Uno de los aspectos más influyentes en este proceso es el decisor y la forma en que valora dichas consecuencias, ya que prácticamente en la mayoría de los problemas no es posible predecir con precisión las consecuencias de cada alternativa (Keeney, 1982). Por consiguiente, la mayoría de decisiones ocurren bajo riesgo e incertidumbre haciendo que el proceso de toma de decisiones y consenso de los decisores sea muy complejo, puesto que la elección de una alternativa depende principalmente de la tolerancia y percepción del riesgo de quienes toman las decisiones. Por otro lado, (Stone, Yates, & Caruthers, 2002) proponen que hay tres elementos esenciales en la creación de riesgo: (1) las pérdidas potenciales, teniendo en cuenta que la determinación de qué se considera una pérdida dependerá de cada persona y de cual sea su nivel de referencia. (2) la relevancia de dichas pérdidas, que también estará sujeta a la apreciación personal de cada individuo, no solo por la existencia de distintos niveles de referencia, sino también por la manera personal en que son valorados los distintos resultados que se apartan de dichos niveles y (3) la incertidumbre acerca de dichas pérdidas, ya que la existencia del riesgo se asocia con los resultados de las distintas alternativas. De forma tal que si estos resultados garantizados, no existe riesgo. Por tanto la gestión del riesgo se enfoca en mantener los riesgos en niveles aceptables que eviten consecuencias graves directas e indirectas (Teshfamariam, Sadiq, & Najjaran, 2010). De este modo, la valoración del riesgo en las distintas alternativas de una decisión es un factor clave para su elección.

Otro elemento que es importante destacar es que las valoraciones emitidas por los expertos en diferentes etapas de la gestión de riesgos implícitamente tienen dimensiones éticas que se ven reflejadas en el apetito de riesgo de la entidad. En este sentido las preferencias del decisor dependen de las consecuencias de cada alternativa y dichas consecuencias pueden ser reflejadas, a partir de las preferencias del decisor con medidas de utilidad (Zavadskas & Turskis, 2011) El origen de la teoría de la utilidad se debe a Daniel Bernoulli (1738), quien en su trabajo expone una crítica del concepto de esperanza matemática, planteando sustituirla por la esperanza moral o utilidad esperada. Esta función de utilidad es una representación cuantitativa

de las preferencias de un decisor y cualquier modelo de utilidad científicamente fundamentado contiene las suposiciones de preferencia subyacentes (Aliev et al., 2012).

En los problemas de decisión multiatributo, es necesario agregar la información de cada uno de los atributos para obtener un resultado final y para ello existen muchos operadores de agregación en la literatura (Beliakov et.al., 2015). Un modelo de decisión comúnmente utilizado con la media ponderada es *muti attribute utility theory MAUT* (Wallenius et al., 2008a). Sin embargo desde que Yager (1988) propuso el *ordered weighted averaging (OWA) operator* son muchas las investigaciones que se han presentado en forma de extensiones y aplicaciones en problemas de toma de decisiones: el *induced OWA (IOWA) operator* (Yager & Filev, 1999), el *linguistic OWA (LOWA) operator* (Herrera, et.al., 1996; Xu, 2004) el *uncertain OWA (UOWA) operator* (Xu & Da, 2002) entre otros. En el caso de decisiones de grupo multiatributo también se han realizado muchos trabajos con la implementación de operadores *OWA* (Chen et.al., 2011; Liu, et.al., 2014; Liu & Wang, 2016; Wang, et.al., 2016; Xu, et.al., 2012; Xu, et.al., 2014).

En la literatura, también se encuentran nuevas extensiones del operador *OWA* está relacionadas con el tratamiento de la aversión al riesgo utilizando funciones de utilidad, tales como: el *generalized ordered weighted utility averaging (GOWUA) operator* (Gao, et.al., 2015a) el *generalized ordered weighted utility averaging-hyperbolic absolute risk aversion (GOWUA-HARA) operator* (Gao et al., 2015a), *generalized ordered weighted utility proportional averaging (GOWUPA) operator* (Gao, et.al., 2015b) y *generalized ordered weighted utility proportional averaging-hyperbolic absolute risk aversion (GOWUPA-HARA) operator* (Gao et al., 2015b). También es importante destacar la aplicabilidad de los operadores en muchos problemas de economía y empresa como es el caso de selección de proveedores (Igoulalene, et.al., 2015; Karsak & Dursun, 2015; Wang, et. al., 2013) tarificación de seguros (Casanovas, et.al., 2015) selección de productos financieros (Merigó & Gil-Lafuente, 2010) selección de estrategias ( Merigo & Gil-Lafuente, 2013; Merigo, et. al., 2011) y decisiones de reaseguro (Casanovas, et.al., 2016) entre otros.

El objetivo de este artículo es presentar un nuevo enfoque de los procesos de toma de decisiones en modelos MAUT, siendo un método muy adecuado para tratar problemas muy complejos con muchos atributos

cuantitativos y cualitativos, además de dificultades probabilísticas en el análisis (Sanayei, et. al., 2008). El operador OWA-MAUT incluye el nivel de aversión o tolerancia al riesgo de los decisores, a través de funciones de utilidad y el grado de optimismo o pesimismo del decisor sobrevalorando o infravalorando la información a través de los operadores OWA. También se presenta el operador IOWA-MAUT, que incluye variables de inducción, las cuales determinan la reordenación de las utilidades de los atributos en el proceso de agregación y el operador IGOWA-MAUT, que incluye diferentes casos particulares del operador IOWA-MAUT en un modelo generalizado.

Este artículo está estructurado de la siguiente manera: en la sección 2 se presentan los conceptos básicos sobre la teoría de la utilidad, MAUT y operadores OWA. En la sección 3 se introduce el operador IGOWA-MAUT y se analizan diferentes familias del mismo operador, en la sección 4 se presentan un método para decisiones grupales con el operador IGOWA-MAUT, la sección 4 presenta una aplicación ilustrativa de priorización de riesgos y finalmente en la sección 5 se muestran las conclusiones del artículo.

## 2. Preliminares

En esta sección se explica los conceptos básicos de MAUT (aditivo y multiplicativo), y los operadores OWA, GOWA e IOWA.

### *Multi Attribute Utility Theory (MAUT)*

Un modelo multiatributo evalúa las alternativas de una decisión, a través de los atributos que tienen relevancia para definir las preferencias de la decisión (Keeney & Raiffa, 1976). En el caso del MAUT, estos atributos son evaluados con una función de utilidad y posteriormente agregados de forma aditiva o multiplicativa.

Los valores  $u_i$  pueden ser asignados directamente por los decisores de acuerdo con su criterio, por tanto un valor de  $x_i$  puede obtener diferentes evaluaciones  $u_i$  por cada decisor. Esta forma de valorar los atributos se justifica cuando las consecuencias de las alternativas pueden ser inciertas.

En la literatura comúnmente se presentan dos tipos MAUT: aditivo y multiplicativo (Collins et al., 2006)

**Definición 1:** sea  $x_{ij}$  con  $i$  alternativas y  $j$  atributos el modelo aditivo se expresa como:

$$U(x_i) = \sum_{j=1}^n v_j * u_j(x_{ij})$$

Donde:

$v_j$  es el factor de ponderación relativo para el  $j$ -ésimo atributo con  $v_j \in [0,1]$  y  $\sum_{j=1}^n v_j = 1$ .

$u_j(x_{ij})$  es la utilidad del valor  $x_{ij}$  para el  $j$ -ésimo atributo.

Todos los atributos son independientes.

**Definición 2:** sea  $x_{ij}$  con  $i$  alternativas y  $j$  atributos el modelo multiplicativa se expresa como:

$$U(x_i) = \frac{\prod_{i=1}^n [K * v_j * u_j(x_{ij}) + 1] - 1}{K}$$

Donde:

$v_j$  es el factor de ponderación relativo para el  $j$ -ésimo atributo con  $v_j \in [0,1]$  y  $\sum_{j=1}^n v_j \neq 1$ .

$u_j(x_{ij})$  es la utilidad del valor  $x_{ij}$  para el  $j$ -ésimo atributo.

$K$  es una constante escalar que puede ser definida iterativamente así:

$$1 + K = \prod_{i=1}^n (K * v_j)$$

Todos los atributos son independientes,  $-1 < K < 0$  implica independencia de la utilidad.

### El operador OWA

El *ordered weighted averaging (OWA) operator* fue propuesto por Yager (1988), el cual es un operador de agregación de información que utiliza un vector de ponderación que permite establecer una visión optimista o pesimista de una situación que varía entre el mínimo y el máximo.

**Definición 3:** Un operador OWA se define como una función de dimensión  $n$ ,  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  a la que se asocia un vector  $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ , de dimensión  $n$  que cumple con las siguientes condiciones:

$$- w_i \in [0,1].$$

$$- \sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

$$- f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n w_i * b_i.$$

Donde  $b_i$  es el  $i$ -ésimo más grande de los  $a_i$ , de modo que  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ .

Es importante destacar que el operador OWA es monótono, conmutativo, limitado e idempotente (Yager, 1988). También se puede distinguir según el reordenamiento de los argumentos en forma descendente o ascendente se obtendrá el operador *descending OWA (DOWA)* o el operador *ascending OWA (AOWA)*.

### El Operador OWA Generalizado

El *generalized OWA (GOWA) operator* (Yager, 2004) es un modelo que permite abarcar diferentes casos particulares de los operadores OWA

**Definición 4:** Un operador GOWA se define como una función de dimensión  $n$ ,  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , que cuenta con un vector asociado  $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ , de dimensión  $n$  tal que  $w_i \in [0,1]$  y  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ . De modo que:

$$GOWA(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left( \sum_{i=1}^n w_i b_i^{*\lambda} \right)^{1/\lambda}$$

Donde  $b_i$  es el  $i$ -ésimo más grande de los  $a_i$  y  $\lambda$  es un parámetro tal que  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ . El operador GOWA es monótono, conmutativo, idempotente y limitado (Yager, 2004). En la literatura existen muchos trabajos a partir del operador GOWA (Chen, et.al., 2016; Li, 2010; Merigo & Casanovas, 2011; Merigó & Casanovas, 2010; Merigó & Gil-Lafuente, 2013; Merigó & Yager, 2013; Yager, 2009; Zeng, et.al., 2016; Zhou, Chen, et. al., 2012; Zhou, et. al., 2012)

### El Operador OWA Inducido

El *induced OWA (IOWA) operator* (Yager & Filev, 1999) es una extensión de los operadores de agregación OWA es un extensión de los operadores OWA, en el cual la reordenación de los argumentos se hace teniendo en cuenta el orden de las variables de inducción.

**Definición 5:** Un operador IOWA se define como una función de dimensión  $n$ ,  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , que cuenta con un vector asociado  $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ , de dimensión  $n$  tal que  $w_i \in [0,1]$  y  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ . De modo que:

$$f(\langle a_1, z_1 \rangle, \dots, \langle a_n, z_n \rangle) = \sum_{i=1}^n w_i * b_i$$

Donde  $b_i$  es el valor  $a_i$  de la dupla  $\langle a_i, z_i \rangle$  que tiene el  $j$ -ésimo más grande de los  $z_i$  ( $i \in N$ ), siendo  $a_i$  la variable del argumento y  $z_i$  la variable de inducción para la ordenación.

El operador IOWA es monótono, conmutativo, idempotente y limitado (Yager & Filev, 1999) y ha sido estudiado en diferentes problemas (Casanovas, et.al., 2016; Chiclana, et. al., 2007; Merigó, 2011; Su, et. al., 2015; Xian & Sun, 2014; Xu, 2006; Zeng, et. al., 2017). A partir del *Induced Generalized OWA (IGOWA) operator* (Merigo, & Gil Lafuente, 2009) se pueden establecer una gran cantidad de casos particulares.

### 3. Modelos de Teoría de la Utilidad Multiatributo con el Operador OWA

El problema de las decisiones bajo riesgo o incertidumbre es que el decisor no se encuentra seguro sobre las consecuencias de las decisiones, por tanto, un aspecto importante de los modelos multiatributo es que no se centra en una visión global del problema sino en partes más pequeñas definidas como atributos para comprender mejor la situación de cada una de las alternativas. Lo cual hace que este tipo de herramientas mejoren la toma de decisiones en las que se trata de conciliar múltiples objetivos, a veces opuestos entre sí. MAUT es un modelo utilizado ampliamente en problemas de toma de decisiones (Huang, et. al., 2011; Wallenius et al., 2008b) en sus dos clases: aditiva y multiplicativa explicadas en la sesión 2. Por otro lado, desde que Yager (1988) presentó el operador OWA, este se ha incluido en muchos modelos multicriterio, contribuyendo a mejorar los modelos clásicos de decisión con una perspectiva diferente de la agregación de información. A continuación, se presenta diferentes modelos de MAUT con el operador OWA.

### El operador OWA *Multi-Attribute Utility Theory (OWA-MAUT)*

Los modelos que utilizan MAUT tradicionalmente asignan una ponderación relativa a cada uno de los atributos de acuerdo con los objetivos o intereses de los decisores. Sin embargo, este sistema de contrapesos de los atributos no siempre es satisfactorio en el modelo y se requiere explorar otras alternativas que permitan justificar mejor las decisiones y generar mejor consenso. El operador OWA es una herramienta muy útil en la agregación de información que permite sobrevalorar o infravalorar los argumentos teniendo en cuenta la actitud pesimista u optimista de los analistas. El operador OWA-MAUT se define así:

**Definición 6:** Un operador OWA-MAUT  $r$  de dimensión  $n$ , es una función MAUT-OWA:  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  que tiene un vector de ponderación asociado  $W$  de dimensión  $n$ , tal que  $w_i \in [0,1]$  y  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ , de acuerdo con la siguiente formula:

$$OWA - MAUT(a_1u_1, a_2u_2, \dots, a_nu_n) = \sum_{i=1}^n w_i * u_i^*$$

Donde:

$a_i$ , es valor de cada atributo  $i$  para cada una de las alternativas de decisión.

$u_i \in [0,1]$ , es la utilidad que el decisor establece para el valor del atributo  $a_i$

$u_i^*$ , es el  $i$ -ésimo más grande de los  $u_i$ , de modo que  $u_1^* \geq u_2^* \geq \dots \geq u_n^*$ .

El operador OWA-MAUT cumple con las propiedades de los operadores de media, es decir, es monótono, conmutativo, limitado e idempotente.

La diferencia entre el operador OWA-MAUT y el método MAUT aditivo es que en el primero la ponderación depende únicamente de la posición que ocupe cada utilidad de los atributos ordenadas en orden descendente o ascendente según sea el caso y en el segundo la ponderación de las utilidades de cada uno de los atributos dependerá de la importancia que el decisor les asigne. La aplicabilidad de este nuevo modelo frente al MAUT aditivo clásico, es que no siempre se cuenta con unos criterios adecuados y consensuados sobre la ponderación de los atributos y alternativamente con el



operador OWA-MAUT se propone incluir la actitud optimista o pesimista de los decisores teniendo en cuenta la ordenación en la ponderación.

### **El Operador *Induced OWA Multi-Attribute Utility Theory (IOWA-MAUT)***

En el operador IOWA (Yager & Filev, 1999) los argumentos son agregados teniendo en cuenta la reordenación de variables de ordenación inducidas y no por los valores de dichos argumentos. Este es un modelo de decisión más completo y complejo que permite incluir otros criterios para valorar los atributos de las alternativas. En el caso del operador IOWA-MAUT, la reordenación de las utilidades de los atributos  $u_i$  para la agregación con el operador OWA se tendrá en cuenta las variables de inducción  $z_i$ . El operador IMAUT- OWA se define así:

**Definición 7:** Un operador IOWA-MAUT de dimensión  $n$ , es una función *IOWA-MAUT*:  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  que tiene un vector de ponderación asociado  $W$  de dimensión  $n$ , tal que  $w_i \in [0,1]$  y  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ , de acuerdo con la siguiente formula:

$$IOWA - MAUT(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) = \sum_{i=1}^n w_i * u_i^*$$

Donde:

$u_i^*$  es el valor  $u_i$ , de la tripleta  $\langle a_i, u_i, z_i \rangle$  que tiene el  $j$ -ésimo más grande de los  $z_i$  ( $i \in N$ ),

$a_i$  es valor de cada atributo  $i$  para cada una de las alternativas de decisión.

$u_i \in [0,1]$  es la utilidad que el decisor establece para el valor del atributo  $a_i$ .

$z_i$  es la variable de inducción para la ordenación.

### **El operador *Induced Generalized OWA Multi-Attribute Utility Theory (IGOWA-MAUT)***

El operador IGOWA-MAUT es una extensión del operador GOWA (Yager, 2004), el cual es una generalización de medias que incluye una variedad de casos particulares de agregación. El operador IGOWA-MAUT se define así:

**Definición 8:** Un operador IGOWA-MAUT de dimensión  $n$ , es una función IGOWA-MAUT:  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  que tiene un vector de ponderación asociado  $W$  de dimensión  $n$ , tal que  $w_i \in [0,1]$  y  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ , y un vector probabilístico  $V$  de dimensión  $n$  con  $v_i \in [0,1]$  y  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ , tal que:

$$\begin{aligned} &IGOWA - MAUT (\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n w_i u_i^{* \lambda} \right)^{1/\lambda} \end{aligned}$$

Donde:

$u_i^*$  es el valor  $u_i$ , de la tripleta  $\langle a_i, u_i, z_i \rangle$  que tiene el  $j$ -ésimo más grande de los  $z_i$  ( $i \in N$ ),

$a_i$  es valor de cada atributo  $i$  para cada una de las alternativas de decisión.

$u_i \in [0,1]$  es la utilidad que el decisor establece para el valor del atributo  $a_i$ .

$z_i$  es la variable de inducción para la ordenación.

$\lambda$  es un parámetro, tal que  $\lambda, \epsilon [0,1]$ .

El operador IGOWA-MAUT cumple con las propiedades de conmutatividad, monotonía, limitación e idempotencia. Estas propiedades se demuestran con los siguientes teoremas:

**Teorema 1 (Conmutatividad):** Si se asume que  $f$  es el operador IGOWA-MAUT, entonces:

$$\begin{aligned} &f(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) \\ &= f(\langle a'_1, u'_1, z_1 \rangle \langle a'_2, u'_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a'_n, u'_n, z_n \rangle) \end{aligned}$$

Donde  $(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle)$  es cualquier permutación de los argumentos  $(\langle a'_1, u'_1, z_1 \rangle \langle a'_2, u'_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a'_n, u'_n, z_n \rangle)$ .

Demostración. Sea:

$$f(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) = \left( \sum_{i=1}^n w_i u_i^{* \lambda} \right)^{1/\lambda}$$

y

$$f(\langle a'_1, u'_1, z_1 \rangle \langle a'_2, u'_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a'_n, u'_n, z_n \rangle) = \left( \sum_{i=1}^n w_i r_i^{*\lambda} \right)^{1/\lambda}$$

Ya que  $(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle)$  es cualquier permutación de los argumentos  $(\langle a'_1, u'_1, z_1 \rangle \langle a'_2, u'_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a'_n, u'_n, z_n \rangle)$ , tenemos que si  $u_i = u'_i$  para todo  $i$ , entonces:

$$\begin{aligned} f(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) \\ = f(\langle a'_1, u'_1, z_1 \rangle \langle a'_2, u'_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a'_n, u'_n, z_n \rangle) \end{aligned}$$

**Teorema 2 (Monotonía):** Si se asume que  $f$  es el operador IGOWA-MAUT con si  $u_i \geq v_i$  para todo  $u_i$ , entonces:

$$\begin{aligned} f(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) \\ \geq f(\langle a_1, v_1, z_1 \rangle \langle a_2, v_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, v_n, z_n \rangle) \end{aligned}$$

Demostración. Sea:

$$f(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) = \left( \sum_{i=1}^n w_i u_i^{*\lambda} \right)^{1/\lambda}$$

y

$$f(\langle a_1, v_1, z_1 \rangle \langle a_2, v_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, v_n, z_n \rangle) = \left( \sum_{i=1}^n w_i v_i^{*\lambda} \right)^{1/\lambda}$$

Ya que  $u_i \geq v_i$  para todo  $u_i$ , por consiguiente  $u_i^{*\lambda} \geq v_i^{*\lambda}$ , entonces:

$$\begin{aligned} f(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) \\ \geq f(\langle a_1, v_1, z_1 \rangle \langle a_2, v_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, v_n, z_n \rangle) \end{aligned}$$

**Teorema 3 (Limitación):** Si se asume que  $f$  es el operador IGOWA-MAUT, entonces:

$$\text{Min}\{u_i\} \leq f(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) \leq \text{Max}\{u_i\}$$

Demostración. Sea:

$$\begin{aligned}
f(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) &= \left( \sum_{i=1}^n w_i u_i^{*\lambda} \right)^{1/\lambda} \\
&\leq \left( \sum_{i=1}^n w_i c_i^{*\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left( c_i^{*\lambda} \sum_{i=1}^n w_i \right)^{1/\lambda}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
f(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) &= \left( \sum_{i=1}^n w_i u_i^{*\lambda} \right)^{1/\lambda} \\
&\geq \left( \sum_{i=1}^n w_i d_i^{*\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left( d_i^{*\lambda} \sum_{i=1}^n w_i \right)^{1/\lambda}
\end{aligned}$$

Ya que  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ , tenemos que:

$$f(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) \leq c$$

y

$$f(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) \geq d$$

Por lo tanto,

$$\text{Min}\{u_i\} \leq f(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) \leq \text{Max}\{u_i\}$$

**Teorema 4 (Idempotencia):** Si se asume que  $f$  es el operador IGOWA-MAUT y  $u_i = a$  para todo  $u_i$ , entonces:

$$f(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) = a$$

Demostración. Si  $a_i = a$  para todo  $a_i$ . Se tiene que

$$\begin{aligned}
f(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) &= \left( \sum_{i=1}^n w_i u_i^{*\lambda} \right)^{1/\lambda} \\
&= \left( \sum_{i=1}^n w_i a_i^{*\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left( a_i^{*\lambda} \sum_{i=1}^n w_i \right)^{1/\lambda}
\end{aligned}$$

Ya que  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ , tenemos que:

$$f(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) = a$$

## Familias de Operadores IGOWA-MAUT

Otro tema interesante es el análisis de las diferentes familias de operadores IGOWA-MAUT, mediante el estudio de casos particulares con el parámetro  $\lambda$  y en el vector de ponderación  $W$ . Si se analiza el parámetro  $\lambda$  obtenemos lo siguiente:

### Análisis con el parámetro $\lambda$

Cuando  $\lambda = 1$  el operador IGOWA-MAUT se convierte en el operador IOWA-MAUT:

$$IOWA - MAUT(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) = \sum_{i=1}^n w_i * u_i^*$$

Cuando  $\lambda = 0$  el operador IGOWA-MAUT se convierte en el operador *Geometric IOWA-MAUT (GIOWA-MAUT)*:

$$GIOWA - MAUT(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) = \prod_{i=1}^n u_i^{*w_i}$$

Cuando  $\lambda = -1$  el operador IGOWA-MAUT se convierte en el *Harmonic IOWA-MAUT (HIOWA-MAUT) operator*

$$HIOWA - MAUT(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{u_i^*}}$$

Cuando  $\lambda = 2$  el operador IGOWA-MAUT se convierte en el *Quadratic IOWA-MAUT (HIOWA-MAUT) operator*:

$$\begin{aligned} &HIOWA - MAUT(\langle a_1, u_1, z_1 \rangle \langle a_2, u_2, z_2 \rangle, \dots, \langle a_n, u_n, z_n \rangle) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n w_i u_i^{*2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

### Análisis con el vector $W$

Si se observa el vector de ponderación  $W$ , se obtiene por ejemplo lo siguiente:

El operador Máximo IGOWA-MAUT se obtiene si  $w_k = 1$  y  $w_i = 0$  para todo  $i \neq k$  y  $u_i^* = \text{Max}\{u_i\}$

El operador Mínimo IGOWA-MAUT se obtiene si  $w_k = 1$  y  $w_i = 0$  para todo  $i \neq k$  y  $u_i^* = \text{Min}\{u_i\}$

El *Arithmetic IGOWA-MAUT operator* se obtiene si  $w_i = \frac{1}{n}$  para todo  $u_i$ . Si además  $u_i > u_{i+1}$  se obtiene la media ponderada.

El *Step IGOWA-MAUT operator* se obtiene si  $w_k = 1$  y  $w_i = 0$  para todo  $i \neq k$

El *Window IGOWA-MAUT operator* se obtiene si  $w_i = \frac{1}{m}$  para  $k \leq j \leq k + m - 1$  y  $w_i = 0$  para  $j < k + m$  y  $j < k$ .

El *Olympic IGOWA-MAUT operator* se obtiene si  $w_1 = w_n = 0$  y los otros  $w_i = \frac{1}{n-2}$ . Teniendo en cuenta que si  $n = 3$  o  $n = 4$  se obtiene Median IGOWA-MAUT operator.

#### 4. Modelo de Decisiones de Grupo con el Operador IGOWA-MAUT

En esta sección se presenta un nuevo método para decisiones de grupo en problemas multiatributo con el operador IGOWA-MAUT:

Paso 1. Determinar el conjunto de atributos con los  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  con los cuales se evaluarán las alternativas  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , formando la matriz de alternativas y atributos  $\bar{D} = (\tilde{x}_{ij})_{m \times n}$ . En este caso los atributos pueden expresarse en diferentes escalas de medida, ya que estos valores no serán agregados en el proceso de decisión.

Paso 2. Un grupo de decisores  $d_k$  con  $k = 1, 2, \dots, t$  emitirá sus valoraciones para las alternativas y atributos de las matriz  $\bar{D}$  obteniéndose  $k$  matrices de utilidad  $\bar{U} = (\tilde{u}_{ij}^k)_{m \times n}$  que serán agregadas de forma ponderada utilizando el vector  $P$  tal que  $\sum_{k=1}^t p_k = 1$  y  $p_k \in [0, 1]$ . El resultado será una matriz colectiva de utilidades de los decisores  $\bar{\bar{U}} = (\tilde{u}_{ij}^k)_{m \times n}$ .

Paso 3. Calcular las variables de inducción  $\bar{Z} = (\tilde{z}_{ij})_{m \times n}$  que se utilizarán como criterio en la ordenación.

Paso 4. Determinar el vector  $W$  de dimensión  $n$ , tal que  $w_i \in [0, 1]$  y  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  y el parámetro  $\lambda$  que determinará el tipo de operador IGOWA-MAUT a utilizar para obtener los resultados agregados.

Paso 5. Establecer un ranking de alternativas de acuerdo con los resultados obtenidos en la tabla anterior, ya sea en orden descendente o ascendente dependiendo del criterio de decisores y la situación particular de problema analizado.

## 5. Aplicación Ilustrativa

A partir de las opiniones de expertos se busca evaluar la exposición al riesgo operacional en cuatro líneas de negocio de una entidad financiera ( $c_i$ ): finanzas corporativas ( $c_1$ ), negociación y ventas ( $c_2$ ), banca comercial ( $c_3$ ) y banca minorista ( $c_4$ ) en las diferentes categorías del riesgo operacional definidas por Basilea II ( $a_j$ ): fraude interno ( $a_1$ ), fraude externo ( $a_2$ ), relaciones laborales y seguridad ( $a_3$ ), prácticas con clientes, productos y negocios ( $a_4$ ), daños a activos materiales ( $a_5$ ), incidencias en el negocio y fallos en los sistemas ( $a_6$ ) y ejecución entrega y gestión de procesos ( $a_7$ ) En este caso un grupo de tres expertos calificarán las exposiciones al riesgo en una escala de 0 a 1 que determinará la utilidad esperada de exposición al riesgo operacional por línea de negocio (atributos) y categoría de riesgo (alternativas). En primer lugar, se obtendrá valores de frecuencia e impacto de los riesgos de acuerdo con las siguientes escalas:

| <b>Frecuencia (<i>Fr.</i>)</b> |                     | <b>Impacto (<i>Imp.</i>)</b> |                              |
|--------------------------------|---------------------|------------------------------|------------------------------|
| 0                              | Nula                | 0                            | Ninguno                      |
| 0,1                            | Demasiado Baja      | 0,1                          | Prácticamente Insignificante |
| 0,2                            | Muy Baja            | 0,2                          | Muy Bajo                     |
| 0,3                            | Baja                | 0,3                          | Bajo                         |
| 0,4                            | Medianamente Baja   | 0,4                          | Medianamente Bajo            |
| 0,5                            | Media               | 0,5                          | Medio                        |
| 0,6                            | Medianamente Alta   | 0,6                          | Medianamente Alto            |
| 0,7                            | Alta                | 0,7                          | Alto                         |
| 0,8                            | Muy Alta            | 0,8                          | Muy Alto                     |
| 0,9                            | Demasiado Alta      | 0,9                          | Demasiado Alto               |
| 1                              | Extremadamente Alta | 1                            | Catastrófico                 |

La multiplicación de la frecuencia determinará la exposición al riesgo, que definirá los valores de utilidad esperada  $\tilde{u}_{ij}$ . De esta forma se obtienen  $k$  matrices  $\bar{U} = (\tilde{u}_{ij}^k)_{m \times n}$ . En las tablas 4.1, 4.2 y 4.3 se muestran las evaluaciones de los expertos.

Tabla 4-1 Evaluación del Experto 1

| $\bar{E}_1$ | $c_1$      |             | $c_2$      |             | $c_3$      |             | $c_4$      |             |
|-------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|-------------|
|             | <i>Fr.</i> | <i>Imp.</i> | <i>Fr.</i> | <i>Imp.</i> | <i>Fr.</i> | <i>Imp.</i> | <i>Fr.</i> | <i>Imp.</i> |
| $a_1$       | 0,2        | 0,8         | 0,4        | 0,5         | 0,7        | 0,3         | 0,3        | 0,7         |
| $a_2$       | 0,5        | 0,7         | 0,7        | 0,6         | 0,6        | 0,5         | 0,4        | 0,7         |
| $a_3$       | 0,3        | 0,5         | 0,2        | 0,5         | 0,8        | 0,4         | 0,2        | 0,6         |
| $a_4$       | 0,3        | 0,4         | 0,4        | 0,5         | 0,8        | 0,6         | 0,2        | 0,5         |
| $a_5$       | 0,6        | 0,5         | 0,5        | 0,6         | 0,2        | 0,7         | 0,3        | 0,4         |
| $a_6$       | 0,4        | 0,6         | 0,7        | 0,7         | 0,3        | 0,6         | 0,5        | 0,5         |
| $a_7$       | 0,5        | 0,8         | 0,5        | 0,4         | 0,4        | 0,6         | 0,6        | 0,7         |

Tabla 4-2 Evaluación del Experto 2

| $\bar{E}_2$ | $c_1$      |             | $c_2$      |             | $c_3$      |             | $c_4$      |             |
|-------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|-------------|
|             | <i>Fr.</i> | <i>Imp.</i> | <i>Fr.</i> | <i>Imp.</i> | <i>Fr.</i> | <i>Imp.</i> | <i>Fr.</i> | <i>Imp.</i> |
| $a_1$       | 0,3        | 0,7         | 0,3        | 0,8         | 0,6        | 0,4         | 0,4        | 0,8         |
| $a_2$       | 0,4        | 0,5         | 0,6        | 0,6         | 0,5        | 0,6         | 0,2        | 0,6         |
| $a_3$       | 0,5        | 0,7         | 0,3        | 0,7         | 0,7        | 0,5         | 0,5        | 0,8         |
| $a_4$       | 0,6        | 0,6         | 0,5        | 0,4         | 0,7        | 0,6         | 0,5        | 0,6         |
| $a_5$       | 0,3        | 0,4         | 0,6        | 0,8         | 0,3        | 0,8         | 0,4        | 0,5         |
| $a_6$       | 0,2        | 0,5         | 0,4        | 0,6         | 0,4        | 0,4         | 0,6        | 0,4         |
| $a_7$       | 0,6        | 0,6         | 0,3        | 0,5         | 0,5        | 0,5         | 0,4        | 0,8         |

Tabla 4-3 Evaluación del Experto 3

| $\bar{E}_3$ | $c_1$      |             | $c_2$      |             | $c_3$      |             | $c_4$      |             |
|-------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|-------------|
|             | <i>Fr.</i> | <i>Imp.</i> | <i>Fr.</i> | <i>Imp.</i> | <i>Fr.</i> | <i>Imp.</i> | <i>Fr.</i> | <i>Imp.</i> |
| $a_1$       | 0,5        | 0,6         | 0,5        | 0,4         | 0,6        | 0,3         | 0,2        | 0,8         |
| $a_2$       | 0,4        | 0,8         | 0,4        | 0,7         | 0,7        | 0,5         | 0,3        | 0,7         |
| $a_3$       | 0,2        | 0,7         | 0,4        | 0,6         | 0,7        | 0,4         | 0,4        | 0,7         |
| $a_4$       | 0,5        | 0,7         | 0,5        | 0,7         | 0,6        | 0,6         | 0,1        | 0,6         |
| $a_5$       | 0,3        | 0,5         | 0,4        | 0,7         | 0,4        | 0,7         | 0,2        | 0,5         |
| $a_6$       | 0,3        | 0,7         | 0,6        | 0,8         | 0,5        | 0,6         | 0,4        | 0,4         |
| $a_7$       | 0,7        | 0,8         | 0,7        | 0,5         | 0,6        | 0,6         | 0,5        | 0,8         |

La utilidad esperada de exposición al riesgo por línea de negocio y categorías del riesgo operacional de por cada experto se muestran en las tablas 4.4, 4.5 y 4.6



*Tabla 4-4 Utilidades Esperadas del Experto 1*

| $\bar{U}_1$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ |
|-------------|-------|-------|-------|-------|
| $a_1$       | 0,16  | 0,20  | 0,21  | 0,21  |
| $a_2$       | 0,35  | 0,42  | 0,30  | 0,28  |
| $a_3$       | 0,15  | 0,10  | 0,32  | 0,12  |
| $a_4$       | 0,12  | 0,20  | 0,48  | 0,10  |
| $a_5$       | 0,30  | 0,30  | 0,14  | 0,12  |
| $a_6$       | 0,24  | 0,49  | 0,18  | 0,25  |
| $a_7$       | 0,40  | 0,20  | 0,24  | 0,42  |

*Tabla 4-5 Utilidades Esperadas del Experto 2*

| $\bar{U}_2$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ |
|-------------|-------|-------|-------|-------|
| $a_1$       | 0,21  | 0,24  | 0,24  | 0,32  |
| $a_2$       | 0,20  | 0,36  | 0,30  | 0,12  |
| $a_3$       | 0,35  | 0,21  | 0,35  | 0,40  |
| $a_4$       | 0,36  | 0,20  | 0,42  | 0,30  |
| $a_5$       | 0,12  | 0,48  | 0,24  | 0,20  |
| $a_6$       | 0,10  | 0,24  | 0,16  | 0,24  |
| $a_7$       | 0,36  | 0,15  | 0,25  | 0,32  |

*Tabla 4-6 Utilidades Esperadas del Experto 3*

| $\bar{U}_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ |
|-------------|-------|-------|-------|-------|
| $a_1$       | 0,30  | 0,20  | 0,18  | 0,16  |
| $a_2$       | 0,32  | 0,28  | 0,35  | 0,21  |
| $a_3$       | 0,14  | 0,24  | 0,28  | 0,28  |
| $a_4$       | 0,35  | 0,35  | 0,36  | 0,06  |
| $a_5$       | 0,15  | 0,28  | 0,28  | 0,10  |
| $a_6$       | 0,21  | 0,48  | 0,30  | 0,16  |
| $a_7$       | 0,56  | 0,35  | 0,36  | 0,40  |

Para obtener la matriz de utilidades colectiva  $\bar{\bar{U}}$  de los expertos los valores de las tres tablas anteriores se agregaron con el vector de ponderación  $P = (0.5, 0.3, 0.2)$ . Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 4.7.

*Tabla 4-7 Resultados Colectivos de Utilidades Esperadas*

| $\bar{\bar{U}}$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|
| $a_1$           | 0,20  | 0,21  | 0,21  | 0,23  |
| $a_2$           | 0,30  | 0,37  | 0,31  | 0,22  |
| $a_3$           | 0,21  | 0,16  | 0,32  | 0,24  |
| $a_4$           | 0,24  | 0,23  | 0,44  | 0,15  |
| $a_5$           | 0,22  | 0,35  | 0,20  | 0,14  |
| $a_6$           | 0,19  | 0,41  | 0,20  | 0,23  |
| $a_7$           | 0,42  | 0,22  | 0,27  | 0,39  |

Por otro lado, se incluye una variable de inducción sobre la urgencia de mejorar los controles para mitigar el riesgo en una escala de 1 a 10, donde 1 es la representa la mínima urgencia y 10 la máxima urgencia. Los valores de esta variable de inducción definida también por los expertos será la matriz  $\bar{Z}$  que muestran en la tabla 4.8.

*Tabla 4-8 Variables de Inducción*

| $\bar{Z}$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ |
|-----------|-------|-------|-------|-------|
| $a_1$     | 2     | 4     | 8     | 3     |
| $a_2$     | 4     | 5     | 7     | 8     |
| $a_3$     | 8     | 9     | 6     | 7     |
| $a_4$     | 2     | 6     | 3     | 8     |
| $a_5$     | 2     | 1     | 3     | 4     |
| $a_6$     | 1     | 3     | 5     | 7     |
| $a_7$     | 9     | 4     | 7     | 6     |

Los expertos han definido el vector de ponderaciones  $W = (0.35, 0.30, 0.20, 0.15)$  para la agregación de las utilidades con los operadores MAUT-Adictivo, OWA-MAUT e IOWA-MAUT. También se evaluarán los resultados con el valor máximo (Max-MAUT) el valor mínimo (Min-MAUT) y la media aritmética (Media-MAUT). Los resultados obtenidos son los siguientes:

*Tabla 4-9 Resultados Agregados*

| <b>Riesgos</b> | <b>Min-MAUT</b> | <b>Max-MAUT</b> | <b>Media-MAUT</b> | <b>MAUT-Adictivo</b> | <b>OWA-MAUT</b> | <b>IOWA-MAUT</b> |
|----------------|-----------------|-----------------|-------------------|----------------------|-----------------|------------------|
| $a_1$          | 0,203           | 0,233           | 0,215             | 0,212                | 0,218           | 0,215            |
| $a_2$          | 0,218           | 0,374           | 0,300             | 0,312                | 0,316           | 0,289            |
| $a_3$          | 0,161           | 0,321           | 0,232             | 0,221                | 0,249           | 0,214            |
| $a_4$          | 0,152           | 0,438           | 0,265             | 0,263                | 0,294           | 0,246            |
| $a_5$          | 0,140           | 0,350           | 0,226             | 0,241                | 0,248           | 0,204            |
| $a_6$          | 0,192           | 0,413           | 0,258             | 0,265                | 0,282           | 0,251            |
| $a_7$          | 0,215           | 0,420           | 0,322             | 0,323                | 0,348           | 0,337            |

En la tabla 4.10, se presenta la ordenación de riesgos de forma descendente para priorizarlos.

*Tabla 4-10 Orden de Prioridad de Riesgos*

| <b>Criterio</b> | <b>Ordenación</b>                         |
|-----------------|---|
| Min-MAUT        | $a_2 > a_7 > a_1 > a_6 > a_3 > a_4 > a_5$ |
| Max-MAUT        | $a_4 > a_7 > a_6 > a_2 > a_5 > a_3 > a_1$ |
| Media-MAUT      | $a_7 > a_2 > a_4 > a_6 > a_3 > a_5 > a_1$ |
| MAUT-Adictivo   | $a_7 > a_2 > a_4 > a_6 > a_3 > a_5 > a_1$ |
| OWA-MAUT        | $a_7 > a_2 > a_4 > a_6 > a_3 > a_5 > a_1$ |
| IOWA-MAUT       | $a_7 > a_2 > a_6 > a_4 > a_1 > a_3 > a_5$ |

## 6. Conclusiones

Las decisiones en entornos inciertos donde se debe compensar diferentes objetivos son bastante complejas, principalmente porque se deben incluir criterios cuantitativos y cualitativos en forma de atributos. Un aspecto muy importante en los modelos de decisión es la valoración que los decisores tienen de las consecuencias de cada uno de los atributos de las alternativas o denominada función de utilidad. El modelo MAUT involucra las funciones de utilidad para los atributos de las alternativas para agregarlos según el modelo aditivo. Este artículo presenta un nuevo enfoque del modelo MAUT al incluir los operadores de agregación OWA, con lo cuales la información de los atributos puede ser infravalorada o sobrevalorada, dependiendo de la actitud optimista o pesimista de los decisores. En la literatura se pueden encontrar modelos multiatributo con funciones de utilidad que incluyen operadores OWA en la agregación (Gao et al., 2015a, 2015b). Sin embargo, en este artículo se presenta un nuevo enfoque del operador OWA en modelos MAUT, que además incluye variables de inducción, lo cual enriquece el análisis y ayuda al decisor a justificar las decisiones teniendo en cuenta tanto el nivel de satisfacción del decisor con las posibles consecuencias de cada alternativa como la actitud optimista o pesimista. Dicho modelo implica una valoración más completa de las alternativas más allá de los valores de los atributos, a través de funciones de utilidad que permiten establecer el nivel de tolerancia o aversión al riesgo en el análisis. Finalmente se presenta un ejemplo ilustrativo que demuestra la aplicabilidad en un problema de priorización de riesgos.

## Referencias

- Aliev, R., Pedrycz, W., Fazlollahi, B., Huseynov, O. H., Alizadeh, A. V., & Guirimov, B. G. (2012). Fuzzy logic-based generalized decision theory with imperfect information. *Information Sciences*, 189, 18–42.
- Banco Internacional de Pagos. (2006). *Convergencia internacional de medidas y pagos de Capital*.
- Beliakov, G., Sola, H. B., & Sánchez, T. C. (2015). *A practical guide to averaging functions*. (Vol. 329). Springer.
- Casanovas, M., Torres-Martínez, A., & Merigó, J. M. (2015). Decision making processes of non-life insurance pricing using fuzzy logic and OWA operators. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, 49(2), 169-188 .
- Casanovas, M., Torres-Martínez, A., & Merigó, J. M. (2016). Decision Making in Reinsurance with Induced OWA Operators and Minkowski Distances. *Cybernetics and Systems*, 47(6), 460–477.
- Chen, S.-M., & Niou, S.-J. (2011). Fuzzy multiple attributes group decision-making based on fuzzy induced OWA operators. *Expert Systems with Applications*, 38(4), 4097–4108. 3
- Chen, Z.-S., Chin, K.-S., Li, Y.-L., & Yang, Y. (2016). On Generalized Extended Bonferroni Means for Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 24(6), 1525–1543.
- Chiclana, F., Herrera-Viedma, E., Herrera, F., & Alonso, S. (2007). Some induced ordered weighted averaging operators and their use for solving group decision-making problems based on fuzzy preference relations. *European Journal of Operational Research*, 182(1), 383–399.
- Collins, T. R., Rossetti, M. D., Nachtmann, H. L., & Oldham, J. R. (2006). The use of multi-attribute utility theory to determine the overall best-in-class performer in a benchmarking study. *Benchmarking: An International Journal*, . 13(4), 431-446.
- Ferreras Salagre, A. (2008). *Riesgo operacional : enfoque de distribución de pérdidas en la práctica*. Madrid : Consejo Económico y Social.
- Gao, J., Li, M., & Liu, H. (2015a). Generalized ordered weighted utility averaging-hyperbolic absolute risk aversion operators and their applications to group decision-making. *European Journal of Operational Research*, 243(1), 258–270.
- Gao, J., Li, M., & Liu, H. (2015b). Generalized ordered weighted utility

- proportional averaging-hyperbolic absolute risk aversion operators and their applications to group decision-making. *Applied Mathematics and Computation*, 252, 114–132.
- Gil-Lafuente, A. M., González, F., & Flores, B. (2015). Teoría de los efectos olvidados en la incidencia de la actividad económica en la calidad de vida de los habitantes y cuantificación de los efectos para un reequilibrio territorial, 105–124.
- Gil Aluja, J. (1999). *Elements for a theory of decision in uncertainty*. (Vol. 32). Springer Science & Business Media.
- Herrera, F., Herrera-Viedma, E., & Verdegay, J. L. (1996). Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 79(2), 175–190.
- Huang, I. B., Keisler, J., & Linkov, I. (2011). Multi-criteria decision analysis in environmental sciences: Ten years of applications and trends. *Science of The Total Environment*, 409(19), 3578–3594.
- Igoulalene, I., Benyoucef, L., & Tiwari, M. K. (2015). Novel fuzzy hybrid multi-criteria group decision making approaches for the strategic supplier selection problem. *Expert Systems with Applications*, 42(7), 3342–3356.
- Karsak, E. E., & Dursun, M. (2015). An integrated fuzzy MCDM approach for supplier evaluation and selection. *Computers & Industrial Engineering*, 82, 82–93.
- Kaufmann, A., & Gil Aluja, J. (1988). *Modelos para la investigación de efectos olvidados*. Milladoiro.
- Keeney, R.L and Raiffa, H. (1976). Decision with multiple objectives. *John Wiley*.
- Keeney, R. L. (1982). Feature Article—Decision Analysis: An Overview. *Operations Research*, 30(5), 803–838.
- Li, D.F. (2010). Multiattribute decision making method based on generalized OWA operators with intuitionistic fuzzy sets. *Expert Systems with Applications*, 37(12), 8673–8678.
- Liu, P., Chen, Y., & Chu, Y. (2014). Intuitionistic uncertain linguistic weighted Bonferroni OWA operator and its application to multiple attribute decision making. *Cybernetics and Systems*, 45(5), 418–438.
- Liu, P., & Wang, Y. (2016). Interval neutrosophic prioritized OWA operator and its application to multiple attribute decision making. *Journal of*

- Systems Science and Complexity*, 29(3), 681–697.
- Maqueda Lafuente, F. J., Gil Lafuente, A. M., Guzman-Parra, V., & Gil Lafuente, J. (2013). Key factors for entrepreneurial success. *Management Decision*, 51(10), 1932–1944.
- Martorell-Cunill, O., Gil-Lafuente, A. M., Socias Salvà, A., & Mulet Forteza, C. (2014). The growth strategies in the hospitality industry from the perspective of the forgotten effects. *Computational and Mathematical Organization Theory*, 20(2), 195–210.
- Merigo, J.M. & Gil Lafuente, A. (2009). The induced generalized OWA operator. *Information Sciences*, 179(6), 729–741.
- Merigó, J. M. (2011). A unified model between the weighted average and the induced OWA operator. *Expert Systems with Applications*, 38(9), 11560–11572.
- Merigo, J. M., & Casanovas, M. (2011). A New Minkowski Distance Based on Induced Aggregation Operators. *International Journal Of Computational Intelligence Systems*, 4(2), 123–133.
- Merigó, J. M., & Casanovas, M. (2010). The fuzzy generalized OWA operator and its application in strategic decision making. *Cybernetics and Systems*, 41(5), 359–370.
- Merigó, J. M., & Casanovas, M. (2011a). Decision-making with distance measures and induced aggregation operators. *Computers & Industrial Engineering*, 60(1), 66–76.
- Merigó, J. M., & Casanovas, M. (2011b). Induced and uncertain heavy OWA operators. *Computers & Industrial Engineering*, 60(1), 106–116.
- Merigó, J. M., Casanovas, M., & Palacios-Marqués, D. (2014). Linguistic group decision making with induced aggregation operators and probabilistic information. *Applied Soft Computing Journal*, 24.
- Merigó, J. M., Casanovas, M., & Xu, Y. (2014). Fuzzy group decision-making with generalized probabilistic OWA operators. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 27(2).
- Merigó, J. M., Casanovas, M., & Yang, J.-B. (2014). Group decision making with expertons and uncertain generalized probabilistic weighted aggregation operators. *European Journal of Operational Research*, 235(1), 215–224.
- Merigo, J. M., & Gil-Lafuente, A. M. (2013). A Method for Decision Making Based on Generalized Aggregation Operators. *International Journal of*

- Intelligent Systems*, 28(5), 453–473.
- Merigó, J. M., & Gil-Lafuente, A. M. (2010). New decision-making techniques and their application in the selection of financial products. *Information Sciences*, 180(11), 2085–2094.
- Merigó, J. M., & Gil-Lafuente, A. M. (2013). Induced 2-tuple linguistic generalized aggregation operators and their application in decision-making. *Information Sciences*, 236, 1–16.
- Merigo, J. M., Gil-Lafuente, A. M., Zhou, L., & Chenm, H. (2011). Generalization of the linguistic aggregation operator and its application in decision making. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 22(4), 593–603.
- Merigó, J. M., & Yager, R. R. (2013). Generalized moving averages, distance measures and OWA operators. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 21(4), 533–559.
- Merigo, J., & Wei, G. (2011). Probabilistic aggregation operators and their application in uncertain multi-person decision-making. *Technological and Economic Development of Economy*, 17(2), 335–351.
- Merigo, J., Xu, Y., & Zeng, S. (2013). Group decision making with distance measures and probabilistic information. *Knowledge-Based Systems*, 40, 81–87.
- Merigó Lindahl, J. M. (2008). Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación a los métodos de decisión. Universidad de Barcelona.
- Sanayei, A., Farid Mousavi, S., Abdi, M. R., & Mohaghar, A. (2008). An integrated group decision-making process for supplier selection and order allocation using multi-attribute utility theory and linear programming. *Journal of the Franklin Institute*, 345(7), 731–747.
- Stone, E. R., Yates, A. J., & Caruthers, A. S. (2002). Risk Taking in Decision Making for Others Versus the Self. *Journal of Applied Social Psychology*, 32(9), 1797–1824.
- Su, W., Zhang, C., & Zeng, S. (2015). Uncertain Induced Heavy Aggregation Distance Operator and its Application to Decision Making. *Cybernetics and Systems*, 46(3–4), 172–187.
- Tesfamariam, S., Sadiq, R., & Najjaran, H. (2010). Decision Making Under Uncertainty - An Example for Seismic Risk Management. *Risk Analysis*, 30(1), 78–94.
- Vizuet Luciano, E., Gil-Lafuente, A. M., García González, A., & Boria

- Reverter, S. (2013). Forgotten effects of corporate social and environmental responsibility. *Kybernetes*, 42(5), 736–753.
- Wallenius, J., Dyer, J. S., Fishburn, P. C., Steuer, R. E., Zionts, S., & Deb, K. (2008b). Multiple Criteria Decision Making, Multiattribute Utility Theory: Recent Accomplishments and What Lies Ahead. *Management Science*, 54(7), 1336–1349.
- Wang, F., Zeng, S., & Zhang, C. (2013). A Method Based on Intuitionistic Fuzzy Dependent Aggregation Operators for Supplier Selection. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 1–9.
- Wang, T., Liu, J., Li, J., & Niu, C. (2016). An integrating OWA–TOPSIS framework in intuitionistic fuzzy settings for multiple attribute decision making. *Computers & Industrial Engineering*, 98, 185–194.
- Xian, S., & Sun, W. (2014). Fuzzy Linguistic Induced Euclidean OWA Distance Operator and its Application in Group Linguistic Decision Making. *International Journal of Intelligent Systems*, 29(5), 478–491.
- Xu, Y., Merigó, J. M., & Wang, H. (2012). Linguistic power aggregation operators and their application to multiple attribute group decision making. *Applied Mathematical Modelling*, 36(11), 5427–5444.
- Xu, Y., Wang, H., & Merigó, J. M. (2014). Intuitionistic fuzzy Einstein Choquet integral operators for multiple attribute decision making. *Technological and Economic Development of Economy*, 20(2), 227–253.
- Xu, Z. (2006). Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making. *Information Fusion*, 7(2), 231–238.
- Xu, Z. S. (2004). EOWA and EOWG operators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12(6), 791–810.
- Xu, Z. S., & Da, Q. L. (2002a). The uncertain OWA operator. *International Journal of Intelligent Systems*, 17(6), 569–575.
- Yager, R. (1988). On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision-Making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18(1), 183–190.
- Yager, R.R., (1994). On Weighted Median Aggregation. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2(1), 101–113.
- Yager, R.R., (2002). Heavy OWA Operators. *Fuzzy Optimization and*



- Decision Making*, 1(4), 379–397.
- Yager, R.R., & Filev, D. (1999). Induced ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 29(2), 141–150.
- Yager, R.R. (1988). On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18(1), 183–190.
- Yager, R.R. (1992). On generalized measures of realization in uncertain environments. *Theory and Decision*, 33(1), 41–69.
- Yager, R.R. (1993a). Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59(2), 125–148.
- Yager, R.R. (1993b). Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59(2), 125–148. Yager, R. R. (1996a). Constrained OWA aggregation. *Fuzzy Sets and Systems*, 81(1), 89–101.
- Yager, R.R. (1996). Quantifier guided aggregation using OWA operators. *International Journal of Intelligent Systems*, 11(1), 49–73.
- Yager, R.R. (2003). E-Z OWA weights. In *Proceedings 10th International Fuzzy Systems Association World Congress* (pp. 39–42). Istanbul.
- Yager, R.R. (2004). Generalized OWA Aggregation Operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3(1), 93–107.
- Yager, R. R. (2009). On generalized Bonferroni mean operators for multi-criteria aggregation. *International Journal of Approximate Reasoning*, 50(8), 1279–1286.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.
- Zavadskas, E. K., & Turskis, Z. (2011). Multiple criteria decision making (MCDM) methods in economics: an overview. *Technological and Economic Development of Economy*, 17(2), 397–427.
- Zeng, S., Merigó, J. M., Palacios-Marqués, D., Jin, H., & Gu, F. (2017). Intuitionistic fuzzy induced ordered weighted averaging distance operator and its application to decision making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 32(1), 11–22.
- Zeng, S., Su, W., & Zhang, C. (2016). Intuitionistic fuzzy generalized probabilistic ordered weighted averaging operator and its application to group decision making. *Technological and Economic Development of Economy*, 22(2), 177–193.

- Zhou, L.-G., Chen, H.-Y., Merigo, J., & Gil Lafuente, A. (2012). Uncertain generalized aggregation operators. *Expert Systems with Applications*, 39(1), 1105–1117.
- Zhou, L., Chen, H., & Liu, J. (2012). Generalized power aggregation operators and their applications in group decision making. *Computers & Industrial Engineering*, 62(4), 989–999.

## **Capítulo 5**

### **Decisiones en Reaseguros con Operadores OWA Inducidos y Distancias de Minkowski**

**“Decision Making in Reinsurance with Induced OWA  
Operators and Minkowski Distances”**



## Decision Making in Reinsurance with Induced OWA Operators and Minkowski Distances<sup>11</sup>

Montserrat Casanovas Ramón

*Department of Business Administration, University of Barcelona*

Agustín Torres-Martínez

*Department of Business Administration, University of Barcelona*

José Maria Merigó Lindahl

*Department of Management Control and Information Systems,  
University of Chile,*

### Abstract

The decision to choose a reinsurance program has many complexities since it is difficult to get simultaneously high levels in different optimal criteria including maximum gain, minimum variance and probability of ruin. This article suggests a new method in which through membership functions we can measure the distance of each alternative to an optimal result and aggregate it by using different types of aggregations. In this paper, particular attention is given to the induced Minkowski ordered weighted averaging distance operator and the induced Minkowski probabilistic ordered weighted averaging distance operator. The main advantage of these operators is that they include a wide range of special cases. Thus, they can adapt efficiently to the specific needs of the calculation processes. By doing so, the reinsurance system can make better decisions by using different scenarios in the uncertain environment considered.

**Keywords:** Reinsurance, Minkowski distance, OWA operators, Fuzzy logic.

---

<sup>11</sup> Article published in *Cybernetics and Systems* Vol: 47 Issue: 6 pp: 460-477. Journal Citation Report, Thomson Reuters Impact Factor: 1.434. Abstracted/indexed in: Association of Computing Machinery: Guide to Computing Literature; BIOSIS Previews; CompuMath Citation Index; Computing and Technology; CSA Computer Abstracts; CSA Computer & Information Systems Abstracts; CSA Electronics & Communications Abstracts; CSA Environmental Engineering Abstracts; CSA Environmental Sciences & Pollution Management Database; CSA Solid State & Superconductivity Abstracts; Current Contents/Engineering; Emerald Abstracting and Indexing Services - Computer Abstracts International Database; Engineering Information Inc.; INSPEC; International Political Science Abstracts; International Political Science Association; and Zentralblatt MATH.

## 1. Introduction

Reinsurance is an instrument used by insurance companies to align risks with their financial capacity by transferring all or part of the risk assumed to reinsurer to not jeopardize the solvency of the insurer. But otherwise this level of reinsurance reduces the profits of the company by sharing part of its income from premiums. As in other problems of the insurance sector in the case of reinsurance, the statistical tools have proven very effective in their management. However, when deciding on a type of reinsurance the insurance company faces decisions involving internal and external factors that are determined by the general environment such as the expected economic situation and by the specific environment as legal regulations of the sector.

The important role of reinsurance in the insurance sector is beyond dispute. So the decisions in insurance companies will have a direct and highly relevant influence on their organizational goals. In this regard it is important to highlight some of the basic reasons for hiring reinsurance. First, for spreading the risk of a possible loss, either partially or completely. Next, for taking risks for an amount exceeding what the company can cope with their own resources. Finally, to increase the volume of business or facilitating the emergence of new insurers.

These reasons lead to insurers to be primarily based on the criteria of profitability and solvency to decide on a particular reinsurance, being important to note that as well as quantitative information, there are other subjective criteria for decision-making. That is why in this article a method is proposed using tools such as fuzzy logic, fuzzy numbers and OWA operators (Yager, 1988; Yager et al. 2011) with Minkowski distances to evaluate alternative reinsurance systems. This evaluation is based on the use of reinsurance optimization criteria (maximum gain, minimum variance and minimum probability of ruin), in which it is very difficult for an alternative to be better than the others in all criteria at once. Therefore, from an optimal level of acceptance defined by experts, the alternatives are compared using Hamming and Euclidean distances. They are generalized with the Minkowski distance and are added with OWA operators, through the IMOWAD operator (Merigó and Casanovas, 2011a; 2011b; 2011c) to make decisions involving the optimistic or pessimistic attitude of the decision maker.

Note that in the literature there are a variety of new operators with distances among which are the OWA distance (Merigó and Gil-Lafuente, 2010; Xu and Chen, 2008), continuous distances (Zhou et al. 2013), distances with Choquet integral (Bolton et al. 2008), the probabilistic weighted averaging distance (PWAD) (Merigó, 2013), the immediate probabilities (Merigó and Gil-Lafuente, 2012), the probabilistic OWA distance (Merigó et al. 2013) and moving distances (Merigó and Yager, 2013). Other models have focused on the use of imprecise information with distances including intervals numbers (Zeng, 2013a) and fuzzy numbers (Su et al. 2013; Xu, 2012; Zeng, 2013b). Moreover, other related tools have been developed using norms such as the adequacy coefficient (Merigó and Gil-Lafuente, 2010; 2013).

The paper is organized as follows. Section 2 reviews some basic preliminaries on reinsurance, OWA operators and distance measures. Section 3 analyzes some modern distance aggregation operators and Section 4 presents an application of these aggregation operators in a reinsurance problem. Section 5 summarizes the main results and conclusions of the paper.

## 2. Preliminaries

This section consists of two parts. The first one explains the main classes of reinsurance and criteria for choosing an optimal reinsurance and the second part reviews the concepts of OWA operators and distance measures.

### Reinsurance

The reinsurance is a type of contract in which an insurer assumes the risk fully or partially covered by another insurer and the transferor may take on more risk by ensuring the solvency of the company. The three most common types of reinsurance are:

- **Quota Share Reinsurance:** is a type of proportional reinsurance where the insurer transfers a fixed proportion of the amount of losses to the reinsurer. It is defined as:

$$X_{rea_i} = \text{Min} [(l - k)X_i, L_1] \quad \forall X_i \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

where  $X_{rea_i}$  is the amount that the reinsurer pays for each claim,  $k$  is the proportion of the individual amount corresponding to the transferor and  $L_1$  is the maximum limit of liability.

- **Excess of Loss Reinsurance Risk:** is a type of non-proportional contract called deductible, in which the reinsurer agrees to assume claims above this amount until the limit of liability. It is defined as:

$$X_{rea_i} = \begin{cases} 0 & X_i \leq M \\ \text{Min}(X_i, L_2) & X_i > M \end{cases} \quad (2)$$

where  $X_{rea_i}$  is the amount that the reinsurer pays for each claim,  $M$  is deductible assuming the transferor and  $L_2$  is the maximum limit of liability.

- **Stop Loss Reinsurance:** In this type of contract called priority, where the reinsurer covers the amount of losses from certain amount of responsibility to the maximum. It is defined as:

$$X_{rea} = \begin{cases} 0 & X_i \leq d \\ \text{Min}(X_i, L_2) - d & X_i > d \end{cases} \quad (3)$$

where  $X_{rea}$  is the amount that the reinsurer pays for each claim,  $d$  is the aggregate amount of claims assumed by the transferor and  $L_2$  is the maximum limit of liability.

### Criteria for optimal reinsurance

The reinsurance decision is a fairly complex process, because it must reconcile conflicting aims, being very important the level of risk you are willing to take of the insurer depending on the circumstances and environment. The most important criteria in this type of decision (Mondragón, 2009) are presented below:

1) Maximum Gain: Earnings for the direct insurer are obtained through the following expression:

$$G = P - X - PR + X_{rea}, \quad (4)$$

where  $P$  is the risk premium charged by the insurer regardless of the type of reinsurance,  $X$  is the aggregate amount of claims,  $PR$  is the reinsurance premium and  $X_{rea}$  is the aggregate amount of claims recovered.

Keep in mind that:



$X$  and  $X_{rea}$  are random variables.

$PR$  and  $X_{rea}$  depend on the chosen reinsurance.

2) Minimum Variance: In this approach the optimal reinsurance is one in which the aggregate amount of retained claims ( $X - X_{rea}$ ) is minimal. It is important to consider the values of  $PR$  on this criterion, since the aim is to get the minimum variance at the lowest cost.

An extension appropriate in this case may be the coefficient of variation of the portfolio that corresponds to the ratio between the standard deviation and the arithmetic mean.

3) Low Probability of Ruin: The solvency of the insurer is a very important criterion for reinsurance decisions, this being assessed through the ruin probability. In this case an insurer will ruin when:

$$G + CI < 0, (5)$$

where  $G$  is the gain and  $CI$  is the capital of the insurer at the beginning of the period, where the probability of ruin for initial capital is given by:

$$\psi(CI) = P[G + CI < 0], (6)$$

Importantly,  $G$  depends on the chosen reinsurance and thus influences the probability of ruin.

As can be seen, it is very complex that reinsurance programs meet all three criteria, because if for example you have a low variance, it makes sense that earnings are affected by having a higher premium and reinsurance vice versa. Thus reinsurance decisions influence the importance that is given to each of the criteria compared to others and the risk you are willing to take and this will depend on the optimistic or pessimistic attitude of decision maker, being very useful in these cases using OWA aggregation operators.

## **Fuzzy logic and aggregation operators**

### **Fuzzy membership functions**

They were introduced by Zadeh (1965) to define the fuzzy sets, taking an element as an argument and assigning a value between 0 and 1, which relates the level of membership of the element to that set. Some of the most commonly used membership functions are the following ones:

$$\Gamma(U_A(x)) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right) & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}, (7)$$

$$L(U_A(x)) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ \left(\frac{b-x}{b-a}\right) & a < x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}, (8)$$

$$\Lambda(U_A(x)) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right) & a < x \leq b \\ \left(\frac{c-x}{c-b}\right) & b < x < c \\ 0 & x \geq c \end{cases}, (9)$$

### The OWA operator

The OWA operator provides a parameterized family of aggregation operators (Beliakov et. al. 2007; Grabisch et. al. 2011) between the minimum and maximum. In this way, information can be added depending on the degree of optimism or pessimism that the decision maker wants to take in the decision process (Belles et al. 2013; Figueira et. al. 2005; Zavadskas and Turskis, 2011).

**Definition 1:** An OWA operator is defined as a mapping of dimension  $n$ ,  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , that has an associated weighting vector  $W$  of dimension  $n$ ,  $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ , that meets the following conditions:

$$w_j \in [0, 1].$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot b_j.$$

The essence of the OWA (Yager, 1988; 1993; 1998) is the rearrangement of the elements or arguments, causing the aggregation in  $a_j$  are not associated with a weighting  $w_j$ , but the  $w_j$  will be associated with the position in the order for aggregation. Under this context, it is also possible to define the ascending OWA operator as follows.

**Definition 2:** An Ascending OWA (AOWA) operator is defined as a mapping of dimension  $n$ ,  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , that has an associated weighting vector

$W$  of dimension  $n$ ,  $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ , that meets the following conditions:

$$w_j \in [0, 1].$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot b_j,$$

where  $b_j$  is the  $j$ th smallest of the  $a_i$ , such that,  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ , which thus differ from the OWA where  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ .

The difference between the OWA operator (Descending OWA) and the AOWA is the way it manages the arguments, descending in the first and ascending in the second, respectively, and depends on the optimistic or pessimistic attitudes of the decision maker. Note that these two operators are related by using  $w_j = w_{n-j+1}^*$ , where  $w_j$  is the  $j$ th weight of the AOWA and  $w_{n-j+1}^*$  the  $j$ th weight of the DOWA operator.

### Distance measures

The notion of distance is used to measure the difference or calculate the degree of distance between two elements or sets (Gil-Aluja, 1999; Kaufmann, 1975). The distances most commonly used are the Hamming distance, the Euclidean distance and the Minkowski distance. It can be considered a distance measure, provided that the following properties are satisfied:

$$\text{No negativity: } D(A_1, A_2) \geq 0.$$

$$\text{Commutativity: } D(A_1, A_2) = D(A_2, A_1).$$

$$\text{Reflexivity: } D(A_1, A_1) = 0.$$

$$\text{Triangle Inequality: } D(A_1, A_2) + D(A_2, A_3) \geq D(A_1, A_3).$$

The Hamming distance can be formulated in the following two ways (Hamming, 1950):

**Definition 3 (Discrete Scope):** Let  $E$  be a finite referential and  $A, B \subset E$ , so that the Hamming distance is defined as:

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^n |u_{\underline{A}}(x_i) - u_{\underline{B}}(x_i)|, \quad (10)$$

with  $x \in E \forall i = 1, 2, \dots, n; u_{\underline{A}}(x_i), u_{\underline{B}}(x_i) \in [0, 1]$ .

**Definition 4 (Continuous Scope):** Assuming that the reference  $E$  is the set of real numbers ( $E = R$ ), the Hamming distance  $\forall x \in [x_1, x_2]$  is defined as:

$$d(A, B) = \int_{x_1}^{x_2} |u_{\underline{A}}(x_i) - u_{\underline{B}}(x_i)| dx, \quad (11)$$

The Euclidean distance can be formulated in the following ways:

**Definition 5 (Discrete Scope):** Let  $E$  a finite referential and  $A, B \subset E$ , so that the Euclidean distance is defined as:

$$e(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_{\underline{A}}(x_i) - u_{\underline{B}}(x_i))^2}, \quad (12)$$

with  $x \in E \forall i = 1, 2, \dots, n; u_{\underline{A}}(x_i), u_{\underline{B}}(x_i) \in [0, 1]$ .

**Definition 6 (Continuous Scope):** Assuming that the reference  $E$  is the set of real numbers ( $E = R$ ), the Euclidean distance  $\forall x \in [x_1, x_2]$  is defined as:

$$e(A, B) = \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} (u_{\underline{A}}(x_i) - u_{\underline{B}}(x_i))^2 dx}, \quad (13)$$

The Minkowski distance is a generalization of a wide range of distances that includes the Euclidean and Hamming distances and is formulated as follows:

**Definition 7 (Discrete Scope):** Let  $E$  a finite referential and  $A, B \subset E$ , so that the Minkowski distance is defined as:

$$e(A, B) = \left( \sum_{i=1}^n |u_{\underline{A}}(x_i) - u_{\underline{B}}(x_i)|^\lambda \right)^{1/\lambda}, \quad (14)$$

with  $x \in E \forall i = 1, 2, \dots, n; u_{\underline{A}}(x_i), u_{\underline{B}}(x_i) \in [0, 1]$  and  $\lambda \in N - \{0\}$ .

**Definition 8 (Continuous Scope):** Assuming that the reference  $E$  is the set of real numbers ( $E = R$ ), the Minkowski distance  $\forall x \in [x_1, x_2]$  is defined as:

$$r(A, B) = \left( \int_{x_1}^{x_2} |u_{\underline{A}}(x_i) - u_{\underline{B}}(x_i)|^\lambda dx \right)^{1/\lambda}, \quad (15)$$

with  $\lambda \in \mathbb{N} - \{0\}$ .

In the Minkowski distance, both in the discrete and continuous scopes, we have:

If  $\lambda = 1$ , it becomes the Hamming distance.

If  $\lambda = 2$ , it becomes the Euclidean distance.

The normalized Minkowski distance corresponds to a measure that uses arithmetic means in the aggregation process and generalizes a wide range of distances such as the normalized Hamming distance and the normalized Euclidean distance. This distance may be formulated to two sets A and B as follows:

**Definition 9:** A normalized Minkowski distance of dimension  $n$ , is a mapping  $d_m: R^n \times R^n \rightarrow R$ , such that:

$$d_m(A, B) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|^\lambda \right)^{1/\lambda}, \quad (16)$$

where  $a_i$  and  $b_i$  are the arguments of the sets A and B and  $\lambda$  is a parameter such that  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ .

The weighted Minkowski distance is applied in cases where it is preferred to give different weights to the individual distance. It is defined as follows:

**Definition 10:** A weighted Minkowski distance of dimension  $n$  is a mapping  $d_m: R^n \times R^n \rightarrow R$ , which has an associated weighting vector  $W$  of dimension  $n$  such that  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  and  $w_i \in [0,1]$ . So that:

$$d_m(A, B) = \left( \sum_{i=1}^n w_i |a_i - b_i|^\lambda \right)^{1/\lambda}, \quad (17)$$

where  $a_i$  and  $b_i$  are the arguments of the sets A and B and  $\lambda$  is a parameter such that  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ .

If different values for the parameter  $\lambda$  are formulated, we can obtain a wide range of special cases. For example:

If  $\lambda = 1$ , it becomes the weighted Hamming distance.

If  $\lambda = 2$ , it becomes the weighted Euclidean distance.

### 3. The OWA operators and Minkowski distances

#### Introduction

Next, let us study some Minkowski distances that use different types of OWA operators. The Minkowski OWA distance (MOWAD) operator (Merigó and Casanovas, 2011a) represents an extension of the normalized Minkowski distance using OWA operators, with the difference that the rearrangement of the distances of the arguments is in accordance with their values, so that it takes into account the attitudinal character of the decision maker. It is defined as follows:

**Definition 11:** The MOWAD operator of dimension  $n$ , is a mapping:  $MOWAD: R^n \times R^n \rightarrow R$ , which has an associated weighting vector  $W$ , of dimension  $n$  such that  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  and  $w_i \in [0,1]$ . So that:

$$MOWAD(d_1, d_2, \dots, d_n) = \left( \sum_{i=1}^n w_i D_i^\lambda \right)^{1/\lambda}, \quad (18)$$

where  $D_i$  is the  $j$ th largest of the  $d_i$ ,  $d_i$  is the individual distance between A and B, such that  $d_i = |a_i - b_i|$  and  $\lambda$  is a parameter such that  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ .

If different values for the parameter  $\lambda$  are formulated, you can have a wide range of special cases. For example:

If  $\lambda = 1$ , it becomes the Hamming OWA distance operator.

If  $\lambda = 2$ , it becomes the Euclidean OWA distance operator.

Another interesting extension is the induced MOWAD (IMOWAD) operator. The IMOWAD (or IGOWAD) operator (Merigó and Casanovas, 2011a) is an aggregation operator, in which the ordering of the arguments does not depend on their individual characteristics, but rather on the induced sorting variables and is defined as follows:

**Definition 12:** The IMOWAD operator of dimension  $n$ , is a mapping  $IMOWAD: R^n \times R^n \rightarrow R$ , which has an associated weighting vector  $W$  of dimension  $n$  such that  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  and  $w_i \in [0,1]$ . So that:

$$IMOWAD(\langle u_1, a_1, b_1 \rangle, \langle u_2, a_2, b_2 \rangle, \dots, \langle u_n, a_n, b_n \rangle) = \left( \sum_{i=1}^n w_i D_i^\lambda \right)^{1/\lambda}, \quad (19)$$

where  $D_i$  is the  $d_i = |a_i - b_i|$ , value of the triplet IMOWAD  $\langle u_i, a_i, b_i \rangle$  with the  $j$ -th largest  $u_i$ ,  $u_i$  is the induced ordering variable,  $|a_i - b_i|$  is the argument variable that is represented by individual distances and  $\lambda$  is a parameter such that  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ .

If different values for the parameter  $\lambda$  are formulated, you can have a wide range of special cases. For example:

If  $\lambda = 1$ , it becomes the IHOWAD operator (Merigó & Casanovas, 2011b).

If  $\lambda = 2$ , it becomes the IEOWAD operator (Merigó & Casanovas, 2011c).

### The Minkowski probabilistic OWA distance

The Minkowski probabilistic ordered weighted averaging distance (MPOWAD) operator is a distance aggregation operator that provides a unified framework between the probability and the OWA operator. It also uses generalized means providing a general formulation that includes a wide range of particular cases including the probabilistic OWA distance (POWAD) (Merigó et al. 2013) and the Euclidean probabilistic ordered weighted averaging distance (EPOWAD). Note that the probability can also be seen as the weighted average. For two sets  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  and  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , it can be defined as follows.

**Definition 13:** A MPOWAD operator is a mapping  $MPOWAD: R^n \times R^n \rightarrow R$  of dimension  $n$ , if it has an associated weighting vector  $W$ , with  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  and  $w_j \in [0, 1]$  and a weighting vector  $V$  that affects the probability, with  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  and  $v_i \in [0, 1]$ , such that:

$$POWAD (\langle x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle x_n, y_n \rangle) = \beta \left( \sum_{j=1}^n w_j b_j^\lambda \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left( \sum_{i=1}^n v_i |x_i - y_i|^\sigma \right)^{1/\sigma}, \quad (20)$$

where  $b_j$  is the  $j$ th smallest of the  $|x_i - y_i|$ ,  $x_i$  is the  $i$ th argument of the set  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $y_i$  is the  $i$ th argument of the set  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ,  $\beta \in [0, 1]$  and  $\lambda$  and  $\sigma$  are parameters such that  $\lambda, \sigma \in (-\infty, \infty) - \{0\}$ .

Note that it is possible to distinguish between ascending (AMPOWAD) and descending (DMPOWAD) orders by using  $w_j = w_{n-j+1}^*$ , where  $w_j$  is the  $j$ th weight of the AMPOWAD and  $w_{n-j+1}^*$  the  $j$ th weight of the DMPOWAD operator. The MPOWAD operator is bounded, idempotent and monotonic. It is also reflexive and non-negative. If  $\lambda = \sigma = 1$ , the MPOWAD operator becomes the POWAD operator (Merigó et al. 2013):

$$POWAD (\langle x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle x_n, y_n \rangle) = \beta \left( \sum_{j=1}^n w_j b_j \right) + (1-\beta) \left( \sum_{i=1}^n v_i |x_i - y_i| \right), \quad (21)$$

And if  $\lambda = \sigma = 2$ , the MPOWAD becomes the EPOWAD operator:

$$EPOWAD (\langle x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle x_n, y_n \rangle) = \beta \sqrt{\left( \sum_{j=1}^n w_j b_j^2 \right)} + (1-\beta) \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n v_i |x_i - y_i|^2 \right)}, \quad (22)$$

### The induced Minkowski probabilistic OWA distance

The induced Minkowski probabilistic ordered weighted averaging distance (IMPOWAD) operator is a distance measure that uses a unified framework between the probability and the IOWA operator (Yager and Filev, 1999) in the normalization process of the Minkowski distance. Thus, the reordering of the individual distances is developed according to order-inducing variables that represent a complex reordering process of the individual distances. Moreover, it also uses generalized means. Therefore, it includes a wide range of distance aggregation operators including the induced POWAD (IPOWAD) operator and the induced Euclidean POWAD (IEPOWAD) operator.



The first main advantage of this new approach is that it is able to deal with situations where we have some objective information about the possibility of occurrence of the different results. The second main advantage is the use of a parameterized family of aggregation operators between the minimum and the maximum. This is assessed with order-inducing variables in order to represent the attitudinal character of the decision maker in a complete way, considering a wide range of aspects such as the degree of optimism, psychological aspects and time pressure. For two sets  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  and  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , it can be defined as follows.

**Definition 14.** An IMPOWAD operator is a mapping  $IMPOWAD: R^n \times R^n \times R^n \rightarrow R$  of dimension  $n$ , if it has an associated weighting vector  $W$ , with  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  and  $w_j \in [0, 1]$  and a weighting vector  $V$  that affects the probability, with  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  and  $v_i \in [0, 1]$ , such that:

$$IMPOWAD (\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle) = \beta \left( \sum_{j=1}^n w_j b_j^\lambda \right)^{1/\lambda} + (1 - \beta) \left( \sum_{i=1}^n v_i |x_i - y_i|^\sigma \right)^{1/\sigma}, \quad (23)$$

where  $b_j$  is the  $|x_i - y_i|$  value of the IGPOWAD triplet  $\langle u_i, x_i, y_i \rangle$  having the  $j$ th largest  $u_i$ ,  $u_i$  is the order-inducing variable,  $x_i$  is the  $i$ th argument of the set  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $y_i$  is the  $i$ th argument of the set  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ ,  $\beta \in [0, 1]$  and  $\lambda$  and  $\sigma$  are parameters such that  $\lambda, \sigma \in (-\infty, \infty) - \{0\}$ .

Note that the IMPOWAD operator accomplishes similar properties than the MPOWAD operator including monotonicity, idempotency, reflexivity, non-negativity and the boundary condition n. It includes a wide range of particular cases by using different expressions in the weighting vectors and different values of  $\lambda$  and  $\sigma$ . If  $\lambda = \sigma = 1$ , the IMPOWAD operator becomes the IPOWAD operator as follows

$$IPOWAD (\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle) = \beta \left( \sum_{j=1}^n w_j b_j \right) + (1 - \beta) \left( \sum_{i=1}^n v_i |x_i - y_i| \right), \quad (24)$$

And if  $\lambda = \sigma = 2$ , the IMPOWAD operator becomes the IEPOWAD operator:

$$IEOWAD (\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle) = \beta \sqrt{\left( \sum_{j=1}^n w_j b_j^2 \right)} + (1 - \beta) \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n v_i |x_i - y_i|^2 \right)} \quad . \quad (25)$$

#### 4. Reinsurance systems with OWA operators and distance measures

##### Suggested methodology

From statistical techniques it is possible to evaluate different reinsurance programs, taking into account different criteria to make optimal decisions (maximum gain, minimum variance or probability of ruin), but with data themselves is not easy to choose a program. The experts must finally agree on a decision in accordance with the objectives of the company. This method uses fuzzy logic tools for evaluating the alternatives, through the following process:

Step 1: Determine the characteristics or criteria that are most important in the decision. These criteria usually have a different numerical scale that can be unified using fuzzy numbers through membership functions on a scale of 0-1.

Step 2: From the results of the previous step a matrix  $U = A \times C$ , containing the set of alternatives  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_i\}$  and the feature set  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_j\}$  is constructed.

Step 3: The optimal strategy where a group of experts defined the most appropriate value required for each feature on a scale of 0 to 1 is determined. The results will be aggregated using the vector  $U = \{U_1, U_2, \dots, U_j\}$ , such that  $\sum_{j=1}^n U_j = 1$  and  $U_j \in [0,1]$ , which weights the view of each expert, unifying criteria of optimal characteristics for the vector  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_j\}$ .

Step 4: The distances between the characteristics C for each strategy A and the vector of optimal strategy E are calculated. The Minkowski distances will be the Hamming distance when  $\lambda = 1$  and the Euclidean distance when  $\lambda = 2$ .

Step 5: The results of the previous step are added taking into account the weighted average with the vector  $V = \{V_1, V_2, \dots, V_j\}$ , such that

$\sum_{j=1}^n V_j = 1$  and  $V_j \in [0,1]$ , the OWA with the vector  $W = \{W_1, W_2, \dots, W_j\}$ , such that  $\sum_{j=1}^n W_j = 1$  and  $W_j \in [0,1]$  and a vector of induction  $I = \{I_1, I_2, \dots, I_j\}$ , which will be considered in the rankings and corresponds to the importance that the experts give to each one of the characteristics of the alternatives.

Step 6: The optimum alternative is chosen establishing a ranking of alternatives for every aggregation operator used in ascending order, since the shorter distance will be the best result.

## 5. Illustrative example

The aim of this case based on the examples of Lemaire (1990) and De Andres and Terceño (2002), is to illustrate the decision-making process to choose the most suitable XL reinsurance program for a portfolio among different programs proposed by a reinsurance company. The criteria taken into account are:

- Criterion 1: Ratio: reinsurance premium / total premium transferor.
- Criterion 2: Coefficient of variation of the retained portfolio.
- Criterion 3: Probability of ruin.
- Criterion 4: Ratio: full / total premium transfer.

The suggested reinsurance programs are shown in the following Table 1:

*Table 5-1 Characteristics of Reinsurance Programs*

| Programs | C1    | C2   | C3       | C4   |
|----------|-------|------|----------|------|
| XL1      | 0,040 | 3,85 | 0,000420 | 1,45 |
| XL2      | 0,030 | 4,07 | 0,000263 | 0,95 |
| XL3      | 0,035 | 4,36 | 0,000411 | 1,00 |
| XL4      | 0,042 | 3,92 | 0,000295 | 0,85 |
| XL5      | 0,028 | 3,80 | 0,000398 | 1,20 |
| XL6      | 0,025 | 4,50 | 0,000562 | 1,30 |

As we can see at a glance whether the decision is made considering only one criterion, you may have other problems reflected in the other criteria, being necessary to have more tools to make the decision. To do this all data

will be put in the same scale of 0-1 through fuzzy numbers with membership functions as well:

Criterion 1: Ratio: reinsurance premium / total premium transferor.

$$U_{C_1}(x, C_1) = \begin{cases} 1 & C_1 \leq 0.025 \\ \left( \frac{0.05 - C_1}{0.05 - 0.025} \right) & 0.025 < C_1 < 0.05 \\ 0 & C_1 \geq 0.05 \end{cases}, (26)$$

Criterion 2: Coefficient of variation of the retained portfolio.

$$U_{C_2}(x, C_2) = \begin{cases} 1 & C_2 \leq 3.8 \\ \left( \frac{5 - C_2}{5 - 3.8} \right) & 3.8 < C_2 < 5 \\ 0 & C_2 \geq 5 \end{cases}, (27)$$

Criterion 3: Probability of ruin.

$$U_{C_3}(x, C_3) = \begin{cases} 1 & 3 \leq 0.00028 \\ \left( \frac{0.0006 - C_3}{0.0006 - 0.00028} \right) & 0.00028 < C_3 < 0.0006 \\ 0 & C_3 \geq 0.0006 \end{cases}, (28)$$

Criterion 4: Ratio: full / total premium transferor.

$$U_{C_4}(x, C_4) = \begin{cases} 0 & C_4 = 0 \\ C_4 & C_4 \leq 1 \\ 2 - C_4 & C_4 > 1 \\ 0 & C_4 \geq 2 \end{cases}, (29)$$

From the above functions the following degrees of membership for each reinsurance program are obtained as shown in Table 2:

*Table 5-2 Degrees of Membership of Criteria*

| Programs | C1   | C2   | C3   | C4   |
|----------|------|------|------|------|
| XL1      | 0,40 | 0,96 | 0,56 | 0,55 |
| XL2      | 0,80 | 0,78 | 1,00 | 0,95 |
| XL3      | 0,60 | 0,53 | 0,59 | 1,00 |
| XL4      | 0,32 | 0,90 | 0,95 | 0,85 |
| XL5      | 0,88 | 1,00 | 0,63 | 0,80 |
| XL6      | 1,00 | 0,42 | 0,12 | 0,70 |

As noted, no program reaches the maximum level on all criteria and in contrast a good value in any of the criteria, is affected by a more negative

effect on the others. Therefore, it has asked a group of experts to define the optimal level of each of the criteria, as shown in Table 3 below:

*Table 5-3 Optimal Level of Criteria*

| Experts | C1  | C2  | C3  | C4  |
|---------|-----|-----|-----|-----|
| E1      | 0,9 | 0,8 | 0,8 | 0,9 |
| E2      | 0,8 | 0,7 | 0,9 | 0,8 |
| E3      | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,8 |
| E4      | 0,9 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
| E5      | 0,9 | 0,9 | 0,7 | 0,8 |

These expert opinions are aggregated with the arithmetic mean obtaining the following vector of optimal reinsurance presented in Table 4:

*Table 5-4 Optimal Reinsurance*

| Program  | C1   | C2   | C3   | C4   |
|----------|------|------|------|------|
| <i>E</i> | 0,88 | 0,78 | 0,78 | 0,84 |

The results have been added using the vectors  $W = (0.35, 0.25, 0.20, 0.20)$  and  $V = (0.2, 0.3, 0.2, 0.3)$  and the induction vector  $I = (0.87, 0.77, 0.80, 0.84)$ . Moreover, the expert opinions about the optimal reinsurance are aggregated with the vector  $U = (0.3, 0.3, 0.2, 0.2, 0.1)$ . The criteria for aggregations based on Minkowski distance will be the Hamming distance when  $\lambda = 1$  and the Euclidean distance when  $\lambda = 2$ . The degree of importance of the weights (probabilities) is 0.6 while the OWA is 0.4. The results are presented in Tables 5 and 6:

*Table 5-5 Aggregated Results 1*

| Program | NHD  | NED  | WHD  | WED  | OWAHD | OWAED | POWAD | EPOWAD |
|---------|------|------|------|------|-------|-------|-------|--------|
| XL1     | 0,29 | 0,31 | 0,28 | 0,30 | 0,32  | 0,34  | 0,296 | 0,316  |
| XL2     | 0,10 | 0,13 | 0,09 | 0,12 | 0,11  | 0,15  | 0,098 | 0,132  |
| XL3     | 0,22 | 0,22 | 0,22 | 0,22 | 0,23  | 0,23  | 0,224 | 0,224  |
| XL4     | 0,22 | 0,30 | 0,19 | 0,27 | 0,27  | 0,35  | 0,222 | 0,302  |
| XL5     | 0,10 | 0,13 | 0,11 | 0,14 | 0,12  | 0,15  | 0,114 | 0,144  |
| XL6     | 0,32 | 0,39 | 0,31 | 0,37 | 0,37  | 0,44  | 0,334 | 0,398  |

*Table 5-6 Aggregated Results 2*

| Program | AOWA<br>HD | AOW<br>AED | IOWA<br>HD | IOWA<br>ED | IAOWA<br>HD | IAOWA<br>ED | IPOWA<br>D | IEPOW<br>AD |
|---------|------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|------------|-------------|
| XL1     | 0,27       | 0,29       | 0,32       | 0,34       | 0,27        | 0,29        | 0,296      | 0,316       |
| XL2     | 0,09       | 0,12       | 0,10       | 0,12       | 0,09        | 0,13        | 0,094      | 0,120       |
| XL3     | 0,21       | 0,21       | 0,23       | 0,23       | 0,22        | 0,23        | 0,224      | 0,224       |
| XL4     | 0,18       | 0,27       | 0,26       | 0,34       | 0,20        | 0,27        | 0,218      | 0,298       |
| XL5     | 0,08       | 0,12       | 0,08       | 0,12       | 0,12        | 0,15        | 0,098      | 0,132       |
| XL6     | 0,28       | 0,35       | 0,28       | 0,35       | 0,34        | 0,40        | 0,298      | 0,362       |

Abbreviations: Normalized Hamming distance (NHD); Normalized Euclidean distance (NED); Weighted Hamming distance (WHD); Weighted Euclidean distance (WED); Ordered weighted averaging Hamming distance (OWAHD); Ordered weighted averaging Euclidean distance (OWAED); Probabilistic ordered weighted averaging distance (POWAD); Euclidean probabilistic ordered weighted averaging distance (EPOWAD); Ascending ordered weighted averaging Hamming distance (AOWAHD); Ascending ordered weighted averaging Euclidean distance (AOWAED); Induced ordered weighted averaging Hamming distance (IOWAHD); Induced ordered weighted averaging Euclidean distance (IOWAED); Induced ascending ordered weighted averaging Hamming distance (IAOWAHD); Induced ascending ordered weighted averaging Euclidean distance (IAOWAED); Induced probabilistic ordered weighted averaging distance (IPOWAD); Induced Euclidean probabilistic ordered weighted averaging distance (IEPOWAD).

Next, let us analyze the ordering of the alternatives with the results obtained shown in table 7:

*Table 5-7 Ranking of Alternatives*

| Method | Ranking                           |
|--------|-----------------------------------|
| NHD    | XL5 = XL2 < XL3 = XL4 < XL1 < XL6 |
| NED    | XL2 = XL5 < XL3 < XL4 < XL1 < XL6 |
| WHD    | XL2 < XL5 < XL4 < XL3 < XL1 < XL6 |
| WED    | XL2 < XL5 < XL3 < XL4 < XL1 < XL6 |
| OWAHD  | XL2 < XL5 < XL3 < XL4 < XL1 < XL6 |
| OWAED  | XL2 = XL5 < XL3 < XL4 < XL1 < XL6 |
| POWAD  | XL2 < XL5 < XL4 < XL3 < XL1 < XL6 |
| EPOWAD | XL2 < XL5 < XL3 < XL4 < XL1 < XL6 |

| Method  | Ranking                             |
|---------|-------------------------------------|
| AOWAHD  | $XL5 < XL2 < XL4 < XL3 < XL1 < XL6$ |
| AOWAED  | $XL2 = XL5 < XL3 < XL4 < XL1 < XL6$ |
| IOWAHD  | $XL5 < XL2 < XL3 < XL4 < XL6 < XL1$ |
| IOWAED  | $XL2 = XL5 < XL3 < XL1 = XL4 < XL6$ |
| IAOWAHD | $XL2 < XL5 < XL4 < XL3 < XL1 < XL6$ |
| IAOWAED | $XL2 < XL5 < XL3 < XL4 < XL1 < XL6$ |
| IPOWAD  | $XL2 < XL5 < XL4 < XL3 < XL1 < XL6$ |
| IEPOWAD | $XL2 < XL5 < XL3 < XL4 < XL1 < XL6$ |

When ordering the distances of the alternatives from lowest to highest for each of the criteria it can be observed that XL2 is the best alternative when using the Hamming distance, WHD, OWAHD, IAOWAHD, POWAD and IPOWAD operator. AOWAHD and IOWAHD consider that XL5 is the best alternative, while NHD presents a tie between XL2 and XL5. Focusing on the Euclidean distance, NED, OWAED, AOWAED and IOWAED have a tie between XL2 and XL5, while WED, EPOWAD, IAOWAED and IEPOWAD indicate that XL2 is better.

## 6. Conclusions

This paper has presented a new method to evaluate reinsurance strategies using different tools such as fuzzy logic, membership functions, distance measures and OWA operators. With this method we have seen that very different criteria can be compared on the same scale to establish distances to the optimum level and then be added to enhance the decision-making process on reinsurance.

The Minkowski distance generalizes a wide range of distances such as the Hamming and Euclidean distance among others, taking into account multiple decision criteria for a more complete evaluation of the alternatives according to its characteristics. The great advantage of using the OWA operator is that it can consider a wide range of distances between the minimum and the maximum. Thus, the information is not lost in the process of analysis and the attitude of decision maker in the problem can be assessed. The main idea of this analysis is to consider a variety of scenarios from the most optimistic to the most pessimistic and select the method that best meets

the goals of the company. Some key modern distance measures have been suggested for solving the reinsurance system including the IMOWAD and the IMPOWAD operator which include a wide range of particular cases.

Future research will consider other operators in the process of aggregation such as those that use inaccurate information in the analysis including intuitionistic fuzzy sets (He et al. 2014; Tao et al. 2014) and hesitant fuzzy sets (Zhao et al. 2014). The use of other distance measures and other applications will be also considered in the insurance field and other related disciplines (Linares-Mustarós et al. 2015).

### **Acknowledgements**

Support from the MAPFRE Foundation and the European Commission through the project PIEF-GA-2011-300062, is gratefully acknowledged.

### **References**

- Beliakov, G., Pradera, A., & Calvo, T. (2007). *Aggregation functions: A guide for practitioners*. Berlin: Springer-Verlag.
- Belles-Sampera, J., Merigó, J. M., Guillén, M., & Santolino, M. (2013). The connection between distortion risk measures and ordered weighted averaging operators. *Insurance: Mathematics and Economics*, 52, 411-420.
- Bolton J., Gader, P., & Wilson, J. N. (2008). Discrete Choquet integral as a distance measure. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16, 1107-1110.
- De Andrés, J., & Terceño Gómez, A. (2002). Actuarial applications of the theory of fuzzy subsets. *CIMBAGE*, 5, 1-39. (In Spanish).
- Figueira, J., Greco, S., & Ehrgott, M. (2005). *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*. Boston: Springer.
- Gil-Aluja, J. (1999). *Elements for a theory of decision in uncertainty*. (Vol. 32). Springer Science & Business Media.
- Grabisch, M., Marichal, J. L., Mesiar, R., & Pap, E. (2011). Aggregation functions: Means. *Information Sciences*, 181, 1-22.



- Hamming, R. W. (1950). Error-detecting and error-correcting codes. *Bell Systems Technical Journal*, 29, 147-160.
- He, Y. D., Chen, H. Y., Zhou, L. G., Liu, J. P., & Tao, Z. F. (2014). Intuitionistic fuzzy geometric interaction averaging operators and their application to multi-criteria decision making. *Information Sciences*, 259, 142–159.
- Kaufmann, A. (1975). Introduction to the theory of fuzzy subsets. *Proceedings of the IEEE*, 65(12), 1734-1734.
- Lemaire, J. (1990). Fuzzy Insurance. *Astin Bulletin*, 20, 33–55.
- Linares-Mustarós, S., Merigó, J. M., & Ferrer-Comalat, J. C. (2015). Processing extreme values in sales forecasting, *Cybernetics and Systems*, 46, 207–229
- Merigó, J. M. (2013). The probabilistic weighted averaging distance and its application in group decision making. *Kybernetes*, 42, 686–697.
- Merigó, J. M., & Casanovas, M. (2011a). A new Minkowski distance based on induced aggregation operators. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 4, 123–133.
- Merigó, J. M., & Casanovas, M. (2011b). Decision-making with distance measures and induced aggregation operators. *Computers & Industrial Engineering*, 60, 66–76.
- Merigó, J. M., & Casanovas, M. (2011c). Induced aggregation operators in the Euclidean distance and its application in financial decision making. *Expert Systems with Applications*, 38, 7603–7608.
- Merigó, J. M., & Gil-Lafuente, A. M. (2010). New decision-making techniques and their application in the selection of financial products. *Information Sciences*, 180, 2085–2094.
- Merigó, J. M., & Gil-Lafuente, A. M. (2012). Decision-making techniques with similarity measures and OWA operators. *SORT-Statistics and Operations Research Transactions*, 36, 81–101.
- Merigó, J. M., & Gil-Lafuente, A. M. (2013). A method for decision making based on generalized aggregation operators. *International Journal of Intelligent Systems*, 28, 453–473.

- Merigó, J. M., Xu, Y. J., & Zeng, S. Z. (2013). Group decision making with distance measures and probabilistic information. *Knowledge-Based Systems*, 40, 81–87.
- Merigó, J. M., & Yager, R. R. (2013). Generalized moving averages, distance measures and OWA operators. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 21, 533–559.
- Mondragón, J. R. (2009). Economic optimization of the ceded reinsurance: Decision models. *Fundación Mapfre* (In Spanish).
- Su, W., Peng, W., Zeng, S., Peng, B., & Pan, T. (2013). A method for fuzzy group decision making based on induced aggregation operators and Euclidean distance. *International Transactions in Operational Research*, 20, 579–594.
- Tao, Z. F., Chen, H. Y., Zhou, L. G., & Liu, J. P. (2014). A generalized multiple attributes group decision making approach based on intuitionistic fuzzy sets. *International Journal of Fuzzy Systems*, 16, 184–195.
- Xu, Z. S. (2012). Fuzzy ordered distance measures. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 11, 73–97.
- Xu, Z. S., & Chen, J. (2008). Ordered weighted distance measures. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 17, 432–445.
- Yager, R. R. (1988). On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision-making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18, 183–190.
- Yager, R. R. (1993). Families of OWA Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59, 125–148.
- Yager, R. R. (1998). Including importances in OWA aggregations using fuzzy systems modeling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6, 286–294.
- Yager, R. R., & Filev, D. P. (1999). Induced ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, 29, 141–150.

- Yager, R. R., Kacprzyk, J., & Beliakov, G. (2011). Recent developments on the ordered weighted averaging operators: Theory and practice. Berlin: Springer-Verlag.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338–353.
- Zavadskas, E. K., & Turskis, Z. (2011). Multiple criteria decision making (MCDM) methods in economics: An overview. *Technological and Economic Development of Economy*, 17, 397–427.
- Zeng, S. Z. (2013a). Decision making with the uncertain IMOWAD operator. *Kybernetes*, 42, 785–799.
- Zeng, S. Z. (2013b). Some intuitionistic fuzzy weighted distance measures and their application to group decision making. *Group Decision and Negotiation*, 22, 281–298.
- Zhao, X. F., Lin, R., & Wei, G. W. (2014). Hesitant triangular fuzzy information aggregation based on Einstein operations and their application to multiple attribute decision making. *Expert Systems with Applications*, 41, 1086–1094.
- Zhou, L. G., Chen, H. Y., & Liu, J. P. (2013). Continuous ordered weighted distance measure and its application to multiple attribute group decision making. *Group Decision and Negotiation*, 22, 739–758.



## **Capítulo 6**

### **Modelo de Decisión Multiexperto y Multicriterio con el Operador OWA de Distancias Inducido Probabilístico**

**“Multi-Person and Multi-Criteria Decision Making with the Induced Probabilistic Ordered Weighted Average Distance”**



## **Multi-Person and Multi-Criteria Decision Making with the Induced Probabilistic Ordered Weighted Average Distance<sup>12</sup>**

Montserrat Casanovas Ramón

*Department of Business Administration, University of Barcelona*

Agustín Torres-Martínez

*Department of Business Administration, University of Barcelona*

José Maria Merigó Lindahl

*Department of Management Control and Information Systems,  
University of Chile,*

### **Abstract**

This paper presents a new approach for the selection of suppliers of products or services, in particular with respect to complex decisions that require evaluating different business characteristics to ensure their suitability and to meet the conditions defined in the recruitment process. To treat this type of problem, this study presents the multi-person multi-criteria induced ordered weighted average distance (MP-MC-IOWAD) operator, which is an extension of OWA operators that includes the notion of distances to multiple criteria and expert valuations. Further extensions are developed by using probabilities to form the induced probabilistic ordered weighted average distance (IPOWAD) operator. An example in the management of insurance policies is presented, where the selection of insurance companies is very complex and requires consideration of subjective criteria by experts in decision making.

**Keywords:** Fuzzy logic; multi-criteria decision making; OWA operator; fuzzy distances.

---

<sup>12</sup> This article has been sent to Group Decision and Negotiation Journal. Journal Citation Report, Thomson Reuters Impact Factor: 1.434. Indexed in Social Science Citation Index, Journal Citation Reports/Social Sciences Edition, SCOPUS, PsycINFO, Google Scholar, CSA, ProQuest, ABS Academic Journal Quality Guide, Academic OneFile, Academic Search, CSA Environmental Sciences, Current Contents / Social & Behavioral Sciences, EBSCO Discovery Service, ECONIS, ERIH PLUS, Expanded Academic, International Bibliography of the Social Sciences (IBSS), International Political Science Abstracts, OCLC, PSYCLINE, Research Papers in Economics (RePEc), SCImago, Summon by ProQuest

## 1. Introduction

In many cases, the selection of services provided to businesses is a complex decision. The provision of insurance is of particular importance, in particular in large volumes as in the case of customers or employees. Therefore, it is necessary to assess not only the characteristics of insurance companies but also the best guarantees of contract compliance and improved stability over the medium and long term (Belles et al. 2013; Casanovas et al. 2015).

In the field of operations research, several authors have developed mathematical models that help individuals make better decisions when it is necessary to balance different objectives or criteria that are in conflict with each other and that to some extent penalize the others. These models are an aspect of decision analysis with multiple criteria, which is known as multiple criteria decision making MCDM (Figueira et al. 2005); they are useful in problems where there is typically no optimal solution and it is necessary to consider the decision maker's preferences for the given alternatives.

In recent years, several studies have introduced a variety of MCDM methods and theories with very good results in the field of fuzzy logic (Qi et al. 2015; Tsao, 2006), including the following: preference ranking organization method for enrichment evaluation (PROMETHEE) (Brans and Vincke, 1985), analytic hierarchy process (AHP) (Önut et al. 2009), and technique for order preference by similarity to ideal solution (TOPSIS) (Bai et al. 2014; Dursun and Karsak, 2010; Liang, 1999) or simple additive weighting (Noor-E-Alam et al. 2011) as well as others (Figueira et al. 2005).

An important element in some MCDM methods is the notion of distances (Gil-Aluja, 1999; Kaufmann, 1975). A significant issue is the application of the ordered weighted averaging (OWA) operators (Emrouznejad and Marra, 2014; Yager, 1988) in problems that are evaluated and analyzed, based on the aggregation of the individual distances of decision criteria from an ideal value, which is typically defined by experts (Karayiannis, 2000). The distances that are common in OWA operators are Euclidean, Hamming, and Minkowski. Extensions or methods of these operators are the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator (Merigó and Gil-Lafuente, 2010, Xu and Chen, 2008), the induced ordered weighted averaging distance (IOWAD) operator (Merigó and Casanovas



2011a; Vizuete et al. 2015), and the induced Minkowski ordered weighted averaging distance (IMOWAD) operator (Merigó and Casanovas, 2011b). Recently, several authors have developed extensions for complex information using interval numbers (Su et al. 2015; Zeng, 2013; Zeng et al. 2013), linguistic variables (Liu et al. 2014; Xian and Sun, 2014; Zeng and Su, 2012), fuzzy numbers (Ulutagay and Kantarci, 2015; Xu, 2012) and intuitionistic fuzzy sets (Chen et al. 2015; Zhou et al. 2016).

The aim of this paper is to develop a new decision making approach using induced aggregation operators and distance measures. We introduce the induced probabilistic ordered weighted average distance (IPOWAD) operator, an aggregation operator that unifies the IOWAD operator with the weighted Hamming distance taking into account the importance that each concept may have in the aggregation. Some of its main properties and particular cases are studied. These operators have been selected because of their suitability for environments in which risk and uncertainty exist within the same formulation. In the real world, this is quite common because complex environments typically offer partial information based on probabilities, but there are also other sources of information including attitudes and opinions. Thus, aggregation operators that consider these issues such as the IPOWAD operator, are necessary. Moreover, the advantage of the IPOWAD operator is that it can use distance measures in decision environments under risk and uncertainty. The analysis is focused on the use of multi-criteria and multi-person techniques in decision making. The study develops an application for group decision making in insurance management.

This article is structured as follows. In section 2, the basic concepts of distance measures, OWA, OWAD, IMOWAD, and IOWA operators are presented. Section 3 introduces a method for calculating inducing variables, and the MP-MC-IOWAD operator is proposed. Section 4 addresses the IPOWAD operator. Section 5 analyzes the steps of the proposed method. An illustrative example is developed for selecting insurers in Section 6, and finally, Section 7 summarizes the conclusions.

## 2. Preliminaries

### 2.1. Distance measures

The notion of distance is used to measure the difference or calculate the degree of distance between two elements or sets (Gil-Aluja, 1999; Kaufmann, 1975). Among the most commonly used distances are the Hamming, the Euclidean and the Minkowski. A measure of distance can be considered provided that the following properties are satisfied:

Non negativity:  $D(A_1, A_2) \geq 0$ .

Commutativity:  $D(A_1, A_2) = D(A_2, A_1)$ .

Reflexivity:  $D(A_1, A_1) = 0$ .

Triangle inequality:  $D(A_1, A_2) + D(A_2, A_3) \geq D(A_1, A_3)$ .

The Hamming, Euclidean and Minkowski distances can be formulated as follows:

**Definition 1:** Let  $E$  be a finite referential with  $A, B \subset E$ , so that the Hamming distance is defined as:

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^n |u_{\underline{A}}(x_i) - u_{\underline{B}}(x_i)|, \quad (1)$$

with;  $x \in E \forall i = 1, 2, \dots, n; u_{\underline{A}}(x_i), u_{\underline{B}}(x_i) \in [0, 1]$ .

**Definition 2:** Let  $E$  be a finite referential with  $A, B \subset E$ , so that the Euclidean distance is defined as:

$$e(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_{\underline{A}}(x_i) - u_{\underline{B}}(x_i))^2}, \quad (2)$$

with;  $x \in E \forall i = 1, 2, \dots, n; u_{\underline{A}}(x_i), u_{\underline{B}}(x_i) \in [0, 1]$ .

**Definition 3:** Let  $E$  be a finite referential with  $A, B \subset E$ , so that the Minkowski distance is defined as:

$$r(A, B) = \left( \sum_{i=1}^n |u_{\underline{A}}(x_i) - u_{\underline{B}}(x_i)|^\lambda \right)^{1/\lambda}, \quad (3)$$

with  $x \in E \forall i = 1, 2, \dots, n; u_{\underline{A}}(x_i), u_{\underline{B}}(x_i) \in [0, 1]$  and  $\lambda \in \mathbb{N} - \{0\}$ .

In the Minkowski distance, note that:

$\lambda = 1$  allows obtaining the Hamming distance.

$\lambda = 2$  allows obtaining the Euclidean distance.

## 2.2. The OWA operator

The OWA operator is an aggregation operator (Beliakov et al. 2007; Grabisch et al. 2011) that provides a parameterized family of aggregation operators between the minimum and the maximum and includes the arithmetic mean as a particular case. It is defined as follows.

**Definition 4:** An OWA operator is defined as a function of dimension  $n$   $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , which have a vector  $W$  of dimension  $n$ ,  $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$  that satisfies the following associated conditions:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j.$$

The essence of the OWA (Yager, 1988; 1993) is the rearrangement of the elements or arguments so that the arguments  $a_i$  are not associated with a weight  $w_j$ , but will be associated with a position in the order of aggregation. The OWA can be ordered in a descending or an ascending way (Yager, 1993).

## 2.3. Distance measures with OWA operators

### The OWAD operator

The ordered weighted averaging distance (OWAD) operator (Merigó and Gil-Lafuente, 2010; Xu and Chen, 2008) is an operator that is based on the measurement of single distance or Hamming distance to obtain an aggregate distance from the minimum and maximum distances.

**Definition 5:** An OWAD operator of dimension  $n$ , which has a function  $OWAD: R^n \times R^n \rightarrow R$  that has an associated weighting vector  $W$  of dimension  $n$ , such that  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  and  $w_i \in [0, 1]$ . So that:

$$OWAD(d_1, d_2, \dots, d_n) = \sum_{j=1}^n w_j D_j, \quad (4)$$

where  $D_j$  is the  $j$ -th greatest  $d_i$ , and  $d_i$  is the individual distance between A and B, such that  $d_i = |a_i - b_i|$ .

### The IOWAD operator

The induced ordered weighted averaging distance (IOWAD) operator (Merigó and Casanovas, 2011a) is an aggregation operator that uses the IOWA operator (Yager, 2003; Yager and Filev, 1999) with distance measures on the arguments, which are aggregated taking into account the induction variables in the order.

**Definition 6:** The IOWAD operator of dimension  $n$ , is a function  $IOWAD: R^n \times R^n \rightarrow R$  that has an associated weight vector  $W$  of dimension  $n$ , such that  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  and  $w_i \in [0,1]$ . So that:

$$IOWAD(\langle u_1, a_1, b_1 \rangle, \langle u_2, a_2, b_2 \rangle, \dots, \langle u_n, a_n, b_n \rangle) = \sum_{j=1}^n w_j D_j, \quad (5)$$

where  $D_j$  is the value  $d_i = |a_i - b_i|$  of the triplet IOWAD  $\langle u_i, a_i, b_i \rangle$  with the largest  $j$ -th  $u_i$ ,  $u_i$  is an induced ordering variable, and  $|a_i - b_i|$  is the variable argument represented by individual distances.

### The IMOWAD operator

The induced Minkowski OWA distance (IMOWAD) operator (Merigó & Casanovas, 2011b), is an operator that generalizes the IOWAD operator by using the Minkowski distance.

**Definition 7:** The IMOWAD operator of dimension  $n$  is a function  $IMOWAD: R^n \times R^n \rightarrow R$ , that has an associated weight vector  $W$  of dimension  $n$ , such that  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  and  $w_i \in [0,1]$ . So that:

$$IOWAD(\langle u_1, a_1, b_1 \rangle, \langle u_2, a_2, b_2 \rangle, \dots, \langle u_n, a_n, b_n \rangle) = \left( \sum_{j=1}^n w_j D_j^\lambda \right)^{1/\lambda}, \quad (6)$$

where  $D_j$  is the value  $d_i = |a_i - b_i|$ ,  $d_i$  is the value of the triplet IOWAD  $\langle u_i, a_i, b_i \rangle$  with the largest  $j$ -th  $u_i$ ,  $u_i$  is induced ordering variable,

$|a_i - b_i|$  is the variable argument that is represented by individual distances, and  $\lambda$  is a parameter such that  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ .

### Measurements of the weighting vector

Another important aspect to consider in the OWA operators is the characterization measures of the weight vector, as proposed by Yager (1988):

The first measure refers to the attitudinal character of the decision maker as well:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^n w_j \left( \frac{n-j}{n-1} \right), \quad (7)$$

where  $\alpha \in [0,1]$ .

The second measure relates to the entropy of dispersion (Shannon, 1948); it is used to identify the information being used in the aggregation and is defined as:

$$H(W) = - \sum_{j=1}^n w_j \ln(w_j), \quad (8)$$

The third measure indicates the degree of favoritism toward pessimistic or optimistic values and is known as operator balance. It is defined as:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^n w_j \left( \frac{n+1-2j}{n-1} \right), \quad (9)$$

where  $Bal(W) \in [-1, 1]$ , remain  $Bal(W) = 1$  for optimistic criterion or the maximum operator,  $Bal(W) = -1$  for pessimistic criterion or the minimum operator and  $Bal(W) = 0$  for the Laplace criterion or arithmetic average.

The fourth measure indicates the degree of divergence and is generally used when the measure of dispersion and attitudinal are incomplete. It is defined as:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^n w_j \left( \frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2, \quad (10)$$

where  $Div(W) = 0$  for the pessimistic or optimistic case.

### 3. New Method to Obtain Inducing Variables with Multi-Person and Multi-Criteria Decision Making

This section presents a new method to define the array of induction variables using a group of experts and to evaluate the multiple criteria of the alternatives using the objective data that is obtained. The advantage of this method is that it can take into account the particular situations of each criteria, which are assigned values by different experts. For example, if a criterion refers to the volume of business or market share which certain companies may have a greater share of and which others may be losing relative to competitors, experts can underestimate or overestimate the information to make it conform to reality or future expectations. Recall that the OWA weights represent the attitude of the decision maker with respect to the problem being considered. Therefore, it is important to correctly represent this attitude in the weighting vector.

Definition 8: Let  $U_k = A_i \times C_j$ , a multi-person induction array, where  $A = (a_1, a_2 \dots a_i)$  are the different alternatives and  $C = (c_1, c_2 \dots c_j)$  are the criteria with which experts evaluate the alternatives; the criteria also have a weighting vector  $P$  of dimension  $n$ , such that  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$  and  $p_k \in [0,1]$ :

$$U = \sum_{k=1}^n u_k p_k, \quad (11)$$

where expert reviews  $U_k$  are added in weighted form through vector  $P$ . This method can improve the results of multi-person and multi-criteria operators using induced variables. Table 1 shows some of these operators.

Table 6-1 Multi-Person and Multi-Criteria Aggregation Operators

|              |       | Multi-Criteria |          |          |          |          |
|--------------|-------|----------------|----------|----------|----------|----------|
|              |       | WA             | OWA      | OWAD     | IOWA     | IOWAD    |
| Multi-Person | WA    | MP-WA          | MP-WA    | MP-WA    | MP-WA    | MP-WA    |
|              |       | MC-WA          | MC-OWA   | MC-OWAD  | MC-IOWA  | MC-IOWAD |
|              | OWA   | MP-OWA         | MP-OWA   | MP-OWA   | MP-OWA   | MP-OWA   |
|              |       | MC-WA          | MC-OWA   | MC-OWAD  | MC-IOWA  | MC-IOWAD |
|              | OWAD  | MP-OWAD        | MP-OWAD  | MP-OWAD  | MP-OWAD  | MP-OWAD  |
|              |       | MC-WA          | MC-OWA   | MC-OWAD  | MC-IOWA  | MC-IOWAD |
|              | IOWA  | MP-IOWA        | MP-IOWA  | MP-IOWA  | MP-IOWA  | MP-IOWA  |
|              |       | MC-WA          | MC-OWA   | MC-OWAD  | MC-IOWA  | MC-IOWAD |
|              | IOWAD | MP-IOWAD       | MP-IOWAD | MP-IOWAD | MP-IOWAD | MP-IOWAD |
|              |       | MC-WA          | MC-OWA   | MC-OWAD  | MC-IOWA  | MC-IOWAD |

Abbreviations: multi-person (MP); multi-criteria (MC); weighted averaging (WA); ordered weighted averaging (OWA); ordered weighted averaging distance (OWAD); induced ordered weighted averaging (IOWA); induced ordered weighted averaging distance (IOWAD).

### Multi-Person Multi-Criteria Induced OWA Distance (MP-MC-IOWAD) Operator

This operator has been improved by estimating induction variables based on the views of several experts and thus combines objective information with the subjective evaluation criteria of the experts, taking into account the individual circumstances of each case that are not reflected in the arguments for each criterion.

**Definition 9:** The MP-MC-IOWAD operator is a function of dimension  $n$   $MP-MC-IOWAD: R^n \times R^n \times R^n \rightarrow R$ , which has a weight vector  $W$  such that  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  and  $w_j \in [0,1]$ . This is calculated by the following formula:

$$MP - MC - IOWAD (\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \langle u_2, x_2, y_2 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle) = \sum_{j=1}^n w_j b_j \cdot \quad (12)$$

where  $b_j$  is the value of the individual distances  $|x_i - y_i|$  of the triplet MP-MC-IOWAD  $\langle u_j, x_j, y_j \rangle$  containing the  $j$ th largest induction variable  $u_i$ , and  $u_i$  is calculated from definition 12.

#### 4. The Induced Probabilistic Ordered Weighted Average Distance Operator

##### 4.1. Main concepts

The induced probabilistic ordered weighted averaging distance (IPOWAD) operator is a distance measure that uses the probability and the OWA operator in the normalization process of the Hamming distance by using the IPOWA operator. Thus, the reordering of the individual distances is developed according to order-inducing variables that represent a complex reordering process of the individual distances formed by comparing two sets. The main advantage of this new approach is that it is able to address situations where there is some objective information about the possibility that different results will occur; in addition, the attitudinal character of the decision maker is assessed based on order-inducing variables that measure a wide range of attributes such as degree of optimism, psychological aspects and time pressure. It can be defined as follows. For two sets,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  and  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ .

**Definition 10:** An IPOWAD operator of dimension  $n$  is a mapping *IPOWAD*:  $R^n \times R^n \times R^n \rightarrow R$  that has an associated weighting vector  $W$  such that  $w_j \in [0, 1]$  and  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ , according to the following formula:

$$IPOWAD(\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle) = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j b_j, \quad (13)$$

where  $b_j$  is the  $|x_i - y_i|$  value of the IPOWAD triplet  $\langle u_i, x_i, y_i \rangle$  having the  $j$ th largest  $u_i$ ,  $u_i$  is the order-inducing variable,  $x_i$  is the  $i$ th argument of the set  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $y_i$  is the  $i$ th argument of the set  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ , each argument or individual distance  $|x_i - y_i|$  has an associated probability  $v_i$  with  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  and  $v_i \in [0, 1]$ ,  $\hat{v}_j = \beta w_j + (1 - \beta)v_j$  with  $\beta \in [0, 1]$  and  $v_j$  is the probability  $v_i$  ordered according to the  $j$ th largest  $u_i$ .



Note that it is also possible to formulate the IPOWAD operator separating the part that strictly affects the IOWAD operator and the part that affects the probability.

**Definition 11:** An IPOWAD operator is a mapping  $IPOWAD: R^n \times R^n \times R^n \rightarrow R$  of dimension  $n$ , if it has an associated weighting vector  $W$ , with  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$  and  $w_j \in [0, 1]$ , and a weighting vector  $V$  that affects the probability, with  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  and  $v_i \in [0, 1]$ , such that:

$$IPOWAD (\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle) = \beta \sum_{j=1}^n w_j b_j + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n v_i |x_i - y_i|, \quad (14)$$

where  $b_j$  is the  $|x_i - y_i|$  value of the IPOWAD triplet  $\langle u_i, x_i, y_i \rangle$  having the  $j$ th largest  $u_i$ ,  $u_i$  is the order-inducing variable,  $x_i$  is the  $i$ th argument of the set  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $y_i$  is the  $i$ th argument of the set  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ , and  $\beta \in [0, 1]$ .

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e.,  $\hat{V} = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j \neq 1$ , the IPOWAD operator can be expressed as:

$$IPOWAD (\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle) = \frac{1}{\hat{V}} \sum_{j=1}^n \hat{v}_j b_j. \quad (15)$$

If  $D$  is a vector corresponding to the ordered arguments  $b_j$ , we shall call this the ordered argument vector, and  $W^T$  is the transpose of the weighting vector; then, the IPOWAD operator can be represented as follows:

$$IPOWAD (\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle) = W^T D. \quad (16)$$

Note that it is possible to distinguish between descending (DIPOWAD) and ascending (AIPOWAD) orders. The weights of these operators are related by  $w_j = w_{n-j+1}^*$ , where  $w_j$  is the  $j$ th weight of the DIPOWAD and  $w_{n-j+1}^*$  the  $j$ th weight of the AIPOWAD operator.

Note that  $IPOWAD (\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle) = 0$  if and only if  $x_i = y_i$  for all  $i \in [1, n]$ . Note also that  $IPOWAD (\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle) = IPOWAD (\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle)$ .

The IPOWAD operator is monotonic, bounded and idempotent. It is monotonic because if  $|x_i - y_i| \geq |s_i - t_i|$ , for all  $|x_i - y_i|$ , then,  $IPOWAD (\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle) \geq IPOWAD (\langle u_1, s_1, t_1 \rangle, \dots, \langle u_n, s_n, t_n \rangle)$ . It is bounded because the IPOWAD aggregation is delimited by the minimum and the maximum. That is,  $\text{Min}\{|x_i - y_i|\} \leq IPOWAD (\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle) \leq \text{Max}\{|x_i - y_i|\}$ . It is idempotent because if  $|x_i - y_i| = |x - y|$  for all  $|x_i - y_i|$ , then  $IPOWAD (\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle) = |x - y|$ .

#### 4.2. Families of IPOWAD Operators

A further interesting issue to consider is the different families of IPOWAD operators that are found in the weighting vector  $W$  and the coefficient  $\beta$ .

If  $\beta = 0$ , we get the probabilistic distance.

If  $\beta = 1$ , we get the IOWAD operator.

The arithmetic probabilistic distance (if  $w_j = 1/n$  for all  $j$ ).

The arithmetic IOWAD operator (if  $v_i = 1/n$  for all  $i$ ).

The normalized probabilistic distance (if  $v_i = 1/n$  for all  $i$ , and  $w_j = 1/n$  for all  $j$ ).

The maximum probabilistic distance ( $w_p = 1$  and  $w_j = 0$  for all  $j \neq p$ , and  $u_p = \text{Max}\{|x_i - y_i|\}$ ).

The minimum probabilistic distance ( $w_p = 1$  and  $w_j = 0$  for all  $j \neq p$ , and  $u_p = \text{Min}\{|x_i - y_i|\}$ ).

The Hurwicz probabilistic distance criteria ( $w_p = \alpha$ , with  $u_p = \text{Max}\{|x_i - y_i|\}$ ;  $w_q = 1 - \alpha$ ,  $u_q = \text{Min}\{|x_i - y_i|\}$ ; and  $w_j = 0$  for all  $j \neq p, q$ ).

The step-IPOWAD ( $w_k = 1$  and  $w_j = 0$  for all  $j \neq k$ ).

The IPOWA operator (if one of the sets is empty).

The POWA (the ordered position of the  $u_i$  is the same as the ordered position  $b_j$  and one of the sets is empty).

The IOWA ( $\beta = 1$ , and one of the sets is empty).

The OWA ( $\beta = 1$ , one of the sets is empty and the ordered position of the  $u_i$  is the same as the ordered position  $b_j$ ).

The probabilistic aggregation or expected value ( $\beta = 0$ , and one of the sets is empty).

The centered-IPOWAD (if it is symmetric, strongly decaying from the center to the maximum and the minimum, and inclusive).

The S-IPOWAD ( $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$ ,  $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$ , and  $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$  for  $j = 2$  to  $n - 1$ , where  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  and  $\alpha + \beta \leq 1$ ).

The olympic-IPOWAD operator ( $w_1 = w_n = 0$ , and  $w_j = 1/(n - 2)$  for all others).

The general olympic-IPOWAD operator ( $w_j = 0$  for  $j = 1, 2, \dots, k, n, n - 1, \dots, n - k + 1$ ; and for all others  $w_{j^*} = 1/(n - 2k)$ , where  $k < n/2$ ).

Note that other families of IPOWAD operators may be used following a similar methodology as has been developed for the OWA operator and its extensions (Merigó et al. 2013; Yager 1993; Yager et al. 2011). Moreover, we could extend this analysis to other types of distances such as the Euclidean (or quadratic) distance (Merigó and Casanovas, 2011c), the Minkowski (or generalized) distance, the quasi-arithmetic distance, continuous distance (Zhou et al. 2013; 2014), heavy distances (Merigó et al. 2014) and the Choquet distances (Meng and Zhang, 2014; Merigó and Casanovas, 2011a).

It is worth noting that some previous models already considered the possibility of using OWA operators and probabilities in the same formulation. The main model is the concept of immediate probabilities (Engemann et al. 1996; Merigó, 2010; Yager et al. 1995). In this case, following these methodologies, we could develop the induced immediate probabilistic distance (IIP-OWAD) operator in a similar way as has been done in the IPOWAD operator. Another approach that could be analyzed is the weighted OWA (WOWA) (Torra, 1997) and the hybrid averaging (HA) (Xu and Da, 2003) for situations where probabilities are used instead of weighted averages. In these cases, we could form the induced WOWA distance (IWOWAD) and the induced hybrid averaging distance (IHAD) operator. Note that other models could also be considered in this framework

where different extensions and generalizations are being developed (Aggarwal, 2015; Merigó and Yager, 2013).

### 4.3. Generalized and Quasi-Arithmetic Means with The IPOWAD Operator

The IPOWAD operator can be generalized by using generalized and quasi-arithmetic means. Thus, we obtain a more general formulation that can consider a wide range of particular cases including the IPOWAD operator. By using generalized means, the IPOWAD operator becomes the induced generalized probabilistic OWA distance (IGPOWAD). Following equation (14), it can be formulated as follows:

$$\begin{aligned} IGPOWAD (\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle) = \\ = \beta \left( \sum_{j=1}^n w_j b_j^\lambda \right)^{1/\lambda} + (1 - \beta) \left( \sum_{i=1}^n v_i |x_i - y_i|^\delta \right)^{1/\delta}, \quad (17) \end{aligned}$$

where  $\lambda$  and  $\delta$  are parameters such that  $\lambda$  and  $\delta \in \{-\infty, \infty\}$ .

Note that by using different values in  $\lambda$  and  $\delta$ , we obtain a wide range of particular distance operators. For example:

IPOWAD operator: If  $\lambda = 1$  and  $\delta = 1$ .

Harmonic IPOWAD: If  $\lambda = -1$  and  $\delta = -1$ .

Euclidean IPOWAD: If  $\lambda = 2$  and  $\delta = 2$ .

Geometric IPOWAD: If  $\lambda \rightarrow 0$  and  $\delta \rightarrow 0$ .

Cubic IPOWAD: If  $\lambda = 3$  and  $\delta = 3$ .

Maximum distance: If  $\lambda = \infty$  and  $\delta = \infty$ .

Minimum distance: If  $\lambda = -\infty$  and  $\delta = -\infty$ .

Euclidean OWA probabilistic distance: If  $\lambda = 2$  and  $\delta = 1$ .

And so on.

Furthermore, the IGPOWAD operator can be generalized by using quasi-arithmetic means to form the Quasi-IPOWAD operator. Following equations (14) and (17), it is formulated as follows:

$$\begin{aligned}
& \text{Quasi-IPOWAD} (\langle u_1, x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle u_n, x_n, y_n \rangle) = \\
& = \beta \times g^{-1} \left( \sum_{j=1}^n w_j g(b_j) \right) + (1 - \beta) \times h^{-1} \left( \sum_{i=1}^n v_i h(d_i) \right), \quad (18)
\end{aligned}$$

where  $g(b)$  and  $h(d)$  are strictly continuous monotonic functions and  $d_i = |x_i - y_i|$ .

Note that the Quasi-IPOWAD operator includes many particular types of operators including the IGPOWAD operator. This occurs when the functions  $g(b) = b^\lambda$  and  $h(d) = d^\phi$ .

## 5. Decision Making with the MP-MC-IOWAD Operator

When you choose to purchase a high-cost of high-volume product or service, the price-quality relationship of each of the alternatives is also necessary to consider other criteria and ensure the adequacy of the company for hire. The following method is valid in the process of selecting a company for the purchase of products and contracting services:

Step 1. Selection of indicators: there are many criteria to assess a company. However not everyone has the same importance in the decision making process, as it depends on the situation and the preferences of decision makers. Therefore, among the many criteria that can be used, evaluators should choose those that are most appropriate for the selection of the supplier. Usually, these indicators are related to market share, the economic environment and operational management, among others. For this article, the criteria of the insurance market published quarterly by the Superintendent of Insurance of the Nation of Argentina are taken into account.

Step 2. Matrix of indicators: based on the criteria selected in the previous step an array  $U = A \times C$  containing the set of alternatives (companies)  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_i\}$  and the set of selected criteria  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_j\}$  is built.

Step 3. Ideal profile criteria: the experts define the vector corresponding to the ideal values for each criterion  $I = i_1, i_2, \dots, i_j$ . One way to do this is by taking the best result in each criterion as shown in the illustrative application.

Step 4. Matrix of distances: the Hamming distances between feature vector  $C$  and ideal company  $I$  for each strategy  $A$  are calculated by obtaining

a new array of distance matrix  $U' = A \times C$  with selected criteria for  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_j\}$  to assess companies  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_i\}$ . You can also use the Euclidean distance where required.

Step 5. Induction matrix: as there are many features that affect the value of the criteria for each company, a group of experts evaluate on a scale of 0-10 each criterion for the companies, obtaining an induction matrix of selected criteria for the companies evaluated. Later, the weighted average will be added to obtain an array of aggregate induction.

Step 6. Aggregation results: operators such as arithmetic mean, weighted average, OWAD, AOWAD, IOWAD, IAOWAD, POWAD and IPOWAD, among others, are added to evaluate companies.

Step 7. Ranking of alternatives: the optimal alternative is chosen, establishing a ranking of alternatives for each aggregation operators used in ascending order because the shortest distance will be the best result.

## **6. Illustrative example**

The following example is presented for a company that is hiring an insurance company for the transport sector in Argentina. This case takes into account the insurance market indicators published by the Superintendent of Insurance of the Nation. Five criterion have been chosen for the analysis:

Criterion 1. Total production: refers to the size of the insurance taking into account premiums in the transport sector. The result varies between 0 and 1 or from 0 to 100 in percentage terms. A higher value of this indicator is better for the company in the sector.

Criterion 2. Credits / Assets: this ratio indicates the degree of dependence of the insurer with respect to its creditors. The result ranges from 0 to 1 or from 0 to 100 in percentage terms. It is the best asset of the company when this indicator is lower.

Criterion 3. (Investment + Property) / Assets: this ratio shows the backing of the company over the medium and long term. The result varies from 0 to 1 or from 0 to 100 in percentage terms. A higher value of this indicator indicates a better position in the medium and long term, although this is at the expense of immediate liquidity.

Criterion 4. Ceded premiums / issued premiums: this ratio indicates the proportion of premiums that are reserved for the payment of reinsurance. The result varies from 0 to 1 or from 0 to 100 in percentage terms. The higher the ratio, the lower the risk of default by claim. However, one must take into account other factors in assessing this indicator.

Criterion 5. Total expenses / Issued premiums: this ratio refers to the proportion of collected premiums that are to be allocated to cover the full costs. The lower bound of the result is 0, and it has no upper limit but usually does not exceed 100%. The lower the ratio; the lower are the business costs, demonstrating greater efficiency and greater likelihood to stay in the market.

Table 1 shows the indicators for five insurer companies in the transport sector in Argentina from December 31, 2013:

*Table 6-2 Indicators of the Insurance Market*

| <b>Business</b> | <b>C1</b> | <b>C2</b> | <b>C3</b> | <b>C4</b> | <b>C5</b> |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Insurer 1       | 0.082     | 0,036     | 0,957     | 0,086     | 0.166     |
| Insurer 2       | 0,029     | 0,120     | 0.867     | 0.073     | 1,003     |
| Insurer 3       | 0,051     | 0,426     | 0.558     | 0,121     | 1,854     |
| Insurer 4       | 0.312     | 0,260     | 0.709     | 0,032     | 0.089     |
| Insurer 5       | 0.526     | 0.487     | 0,440     | 0,028     | 0.542     |

Source: Argentina Insurance Superintendency ( [www.ssn.gov.ar](http://www.ssn.gov.ar) )

As seen in the table above, any one of the insurers is superior to the others in every category, which means that a superior indicator may come at the expense of a lower result in another category. Given the above, the ideal level for each indicator was determined from the best result among the five companies, as shown in Table 2.

*Table 6-3 Indicators of the Ideal Profile*

| <b>Ideal Profile</b> | <b>C1</b> | <b>C2</b> | <b>C3</b> | <b>C4</b> | <b>C5</b> |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <i>(I)</i>           | 0.526     | 0,036     | 0,957     | 0,121     | 0.089     |

From the data in Table 1, the Hamming distances of the indicators of each of the insurers with respect to the ideal profile are calculated. The matrix of distances is shown in Table 3.

*Table 6-4 Matrix of Distances*

| <b>Business</b> | <b>C1</b> | <b>C2</b> | <b>C3</b> | <b>C4</b> | <b>C5</b> |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Insurer 1       | 0,444     | 0,000     | 0,000     | 0,058     | 0,077     |
| Insurer 2       | 0.497     | 0.084     | 0,090     | 0,045     | 0,914     |
| Insurer 3       | 0,475     | 0,390     | 0.399     | 0,093     | 1,765     |
| Insurer 4       | 0.214     | 0.224     | 0.248     | 0,004     | 0,000     |
| Insurer 5       | 0,000     | 0.451     | 0.517     | 0,000     | 0.453     |

Evaluating the results of the above table is important to consider the situation of the indicators of each company. For example, when the total output of a company with a large market share that is in decline is compared to a smaller company with better prospects for growth, the assessment by the decision maker may be different than what is reflected by the data. Another case might be to compare the level of reinsurance, where the highest level indicates a better guarantee of solvency, but it is important to consider accidents that can justify the proportion of reinsurance. To better evaluate the results, a committee of experts is asked to assess the indicators of each insurer, taking advantage of the knowledge and experience that each may have about this case. The expert valuations are shown in Tables 4, 5 and 6 on a scale of 0-10.

*Table 6-5 Matrix of Induced Variables - Expert 1*

| <b>Business</b> | <b>C1</b> | <b>C2</b> | <b>C3</b> | <b>C4</b> | <b>C5</b> |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Insurer 1       | 7         | 8         | 7         | 7         | 7         |
| Insurer 2       | 7         | 8         | 8         | 7         | 4         |
| Insurer 3       | 7         | 7         | 5         | 8         | 5         |
| Insurer 4       | 6         | 5         | 6         | 6         | 8         |
| Insurer 5       | 9         | 5         | 6         | 6         | 9         |

*Table 6-6 Matrix of Induced Variables - Expert 2*

| <b>Business</b> | <b>C1</b> | <b>C2</b> | <b>C3</b> | <b>C4</b> | <b>C5</b> |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Insurer 1       | 7         | 7         | 7         | 6         | 8         |
| Insurer 2       | 8         | 7         | 8         | 8         | 4         |
| Insurer 3       | 6         | 6         | 6         | 8         | 3         |
| Insurer 4       | 5         | 7         | 7         | 7         | 9         |
| Insurer 5       | 8         | 6         | 5         | 7         | 9         |



*Table 6-7 Matrix of Induced Variables - Expert 3*

| <b>Business</b> | <b>C1</b> | <b>C2</b> | <b>C3</b> | <b>C4</b> | <b>C5</b> |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Insurer 1       | 8         | 9         | 6         | 8         | 8         |
| Insurer 2       | 7         | 6         | 8         | 8         | 2         |
| Insurer 3       | 7         | 6         | 6         | 9         | 2         |
| Insurer 4       | 5         | 7         | 7         | 9         | 9         |
| Insurer 5       | 10        | 6         | 5         | 8         | 8         |

The opinions of experts have been added, with the opinions of the three averaged to obtain the results in Table 7.

*Table 6-8 Matrix of Induced Variables Aggregated*

| <b>Business</b> | <b>C1</b> | <b>C2</b> | <b>C3</b> | <b>C4</b> | <b>C5</b> |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Insurer 1       | 7.33      | 8.00      | 6.67      | 7.00      | 7.67      |
| Insurer 2       | 7.33      | 7.00      | 8.00      | 7.67      | 3.33      |
| Insurer 3       | 6.67      | 6.33      | 5.67      | 8.33      | 3.33      |
| Insurer 4       | 5.33      | 6.33      | 6.67      | 7.33      | 8.67      |
| Insurer 5       | 9.00      | 5.67      | 5.33      | 7.00      | 8.67      |

The results have been aggregated with the vectors  $P = (0.15, 0.20, 0.25, 0.15, 0.25)$  and  $W = (0.30, 0.25, 0.20, 0.15, 0.10)$  using the following criteria:

- **Arithmetic Mean (AM):** the average distances of indicators for each insurer in Table 3.

- **Weighted Average (WA):** the aggregation of indicator distances of each insurer in Table 3 using the weight vector P.

- **OWAD:** the aggregation in descending order of indicator distances shown in Table 3 from the weight vector W.

- **AOWAD:** aggregation in ascending order of distance indicators shown in Table 3, from the weight vector W.

- **IOWAD:** aggregation in descending order of distance indicators shown in Table 3 from the weight vector W, considering the aggregated matrix of induction (Table 7) for sorting.

- **IAOWAD:** aggregation in ascending order of distance indicators shown in Table 3 from the weight vector  $W$ , considering the aggregated matrix of induction (Table 7) for sorting.

- **POWAD:** unification between the WAD and the OWAD with  $\beta = 0.4$ .

- **IPOWAD:** integration between the WAD and the IOWAD with  $\beta = 0.4$

The results of the aggregation with the above criteria are shown in Table 8.

*Table 6-9 Aggregated Results*

| <b>Business</b> | <b>AM</b> | <b>WA</b> | <b>OWAD</b> | <b>AOWAD</b> | <b>IOWAD</b> | <b>IAOWAD</b> | <b>POWAD</b> | <b>IPOWAD</b> |
|-----------------|-----------|-----------|-------------|--------------|--------------|---------------|--------------|---------------|
| Insurer 1       | 0,111     | 0,091     | 0.148       | 0,074        | 0,113        | 0.109         | 0.114        | 0,100         |
| Insurer 2       | 0,327     | 0,349     | 0.434       | 0.219        | 0,242        | 0.411         | 0.383        | 0,306         |
| Insurer 3       | 0.606     | 0,690     | 0.786       | 0,426        | 0,433        | 0.778         | 0,729        | 0,587         |
| Insurer 4       | 0.155     | 0,152     | 0.136       | 0.174        | 0,127        | 0,183         | 0,146        | 0,142         |
| Insurer 5       | 0.303     | 0,347     | 0,366       | 0.237        | 0.251        | 0,355         | 0,355        | 0,309         |

Next, let us present in Table 9 the ranking of the alternatives with the results from the table above.

*Table 6-10 Ranking of the Alternatives*

| <b>Criteria</b> | <b>Ranking</b>     |
|-----------------|--------------------|
| AM              | A1 <A4 <A5 <A2 <A3 |
| WA              | A1 <A4 <A5 <A2 <A3 |
| OWAD            | A4 <A1 <A5 <A2 <A3 |
| AOWAD           | A1 <A4 <A2 <A5 <A3 |
| IOWAD           | A1 <A4 <A2 <A5 <A3 |
| IAOWAD          | A1 <A4 <A5 <A2 <A3 |
| POWAD           | A1 <A4 <A5 <A2 <A3 |
| IPOWAD          | A1 <A4 <A2 <A5 <A3 |

As can be seen, nearly all criteria except the OWAD operator indicate that the best alternative is 1 and the worst is 3. It is worth mentioning that

occasionally, each type of distance may lead to different results. This depends on the initial information available, which produces a different representative result with each approach. Note that the IPOWAD approach is a more general model that includes a wide range of particular cases. Observe that several particular aggregation criteria are presented because they represent the particular positions that the decision maker may adopt with the IPOWAD operator. Thus, we offer a more complete picture of the analysis that can be developed using the IPOWAD operator.

## **7. Conclusions**

This study has introduced a new MCDM method for the selection of companies using the multi-person multi-criteria induced ordered weighted distance (MP-MC-IOWAD) operator; this approach includes a new tool to calculate the array of induction based on the opinions of experts and assesses the criteria by taking into account specific situations that are not reflected in the data but are instead derived from the knowledge and experience of experts. Thus, factual information is supplemented by indicators that underestimate or overestimate the information in different situations, mainly in uncertain environments.

A new distance aggregation operator is suggested in this paper: the IPOWAD operator. This is a new distance measure that uses probabilities in the aggregation process. Moreover, it also uses the OWA operator in an environment where the attitudinal character of the decision maker is very complex and can be assessed with induced aggregation operators. The main advantage of this approach is that it provides a unified framework between the probability and the IOWA operator when using distance measures. Thus, this model includes a wide range of distance measures that are also new in the literature, such as arithmetic probabilistic distance, probabilistic distance, maximum probabilistic distance and minimum probabilistic distance.

The applicability of the MP-MC-IOWAD operator and the proposed method is demonstrated with the development of an illustrative application that intends to select an insurance company based on expert analysis of indicators and the use of distance measures to improve the processes of decision making when the characteristics of the indicator analysis are difficult. Note that the main advantage of these operators is that they represent a wide range of scenarios and can be adapted to the particular needs

of the decision maker and the available information in the specific problem considered.

Future research of other MCDM methods using tools such as the adequacy ratio, extension OWA operators and distance measures will be developed. We will also consider the implementation in other problems of economics and business management. Additionally, other aggregation operators and distance measures may be considered in the analysis.

### **Acknowledgements**

Support from the MAPFRE Foundation, the Fondecyt Regular program of the Chilean Government and the European Commission through the project PIEF-GA-2011-300062, is gratefully acknowledged.

### **References**

- Aggarwal, M. (2015). Generalized compensative weighted averaging aggregation operators. *Computers & Industrial Engineering*, 87, 81–90.
- Bai, C., Dhavale, D., & Sarkis, J. (2014). Integrating Fuzzy C-Means and TOPSIS for performance evaluation: An application and comparative analysis. *Expert Systems with Applications*, 41(9), 4186–4196.
- Beliakov, G., Pradera, A., & Calvo, T. (2007). *Aggregation functions: A guide for practitioners*. Berlin: Springer-Verlag.
- Belles-Sampera, J., Merigó, J. M., Guillén, M., & Santolino, M. (2013). The connection between distortion risk measures and ordered weighted averaging operators. *Insurance: Mathematics and Economics*, 52, 411–420.
- Brans, J. P., & Vincke, P. (1985). A preference ranking organization method: The PROMETHEE method for MCDM. *Management Science*, 31(6), 647–656.
- Casanovas, M., Torres-Martínez, A., & Merigó, J.M. (2015). Decision making processes of non-life insurance pricing using fuzzy logic and OWA operators, *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, 49(2), 169–188.

- Chen, S., Mu, Z. M., & Zeng, S. Z. (2015). Atanassov's intuitionistic fuzzy decision making with probabilistic information and distance measure. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 28(1), 317–325.
- Dursun, M., & Karsak, E. E. (2010). A fuzzy MCDM approach for personnel selection. *Expert Systems with Applications*, 37(6), 4324–4330.
- Emrouznejad, A., & Marra, M. (2014). Ordered weighted averaging operators 1988–2014: A citation based literature survey. *International Journal of Intelligent Systems*, 29, 994–1014.
- Engemann K. J., Filev, D. P., & Yager, R. R. (1996). Modelling decision making using immediate probabilities. *International Journal of General Systems*, 24, 281–294.
- Figueira, J., Greco, S., & Ehrgott, M. (2005). *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*. Boston: Springer.
- Gil-Aluja, J. (1999). *Elements for a theory of decision in uncertainty*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Grabisch, M., Marichal, J. L., Mesiar, R., & Pap, E. (2011). Aggregation functions: Means. *Information Sciences*, 181, 1–22.
- Hamming, R. W. (1950). Error-detecting and error-correcting codes. *Bell Systems Technical Journal*, 29, 147–160.
- Karayiannis, N. (2000). Soft learning vector quantization and clustering algorithms based on ordered weighted aggregation operators. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11, 1093–1105.
- Kaufmann, A. (1975). *Introduction to the theory of fuzzy subsets*. New York: Academic Press.
- Liang, G. -S. (1999). Fuzzy MCDM based on ideal and anti-ideal concepts. *European Journal of Operational Research*, 112(3), 682–691.
- Liu, H. C., You, J. X., & You, X. Y. (2014). Evaluating the risk of healthcare failure modes using interval 2-tuple hybrid weighted distance measure. *Computers & Industrial Engineering*, 78, 249–258.

- Meng, F. Y., & Zhang, Q. (2014). Induced continuous Choquet integral operators and their application to group decision making. *Computers & Industrial Engineering*, 68, 42–53.
- Merigó, J. M. (2010). Fuzzy decision making using immediate probabilities, *Computers & Industrial Engineering* 58(4), 651–657.
- Merigó, J. M., & Casanovas, M. (2011a). Decision-making with distance measures and induced aggregation operators. *Computers & Industrial Engineering*, 60(1), 66–76.
- Merigó, J. M., & Casanovas, M. (2011b). A new Minkowski distance based on induced aggregation operators. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 4(2), 123–133.
- Merigó, J. M., & Casanovas, M. (2011c). Induced aggregation operators in the Euclidean distance and its application in financial decision making. *Expert Systems with Applications*, 38(6), 7603–7608.
- Merigó, J. M., Casanovas, M., & Zeng, S. Z. (2014). Distance measures with heavy aggregation operators. *Applied Mathematical Modelling*, 38(13), 3142–3153.
- Merigó, J. M., & Gil-Lafuente, A. M. (2010). New decision-making techniques and their application in the selection of financial products. *Information Sciences*, 180(11), 2085–2094.
- Merigó, J. M., Xu, Y., & Zeng, S. (2013). Group decision making with distance measures and probabilistic information. *Knowledge-Based Systems*, 40, 81–87.
- Merigó, J. M., & Yager, R. R. (2013). Generalized moving averages, distance measures and OWA operators. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 21, 533–559.
- Noor-E-Alam, M., Lipi, T. F., Ahsan Akhtar Hasin, M., & Ullah, A. M. M. S. (2011). Algorithms for fuzzy multi expert multi criteria decision making (ME-MCDM). *Knowledge-Based Systems*, 24(3), 367–377.
- Önüt, S., Kara, S. S., & Işık, E. (2009). Long term supplier selection using a combined fuzzy MCDM approach: A case study for a

- telecommunication company. *Expert Systems with Applications*, 36(2), 3887–3895.
- Qi, X. W., Liang, C. Y., Zhang, J. L. (2015). Generalized cross-entropy based group decision making with unknown expert and attribute weights under interval-valued intuitionistic fuzzy environment. *Computers & Industrial Engineering*, 79, 52–64.
- Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication, *Bell System Technical Journal*, 27, 379–423.
- Su, W. H., Zhang, C., & Zeng, S. Z. (2015). Uncertain induced heavy aggregation distance operator and its application to decision making. *Cybernetics and Systems*, 46(3-4), 172–187.
- Torra, V. (1997). The weighted OWA operator. *International Journal of Intelligent Systems*, 12, 153–166.
- Tsao, C. -T. (2006). A fuzzy MCDM approach for stock selection. *Journal of the Operational Research Society*, 57(11), 1341–1352.
- Ulutagay, G., & Kantarci, S. (2015). An extension of fuzzy L-R data classification with fuzzy OWA distance. *International Journal of Intelligent Systems*, 30(9), 1006–1020.
- Vizuete, E., Merigó, J. M., Gil-Lafuente, A. M., & Boria, S. (2015). Decision making in the assignment process by using the Hungarian algorithm with the OWA operator. *Technological and Economic Development of Economy*, 21(5), 684–704.
- Wei, G. W., Zhao, X. F., & Lin, R. (2013). Some hybrid aggregating operators in linguistic decision making with Dempster-Shafer belief structure. *Computers & Industrial Engineering*, 65, 646–651.
- Xian, S., & Sun, W. (2014). Fuzzy linguistic induced Euclidean OWA distance operator and its application in group linguistic decision making. *International Journal of Intelligent Systems*, 29(5), 478–491.
- Xu, Z. S. (2012). Fuzzy ordered distance measures. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 11, 73–97.
- Xu, Z. S., & Chen, J. (2008). Ordered weighted distance measures. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 17, 432–445.

- Xu, Z. S., Da, Q. L. (2003). An overview of operators for aggregating the information. *International Journal of Intelligent Systems*, 18, 953–969.
- Yager, R. R. (1988). On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision-making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18(1), 183–190.
- Yager, R. R. (1993). Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59, 125–148.
- Yager, R. R. (2003). Induced aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 137(1), 59–69.
- Yager, R. R., Engemann, K. J., Filev, D. P. (1995). On the concept of immediate probabilities. *International Journal of Intelligent Systems*, 10, 373–397.
- Yager, R. R., & Filev, D. P. (1999). Induced ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, 29(2), 141–150.
- Yager, R. R., Kacprzyk, J., & Beliakov, G. (2011). *Recent developments on the ordered weighted averaging operators: Theory and practice*. Berlin: Springer-Verlag.
- Zeng, S. Z. (2013). Decision making with the uncertain IMOWAD operator. *Kybernetes*, 42, 785–799.
- Zeng, S. Z., & Su, W. (2012). Linguistic induced generalized aggregation distance operators and their application to decision making. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, 46, 155–172.
- Zeng, S. Z., Merigó, J. M., & Su, W. H. (2013). The uncertain probabilistic OWA distance operator and its application in group decision making. *Applied Mathematical Modelling*, 37(9), 6266–6275.
- Zhou, L. G., Chen, H. Y., & Liu, J. P. (2013). Continuous ordered weighted distance measure and its application to multiple attribute group decision making. *Group Decision and Negotiation*, 22, 739–758.



- Zhou, L. G., Jin, F. F., Chen, H. Y., & Liu, J. P. (2016). Continuous intuitionistic fuzzy ordered weighted distance measure and its application to group decision making. *Technological and Economic Development of Economy*, 22(1), 75–99.
- Zhou, L. G., Wu, J. X., & Chen, H. Y. (2014). Linguistic continuous ordered weighted distance measure and its application to multiple attributes group decision making. *Applied Soft Computing*, 25, 266–276.



## **Capítulo 7**

### **Modelo de Decisiones de Precios en Seguros con Lógica Difusa y Operadores OWA**

**“Decision Making Processes of Non-Life Insurance Pricing Using  
Fuzzy Logic and OWA Operators”**



## **Decision Making Processes of Non-Life Insurance Pricing Using Fuzzy Logic and OWA Operators<sup>13</sup>**

Montserrat Casanovas Ramón

*Department of Business Administration, University of Barcelona*

Agustín Torres-Martínez

*Department of Business Administration, University of Barcelona*

José Maria Merigó Lindahl

*Department of Management Control and Information Systems,  
University of Chile,*

### **Abstract**

Setting a commercial premium for an insurance policy is a complex process, even, though statistical tools provide fairly reliable information on the behavior of the frequency and cost of claims differentiated by risk profiles reflected in pure premium calculations. However lately setting the price the customer must pay has not been easy, because of the uncertainty of, having to use subjective criteria to analyze how demand may be affected by different price alternatives and economic situations. This article aims to develop this process in two stages. The first stage is carried out with the opinion of experts applied to uncertain numbers and Ordered Weighted Average (OWA) operators to assess the overall benefits of each profile to choose the best alternative. The second stage, which uses Heavy OWA (HOWA) operators, is based on the results obtained in the first stage and chooses a general price alternative for all profiles.

**Keywords:** pricing, non-life insurances, decision making, OWA operator, fuzzy logic.

**JEL Classification:** D81, G22, M12, M51.

---

<sup>13</sup> Article published in Journal of Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research Vol: 49 Issue: 2 pp: 169-187 Date: 2015. Journal Citation Report, Thomson Reuters Impact Factor: 0.299. Journal covered in the following ISI Thomson Reuters Services: Science Citation Index Expanded, Social Sciences Citation Index, Social Scisearch and Journal Citation Reports/Social Sciences Edition.

## **1. Introduction**

The process of non-life insurance pricing begins with an estimate of the pure premium using statistical methods, to which extra security is added to ensure solvency. Then, other surcharges are added to cover the costs of internal and external management. Thus far, these decisions are based on costs and may vary depending on the risk profile of the insured, taking into account previous history. However, establishing the commercial premium that customers will pay depends on the profit margin defined by the insurance company in accordance with its business strategy. This margin is usually a percentage of the premium plus the surcharges, which becomes a problem of great complexity, because the value of the commercial premium directly affects the demand and hence the overall profits. This margin is even more in those cases when the coverage is a risk and where the uncertainty is higher. Consider the following situations:

A commercial premium is low and has a low unit profit margin, but it may be more attractive in the market and increase the demand and possibly result in greater overall profits.

A high commercial premium has a higher profit margin, but it makes the product less competitive in the market demand and possibly decreases the overall profits.

A decrease or increase in large portfolios insured by the two previous situations can change the risk profile of customers and lead to further adjustments to avoid possible bankruptcy.

Economic growth may increase or decrease demand in a recession as consumer behavior is affected primarily by price and quality factors.

On the other hand, it is not easy to reach a consensus between marketing and financial departments to set pricing policy, because the former prefers lower prices to make products easier to sell, and the latter prefers higher prices to ensure better reliability. The key to deciding a pricing strategy will depend on how demand affects the total benefits and, in addition having products segmented by risk profiles will make the situation different for each of them.

All of this leads us to considerable difficulty in making forecasts on demand and profits in this problem because of the large uncertainty in

different situations. In this case we will consider the following factors as the most relevant:

The different situations of the economy and its expected behavior in the future for a given market.

The experience of experts in the market segments determines the relevance of their opinions.

Therefore, the proposed method makes decisions about the pricing strategy for commercial premium rates in two stages, by providing better treatment of the opinions of experts using uncertain numbers and by applying information aggregation OWA operators.

## **2. Preliminaries**

This section explains the main concepts of fuzzy logic and information aggregation OWA operators used by the proposed method.

### **Fuzzy Logic**

Fuzzy logic was introduced by Lotfi Zadeh (1965) as a way of dealing with ambiguous information, inaccurate or incomplete work by allowing intermediate values to be expressed in a range or membership function. Since its introduction, Fuzzy Logic has received much attention from the scientific community and there are now tens of thousands of researchers studying aspects of this method. For an overview of this theory, see Dubois and Prade (1980), Kaufmann and Gupta (1985) and Kaufmann and Gil-Aluja (1987). At present, we have designed a range of extensions and generalized this concept for a variety of applications in many scientific fields among that are decision making (Merigó and Casanovas, 2010a), engineering, statistics, finance (Merigó and Casanovas, 2011a) and strategic management (Merigó and Gil-Lafuente, 2009).

### **Uncertain Numbers**

Uncertain numbers were introduced by Moore (1966) for, the purpose of evaluating the uncertainty through confidence intervals, in which there is a bottom end, a top end and a value or interval of maximum presumption, such that:

Confidence interval  $[a_1, a_2]$ : Corresponds to a set of values greater than or equal to  $a_1$  and less than or equal to  $a_2$ .

Confidence Triplet  $[a_1, a_2, a_3]$ : Corresponding to a set of values greater than or equal to  $a_1$  and less than or equal to  $a_3$ , but is considered most likely to be close to  $a_2$ .

Confidence Quadruple  $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ : Corresponding to a set of values greater than or equal to  $a_1$  and less than or equal to  $a_4$ , but most likely is in the presumption maximum subinterval  $[a_2, a_3]$ .

With uncertain numbers, basic operations can be performed. If  $A = [a_1, a_2, a_3]$  and  $B = [b_1, b_2, b_3]$ , then:

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$$

$$A - B = [a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1]$$

$$A * k = [k * a_1, k * a_2, k * a_3] \text{ where } k > 0$$

$$A * B = [a_1 * b_1, a_2 * b_2, a_3 * b_3]$$

$$A \div B = [a_1 \div b_1, a_2 \div b_2, a_3 \div b_3]$$

### The Information Aggregation OWA Operator

**Definition 1:** An OWA operator is defined as a mapping of dimension  $n$ ,  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , that has an associated weighting vector  $W$  of dimension  $n$ ,  $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ , that meets the following conditions:

$$w_j \in [0, 1].$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

with,

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot b_j \quad (1)$$

where  $b_j$  is the  $j$ th largest of the  $a_i$ .

The essence of OWA (Yager, 1988; 1992; 1994; 1998) is the rearrangement of the elements or arguments; causing aggregation in the  $a_j$  not associated with a weighting  $w_j$  but with the placement order instead.



## Ascending OWA Aggregation Operator

**Definition 2:** An Ascending OWA (AOWA) operator is defined as a mapping of dimension  $n$ ,  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , that has an associated weighting vector  $W$  of dimension  $n$ ,  $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ , that meets the following conditions:

$$w_j \in [0, 1].$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

with,

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot b_j \quad (2)$$

where  $b_j$  is the  $j$ th smallest of the  $a_i$ , such that,  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ , which thus differ from the OWA where  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ .

The difference between the OWA operator (Descending OWA) and the AOWA (Yager, 1993) is the way in which it manages the arguments, descending in the first and ascending in the second, respectively, and depends on the optimistic or pessimistic attitudes of the decision maker.

## The OWA Operators Extensions

One of the main features of these operators is the flexibility they have to adapt to different circumstances to treat a variety of problems and to combine them with other tools for decision making. So, many authors have developed multiple extensions that integrate OWA with fuzzy logic, distance measures, likelihood, and other techniques that improve the decision making process. This article only explains those extensions that are directly related to this method.

## The Uncertain OWA Operator

The Uncertain OWA Operator (UOWA) was proposed by Xu and Da (2002), for situations of uncertainty in which confidence intervals are used to present information. These intervals can be presented in different forms: confidence quadruples, when these are composed of 4-tuples  $(a, b, c, d)$ ,

where  $a$  is the minimum,  $d$  is the maximum, and  $b$  and  $c$  are the maximum interval presumption, confidence triplets, when  $b$  and  $c$  are equal, and confidence intervals when  $b$  and  $c$  are not known.

**Definition 3:** The UOWA operator is defined as a mapping of dimension  $n$ ,  $F: \Omega^n \rightarrow \Omega$ , with an associated vector,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ , such that:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1,$$

with,

$$UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j^* \quad (3)$$

where  $b_j^*$  is the  $j$ th largest  $\tilde{a}_i$ ,  $\tilde{a}_i$  ( $i \in N$ ) are trust intervals and are defined either as simple triplets or quadruples.

One of the difficulties with this method that is the arrangement of the confidence intervals, it is not always clear which one is superior to another, and thus, there is need to resort to other subjective criteria, such as the mean and, in other cases the upper confidence interval for more optimistic or bottom confidence interval for the most pessimistic, or a weighted average value of the confidence interval; for example,  $(a_1 + 4a_2 + 4a_3 + a_4)/10$  in the case of a quadruple of confidence.

**Definition 4:** In this method, the Ascending UOWA (AUOWA) operator corresponds to an ascending sort that is defined as a mapping,  $F: \Omega^n \rightarrow \Omega$ , of dimension  $n$ , with an associated vector,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ , such that:

$$w_j \in [0, 1]$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1,$$

with,

$$AUOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j^* \quad (4)$$

where  $b_j^*$  is the  $j$ th smallest  $\tilde{a}_i$ , ( $i \in N$ ) are the trust intervals. The UOWA operator can be extended and generalized by various contexts (Merigó, 2011; Merigó et al. 2012; Zhou et al. 2012) including the use of

general means (Merigó and Casanovas, 2011a; 2012) and quasi-arithmetic (Merigó and Casanovas, 2011b).

### The Probabilistic Uncertain OWA Operator

**Definition 5:** An UPOWA operator (Merigó and Wei, 2011) is defined as a mapping  $F: \Omega^n \rightarrow \Omega$  of dimension  $n$ , which has an associated weight vector  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ , such that,  $w_j \in [0,1]$  and  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ , and a vector of probabilities  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ , such that  $v_i \in [0,1]$  and  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ , where:

$$UPOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \beta \sum_{j=1}^n w_j b_j^* + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n v_i \tilde{a}_i \quad (5)$$

where  $b_j^*$  is the  $j$ th largest  $\tilde{a}_i$ ,  $\tilde{a}_i$  ( $i \in N$ ) are confidence intervals defined either as simple triplets or quadruples.

**Definition 6:** In the case of the Probabilistic Uncertain Ascending OWA (AUPOWA) operator, this is defined as a mapping  $F: \Omega^n \rightarrow \Omega$  of dimension  $n$ , which has an associated weight vector,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ , such that,  $w_j \in [0,1]$  and  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ , and a vector of probabilities,  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ , such that,  $v_i \in [0,1]$  and  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ , where:

$$UPOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \beta \sum_{j=1}^n w_j b_j^* + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n v_i \tilde{a}_i \quad (6)$$

where  $b_j^*$  is the  $j$ th smallest  $\tilde{a}_i$ ,  $\tilde{a}_i$  ( $i \in N$ ) are confidence intervals defined either as simple triplets or quadruples. It is worth noting that the UPOWA operator can be extended by the use of distance measures (Merigó et al. 2013, Zeng et al. 2013).

### Heavy OWA Operator

These operators were proposed by Yager (2002), and their main feature is that the sum of the weights is not equal to 1; it is between 1 and  $n$ . The importance of this operator is its use in situations which are mutually independent, so that the results can be produced simultaneously.

**Definition 7:** The HOWA operator is defined as a mapping,  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , of dimension  $n$ , with an associated vector  $W$ , such that:

$$w_j \in [0,1]$$

$$1 \leq \sum_{j=1}^n w_j \leq n$$

with,

$$HOWA(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j \quad (7)$$

where  $b_j$ , is the  $j$ th largest of  $a_i$ .

**Definition 8:** The Ascending HOWA (AHOWA) operator, which corresponds to the ascending sort of arguments, can be defined as a mapping,  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , of dimension  $n$ , with an associated vector  $W$ , such that:

$$w_j \in [0,1]$$

$$1 \leq \sum_{j=1}^n w_j \leq n$$

with,

$$AHOWA(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j \quad (8)$$

where,  $b_j$  is  $j$ th smallest of the  $a_i$ . Note that the HOWA operator has been extended and generalized by many studies, including the Uncertain Induced HOWA operator (Merigó and Casanovas, 2011c) and the Induced Heavy OWA distance operator (Merigó and Casanovas, 2010b).

### 3. Proposed Methodology

As mentioned above there are different situations that create uncertainty regarding the stated problem, which leads to resorting to expert opinions to determine the best alternative obtain the greatest total benefits. To achieve this, we propose the following process:

**Stage I:** Calculation of Expected Benefits of Risk Profiles and Benefit Levels.

The expected benefits are the key to making decisions about each of the pricing strategies; in this case, they are calculated by taking into account the opinion of experts for each of the segments through the following steps:

Step 1. Selection of experts: to have expert opinions that conform to reality, an expert will be selected for each segment or risk profile by assuming that each expert with prior experience will have more knowledge of the market share than the rest, so that expert 1 will correspond to the prediction of risk profile 1, expert 2 with risk profile 2, and so on.

Step 2. Selecting predictive tool: to express an opinion on future earnings given that it is a subjective value that is set in an uncertain environment, forecasts can be presented as:

A unique value: it has been the traditional way to predict, although it is very difficult to establish and much less likely to hit it.

Uncertain numbers: in this case, the exact prediction is unknown, but an interval,  $A = [a_1, a_2]$ , can be set that will contain the value that is known to be greater than  $a_1$  and less than  $a_2$ . You can also use trusted triplets,  $A = [a_1, a_2, a_3]$ , where the forecasted value will be close to  $a_2$  and is, greater than  $a_1$  and less than  $a_3$  or the trusted quadruples  $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ , where the prediction is known to be greater than  $a_1$  and less than  $a_4$ , but the chances are that it is within  $a_2$  and  $a_3$ .

Step 3. Expert opinion: experts should give their earnings forecast for different economic scenarios and pricing strategies. These results are presented in a matrix  $A \times B$ , where  $A = (a_1, a_2, \dots, a_i)$  are the different pricing strategies, and  $B = (b_1, b_2, \dots, b_j)$  are economic scenarios that may occur in the future.

Step 4. Aggregation of results: the opinions of the expected benefits for each alternative were added to the different situations of the economy, taking into account criteria such as minimum, maximum, arithmetic mean, the weighted mean and different information aggregation OWA operators.

Step 5. Summary of results: the results will be summarized for each of the criteria including all segments in a matrix containing pricing alternatives and different risk profiles.

## **Stage II: Adding Total Results with Heavy OWA (HOWA) Operator**

The results are used to make decisions on the following pricing strategy for each profile, but it is important to note that the forecasts discussed in the previous stages are independent of each other, so that, they can occur simultaneously. If a general criterion for the entire market is available, then Heavy OWA operators are most suitable. Therefore, to analyze the information and perform a total aggregation, the following steps are used:

Step 6. Selection of forecasting: the summaries of step 5 are the forecasts of the benefits using different criteria (maximum, minimum, arithmetic mean, weighted mean and OWA operators). The criteria that is chosen is the one that, according to the experts, best fits reality, and that will be the starting point in this second stage.

Step 7 Calculation of securities: in the previous stage for the forecasts, uncertain values were used through intervals, triplets or quadruples of trust, which are now defined as a representative value. For example, the interval can take the average value of ends, triplets can be set as a weighted average  $(a_1 + 2a_2 + a_3)/4$  or  $(2a_1 + 4a_2 + 2a_3)/8$  and quadruples can be set as  $(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4)/6$  or  $(a_1 + 4a_2 + 4a_3 + a_4)/10$ . These definitions facilitate the aggregation process, considering that these values are already included in the uncertainty.

Step 8. Aggregation of results: the values obtained above are independent of each other and can be determined simultaneously, so there is no point in calculating values to make a decision; however, it is necessary to perform a total aggregation of results, through the Heavy OWA operators.

Step 9. Selecting the optimal alternative: results from the previous step will establish a ranking of alternatives in descending order for each of the criteria. From these data, a decision can be made to determine the most optimistic or maximum, the most pessimistic or minimum, or a conservative value that corresponds to intermediate values in ranking the criteria.

#### **4. Illustrative Application**

To set the value of the commercial premium, insurance policies are divided into 5 risk profiles. A group of experts, each one known for a market segment, is asked to issue a forecast for the profile that corresponds to the expected benefits of different pricing values considering different surcharge alternatives and economic scenarios, such as:

Alternative surcharges to the price:

Alternative 1: provide a profit margin (profit) of 10%

Alternative 2: provide a profit margin (profit) of 15%

Alternative 3: provide a profit margin (profit) of 20%

Alternative 4: provide a profit margin (profit) of 25%

Alternative 5: provide a profit margin (profit) of 30%

Economic scenarios:

Situation 1: Strong economic growth.

Scenario 2: Moderate economic growth.

Situation 3: Economy stable.

Situation 4: Slight economic recession.

Situation 5: Strong economic recession.

Risk profiles correspond to the characteristics that are identifiable in each segment and that influence the frequency and/or the cost of insurance claims, such as:

*Table 7-1 Example of Risk Profiles*

| <b>Segments</b> | <b>Gender</b> | <b>Age</b> | <b>Vehicle Range</b> |
|-----------------|---------------|------------|----------------------|
| Profile 1       | Male          | 18 - 30    | Medium               |
| Profile 2       | Male          | 31 - 50    | Medium               |
| Profile 3       | Male          | 18 - 30    | High                 |
| Profile 4       | Male          | 31 - 50    | High                 |
| Profile 5       | Female        | 18 - 30    | Medium               |
| Profile 6       | Female        | 31 - 50    | Medium               |
| Profile 7       | Female        | 18 - 30    | High                 |
| Profile 8       | Female        | 31 - 50    | High                 |

*Table 7-2 Risk profiles for the Application*

| <b>Segments</b> | <b>Gender</b> | <b>Age</b> | <b>Vehicle Range</b> |
|-----------------|---------------|------------|----------------------|
| Profile 1       | Male          | 18 - 30    | Medium               |
| Profile 2       | Male          | 31 - 50    | Medium               |
| Profile 3       | Female        | 31 - 50    | High                 |
| Profile 4       | Male          | 18 - 30    | High                 |
| Profile 5       | Female        | 18 - 30    | High                 |

The results are presented below:

*Table 7-3 Expert Forecast 1 for Profile 1*

| <b>Alternatives</b> | <b>Situation 1</b> |     | <b>Situation 2</b> |     | <b>Situation 3</b> |     | <b>Situation 4</b> |     | <b>Situation 5</b> |     |
|---------------------|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|
| Alternative 1       | 680                | 720 | 600                | 650 | 500                | 540 | 450                | 500 | 380                | 420 |
| Alternative 2       | 700                | 750 | 650                | 680 | 530                | 570 | 470                | 510 | 400                | 450 |
| Alternative 3       | 760                | 800 | 660                | 700 | 550                | 600 | 420                | 470 | 310                | 350 |
| Alternative 4       | 780                | 820 | 620                | 660 | 500                | 550 | 400                | 450 | 250                | 300 |
| Alternative 5       | 800                | 850 | 610                | 660 | 470                | 530 | 350                | 400 | 200                | 250 |

*Table 7-4 Expert Forecast 2 for Profile 2*

| <b>Alternatives</b> | <b>Situation 1</b> |     | <b>Situation 2</b> |     | <b>Situation 3</b> |     | <b>Situation 4</b> |     | <b>Situation 5</b> |     |
|---------------------|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|
| Alternative 1       | 800                | 850 | 760                | 800 | 700                | 750 | 700                | 750 | 650                | 700 |
| Alternative 2       | 840                | 880 | 790                | 830 | 750                | 800 | 660                | 710 | 630                | 670 |
| Alternative 3       | 910                | 960 | 870                | 910 | 790                | 840 | 650                | 700 | 610                | 650 |
| Alternative 4       | 930                | 980 | 870                | 920 | 760                | 820 | 620                | 680 | 550                | 610 |
| Alternative 5       | 920                | 970 | 860                | 900 | 740                | 800 | 600                | 650 | 520                | 570 |

*Table 7-5 Expert Forecast 3 for Profile 3*

| <b>Alternatives</b> | <b>Situation 1</b> |     | <b>Situation 2</b> |     | <b>Situation 3</b> |     | <b>Situation 4</b> |     | <b>Situation 5</b> |     |
|---------------------|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|
| Alternative 1       | 580                | 630 | 550                | 600 | 450                | 500 | 420                | 480 | 410                | 450 |
| Alternative 2       | 600                | 650 | 570                | 630 | 470                | 510 | 440                | 490 | 390                | 440 |
| Alternative 3       | 620                | 660 | 600                | 650 | 480                | 530 | 400                | 450 | 300                | 350 |
| Alternative 4       | 610                | 640 | 580                | 620 | 460                | 500 | 350                | 400 | 260                | 310 |
| Alternative 5       | 600                | 640 | 560                | 600 | 400                | 440 | 300                | 360 | 200                | 240 |

*Table 7-6 Expert Forecast 4 for Profile 4*

| <b>Alternatives</b> | <b>Situation 1</b> |      | <b>Situation 2</b> |      | <b>Situation 3</b> |     | <b>Situation 4</b> |     | <b>Situation 5</b> |     |
|---------------------|--------------------|------|--------------------|------|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|
| Alternative 1       | 980                | 1050 | 950                | 1000 | 920                | 960 | 870                | 900 | 800                | 850 |
| Alternative 2       | 1090               | 1140 | 990                | 1050 | 890                | 940 | 810                | 850 | 650                | 750 |
| Alternative 3       | 1160               | 1200 | 960                | 1010 | 880                | 930 | 800                | 850 | 580                | 630 |
| Alternative 4       | 1170               | 1220 | 940                | 1000 | 800                | 850 | 700                | 740 | 410                | 470 |
| Alternative 5       | 1190               | 1250 | 900                | 950  | 650                | 700 | 600                | 650 | 300                | 340 |

*Table 7-7 Expert Forecast 5 for Profile 5*

| <b>Alternatives</b> | <b>Situation 1</b> |     | <b>Situation 2</b> |     | <b>Situation 3</b> |     | <b>Situation 4</b> |     | <b>Situation 5</b> |     |
|---------------------|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|
| Alternative 1       | 300                | 350 | 280                | 330 | 250                | 300 | 240                | 280 | 230                | 270 |
| Alternative 2       | 400                | 450 | 300                | 350 | 280                | 320 | 250                | 300 | 200                | 250 |
| Alternative 3       | 480                | 520 | 410                | 450 | 320                | 360 | 230                | 270 | 180                | 230 |
| Alternative 4       | 500                | 540 | 430                | 480 | 300                | 350 | 210                | 250 | 170                | 210 |
| Alternative 5       | 510                | 550 | 420                | 460 | 270                | 310 | 190                | 220 | 110                | 150 |



Experts have also defined the weight vectors,  $P = (0.1, 0.2, 0.3, 0.3, 0.1)$  and  $W = (0.1, 0.15, 0.25, 0.2, 0.3)$ , which correspond to the subjective probability of each of the situations and to an optimistic or pessimistic attitude respectively, as the cases to add information to, and a parameter,  $\beta = 0.4$ , which represents the relative importance of subjective information in front of the decision maker's attitude reflected in the vectors P and W. These expressions are used to calculate the following criteria:

UMax: the confidence interval corresponds to higher value or more optimistic.

Umin: the confidence interval corresponds to the least significant or the most pessimistic.

UAM: the arithmetic mean of the confidence intervals for each of the alternatives.

UPA: the weighted arithmetic mean of the confidence intervals for each of the alternatives with the weight vector P.

UOWA: the aggregation of the descending sort of the confidence intervals of the alternatives using the weighting vector W.

AUOWA: the aggregation of the ascending sort of the confidence intervals of the alternatives using the weighting vector W.

UPOWA: the aggregation using the  $\beta$  factor for UOWA and  $(1 - \beta)$  for the UPA.

The results are shown below:

*Table 7-8 Aggregated Results of Profile 1*

| <b>Alternatives</b> | <b>U-Max</b> |     | <b>U-Min</b> |     | <b>UAM</b> |     | <b>UWA</b> |     | <b>UOWA</b> |     | <b>AUOWA</b> |     | <b>UPOWA</b> |     |
|---------------------|--------------|-----|--------------|-----|------------|-----|------------|-----|-------------|-----|--------------|-----|--------------|-----|
| Alternative 1       | 680          | 720 | 380          | 420 | 522        | 566 | 511        | 556 | 487         | 531 | 555          | 598 | 501          | 546 |
| Alternative 2       | 700          | 750 | 400          | 450 | 550        | 592 | 540        | 580 | 514         | 557 | 583          | 625 | 530          | 571 |
| Alternative 3       | 760          | 800 | 310          | 350 | 540        | 584 | 530        | 576 | 490         | 534 | 592          | 636 | 514          | 559 |
| Alternative 4       | 780          | 820 | 250          | 300 | 510        | 556 | 497        | 544 | 451         | 499 | 568          | 613 | 479          | 526 |
| Alternative 5       | 800          | 850 | 200          | 250 | 486        | 538 | 468        | 521 | 419         | 472 | 552          | 605 | 448          | 501 |

*Table 7-9 Aggregated Results of Profile 2*

| <b>Alternatives</b> | <b>U-Max</b> |     | <b>U-Min</b> |     | <b>UAM</b> |     | <b>UWA</b> |     | <b>UOWA</b> |     | <b>AUOWA</b> |     | <b>UPOWA</b> |     |
|---------------------|--------------|-----|--------------|-----|------------|-----|------------|-----|-------------|-----|--------------|-----|--------------|-----|
| Alternative 1       | 800          | 850 | 650          | 700 | 722        | 770 | 717        | 765 | 704         | 753 | 737          | 785 | 712          | 760 |
| Alternative 2       | 840          | 880 | 630          | 670 | 734        | 778 | 728        | 774 | 711         | 756 | 760          | 804 | 721          | 767 |
| Alternative 3       | 910          | 960 | 610          | 650 | 766        | 812 | 758        | 805 | 732         | 778 | 803          | 850 | 748          | 794 |
| Alternative 4       | 930          | 980 | 550          | 610 | 746        | 802 | 736        | 793 | 703         | 760 | 791          | 846 | 723          | 780 |
| Alternative 5       | 920          | 970 | 520          | 570 | 728        | 778 | 718        | 769 | 682         | 733 | 775          | 826 | 704          | 755 |

*Table 7-10 Aggregated Results of Profile 3*

| <b>Alternatives</b> | <b>U-Max</b> |     | <b>U-Min</b> |     | <b>UAM</b> |     | <b>UWA</b> |     | <b>UOWA</b> |     | <b>AUOWA</b> |     | <b>UPOWA</b> |     |
|---------------------|--------------|-----|--------------|-----|------------|-----|------------|-----|-------------|-----|--------------|-----|--------------|-----|
| Alternative 1       | 580          | 630 | 410          | 450 | 482        | 532 | 470        | 522 | 460         | 509 | 501          | 551 | 466          | 517 |
| Alternative 2       | 600          | 650 | 390          | 440 | 494        | 544 | 486        | 535 | 468         | 517 | 517          | 566 | 479          | 528 |
| Alternative 3       | 620          | 660 | 300          | 350 | 480        | 528 | 476        | 525 | 442         | 491 | 516          | 563 | 462          | 511 |
| Alternative 4       | 610          | 640 | 260          | 310 | 452        | 494 | 446        | 489 | 411         | 455 | 493          | 532 | 432          | 475 |
| Alternative 5       | 600          | 640 | 200          | 240 | 412        | 456 | 402        | 448 | 364         | 408 | 457          | 500 | 387          | 432 |

*Table 7-11 Aggregated Results of Profile 4*

| <b>Alternatives</b> | <b>U-Max</b> |      | <b>U-Min</b> |     | <b>UAM</b> |     | <b>UWA</b> |     | <b>UOWA</b> |     | <b>AUOWA</b> |     | <b>UPOWA</b> |     |
|---------------------|--------------|------|--------------|-----|------------|-----|------------|-----|-------------|-----|--------------|-----|--------------|-----|
| Alternative 1       | 980          | 1050 | 800          | 850 | 904        | 952 | 905        | 948 | 885         | 930 | 925          | 975 | 897          | 941 |
| Alternative 2       | 1090         | 1140 | 650          | 750 | 886        | 946 | 882        | 936 | 837         | 902 | 934          | 990 | 864          | 922 |
| Alternative 3       | 1160         | 1200 | 580          | 630 | 876        | 924 | 870        | 919 | 814         | 863 | 938          | 985 | 848          | 897 |
| Alternative 4       | 1170         | 1220 | 410          | 470 | 804        | 856 | 796        | 846 | 721         | 774 | 885          | 937 | 766          | 817 |
| Alternative 5       | 1190         | 1250 | 300          | 340 | 728        | 778 | 704        | 754 | 627         | 675 | 820          | 872 | 673          | 722 |

*Table 7-12 Aggregated Results of Profile 5*

| <b>Alternatives</b> | <b>U-Max</b> |     | <b>U-Min</b> |     | <b>UAM</b> |     | <b>UWA</b> |     | <b>UOWA</b> |     | <b>AUOWA</b> |     | <b>UPOWA</b> |     |
|---------------------|--------------|-----|--------------|-----|------------|-----|------------|-----|-------------|-----|--------------|-----|--------------|-----|
| Alternative 1       | 300          | 350 | 230          | 270 | 260        | 306 | 256        | 302 | 252         | 297 | 268          | 315 | 254          | 300 |
| Alternative 2       | 400          | 450 | 200          | 250 | 286        | 334 | 279        | 326 | 265         | 313 | 308          | 355 | 273          | 321 |
| Alternative 3       | 480          | 520 | 180          | 230 | 324        | 366 | 313        | 354 | 290         | 333 | 359          | 400 | 304          | 345 |
| Alternative 4       | 500          | 540 | 170          | 210 | 322        | 366 | 306        | 351 | 283         | 327 | 360          | 404 | 297          | 341 |
| Alternative 5       | 510          | 550 | 110          | 150 | 300        | 338 | 284        | 321 | 253         | 291 | 344          | 383 | 271          | 309 |

All of these criteria are valid for making a decision regarding the strategy to pursue, making it possible to choose an alternative for each profile. For example, choosing the most optimistic value with the least optimistic value, as detailed in the following summaries:

*Table 7-13 Maximum Results Summary*

| <b>Alternatives</b> | <b>Profile 1</b> |     | <b>Profile 2</b> |     | <b>Profile 3</b> |     | <b>Profile 4</b> |      | <b>Profile 5</b> |     |
|---------------------|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|------------------|------|------------------|-----|
| Alternative 1       | 680              | 720 | 800              | 850 | 580              | 630 | 980              | 1050 | 300              | 350 |
| Alternative 2       | 700              | 750 | 840              | 880 | 600              | 650 | 1090             | 1140 | 400              | 450 |
| Alternative 3       | 760              | 800 | 910              | 960 | 620              | 660 | 1160             | 1200 | 480              | 520 |
| Alternative 4       | 780              | 820 | 930              | 980 | 610              | 640 | 1170             | 1220 | 500              | 540 |
| Alternative 5       | 800              | 850 | 920              | 970 | 600              | 640 | 1190             | 1250 | 510              | 550 |

*Table 7-14 Minimum Result Summary*

| <b>Alternatives</b> | <b>Profile 1</b> |     | <b>Profile 2</b> |     | <b>Profile 3</b> |     | <b>Profile 4</b> |     | <b>Profile 5</b> |     |
|---------------------|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|
| Alternative 1       | 380              | 420 | 650              | 700 | 410              | 450 | 800              | 850 | 230              | 270 |
| Alternative 2       | 400              | 450 | 630              | 670 | 390              | 440 | 650              | 750 | 200              | 250 |
| Alternative 3       | 310              | 350 | 610              | 650 | 300              | 350 | 580              | 630 | 180              | 230 |
| Alternative 4       | 250              | 300 | 550              | 610 | 260              | 310 | 410              | 470 | 170              | 210 |
| Alternative 5       | 200              | 250 | 520              | 570 | 200              | 240 | 300              | 340 | 110              | 150 |

*Table 7-15 Summary of the Results with the Arithmetic Mean*

| <b>Alternatives</b> | <b>Profile 1</b> |     | <b>Profile 2</b> |     | <b>Profile 3</b> |     | <b>Profile 4</b> |     | <b>Profile 5</b> |     |
|---------------------|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|
| Alternative 1       | 522              | 566 | 722              | 770 | 482              | 532 | 904              | 952 | 260              | 306 |
| Alternative 2       | 550              | 592 | 734              | 778 | 494              | 544 | 886              | 946 | 286              | 334 |
| Alternative 3       | 540              | 584 | 766              | 812 | 480              | 528 | 876              | 924 | 324              | 366 |
| Alternative 4       | 510              | 556 | 746              | 802 | 452              | 494 | 804              | 856 | 322              | 366 |
| Alternative 5       | 486              | 538 | 728              | 778 | 412              | 456 | 728              | 778 | 300              | 338 |

*Table 7-16 Summary of the Results with the Weighted Average*

| <b>Alternatives</b> | <b>Profile 1</b> |     | <b>Profile 2</b> |     | <b>Profile 3</b> |     | <b>Profile 4</b> |     | <b>Profile 5</b> |     |
|---------------------|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|
| Alternative 1       | 511              | 556 | 717              | 765 | 470              | 522 | 905              | 948 | 256              | 302 |
| Alternative 2       | 540              | 580 | 728              | 774 | 486              | 535 | 882              | 936 | 279              | 326 |
| Alternative 3       | 530              | 576 | 758              | 805 | 476              | 525 | 870              | 919 | 313              | 354 |
| Alternative 4       | 497              | 544 | 736              | 793 | 446              | 489 | 796              | 846 | 306              | 351 |
| Alternative 5       | 468              | 521 | 718              | 769 | 402              | 448 | 704              | 754 | 284              | 321 |

*Table 7-17 Summary of the Results with the UOWA Operators*

| <b>Alternatives</b> | <b>Profile 1</b> |     | <b>Profile 2</b> |     | <b>Profile 3</b> |     | <b>Profile 4</b> |     | <b>Profile 5</b> |     |
|---------------------|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|
| Alternative 1       | 487              | 531 | 704              | 753 | 460              | 509 | 885              | 930 | 252              | 297 |
| Alternative 2       | 514              | 557 | 711              | 756 | 468              | 517 | 837              | 902 | 265              | 313 |
| Alternative 3       | 490              | 534 | 732              | 778 | 442              | 491 | 814              | 863 | 290              | 333 |
| Alternative 4       | 451              | 499 | 703              | 760 | 411              | 455 | 721              | 774 | 283              | 327 |
| Alternative 5       | 419              | 472 | 682              | 733 | 364              | 408 | 627              | 675 | 253              | 291 |

*Table 7-18 Summary of the Results with the AUOWA Operators*

| <b>Alternatives</b> | <b>Profile 1</b> |     | <b>Profile 2</b> |     | <b>Profile 3</b> |     | <b>Profile 4</b> |     | <b>Profile 5</b> |     |
|---------------------|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|
| Alternative 1       | 555              | 598 | 737              | 785 | 501              | 551 | 925              | 975 | 268              | 315 |
| Alternative 2       | 583              | 625 | 760              | 804 | 517              | 566 | 934              | 990 | 308              | 355 |
| Alternative 3       | 592              | 636 | 803              | 850 | 516              | 563 | 938              | 985 | 359              | 400 |
| Alternative 4       | 568              | 613 | 791              | 846 | 493              | 532 | 885              | 937 | 360              | 404 |
| Alternative 5       | 552              | 605 | 775              | 826 | 457              | 500 | 820              | 872 | 344              | 383 |

*Table 7-19 Summary of the Results with the UPOWA Operators*

| <b>Alternatives</b> | <b>Profile 1</b> |     | <b>Profile 2</b> |     | <b>Profile 3</b> |     | <b>Profile 4</b> |     | <b>Profile 5</b> |     |
|---------------------|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|
| Alternative 1       | 501              | 546 | 712              | 760 | 466              | 517 | 897              | 941 | 254              | 300 |
| Alternative 2       | 530              | 571 | 721              | 767 | 479              | 528 | 864              | 922 | 273              | 321 |
| Alternative 3       | 514              | 559 | 748              | 794 | 462              | 511 | 848              | 897 | 304              | 345 |
| Alternative 4       | 479              | 526 | 723              | 780 | 432              | 475 | 766              | 817 | 297              | 341 |
| Alternative 5       | 448              | 501 | 704              | 755 | 387              | 432 | 673              | 722 | 271              | 309 |

It is important to note, that if you want to have the same pricing policy in relation to profit margins, the above criteria involve selecting alternatives for each profile. In this case, it is necessary to compute the total aggregate results using Heavy OWA operators.

For this example, we use the data from the results obtained by the UPOWA operator (Table 7.19), but the computation may require additional data depending on the judgment of the decision maker. In this case an expert works with a representative value corresponding to the average value of the ends of each of the confidence intervals as shown below:

*Table 7-20 Securities of the Operator UPOWA*

| <b>Alternatives</b> | <b>Profile 1</b> | <b>Profile 2</b> | <b>Profile 3</b> | <b>Profile 4</b> | <b>Profile 5</b> |
|---------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Alternative 1       | 524              | 736              | 491              | 919              | 277              |
| Alternative 2       | 550              | 744              | 503              | 893              | 297              |
| Alternative 3       | 537              | 771              | 487              | 872              | 325              |
| Alternative 4       | 502              | 751              | 454              | 792              | 319              |
| Alternative 5       | 475              | 729              | 409              | 698              | 290              |

The predictions of the benefits of each alternative charge for the different profiles are independent, occurring simultaneously. Consequently, treatment can be performed with the Heavy OWA, in which the main difference compared with the other types of OWA operators is that the sum

of the weights is greater than 1 ( $1 \leq \sum_{j=1}^n w_j \leq n$ ). In this case we use the following vectors:

$W = (1,1,1,1,1)$ , where  $\sum_{j=1}^n w_j = 5$ , which generates a total aggregation in which forecasts are considered to be met in full.

$W = (1,0.9,0.9,0.8,0.7)$ , where  $\sum_{j=1}^n w_j = 4.4$ , which is to be used for the Heavy OWA (HOWA), with an optimistic attitude, where greater weight is given to higher values, and the Ascending Heavy OWA (AHOWA) operator with a pessimistic attitude, where greater weighting is given to lower values.

$P = (0.9,0.7,0.8,0.9,0.8)$ , which corresponds to the subjective probability forecasts of compliance and will be used in the calculation of the weighted average (HPA).

$\beta = 0.5$ , which generates the Heavy Probabilistic OWA operator (HPOWA) that, combines the subjective probability with the optimistic or pessimistic attitude; thus,  $HPOWA = \beta(HOWA) + (1 - \beta)HPA$ .

The results obtained are shown in Table 21:

*Table 7-21 Results Aggregate with Heavy OWA*

| <b>Alternatives</b> | <b>HOWA-Total</b> | <b>HPA</b> | <b>HOWA</b> | <b>A-HOWA</b> | <b>HPOWA</b> |
|---------------------|-------------------|------------|-------------|---------------|--------------|
| Alternative 1       | 2947              | 2428       | 2639        | 2422          | 2534         |
| Alternative 2       | 2987              | 2460       | 2668        | 2465          | 2564         |
| Alternative 3       | 2991              | 2456       | 2665        | 2473          | 2561         |
| Alternative 4       | 2818              | 2308       | 2506        | 2334          | 2407         |
| Alternative 5       | 2601              | 2125       | 2312        | 2157          | 2218         |

If we order the alternatives in descending order for each criterion we obtain the following ranking, which will make a decision that depends of the attitude assumed by the company or those who decide the pricing strategy.

*Table 7-22 Ranking Alternatives*

| <b>Criteria</b> | <b>Order</b>   |
|-----------------|----------------|
| HOWA - Total    | A3>A2>A1>A4>A5 |
| HPA             | A2>A3>A1>A4>A5 |
| HOWA            | A2>A3>A1>A4>A5 |
| A-HOWA          | A3>A2>A1>A4>A5 |
| HPOWA           | A2>A3>A1>A4>A5 |

In this case, to set the value of the commercial premium, an optimistic approach would take the alternative of higher value; that is to say, an optimistic approach would choose Alternative 3 (profit margin of 20%) with HOWA-Total and A-HOWA, and Alternative 2 (profit margin of 15%) with the HPA, HOWA and HPOWA. A pessimistic view would choose the smallest value that corresponds to Alternative 5 (profit margin of 30%) with any of the criteria. However, with a more conservative attitude, one could choose an intermediate value (2nd, 3rd or 4th place) in the ranking.

Importantly, the small difference in the results between Alternatives 2 and 3 is also reflected in the rankings of the criteria and hinders the choice between these options. It is most advisable in this case to use as a criterion of the HPOWA ( $\beta = 0.5$ ), which combines HOWA and HPA in a single operator, which is equally weighted, as a way to decide ties between alternatives.

## **5. Conclusions**

We have developed a new methodology to determine insurance rates from a model that is not based solely on a profit margin increase from the cost structure, but also considers a strategic vision represented by the opinions of experts. Thus, this methodology establishes a degree of pricing strategy that takes into account the demand from different economic scenarios and provides a better perspective on the overall benefits, not just the benefits of each policy unit.

Using uncertain numbers through confidence intervals facilitates the work of the experts, when evaluating each of the alternatives, because it is not easy to define a precise value in situations of great uncertainty.

This two-stage methodological process permits the establishment of a separate pricing strategy for each profile through any of the criteria used in the first stage, or through a second phase that determines an overall strategy for all segments by applying the Heavy OWA operators.

The aggregation of information to obtain a global value Heavy OWA operator, allows each of the experts to make a judgment regarding the profile or segment that they know best, or have more experience working with, and thus avoids the distortions that occur when there is not enough information or experience present.

Finally, we note that this proposed methodology provides a formal procedure for making charging decisions helps to eliminate political decisions and places the emphasis on purely economic issues, either endogenous or exogenous to the firm. Thus, this methodology tends to homogenize the decision criteria for all profiles, to optimize the overall profit.

### **Acknowledgements**

Support from the MAPFRE Foundation, Project 099311 from the University of Barcelona and PIEF-GA-2011-300062 from the European Commission is gratefully acknowledged.

### **References**

- [1] Casanovas, M. and Merigó, J.M. (2012). Fuzzy aggregation operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure. *Expert Systems with Applications*, 39(8), 7138-7149;
- [2] Dubois, D. and Prade, H. M. (1980). *Fuzzy sets and systems: Theory and applications*. New York: Academic Press;
- [3] Kaufmann, A. and Gil-Aluja, J. (1987). *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*. Barcelona: Hispano-Europea;
- [4] Kaufmann, A. and Gupta, M.M. (1991). *Introduction to fuzzy arithmetic: Theory and applications*. New York: Van Nostrand Reinhold;
- [5] Merigó, J.M. (2011). The uncertain probabilistic weighted average and its application in the theory of expertons. *African Journal of Business Management*, 5(15), 6092-6102;

- [6] Merigó, J.M. and Casanovas, M. (2010a). The fuzzy generalized OWA operator and its application in strategic decision making. *Cybernetics and Systems*, 41(5), 359-370.
- [7] Merigó, J.M. and Casanovas, M. (2010b). Induced and heavy aggregation operators with distance measures. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 21(3), 431-439.
- [8] Merigó, J.M. and Casanovas, M. (2011a). The uncertain generalized OWA operator and its application to financial decision making. *International Journal of Information Technology Decision Making*, 10(2), 211-230.
- [9] Merigó, J.M. and Casanovas, M. (2011b). The uncertain induced quasi-arithmetic OWA operator introduction. *International Journal of Intelligent Systems*, 26(1), 1-24.
- [10] Merigó, J.M. and Casanovas, M. (2011c). Induced and uncertain heavy OWA operators. *Computers Industrial Engineering*, 60(1), 106-116.
- [11] Merigó, J.M. and Casanovas, M. (2012). Decision-making with uncertain aggregation operators using the Dempster-Shafer belief structure. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 8(2), 1037-1061.
- [12] Merigó, J.M. and Gil-Lafuente, A. (2009). The induced generalized OWA operator. *Information Sciences*, 179(6), 729-741.
- [13] Merigó, J.M. Gil-Lafuente, A. and Martorell, O. (2012). Uncertain induced aggregation operators and its application in tourism management. *Expert Systems with Applications*, 39(1), 869-880.
- [14] Merigó, J.M. and Wei, G. (2011). Probabilistic aggregation operators and their application in uncertain multi-person decision-making. *Technological and Economic Development of Economy*, 17(2), 335-351.
- [15] Merigó, J.M., Xu, Y.J. and Zeng, S. (2013). Group decision making with distance measures and probabilistic information. *Knowledge-Based Systems*, 40, 81-87.



- [16] Moore, R.E. (1966). Interval analysis. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc.
- [17] Xu, Z.S. and Da, Q.L. (2002). The uncertain OWA operator. *International Journal of Intelligent Systems*, 17(6), 569-575.
- [18] Yager, R.R. (1988). On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision-making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18(1), 183-190.
- [19] Yager, R.R. (1992). Applications and extensions of OWA aggregations. *International Journal of Man-Machine Studies*, 37(1), 103-132.
- [20] Yager, R.R. (1993). Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59(2), 125-148.
- [21] Yager, R.R. (1994). On weighted median aggregation. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2, 101-113.
- [22] Yager, R. (1998). Including importances in OWA aggregations using fuzzy systems modeling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2), 286-294.
- [23] Yager, R.R. (2002). Heavy OWA operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1(4), 379-397.
- [24] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.
- [25] Zeng, S., Merigó, J.M. and Su, W. (2013). The uncertain probabilistic OWA distance operator and its application in group decision making. *Applied Mathematical Modelling*, 37(9), 6266-6275.
- [26] Zhou, L.G., Chen, H.Y., Merigó, J.M. and Gil-Lafuente, A.M. (2012). Uncertain generalized aggregation operators. *Expert Systems with Applications*, 39(1), 1105-1117.



## **Capítulo 8**

# **Herramientas de Lógica Difusa para una Estrategia de Precios en el Sector Asegurador**



## Herramientas de Lógica Difusa para una Estrategia de Precios en el Sector Asegurador<sup>14</sup>

### Resumen

En este artículo se presenta un nuevo enfoque para definir una estrategia de precios para el valor de la prima comercial de una póliza de seguros, buscando consensuar la opinión de expertos cuando la información disponible es vaga e imprecisa. La metodología propuesta se basa en la utilización de los siguientes operadores: *Fuzzy Generalized Probabilistic OWA (FGPOWA) operator*, *Uncertain Generalized Probabilistic Weighted Averaging (UGPWA) operator* e *Induced Linguistic Probabilistic Ordered Weighted Averaging (ILPOWA) operator*. En estos operadores se utilizan herramientas de lógica difusa como los números borrosos, las etiquetas lingüísticas y la teoría de expertones, las cuales son de gran utilidad para establecer criterios en las opiniones de expertos y su agregación.

**Palabras clave** Estrategia de Precios, Seguros, Lógica Difusa, Operadores OWA.:

---

<sup>14</sup> Documento de trabajo para enviar a publicación

## **1. Introducción**

Cuando se establece una estrategia de precios más allá de la rentabilidad de un producto o servicio se pretende maximizar los beneficios globales de la compañía. Definir dicha estrategia siempre ha sido una tarea difícil para lograr conciliar los diferentes objetivos organizacionales, puesto que el nivel de precios influye directamente en la calidad, la participación del mercado o la solvencia. Por otro lado, existen factores del entorno que se deben gestionar adecuadamente para procurar que tengan un impacto positivo en los resultados, tal es el caso de la situación económica, el comportamiento del consumidor o cambios en la legislación.

Un modelo tradicional establece el nivel de precios con un margen de beneficios sobre los costes en la producción o prestación del servicio, garantizando de esta forma una ganancia por unidad vendida. Sin embargo, un beneficio por unidad no garantiza el cumplimiento de los objetivos de rentabilidad de la compañía. De este modo una estrategia de precios implica hacer un análisis más profundo sobre las implicaciones de cada uno de los márgenes de beneficio previstos y los posibles escenarios que pueden suceder en el futuro en términos de la situación económica, la legislación o el comportamiento del consumidor entre otros. Por otro lado, cuando se establece un nivel de precios algunas áreas funcionales entran en controversia, tal es el caso de los departamentos de marketing que prefieren precios bajos para competir más fácilmente en el mercado, mientras los técnicos se inclinan por precios más altos que garanticen una mejor solvencia. Dicho de otra forma, el precio que proponen los de marketing, no satisface los objetivos de rentabilidad de los técnicos y el precio que proponen los técnicos no satisface los objetivos de venta que pretenden los de marketing.

Teniendo en cuenta lo anterior, un análisis de la estrategia de precios debe ir encaminado a obtener el máximo beneficio posible. Por tanto, se pretende llegar a un nivel de precios que permita obtener las mejores ganancias globales, teniendo en cuenta cómo se puede ver afectado el volumen de ventas por la situación de la economía. En algunos casos también será necesario tener en cuenta los cambios en la legislación, puesto que la obligatoriedad de algunos tipos de pólizas afecta directamente la demanda. Este análisis, en la mayoría de los casos es bastante complejo por la incertidumbre del entorno, lo cual conlleva una gran dificultad en la

estimación de los posibles beneficios en función del precio, además de que puede ser muy costoso dependiendo de la información disponible. En estos casos se utiliza con mucha frecuencia la opinión de expertos, a pesar del alto grado de subjetividad que conlleva. En dicha subjetividad juega un papel muy importante la actitud pesimista u optimista de quienes hacen las predicciones, siendo necesario contar con herramientas encaminadas a obtener estimaciones que se acerquen a la realidad.

La lógica difusa (Zadeh, 1965) ofrece diferentes herramientas para el tratamiento de la incertidumbre cuando se utiliza la opinión de expertos en las decisiones (Figueira et al. 2005; Zavadskas, Turskis, 2011). Entre estas herramientas los operadores de agregación de información OWA (*Ordered Weighted Averaging*) son una de las más adecuadas para el consenso en la toma de decisiones grupales (Zhou et al., 2012). En los últimos años se han desarrollado múltiples familias y extensiones de diferentes niveles de los operadores OWA (Beliakov et al. 2007; Torra, 1997; Xu, Da, 2003; Yager, 1988; Yager et. al., 2011) que se adecuan a diferentes situaciones y problemas de gran complejidad. El objetivo de este artículo es analizar la aplicabilidad de tres nuevas extensiones de operadores OWA propuestos recientemente por Merigó y Casanovas en la estrategia de precios para el sector asegurador. La importancia de estas técnicas es que permiten mejorar los procesos de toma de decisiones grupales teniendo en cuenta las opiniones individuales de los expertos. Los operadores a analizar son:

*Fuzzy Generalized Probabilistic OWA (FGPOWA) operator*, en el cual se utilizan números borrosos para hacer previsiones en situaciones inciertas en donde la información es escasa, vaga o imprecisa. Este operador unifica la probabilidad y el OWA teniendo en cuenta el grado de importancia que cada uno pueda tener en la agregación. También se puede utilizar este operador en una amplia gama de casos particulares, a través de medias generalizadas.

*Uncertain Generalized Probabilistic Weighted Averaging (UGPWA) operator*, en el que se utilizan números intervalo en el análisis, considerando los valores mínimo y máximo que pueden ocurrir en una situación, en la que los valores no se pueden estimar con precisión. Este operador unifica la probabilidad y la media ponderada en una misma formulación asignándole un grado de importancia a cada una de ellas. Al incluir las medias generalizadas se puede ampliar el operador a diferentes casos particulares.

*Induced Linguistic Probabilistic Ordered Weighted Averaging (ILPOWA) operator*, en este operador se utilizan etiquetas lingüísticas que resultan muy adecuadas para casos en los que la información es muy difícil de analizar con una escala numérica. En la formulación se asigna un grado de importancia a la probabilidad y el OWA para unificarlos. También se incluyen variables de inducción en la ordenación, que facilitan el tratamiento de situaciones complejas (Merigó & Casanovas, 2011b).

## **2. Preliminares**

En esta sección se detallan los diferentes conceptos básicos sobre los números borrosos, etiquetas lingüísticas, los operadores de agregación OWA y las extensiones utilizadas en este artículo.

### **Números Borrosos**

Los números borrosos NBs (Chang & Zadeh, 1972; Kaufmann & Gupta, 1985; Zadeh, 1975) han sido estudiados por muchos autores por sus ventajas para el tratamiento de problemas en situaciones de incertidumbre, en las cuales es muy complejo hacer una valoración con un número preciso. Para lo cual los NBs, permiten representar la información de una manera más completa, al tener en cuenta los valores mínimo, máximo e intermedios. En el caso de los operadores OWA, este tipo de número ha sido estudiado para obtener extensiones que puede aplicarse a diferentes tipos de problemas (Casanovas & Merigó, 2012, Merigó, 2012; Merigó & Casanovas, 2010a, 2011a, 2011c, 2012, Merigó & Gil Lafuente, 2013).

Una de las formas de presentar los números borrosos es mediante intervalos de confianza, que pueden ser: duplas  $[a_1, a_2]$ , tripletas  $[a_1, a_2, a_3]$  o cuádruplos de confianza  $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ : donde los valores extremos corresponden al mínimo y máximo, mientras los valores intermedios son de máxima presunción (Moore, 1966; Zeng et al., 2013).

### **Etiquetas Lingüísticas**

La mayoría de los análisis de las estrategias que influyen en el comportamiento económico se hace a través de un análisis numérico, pero existen muchos casos en los que la falta de información o su imprecisión hacen muy difícil estimar los resultados obtenidos. En estos casos las valoraciones cualitativas a través de etiquetas lingüísticas se han venido aplicando con muy buenos resultados incluso en el uso de operadores de



agregación (Merigó & Casanovas, 2010a, Merigó & Gil Lafuente, 2013, Merigó et. al, 2010, 2011, 2012, Xu et. al., 2012).

Los descriptores lingüísticos deben seleccionarse adecuadamente para el conjunto de términos, así como su semántica (Zadeh, 1975a). Una de las formas de hacerlo es considerar el conjunto de términos en una escala que define un orden total. Por ejemplo: un conjunto de once términos puede expresarse de la siguiente manera:

$$S = \{s_0 = N, s_1 = EB, s_2 = MB, s_3 = B, s_4 = M-B, s_5 = M, s_6 = M-A, s_7 = A, s_8 = MA, s_9 = EA, s_{10} = P\}.$$

Teniendo en cuenta que:  $N = Ninguno$ ,  $EB = Extremadamente Bajo$ ,  $MB = Muy Bajo$ ,  $B = Bajo$ ,  $M-B = Medio - Bajo$ ,  $M = Medio$ ,  $M-A = Medio - Alto$ ,  $A = Alto$ ,  $M' = Muy Alto$ ,  $EA = Extremadamente Alto$ ,  $P = Perfecto$ . El conjunto de términos lingüísticos debe tener:

Un operador de negación:  $Neg(s_i) = s_j$  tal que  $j = g + 1 - i$ .

El conjunto cumple una ordenación:  $s_i \leq s_j$  si y solo si  $i \leq j$ .

Un operador máximo:  $Max(s_i, s_j) = s_i$  si  $s_i \geq s_j$ .

Un operador mínimo:  $Min(s_i, s_j) = s_i$  si  $s_i \leq s_j$ .

### **El Ordered Weighted Averaging (OWA) Operator**

**Definición 1:** un operador OWA se define como una función de dimensión  $n$   $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  a la que se asocia un vector  $W$  de dimensión  $n$   $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ , que cumple las siguientes condiciones:

$$w_j \in [0, 1].$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot b_j$$

La esencia de los OWA (Yager, 1988; 1993; 1998) es el reordenamiento de los elementos o argumentos, haciendo que en la agregación los  $a_j$  no estén

asociados con una ponderación  $w_j$ , pero los  $w_j$  si estarán asociados con la posición en el orden para la agregación.

### El *Ascending OWA (AOWA) Operator*

**Definición 2:** un operador AOWA se define como una función de dimensión  $n$ ,  $F: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  a la que se asocia un vector  $W$  de dimensión  $n$   $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ , que cumple las siguientes condiciones:

$$w_j \in [0, 1].$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot b_j$$

Donde  $b_j$ , es el  $j$ -ésimo más pequeño de los  $a_i$ , o sea, que  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ , diferenciándose así de los OWA, donde  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ .

Como se puede notar la diferencia entre el operador OWA (*Descending OWA*) y el *Ascending OWA* es la forma en que se hace la ordenación de los argumentos, bien sea en forma descendente el primero o ascendente el segundo y que dependerá de la actitud optimista o pesimista del decisor.

### *Fuzzy Generalized Probabilistic OWA (FGPOWA) Operator*

El operador FGPOWA (Merigó et al. 2013a) es un operador de agregación que proporciona una formulación unificada entre la probabilidad y el operador OWA en un entorno incierto que puede ser evaluado con NBs. También utiliza medias generalizadas proporcionando un marco general que incluye una amplia gama de casos particulares. Se puede definir de la siguiente manera:

**Definición 3:** Sea  $\Psi$  un conjunto de NBs. Un operador FGPOWA de dimensión  $n$  es una función *FGPOWA*:  $\Psi^n \rightarrow \Psi$  que tiene un vector de ponderación asociado  $W$  de dimensión  $n$  con  $\tilde{w}_j \in [0, 1]$  y  $\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j = 1$ , y un vector probabilístico  $P$  de dimensión  $n$  con  $\tilde{p}_i \in [0, 1]$  y  $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1$  tal que:

$$FGPOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \left( \sum_{j=1}^n \tilde{w}_j b_j^\lambda \right)^{1/\lambda} + (1 - \tilde{\beta}) \left( \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i \tilde{a}_i^\delta \right)^{1/\delta}, \quad (1)$$

Donde  $b_j$  es el  $j$ -ésimo más grande de los argumentos  $\tilde{a}_i$ , los  $\tilde{a}_i$  son NBs,  $\tilde{\beta} \in [0, 1]$ , y  $\lambda$  es un parámetro, tal que  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ .

Se debe considerar que diferentes tipos de NBs se podrían utilizar en la agregación, incluyendo números borrosos triangulares NBT, números borrosos trapezoidales NBTps y estructuras más complejas. A menudo, cuando se trata con NBs en el operador FGPOWA no está claro cuál es mayor, por lo tanto, es necesario establecer un criterio para clasificarlos. Para simplificar se recomienda en primer lugar analizar si existe un orden entre los NBs, es decir, si el valor más bajo de un intervalo es mayor que el valor más alto de otro intervalo:  $A = (a_1, a_2, a_3)$  es estrictamente superior a  $C = (c_1, c_2, c_3)$ , si  $a_1 > c_3$ . Nótese que en este caso se puede garantizar al 100% que  $A > C$ , de otra manera se selecciona el NB con su nivel de membresía más alto, por lo general, cuando  $\alpha = 1$ , teniendo en cuenta que si el nivel de membresía  $\alpha = 1$  es un intervalo, se puede calcular el promedio del intervalo.

También es posible distinguir entre el FGPOWA descendente (DFGPOWA) y el FGPOWA ascendente (AFGPOWA) mediante el uso de  $w_j = w_{n-j+1}^*$ , donde  $w_j$  es la  $j$ -ésima ponderación del DFGPOWA y  $w_{n-j+1}^*$  la  $j$ -ésima ponderación del operador AFGPOWA. Nótese que esta reordenación es la agregación del OWA. Sin embargo, es posible considerar un proceso de reordenación más general, mediante el uso de  $\hat{p}_j = \hat{p}_{n-j+1}$ . En este caso se utiliza ordenaciones descendentes y ascendentes en el FOWA y la agregación probabilística difusa (FPA) al mismo tiempo. El operador FGPOWA es monótono, delimitado e idempotente.

### ***Uncertain Generalized Probabilistic Weighted Averaging (UGPWA) Operator***

El operador UGPWA (Merigó et al. 2013b) es un operador que unifica la probabilidad y la media ponderada en la misma formulación considerando el grado de importancia que cada concepto tiene en la agregación. Su principal ventaja es que puede utilizarse en entornos inciertos que no pueden ser evaluados con números exactos, pero si se permite el uso de números intervalo, de modo que puede analizarse información imprecisa considerando el resultado mínimo y máximo que suele ocurrir en cada situación. Por otro lado, el operador UGPWA utiliza medias generalizadas para proporcionar

una formulación más general que incluye una amplia gama de casos particulares tales como: el *Uncertain PWA* (UPWA), el *Uncertain Probabilistic Weighted Geometric Average* (UPGWA), el *Uncertain Probabilistic Weighted Harmonic Average* (UPHWA), el *Uncertain Probabilistic Weighted Quadratic Average* (UPQWA), entre otros casos, teniendo en cuenta que en esta agregación se unifica el UGWA con el *Uncertain Generalized Probabilistic Aggregation* (UGPA) y puede incluir otras unificaciones como el *Uncertain Weighted Geometric Average* (UWGA) con el *Uncertain Probabilistic Geometric Average* (UPGA) y el *Uncertain Weighted Quadratic Average* (UWQA) con el *Uncertain Probabilistic Quadratic Average* (UPQA). Se define de la siguiente manera:

**Definición 4:** Sea  $\Omega$  el conjunto de números intervalo. Un operador UGPWA es una función  $UGPWA: \Omega^n \rightarrow \Omega$  de dimensión  $n$ , si cuenta con un vector probabilístico asociado  $P$ , con  $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1$  y  $\tilde{p}_i \in [0, 1]$  y un vector de ponderación  $V$  que afecta la media ponderada, con  $\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i = 1$  y  $\tilde{v}_i \in [0, 1]$ , tal que:

$$UGPWA (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \tilde{\beta} \left( \sum_{j=1}^n \tilde{p}_j \tilde{a}_j^\lambda \right)^{1/\lambda} + (1 - \tilde{\beta}) \left( \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \tilde{a}_i^\sigma \right)^{1/\sigma}, \quad (2)$$

Donde los  $\tilde{a}_i$  son las variables de los argumentos, representados en forma de números intervalo,  $\tilde{\beta} \in [0, 1]$   $\lambda$  y  $\sigma$  son parámetros, tales que,  $\lambda, \sigma \in (-\infty, \infty) - \{0\}$ .

Se debe tener en cuenta que el vector de ponderación de probabilidades o WA es no normalizado, es decir,  $P = \sum_{i=1}^n p_i \neq 1$ , o  $V = \sum_{i=1}^n v_i \neq 1$ , entonces el operador UGPWA se expresa de la siguiente manera:

$$UGPWA (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{P}} \left( \sum_{j=1}^n \tilde{p}_j \tilde{a}_j^\lambda \right)^{1/\lambda} + \frac{(1 - \tilde{\beta})}{\tilde{V}} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i \tilde{a}_i^\sigma \right)^{1/\sigma}, \quad (3)$$

También es posible utilizar una amplia gama de números intervalos en los procesos de agregación, tales como duplas, tripletas o cuádruplos. Sin embargo, muchas veces no está claro como reordenar los números intervalo, siendo necesario establecer un criterio para tal fin. Por simplicidad se recomienda el siguiente método:

Para duplas se calcula la media aritmética del intervalo con  $(a_1 + a_2) / 2$ .

Para tripletas se calcula una media ponderada dándole más importancia a los valores centrales, es decir,  $(a_1 + 3a_2 + a_3) / 5$ ,

Para cuádruplos se calcula  $(a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4) / 8$ .

Y así sucesivamente.

En el caso de un empate entre los intervalos se selecciona aquel con la diferencia más baja, es decir,  $(a_2 - a_1)$ . Para tripletas y tuplas impares superiores se selecciona el intervalo con el mayor valor central. Para el caso de cuádruplas y tuplas superiores pares se puede calcular el promedio de los valores centrales siguiendo el criterio inicial.

El UGPWA es acotado, idempotente y monótono. Es acotado porque la agregación UGPWA está delimitada entre el mínimo y el máximo, es decir,  $\text{Min}\{\tilde{a}_i\} \leq \text{UGPWA}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \leq \text{Max}\{\tilde{a}_i\}$ , es idempotente porque si  $\tilde{a}_i = a$ , para todo  $i$ , entonces,  $\text{UGPWA}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = a$  y es monótono porque si  $\tilde{a}_i \geq u_i$ , para todo  $i$ , entonces,  $\text{UGPWA}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) \geq \text{UGPWA}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

### ***Induced Linguistic Probabilistic Ordered Weighted Averaging (ILPOWA) Operator***

El operador ILPOWA es un nuevo modelo de agregación que unifica *Linguistic Probabilistic Aggregation (LPA)* y el *Induced LOWA (ILOWA) operator* en la misma formulación, teniendo en cuenta el grado de importancia que cada concepto tiene en el análisis. Por lo tanto, es capaz de tratar con información objetiva representada en forma de probabilidades y con el carácter actitudinal del decisor. Por otro lado, también evalúa la información incierta que no puede ser estimada con valores numéricos, pero es posible el uso de variables lingüísticas. El operador ILPOWA se puede definir de la siguiente manera:

**Definición 5:** Un operador ILPOWA de dimensión  $n$  es una función *ILPOWA*:  $S^n \times S^n \rightarrow S$  que tiene un vector de ponderación asociado  $W$  de dimensión  $n$ , tal que,  $w_j \in [0, 1]$  y  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ , de acuerdo con la siguiente formula:

$$ILPOWA (\langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \langle u_2, s_{\alpha_2} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle) = \sum_{j=1}^n \hat{v}_j s_{\beta_j}, \quad (4)$$

Donde  $s_{\beta_j}$  es el  $s_{\alpha_i}$  valor lingüístico que tiene el  $j$ -ésimo más grande  $u_i$ ,  $u_i$  es la variable de inducción a ordenar. Cada argumento  $s_{\alpha_i}$  tiene una probabilidad asociada  $p_i$  con  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  y  $p_i \in [0, 1]$ ,  $\hat{v}_j = \beta w_j + (1 - \beta) p_j$  con  $\beta \in [0, 1]$  y  $p_j$  es la probabilidad  $p_i$  ordenada de acuerdo al  $s_{\beta_j}$ , que tenga el  $j$ -ésimo más grande  $u_i$ .

El operador ILPOWA puede formularse separando la parte que afecta el LPA y el operador ILOWA de la siguiente manera:

$$ILPOWA (\langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle) = \beta \sum_{j=1}^n w_j s_{\beta_j} + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n p_i s_{\alpha_i}, \quad (5)$$

Donde  $s_{\beta_j}$  es el  $s_{\alpha_i}$  valor lingüístico que tiene el  $j$ -ésimo más grande  $u_i$  y  $\beta \in [0, 1]$ .

Se puede distinguir entre el Descending ILPOWA (DILPOWA) y el Ascending ILPOWA (AILPOWA) utilizando en el ILOWA  $w_j = w_{n-j+1}^*$ , donde  $w_j$  es la  $j$ -ésima ponderación del DILPOWA y  $w_{n-j+1}^*$  la  $j$ -ésima ponderación del operador AILPOWA.

En caso de que el vector de ponderación no esté normalizado el operador ILPOWA puede expresarse como:

$$ILPOWA (\langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle) = \frac{1}{\hat{V}} \sum_{j=1}^n \hat{v}_j s_{\beta_j}. \quad (6)$$

El ILPOWA cumple las siguientes propiedades:

**Monotonía:** porque si  $s_{\alpha_i} \geq s_{\varepsilon_i}$ , para todo  $i$ , entonces,  $ILPOWA (\langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle) \geq ILPOWA (\langle u_1, s_{\varepsilon_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\varepsilon_n} \rangle)$ .

**Acotamiento:** porque la agregación del ILPOWA está delimitada por el mínimo y el máximo, es decir,  $\text{Min} \{s_{\alpha_i}\} \leq ILPOWA (\langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle) \leq \text{Max} \{s_{\alpha_i}\}$ .

Idempotencia: porque, si  $s_{\alpha_i} = s_{\alpha}$ , para todo  $i$ , entonces,  $ILPOWA (\langle u_1, s_{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle u_n, s_{\alpha_n} \rangle) = s_{\alpha}$ .

Otra propiedad interesante que tiene el operador ILPOWA es la condición de semilimitación basándose en la información probabilística del problema. Obsérvese que los operadores de agregación inducidos fueron introducidos por Yager & Filev (1999).

### 3. Metodología

La utilización de herramientas de lógica difusa, particularmente de números borrosos, etiquetas lingüísticas, teoría de expertos (Kaufmann, 1988) y operadores de agregación permiten contar con un abanico de instrumentos que se pueden aplicar al problema de la estrategia de precios en diferentes situaciones, de acuerdo con la información disponible para que los expertos emitan sus predicciones. La metodología propuesta se resume en los siguientes pasos:

Paso 1. Definición del Grupo de Expertos: el objetivo de contar con la opinión de varios expertos es llegar a consensuar opiniones muy diversas en las que cada uno tiene razón en algunos aspectos, pero no es suficiente para convencer a los demás acerca de su perspectiva del problema. Estas diferencias son muy notorias entre los profesionales de las áreas de marketing y finanzas. En este paso se seleccionan expertos de áreas diferentes.

Paso 2. Contextualización del Problema: en el problema de la estrategia de precios existen muchos factores del entorno que pueden crear incertidumbre y que tienen una influencia directa en los beneficios y en la participación del mercado. En este artículo por ejemplo se analizan diferentes escenarios de la situación económica de un país para diferentes recargos de beneficio.

Paso 3. Instrumento de Predicción: dependiendo de la incertidumbre y de la información disponible existen diferentes alternativas para que los expertos puedan predecir el comportamiento esperado de los beneficios en cada situación, bien sea en unidades monetarias, en una escala numérica de calificación, por ejemplo, de 0 a 1, o con variables cualitativas. En este caso se propone el uso de números borrosos (intervalos o tripletas de confianza) o etiquetas lingüísticas.

Paso 4. Opiniones de Expertos: los expertos proporcionan las estimaciones de beneficios para cada alternativa y situación de la economía, de acuerdo con el instrumento definido en el paso anterior. La agregación de dichas opiniones se hace ponderando las diferentes opiniones, con una media simple o utilizando la teoría de expertones.

Paso 5. Agregación de Resultados: dependiendo del instrumento utilizado para las predicciones se agregan los resultados con los operadores de agregación OWA, en los cuales además de dicha opinión se incluye la actitud optimista/pesimista de los expertos, a través de un vector de ponderación  $W$ . Las extensiones OWA a utilizar son:

El operador FGPOWA: para información evaluada en forma de números borrosos triangulares en unidades monetarias y agregando las opiniones de forma ponderada.

El operador UGPWA: para información evaluada en una escala de 0 a 1, donde 0 corresponde al más bajo y 1 al más alto de los beneficios esperados en forma de números intervalo y agregando las opiniones con teoría de expertones.

El operador ILPOWA: para información evaluada con etiquetas lingüísticas y agregando las opiniones de forma ponderada.

Los resultados en cada operador se agregarán utilizando diferentes criterios que varían entre el mínimo y el máximo.

Paso 6. Alternativa Óptima: con los resultados obtenidos en el paso anterior se establece un ranking de alternativas en orden descendente para cada uno de los criterios establecidos. De esta forma se facilita la elección de la alternativa óptima con diferentes criterios.

#### **4. Aplicación de la Lógica Difusa a la Estrategia de Precios en el Sector Asegurador**

Para establecer el precio de una póliza de seguros, denominado prima comercial, se parte de la estimación de una prima pura  $P$  que corresponde a la esperanza matemática del coste de la póliza  $E[S]$ , teniendo en cuenta el número de siniestros o frecuencia de reclamaciones  $N$  y sus cuantías o pérdidas  $X_i$  para  $i = 1, 2, \dots, N$ . Así:



$$E[S] = E[N]E[X]. \quad (7)$$

Luego para obtener la prima comercial o tarifa se agregan los siguientes cargos a la prima pura  $P$  (Boj, 2004):

Recargo de seguridad como reserva técnica para absorber los excesos de siniestralidad, ya que en la práctica no se dispone de una cartera infinita ni de información estadística suficiente.

Recargo para gastos de gestión interna, destinado a cubrir los gastos propios de la póliza dentro de la compañía aseguradora.

Recargo para gastos de gestión externa, destinado a remunerar a los mediadores entre aseguradores y asegurados, gastos de adquisición y gastos de cobro y mantenimiento de la cartera.

Recargo para beneficios o excedentes, destinado a remunerar los recursos financieros y aumentar la solvencia dinámica, es el beneficio directo para la empresa.

Este artículo se enfoca en el recargo para beneficios o excedentes, donde se define el precio que finalmente se cobrará por una póliza de asegurados, el cual influye directamente en la demanda y por tanto en los beneficios globales de la empresa. A continuación, se muestra a través de un ejemplo como se puede analizar la aplicabilidad de los operadores expuestos anteriormente en el sector asegurador. Para este caso se supone que diferentes grupos de expertos presentan un pronóstico de beneficios esperados utilizando números borrosos triangulares, números inciertos y etiquetas lingüísticas para un determinado perfil de asegurados a una póliza, teniendo en consideración las siguientes alternativas:

Alternativa 1: estipular un margen de utilidad (beneficio) del 5%

Alternativa 2: estipular un margen de utilidad (beneficio) del 8%

Alternativa 3: estipular un margen de utilidad (beneficio) del 10%

Alternativa 4: estipular un margen de utilidad (beneficio) del 15%

Alternativa 5: estipular un margen de utilidad (beneficio) del 20%

También se tiene en consideración las siguientes situaciones de la economía que se pueden presentar en un futuro y que incidirán directamente en los resultados:

Situación 1: Fuerte crecimiento económico.

Situación 2: Moderado crecimiento económico.

Situación 3: Economía estable.

Situación 4: Ligera recesión económica.

Situación 5: Fuerte recesión económica.

### **Análisis con el operador FGPOWA**

En este caso los expertos han emitidos pronósticos de beneficios globales utilizando números borrosos compuestos de la siguiente forma:

El primer número corresponde al valor mínimo que se puede obtener en el caso más pesimista,

El segundo número, corresponde al valor que tiene la probabilidad más alta de ser resultante.

El tercer número, corresponde al valor máximo que se puede obtener en el caso más optimista.

Las opiniones de un grupo de tres expertos se presentan en las tablas 8.1, 8.2 y 8.3:

*Tabla 8-1 Predicción Experto 1*

| <b>Alternativas</b> | <b>Situación 1</b> |     |     | <b>Situación 2</b> |     |     | <b>Situación 3</b> |     |     | <b>Situación 4</b> |     |     | <b>Situación 5</b> |     |     |
|---------------------|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|
| Alternativa 1       | 550                | 600 | 650 | 550                | 600 | 650 | 450                | 500 | 550 | 400                | 450 | 500 | 300                | 350 | 400 |
| Alternativa 2       | 650                | 700 | 750 | 600                | 650 | 700 | 500                | 550 | 600 | 350                | 400 | 450 | 300                | 350 | 400 |
| Alternativa 3       | 700                | 760 | 810 | 600                | 630 | 670 | 450                | 500 | 550 | 400                | 460 | 500 | 360                | 420 | 460 |
| Alternativa 4       | 600                | 640 | 690 | 500                | 550 | 600 | 400                | 450 | 500 | 350                | 390 | 450 | 250                | 300 | 350 |
| Alternativa 5       | 450                | 500 | 550 | 350                | 400 | 450 | 300                | 350 | 400 | 250                | 300 | 350 | 150                | 200 | 250 |

*Tabla 8-2 Predicción Experto 2*

| <b>Alternativas</b> | <b>Situación 1</b> |     |     | <b>Situación 2</b> |     |     | <b>Situación 3</b> |     |     | <b>Situación 4</b> |     |     | <b>Situación 5</b> |     |     |
|---------------------|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|
| Alternativa 1       | 650                | 700 | 750 | 560                | 620 | 680 | 500                | 550 | 600 | 450                | 500 | 550 | 400                | 440 | 500 |
| Alternativa 2       | 680                | 720 | 760 | 650                | 700 | 750 | 550                | 600 | 650 | 400                | 450 | 500 | 350                | 400 | 450 |
| Alternativa 3       | 760                | 800 | 840 | 630                | 680 | 730 | 550                | 580 | 620 | 390                | 430 | 480 | 300                | 350 | 400 |
| Alternativa 4       | 610                | 660 | 710 | 520                | 570 | 610 | 450                | 500 | 550 | 300                | 350 | 400 | 260                | 320 | 380 |
| Alternativa 5       | 500                | 550 | 600 | 480                | 420 | 460 | 350                | 400 | 450 | 250                | 300 | 350 | 200                | 250 | 300 |

*Tabla 8-3 Predicción Experto 3*

| <b>Alternativas</b> | <b>Situación 1</b> |     |     | <b>Situación 2</b> |     |     | <b>Situación 3</b> |     |     | <b>Situación 4</b> |     |     | <b>Situación 5</b> |     |     |
|---------------------|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|
| Alternativa 1       | 580                | 620 | 660 | 550                | 600 | 650 | 510                | 550 | 580 | 430                | 480 | 530 | 350                | 400 | 450 |
| Alternativa 2       | 650                | 710 | 750 | 620                | 670 | 700 | 500                | 530 | 570 | 400                | 450 | 500 | 320                | 370 | 410 |
| Alternativa 3       | 600                | 650 | 700 | 610                | 650 | 690 | 450                | 500 | 550 | 400                | 440 | 500 | 300                | 350 | 400 |
| Alternativa 4       | 500                | 550 | 600 | 450                | 500 | 550 | 390                | 430 | 480 | 300                | 350 | 400 | 220                | 270 | 320 |
| Alternativa 5       | 450                | 480 | 550 | 400                | 450 | 500 | 340                | 370 | 300 | 250                | 290 | 350 | 180                | 220 | 260 |

Para la agregación de las opiniones de los tres expertos se definió un vector de ponderación  $U = (0.25, 0.4, 0.35)$ , obteniéndose los siguientes resultados:

*Tabla 8-4 Resultados Colectivos*

| <b>Alternativas</b> | <b>Situación 1</b> |     |     | <b>Situación 2</b> |     |     | <b>Situación 3</b> |     |     | <b>Situación 4</b> |     |     | <b>Situación 5</b> |     |     |
|---------------------|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|--------------------|-----|-----|
| Alternativa 1       | 601                | 647 | 694 | 554                | 608 | 662 | 491                | 538 | 581 | 431                | 481 | 531 | 358                | 404 | 458 |
| Alternativa 2       | 662                | 712 | 754 | 627                | 677 | 720 | 520                | 563 | 610 | 388                | 438 | 488 | 327                | 377 | 424 |
| Alternativa 3       | 689                | 738 | 784 | 616                | 657 | 701 | 490                | 532 | 578 | 396                | 441 | 492 | 315                | 368 | 415 |
| Alternativa 4       | 569                | 617 | 667 | 491                | 541 | 587 | 417                | 463 | 513 | 313                | 360 | 413 | 244                | 298 | 352 |
| Alternativa 5       | 470                | 513 | 570 | 420                | 426 | 472 | 334                | 377 | 385 | 250                | 297 | 350 | 181                | 227 | 274 |

Los expertos también han definidos los vectores de ponderación  $P = (0.1, 0.2, 0.3, 0.3, 0.1)$  y  $W = (0.4, 0.25, 0.15, 0.1, 0.1)$  y un parámetro  $\beta = 0.4$  para el cálculo de los siguientes criterios:

FAM: corresponde a la media aritmética de las tripletas de cada una de las alternativas.

FPA: corresponde a la media aritmética ponderada de las tripletas de cada una de las alternativas con el vector de ponderación P.

FOWA: corresponde a la agregación de la ordenación descendente de las tripletas de las alternativas utilizando el vector de ponderación W.

AFOWA: corresponde a la agregación de la ordenación ascendente de las tripletas de las alternativas utilizando el vector de ponderación W.

FPOWA: es la agregación utilizando el factor  $\beta$  para el FOWA y  $(1-\beta)$  para el FPA.

Los resultados obtenidos se muestran en las tablas 8.5 y 8.6.

*Tabla 8-5 Resultados Agregados I*

| <b>Alternativas</b> | <b>F-MINIMO</b> |     |     | <b>F-MAXIMO</b> |     |     | <b>FAM</b> |     |     | <b>FPA</b> |     |     |
|---------------------|-----------------|-----|-----|-----------------|-----|-----|------------|-----|-----|------------|-----|-----|
| Alternativa 1       | 358             | 404 | 458 | 601             | 647 | 694 | 487        | 535 | 585 | 483        | 532 | 581 |
| Alternativa 2       | 327             | 377 | 424 | 662             | 712 | 754 | 505        | 553 | 599 | 497        | 544 | 591 |
| Alternativa 3       | 315             | 368 | 415 | 689             | 738 | 784 | 501        | 547 | 594 | 489        | 534 | 581 |
| Alternativa 4       | 244             | 298 | 352 | 569             | 617 | 667 | 406        | 456 | 506 | 398        | 446 | 497 |
| Alternativa 5       | 181             | 227 | 274 | 470             | 513 | 570 | 331        | 368 | 410 | 324        | 361 | 399 |

*Tabla 8-6 Resultados Agregados II*

| <b>Alternativas</b> | <b>FOWA</b> |     |     | <b>AFOWA</b> |     |     | <b>FPOWA</b> |     |     | <b>A-FPOWA</b> |     |     |
|---------------------|-------------|-----|-----|--------------|-----|-----|--------------|-----|-----|----------------|-----|-----|
| Alternativa 1       | 531         | 580 | 629 | 440          | 488 | 538 | 502          | 551 | 600 | 466            | 514 | 564 |
| Alternativa 2       | 571         | 620 | 664 | 435          | 483 | 530 | 526          | 575 | 620 | 472            | 520 | 567 |
| Alternativa 3       | 574         | 620 | 666 | 429          | 477 | 524 | 523          | 568 | 615 | 465            | 511 | 558 |
| Alternativa 4       | 468         | 517 | 567 | 344          | 394 | 446 | 426          | 475 | 525 | 376            | 426 | 476 |
| Alternativa 5       | 386         | 420 | 466 | 274          | 315 | 359 | 349          | 385 | 426 | 304            | 343 | 383 |

Luego se establece un ranking de las alternativas, según los criterios de agregación utilizados obtenemos:

*Tabla 8-7 Ranking de Estrategias*

| <b>Criterio</b> | <b>Ordenación</b>      |
|-----------------|------------------------|
| FAM             | A2 > A3 > A1 > A4 > A5 |
| FPA             | A2 > A3 > A1 > A4 > A5 |
| FOWA            | A3 > A2 > A1 > A4 > A5 |
| AFOWA           | A1 > A2 > A3 > A4 > A5 |
| FPOWA           | A2 > A3 > A1 > A4 > A5 |
| A-FPOWA         | A2 > A1 > A3 > A4 > A5 |

El criterio para ordenar las alternativas consiste en seleccionar el valor central en orden descendente. En caso de empate, como en el FOWA, se asumió como segundo criterio darle prioridad al que tenga mayor valor en el primer número de la tripleta.

#### **Análisis con el operador UGPWA**

En este caso, los expertos valoran cada alternativa en los diferentes escenarios de la economía, dando su opinión en el intervalo [0, 1], donde 0 corresponde al más bajo y 1 al más alto de los beneficios esperados. Teniendo en cuenta la incertidumbre de la situación y de la información disponible se presentan las predicciones con números borrosos en forma de intervalos. Los resultados obtenidos se presentan en las tablas 8.8 a 8.12:

*Tabla 8-8 Predicción Experto 1*

| <b>Alternativas</b> | <b>Situación 1</b> |     | <b>Situación 2</b> |     | <b>Situación 3</b> |     | <b>Situación 4</b> |     | <b>Situación 5</b> |     |
|---------------------|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|-----|
| Alternativa 1       | 0,6                | 0,8 | 0,6                | 0,8 | 0,6                | 0,6 | 0,4                | 0,5 | 0,3                | 0,4 |
| Alternativa 2       | 0,5                | 0,7 | 0,7                | 0,9 | 0,6                | 0,7 | 0,3                | 0,4 | 0,2                | 0,4 |
| Alternativa 3       | 0,8                | 0,9 | 0,7                | 0,8 | 0,5                | 0,6 | 0,2                | 0,4 | 0,2                | 0,3 |
| Alternativa 4       | 0,6                | 0,7 | 0,5                | 0,6 | 0,4                | 0,5 | 0,3                | 0,3 | 0,1                | 0,3 |
| Alternativa 5       | 0,5                | 0,6 | 0,4                | 0,5 | 0,3                | 0,4 | 0,1                | 0,3 | 0,2                | 0,2 |

*Tabla 8-9 Predicción Experto 2*

| <b>Alternativas</b> | <b>Situación 1</b> | <b>Situación 2</b> | <b>Situación 3</b> | <b>Situación 4</b> | <b>Situación 5</b> |     |     |     |     |     |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Alternativa 1       | 0,7                | 0,9                | 0,7                | 0,8                | 0,6                | 0,6 | 0,6 | 0,7 | 0,5 | 0,6 |
| Alternativa 2       | 0,7                | 0,8                | 0,7                | 0,9                | 0,7                | 0,8 | 0,5 | 0,6 | 0,4 | 0,5 |
| Alternativa 3       | 0,8                | 0,9                | 0,8                | 0,9                | 0,7                | 0,9 | 0,5 | 0,7 | 0,4 | 0,6 |
| Alternativa 4       | 0,6                | 0,8                | 0,6                | 0,8                | 0,5                | 0,6 | 0,5 | 0,6 | 0,3 | 0,4 |
| Alternativa 5       | 0,6                | 0,6                | 0,6                | 0,7                | 0,5                | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 0,2 | 0,3 |

*Tabla 8-10 Predicción Experto 3*

| <b>Alternativas</b> | <b>Situación 1</b> | <b>Situación 2</b> | <b>Situación 3</b> | <b>Situación 4</b> | <b>Situación 5</b> |     |     |     |     |     |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Alternativa 1       | 0,5                | 0,7                | 0,5                | 0,7                | 0,6                | 0,7 | 0,5 | 0,6 | 0,4 | 0,6 |
| Alternativa 2       | 0,6                | 0,7                | 0,6                | 0,7                | 0,5                | 0,6 | 0,4 | 0,6 | 0,4 | 0,5 |
| Alternativa 3       | 0,7                | 0,8                | 0,6                | 0,8                | 0,6                | 0,7 | 0,4 | 0,7 | 0,3 | 0,5 |
| Alternativa 4       | 0,7                | 0,9                | 0,7                | 0,8                | 0,6                | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 0,3 | 0,4 |
| Alternativa 5       | 0,8                | 0,9                | 0,8                | 0,9                | 0,5                | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 0,2 | 0,3 |

*Tabla 8-11 Predicción Experto 4*

| <b>Alternativas</b> | <b>Situación 1</b> | <b>Situación 2</b> | <b>Situación 3</b> | <b>Situación 4</b> | <b>Situación 5</b> |     |     |     |     |     |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Alternativa 1       | 0,7                | 0,8                | 0,7                | 0,8                | 0,6                | 0,7 | 0,6 | 0,7 | 0,7 | 0,8 |
| Alternativa 2       | 0,8                | 0,9                | 0,7                | 0,8                | 0,6                | 0,7 | 0,6 | 0,8 | 0,7 | 0,8 |
| Alternativa 3       | 0,9                | 1                  | 0,9                | 1                  | 0,7                | 0,8 | 0,7 | 0,8 | 0,6 | 0,7 |
| Alternativa 4       | 0,9                | 1                  | 0,8                | 0,9                | 0,7                | 0,8 | 0,5 | 0,7 | 0,5 | 0,5 |
| Alternativa 5       | 0,8                | 0,9                | 0,8                | 0,9                | 0,6                | 0,7 | 0,5 | 0,6 | 0,4 | 0,4 |

*Tabla 8-12 Predicción Experto 5*

| <b>Alternativas</b> | <b>Situación 1</b> | <b>Situación 2</b> | <b>Situación 3</b> | <b>Situación 4</b> | <b>Situación 5</b> |     |     |     |     |     |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Alternativa 1       | 0,6                | 0,7                | 0,7                | 0,8                | 0,7                | 0,8 | 0,6 | 0,7 | 0,6 | 0,7 |
| Alternativa 2       | 0,7                | 0,9                | 0,8                | 0,9                | 0,7                | 0,8 | 0,6 | 0,7 | 0,5 | 0,6 |
| Alternativa 3       | 0,8                | 0,9                | 0,8                | 0,9                | 0,8                | 0,9 | 0,7 | 0,8 | 0,5 | 0,7 |
| Alternativa 4       | 0,9                | 1                  | 0,9                | 1                  | 0,6                | 0,7 | 0,5 | 0,6 | 0,3 | 0,4 |
| Alternativa 5       | 0,9                | 1                  | 0,9                | 1                  | 0,6                | 0,8 | 0,5 | 0,5 | 0,2 | 0,3 |

A partir de estos valores se construyen los expertones como se muestra a manera de ejemplo, para la alternativa 1 en la situación 1. En primer lugar, se calculan primero las frecuencias absolutas, definidas como el número de veces que los expertos han dado una opinión; luego se obtienen las frecuencias relativas dividiendo las frecuencias absolutas entre el número de expertos. Y por último se calcula la frecuencia relativa acumulada sumando las frecuencias relativas de una forma acumulada, desde  $\alpha = 1$  hasta  $\alpha = 0$ . Dicho proceso puede verse con detalle en la siguiente tabla:

*Tabla 8-13 Expertón para la Alternativa 1 y Situación 1*

|                      | Frecuencia Absoluta |   |          | Frecuencia Relativa |     |          | Frecuencia Relativa Acumulada |     |     |
|----------------------|---------------------|---|----------|---------------------|-----|----------|-------------------------------|-----|-----|
|                      | Situación 1         |   |          | Situación 1         |     |          | Situación 1                   |     |     |
|                      |                     |   |          |                     |     |          |                               |     |     |
| <b>Alternativa 1</b> | <b>0</b>            | 0 | 0        | <b>0</b>            | 0   | 0        | <b>0</b>                      | 1   | 1   |
|                      | <b>0,1</b>          | 0 | 0        | <b>0,1</b>          | 0   | 0        | <b>0,1</b>                    | 1   | 1   |
|                      | <b>0,2</b>          | 0 | 0        | <b>0,2</b>          | 0   | 0        | <b>0,2</b>                    | 1   | 1   |
|                      | <b>0,3</b>          | 0 | 0        | <b>0,3</b>          | 0   | 0        | <b>0,3</b>                    | 1   | 1   |
|                      | <b>0,4</b>          | 0 | 0        | <b>0,4</b>          | 0   | 0        | <b>0,4</b>                    | 1   | 1   |
|                      | <b>0,5</b>          | 1 | 0        | <b>0,5</b>          | 0,2 | 0        | <b>0,5</b>                    | 1   | 1   |
|                      | <b>0,6</b>          | 2 | 0        | <b>0,6</b>          | 0,4 | 0        | <b>0,6</b>                    | 0,8 | 1   |
|                      | <b>0,7</b>          | 2 | 2        | <b>0,7</b>          | 0,4 | 0,4      | <b>0,7</b>                    | 0,4 | 1   |
|                      | <b>0,8</b>          | 0 | 2        | <b>0,8</b>          | 0   | 0,4      | <b>0,8</b>                    | 0   | 0,6 |
|                      | <b>0,9</b>          | 0 | 1        | <b>0,9</b>          | 0   | 0,2      | <b>0,9</b>                    | 0   | 0,2 |
| <b>1</b>             | 0                   | 0 | <b>1</b> | 0                   | 0   | <b>1</b> | 0                             | 0   |     |

Posteriormente se calcula el valor esperado de los expertones para cada alternativa y situación. Para ello se suman los niveles de pertenencia  $\alpha$  de la frecuencia relativa acumulada, exceptuando  $\alpha = 0$  y dividiendo el resultado entre 10, como se muestra en la tabla 8.14:

*Tabla 8-14 Valor Esperado de los Expertones para cada Alternativa y Situación*

| <b>Alternativas</b> | <b>Situación 1</b> |      | <b>Situación 2</b> |      | <b>Situación 3</b> |      | <b>Situación 4</b> |      | <b>Situación 5</b> |      |
|---------------------|--------------------|------|--------------------|------|--------------------|------|--------------------|------|--------------------|------|
| Alternativa 1       | 0,62               | 0,78 | 0,64               | 0,78 | 0,62               | 0,68 | 0,54               | 0,64 | 0,50               | 0,62 |
| Alternativa 2       | 0,66               | 0,80 | 0,70               | 0,84 | 0,62               | 0,72 | 0,48               | 0,54 | 0,44               | 0,62 |
| Alternativa 3       | 0,80               | 0,90 | 0,76               | 0,88 | 0,66               | 0,78 | 0,50               | 0,68 | 0,40               | 0,56 |
| Alternativa 4       | 0,74               | 0,88 | 0,70               | 0,82 | 0,56               | 0,54 | 0,44               | 0,54 | 0,30               | 0,40 |
| Alternativa 5       | 0,72               | 0,80 | 0,70               | 0,80 | 0,50               | 0,62 | 0,38               | 0,48 | 0,24               | 0,30 |

Los resultados obtenidos son utilizados de forma agregada para obtener la valoración de los beneficios esperados de cada una de las alternativas, teniendo en cuenta las diferentes situaciones de la economía en conjunto, a través de los operadores: *Uncertain Average* (UA), *Uncertain Probabilistic Average* (UPA), *Uncertain Weighted Average* (UWA) y *Uncertain Probabilistic Weighted Average* (UPWA). Para el UWA se asume un vector de ponderación  $V = (0.3, 0.2, 0.2, 0.15, 0.15)$  con una importancia del 30% y para el UPA  $P = (0.1, 0.2, 0.3, 0.3, 0.1)$  con una importancia del 70%. De esta manera se obtienen los siguientes resultados agregados.

*Tabla 8-15 Resultados Agregados*

| <b>Alternativas</b> | <b>UA</b> | <b>UPA</b> | <b>UWA</b> | <b>UPWA</b> |
|---------------------|-----------|------------|------------|-------------|
| Alternativa 1       | 0,58      | 0,70       | 0,59       | 0,69        |
| Alternativa 2       | 0,58      | 0,70       | 0,58       | 0,69        |
| Alternativa 3       | 0,62      | 0,76       | 0,62       | 0,76        |
| Alternativa 4       | 0,55      | 0,64       | 0,54       | 0,62        |
| Alternativa 5       | 0,51      | 0,60       | 0,50       | 0,60        |

En la tabla anterior se puede observar que cada uno de estos operadores proporciona diferentes resultados y decisiones. Si se ordenan las alternativas en orden descendente, como se muestra en la tabla 8.16, la alternativa 3 es la que obtendría los mejores beneficios coincidiendo en los cuatro criterios analizados.



*Tabla 8-16 Ranking de Estrategias*

| <b>Criterio</b> | <b>Ordenación</b>      |
|-----------------|------------------------|
| UA              | A3 > A1 > A2 > A4 > A5 |
| UPA             | A3 > A1 > A2 > A4 > A5 |
| UWA             | A3 > A2 > A1 > A4 > A5 |
| UPWA            | A3 > A1 > A2 > A4 > A5 |

### **Análisis con el operador ILPOWA**

En este caso un grupo de expertos, tres de ellos han emitido su opinión para cada alternativa y situación, de acuerdo con la siguiente escala de valores lingüísticos:

- S0: Ninguno
- S1: Extremadamente bajo
- S2: Muy bajo
- S3: Bajo
- S4: Medio bajo
- S5: Medio
- S6: Medio alto
- S7: Alto
- S8: Muy alto
- S9: Extremadamente alto
- S10: Optimo

Los juicios emitidos por los tres expertos se presentan a continuación en las tablas 8.17 a 8.20:

*Tabla 8-17 Predicción Experto 1*

| <b>Alternativas</b> | <b>Situación 1</b> | <b>Situación 2</b> | <b>Situación 3</b> | <b>Situación 4</b> | <b>Situación 5</b> |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Alternativa 1       | S8                 | S7                 | S5                 | S5                 | S4                 |
| Alternativa 2       | S8                 | S7                 | S7                 | S6                 | S4                 |
| Alternativa 3       | S9                 | S8                 | S8                 | S5                 | S5                 |
| Alternativa 4       | S8                 | S7                 | S6                 | S5                 | S3                 |
| Alternativa 5       | S7                 | S6                 | S6                 | S4                 | S2                 |

*Tabla 8-18 Predicción Experto 2*

| <b>Alternativas</b> | <b>Situación 1</b> | <b>Situación 2</b> | <b>Situación 3</b> | <b>Situación 4</b> | <b>Situación 5</b> |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Alternativa 1       | S7                 | S6                 | S6                 | S7                 | S6                 |
| Alternativa 2       | S7                 | S6                 | S6                 | S7                 | S5                 |
| Alternativa 3       | S8                 | S8                 | S7                 | S5                 | S4                 |
| Alternativa 4       | S9                 | S8                 | S8                 | S4                 | S3                 |
| Alternativa 5       | S10                | S9                 | S9                 | S4                 | S2                 |

*Tabla 8-19 Predicción Experto 3*

| <b>Alternativas</b> | <b>Situación 1</b> | <b>Situación 2</b> | <b>Situación 3</b> | <b>Situación 4</b> | <b>Situación 5</b> |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Alternativa 1       | S7                 | S7                 | S6                 | S5                 | S5                 |
| Alternativa 2       | S9                 | S9                 | S7                 | S6                 | S4                 |
| Alternativa 3       | S9                 | S8                 | S8                 | S4                 | S3                 |
| Alternativa 4       | S8                 | S8                 | S7                 | S4                 | S3                 |
| Alternativa 5       | S8                 | S7                 | S6                 | S3                 | S2                 |

Estos valores se han agregado para obtener una valoración global, utilizando un vector de ponderación  $U = (0.25, 0.4, 0.35)$ , obteniéndose los siguientes resultados:

*Tabla 8-20 Resultados Colectivos*

| <b>Alternativas</b> | <b>Situación 1</b> | <b>Situación 2</b> | <b>Situación 3</b> | <b>Situación 4</b> | <b>Situación 5</b> |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Alternativa 1       | S7,3               | S6,6               | S5,8               | S5,8               | S5,2               |
| Alternativa 2       | S8,0               | S7,3               | S6,6               | S6,4               | S4,4               |
| Alternativa 3       | S8,6               | S8,0               | S7,6               | S4,7               | S3,9               |
| Alternativa 4       | S8,4               | S7,8               | S7,2               | S4,3               | S3,0               |
| Alternativa 5       | S8,6               | S7,6               | S7,2               | S3,7               | S2,0               |

También los expertos han definido los vectores de ponderación:  $P = (0.1, 0.3, 0.3, 0.2, 0.1)$  y  $W = (0.3, 0.2, 0.2, 0.15, 0.15)$ , además de un parámetro  $\beta = 0.5$  para el cálculo de los siguientes criterios:

L-Máximo: corresponde al valor máximo o valor más optimista de todas las situaciones para cada alternativa.

L-Mínimo: corresponde al valor mínimo o valor más pesimista de todas las situaciones para cada alternativa.

LAM: es la media aritmética de las variables lingüísticas para cada alternativa.

LPA: es la media aritmética ponderada de las alternativas utilizando el vector de ponderación P.

LOWA: corresponde a la agregación de la ordenación descendente de las variables lingüísticas de las alternativas utilizando el vector de ponderación W.

ILOWA: es la agregación de las alternativas utilizando el vector de ponderación W, pero teniendo como criterio de ordenación descendente un vector de inducción  $U = (6, 7, 10, 8, 12)$ . Este vector de inducción corresponde a una valoración de los expertos sobre los factores psicológicos que afectan la relación precio – calidad en cada una de las situaciones económicas.

LPOWA: es la agregación utilizando el factor  $\beta$  para el LOWA y  $(1-\beta)$  para el LPA.

ILPOWA: es la agregación utilizando el factor  $\beta$  para el ILOWA y  $(1-\beta)$  para el LPA.

Los resultados agregados obtenidos se muestran en la tabla 8.21:

*Tabla 8-21 Resultados Agregados*

| <b>Alternativas</b> | <b>L-Máx</b> | <b>L-Mín</b> | <b>LAM</b> | <b>LPA</b> | <b>LOWA</b> | <b>ILOWA</b> | <b>LPOWA</b> | <b>ILPOWA</b> |
|---------------------|--------------|--------------|------------|------------|-------------|--------------|--------------|---------------|
| Alternativa 1       | S7,25        | S5,15        | S6,11      | S6,11      | S6,29       | S5,93        | S6,20        | S6,11         |
| Alternativa 2       | S7,95        | S4,40        | S6,53      | S6,69      | S6,79       | S6,21        | S6,74        | S6,50         |
| Alternativa 3       | S8,60        | S3,90        | S6,55      | S6,86      | S6,92       | S6,11        | S6,89        | S6,52         |
| Alternativa 4       | S8,40        | S3,00        | S6,11      | S6,46      | S6,59       | S5,60        | S6,52        | S6,10         |
| Alternativa 5       | S8,55        | S2,00        | S5,79      | S6,21      | S6,36       | S5,19        | S6,29        | S5,77         |

Los resultados agregados se ordenan en orden descendente como se muestra en la siguiente tabla:

*Tabla 8-22 Ranking de Estrategias*

| <b>Criterio</b> | <b>Ordenación</b>      |
|-----------------|------------------------|
| L-Máximo        | A3 > A5 > A4 > A2 > A1 |
| L-Mínimo        | A5 > A4 > A3 > A2 > A1 |
| LAM             | A3 > A2 > A4 = A1 > A5 |
| LPA             | A3 > A2 > A1 > A4 > A5 |
| LOWA            | A3 > A2 > A1 > A4 > A5 |
| ILOWA           | A2 > A3 > A1 > A4 > A5 |
| LPOWA           | A3 > A2 > A1 > A4 > A5 |
| ILPOWA          | A3 > A2 > A1 > A4 > A5 |

Como se puede observar cada uno de los criterios u operadores anteriores puede llevar a tomar una decisión diferente que depende principalmente de la actitud del decisor. Sin embargo, la más favorable es la alternativa 3 y la menos favorable la alternativa 5 según el ranking de alternativas por criterio.

## 5. Conclusiones

Se ha analizado el problema de establecer una estrategia de precios en el caso de una póliza de seguros ya que los beneficios por unidad en gran parte dependen del control de los costes tanto fijos como variables para obtener un mejor margen de utilidad. Pero también es importante destacar otros factores que influyen para cumplir con los objetivos globales de rentabilidad, ya que la demanda de los productos depende de situaciones como el crecimiento de la economía y el volumen del negocio. Es decir, un determinado precio de tarifa puede hacer más o menos atractivo un producto o servicio para tener un determinado nivel de participación en el mercado y por tanto unos mejores beneficios totales.

El problema de analizar la estrategia de precios se ha enfocado en la obtención de las opiniones de expertos, acerca del comportamiento de los beneficios totales para diferentes márgenes de beneficio, que determinan la prima comercial de una póliza y por otro lado se establecen diferentes escenarios económicos para el análisis. Uno de los inconvenientes para que los expertos emitan sus estimaciones es que en la mayoría de los casos no se cuenta con información suficiente para establecer cuál será el valor preciso en cada una de las situaciones. En este artículo se ha propuesto la utilización de tres herramientas con lógica difusa y operadores de agregación OWA que son aplicables a diferentes situaciones. Así:

Análisis con el operador FGPOWA: para la utilización de este operador los expertos estiman los beneficios en unidades monetarias, pero sin establecer un valor preciso, dada la incertidumbre asociada al problema. Para ello se utilizan números borrosos triangulares, en los cuales se establecen unos valores mínimos (pesimista), máximo (optimista) e intermedio (realista), que facilitan la predicción cuando no se cuenta con suficiente información o herramientas para hacer una estimación acertada. El operador FGPOWA es un operador que unifica la agregación FGPA y el operador FGOWA en la misma formulación, teniendo en cuenta el grado de importancia que cada concepto tiene en la agregación.

Análisis con el operador UGPWA: en este método se utilizan números inciertos en forma de intervalos de confianza, los cuales están compuestos por un valor mínimo (pesimista), y un valor máximo (optimista). Pero a diferencia del análisis con el FGPOWA aquí las estimaciones no se hacen en

unidades monetarias sino en una escala de 0 a 1, donde 0 corresponde al más bajo de los beneficios esperados y 1 al máximo que se puede obtener. Esta herramienta es muy útil en los casos del lanzamiento de un nuevo producto o la incursión en un nuevo mercado, donde se hace muy difícil hacer una estimación real de beneficios. El UGPWA es un operador que unifica el *Uncertain Probabilistic Aggregation* y el operador UWA en la misma formulación, considerando el grado de importancia que cada concepto tiene en la agregación. Se ha utilizado también la teoría de expertos para analizar la información de una forma más general, donde se consideran las opiniones individuales dentro del grupo y luego se obtiene un resultado representativo final.

Análisis con operador ILPOWA: en este caso el análisis de la información es a través de etiquetas lingüísticas, donde las opiniones de los expertos no se establecen de forma numérica sino cualitativa, facilitando las valoraciones en casos donde la incertidumbre es muy alta y el análisis numérico es bastante complejo. También se ha incluido una variable de inducción en el análisis que permite tener en cuenta diferentes situaciones que pueden influir en las decisiones, como en el caso de factores psicológicos que afectan el comportamiento del cliente. El operador ILPOWA es un nuevo modelo de agregación, que unifica el *Linguistic Probabilistic Aggregation* (LPA) y el operador *Induced LOWA* (ILOWA) en la misma formulación, teniendo en cuenta el grado de importancia que cada concepto tiene en el análisis.

A modo de resumen, se destaca el hecho de que esta nueva metodología es muy flexible, puesto que proporciona diferentes herramientas que permiten valorar los beneficios esperados, ya sea en unidades monetarias, en una escala comparativa con valores de 0 a 1 o con etiquetas lingüísticas adaptándose a la información disponible y a las preferencias de los expertos. Asimismo, se combinan diferentes criterios de agregación con la finalidad de mejorar el proceso de toma de decisiones.

### **Agradecimientos**

Se agradece el apoyo de la Fundación MAPFRE, proyecto 099311 de la Universidad de Barcelona y PIEF-GA-2011-300062 de la Comisión Europea.

## Referencias Bibliográficas

- Beliakov, G.; Pradera, A; Calvo, T. (2007). *Aggregation functions: A guide for practitioners*. (Vol. 221). Heidelberg: Springer.
- Boj del Val, E. (2004) *Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación*. Cuadernos de la Fundación Mapfre, n. 88, p. 1–425.
- Casanovas, M. & Merigo, J. (2012). Fuzzy aggregation operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure. *Expert Systems with Applications*, v. 39, n. 8, p. 7138–7149.
- Chang, S. & Zadeh, L.A. (1972). Fuzzy mapping and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, v. 2, n. 1, p. 30–34.
- Figueira, J.; Greco, S.; Ehrgott, M. (2005). Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys. *International Series in Operations Research and Management Science*. 899-951.
- Kaufmann, A. (1988). Theory of expertons and fuzzy-logic. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 28, n. 3, p. 295–304.
- Kaufmann, A. & Gupta, M. (1985). *Introduction to fuzzy arithmetic*. Publications Van Nostrand, Rheinhold.
- Merigo, J.M. (2012). Probabilities in the OWA operator. *Expert Systems with Applications*, v. 39, n. 13, p. 11456–11467.
- Merigo, J.M. & Casanovas, M. (2010a). The fuzzy generalized OWA operator and its application in strategic decision making. *Cybernetics and Systems*, v. 41, n. 5, p. 359–370.
- Merigo, J.M. & Casanovas, M. (2010b). Decision making with distance measures and linguistic aggregation operators. *International Journal of Fuzzy Systems*, v. 12, n. 3, p. 190–198.
- Merigo, J.M. & Casanovas, M. (2011a) Induced and uncertain heavy OWA operators. *Computers & Industrial Engineering*, v. 60, n. 1, p. 106–116.

- Merigo, J.M. & Casanovas, M. (2011b). The Uncertain induced quasi-arithmetic OWA operator introduction. *International Journal of Intelligent Systems*, v. 26, n. 1, p. 1–24.
- Merigo, J.M. & Casanovas, M. (2011c). The Uncertain generalized OWA operator and its application to financial decision making. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, v. 10, n. 2, p. 211–230.
- Merigo, J.M. & Casanovas, M. (2012). Decision-making with uncertain aggregation operators using the Dempster-Shafer belief structure. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, v. 8, n. 2, p. 1037–1061.
- Merigo, J.M.; Casanovas, M.; Martinez, L. (2010). Linguistic aggregation operators for linguistic decision making based on the Dempster-Shafer theory of evidence. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, v. 18, n. 3, p. 287–304.
- Merigo, J.M.; Casanovas, M.; Xu, Y.J. (2014). Fuzzy group decision-making with generalized probabilistic OWA operators. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, v. 27, n. 2, p. 783-792.
- Merigo, J.M.; Casanovas, M.; Yang, J.B. (2014). Group decision making with expertons and uncertain generalized probabilistic weighted aggregation operators. *European Journal of Operational Research*, v. 235, n. 1, p. 215-224.
- Merigo, J. M. & Gil Lafuente, A. (2013). Induced 2-tuple linguistic generalized aggregation operators and their application in decision-making. *Information Sciences*, v. 236, p. 1–16.
- Merigo, J.M.; Gil Lafuente, A.M.; Zhou, L.G.; Chen, H.Y. (2011). Generalization of the linguistic aggregation operator and its application in decision making. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, v. 22, n. 4, p. 593–603.
- Merigo, J.M.; Gil Lafuente, A.M.; Zhou, L.G.; Chen, H.Y. (2012). Induced and linguistic generalized aggregation operators and their application in linguistic group decision making. *Group Decision and Negotiation*, v. 21, n. 4, p. 531–549.



- Moore, R. (1996). *Interval Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Torra, V. (1997). The weighted OWA operator. *International Journal of Intelligent Systems*, v. 12, n. 2, p. 153–166.
- Xu, Y.J.; Merigo, J.M.; Wang, H.M. (2012). Linguistic power aggregation operators and their application to multiple attribute group decision making. *Applied Mathematical Modelling*, v. 36, n. 11, p. 5427–5444.
- Xu, Z.S. & Da, Q.L. (2003). An overview of operators for aggregating information. *International Journal of Intelligent Systems*, v. 18, n. 9, p. 953–969.
- Yager, R.R. (1988). On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision-making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, v. 18, n. 1, p. 183–190.
- Yager, R.R. (1993). Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 59, n. 2, p. 125–148.
- Yager, R.R. (1998). Including importances in OWA aggregations using fuzzy systems modeling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 6, n. 2, p. 286–294.
- Yager R.R.; Filev, D.P. (1999). Induced ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, v. 29, n. 2, p. 141–150.
- Yager, R.R.; Kacprzyk, J.; Beliakov, G. (2011). *Recent developments on the ordered weighted averaging operators: Theory and practice*. Springer-Verlag, Berlin.
- Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, n. 3, p. 338–353.
- Zadeh, L.A. (1975a). The concept of a linguistic variable and its application to approximate Reasoning. *Information Sciences*, v. 8, n. 3, p. 199–249.
- Zadeh, L.A. (1975b). Introduction to theory of fuzzy sets. *International Journal of General Systems*, v. 2, n. 2, p. 120–121.

- Zavadskas, E.K.; Turskis, Z. (2011). Multiple criteria decision making (MCDM) methods in economics: An overview. *Technological and Economic Development of Economy*, v. 17, n. 2, p. 397–427.
- Zeng, S.; Merigó, J.M.; Su, W. (2013). The uncertain probabilistic OWA distance operator and its application in group decision making. *Applied Mathematical Modelling*, v. 37, n. 9, p. 6266–6275.
- Zhou, L.G.; Chen, H.Y.; Liu, J.P. (2012). Generalized power aggregation operators and their applications in group decision making. *Computers & Industrial Engineering*, v. 62, n. 4, p. 989–999.

**Capítulo 9**  
**Conclusiones**



## 9.1. Conclusiones Generales

Las contribuciones de este estudio se basan en la aplicación de diferentes herramientas de lógica difusa en modelos de tomas de decisiones aplicados a la gestión del riesgo operacional y otro tipo de problemas relacionados con el sector asegurador. El criterio principal de utilizar lógica difusa para los modelos, se fundamenta en que las entradas de información para muchos procesos de decisión son vagas e imprecisas y requieren de las opiniones de expertos para el tratamiento de la incertidumbre. Dichos juicios emitidos por expertos tienen un alto componente subjetividad y para su tratamiento se requiere de una visión diferente de la lógica binaria de la teoría clásica de conjuntos. En estos casos la lógica difusa permite desarrollar modelos con grados intermedios de pertenencia a los conjuntos y aceptar el lenguaje de las opiniones que contiene afirmaciones vagas y subjetivas.

En el campo de la lógica difusa se han desarrollado muchas las herramientas que se pueden utilizar para el tratamiento de la incertidumbre y procesos de toma de decisiones. En este estudio se han utilizado principalmente la teoría de los efectos olvidados (Kaufmann & Gil Aluja, 1988) para el análisis de relaciones de incidencia directas e indirectas y el operador OWA (Yager, 1988), al igual que algunas de sus extensiones como el *Induced OWA (IOWA) operator* (Yager & Filev, 1999), el *Generalized OWA (GOWA) operator* (Yager, 2004), el *OWA Distance (OWAD) operator* (Merigó & Gil-Lafuente, 2010), el *Induced OWA Distance (IOWAD) operator* (Merigó & Casanovas, 2011), el *Uncertain OWA (UOWA) operator* (Xu & Da, 2002), el *Uncertain Probabilistic OWA (UPOWA) operator*, el *Heavy OWA (HOWA) operator* (Yager, 2002), *Fuzzy Generalized Probabilistic OWA (FGPOWA) operator* (Merigó et. al., 2014), *Uncertain Generalized Probabilistic Weighted Averaging (UGPWA) operator* (Merigó et al., 2014) e *Induced Linguistic Probabilistic Ordered Weighted Averaging (ILPOWA) operator* (Merigó, et. al., 2014) entre otros. La aplicación de estas herramientas se enfocó en primer lugar hacia la gestión del riesgo operacional con la propuesta de un modelo para el análisis cualitativo de causas y efectos directos e indirectos y otro modelo de toma de decisiones de priorización de riesgos, y en segundo lugar con diferentes modelos de toma de decisiones aplicadas al sector seguros en problemas de niveles de reaseguramiento, selección de proveedores de seguros y estrategias de precios para la prima comercial. A continuación, se presentan las conclusiones de cada uno de los

capítulos y contribuciones para mostrar con mayor detalle las aportaciones de esta tesis.

## **9.2. Conclusiones por Capítulos**

### **Conclusiones de los capítulos 1 y 2.**

En estos dos primeros capítulos se establecen las bases que explican de forma preliminar el contenido de esta tesis doctoral. En primer lugar, se describe en la introducción las motivaciones, objetivos, metodología y aportaciones de la investigación y en segundo lugar se presenta un estado de la cuestión desde el punto de vista bibliométrico que establece información relevante sobre los principales temas del estudio. Por otro lado, también se presenta los conceptos básicos de los operadores OWA y el riesgo operacional, que permiten comprender la problemática y el alcance de las aportaciones posteriores.

### **Conclusiones del capítulo 3**

A partir de la teoría de los efectos olvidados, se propone un nuevo modelo que recopila opiniones de diferentes expertos para establecer relaciones de incidencia directas e indirectas. Las entradas de información obtenidas de los expertos en este modelo, son agregadas con el OWA *operator* y de esta forma mejorar el análisis al poder involucrar la actitud optimista o pesimista de los decisores, para posteriormente aplicar el modelo de efectos olvidados. Este artículo está aceptado para publicación en *Kybernetes: The International Journal of Cybernetics, Systems and Management Sciences* (factor de impacto JCR 2016: 0.811).

### **Conclusiones del capítulo 4**

En este capítulo se presenta una nueva extensión del OWA operador denominado *induced generalized OWA multi-attribute utility theory (IGOWA-MAUT) operator*. Con la propuesta de este nuevo operador se aprovechan las bondades tanto de la teoría de la utilidad multiatributo como de los operadores OWA y de esta manera mejorar el tratamiento de la información de ambos modelos en problemas de incertidumbre. Finalmente se presenta una aplicación ilustrativa de priorización de riesgos para ejemplificar el modelo en un contexto de gestión del riesgo operacional.

## **Conclusiones del capítulo 5**

En la gestión de riesgos, una de las formas de mitigar las posibles pérdidas es a través de la contratación de seguros. En el caso de aseguramiento para empresas del sector asegurador, este tipo de decisiones conlleva a un reaseguramiento. En este trabajo se presenta un nuevo modelo para evaluar estrategias de nivel de reaseguramiento a partir de diferentes criterios importantes en la decisión. Dicho modelo involucra la utilización de funciones de membresía difusas, medidas de distancia, variables de inducción y el operador OWA. Finalmente, se presenta una aplicación ilustrativa de un caso de decisiones multicriterio en reaseguros. Este artículo está publicado en *Cybernetics and Systems Journal* (factor de impacto JCR 2016: 1.434).

## **Conclusiones del capítulo 6**

La decisión de mitigar el impacto de una posible pérdida con la contratación es clave en la gestión de riesgos. Sin embargo, los siniestros que puedan generar cuantiosas pérdidas requieren establecer ciertas garantías en la contratación de empresas aseguradoras que permitan cumplir con las condiciones establecidas. En este capítulo se presenta el operador *Multi-Person Multi-Criteria Induced OWA Distance (MP-MC-IOWAD) operator*, el cual combina variables de inducción, medidas de distancia y el OWA operator en sistemas multi-expertos para decisiones multi-criterio y se muestra la aplicabilidad con un ejemplo de selección de proveedores para un caso particular de empresas aseguradoras. Este artículo está en proceso de evaluación en *Group Decision and Negotiation Journal* (factor de impacto JCR 2016: 1.434)

## **Conclusiones del capítulo 7**

Las decisiones de estrategias de precios en seguros se conciben desde los cálculos estadísticos de siniestralidad para los diferentes perfiles de riesgo. Sin embargo, una decisión muy importante al establecer la prima comercial es el nivel de beneficios, ya que las fluctuaciones en la demanda de seguros afectan la cartera de seguros. En este capítulo se presenta un algoritmo para evaluar la estrategia de precios utilizando diferentes extensiones del operador OWA y números intervalo, valorando posibles escenarios económicos con opiniones de expertos. Este artículo está

publicado en *Journal of Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research* (factor de impacto JCR 2016: 0.299).

## **Conclusiones del capítulo 8**

Los operadores OWA ofrecen una amplia gama de extensiones, que permiten analizar las situaciones en función de diferentes tipos de información. En este artículo se analiza un problema de estrategia de precios en seguro utilizando diferentes herramientas de lógica difusa con el *Fuzzy Generalized Probabilistic OWA (FGPOWA) operator* (Merigó et al., 2014), *Uncertain Generalized Probabilistic Weighted Averaging (UGPWA) operator* (Merigó et al., 2014) e *Induced Linguistic Probabilistic Ordered Weighted Averaging (ILPOWA) operator* (Merigó, et al., 2014). Al analizar el mismo problema con diferentes operadores y tipos de información se demuestra la capacidad que tiene el operador OWA como técnica para adaptarse a diferentes formas de expresar juicios de expertos en el análisis de las alternativas.

### **9.3. Futuras Líneas de Investigación**

Desde la incursión de la lógica difusa en el análisis de problemas aplicados a las ciencias sociales, son muchos los avances teóricos y prácticos que se han presentado. En la literatura, esto se evidencia con la creciente aplicación de nuevos modelos de lógica multivalente aplicados a modelos de toma de decisiones. Las aportaciones presentadas en este estudio demuestran el potencial que se tiene en este campo para desarrollar múltiples aplicaciones no sólo en la gestión del riesgo operacional y seguros, sino en diferentes tipos de problemas del campo de la economía y empresa. También se pueden explorar otras técnicas de la inteligencia artificial como: las redes neuronales, los algoritmos genéticos, sistemas multi-agente o aprendizaje automático.

En cuanto a las contribuciones que se han llevado a cabo en esta tesis, es importante destacar en el caso de la teoría de la utilidad multiatributo, en la cual se propone un nuevo operador OWA denominado *Induced Generalized OWA Multi-Attribute Utility Theory OWA (IGOWA-MAUT) operator*. A partir de este operador se pueden proponer nuevas extensiones utilizando el modelo MAUT multiplicativo, como también combinándolo con números inciertos, etiquetas lingüísticas, teoría de expertones, medidas de distancias y otras técnicas.



En el caso de la teoría de los efectos olvidados, en este estudio se propuso un nuevo modelo causal que incluye el operador OWA en la agregación de relaciones de incidencia obtenidas de diferentes fuentes, principalmente cuando se utiliza el juicio de expertos. Sin embargo, en la teoría de los operadores OWA se encuentran muchas herramientas propuestas en formas de extensiones que puede ser interesantes en el desarrollo de nuevos modelos para obtener las relaciones de causalidad directas e indirectas, y a partir de ellas robustecer el modelo de efectos olvidados.

Desde el punto de vista de la gestión del riesgo operacional, al ser un tipo de riesgo con muchas dificultades en su medición. La necesidad de seguir trabajando en nuevos modelos desde el campo de la lógica difusa es necesaria, ya que en la literatura son pocos los autores que han tratado este tipo de problema más allá de los métodos estadísticos tradicionales para la cuantificación del riesgo. Sin embargo, la gestión del riesgo operativo requiere que se genere una cultura organizacional adecuada para evitar o mitigar los impactos negativos que se produzcan, ya que las pérdidas no siempre son monetarias, sino que de manera importante pueden ser reputacionales.

En el sector asegurador los modelos de toma de decisiones son muy frecuentes, dada la complejidad de los productos que se ofrecen y el tratamiento de los siniestros. Por tanto, los modelos que se han expuesto en el estudio abren una gran oportunidad para seguir investigando y presentar alternativas de modelos con una amplia variedad de herramientas de lógica difusa y en particular con la utilización del operador OWA, que permitan mejorar su gestión desde diferentes campos del conocimiento. También se pueden desarrollar programas informáticos con los modelos propuestos que soporten las decisiones empresariales.



## Referencias<sup>15</sup>

- Aliev, R., Pedrycz, W., Fazlollahi, B., Huseynov, O. H., Alizadeh, A.V., & Guirimov, B. G. (2012). Fuzzy logic-based generalized decision theory with imperfect information. *Information Sciences*, 189, 18–42.
- Banco Internacional de Pagos. (2006). *Convergencia internacional de medidas y pagos de Capital*.
- Beliakov, G., Sola, H.B., & Sánchez, T.C. (2015). A practical guide to averaging functions. (Vol. 329). Springer.
- Casanovas, M., Torres-Martínez, A., & Merigó, J.M. (2015). Decision making processes of non-life insurance pricing using fuzzy logic and OWA operators. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, 49(2), 169-188.
- Casanovas, M., Torres-Martínez, A., & Merigó, J.M. (2016). Decision Making in Reinsurance with Induced OWA Operators and Minkowski Distances. *Cybernetics and Systems*, 47(6), 460-477.
- Casanovas, M., Torres-Martínez, A., & Merigó, J.M. (2016). Decision Making in Reinsurance with Induced OWA Operators and Minkowski Distances. *Cybernetics and Systems*, 47(6), 460–477.
- Chaudhury, M. (2010). A review of the key issues in operational risk capital modeling. *The Journal of Operational Risk*, 5(3), 37.
- Chen, S.-M., & Niou, S.-J. (2011). Fuzzy multiple attributes group decision-making based on fuzzy induced OWA operators. *Expert Systems with Applications*, 38(4), 4097–4108.
- Chen, Z.S., Chin, K.S., Li, Y.L., & Yang, Y. (2016). On Generalized Extended Bonferroni Means for Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 24(6), 1525–1543.
- Chiclana, F., Herrera-Viedma, E., Herrera, F., & Alonso, S. (2007). Some induced ordered weighted averaging operators and their use for solving group decision-making problems based on fuzzy preference relations. *European Journal of Operational Research*, 182(1), 383–399.
- Collins, T.R., Rossetti, M.D., Nachtmann, H.L., & Oldham, J. R. (2006). The use of multi-attribute utility theory to determine the overall best-in-class

---

<sup>15</sup> Las referencias de las contribuciones se presentan al final de cada capítulo. En esta sección se presentan otras referencias bibliográficas que corresponden a los capítulos de introducción, estado de la cuestión y conclusiones.

- performer in a benchmarking study. *Benchmarking: An International Journal*.
- Ferreras Salagre, A. (2008). *Riesgo operacional : enfoque de distribución de pérdidas en la práctica*. Madrid : Consejo Económico y Social.
- Gao, J., Li, M., & Liu, H. (2015a). Generalized ordered weighted utility averaging-hyperbolic absolute risk aversion operators and their applications to group decision-making. *European Journal of Operational Research*, 243(1), 258–270.
- Gao, J., Li, M., & Liu, H. (2015b). Generalized ordered weighted utility proportional averaging-hyperbolic absolute risk aversion operators and their applications to group decision-making. *Applied Mathematics and Computation*, 252, 114–132.
- Gil-Lafuente, A.M., González, F., & Flores, B. (2015). Teoría de los efectos olvidados en la incidencia de la actividad económica en la calidad de vida de los habitantes y cuantificación de los efectos para un reequilibrio territorial, *Revista de Investigación en Ciencias y Administración*, 10(19), 105-122.
- Gil Aluja, J. (1999). *Elements for a theory of decision in uncertainty*. (Vol. 32). Springer Science & Business Media.
- Herrera, F., Herrera-Viedma, E., & Verdegay, J. L. (1996). Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 79(2), 175–190.
- Huang, I. B., Keisler, J., & Linkov, I. (2011). Multi-criteria decision analysis in environmental sciences: Ten years of applications and trends. *Science of The Total Environment*, 409(19), 3578–3594.
- Igoulalene, I., Benyoucef, L., & Tiwari, M.K. (2015). Novel fuzzy hybrid multi-criteria group decision making approaches for the strategic supplier selection problem. *Expert Systems with Applications*, 42(7), 3342–3356.
- Karsak, E.E., & Dursun, M. (2015). An integrated fuzzy MCDM approach for supplier evaluation and selection. *Computers & Industrial Engineering*, 82, 82–93.
- Kaufmann, A., & Gil Aluja, J. (1988). *Modelos para la investigación de efectos olvidados*. (Milladoiro, Ed.).
- Keeney, R.L and Raiffa, H. (1976). Decision with multiple objectives. *John Wiley*.

- Keeney, R.L. (1982). Feature Article—Decision Analysis: An Overview. *Operations Research*, 30(5), 803–838.
- Li, D.F. (2010). Multiattribute decision making method based on generalized OWA operators with intuitionistic fuzzy sets. *Expert Systems with Applications*, 37(12), 8673–8678.
- Liu, P., Chen, Y., & Chu, Y. (2014). Intuitionistic uncertain linguistic weighted Bonferroni OWA operator and its application to multiple attribute decision making. *Cybernetics and Systems*, 45(5), 418–438.
- Liu, P., & Wang, Y. (2016). Interval neutrosophic prioritized OWA operator and its application to multiple attribute decision making. *Journal of Systems Science and Complexity*, 29(3), 681–697.
- Maqueda Lafuente, F.J., Gil Lafuente, A.M., Guzman-Parra, V., & Gil Lafuente, J. (2013). Key factors for entrepreneurial success. *Management Decision*, 51(10), 1932–1944.
- Martorell-Cunill, O., Gil-Lafuente, A. M., Socias Salvà, A., & Mulet Forteza, C. (2014). The growth strategies in the hospitality industry from the perspective of the forgotten effects. *Computational and Mathematical Organization Theory* 20(2), 195-210.
- Merigo, J.M. & Gil Lafuente, A. (2009). The induced generalized OWA operator. *Information Sciences*, 179(6), 729–741.
- Merigó, J. M. (2011). A unified model between the weighted average and the induced OWA operator. *Expert Systems with Applications*, 38(9), 11560–11572.
- Merigo, J.M., & Casanovas, M. (2011). A New Minkowski Distance Based on Induced Aggregation Operators. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 4(2), 123–133.
- Merigó, J.M., & Casanovas, M. (2010). The fuzzy generalized OWA operator and its application in strategic decision making. *Cybernetics and Systems*, 41(5), 359–370.
- Merigó, J.M., & Casanovas, M. (2011a). Decision-making with distance measures and induced aggregation operators. *Computers & Industrial Engineering*, 60(1), 66–76.
- Merigó, J.M., & Casanovas, M. (2011b). Induced and uncertain heavy OWA operators. *Computers & Industrial Engineering*, 60(1), 106–116.
- Merigó, J.M., Casanovas, M., & Palacios-Marqués, D. (2014). Linguistic group decision making with induced aggregation operators and

- probabilistic information. *Applied Soft Computing Journal*, 24, 669-678
- Merigó, J.M., Casanovas, M., & Xu, Y. (2014). Fuzzy group decision-making with generalized probabilistic OWA operators. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 27(2) 783-792.
- Merigó, J.M., Casanovas, M., & Yang, J.B. (2014). Group decision making with expertons and uncertain generalized probabilistic weighted aggregation operators. *European Journal of Operational Research*, 235(1), 215–224.
- Merigo, J.M., & Gil-Lafuente, A.M. (2013). A Method for Decision Making Based on Generalized Aggregation Operators. *International Journal of Intelligent Systems*, 28(5), 453–473.
- Merigó, J.M., & Gil-Lafuente, A.M. (2010). New decision-making techniques and their application in the selection of financial products. *Information Sciences*, 180(11), 2085–2094.
- Merigó, J.M., & Gil-Lafuente, A.M. (2013). Induced 2-tuple linguistic generalized aggregation operators and their application in decision-making. *Information Sciences*, 236, 1–16.
- Merigo, J.M., Gil-Lafuente, A.M., Zhou, L., & Chenm, H. (2011). Generalization of the linguistic aggregation operator and its application in decision making. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 22(4), 593–603.
- Merigó, J. M., & Yager, R. R. (2013). Generalized moving averages, distance measures and OWA operators. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 21(4), 533–559.
- Merigo, J.M., & Wei, G. (2011). Probabilistic aggregation operators and their application in uncertain multi-person decision-making. *Technological and Economic Development of Economy*, 17(2), 335–351.
- Merigo, J.M., Xu, Y., & Zeng, S. (2013). Group decision making with distance measures and probabilistic information. *Knowledge-Based Systems*, 40, 81–87.
- Merigó Lindahl, J. M. (2008). Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación a los métodos de decisión. Universidad de Barcelona.
- Sanayei, A., Farid Mousavi, S., Abdi, M.R., & Mohaghar, A. (2008). An integrated group decision-making process for supplier selection and order allocation using multi-attribute utility theory and linear programming. *Journal of the Franklin Institute*, 345(7), 731–747.

- Shevchenko, P.V. (2010). Calculation of aggregate loss distributions. *Journal of Operational Risk*, 5(2), 3–40.
- Stone, E. R., Yates, A.J., & Caruthers, A.S. (2002). Risk Taking in Decision Making for Others Versus the Self1. *Journal of Applied Social Psychology*, 32(9), 1797–1824.
- Su, W., Zhang, C., & Zeng, S. (2015). Uncertain Induced Heavy Aggregation Distance Operator and its Application to Decision Making. *Cybernetics and Systems*, 46(3–4), 172–187.
- Tesfamariam, S., Sadiq, R., & Najjaran, H. (2010). Decision Making Under Uncertainty - An Example for Seismic Risk Management. *Risk Analysis*, 30(1), 78–94.
- Vizuet Luciano, E., Gil Lafuente, A.M., García González, A., & Boria Reverter, S. (2013). Forgotten effects of corporate social and environmental responsibility. *Kybernetes*, 42(5), 736–753.
- Wallenius, J., Dyer, J. S., Fishburn, P. C., Steuer, R. E., Zionts, S., & Deb, K. (2008a). Multiple Criteria Decision Making, Multiattribute Utility Theory: Recent Accomplishments and What Lies Ahead. *Management Science*, 54(7), 1336–1349.
- Wang, F., Zeng, S., & Zhang, C. (2013). A Method Based on Intuitionistic Fuzzy Dependent Aggregation Operators for Supplier Selection. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 1–9.
- Wang, T., Liu, J., Li, J., & Niu, C. (2016). An integrating OWA–TOPSIS framework in intuitionistic fuzzy settings for multiple attribute decision making. *Computers & Industrial Engineering*, 98, 185–194.
- Xian, S., & Sun, W. (2014). Fuzzy Linguistic Induced Euclidean OWA Distance Operator and its Application in Group Linguistic Decision Making. *International Journal of Intelligent Systems*, 29(5), 478–491.
- Xu, Y., Merigó, J. M., & Wang, H. (2012). Linguistic power aggregation operators and their application to multiple attribute group decision making. *Applied Mathematical Modelling*, 36(11), 5427–5444.
- Xu, Y., Wang, H., & Merigó, J.M. (2014). Intuitionistic fuzzy Einstein Choquet integral operators for multiple attribute decision making. *Technological and Economic Development of Economy*, 20(2), 227–253.
- Xu, Z.S. (2006). Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making. *Information Fusion*, 7(2), 231–238.

- Xu, Z.S. (2004). EOWA and EOWG operators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12(6), 791–810.
- Xu, Z.S., & Da, Q.L. (2002). The uncertain OWA operator. *International Journal of Intelligent Systems*, 17(6), 569–575.
- Yager, R.R. (1988). On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision-Making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18(1), 183–190.
- Yager, R.R. (1992). On generalized measures of realization in uncertain environments. *Theory and Decision*, 33(1), 41–69.
- Yager, R.R. (1993). Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59(2), 125–148. 1
- Yager, R.R. (1994). On Weighted Median Aggregation. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 4, 401.
- Yager, R.R. (1996a). Constrained OWA aggregation. *Fuzzy Sets and Systems*, 81(1), 89–101.
- Yager, R.R. (1996b). Quantifier guided aggregation using OWA operators. *International Journal of Intelligent Systems*, 11(1), 49–73.
- Yager, R.R. (2002). Heavy OWA Operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1(4), 379–397.
- Yager, R.R. (2003). E-Z OWA weights. In *Proceedings 10th International Fuzzy Systems Association World Congress* (pp. 39–42). Istanbul.
- Yager, R.R. (2004). Generalized OWA Aggregation Operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3(1), 93–107.
- Yager, R.R. (2009). On generalized Bonferroni mean operators for multi-criteria aggregation. *International Journal of Approximate Reasoning*, 50(8), 1279–1286.
- Yager, R.R., & Filev, D.P. (1999). Induced ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 29(2), 141–150.
- Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.
- Zavadskas, E. K., & Turskis, Z. (2011). Multiple criteria decision making (MCDM) methods in economics: an overview. *Technological and Economic Development of Economy*, 17(2), 397–427.



- Zeng, S., Merigó, J.M., Palacios-Marqués, D., Jin, H., & Gu, F. (2017). Intuitionistic fuzzy induced ordered weighted averaging distance operator and its application to decision making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 32(1), 11–22.
- Zeng, S., Su, W., & Zhang, C. (2016). Intuitionistic fuzzy generalized probabilistic ordered weighted averaging operator and its application to group decision making. *Technological and Economic Development of Economy*, 22(2), 177–193.
- Zhou, L.G., Chen, H.Y., Merigo, J.M., & Gil Lafuente, A. (2012). Uncertain generalized aggregation operators. *Expert Systems with Applications*, 39(1), 1105–1117.
- Zhou, L., Chen, H., & Liu, J. (2012). Generalized power aggregation operators and their applications in group decision making. *Computers & Industrial Engineering*, 62(4), 989–999.



## Apéndice



## **Aportaciones Adicionales**

### **Anexo 1.**

Como parte de esta tesis se presentó en *International Conference on Modeling and Simulation in Engineering, Economics and Management (MS'2016)* en Santiago de Chile (Chile), de 20 – 22 de enero de 2016 una ponencia titulada “*Application of the Forgotten Effects Theory to the Qualitative Analysis of the Operational Risk Events*”

### **Anexo 2.**

Carta de aceptación del artículo “*Multiexpert Causality Model with OWA Aggregation Operators*” en la revista *Kybernetes: The International Journal of Cybernetics, Systems and Management Sciences*.

Durante el desarrollo de la tesis doctoral también he tenido la oportunidad de participar como investigador asistente en diferentes proyectos y coautor en diferentes publicaciones que han enriquecido mis competencias investigativas y las contribuciones que se presentaron en el desarrollo de la tesis. Dichos proyectos y sus publicaciones son:

### **Anexo 3**

Proyecto: Inteligencia computacional en la gestión del riesgo asegurador.

Entidad financiadora: Fundación Mapfre.

Investigadores: Montserrat Casanovas Ramón (Universidad de Barcelona), José María Merigó Lindahl (Universidad de Chile) y Agustín Torres Martínez (Universidad de Barcelona)

Publicación: Libro: Inteligencia computacional en la gestión del riesgo asegurador: operadores de agregación OWA en procesos de tarificación (ISBN: 978-84-9844-474-2)

### **Anexo 4**

Proyecto: Cuba a la luz de la nueva ley de inversión extranjera. Retos y oportunidades para la economía catalana.

Entidad financiadora: Observatorio de Economía Internacional de la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras de España.

Investigadores: Anna María Gil-Lafuente (Universidad de Barcelona), Agustín Torres Martínez (Universidad de Barcelona), Víctor Gerardo Alfaro García (Universidad de Barcelona), Lourdes Soto Anido (Universidad de la Habana) e Irene García Rondón (Universidad de la Habana)

Publicación: Libro: Cuba a la luz de la nueva ley de inversión extranjera. Retos y oportunidades para la economía catalana. (ISBN: 978-84-608-6018-1)

## Anexo 1

### **Application of the Forgotten Effects Theory to the Qualitative Analysis of the Operational Risk Events**

**Anna Maria Gil Lafuente<sup>1</sup>, Agustín Torres Martínez<sup>1</sup>, Aras Keropyan<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Department of Business Administration, University of Barcelona,

Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain

[atorresmartinez@ub.edu](mailto:atorresmartinez@ub.edu) [amgil@ub.edu](mailto:amgil@ub.edu)

<sup>2</sup>GRIT-EAE Research Group

EAE Business School

[aras.keropyan@campus.eae.es](mailto:aras.keropyan@campus.eae.es)

**Abstract.** The second agreement of the Committee on Banking Supervision (Basel II) represents a challenge for financial institutions, risk managers and researchers in terms of operational risk management, due to the complexity of developing effective systems to identify, measure, monitor, control and mitigate this risk. This requires performing a lost scenario analysis with expert judgment to decide the priority actions in order to manage properly the different events of loss associated to the operational risk, as well as taking measures derived from loss distributions. In this paper, we have used the forgotten effects theory, which allows us to determine the causal direct and indirect relationships between the causes and effects of the operational losses of a financial institution, throughout the opinions of a group of experts.

**Keywords:** Operational risk, forgotten effects theory, Fuzzy logic

## **Introduction**

In the last years, the way of management the risk has changed a lot, not only because of the guidelines of the Basel agreements and the regulation of the economic entities in each country, but also by other factors such as globalization and technological sophistication of the banking operations and financial markets. On the other hand, several publicly known problems such as; corporate failures, bankruptcies of entities and corruption have created a great concern about the exposure of the risks in general and particularly the operational risk.

Basel II<sup>16</sup> defined a framework for quantifying the operational risk, suggesting that the calculation of capital requirements related to operational risk are carried out by: Basic Indicator Approach, Standardized Approach, Advanced Measurement Approach (AMA). The first two methods are calculated in a simplified way applying to the average gross annual income the capital requirement. In the third method, the calculation is made on the actual exposure of the institution to the operational risk. In the AMA method, both statistical models and scenario analysis are taken into account, in the opinion of the experts plays an important role to set the risk and define the improvement actions.

For the analysis of qualitative information, there are different tools such as self-assessment questionnaires, risk maps, KRI risk indicators, scorecards and scenario analysis which are mainly adequate to identify potential exposure risks. Other tools for the analysis of the information in uncertain environments can be realized by fuzzy logic techniques.

The forgotten effects theory is a very useful tool for the analysis of complex problems, which requires additional analysis a part from determining the incidence relations between causes and effects to see the interrelations between the causes with the causes and the effects with the effects in order to obtain the indirect relationships that cannot be detected in the first analysis. This technique has been used by several researchers in different fields such as: hospitality industry [1], entrepreneurship [2], social

---

<sup>16</sup> It is the second agreement of the Basel Committee on Banking Supervision published in 2004 with the aim of establishing necessary capital requirements to protect the institutions against financial and operational risks.



responsibility and environment [3], economic growth and social welfare [4], among others.

The objective of this study is to apply the forgotten effects theory in the qualitative analysis of the operational risk with the opinion of the experts, and seeking the indirect relation impacts between different types of events and operational losses. This approach will enable to improve strategies to mitigate the impact of this type of risks in financial institutions.

### **Operational Risk**

The Basel II Committee defines the operational risk as the:

“Risk of loss resulting from inadequate or failed internal processes, people and systems or from external events.”

This definition includes the legal risk<sup>17</sup>, but excludes the strategic<sup>18</sup> and reputational risks<sup>19</sup>

On the other hand, Basel II defines the event type classification and loss effect types through the loss related to the operational risk. Following, in tables 1 and 2 these definitions are given:

---

<sup>17</sup> Legal Risk: the possibility of being punished, fined or forced to pay punitive damages resulting from supervisory actions or private agreements between the parties.

<sup>18</sup> Strategic Risk: the possibility of choosing a wrong strategy that may affect the results.

<sup>19</sup> Reputational risk: the possibility of causing loss when the entity's name is affected by the decrease of the confidence of the whole institution.

**Table 1. Loss Event Type Classification**

| <b>Category</b>                            | <b>Definition</b>  |
|--|--|
| Internal fraud                             | Losses due to acts of a type intended to defraud, misappropriate property or circumvent regulations, the law or company policy, excluding diversity/discrimination events, which involves at least one internal party. |
| External fraud                             | Losses due to acts of a type intended to defraud, misappropriate property or circumvent the law, by a third party  |
| Employment Practices and Workplace Safety  | Losses arising from acts inconsistent with employment, health or safety laws or agreements, from payment of personal injury claims, or from diversity / discrimination events  |
| Clients, Products & Business Practices     | Losses arising from an unintentional or negligent failure to meet a professional obligation to specific clients (including fiduciary and suitability requirements), or from the nature or design of a product.         |
| Damage to Physical Assets                  | Losses arising from loss or damage to physical assets from natural disaster or other events.   |
| Business Disruption and System Failures    | Losses arising from disruption of business or system failures  |
| Execution, Delivery and Process Management | Losses from failed transaction processing or process management, from relations with trade counterparties and vendors  |

Source: QIS 2 - Operational Risk Loss Data. Bank for International Settlements (BIS) (2001) [5]

**Table 2. Loss Effect Types**

| <b>Category</b>          | <b>Definition</b>  |
|--------------------------|--|
| Legal Liability          | Judgments, settlements and other legal costs   |
| Regulatory Action        | Fines or the direct payment of any other penalties, such as license revocations.   |
| Loss or Damage to Assets | Direct reduction in value of physical assets due to some kind of accident (e.g., neglect, accident, fire, earthquake).   |
| Restitution              | Payments to third parties on account of operational losses for which the bank is legally responsible.  |
| Loss of Recourse         | Losses experienced when a third party does not meet its obligations to the bank, and which are attributable to an operational mistake or event (i.e., which could have been avoided even though the counterparty refused or was unable to pay) |
| Write-down               | Direct reduction in the value of assets due to theft, fraud, unauthorized activity or market or credit losses arising as a result of operational events  |

Source: QIS 2 - Operational Risk Loss Data. Bank for International Settlements (BIS) (2001) [5]

The losses associated with this type of risk can arise from failures of processes, in the technology, in the performance of people, and also due to the occurrence of extreme external events. For its evaluation, normally following two variables are used:

The frequency or the probability of occurrence of a risk event, which consists of the detected number of causal risk events.

The severity or importance of the impact of risk events on the results or assets of the company.

These variables are fundamental to quantify the losses using statistical models. However, the identification of operational risk involves a self-evaluation process and diagnosis that may be contributed by internal audits, being very useful qualitative tools to identify and monitor risks.

### **Proposed Model**

From extensive and deep studies on the incidence or causal relationships that take place at all levels of the natural or social structures, the *Forgotten Effects Theory* [6] is developed. From this theory some models have been built which allow obtaining all the direct and indirect causality relations, recovering those elements which initially could have been *forgotten*, totally or partially. Despite the existence of a good control system, there is always the possibility of not considering or forgetting, either voluntarily or involuntarily some incidence relationships which are not always explicit, evident or viewable, and usually they are not perceived directly. It is common that these incidence relationships remain existing and hidden over effects, and provoked by the accumulation of causes.

The incidence concept [7] can be associated to the function idea. Precisely, in all processes of sequential nature, where incidents are transmitted in chains, it is usual to ignore, voluntarily or involuntarily, some stages. Each forgetfulness behaves as a side effect and rebounds on the whole network of incidence relationships, being a kind of combinatorial process.

We start with our approach [8] with the existence of indirect relationship, which means, a cause-effect matrix defined by two sets of elements:

$A = \{a_i / i = 1, 2, \dots, n\}$ , that behave as causes

$B = \{b_j / j = 1, 2, \dots, m\}$ , that behave as effects

and a causality relation matrix  $M$  defined by:

$$[M] = \left\{ \mu_{a,b_j} \in [0, 1] / i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m \right\}$$

being  $\mu_{a_i, b_j}$  membership characteristic functions of each of the array elements  $[M]$  (formed by the corresponding rows of the matrix elements  $A$  -causes- and the corresponding columns of the matrix elements  $B$  -effects-).

By this way, we can say that the  $[M]$  matrix is composed of the estimations in relation to all the effects that the elements of the set  $A$  prosecute on the elements of the set  $B$ .

The desired objective is to obtain a new matrix that reflects both direct and indirect causal relationships, called as the second-generation relationships.

To achieve this objective, it is necessary to establish the mechanism that will make possible to represent the fact that different causes may have effects on themselves and, at the same time, take into account that some certain effects may also have incidents on themselves. For this reason, it will be necessary to build two additional causal relationships, which will gather the possible effects arising from causes related to each other, on one hand, and effects between each other. These two auxiliary matrices are defined as following:

$$[A] = \{ \mu_{a_i, a_j} \in [0, 1] / i, j = 1, 2, \dots, n \}$$

$$[B] = \{ \mu_{b_i, b_j} \in [0, 1] / i, j = 1, 2, \dots, m \}$$

Both  $[A]$  and  $[B]$  matrixes are square and reflexive but they are not symmetric.

The obtained result by integrating  $[M]$ ,  $[A]$  and  $[B]$  matrices will be a new matrix shown by  $[M^*]$  which collects incidents between causes and effects of the first and second generation, i.e., the initial causal relationships to which the potential impact of any other cause or / and any effect is added.

On the other hand, it is acceptable that the difference between the effects matrix of the first and second generation and the initial direct impact matrix will allow understanding the extent of some causal relationships that have been forgotten or avoided:

$$[O] = [M^*] - [M]$$

It is also possible to know, from the degree of ignoring any incident, the element (either cause or effect) that makes liaison.

This means that the secondary implications of some incidents that have not been considered or taken into account in the right intensity, can lead to some erroneous actions or at least poorly estimated.

### **Application of the Model**

The model of operational risk qualitative analysis is applied in the Retail Banking business line, to a financial institution taking the following variables explained in section 2:

#### **Operational risk events variables:**

C1: Internal fraud.

C2: External fraud.

C3: Employment Practices and Workplace Safety.

C4: Clients, Products & Business Practices.

C5: Damage to Physical Assets.

C6: Business Disruption and System Failures.

C7: Execution, Delivery and Process Management.

#### **Types of operational risk losses variables:**

E1: Legal Liability.

E2: Regulatory Action.

E3: Loss or Damage to Assets.

E4: Restitution.

E5: Loss of Recourse.

E6: Write-down.

To analyze the relationships between these variables, the following semantic scale has been used:

0: Without incidence

0.1: Virtually without incidence

0.2: Almost without incidence

0.3: Very weak incidence

0.4: Weak incidence

0.5: Average incidence

0.6: Substantial incidence

0.7: Sufficient incidence

0.8: Strong incidence

0.9: Very Strong incidence

1: The highest incidence

A group of five experts have estimated the impacts between these variables. The opinion of the experts has been taken into account with equal weight with the following results:

**Table 3. Estimated Incidences between Causes and Effects [M]**

| $\curvearrowright$ | e <sub>1</sub> | e <sub>2</sub> | e <sub>3</sub> | e <sub>4</sub> | e <sub>5</sub> | e <sub>6</sub> |
|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| c <sub>1</sub>     | 0,8            | 0,9            | 0,3            | 0,9            | 0,7            | 0,9            |
| c <sub>2</sub>     | 0,7            | 0,5            | 0,8            | 0,5            | 0,7            | 0,9            |
| c <sub>3</sub>     | 0,7            | 0,6            | 0,9            | 0,6            | 0,1            | 0              |
| c <sub>4</sub>     | 0,9            | 0,7            | 0,2            | 0,8            | 0,6            | 0,5            |
| c <sub>5</sub>     | 0,3            | 0,1            | 1              | 0,2            | 0,2            | 0              |
| c <sub>6</sub>     | 0,3            | 0,4            | 0,8            | 0,5            | 0,9            | 0,6            |
| c <sub>7</sub>     | 0,8            | 0,7            | 0,4            | 0,6            | 0,8            | 0,9            |

**Table 4. Estimated Incidences between Causes [A]**

| $\curvearrowright$ | c <sub>1</sub> | c <sub>2</sub> | c <sub>3</sub> | c <sub>4</sub> | c <sub>5</sub> | c <sub>6</sub> | c <sub>7</sub> |
|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| c <sub>1</sub>     | 1              | 0,9            | 0,6            | 0,5            | 0,4            | 0,7            | 0,6            |
| c <sub>2</sub>     | 0,8            | 1              | 0,3            | 0,6            | 0,5            | 0,7            | 0,4            |
| c <sub>3</sub>     | 0,4            | 0,6            | 1              | 0,4            | 0,8            | 0,8            | 0,5            |
| c <sub>4</sub>     | 0,5            | 0,5            | 0,4            | 1              | 0,3            | 0,6            | 0,8            |
| c <sub>5</sub>     | 0,2            | 0,4            | 0,6            | 0,3            | 1              | 0,5            | 0,4            |
| c <sub>6</sub>     | 0,9            | 0,7            | 0,5            | 0,5            | 0,6            | 1              | 0,4            |
| c <sub>7</sub>     | 0,7            | 0,6            | 0,4            | 0,5            | 0,5            | 0,6            | 1              |

**Table 5. Estimated Incidences between Effects [B]**

| $\curvearrowright$ | e <sub>1</sub> | e <sub>2</sub> | e <sub>3</sub> | e <sub>4</sub> | e <sub>5</sub> | e <sub>6</sub> |
|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| e <sub>1</sub>     | 1              | 0,9            | 0,4            | 0,7            | 0,8            | 0,7            |
| e <sub>2</sub>     | 0,8            | 1              | 0              | 0,9            | 0,6            | 0,5            |
| e <sub>3</sub>     | 0,5            | 0,3            | 1              | 0,6            | 0,2            | 0,2            |
| e <sub>4</sub>     | 0,8            | 0,9            | 0,3            | 1              | 0,4            | 0,3            |
| e <sub>5</sub>     | 0,5            | 0,5            | 0,6            | 0,7            | 1              | 0,8            |
| e <sub>6</sub>     | 0,9            | 0,9            | 0,1            | 0,5            | 0,6            | 1              |

After obtaining the above matrices, we proceed to calculate the second order matrix with cumulative effects, through the composition:

$$\text{MAX-MIN } (M^* = [A] \circ [B] \circ [M])$$

**Table 6. Convolution among Matrices Max-Min [M\*]**

| $\curvearrowright$ | e <sub>1</sub> | e <sub>2</sub> | e <sub>3</sub> | e <sub>4</sub> | e <sub>5</sub> | e <sub>6</sub> |
|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| c <sub>1</sub>     | 0,9            | 0,9            | 0,8            | 0,9            | 0,8            | 0,9            |
| c <sub>2</sub>     | 0,9            | 0,9            | 0,8            | 0,8            | 0,8            | 0,9            |
| c <sub>3</sub>     | 0,7            | 0,7            | 0,9            | 0,7            | 0,8            | 0,8            |
| c <sub>4</sub>     | 0,9            | 0,9            | 0,6            | 0,8            | 0,8            | 0,8            |
| c <sub>5</sub>     | 0,6            | 0,6            | 1              | 0,6            | 0,6            | 0,6            |
| c <sub>6</sub>     | 0,9            | 0,9            | 0,8            | 0,9            | 0,9            | 0,9            |
| c <sub>7</sub>     | 0,9            | 0,9            | 0,6            | 0,7            | 0,8            | 0,9            |

Finally, the forgotten effect matrix is calculated ( $O = [M^*] - [M]$ ), by la the difference between the matrix of indirect effects  $[M^*]$  and the matrix of direct effects  $[M]$ :

**Table 7. Forgotten Effects Matrix [O]**

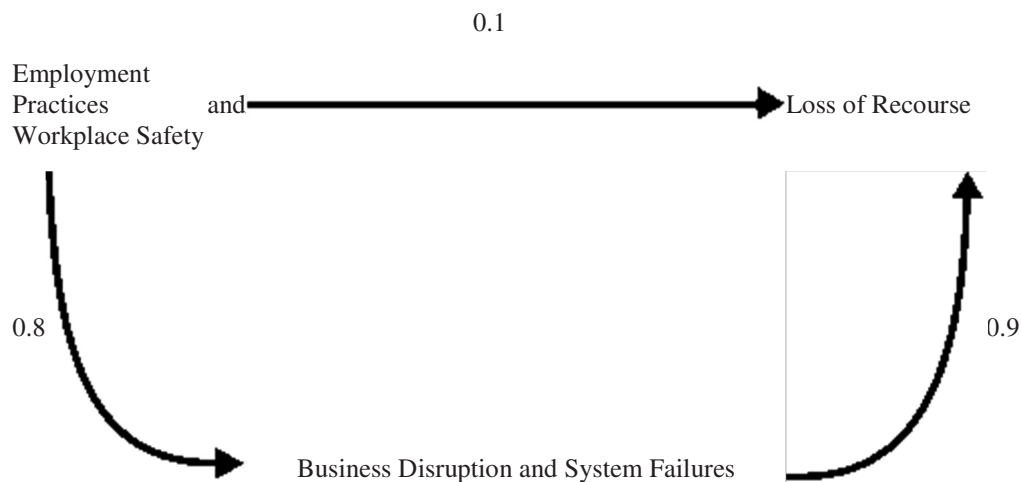
| $\curvearrowright$ | e <sub>1</sub> | e <sub>2</sub> | e <sub>3</sub> | e <sub>4</sub> | e <sub>5</sub> | e <sub>6</sub> |
|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| c <sub>1</sub>     | 0,1            | 0              | 0,5            | 0              | 0,1            | 0              |
| c <sub>2</sub>     | 0,2            | 0,4            | 0              | 0,3            | 0,1            | 0              |
| c <sub>3</sub>     | 0              | 0,1            | 0              | 0,1            | 0,7            | 0,8            |
| c <sub>4</sub>     | 0              | 0,2            | 0,4            | 0              | 0,2            | 0,3            |
| c <sub>5</sub>     | 0,3            | 0,5            | 0              | 0,4            | 0,4            | 0,6            |
| c <sub>6</sub>     | 0,6            | 0,5            | 0              | 0,4            | 0              | 0,3            |
| c <sub>7</sub>     | 0,1            | 0,2            | 0,2            | 0,1            | 0              | 0              |



## Analysis of the Results

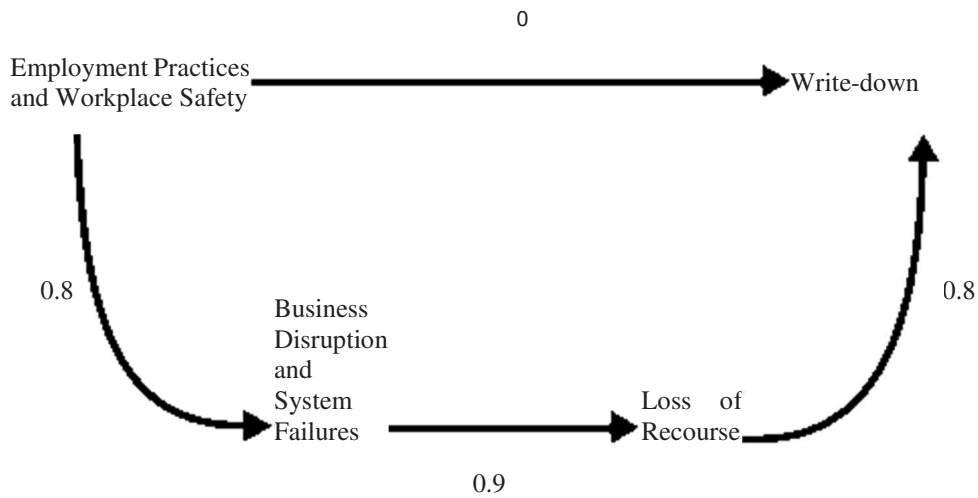
The table 7 with the forgotten effects matrix shows us the causalities relations that have not been qualified by the experts. In this case, two most incidences have been taken, which are 0.7 (sufficient incidence) and 0.8 (strong incidence).

The first case shows that, the experts had qualified the impact between C3 (Employment Practices and Workplace Safety) and E5 (Loss of Recourse) with the value 0.1 (virtually without incidence), but throughout the forgotten effects theory, the impact is found as 0.7 when the relationship between these two variables are analyzed with C6 (Business Disruption and System Failures). This can be shown graphically as following:



*Figure 1 Forgotten Effect 1*

In the second case, the relation between C<sub>3</sub> (Employment Practices and Workplace Safety) and E<sub>6</sub> (Write-down) the experts qualified it initially with the 0 value (Without incidence). Nevertheless, the impact of those two variables is 0.8 (strong incidence) taking into account the forgotten effect impact in which is involved C<sub>6</sub> (Business Disruption and System Failures) and E<sub>5</sub> (Loss of Recourse). It is important to underline that the first case is included in the second case. This can be shown graphically as following:



*Figure 2 Forgotten Effect 2*

### **Conclusions**

The great complexity in the operational risk management requires the usage of multiple quantitative and qualitative tools. This will allow taking the best decisions mitigating its economic impact as well as in other impacts such as the quality of service, reputation and social responsibility among others. In qualitative analysis, this study provides a new insight into the causal relationships between the events types and the impact of operational losses.

Final results show that the cause and effect that had no impact initially may indirectly get to have a strong impact by analyzing the intermediate relationships with other causes and effects. This analysis enables to improve the decision-making with a significant impact on the measures taken to mitigate the impact of operational risk in any business.

### **References**

Martorell-Cunill, O., Gil-Lafuente, A. M., Socias Salvà, A., & Mulet Forteza, C. (2013). The growth strategies in the hospitality industry from the perspective of the forgotten effects. *Computational and Mathematical Organization Theory*, 20(2), 195–210.

- Maqueda Lafuente, F.J., Gil Lafuente, A.M., Guzman-Parra, V.F., & Gil Lafuente, J. (2013). Key factors for entrepreneurial success. *Management Decision*, 51(10), 1932–1944.
- Vizuet Luciano, E., Gil-Lafuente, A. M., García González, A., & Boria-Reverter, S. (2013). Forgotten effects of corporate social and environmental responsibility. *Kybernetes*, 42(5), 736–753.
- Gil-Lafuente, A. M., Keropyan, A., & Balvey, J. (2015). Analysis of the relationship between the economic activity of regions and welfare of its inhabitants. *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, 49(3), 215–232.
- Bank for International Settlements (BIS), (2001). QIS 2 - Operational Risk Loss Data, access on line, 05 Sept 2015: <http://www.bis.org/bcbs/qisoprisknote.pdf>
- Kaufmann, A., & Gil Aluja, J. (1988). *Modelos para la investigación de efectos olvidados*. Vigo: Milladoiro.
- Gil-Lafuente, A. M., 2008, *Elements teòrics i Tècnics de la incertesa, Incertesa i Bio-enginyeria*, Reial Academia de Doctors, Barcelona.
- Gil-Lafuente, A. M., 2005, *Fuzzy logic in financial analysis*, Ed. Springer, Heidelberg
- Gil-Aluja, J.; Gil-Lafuente, A. M., 2012, *Towards an Advanced Modelling of Complex Economic Phenomena*, Ed. Springer, Berlin-Heidelberg.



## Anexo 2



### Acceptance letter

#### **Special Issue to be published in Kybernetes**

Dear Professor Agustín Torres-Martínez,

I'm happy to inform you that your paper entitled "Multiexpert causality model with OWA aggregation operators" has been accepted for publication in Kybernetes: The International Journal of Cybernetics, Systems and Management Sciences. This journal currently has an impact factor of 0.637 in the latest Journal Citation Reports.

Sincerely,

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'José M. Merigó', with a long horizontal stroke extending to the right.

José M. Merigó

Email: [jmerigo@fen.uchile.cl](mailto:jmerigo@fen.uchile.cl)

Guest editor of the Kybernetes Special Issue

Santiago de Chile, 27th May, 2017.



## **Anexo 3**

Área de Seguro y Previsión Social

# **INTELIGENCIA COMPUTACIONAL EN LA GESTIÓN DEL RIESGO ASEGURADOR: OPERADORES DE AGREGACIÓN OWA EN PROCESOS DE TARIFICACIÓN**

Montserrat Casanovas Ramón  
José María Merigó Lindahl  
Agustín Torres Martínez

**FUNDACIÓN MAPFRE**

FUNDACIÓN MAPFRE no se hace responsable del contenido de esta obra, ni el hecho de publicarla implica conformidad o identificación con la opinión del autor o autores.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin el permiso escrito del autor.

© 2014, FUNDACIÓN MAPFRE  
Paseo de Recoletos 23  
28004 Madrid (España)

[www.fundacionmapfre.com](http://www.fundacionmapfre.com)  
[publicaciones.ics@fundacionmapfre.org](mailto:publicaciones.ics@fundacionmapfre.org)

ISBN: 978-84-9844-474-2  
Depósito Legal: M-17632-2014

Impreso por **Discript Preimpresión, S.L.**



## Anexo 4



### *Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras*

OBSERVATORIO DE INVESTIGACIÓN  
ECONÓMICO-FINANCIERA

Presidente de Honor:  
Finn E. Kydland

Presidentes ejecutivos:  
Alfredo Rocafort Nicolau      Francisco Javier Maqueda Lafuente

Directora de proyectos:  
Anna Maria Gil-Lafuente

CUBA A LA LUZ DE LA NUEVA LEY DE  
INVERSIONES EXTRANJERAS:  
RETOS Y OPORTUNIDADES PARA LA  
ECONOMÍA CATALANA

DIRECTORA: Anna Maria Gil-Lafuente

Investigadores:

España:

Anna Maria Gil-Lafuente  
Agustín Torres Martínez  
Victor Gerardo Alfaro García

Cuba:

Lourdes Souto Anido  
Irene García Rondón

Barcelona 2016

## Publicaciones de la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras

**Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras (Barcelona). Observatorio de Investigación Económico-Financiera**

**Cuba a la luz de la Nueva Ley de Inversiones Extranjeras: retos y oportunidades para la economía catalana. Observatorio de Investigación Económico-Financiera de la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras**

**Bibliografía**

**ISBN- 978-84-608-6018-1**

**I. Título**

**II. Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras (Barcelona)**

**III. Gil-Lafuente, Anna Maria**

**IV. Colección**

**1. Cuba—Aspectos económicos    2. Cataluña—Relaciones económicas exteriores—Cuba  
3. Cooperación económica**

**HC152.5**

**La Academia no se hace responsable  
de las opiniones científicas expuestas en  
sus propias publicaciones.**

**(Art. 41 del Reglamento)**

---

---

**Editora: © Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras, Barcelona, 2016**

**ISBN-978-84-608-6018-1**

**Depósito legal: B 4549-2016**

**Nº registro: 2016011432**

---

**Esta publicación no puede ser reproducida, ni total ni parcialmente, sin permiso previo, por escrito de la editora.  
Reservados todos los derechos.**

---

**Impresor: Ediciones Gráficas Rey, S.L.—c/Albert Einstein, 54 C/B, Nave 12-14-15  
Cornellà de Llobregat—Barcelona**