Universitat Autònoma de Barcelona

Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado

Andrea Cárcamo Bahamonde

Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

Programa de Doctorat en Educació

TESIS DOCTORAL

Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado

Autora: Andrea Cárcamo Bahamonde

Dirigida por los doctores

Dr. Joan Gómez Dr. Josep M. Fortuny

Bellaterra - Septiembre de 2017

Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

Doctorat en Educació

Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado

Doctoranda: Andrea Cárcamo Bahamonde Firma…………………………

Director: Dr. Joan Gómez Urgelles Firma…………………………

Tutor: Dr. Josep M. Fortuny Aymemí Firma…………………………

Bellaterra, Septiembre de 2017

Dr. Joan Gómez Urgelles, profesor del Departament de Matemática Aplicada de la Universidad Politècnica de Catalunya, con sede en la Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú de la Universitat Politècnica de Catalunya.

y

Dr. Josep M. Fortuny Aymemí, profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, con sede en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona.

HAGO CONSTAR QUE:

La investigación realizada bajo la dirección de los firmantes por la Licenciada Andrea Cárcamo Bahamonde, con el título *Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado*, reúne todos los requerimientos científicos, metodológicos y formales exigidos por la legislación vigente para su Lectura y Defensa pública ante la correspondiente Comisión, por la obtención del Grado de Doctor en Educación por la Universitat Autònoma de Barcelona, por tanto consideramos procedente autorizar su presentación.

Bellaterra, 04 de septiembre de 2017.

Firmado: ....

Firmado: ....

A mis padres

Friolina y Juan

“Después de escalar una montaña muy alta,
descubrimos que hay muchas otras montañas por escalar”.
Nelson Mandela (1994)

“What is needed for reform mathematics education is a form of instructional design supporting instruction that helps students to develop their current ways of reasoning into more sophisticated ways of mathematical reasoning”.
Gravemeijer (2004a, p. 106)

Agradecimientos

A Dios y al universo por esta experiencia de vida.

A mi director, Joan Gómez, por introducirme en la modelización matemática y por facilitarme la recogida de datos. También agradezco a sus estudiantes que participaron en esta investigación.

A mi tutor, Josep María Fortuny, por guiar mi formación como investigadora en el campo de la educación matemática y por sus orientaciones precisas.

A la Dra. Asuman Oktaç con quien realicé una estancia en México. Gracias a ella y a los participantes de su seminario por su acogida y valiosos comentarios para esta tesis.

A los profesores del Departamento de matemática de la UAB que aportaron con sugerencias para delimitar esta investigación, en especial a Jordi Deulofeu y Núria Planas. También, a María José Beltrán y Miriam Ortega, quienes hicieron una estancia en este Departamento y contribuyeron con sus comentarios a esta tesis.

A la Dra. María Trigueros, al Dr. Ángel Alsina y a la profesora Ana Bressan por facilitarme referencias y material para esta tesis. Igualmente, al Dr. Michiel Doorman, quien respondió a mis correos electrónicos cuando me surgieron dudas de la heurística de los modelos emergentes o de la teoría de instrucción local.

A Claudio, mi esposo, amigo y compañero por su amor y ayuda en todo momento en este desafío que iniciamos y concluimos juntos.

A mis padres y a mis hermanos, Javier y Alex, por su cariño y apoyo en cada uno de los retos que emprendo.

A mis suegros, cuñados, primos, sobrinos, tíos, ahijados y amigos que me ayudaron y animaron en este camino.

A mi familia adoptiva en Barcelona, Carmen y Luis, por su acogida y afecto. A los tíos Rossy, Jorge y demás familiares por compartir su alegría conmigo.

A Edith, Diego, Iván y Sylvia por su apoyo y amistad durante mi estadía en Barcelona.

A cada una de esas personas que aportaron a esta tesis, ¡Muchas gracias!

Presentación

Esta tesis doctoral se presenta en la modalidad de compendio de artículos. Siguiendo la estructura básica de contenidos planteada por el Programa de Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona, hemos organizado este trabajo en tres secciones:

- Sección 1. Introducción, objetivos, referentes teóricos y metodología;
- Sección 2. Publicaciones que conforman el compendio de artículos;
- Sección 3. Resumen y discusión de los resultados junto con las conclusiones.

Los cuatro artículos que integran esta tesis doctoral siguen la línea de investigación del diseño instruccional para el Álgebra Lineal y estos son:

- Cárcamo, A., Gómez, J. y Fortuny, J. (2016). Mathematical Modelling in Engineering: A Proposal to Introduce Linear Algebra Concepts. *Journal of Technology and Science Education* (JOTSE), 6(1), 62-70. http://dx.doi.org/10.3926/jotse.177
- Cárcamo, A., Fortuny J. y Gómez, J. (2017) Mathematical modelling and the learning trajectory: tools to support the teaching of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48 (3), 338-352. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2016.1241436
- Cárcamo, A. (2017). El uso de contraseñas para introducir los conceptos de conjunto generador y espacio generado. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(1), 101-112. https://doi.org/10.4995/msel.2017.5949
- Cárcamo, A., Fortuny J. y Fuentealba C. (en prensa). The emergent models in linear algebra: an example with spanning set and span. *Teaching Mathematics and its Applications.*

Durante la realización de esta tesis doctoral, se ha ido validando y divulgando nuestra investigación en diferentes contextos (congresos, seminarios, jornadas y simposios) nacionales e internacionales que se indican a continuación:

- Cárcamo, A. y Fortuny J. (2017). A hypothetical learning trajectory for spanning set and span. 2017. En Kaur, B., Ho, W.K., Toh, T.L., y Choy, B.H. (Eds.). *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, pp. 209-216. Singapore: PME.

- Cárcamo, A., Fortuny J., y Gómez J. (2017, Julio). La trayectoria hipotética de aprendizaje en matemática universitaria: un ejemplo para el curso de álgebra lineal. Comunicación oral presentada en *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Madrid, España.

- Cárcamo, A., Fortuny J., y Gómez, J. (2016, Julio). Instructional design based on the learning trajectory: A proposal for the construction of linear algebra concepts. Comunicación oral presentada en *13th International Congress on Mathematical Education (ICME13),* Hamburg, Germany.

- Cárcamo, A., Gómez, J., y Fortuny, J. (2016, mayo). El uso de contraseñas para introducir los conceptos de conjunto generador y espacio generado. Comunicación oral presentada en *V Jornadas Modelización Matemática*, Valencia, España.

- Cárcamo, A., Gómez, J., y Fortuny, J. (2015, Julio). Modelización matemática en la educación matemática realista: Una propuesta para contribuir a la construcción formal de álgebra lineal. Comunicación oral presentada en *17 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, Cartagena, España.

- Cárcamo, A., Gómez, J., y Fortuny, J. (2015, Julio). La modelización matemática y los modelos emergentes en pregrado: Una propuesta de diseño instruccional para álgebra lineal. Comunicación oral presentada en *XXII Congreso Internacional de Educación y Aprendizaje*, Madrid, España.

- Cárcamo A., Gómez J., y Fortuny, J. (2015). La modelización matemática para iniciar la construcción de conjunto generador y espacio generado. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 543). Alicante: SEIEM.

- Cárcamo, A., Gómez, J., y Fortuny, J. (2015, septiembre). Hacia la construcción de una teoría de instrucción local para los conceptos de Conjunto Generador y Espacio Generado. Comunicación oral presentada en *Grupo de investigación Pensamiento numérico y algebraico en Investigación en Educación Matemática* XIX, Alicante, España.

- Cárcamo, A., Fortuny, J., y Gómez, J. (2015). La construcción de conceptos de álgebra lineal a través de los modelos emergentes En M. Parraguez, H. Rivas, C. Vásquez, N. Pincheira, H. Solar, F. Rojas y E. Chandía (Eds.*), XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 445-449). Villarrica, Chile.

- Cárcamo, A., Gómez, J., y Fortuny, J. (2015, noviembre). La heurística de los modelos emergentes en álgebra lineal: un estudio exploratorio con estudiantes de primer año de ingeniería. Comunicación presentada en *Primer Congreso Internacional de Matemática Educativa en línea*, Campus Virtual CICATA-IPN Legaria, México.

- Cárcamo, A. (2014, julio). La modelización matemática como herramienta para la construcción de conjunto generador y espacio generado. Póster presentado en *IV Jornadas Modelización Matemática: Matemáticas a lo largo de la Vida*, Huelva, España.

Además, la doctoranda ha sido autora de los siguientes capítulos de libros:

- Cárcamo, A., Gómez, J. y Fortuny J. (2016). Construyendo conceptos de álgebra lineal a través de grupos de aprendizaje cooperativo. En R. Calvo y F. Cano (Eds.), *El aprendizaje cooperativo como práctica docente: experiencias aplicadas* (p.23-34) Editorial Neopatria c.b.: Valencia, España.

- Cárcamo, A., Gómez, J. y Fortuny J. (2016). La heurística de los modelos emergentes en álgebra lineal: un estudio exploratorio con estudiantes de primer año de ingeniería. En A. Rosas, *avances en matemática educativa teorías y enfoques* no. 3 (p. 76-86) Editorial Lectorum, S. A. de C.V.: Ciudad de México, México.

La formación de la autora de la presente memoria ha contado con el apoyo del Programa formación de capital humano avanzado CONICYT – BECAS CHILE y de la Universidad Austral de Chile.

Resumen

Esta tesis doctoral tuvo como objetivo generar una innovación docente en el curso de Álgebra Lineal a nivel universitario basada en los modelos emergentes y la modelización matemática. Con el propósito de lograr dicha meta, se diseñó y refinó una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) para los conceptos de conjunto generador y espacio generado. Las publicaciones que conforman el compendio de artículos de esta tesis dan a conocer las diferentes etapas que se realizaron a fin de generar una innovación docente: el diseño, la implementación, la evaluación y el refinamiento.

Con la finalidad de responder al objetivo de esta tesis, se efectuó una investigación basada en el diseño que consta de tres fases. En la primera fase se diseñó una primera THA para conjunto generador y espacio generado. En la fase de experimento de enseñanza se realizaron tres ciclos de intervención en el aula. En la fase de análisis retrospectivo se hizo un análisis preliminar después de cada ciclo y otro de todo el experimento de enseñanza. A través del análisis preliminar de los datos en cada ciclo del experimento de enseñanza se detectaron las dificultades que tuvieron los estudiantes durante el desarrollo de las tareas de la THA y se realizaron las modificaciones que se consideraron pertinentes con el fin de refinar la THA y aplicarla en un nuevo ciclo. También, se observó el rol de los modelos emergentes y la modelización matemática en la construcción de conjunto generador y espacio generado. Por su parte, con el análisis global de los tres ciclos del experimento de enseñanza se establecieron las características de la THA que favorecieron la construcción de los conceptos ya mencionados de Álgebra Lineal.

Los resultados de esta tesis dieron evidencias de que una innovación docente, basada en los modelos emergentes y la modelización matemática, favorece a los estudiantes en la construcción de conjunto generador y espacio generado. Lo anterior, permitió proponer una teoría de instrucción local (TIL) y una secuencia instruccional sobre estos contenidos de Álgebra Lineal. En concreto, la modelización matemática usada como herramienta contribuyó a activar los conocimientos previos de los estudiantes con la finalidad de que los aplicaran hacia la construcción de conjunto generador y espacio generado. Asimismo, el ciclo de modelización matemática sirvió para que el profesor los guiara a plantear una solución al problema inicial de la THA. Por otra parte, los modelos emergentes dieron a los estudiantes la oportunidad de ir construyendo estos conceptos de Álgebra Lineal desde su actividad matemática informal (vectores y contraseñas) hacia un razonamiento matemático más formal (aplicación de conjunto generador y espacio generado).

Esta tesis pretende servir de base a las investigaciones futuras centradas en el diseño de innovaciones docentes fundamentadas en los modelos emergentes y la modelización matemática a nivel universitario.

Abstract

This doctoral thesis is intended to generate a teaching innovation in the course of Linear Algebra studies at the university level based on emergent models and mathematical modelling. In order to achieve this goal, a hypothetical learning trajectory (HLT) was designed and refined for the concepts of spanning set and span. The publications that compose the compendium of articles of this thesis reveal the different stages that were carried out in order to generate a teaching innovation: design, implementation, evaluation and refinement.

In order to respond to the objective of this thesis, a design-based research was carried out that consists of three phases. In the first phase, a first HLT was designed for spanning set and span. In the teaching experiment phase, three intervention cycles were carried out in the classroom. In the retrospective analysis phase, a preliminary analysis was done after each cycle, and another was done on the entire teaching experiment. Through the preliminary analysis of the data in each cycle of the teaching experiment, the difficulties that the students had during the development of the tasks of the HLT were detected, and the modifications that were considered pertinent were made in order to refine the HLT and to apply it in a new cycle. Also, the role of emergent models and mathematical modelling in the construction of spanning set and span was observed. On the other hand, with the overall analysis of the three cycles of the teaching experiment the characteristics of the HLT were established, which favoured the construction of the aforementioned concepts of Linear Algebra.

The results of this thesis gave evidence that a teaching innovation, based on emergent models and mathematical modelling, assists students in the construction of spanning set and span. The previous one allowed them to propose a local instruction theory (LIT) and an instructional sequence on these contents of Linear Algebra. In particular, the use of mathematical modelling as a tool helped to activate the students' prior knowledge in order to apply them to the construction of the spanning set and span. Likewise, the mathematical modelling cycle served as a guide for the teacher to propose a solution to the initial problem of HLT. On the other hand, emergent models gave students the opportunity to construct these concepts of Linear Algebra from their informal mathematical activity (vectors and passwords), towards a more formal mathematical reasoning (the application of spanning set and span).

This thesis aims to serve as a basis for future research focused on the design of teaching innovations based on emergent models and mathematical modelling at the university level.

Índice de contenidos

Índice de Figuras

Índice de Tablas

SECCIÓN I.

INTRODUCCIÓN

1. Planteamiento del problema
2. Referentes teóricos
3. Metodología

1. Planteamiento del problema

"No hay rama de la matemática, por abstracta que sea,
que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real".
Nikolái Lobachevski

En este capítulo nos centramos en la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal. Específicamente, damos a conocer su importancia y sus dificultades (apartado 1.1.) junto con las innovaciones que se han realizado con el fin de favorecer su enseñanza (apartado 1.2.). A continuación, profundizamos en los estudios de dos enfoques que resultan de interés para diseñar la innovación docente de nuestra investigación. Estos son: la modelización matemática y la heurística de los modelos emergentes. Por consiguiente, planteamos la teoría de instrucción local (TIL) como una herramienta orientada a la enseñanza del Álgebra Lineal (apartado 1.3.).

Finalmente, precisamos por qué motivo elegimos los conceptos de conjunto generador y espacio generado a fin de producir una innovación docente en Álgebra Lineal (apartado 1.4.) e indicamos los objetivos de nuestro estudio (apartado 1.5.).

1.1. Importancia y dificultades del Álgebra Lineal en el aula

El Álgebra Lineal es obligatorio en muchos cursos de pregrado porque es reconocido por tener aplicaciones importantes en diferentes disciplinas (Salgado y Trigueros, 2015); es decir, no solo en otras ramas de la matemática sino que también en múltiples áreas como: la ingeniería, la física, la economía, el procesamiento de imágenes y la genética (Hannah, 2017).

A pesar de las valiosas aplicaciones del Álgebra Lineal, su enseñanza es universalmente reconocida como difícil. Los estudiantes, por lo general, sienten que aterrizan en otro planeta, están abrumados por la cantidad de nuevas definiciones y la falta de conexión con el conocimiento anterior. En tanto, los profesores a menudo se sienten frustrados por esta situación (Dorier, 2002). Al respecto, Dorier y Sierpinska (2001) mencionan que a pesar de los intentos por adaptar el currículo a los intereses y procesos de aprendizaje de los estudiantes, aún se tiene que aceptar que el Álgebra Lineal es y seguirá siendo un tema difícil para la mayoría de ellos.

Dorier y Sierpinska (2001) identifican tres posibles razones por las que muchos estudiantes encuentran que el Álgebra Lineal es difícil de aprender. La primera causa es que ellos pueden considerar que la orientación axiomática de este curso es superflua y sin sentido. El segundo motivo es que suelen complicarse con las complejas interacciones entre los sistemas de representación del Álgebra Lineal. El tercer argumento es que les resulta cognitivamente complejo porque requiere la capacidad de hacer frente a diferentes sistemas de representación (algebraicos, geométricos y abstractos) y flexibilidad con respecto a cambiar entre ellos.

En lo referente con las dificultades de los estudiantes en el Álgebra Lineal, Dorier y Sierpinska (2001) distinguen dos motivos: la naturaleza de este curso (dificultades conceptuales) y el tipo de pensamiento necesario relacionado con su comprensión (dificultades cognitivas).

Carlson (2004) detalla que las dificultades conceptuales de los estudiantes están vinculadas con: la lógica simbólica (no comprenden el lenguaje formal de la matemática moderna, por este motivo no recurren a los cuantificadores adecuadamente); las definiciones (no forman nociones precisas de las definiciones por eso no pueden distinguir entre estas y sus implicaciones); la demostración (no la valoran con el objetivo de probar la veracidad de un resultado, pues confían más en pruebas empíricas o en la autoridad del profesor (Harel, 1999)); la abstracción (intentan reducir el nivel de abstracción trabajando con ejemplos prototípicos en lugar de usar las definiciones (Hazzan, 1999)).

Comúnmente, en las discusiones relativas a la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal se afirma que este curso se encuentra diseñado y enseñado indebidamente. Incluso, se plantea que no importa cómo se enseñe porque sigue siendo un tema difícil tanto cognitiva como conceptualmente. Estas declaraciones han conducido a realizar acciones de reforma curricular, analizar tanto las fuentes como la naturaleza de las dificultades de los estudiantes y efectuar experimentos de enseñanza basados en la investigación que sean controlados (Dorier y Sierpinska, 2001).

A continuación, hacemos una síntesis de las innovaciones que se han implementado en el Álgebra Lineal, a nivel universitario, con la finalidad de contribuir a su enseñanza.

1.2. Innovaciones dirigidas a la enseñanza del Álgebra Lineal

Se han producido variadas experiencias de enseñanza con la finalidad de disminuir las dificultades que tienen los estudiantes con el Álgebra Lineal. Por ejemplo: el uso de la tecnología (Sierpinska, Trgalova y Hillel, 1999; Hazzan y Zazkis, 2003; Klasa, 2010; Vergara, Avilez y Romero, 2016); el aprendizaje basado en proyectos junto con un portafolio electrónico (Domínguez-García, García-Planas y Taberna, 2016); el uso de geometría dinámica (Uicab, y Oktaç, 2006; Turgut y

Drijvers, 2016) y la metodología del aula invertida (Love, Hodge, Grandgenett and Swift, 2014; Talbert, 2014).

Asimismo, se han adoptado diversas perspectivas teóricas de la educación matemática con el fin de contribuir a la enseñanza del Álgebra Lineal. Entre ellas: APOE y los mundos de Tall (Hannah, Stewart, y Thomas, 2016); modelos y modelización junto con APOE (Possani, Trigueros, Preciado y Lozano, 2010; Salgado y Trigueros, 2015); modelos y modelización junto con la educación matemática realista (EMR) (Larson, Zandieh y Rasmussen, 2008), la EMR (Andrews-Larson, Wawro, y Zandieh, 2017) o la heurística de los modelos emergentes[1] de la EMR (Wawro, Rasmussen, Zandieh y Larson, 2013).

Nuestra investigación se enfoca en dos perspectivas teóricas: la modelización matemática utilizada como una herramienta (o vehículo) para la enseñanza de las matemáticas (July y Mudaly, 2007) y la heurística de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999). Elegimos estos enfoques que son compatibles porque en nuestro estudio esperamos que los estudiantes construyan el conocimiento matemático desde una situación que sea experiencial para ellos y que les permita emplear la modelización matemática. Lo anterior, porque estamos de acuerdo con Hannah (2017) en que el Álgebra Lineal necesita evolucionar desde las experiencias de los estudiantes, en lugar de aparecer de la nada, ya completamente formado.

En los dos sub-apartados que siguen, mencionamos innovaciones que usan la modelización matemática o los modelos emergentes relacionados con la enseñanza del Álgebra Lineal. Esto nos da una visión de lo que se ha logrado en la enseñanza y aprendizaje de este curso cuando se han considerado estas perspectivas teóricas.

[1] En adelante, usaremos “los modelos emergentes” como sinónimo de “la heurística de los modelos emergentes”.

1.2.1. Innovaciones usando la modelización matemática

En los últimos años, la posibilidad de introducir contenidos en el aula mediante la modelización matemática ha recibido una considerable atención. No obstante, en los cursos de matemáticas de pregrado, como el Álgebra Lineal, se han producido escasos estudios concernientes a esta temática (Possani, Trigueros, Preciado y Lozano, 2010). Entre ellos, se encuentra la investigación de Gómez (1998) que aplica una innovación docente con respecto al contenido de matrices. Este autor deduce que la enseñanza a través de la modelización matemática ayuda a la comprensión del conocimiento matemático y permite incrementar la capacidad de resolver problemas.

Possani et al. (2010) recurren a la teoría APOE junto con modelos y modelización con el propósito de efectuar una experiencia de enseñanza acerca del contenido de sistema de ecuaciones. Ellos advierten que es posible enseñar contenidos del Álgebra Lineal mediante el uso de problemas contextuales porque la estrategia, seguida a lo largo de todo el proceso de modelización matemática, otorga oportunidades a los estudiantes de mostrar lo que saben y lo que están aprendiendo. Igualmente, dichos autores destacan que las teorías de la educación matemática son útiles en lo que se refiere a la interpretación del trabajo de los estudiantes, el análisis de las necesidades de ellos y el diseño de actividades sobre construcción de conocimiento que están vinculados al proceso de modelización matemática.

Trigueros y Possani (2013) emplean la teoría APOE junto con la teoría de los modelos y modelización con el objetivo de aplicar una innovación docente relacionada con combinación lineal, dependencia lineal e independencia lineal. Dichos autores determinan que el uso de la modelización matemática junto con una trayectoria de aprendizaje contribuye al aprendizaje de estos conceptos. En particular, ellos dicen que estrategias similares de enseñanza, en donde se usen problemas contextuales, pueden ser tan exitosos como en su estudio para enseñar nociones nuevas y complejas del Álgebra Lineal.

Recientemente, Salgado (2015) usa estas mismas teorías de la educación matemática (APOE junto con modelos y modelización) hacia la enseñanza de: combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, dependencia lineal, independencia lineal, base, dimensión, valor, vector y espacio propio. Dicha autora evidencia que el uso de la modelización matemática proporciona a los estudiantes involucrados en su estudio, un escenario encaminado a la utilización de sus conocimientos y al enfrentamiento de nuevas necesidades conceptuales.

Larson, Zandieh y Rasmussen (2008), con base en las perspectivas teóricas de los modelos y modelización junto a la EMR, diseñan una innovación docente con el fin de introducir: valor, vector y espacio propio. Sin embargo, a los estudiantes de su estudio, no les resultó evidente la generalidad de la situación planteada. En consecuencia, Larson et al. (2008) sugieren que el profesor introduzca, previo a la generalización, la forma tradicional de encontrar valores y vectores propios.

1.2.2. Innovaciones basadas en los modelos emergentes

Existen estudios recientes que aplican los modelos emergentes con el propósito de enseñar el Álgebra Lineal. Wawro, Rasmussen, Zandieh, y Larson (2013) ofrecen una secuencia instruccional que tiene como meta el aprendizaje de espacio generado, dependencia lineal e independencia lineal. Wawro et al. (2013) emplean los cuatro niveles de actividad vinculados a los modelos emergentes con el objetivo de dar forma a su secuencia instruccional y dan evidencias que esta contribuye al aprendizaje de estos contenidos. Adicionalmente, ellos puntualizan que el refinamiento y enmarcado de su secuencia dentro de dichos niveles fue gracias al proceso cíclico de la investigación de diseño. Finalmente, muestran un resumen de cómo se manifestaron los niveles de actividad en su secuencia instruccional.

Wawro y Zandieh (2016) emplean los modelos emergentes en dirección a mostrar que su secuencia instruccional contribuye al aprendizaje de valores propios, vectores propios y diagonalización. Dichas autoras expresan que, en las dos últimas tareas de su secuencia instruccional, los estudiantes logran trabajar con el conocimiento matemático que están construyendo, previo a que se los definan.

Las investigaciones descritas relativas a la modelización matemática y los modelos emergentes en el contexto de la enseñanza del Álgebra Lineal sirven de inspiración en relación con el diseño de la innovación docente de nuestra investigación. Dicha propuesta pretende apoyar tanto a estudiantes como a profesores que se enfrentarán al curso de Álgebra Lineal.

En cuanto al profesor de Álgebra Lineal, Aydin (2009) especifica que él no solo necesita una innovación docente sino que también requiere entender mejor cómo aprenden sus estudiantes. Por ello, al mismo tiempo precisa reconocer tanto los métodos como el contexto que son apropiados a los mismos. Con la finalidad de responder a esta necesidad, nos planteamos entre nuestros objetivos desarrollar una teoría de instrucción local (TIL) con respecto a conceptos específicos de este curso. La TIL informa a los maestros acerca de cómo funcionan los enfoques educativos innovadores con el propósito de que puedan adaptarlos a sus propias aulas (Gravemeijer y van Eerde, 2009).

1.3. La teoría de instrucción local (TIL) como una herramienta de enseñanza en el Álgebra Lineal

Dorier y Sierpinska (2001) plantean que los profesores del Álgebra Lineal requieren de sugerencias acerca de la estructura de los conocimientos que enseñan en conjunto con un suministro de buenos ejemplos, preguntas, ejercicios y problemas. Dichos profesores aprecian los documentos que les proporcionan esto, entre los que se encuentran, las teorías de instrucción local (TILs). Por este motivo, es importante diseñarlas en este curso. Larsen (2013) señala que una TIL describe cómo un tema específico de matemática podría ser enseñado fundamentado en ciertos principios de diseño.

Gravemeijer (2004a) específica que una TIL informa a los profesores acerca de las metas de aprendizaje, las actividades de instrucción, las herramientas (objetos físicos, símbolos o notación) que serán usadas y un proceso de aprendizaje conjeturado en el que se anticipa cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes podrían evolucionar cuando las actividades de instrucción se usan en el aula.

La intención de elaborar una TIL es que pueda funcionar como marco de referencia para los profesores que deseen adaptar la secuencia de instrucción correspondiente a sus propias aulas y objetivos personales (Gravemeijer y Cobb, 2013). De este modo, las TILs ofrecen marcos de referencia con respecto al diseño de trayectorias hipotéticas de aprendizaje (Gravemeijer, 2004b). En concreto, la idea es que los profesores utilicen su visión en la TIL para elegir las actividades de instrucción y diseñar trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THAs) para sus propios estudiantes (Gravemeijer, 2004a).

En la literatura de investigación existen pocos ejemplos de TILs (Nickerson y Whitacre, 2010). A nivel universitario, se ha construido una TIL a los principios básicos de la tasa de cambio y velocidad (Doorman y Gravemeijer, 2009) y otra, a grupo e isomorfismo (Larsen, 2013). Esto último, nos impulsa a querer crear una innovación docente en este nivel educacional con la finalidad de aportar a la construcción de TILs en la universidad. En virtud de ello, escogemos el Álgebra Lineal, pues deseamos contribuir a su enseñanza y aprendizaje por ser un curso complejo para quienes se involucran con él.

1.4. Elección de conjunto generador y espacio generado para nuestra innovación docente

A fin de desarrollar una TIL articulada con el Álgebra Lineal se eligieron los conceptos de conjunto generador y espacio generado porque son primordiales por su relación con otros contenidos de este curso como base y dimensión de un espacio vectorial (Stewart y Thomas, 2010). Además, tienen múltiples aplicaciones tanto dentro como fuera de las matemáticas (Salgado, 2015). Sin embargo, la naturaleza y el tipo de pensamiento necesario en relación con la comprensión de este curso (Dorier y Sierpinska, 2001) conlleva a que los estudiantes tengan dificultad acerca del aprendizaje de estos contenidos. Carlson (1997) señala que ellos se sienten confundidos y desorientados cuando inician el estudio de este tipo de contenidos. Precisamente, Nardi (1997) advierte que confunden los términos de espacio generado y conjunto generador, utilizándolos de forma intercambiada.

Los conceptos de conjunto generador y espacio generado ya han sido considerados en estudios sobre innovaciones docentes (Wawro, Rasmussen, Zandieh, y Larson, 2013; Salgado, 2015). No obstante, nuestra investigación se focaliza en una visión teórica diferente a estas experiencias previas. La innovación docente que proponemos en dirección a crear una TIL en Álgebra Lineal se fundamenta en los modelos emergentes y la modelización matemática utilizada como herramienta de enseñanza.

1.5. Objetivos de la investigación

El objetivo general de nuestra investigación es producir una innovación docente empírica, fundamentada en los modelos emergentes y la modelización matemática, acerca de los conceptos de conjunto generador y espacio generado del Álgebra Lineal a nivel universitario. Para responder a este, nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

- Desarrollar una TIL para los conceptos de conjunto generador y espacio generado del Álgebra Lineal fundamentada en los modelos emergentes y la modelización matemática.

- Esbozar un diseño instruccional, empíricamente probado, con respecto a los conceptos de conjunto generador y espacio generado fundamentado en los modelos emergentes y la modelización matemática.

- Determinar el rol de la modelización matemática y los modelos emergentes en la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

2. Referentes teóricos

"No hay que empezar siempre por la noción primera de las cosas que se estudian, sino por aquello que puede facilitar el aprendizaje".

Aristóteles

El foco de interés de nuestra investigación es generar una innovación docente en el curso de Álgebra Lineal fundamentada en los modelos emergentes y la modelización matemática. Por esta razón, nuestra perspectiva teórica se basa en ambos enfoques.

Con el propósito de profundizar acerca de los modelos emergentes y la modelización matemática, en primer lugar, exponemos: en qué consiste la perspectiva de los modelos emergentes (apartado 2.1.), los cuatro niveles de actividad vinculados a estos y su rol tanto en el diseño como en la aplicación de una secuencia instruccional. En segundo lugar, referente a la modelización matemática (apartado 2.2.) explicamos: sus dificultades al tratar de implementarla en el aula, su actuación en la enseñanza de las matemáticas, el papel del ciclo de modelización en el proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos y la elección de una tarea que conlleve a su uso.

2.1. La heurística de los modelos emergentes

Los modelos emergentes es una de las principales heurística de diseño instruccional que puede ayudar a los diseñadores/investigadores a desarrollar TILs. Dicha heurística es parte de la teoría de instrucción conocida como la EMR[2] y se destaca porque ayuda a los estudiantes a construir, por sí mismos, una realidad matemática que no existe para ellos (Gravemeijer, 2007b). Esto, mediante un proceso de crecimiento gradual en donde las matemáticas formales pasan a primer plano como una extensión natural de su experiencia (Gravemeijer, 1999). De esta forma, los modelos emergentes se presentan como una alternativa a los enfoques de instrucción que se centran en la enseñanza de representaciones ya hechas (Gravemeijer, 2002), es decir, que solo transmiten el conocimiento.

El término *modelo* no debe ser considerado literalmente (Gravemeijer, 1997) porque puede referirse a un entorno de trabajo o a una descripción verbal, así como también a formas de simbolización y notación. Con frecuencia, los modelos se definen como formas concebidas por los estudiantes de organizar su actividad matemática con herramientas observables y mentales. Las herramientas observables son cosas en su entorno, tales como: gráficos, diagramas, definiciones explícitamente definidas, objetos físicos, etc. En tanto, las herramientas mentales aluden a las formas en que ellos piensan y razonan a medida que resuelven problemas (Zandieh y Rasmussen, 2010).

Los modelos son *emergentes* en el sentido de que surgen diversas maneras de crear y usar herramientas, gráficos, expresiones analíticas, entre otros, con rasgos cada vez más sofisticados de razonamiento (Rasmussen y Blumenfeld, 2007). En

[2] La EMR es una teoría de instrucción de dominio específico para las matemáticas que se ha llevado a cabo en Holanda. Se caracteriza porque a las situaciones ricas, *realistas* se les da un lugar destacado en el proceso de aprendizaje y sirven como base con el fin de iniciar el desarrollo de: conceptos matemáticos, herramientas y procedimientos. R*ealista,* desde la EMR, no solo involucran situaciones del mundo real sino que en general, se refiere a situaciones problemáticas que los estudiantes pueden imaginar (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014).

términos generales, los modelos emergentes se refieren tanto al proceso por el que surgen los modelos como al proceso por el que estos apoyan el surgimiento de un conocimiento matemático más formal (Gravemeijer, 2002). En particular, el modelo en la heurística de los modelos emergentes se configura realmente como una serie de simbolizaciones o herramientas consecutivas que pueden describirse como una cascada de inscripciones o una cadena de significación. (Gravemeijer, 2004a).

Inicialmente, los modelos son propios de un contexto y se refieren a situaciones concretas o paradigmáticas que son experiencialmente reales para los estudiantes. En este nivel, el modelo debe permitir estrategias informales que se correspondan con caminos de resolución conectadas a la situación que se define en el problema contextual. A partir de ello, el papel del modelo comienza a modificarse. Luego, mientras ellos reúnen más experiencia con problemas similares, su atención puede cambiar hacia las relaciones y estrategias matemáticas. Como consecuencia, el modelo obtiene un carácter más parecido a un objeto y se vuelve más importante. Este es visto como una base hacia el razonamiento matemático y no solo como una forma de representar un problema contextual. De este modo, el modelo comienza a convertirse en un soporte hacia el nivel de matemáticas formales. En resumen: un modelo-de actividad matemática informal se convierte en un modelo-para un razonamiento matemático más formal (Gravemeijer, 1997, 2007b).

Un razonamiento más formal se refiere a la constitución de la nueva realidad matemática, es decir, a un marco de relaciones matemáticas que es nuevo para los estudiantes (Gravemeijer, 2004a). Específicamente, ellos se encuentran en un razonamiento formal cuando invocan argumentos de esta nueva realidad matemática mientras se encuentran resolviendo una secuencia instruccional (Gravemeijer, 2002).

Un aspecto crucial de los modelos emergentes es que el cambio de modelo-de a modelo-para concurre con la creación de una nueva realidad matemática (Gravemeijer, 1999), es decir, de pensar en la situación modelada a razonar en un enfoque de relaciones matemáticas (Gravemeijer, 2004a; Doorman y Gravemeijer, 2009).

Los modelos emergentes se vinculan con tres procesos interrelacionados. El primero consiste en la transición global en que el modelo emerge, inicialmente, como un modelo-de la actividad matemática informal y poco a poco, se convierte en un modelo-para el razonamiento matemático más formal. El segundo implica la constitución de una nueva realidad matemática que emerge como un acto reflejo relacionado con la transición del modelo-de al modelo-para. El tercero se refiere a la emergencia de una cadena de significación que puede ser vista como la manifestación concreta del modelo en una serie de signos, en el que cada nuevo signo viene a significar una actividad con un signo anterior (Gravemeijer, 1999).

2.1.1. Los niveles de actividad vinculados a los modelos emergentes

La progresión del modelo-de al modelo-para puede estar definida en términos de cuatro niveles de actividad (Gravemeijer, 1997, 1999) que se denominan: situacional, referencial, general y formal (Ver Figura 1). La actividad situacional (o en el escenario de la tarea) implica interpretaciones y soluciones que dependen de la comprensión de cómo actuar en el contexto del problema (a menudo fuera de la escuela). La actividad referencial comprende modelos-de que se refieren al entorno descrito en las actividades de instrucción. La actividad general incluye modelos-para facilitar un enfoque en las interpretaciones y soluciones independientes de las imágenes particulares de la situación. La actividad formal conlleva a razonar con el simbolismo convencional y ya no depende del apoyo de los modelos-para la actividad matemática.

Respecto a los niveles de actividad (Figura 1), Zolkower y Bressan (2012) precisan que en el nivel situacional, el problema experiencial real se organiza por medio de estrategias que surgen espontáneamente del mismo. En el nivel referencial (modelo-de) aparecen gráficos, notaciones y procedimientos que esquematizan el problema. En el nivel general (modelo-para) se explora, reflexiona y generaliza lo aparecido en el nivel anterior (referencial), pero sin hacer alusión al contexto inicial. En el nivel formal se trabaja con procedimientos y notaciones convencionales desligadas de las situaciones que les otorgaron su significado inicial.

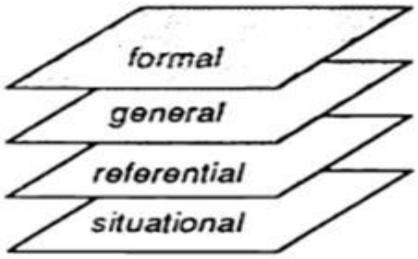


Figura 1. Los niveles de actividad vinculados a los modelos emergentes (Gravemeijer, 1997, p.340).

El propósito de describir los cuatro niveles de actividad es ilustrar que los modelos están inicialmente vinculados a la actividad en entornos fijos que incluyen imágenes propias de la situación. En el nivel referencial, los modelos se basan en la comprensión de los estudiantes de entornos paradigmáticos y experiencialmente reales. La actividad general comienza a surgir cuando el razonamiento de ellos pierde su dependencia de las imágenes específicas de la situación. En el proceso, el modelo se convierte en una entidad independiente (con vida propia) y sirve como un medio para el razonamiento matemático (Gravemeijer, 1999).

A pesar de que los cuatro tipos de actividad suponen claramente una progresión evolutiva, ello no involucra una jerarquía estrictamente ordenada. En la práctica, las discusiones de la actividad general y el razonamiento matemático con símbolos convencionales, con frecuencia, se remiten a la actividad referencial o incluso a la situacional (McClain y Cobb, 1998).

2.1.2. La secuencia instruccional desde los modelos emergentes

Los modelos emergentes son útiles respecto con una posible secuencia instruccional porque ofrece un medio dirigido a dar forma a una serie de tareas que puedan fomentar el desarrollo del conocimiento matemático abstracto (Gravemeijer, 2007a). La hipótesis inicial es que dicha secuencia podría entenderse como una transición desde el modelo-de al modelo-para. Algunas preguntas que orientan su diseño son: ¿Cuál es el modelo?, ¿Qué actividad está siendo modelada?, ¿Para qué sirve el modelo?, ¿Qué supone la transición del modelo-de al modelo-para? (Gravemeijer, 1999), ¿Cuál es la nueva realidad matemática que pretendemos que los estudiantes interpreten y cuáles son las relaciones matemáticas implicadas? (Gravemeijer, 2007b).

En el diseño de una secuencia instruccional se debe tener en cuenta que el modelo, en la transición del modelo-de al modelo-para, adquiere diversas manifestaciones. La idea es que los estudiantes utilicen las diversas simbolizaciones como herramientas y que cada actividad con una simbolización o herramienta más reciente, se experimente como una extensión natural de la anterior. En consecuencia, los símbolos matemáticos formales que ellos utilizarán, eventualmente se arraigarán en sus actividades concretas (Gravemeijer, 2002).

Desde la perspectiva de los modelos emergentes, el proceso de diseño de una secuencia instruccional lleva consigo la formulación de una THA. Con este fin, el diseñador piensa a fin de prever cómo las actividades de instrucción consiguen ser realizadas en la interacción del aula y qué pueden los estudiantes aprender en la medida que se involucran con estas (Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack, 2000).

Gravemeijer et al. (2000) especifican que el reto para el diseñador (y el profesor) es anticipar una ruta de desarrollo de los estudiantes de la clase que culmine con el uso de las simbolizaciones convencionales. La idea es que él proponga una ruta de progreso por la que primero modelen situaciones de una manera informal (un modelo-de la situación) y luego, matematicen su actividad de modelado informal (lo que produce un modelo-para el razonamiento matemático).

Por otra parte, en el contexto de aplicación de la secuencia instruccional, el profesor guía y apoya el proceso de presentación de las tareas, la elaboración de los temas de discusión así como la orquestación de las discusiones. Además, cuando es necesario, él realiza las conexiones con las convenciones y prácticas de la comunidad de matemáticos. De igual modo, tiene que anticipar otras cosas, como la gestión de la clase y la organización del trabajo en grupo e individual (Gravemeijer, 2004b).

En este sentido, los estudiantes tienen que averiguar las cosas por sí mismos y los profesores, en lugar de darles las respuestas, pueden hacerles preguntas nuevas. Aquí, un punto clave es la autonomía intelectual (Kamii, Lewis y Livingstone, 1993). En lugar de tener al maestro como la autoridad, el aula tiene que ser independiente en la construcción del conocimiento matemático como una comunidad de aprendizaje. Esto trae consigo, algunas obligaciones para los estudiantes que se refieren a: explicar y justificar sus soluciones, tratar de entender las explicaciones y razonamientos de sus pares, pedir aclaraciones si es necesario y desafiar las formas de pensar con las que no están de acuerdo (Gravemeijer, 2004b).

En síntesis, el diseño y la aplicación de una secuencia instruccional desde los modelos emergentes conlleva a que el diseñador y el profesor ejecuten ciertas acciones, las cuales se recopilan en la Figura 2.

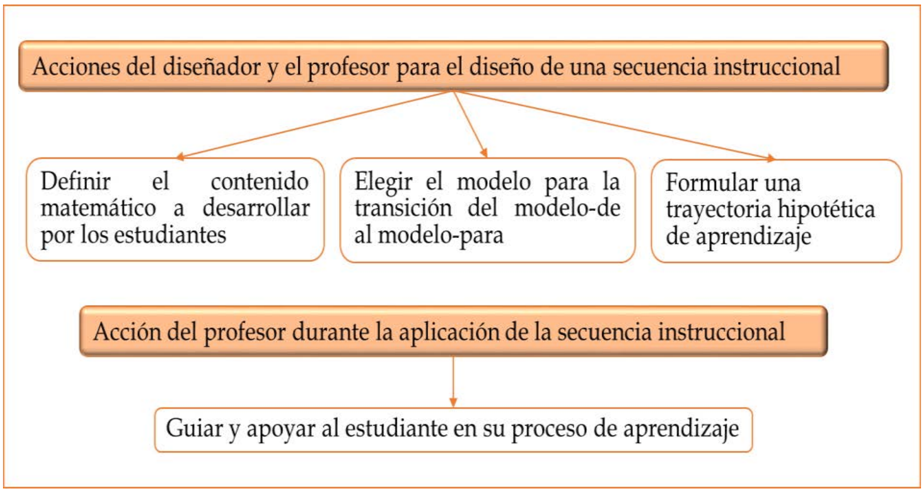


Figura 2. Acciones del diseñador y el profesor en el diseño y aplicación de una secuencia instruccional desde los modelos emergentes.

2.2. La modelización matemática en el aula

Lesh y Caylor (2007) enfatizan que las declaraciones de estándares curriculares orientadas al futuro identifican a la modelización de datos como un tema que debe recibir atención. Especialmente, en aquellos estándares que tienen como objetivo preparar a los estudiantes hacia futuras profesiones y a la participación productiva en sociedades dinámicas. Es importante que los ciudadanos sean informados del uso básico de conceptos con la finalidad de que sean capaces de modelizar datos y dar sentido a los gráficos, diagramas, tablas y otros tipos de artefactos matemáticos que son frecuentes en los medios de comunicación.

Estamos de acuerdo con Niss (2012) en que la introducción de la modelización matemática en el aula es necesaria, ya que no hay una transferencia garantizada de conocimientos y habilidades matemáticas a conocimientos y habilidades relacionados con modelos y modelización. En virtud de ello, nuestra innovación docente para el curso de Álgebra Lineal incorporó la modelización matemática como se puede ver, por ejemplo, en Cárcamo, Gómez y Fortuny (2016).

La modelización matemática proporciona un espacio en el cual los estudiantes pueden aprender las matemáticas curriculares de varias maneras. El aprendizaje que tiene lugar durante el proceso de modelización implica potencialmente una comprensión más profunda del contenido matemático y una motivación por construirlas (Zbiek y Conner, 2006).

Blomhøj (2004) plantea que la modelización matemática extiende puentes entre la experiencia de la vida cotidiana y las matemáticas. Blum y Borromeo-Ferri (2009) identifican que contribuye a ayudar a los estudiantes a comprender mejor el mundo, apoyar el aprendizaje de las matemáticas (motivación, formación de conceptos, comprensión), desarrollar diversas competencias matemáticas (e incluso, actitudes) y tener una imagen adecuada de las matemáticas. Igualmente, gracias al proceso de modelización, las matemáticas se vuelven más significativas para quienes las están aprendiendo.

Lesh y English (2005) conjeturan que la introducción de la modelización matemática en el aula a través de situaciones problemáticas que sean de interés para los estudiantes les permitirá que sean capaces de indagar formas de representarlas en términos matemáticos, explorar las relaciones que aparecen entre ellos y desarrollar ideas poderosas que se puedan canalizar hacia las matemáticas que se desea enseñar.

2.2.1. Dificultades con la implementación de la modelización matemática

Burkhardt (2006) trata la existencia de ciertas barreras, que dificultan la inclusión de la modelización matemática en los currículos actuales, tales como: la predominancia aún del estilo de la enseñanza EEE (explicación, ejemplos, ejercicios imitativos), el rechazo por incluir el mundo real en muchas clases de matemáticas, la limitación del perfeccionamiento profesional de los profesores o el rol y la naturaleza de la investigación en el aula. Con la finalidad de superarlas, este autor propone ciertas acciones que pueden facilitar el progreso en la incorporación, a gran escala, de las actividades de modelización matemática en las prácticas escolares. Entre las se encuentran: cambios en la descripción de los currículos, diseños de un buen material que aplique y evalúe los cambios introducidos, e inversiones en la formación y desarrollo profesional de quienes enseñan.

En el ámbito universitario, la modelización matemática relacionada con el aprendizaje de las matemáticas ha tardado en llegar debido a la barrera del estilo de enseñanza EEE planteada por Burkhard (2006). Según Trigueros (2009), la enseñanza de las matemáticas que continua predominando, en el nivel universitario, es la tradicional. Aquella en que las clases se imparten casi siempre en forma de conferencia y se introducen las definiciones o teoremas de manera más o menos lineal. En tanto, la resolución de problemas debe ser realizada fuera del aula. Generalmente este tipo de enseñanza olvida que se encuentra dirigida a estudiantes cuyo interés primordial es justamente la aplicación de las matemáticas y no ellas en sí misma. Con la finalidad de fomentar el cambio del estilo de enseñanza EEE, el objetivo de nuestra investigación fue generar una innovación docente ajustada a este nivel educativo que incluyera la modelización matemática.

2.2.2. La modelización matemática focalizada en la enseñanza de las matemáticas

Barquero (2009) resalta que existe una atención creciente, por parte de la comunidad investigadora en educación matemática, acerca del rol que la modelización matemática puede ejercer sobre la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles educativos. Este interés ha llegado incluso a promover el impulso mundial hacia su inclusión en los currículum de matemáticas o temas ligados con las aplicaciones de las matemáticas.

Existen diversos enfoques que tienen como objetivo introducir la modelización matemática en el aula. Kaiser y Sriraman (2006) hacen una primera propuesta de clasificación acerca de estos que posteriormente, es modificada por Kaiser, Sriraman, Blomhøj y García (2007). Basados en esta clasificación, Kaiser y Schwarz (2010) proponen distinguir siete enfoques de modelización matemática entre los que identifican dos tendencias:

- la tendencia pragmática-utilitaria que pone en primer plano, la solución de los problemas del mundo real, la comprensión del mundo real y la promoción de las competencias de modelización. Este enfoque aboga por el uso de problemas auténticos (Niss, 1992) que provienen de campos específicos y que son reconocidos como tal por las personas que trabajan en ellos;

- la tendencia desde una perspectiva más educativa diferencia a la modelización matemática como vehículo y como contenido (Julie y Mudaly, 2007). La modelización como vehículo tiene la finalidad de motivar a los estudiantes y proporcionar una base que los conduzca al desarrollo de un contenido matemático particular. En tanto, la modelización como contenido posee como objetivo promover la capacidad de los estudiantes con la finalidad de que resuelvan problemas en el mundo externo.

En nuestra investigación adoptamos la tendencia de la modelización matemática educativa en donde es un vehículo que conduce hacia la enseñanza de conceptos matemáticos a través de contextos que son reales para los estudiantes. Asimismo, elegimos esta perspectiva porque nos interesa aportar a la problemática de estudio manifestada por García (2005) referente al rol que la modelización matemática desempeña o podría ejercer en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En particular, nos importa determinar el papel de la modelización matemática en la construcción de conjunto generador y espacio generado del Álgebra Lineal.

La modelización como vehículo asume que relacionar la actividad matemática escolar con ciertos ámbitos de la realidad cotidiana, o de otras disciplinas, tiene un efecto positivo en la motivación del estudiante y en su actitud hacia las matemáticas. Esto repercute en una mejora tanto en la cantidad como en la calidad del aprendizaje matemático que se pretende lograr (García, 2005). Al respecto, Barquero (2009) agrega que la modelización como vehículo (o técnica didáctica) tiene una consecuencia efectiva en la capacidad futura del estudiante acerca de cómo emplear las matemáticas en los problemas que surjan en su vida cotidiana o profesional.

Los propósitos de la modelización matemática como vehículo, principalmente, se refieren a necesidades curriculares y a usar contextos del mundo real con el objeto de ayudar a desarrollar contenidos matemáticos (Galbraith, Stillman, y Brown, 2010). Se utiliza implícitamente en los procesos de estudio de las matemáticas (Barquero, 2009) y sirve para aquellas aulas en que los objetivos de aprendizaje se centran en la matemática curricular (Zbiek y Conner, 2006).

La modelización matemática como vehículo puede considerarse una metodología de enseñanza que parte de una situación y a partir de ella surgen cuestiones o preguntas que se quieren comprender, resolver o inferir. Algunas investigaciones han mostrado que en la enseñanza, es una herramienta que propicia un mejor desempeño del estudiante, siempre y cuando se adapte a la realidad de las comunidades escolares (Biembengut y Hein, 2004).

Vos (2010) ofrece una retrospectiva respecto a 25 años de revisiones curriculares en Holanda que ejemplifica con dos proyectos nacionales que implementaron nuevas rutinas en la educación matemática holandesa. Uno de los proyectos introdujo un nuevo plan de estudios de matemáticas dirigido a cursos entre 7º y 10º grado en el cual la modelización sirvió como un vehículo para la construcción de conocimientos matemáticos. En particular, esta autora determina que hay indicios de que los estudiantes dotados con menos recursos, se benefician con este enfoque.

Ikeda (2013) plantea que el vínculo entre la modelización matemática y la construcción de conocimientos matemáticos se selecciona con el fin de responder a preguntas de este tipo: ¿Cómo está la modelización matemática relacionada con la construcción de conocimientos matemáticos en la enseñanza de las matemáticas?

Por otra parte, Ikeda (2013) expone que los procesos de modelización matemática y las habilidades de modelización son familiares para los científicos y otros que usan la matemática como herramienta. Lo anterior, debido a que ellos han experimentado el proceso de la modelización matemática en numerosas ocasiones. Sin embargo, los estudiantes no lo saben bien, pues la mayoría no han experimentado la modelización matemática por lo que no tienen idea cómo plantear una situación del mundo real en términos matemáticos.

2.2.3. El ciclo de modelización para guiar a los estudiantes

La modelización matemática puede ser percibida como una práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje, lo que es relevante en cualquier nivel de enseñanza

(Blomhøj, 2004). Es un proceso que conduce de una situación problemática a un modelo matemático. No obstante, se ha vuelto común usar esta noción con respecto a todo el procedimiento que consiste en: la estructuración, el análisis de los datos reales, la generación de información, la matematización, el trabajo matemático, la interpretación y la validación (varias veces alrededor del ciclo) según lo descrito (Niss, Blum, y Galbraith, 2007). El proceso de modelización completo se representa a menudo como un ciclo que no siempre debe ser completo o repetirse varias veces (Greefrath y Vorhölter, 2016).

En principio, existe un proceso de modelización matemática detrás de todo modelo matemático. Lo anterior, significa que alguien, de forma implícita o explícita, ha recorrido un proceso con el propósito de establecer una conexión entre alguna idea matemática y una situación real. Dicho proceso no debe ser entendido como un proceso lineal, pues siempre toma forma cíclica en donde las reflexiones del modelo y la intención acerca del uso de este, conducen a una redefinición de la solución propuesta (Blomhøj, 2004).

En la literatura se encuentran variados ciclos de modelización matemática (Borromeo-Ferri, 2010) y algunos de ellos, pueden apoyar a los estudiantes que trabajan con problemas de modelización en las clases (Greefrath y Vorhölter. 2016). Puntualmente, en nuestra investigación se emplea el ciclo de modelización sugerido por Blum y Leiss (2007) que se ve en la Figura 3. Se optó por este ciclo porque pensamos que es lo suficientemente detallado a fin de que el profesor guíe la resolución de la tarea de modelización matemática formulada en la innovación docente de nuestro estudio. El ciclo de modelización matemática descrito por Blum y Leiss (2007) consta de seis elementos y siete fases que sigue un modelador a fin de resolver problemas que necesiten de este proceso (aunque no necesariamente de forma lineal).

El ciclo de modelización que se observa en la Figura 3, según lo describe Leiss (2007) comienza con un problema del mundo real que es esencial comprenderlo con el objetivo de construir un modelo de la situación idiosincrásica. Después de simplificar y estructurar dicho modelo, este se convierte en un modelo matemático mediante la traducción a la matemática. El objetivo de la etapas siguiente es resolver el problema matemático resultante (trabajar matemáticamente). La interpretación de esta solución matemática corresponde a su traducción en el contexto real. Los resultados deben ser verificados por un paso de validación que determine si el problema se resuelve de una manera satisfactoria. Si lo hace, la solución del problema debe presentarse de una manera apropiada (Zöttl, Ufer y Reiss, 2010).

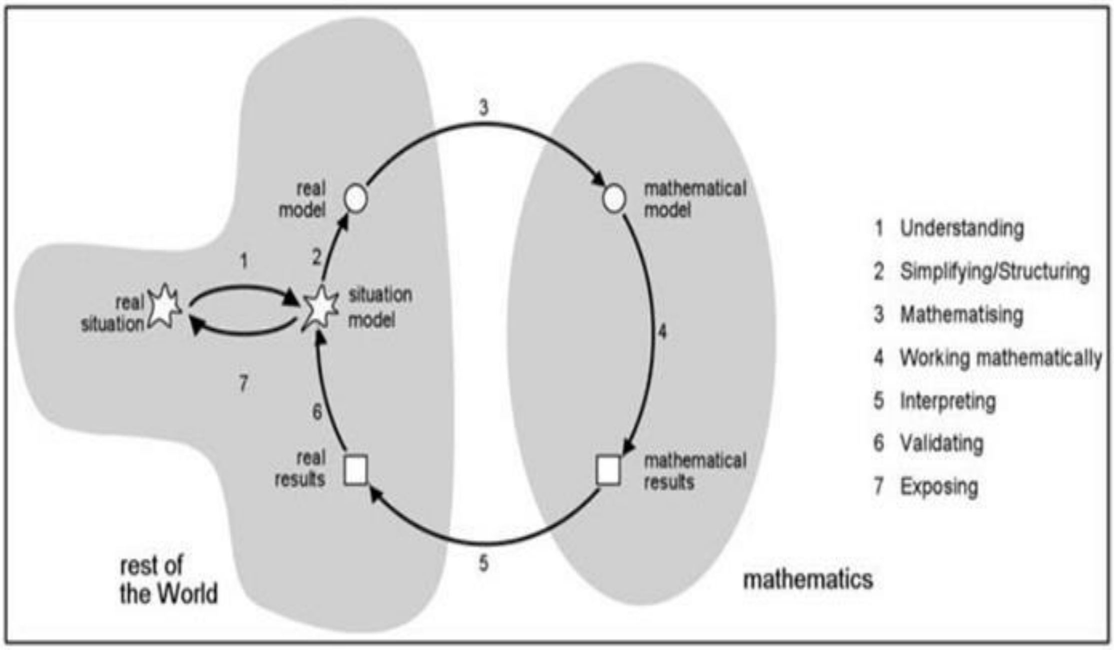


Figura 3. El ciclo de modelización matemática propuesto por Blum y Leiss (2007, p. 225)

Por otra parte, si los resultados obtenidos siguiendo el ciclo de modelización matemática no se ajustan al contexto real, se tiene que repetir este proceso o partes de este con la finalidad de obtener u optimizar la solución (Zöttl, Ufer y Reiss, 2010).

Los diferentes ciclos de modelización describen subprocesos con un nivel distinto de detalle y énfasis. La capacidad de realizar un cierto subproceso puede verse como una competencia parcial de modelización (Kaiser, 2007). Las competencias parciales (o sub-competencias) en el ciclo de modelización de la Figura 3 (planteado por Blum y Leiss, 2007) se pueden caracterizar a través de indicadores como se muestra en la Tabla 1.

La modelización matemática dividida conscientemente en procesos parciales permite la formación de competencias parciales individuales y la institución de una competencia de modelización integral a largo plazo. Esta visión tiene dos finalidades: reducir la complejidad del problema tanto a los profesores como a los estudiantes y crear tareas (o preguntas) adecuadas (Greefrath y Vorhölter, 2016).

Tabla 1. Sub-competencias involucradas en el ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiss (2007). Tabla extraída y traducida de Greefrath y Vorhölter (2016, p.19).

Sub-competencia	**Indicador**
Construyendo	Los estudiantes construyen su propio modelo mental a partir de un problema dado y así formulan una comprensión de su problema.
Simplificando	Los estudiantes identifican información relevante e irrelevante de un problema real.
Matematizando	Los estudiantes traducen situaciones reales específicas y simplificadas en modelos matemáticos (por ejemplo, términos, ecuaciones, figuras, diagramas y funciones)
Interpretando	Los estudiantes relacionan los resultados obtenidos de la manipulación dentro del modelo a la situación real y así obtienen resultados reales
Validando	Los estudiantes juzgan los resultados reales obtenidos en términos de plausibilidad
Exponiendo	Los alumnos relacionan los resultados obtenidos en el modelo situacional con la situación real y obtienen así una respuesta al problema.

2.2.4. La elección de una tarea de modelización matemática

El diseño de un problema es importante en el proceso de modelización y puede influir en el trabajo que los estudiantes hagan con ella (Greefrath y Vorhölter, 2016). Por lo tanto, es importante preguntarse: ¿Cuál es una tarea de modelización adecuada? Al respecto Galbraith (2007) precisa dos características: la coherencia con un propósito declarado y la introducción de tareas de modelización del mundo real.

Galbraith (2007) señala que para introducir tareas de modelización del mundo real es importante utilizar modelos basados en la experiencia del estudiante y con respecto a elegirlos, se deben hacer preguntas tales como: ¿El problema se refiere al entorno de ellos en el presente, en el pasado o en el futuro?, ¿Compromete a la mayoría de los estudiantes o sólo a unos pocos? o ¿Está relacionada con una situación que los identifica como ciudadano o con su profesión o vocación? A la vez, este autor valora la motivación del estudiante al momento de introducir tareas de modelización. En este caso, el papel del profesor es aclarar la razón por la que se debe resolver el problema y establecer la situación adecuada con el propósito de que los estudiantes puedan aceptar el problema planteado por alguien como propio.

3. Metodología

"En la investigación es incluso más importante
el proceso que el logro mismo".
Emilio Muñoz

En este capítulo se describe la metodología de nuestro estudio que es la investigación basada en el diseño (IBD) (apartado 3.1.) y la función que desempeña la trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) en ella (apartado 3.2.). Posteriormente, se describen las fases de la IBD (apartado 3.3.): la preparación del experimento, el experimento de enseñanza y el análisis retrospectivo. Finalmente, se hace mención a la calidad de nuestra investigación y a sus consideraciones éticas (apartado 3.4.).

3.1. La investigación basada en el diseño (IBD)

Nuestro estudio tiene como finalidad contribuir con una innovación docente fundamentada en los modelos emergentes y la modelización matemática para los conceptos de conjunto generador y espacio generado de Álgebra Lineal a nivel universitario. A fin de responder a este propósito, se escogió como metodología, la investigación basada en el diseño[3] (IBD) porque tiene como objetivo general investigar las posibilidades de mejora educativa mediante la creación y el análisis de nuevas formas de aprendizaje (Gravemeijer y van Eerde, 2009). De igual forma, porque tiene el potencial de superar la brecha entre la práctica educativa y la teoría, ya que apunta tanto a desarrollar teorías del aprendizaje en un dominio específico como a los medios diseñados con el objeto de apoyarlos (Bakker y van Eerde, 2015).

La IBD es el estudio sistemático del diseño, desarrollo y evaluación de intervenciones educativas como: programas, estrategias y materiales de enseñanza-aprendizaje, productos y sistemas. Asimismo, se interesa por encontrar soluciones a problemas complejos en la práctica educativa. Lo anterior, a fin de avanzar en el conocimiento de las características de estas intervenciones, los procesos de su diseño (o ejecución) o la validación de teorías (Plomp, 2013).

Referente a la IBD, Grameveijer (2004a) puntualiza que "the core of this type of research is formed by classroom teaching experiments that center on the development of instructional sequences and the local instructional theories that underpin them" (p. 108). Además, él señala que el objetivo de esta investigación es proporcionar una teoría empíricamente fundamentada sobre cómo los

[3] En su historia relativamente breve, la investigación basada en el diseño ha sido presentada bajo diferentes nombres. Como por ejemplo: investigación de diseño, investigación de desarrollo, experimentos de diseño. Las razones de estos diferentes términos son principalmente históricas y retóricas. Se utiliza el término investigación basada en el diseño (IBD) porque sugiere que predomina la investigación (por lo tanto conduce a una afirmación de conocimiento) y que se basa en un proceso de diseño (Bakker y van Eerde, 2015).

investigadores piensan que un cierto conjunto de actividades de instrucción podría funcionar.

Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble (2003) precisan que la IBD tiene, entre otras, las siguientes características transversales:

- Posee dos componentes: prospectiva y reflexiva. Al implementar el aprendizaje hipotético (la parte prospectiva) los investigadores confrontan conjeturas con el aprendizaje real que observan (parte reflexiva). La reflexión puede hacerse después de cada lección. Este análisis reflexivo puede conducir a cambios en el plan original hacia la siguiente lección. Kanselaar (1993) afirma que cualquier buen estudio educativo tiene las componentes prospectivas y reflexivas.

- Su diseño iterativo (o de naturaleza cíclica). Las conjeturas acerca del aprendizaje, a veces, son refutadas y suposiciones alternativas son generadas y probadas. El resultado es un proceso con ciclos de invención y revisión.

- La teoría en desarrollo tiene que hacer un trabajo real. Las teorías efectuadas durante el proceso de experimentación son llanas en el sentido de que se ocupan de los procesos de aprendizaje de un dominio, por ejemplo, el Álgebra Lineal. Sin embargo, Bakker y van Eerde (2015) advierten que deben ser lo suficientemente generales a fin de ser aplicables en diferentes contextos como las aulas de escuelas de otros países. En tales casos se habla de transferibilidad.

El rendimiento teórico distingue a la IBD de otros estudios que apuntan exclusivamente a diseñar materiales educativos con la ayuda de ciclos iterativos de pruebas y mejora de prototipos (Bakker y van Eerde, 2015). Por otra parte, los productos de la IBD son juzgados no solo por el rigor del proceso de investigación que es más prominente en la evaluación de verdaderos experimentos sino que también por la innovación y la utilidad, (Plomp, 2007). El producto de este tipo de investigación es, por lo general, un diseño instruccional y una teoría de instrucción local (Gravemeijer y Cobb, 2013).

En la IBD, Cobb y Gravemeijer (2008) especifican que se distinguen tres fases: (1) la preparación del experimento, (2) el experimento de enseñanza (experimentación para promover el aprendizaje) y (3) el análisis retrospectivo. En la segunda fase se efectúan las intervenciones en el aula y las sucesivas iteraciones de ciclos de tres pasos: diseño (diseño y formulación de hipótesis), prueba (intervención en el aula junto con la recogida de datos) y revisión (análisis de los datos con el propósito de revisar y reformular la hipótesis).

3.2. La trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) en la IBD

Durante las fases de la IBD, la THA es un instrumento de diseño e investigación que resulta útil (Bakker y van Eerde, 2015). De acuerdo con Simon (1995), la THA se compone de tres elementos: la meta de aprendizaje que define la dirección, las tareas de aprendizaje y el proceso hipotético de aprendizaje (una predicción de cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes evolucionarán en el contexto de las tareas de aprendizaje).

La THA es una herramienta valiosa de investigación porque maneja la brecha entre una teoría de instrucción y un experimento de enseñanza concreto. Se fundamenta en teorías de instrucción de dominio específico (por ejemplo, la teoría de la EMR) y en algunas teorías de instrucción local (Gravemeijer, 1994, 2004a). Asimismo, la THA informa tanto a los investigadores como a los profesores sobre cómo llevar a cabo el experimento de enseñanza y después de realizado este, guía el análisis retrospectivo. La interacción entre la THA y los resultados empíricos constituyen la base hacia la elaboración de una teoría. Esto significa que una THA, luego de haber sido diseñada, tiene diferentes funciones dependiendo de la fase de la IBD y se va desarrollando continuamente a través de ellas.

Incluso puede cambiar durante un ciclo del experimento de enseñanza (Bakker y van Eerde, 2015).

La noción de THA parece sugerir que todos los estudiantes siguen la misma trayectoria de aprendizaje a la misma velocidad. Aunque, más que una estructura rígida, la THA representa una ruta de aprendizaje flexible, ya que ellos pueden efectuarla a diferentes ritmos (Drijvers, 2003) e incluso, consideramos que pueden seguir otra ruta de aprendizaje que se desvíe en mayor o en menor grado de la THA propuesta.

3.3. Las fases de la IBD

Se hace notar que, aunque se disciernen tres fases en la IBD, los límites entre ellas no son fijos. Durante la fase de preparación o del experimento de enseñanza pueden variar el diseño de las tareas de instrucción. En cuanto a la frontera entre el experimento de enseñanza y el análisis retrospectivo, se advierte que el análisis de datos comienza durante el experimento de enseñanza. No obstante, la tercera fase de la IBD crea una oportunidad para un análisis más profundo y sistemático de los mismos datos (Gravemeijer y van Eerde, 2009).

3.3.1. Fase 1: preparación del experimento

La primera fase incluyó la elaboración de una THA sobre conjunto generador y espacio generado, lo que implicó que se precisaran los elementos de la THA que menciona Simon (1995): la meta de aprendizaje, las tareas de aprendizaje y el proceso hipotético de aprendizaje.

La meta de aprendizaje era que los estudiantes comprendieran los conceptos de conjunto generador y espacio generado con una secuencia instruccional diseñada ad hoc basado en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática.

El diseño de las tareas y del proceso hipotético de aprendizaje de la THA del ciclo 1 del experimento de enseñanza (ver Tabla 2) se basó en: el marco teórico de nuestro estudio (los modelos emergentes y la modelización matemática), algunos libros de textos de Álgebra Lineal[4], las dificultades de los estudiantes con este curso (Nardi, 1997; Carlson, 1997) y nuestra experiencia docente en lo referente a la enseñanza conjunto generador y espacio generado a nivel universitario.

Los modelos emergentes guiaron el diseño y la estructura de la THA. En tanto, la modelización matemática se usó como una herramienta de enseñanza. En el diseño de las tareas de la THA, siguiendo a Drijvers (2003), una pregunta clave fue: ¿Qué problemas significativos pueden favorecer el desarrollo cognitivo de acuerdo con los objetivos de la THA? Con el objeto de responder a esta interrogante, se buscó un problema que inicialmente condujera a los estudiantes a modelos-de la situación problemática concreta, pero que tuvieran el potencial de convertirse en modelos-para nuevas relaciones matemáticas. Sin embargo, dicha situación no se encontró en estudios relacionados con estos conceptos ni en libros de texto de Álgebra Lineal. Por este motivo, nosotros la diseñamos.

La elaboración de problema inicial de nuestra THA se hizo teniendo en cuenta las características que debe tener una tarea de modelización según Galbraith (2007), es decir, la coherencia con un propósito declarado y la introducción de tareas de modelización del mundo real. En nuestro caso, el objetivo fue que los estudiantes construyeran conjunto generador y espacio generado en un contexto real. Asimismo, la tarea que involucró el uso del ciclo de modelización es del mundo real y se refirió al entorno actual de los participantes del experimento de enseñanza. Esto porque estuvo inserto en el contexto de generar contraseñas, algo que ellos deben hacer frecuentemente hoy en día para evitar que sus redes sociales u otras páginas web a las que ingresan sean intervenidas por desconocidos.

[4] Los libros de álgebra lineal que se utilizaron fueron: Álgebra Lineal y sus aplicaciones de Lay (2007), Álgebra Lineal de Grossman (1996) y Álgebra Lineal de Lipschutz (1992).

Las tareas de la THA fueron mostradas a tres doctores en didáctica de la matemática que tenían experiencia con el curso de Álgebra Lineal, lo que dio lugar a una retroalimentación y nos dio la oportunidad de mejorarlas.

Tabla 2. Resumen de la THA aplicada en el ciclo 1 del experimento de enseñanza.

Tarea y su descripción	**Conjetura de la ruta de aprendizaje**
Tarea 1: Pide crear un generador de contraseñas seguras basado en vectores.	Los estudiantes: (a) Leen información de las contraseñas seguras. (b) Crean un generador de contraseñas siguiendo los pasos del ciclo de modelización y utilizando sus concepciones previas tanto de vectores como de contraseñas.
Tarea 2: Pide hacer una tabla de analogía entre su generador de contraseñas y los conceptos de conjunto generador y espacio generado.	Los estudiantes: (a) Relacionan correctamente el concepto de conjunto generador con el conjunto de su generador de contraseñas que contiene los vectores que al hacer la combinación lineal con ellos se obtiene el vector para cada contraseña numérica. (b) Vinculan correctamente el concepto de espacio generado con el conjunto de su generador de contraseñas que posee todos los vectores que permiten generar las contraseñas numéricas. (c) Realizan una tabla de analogía en donde vinculan: los conceptos de conjunto generador y espacio generado con dos conjuntos de su generador de contraseñas y mencionan el nombre que recibe en su generador de contraseñas.
Tarea 3a: Pide determinar si los conjuntos B y C (B=<(1,0,0),(0,1,0),(0,0,2>, C={(1,0,0),(0,2,0),(0,0,1)}) tiene la misma cantidad de elementos.	Los estudiantes: (a) Identifican que los conjuntos B y C tienen distintos paréntesis. (b) Reconocen que el conjunto B tiene notación de un espacio generado mientras que el conjunto C corresponde a la notación de un conjunto generador. (c) Determinan que los conjuntos B y C no tienen la misma cantidad de elementos, pues B posee infinitos, a diferencia de C que contiene solo tres vectores.
Tarea 3b: Pide establecer si es verdadero o falso que el vector (2,-3) pertenece al espacio generado por {(1,0), (0,-1)}	Los estudiantes: (a) Identifican el conjunto {(1,0), (0,-1)} como un conjunto generador de un espacio generado. (b) Realizan una combinación lineal con los vectores del conjunto dado y el vector (2,-3). (c) Determinan que es verdadero que el vector (2,-3) pertenece al espacio generado por {(1,0), (0,-1)}.
Tarea 3c: Pide graficar para encontrar el espacio generado por el conjunto generador A={(2,0)}	Los estudiantes: (a) Multiplican por diferentes escalares el vector del conjunto A. (b) Representan en el plano cartesiano los vectores obtenidos de la multiplicación del vector del conjunto A por diferentes escalares. (c) Observan que el espacio generado por el conjunto generador A corresponde a una recta. (d) Anotan en forma analítica el espacio generado por el conjunto generador A.

En lo que se refiere al rol del profesor, la THA fue diseñada para que él asumiera un rol proactivo durante cada ciclo del experimento de enseñanza. A él le correspondió: establecer la cultura de clase apropiada, elegir e introducir las tareas de aprendizaje, organizar el trabajo en grupo, seleccionar los posibles temas de discusión y orquestarlos (Gravemeijer, 2004a). Por lo tanto, se supuso que él apoyaría a los estudiantes en su proceso de construcción de conjunto generador y espacio generado. Las principales acciones del maestro mientras aplicó la THA en el ciclo 1 del experimento de enseñanza se muestran en la Figura 4.

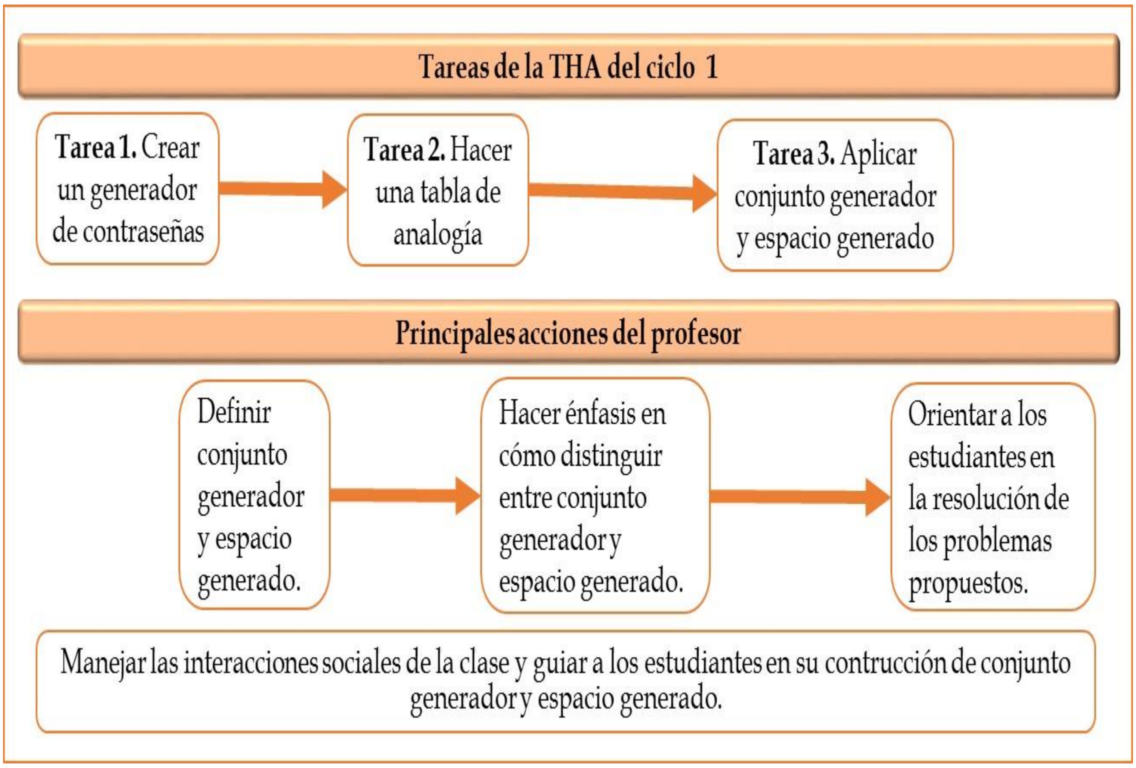


Figura 4. Principales acciones del profesor mientras aplica la THA en el ciclo 1 del experimento de enseñanza.

3.3.2. Fase 2: experimento de enseñanza

En la fase del experimento de enseñanza, las expectativas previas incorporadas en la THA se enfrentan con la realidad del aula (Drijvers, 2003). La THA se (re)diseña, prueba y revisa. A medida que se generan y se refutan algunas conjeturas, se desarrollan y prueban otras (Gravemeijer y van Eerde, 2009). La exploración con nuevas conjeturas vinculadas con la THA, generalmente, se hacen debido a incidentes en el aula, tales como: estrategias de los estudiantes que no habían sido previstas o tareas que eran demasiado difíciles (Bakker y van Eerde, 2015).

En nuestra investigación se ejecutaron tres ciclos en la fase del experimento de enseñanza (ver Figura 5) en una universidad española con estudiantes de primer año de ingeniería. Cada ciclo contempló una intervención en el aula de cinco horas distribuidas en tres sesiones en donde se trabajó en grupos (de 3 a 5 integrantes) las tareas definidas en la THA.

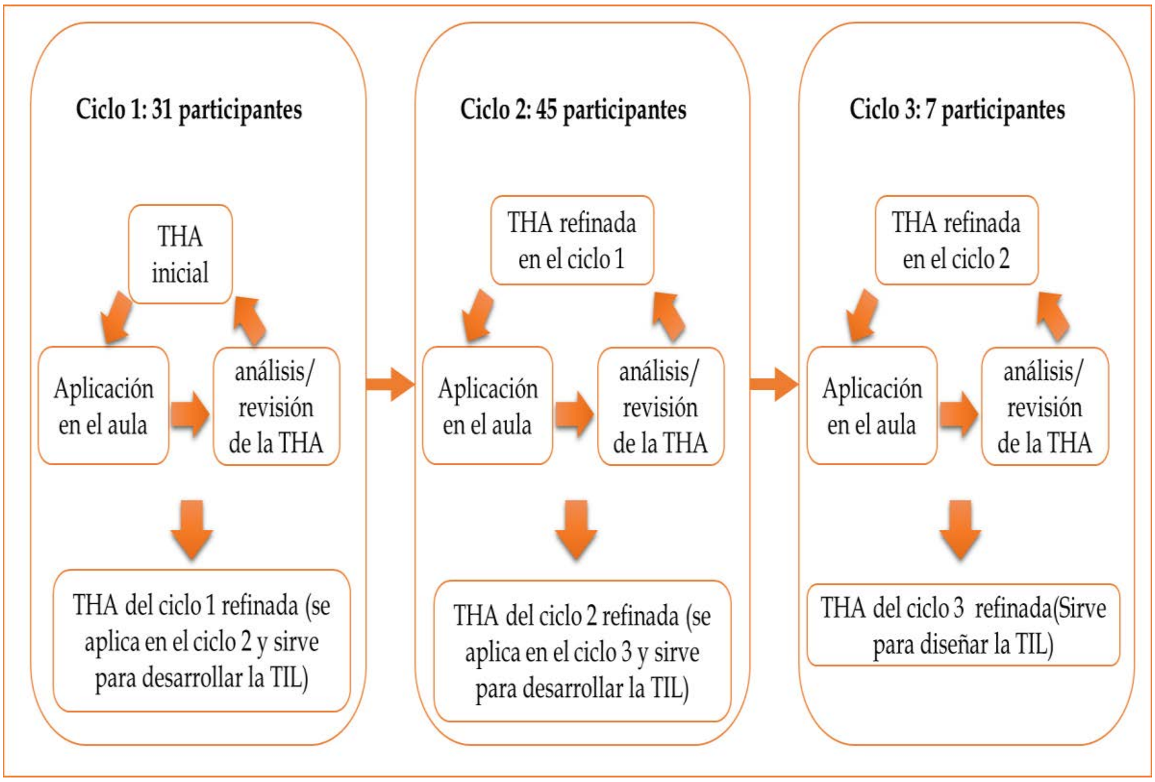


Figura 5. Los tres ciclos del experimento de enseñanza efectuados en nuestra investigación.

Las suposiciones sobre los puntos de partida de los estudiantes, en cada ciclo del experimento de enseñanza, fueron que comprendían la noción de vector y no habían trabajado previamente con la modelización matemática ni los conceptos de conjunto generador ni espacio generado. Esta información fue proporcionada por el profesor de cada curso en que se hizo un ciclo del experimento de enseñanza.

La fuente principal de datos fueron los protocolos escritos de las tareas desarrolladas por los estudiantes. Esta fue complementada con: grabaciones de vídeo y audio del trabajo de algunos grupos, entrevistas individuales a estudiantes y evaluaciones escritas individuales de los estudiantes (efectuadas posteriormente a la intervención en el aula). Lo anterior, forma parte de la recolección de datos típica durante la fase del experimento de enseñanza (Bakker y van Eerde, 2015). Los datos recopilados en cada ciclo del experimento de enseñanza se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Los datos recogidos en cada ciclo del experimento de enseñanza.

Ciclo del experimento de enseñanza	**Nº protocolos escritos**	**Nº grabación en: audio (Nº a) o en vídeo (Nº v)**	**Nº evaluaciones individuales**	**Nº estudiantes entrevistados**
1	8	Nº a: 1 y Nº v: 1	22	3
2	14	Nº a: 2 y Nº v: 2	44	3
3	2	Nº a: 1 y Nº v: 1	7	3

3.3.3. Fase 3: análisis retrospectivo

El análisis retrospectivo tuvo por objeto responder a los objetivos específicos de nuestro estudio que se refieren a: desarrollar una TIL y esbozar una secuencia instruccional sobre conjunto generador y espacio generado junto con determinar el papel de los modelos emergentes y la modelización matemática en la construcción de estos conceptos de Álgebra Lineal.

En la fase tres de la IBD, basados en lo que plantean Bakker y Eerde (2015), el análisis de la interacción entre la THA y las observaciones empíricas de cada ciclo constituyó el cimiento para elaborar la TIL de nuestra investigación y la secuencia instruccional.

En la IBD son necesarios dos tipos de análisis de datos (Bakker y Van Eerde, 2015): uno después de cada ciclo del experimento de enseñanza y otro, de todo el proceso de investigación, es decir, del proceso cíclico más general. Molina (2006) puntualiza que el primero, denominado *análisis preliminar*, se refiere al análisis de los datos a continuación de cada ciclo del experimento de enseñanza y conduce a la toma de decisiones con respecto a futuras intervenciones, facilitando tanto la revisión como el desarrollo de la conjetura de estudio. En tanto, el *análisis* *global* profundiza en todo el proceso de experimento y en los datos recogidos. Este conduce a la construcción de una historia coherente de la evolución de la TIL a lo largo de la experimentación. De este modo, según Gravemeijer y Cobb (2013) se puede afirmar que los resultados de la IBD están empíricamente fundamentados. En la Figura 6 se presenta una síntesis del proceso de análisis realizado en nuestra investigación.

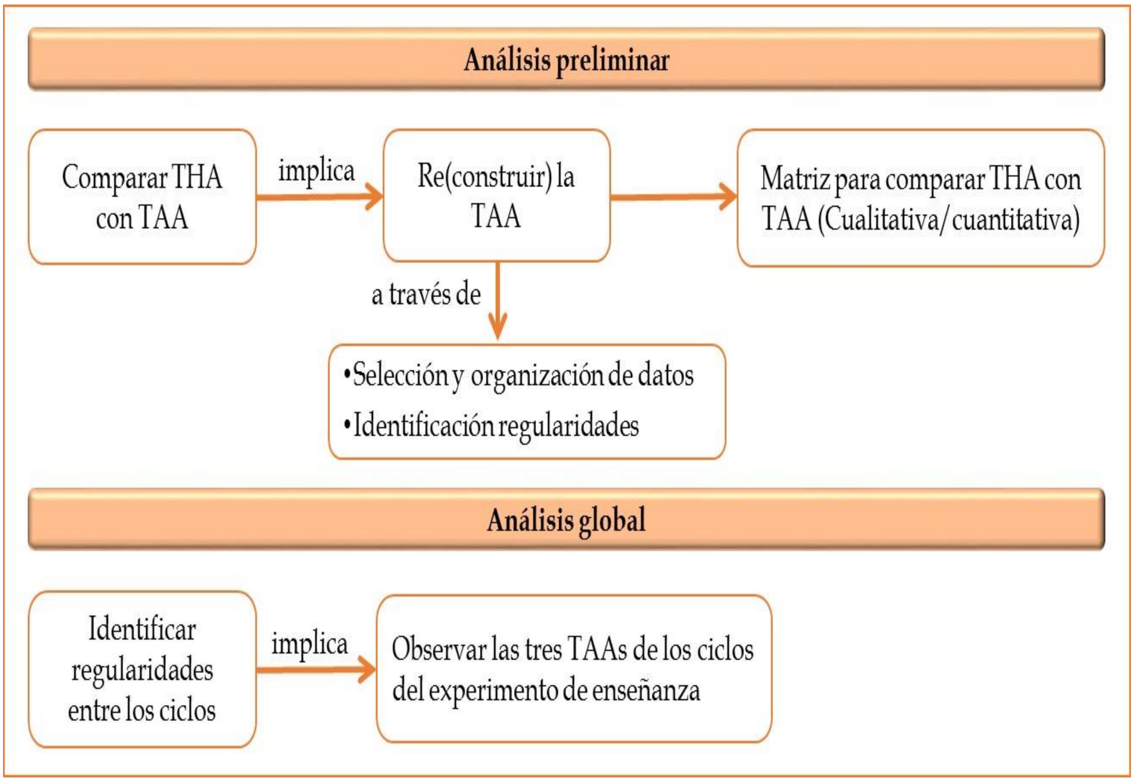


Figura 6. Síntesis del proceso realizado en el análisis retrospectivo de nuestra investigación.

El análisis preliminar, de acuerdo con Bakker y Van Eerde (2015), consiste en comparar los datos de la trayectoria actual de aprendizaje[5] (TAA) con las conjeturas de la THA. Lo anterior, porque un balance entre la THA y el aprendizaje observado resulta provechoso para el proceso de rediseño.

[5] Usaremos la frase "trayectoria actual de aprendizaje" con el objetivo de describir el aprendizaje observado que se infiere de los datos recogidos, ya que estamos de acuerdo con Dierdorp et al. (2011) en que no es posible detectar el aprendizaje "real" de los estudiantes.

Nosotros reconstruimos la TAA de las tareas principales de la secuencia instruccional de cada ciclo del experimento de enseñanza por medio de los siguientes pasos:

- Selección de datos en concordancia con los objetivos de nuestro estudio y con las conjeturas de la THA.
- Organización en tablas de las respuestas escritas de los estudiantes y transcripción de las grabaciones en vídeo y audio que se encontraban relacionadas con dichas respuestas. Como indica Molina (2006), esta ordenación fue beneficiosa para acceder a los datos porque durante el proceso de análisis se recurrió, en varios momentos, a escuchar las grabaciones con el fin de determinar con mayor precisión el modo en que los estudiantes hicieron una determinada tarea en el aula.
- Identificación de regularidades en cada tarea referentes a los tipos de respuestas que dieron los estudiantes y a las dificultades que les surgieron.
- Reconstrucción de la TAA.

A continuación, en cada ciclo del experimento de enseñanza comparamos la THA con la TAA por medio de la matriz cualitativa/cuantitativa de análisis de datos (Tabla 4) planteda por Bakker y Van Eerde (2015) que es una adaptación de la formulada por Dierdorp, Bakker, Eijkelhof, y van Maanen (2011). Con este fin, se buscaron datos que apoyaran o refutaran las conjeturas de la THA.

La parte izquierda de la matriz (Tabla 4) resume la THA y la parte derecha sintetiza la TAA a través de: respuestas escritas o extractos de transcripciones, descripción de los resultados por parte del investigador y una impresión cuantitativa de lo cercano que estuvieron las conjeturas de la THA con la TAA. El signo "-" se utiliza cuando las observaciones sugieren que las conjeturas fueron confirmadas por un máximo de un tercio de los estudiantes, el signo "+" se usa en el momento que las observaciones suscitan que las conjeturas fueron confirmadas por lo menos en dos tercios de los estudiantes y el signo "±" se emplea para los casos intermedios.

Tabla 4. Matriz cualitativa/cuantitativa de análisis de datos para comparar la THA con la TAA. Matriz extraída y traducida de Bakker y Van Eerde (2015, p. 22).

THA			**TAA**		**Comparación THA y TAA**
Tarea	Descripción tarea	Conjetura de la respuesta de los estudiantes	Extracto de respuesta escrita u oral	Resultado	Impresión cuantitativa de lo que se acercan la THA con la TAA (i.e. -,±,+)

De los resultados del análisis preliminar, se agregaron, mantuvieron, modificaron o eliminaron conjeturas de la THA a fin de iniciar un nuevo ciclo de experimento. Como ejemplo de dicho análisis se puede ver Cárcamo, Fortuny y Gómez (2016) que da a conocer los resultados del segundo ciclo del experimento de enseñanza. Adicionalmente, este análisis buscó identificar los roles de los modelos emergentes y de la modelización matemática en la construcción de conjunto generador y espacio generado. Para ello en los datos se examinaron la presencia de elementos de ambos enfoques.

El análisis global consistió en observar las tres trayectorias actuales de aprendizaje de los ciclos del experimento de enseñanza a objeto de buscar patrones o tendencias relacionadas con determinar: las dificultades de los estudiantes en el proceso de construcción de conjunto generador y espacio generado, la construcción que ellos lograron de estos conceptos y las tareas de cada THA que favorecieron la construcción de los mismos (Cárcamo y Fortuny, 2017). Además, este análisis, según mencionan Gravemeijer y Cobb (2013), puede permitir generar ideas de diseño que van más allá de las que se probaron en el aula.

3.4. La calidad y cuestiones éticas de nuestra investigación

Los investigadores de diseño buscan intervenciones de calidad y las evalúan con diversos tipos de criterios, entre ellos los que plantea Nieveen (1999) en los cuales se enfocó nuestro estudio. Elegimos estos porque según advierte Plomp (2013), pueden ayudar a los investigadores a optimizar la trayectoria de diseño y desarrollo.

Por otra parte, se hace referencias a cuestiones éticas porque se coincide con Goodchild (2008) en que una investigación buena nace del deseo de hacer las cosas mejor. Por tanto, esta no solo se debe preocupar de los resultados sino que también de sus participantes.

3.4.1. Calidad de la investigación

Nieveen (1999) propone una serie de criterios genéricos para intervenciones de alta calidad en la IBD que son: relevancia (validez de contenido), coherencia (validez de construcción), practicidad y eficacia.

La relevancia (validez de contenido) se consiguió con la elaboración de un marco de antecedentes que abordó el conocimiento actual existente del tema. En este caso, en el planteamiento del problema de nuestra investigación se expone una revisión de la literatura que plantea cuestiones similares a las de nuestro estudio y que dan las directrices hacia un primer plan de intervención en el aula.

La coherencia (validez de construcción) se logró por medio del desarrollo una THA que fue probada y refinada a través de los ciclos del experimento de enseñanza de nuestro estudio. Igualmente, las tareas de la primera THA fueron evaluadas por expertos antes de ser aplicadas.

La practicidad, es decir, la incorporación a la práctica se logró al elegir el curso de Álgebra Lineal y un ámbito de estudio natural que es habitual en contextos universitarios (estudiantes de primer año de ingeniería). Lo anterior, permite que nuestra investigación pueda resultar de interés a los profesores insertos en estos escenarios. A la vez, con el propósito de facilitar su aplicabilidad se detallan elementos del contexto, decisiones tomadas y resultados obtenidos.

Consideramos que la eficacia de la innovación docente se consiguió porque en los resultados de nuestro estudio hay evidencias de que favoreció la construcción de conjunto generador y espacio generado.

3.4.2. Cuestiones éticas

Nuestro estudio se preocupó de los participantes involucrados en el sentido de que planteó una recogida de datos respetuosa hacia ellos. Se recolectaron consentimientos informados donde se les comunicó a los estudiantes del experimento de enseñanza y su derecho a decidir libremente su participación. De igual forma, se les garantizó el anonimato y la confidencialidad de los datos recogidos.

SECCIÓN II.

PUBLICACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

4. Compendio de publicaciones

4. Compendio de publicaciones

"Si no conozco una cosa, la investigaré".

Louis Pasteur[1]

En este capítulo presentamos los cuatro artículos que forman el compendio de publicaciones de nuestra investigación. Estos son:

- Artículo 1 (apartado 4.1.). Cárcamo, A., Gómez, J. y Fortuny, J. (2016). Mathematical Modelling in Engineering: A Proposal to Introduce Linear Algebra Concepts. *Journal of Technology and Science Education* (JOTSE), 6(1), 62-70. http://dx.doi.org/10.3926/jotse.177

- Artículo 2 (apartado 4.2.). Cárcamo, A., Fortuny J. y Gómez, J. (2017) Mathematical modelling and the learning trajectory: tools to support the teaching of linear algebra, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(3), 38-352. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2016.1241436

- Artículo 3 (apartado 4.3.). Cárcamo, A. (2017). El uso de contraseñas para introducir los conceptos de conjunto generador y espacio generado. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(1), 101-112.

- Artículo 4 (apartado 4.4.). Cárcamo, A., Fortuny J. y Fuentealba C. (en prensa). The emergent models in linear algebra: an example with spanning set and span. *Teaching Mathematics and its Applications*.

[1] Citado en Godínez y Bernal (2015, p. 38)

La relación entre los artículos y los objetivos específicos de nuestra investigación se presenta en la Figura 7 por medio de palabras clave.

Objetivos investigación	Artículos			
	Artículo 1	Artículo 2	Artículo 4	Artículo 3
Desarrollar una TIL.	**Resultados ciclo 1**: Ciclo de modelización matemática.	**Resultados ciclo 2**: Herramientas de enseñanza	**Resultados ciclo 4**: Elección del modelo emergente, rol del profesor.	
Determinar el rol de la modelización matemática (MM) y los modelos emergentes (ME).	**Rol MM ciclo 1**: contexto real, trabajo colaborativo **Rol ME ciclo1**: diseño de tareas	**Rol MM ciclo 2**: problema de modelización, aprendizaje conjunto generador y espacio generado. **Rol ME ciclo 2**: progresión entre niveles de actividad.	**Rol MM ciclo 4**: modelo matemático asociado con conjunto generador y espacio generado. **Rol ME ciclo 4**: modelo-de y modelo-para vinculado con conjunto generador y espacio generado.	
Esbozar una secuencia instruccional.	Resultados ciclo 1, Rol MM ciclo 1, Rol ME ciclo 1.	Resultados ciclo 2, Rol MM ciclo 2, Rol ME ciclo 2.	Resultados ciclo 4, Rol MM ciclo 4, Rol ME ciclo 4.	Secuencia instruccional preliminar, conjunto generador, espacio generador.

Figura 7. Relación entre los objetivos de nuestra investigación y los artículos vinculados a la misma a través de palabras clave.

4.1. Publicación 1

La citación del artículo 1 transcrito en este apartado es:

Cárcamo, A., Gómez, J. y Fortuny, J. (2016). Mathematical Modelling in Engineering: A Proposal to Introduce Linear Algebra Concepts. *Journal of Technology and Science Education* (JOTSE), 6(1), 62-70. http://dx.doi.org/10.3926/jotse.177

El artículo 1 muestra los resultados principales del primer ciclo del experimento de enseñanza de nuestra investigación. A la vez, entrega una primera aproximación de cómo contribuyen la modelización matemática y los modelos emergentes a la construcción de conjunto generador y espacio generado.

Abstract

The modern dynamic world requires that basic science courses for engineering, including linear algebra, emphasise the development of mathematical abilities primarily associated with modelling and interpreting, which are not exclusively calculus abilities. Considering this, an instructional design was created based on mathematical modelling and emerging heuristic models for the construction of specific linear algebra concepts: span and spanning set. This was applied to first year engineering students. Results suggest that this type of instructional design contributes to the construction of these mathematical concepts and can also improve first year engineering students' understanding of key linear algebra concepts and enhance the development of higher order skills.

***Keywords* –** Mathematical modelling, Emerging models, Instructional design, Linear algebra, Spanning set, Span.

1 INTRODUCTION

Linear algebra is among the subjects first taken by students in the engineering area and is considered one of the fundamentals in the field. This is due in part to the essential role it plays later on in the development of other subjects, given its unifying and generalizing nature (Dorier, 2002). In addition, it is also a powerful tool for resolving problems in different fields (Carlson, Johnson, Lay & Porter, 1993). However, despite its relevance, teaching linear algebra at university level is considered a frustrating experience both for teachers and students (Hillel, 2000), and independently of how it is taught, it is a hard subject for students both cognitively and conceptually (Dorier & Sierpinska, 2001).

In order to search for alternative methods for teaching linear algebra, experiments have been designed and executed. Said experiments include variations in lectures, incorporating the use of technology, group work, and the creation of a collaborative environment where teachers create discussions with students after explaining a new topic (Day & Kalman, 1999). Gómez and Fortuny (2002) describe the mathematical modelling process as an innovative tool for teaching linear algebra, indicating that it is an effective method that works as a means for channelling information, providing knowledge acquisition while at the same time establishing a relationship between mathematics and reality.

Specifically, referring to modelling and its applications, Kaiser (2010) proposes that in the last decades, both the learning and teaching of this subject have become an important topic, not only in schools but also in universities, due to the growing world demand for the use of mathematics in science, technology and daily life. According to Alsina (2007), at the university level, research in mathematical education has emphasised that the focus on mathematical modelling has been successful. To verify this, there is scientific evidence that shows students learn better in context, either because it provides motivation and interest or because it involves solving real world problems.

However, the importance of mathematical modelling in learning mathematics at universities has been slow coming, since traditional mathematics teaching still predominates, regardless of the fact that said teaching is aimed at students whose primary interest is precisely the application of mathematics and not mathematics itself (Trigueros, 2009). Considering this, actions should be taken to help maths teachers to realise the power of mathematical modelling (Kadijevich, 2007). Vanegas and Henao (2013) indicate that a plausible intervention is the consideration of contexts such as those used within realistic mathematics education. That is to say, to promote the mathematical modelling processes at the same time as creating connections to pass from the definite to the abstract. According to Gravemeijer (2007), students begin modelling their own informal mathematical activity and, over time, the character of the model gradually changes for the student, evolving into a more formal model of mathematical reasoning, while still rooted in the experiential knowledge of the student.

In particular, what promotes students to progress from informal mathematical models to formal mathematical reasoning are the so-called emerging models

(Gravemeijer, 1999), which correspond to four types or activity levels: situational (interpretation and solution of the problem in a particular setting), referential (involving models, descriptions, concepts and procedures, which address the problem of situational activity), general (developed through exploration, reflection and generalisation shown in the previous level but with a mathematical focus on the strategy without making reference to the problem) and formal (working with conventional methods and notations).

Due to this new development, interest has arisen in designing and applying an instructional design for linear algebra that includes mathematical modelling and emerging models. In particular, for this teaching experience, concepts of spanning set and span are considered, since their understanding is relevant as they form a part of special vectors which according to Kolman and Hill (2006) are used in many mathematical, science and engineering applications. With this in mind, the following research question emerged: what does an instructional design that incorporates mathematical modelling and emerging construction models of spanning set and span contribute?

2 METHODOLOGY

The objective of this research is to comprehend what mathematical modelling and emerging models contribute to the construction of specific linear algebra content (spanning set and span). This involves creating an instructional design and research as to how this supports students in their transition from their preconceptions to formal mathematical reasoning. Given these considerations, the chosen methodology for this study is design research since it corresponds to a family of methodological approaches in which the instructional design and research are interdependent (Cobb & Gravemeijer, 2008). This type of research consists in three phase cycles: design, the teaching experiment and the retrospective analysis (Gravemeijer & Cobb, 2013).

2.1 Design

In the first phase, we develop the hypothetical learning trajectory (Simon, 1995). The construction of learning activities is based on mathematical modelling from the realistic mathematics education perspective and emerging models (Gravemeijer, 1999). In Table 1, a summary is shown of how the above-mentioned tasks that form part of the instructional design are manifested.

Task description	What activity levels are demonstrated in the task
Task 1: Generating passwords with vectors. Information is given on the importance of safe passwords, the characteristics which they should have and examples of how to create passwords with Excel. Subsequently, they invent a secure password generator using vectors.	Situational level. Students use strategies together with their knowledge of maths and passwords to develop a secure password generator.
Task 2: Relating the password generator with the spanning set and span. With the resolution of the password generator they are asked for two sets: one which contains all the numeric passwords of the password generator and another which has numeric vectors which when combined linearly produce a generic vector that generates numeric passwords. The teacher introduces the concepts, then makes an analogy between these and their password generator.	Referential level. Students making reference to the proposed solution of their password generator present two sets with determined characteristics. The teacher then formally defines the concepts, links this new mathematical reality with the real problem, making an analogy between them.
Task 3: Applying the lessons learned. Using spanning set and span concepts and deepening the understanding of them using conventional mathematical notation.	General and formal level. Students use their work from the previous task to explore the spanning set and span using their knowledge and mathematical notations.

Table 1. Description of tasks from the instructional design and relationship with activity levels

2.2 Teaching experiment

The experiment was conducted during the 2013-2014 period in L'Escola Politècnica Superior d'Enginyeria of Vilanova i la Geltrú (Univesitat Politècnica de Catalunya) located in Spain with a group of students that was heterogeneous in terms of its members' previous study backgrounds (from high school and polytechnic), but homogeneous with regard to the fact that all were first year engineering students who were studying mathematical fundamentals and did not have previous experience with problems that involved mathematical modelling, nor had they previously studied spanning set and span concepts.

The study area was the classroom and the materials used were: written learning activities, sheets for registering calculations and other elements used in a normal class. Each class session started with the introduction of a new problem or the continuation of the activities from the previous day. The remainder of the class consisted in cycles of group work (3 to 5 students) and whole class discussion. The experiment was conducted in 5 hours, distributed over 3 class sessions.

The data collected in this experiment were: written protocols of the learning activities developed by the students, videos and audio recordings of each session, and individual interviews at the end of the experiment.

2.3 Retrospective analysis

Analysis of the experimental data began with organisation and categorisation. Next, the task developed by the students and the recordings were analysed from the perspective of the research question: What does an instructional design based on mathematical modelling and emerging construction models of spanning set and span provide? Subsequently, data was analysed identifying examples that demonstrate some change from informal to formal reasoning with regard to studied concepts. For this, emerging models were used as an interpretive framework. From this analysis, a story was created which reconstructs the learning process that the students followed.

3 RESULTS

The results of the study were presented through the story of the learning process that the students followed in relation to the instructional design (Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon & Reed, 2013).

3.1 Task 1: Generating passwords with vectors

The purpose of this task is, firstly, that the students activate their preconceptions about vectors, and secondly, that students use mathematical modelling as a tool to solve the problems that they face.

The chosen context for task one was the generation of passwords. The information provided to the students is a news story about hacked social networks and how to generate passwords using Excel. With this background, it is proposed that, in groups, they make a password generator that takes into account the use of vectors. The groups, supervised by the teacher, follow the mathematical modelling process proposed by Blum and Leiss (2007). The phases of mathematical modelling that the groups followed to create a proposal for the question raised are summarised in Figure 1. The students did not necessarily follow the order of the outlined steps.

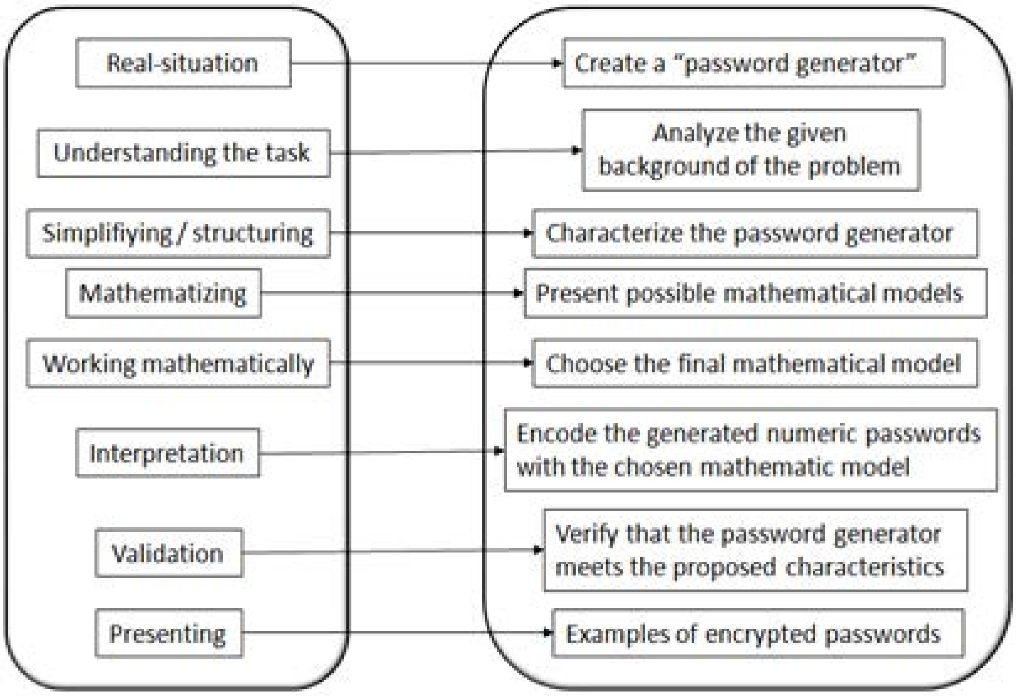


Figure 1. Mathematical modelling process followed by the students to solve the problema

The groups propose different solutions, although all are similar to what is seen in Figure 2. In other words, they propose a model to generate passwords which correspond to a generic vector and to show its usefulness, they give a specific number to their variable(s) and immediately apply their codifying process to interpret mathematically, within the context of the problem, obtaining a password created by their password generator.

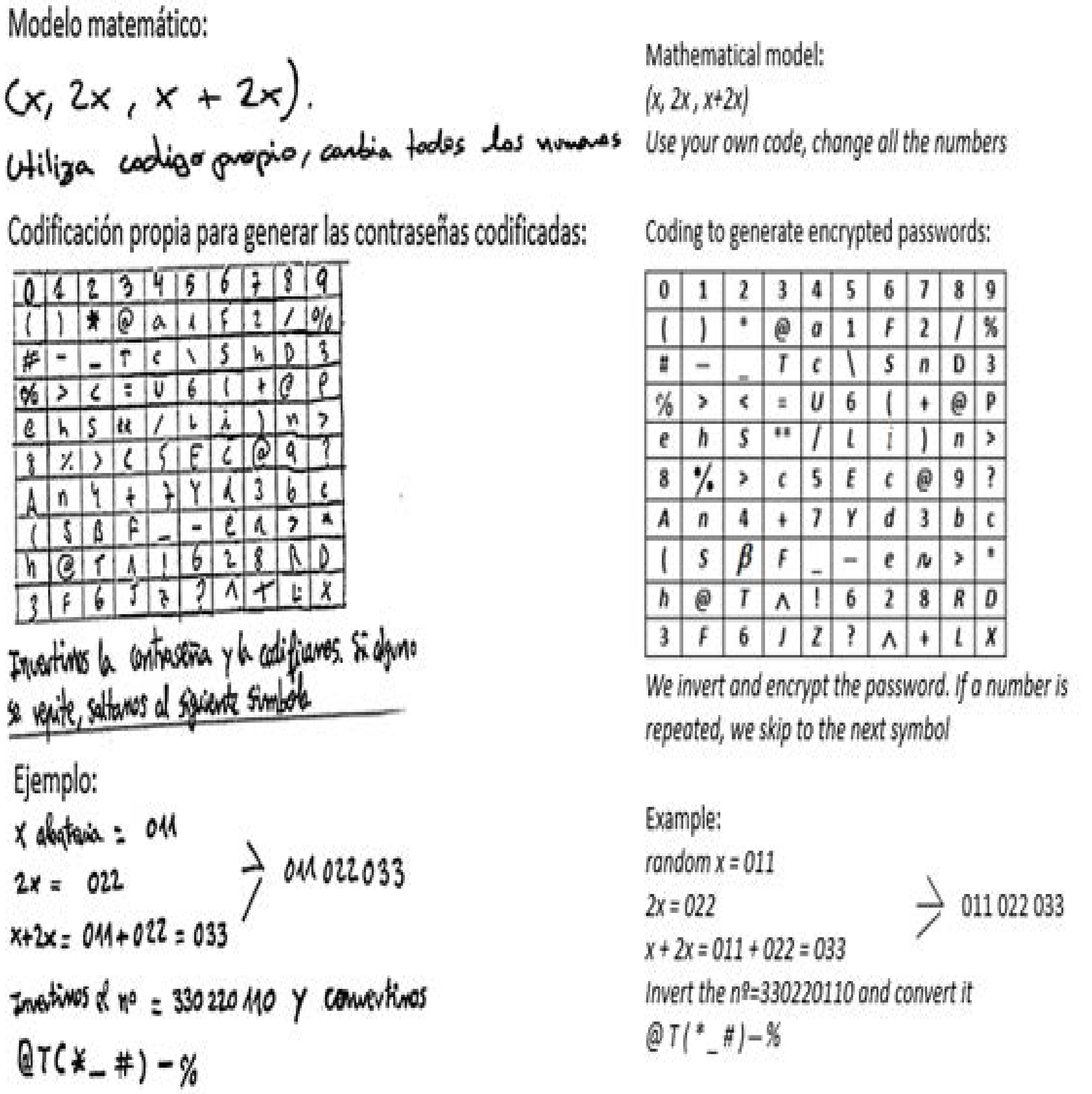


Figure 2. Proposed solution by one group for the problem of creating a password generator

3.2 Task 2: Relating the password generator with the spanning set and span

Task 2 is composed of two parts. In part I, students are asked for two sets: one, G, which contains all the numeric passwords of their password generator and another, A, which has numeric vectors that when made into a linear combination, a generic vector is obtained that creates numeric passwords. The groups answer appropriately to this, although some presented errors in mathematical annotations. Therefore, once they wrote down sets A and G they were asked what the relationship between these is. The predominant response is that the relationship is "A generates the G elements through the linear combination of its vectors", meaning that the students made a connection between the sets. However, various groups had difficulty using mathematical language when expressing their answer, since when they recorded "A combinations", it is possible that what they meant to say was "the linear combinations of A vectors", as observed in Figure 3.

~~Que a partir de la combinaciones lineales de A.~~
Que a partir de la combinaciones lineales de A se consiguen generar todo las contraseñas de G.

From the lineal combinations of A all the passwords of G can be generated.

Figure 3. Example of an answer of part 1 of task 2

Next, when the teacher formally defines the spanning set and span, they perform part II, which consists of making an analogy between these concepts and their password generator. In general, all the groups make the analogy according to their password generator as seen in Figure 4, except for some which designated another name to the spanning set, calling it generator vector(s) o set vectors.

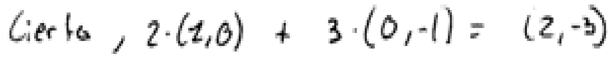
Nombre que recibe en tu generador de contraseñas	Cómo se escribe con notación de álgebra lineal	Nombre que recibe en álgebra lineal
Vector de 3 componentes	$v=(x_1, x_2, x_3)$	Vector de $\mathbb{R}^3$
G conjunto que contiene las contraseñas numéricas	$G=\langle(1,0,2),(0,1,1)\rangle$	Espacio generado
A conjunto que al hacer combinación lineal con sus vectores genera a cada elemento de G	$A=\{(1,0,2),(0,1,1)\}$	Conjunto generador
Un vector que genera una contraseña numérica	$v=(1,1,3)$	Vector que pertenece a G

Name of your password generator	As written in linear algebra notation	Given name in linear algebra
3 component vector	$v=(x_1,x_2,x_3)$	Vector of R^3
G set which contains the numeric passwords	$G=\langle(1,0,2),(0,1,1)\rangle$	Span
Set A when making the lineal combination of its vectors creates each G element	$A=((1,0,2),(0,1,1))$	Spanning set
Vector which generates a numeric password	$v=(1,1,3)$	Vector belonging to G

Figure 4. Example of an answer of part II of task 2

3.3 Task 3: Applying the lessons learned

In this task, spanning set and span were explored, but in problems which involve conventional mathematical annotations. The answers to this task show that a large number of the groups managed to differentiate between the concepts that vectors of spanning sets create span, recognising in set notations that one of these has a finite number of vectors and the other an infinite number. Also, the groups were able to verify if a vector belongs to a certain span by making a linear combination of vectors from this spanning set as seen in Figure 5. However, only some groups managed to represent the span for a determined spanning set and others observed related difficulties graphically and analytically: the lack of rigour in the use of mathematical language, the use of terms interchangeably in mathematical notations and the different forms of representing the studied concepts.



True, $2\cdot(1,0)+3\cdot(0,-1)=(2,-3)$

Figure 5. Example of an answer for the question from task 3 to establish whether it is true or false that the vector belongs to the span

The results from the teaching experiment show that the students solved the problem of creating a password generator, drawing from their previous knowledge of vectors. And from this, they worked on the next task, describing sets that contain finite and infinite vectors related to the initial context, which then links with the spanning set and span. The latter allows them to visualise concepts both in a real context and in a mathematical one. As a result, they identify some characteristics of the spanning set and span, such as the inclusion relationship between them. However, some groups presented difficulties with the different forms of representing these, especially geometrically. Additionally, in the development of the task, the use of mathematical language is an obstacle.

This suggests that the instructional design favours the comprehension of spanning set and span, since a large part of the students managed to make the transition from their informal mathematical knowledge to a more formal comprehension.

4 CONCLUSIONS

4.1 Contributions

The main contribution of this study is to provide a first approximation of the use of mathematical modelling and the emerging models for learning about spanning set and span for engineering students, since currently no studies exist on this subject, which makes this research innovative and original.

This study posed the question of what the instructional design, which incorporates mathematical modelling in the construction of spanning set and span, contributes. From the data analysis, it was observed that the following characteristics of the instructional design contribute to the comprehension in the following ways:

- The students, through the creation of a password generator, put their previous vector concepts into use, which helped them connect these with the following task that sought a first approximation on spanning set and span.
- The analogy table between the context of generating numeric passwords and the concepts in the study helped students visualize both of them in a real and a mathematical context. At the same time, they were offered the possibility to differentiate between them when used in a real situation.
- Task 3 strengthened the notations of both concepts when deepening students' knowledge of them in problems within a mathematical context. The results show that the majority can identify the inclusion relationship between these and also recognise the conditions that a vector should meet to belong to a span.

The results of this study provide evidence of the contributions of instructional design for students when constructing a spanning set and span, since through the use of mathematical modelling in a real context, as Gravemeijer (2007) indicates, they model their own informal mathematical activity, and then continue with other tasks which lead to a more formal understanding of what they are studying.

On the other hand, we can indicate that mathematical modelling contributes to the construction of the spanning set and span because this permits students to: give a sense of real context to what they are learning, discuss both new situations and mathematical content with peers (decreasing their dependence on teachers) and enhance the development of mathematical abilities linked mainly to modelling and interpreting.

4.2 Discussion

This study shows the results of a first experiment with the instructional design and future studies intended to create new experimental cycles to continue refining it. Accordingly, the results suggest the following modification to the instructional design: incorporate formative evaluation in the development of the instructional design with the purpose of helping students in their difficulties, and rethinking task 3 with the aim that questions exist both about the properties and the applications of the spanning set and span.

Finally, it indicates that the emerging models not only orient the instructional design, but also promote the cognitive development of the students, using implicit concepts of spanning set and span in the context of generating passwords for their later use in conventional mathematical problems, meaning that it allows the transition from one model to another as Gravemeijer (1999) proposes. From this point of view, this instructional design proved suitable.

ACKNOWLEDGEMENT

Thank you to the students and professors of the mathematics department who participated in this study of L'Escola Politècnica Superior d'Enginyeria of Vilanova i la Geltrú (Univesitat Politècnica de Catalunya).

REFERENCES

Alsina, C. (2007). Teaching applications and modelling at tertiary level. In W.

Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 469-474). New York: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_53

Blum W., & Leiss D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems?. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester, UK: Horwood Publishing. http://dx.doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Carlson, D., Johnson, C.R., Lay, D.C., & Porter, A.D. (1993). The linear algebra curriculum Study group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, 24(1), 41-46. http://dx.doi.org/10.2307/2686430

Cobb, P., & Gravemeijer, K.P.E. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In Anthony E. Kelly, R. A. Lesh & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). New York, NY: Routledge.

Day, J., & Kalman, D. (1999). *Teaching linear algebra: What are the questions*. Department of Mathematics at American University in Washington DC, 1–16.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2013). Design research in mathematics education: The case of an ict-rich learning arrangement for the concept of function. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research – Part B: Illustrative cases* (pp. 425-446). Enschede, the Netherlands: SLO.

Dorier, J.L. (2002). Teaching linear algebra at university. In *ICM*, 3 (pp.875-874).

Dorier, J.L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 255-273). Springer Netherlands.

Gómez, J.V., & Fortuny, J.M. (2002). Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (31), 7-23.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 155-177. http://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 137-144). New York: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_12

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perpective. In Plomp T. & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design research. Part A: An introduction* (pp. 72-113). Enschede, the Netherlands: SLO.

Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-208). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kadijevich, D. (2007). Towards a wider implementation of mathematical modelling at upper secondary and tertiary levels. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 349-355). New York: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_37

Kaiser, G. (2010). Introduction: ICTMA and the teaching of modeling and applications. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 1-2). New York: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_1

Kolman, B., & Hill, D.R. (2006). *Álgebra Lineal*. Pearson Educación.

Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145. http://dx.doi.org/10.2307/749205

Trigueros, G. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46), 75-87.

Vanegas, J., & Henao, S. (2013). Educación matemática realista: La modelización matemática en la producción y uso de modelos cuadráticos. In *Actas del VII CIBEM*, (pp. 2883-2890). Montevideo, Uruguay: IIV CIBEAM.

4.2. Publicación 2

La citación del artículo 2 transcrito en este apartado es:

Cárcamo, A., Fortuny J. y Gómez, J. (2017) Mathematical modelling and the learning trajectory: tools to support the teaching of linear algebra, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(3), 38-352. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2016.1241436

El artículo 2 comunica los resultados principales del segundo ciclo del experimento de enseñanza de nuestro estudio. En éste se corrobora lo señalado en la publicación 1 respecto a la contribución de la modelización matemática y los modelos emergentes a la construcción de conjunto generador y espacio generado. Igualmente se incorporan nuevas ideas acerca de estas perspectivas. Al mismo tiempo, se explica cómo se efectuó el proceso de análisis preliminar en el segundo ciclo del experimento de enseñanza. Dentro de este contexto, se ofrece una THA para los conceptos de conjunto generador y espacio generado con el propósito de contribuir a la difusión y comprensión de las trayectorias de aprendizaje. Lo anterior porque hay importantes lagunas referente a éstas en diversos temas dentro de la matemática, incluyendo el Álgebra Lineal.

ABSTRACT

In this article we present a didactic proposal for teaching linear algebra based on two compatible theoretical models: emergent models and mathematical modelling. This proposal begins with a problematic situation related to the creation and use of secure passwords, which leads students toward the construction of the concepts of spanning set and span. The objective is to evaluate this didactic proposal by determining the level of match between the hypothetical learning trajectory (HLT) designed in this study with the actual learning trajectory in the second experimental cycle of an investigation design-based research more extensive. The results show a high level of match between the trajectories in more than half of the conjectures, which gives evidence that the HLT has supported, in many cases, the achievement of the learning objective, and that additionally mathematical modelling contributes to the construction of these linear algebra concepts.

KEYWORDS Hypothetical learning trajectory; actual learning trajectory; emergent models heuristic; mathematical modelling; design-based research; spanning set; span

1. Introduction

Linear algebra is difficult for students in both the cognitive and conceptual sense [1], and it is for this reason that a number of innovations have been made in teaching this subject, including the use of mathematical modelling, and the application of instructional designs based on the emergent models heuristic.

Trigueros and Possani [2] affirm that mathematical modelling can be students the opportunity to use their prior knowledge and to confront new conceptual needs. For their part, Wawro et al. [3] posit that the use of the emergent models heuristic for creating instructional designs for linear algebra helps students to progress from informal mathematical reasoning toward more complex and formal reasoning.

To implement an innovation in teaching, one must take into account the creation of a hypothetical learning trajectory (HLT). This is because, in agreement with Daro et al. [4], it is a tool that can help teachers rethink teaching, which enables them to have a general vision of the class before they start it.

According to Simon [5], the HLT is a prediction of the trajectory that the learning process is likely to follow, and provides a basis for the design of the teaching itself. The HLT has three components: the learning objective, which defines the goals to be achieved, the learning activities and a possible route of learning or cognitive process, which is a prediction of how the thinking and the understanding of the students will be developed in the context of the learning activities.

In contrast with the HLT, Leikin and Dinur [6] defined the actual learning trajectory (ALT) as the learning trajectory that effectively occurs, which is to say, the trajectory the students have followed in the context of the implementation of an instructional design. The ALT is inferred from the data collected, since it is not possible to directly measure the actual learning of the students [7].

When the HLT has a high match with the ALT, Stylianides and Stylianides [8] determine that the HLT supported the realization of the learning objectives.

In specific instances, there are important gaps in understanding the learning trajectories of various topics within mathematics, including linear algebra. It is for this reason that this investigation has constructed an HLT for concepts of the spanning set and span of linear algebra, which are included in a proposal for teaching based on the emergent models heuristic and mathematical modelling in the context of the creation of passwords.

The objective of this study is to evaluate this didactic proposal through the level of match between the HLT designed in this study and the ALT in relation to the construction of the concepts of spanning set and span.

2. Theoretical framework

This section summarizes the conceptual framework that consists in the emergent models heuristic, which has been part of several recent studies in mathematics education at the university level [9–11], because at other educational levels, it has been a powerful design heuristic [12]. In addition, we also consider mathematical modelling, which according to Alsina [13], has been successful at the university level, noting that students learn better in context, either because it provides motivation and interest, or because they are involved in the resolution of real world problems. Therefore, the emphasis on applied problems or the mathematization of reality can be a positive step toward success in learning, as confirmed, for example, by Dominguez-García et al. [14], in a recent study in linear algebra.

2.1. The emergent models heuristic

The emergent models heuristic is an alternative to instructional approaches that focus on teaching ready-made representations [15]. Its objective is to create a sequence of tasks that allow students to initially develop their informal mathematical activity, to later transform it into a more sophisticated form of mathematical reasoning [12].

Emergent models are intermediaries for changing informal procedures into a more formal mathematical reasoning [16]. The 'emergent' label has a double meaning that refers to the process by which the models emerge, and to the process by which they support the emergence of formal mathematical knowledge [15].

Emergent models adopt a dynamic view of learning that allows students to understand mathematics. Within this approach, symbols and mathematical models can be developed jointly. The idea is that the form of an informal model emerges when students are in the process of reorganizing an activity and looking for the solution to the problem on context. Later, this model can serve as a basis for the development of more formal mathematical knowledge, which is to say a model is first constituted within a specific context as the model operating in that situation, and then the model can be generalized to suit other situations. Thus, the model changes its character and becomes an entity that can function as a model for the formal mathematical reasoning. The change from model of to model for concurs with a change in the thinking of the students: thinking about the situation modelled to thinking about the mathematical relations [15].

For the transition from model of to model for, one can distinguish four levels of activity that do not involve any strictly ordered hierarchy, known as: situational, referential, general and formal [12]. The situational activity involves students working toward the mathematical objectives through an experience that is real to them. The referential activity involves models of descriptions, concepts and procedures that relate to the problem of the situational activity. The general activity involves models to explore, to reflect upon and to generalize about what appeared at the previous level, but with a mathematical focus on strategies, without making any reference to the initial problem. The formal activity leads students to reflect the emergence of a new reality in mathematics; therefore, it involves working with procedures and conventional notations.

The emergent models heuristic does not specify to the instructional designer where to find the appropriate models, but does describe what an emergent model may resemble, what its features are and how it works. In this way, this heuristic can help designers in the choice of models: thinking through them, elaborating upon them and improving them [16].

2.2. *Mathematical modelling*

The possibility of introducing new concepts by means of the mathematical modelling in the classroom has received considerable attention in recent years. However, Possani et al. [17] point out that few studies have been conducted in undergraduate mathematics courses such as linear algebra.

The assumption behind the introduction of mathematical modelling in the classroom implies an expectation that when students face problematic situations of interest, they should be able to: explore ways to represent them in mathematical terms, explore the relations that appear in these representations and to manipulate and develop powerful ideas that can be channelled toward the mathematics more desirable from a teaching standpoint [18].

At present, there are various ways of approaching mathematical modelling in the classroom. This study adopts the educational perspective proposed by Kaiser and Schwarz [19], which considers mathematical modelling as a vehicle or as a didactic technique. Defined more precisely, as posited by Julie and Mudaly [20], it is a tool to help in the study of mathematics that motivates students and provides a basis for the development of mathematical content.

In addition, in order to guide students in the resolution of the task of modelling proposed here, this study uses the modelling cycle proposed by Blum and Leiss [21]. The relation between the seven steps of this cycle and the task of modelling the didactic proposal is presented in Figure 1.

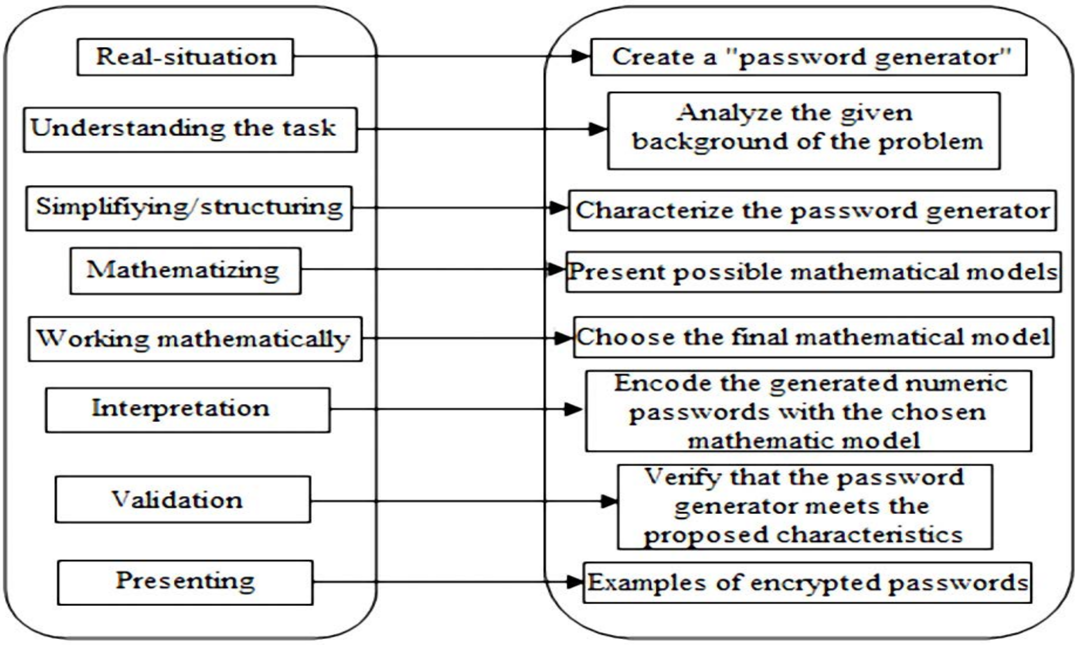


Figure 1. Relation between modelling cycle by Blum and Leiss [21] and the modelling task of didactic proposal of Cárcamo et al. [22].

From these theoretical considerations, we design a didactic proposal that includes an HLT. The mathematical modelling is seen as a tool to introduce the concepts under study, and the emergent models heuristic can have the purpose of guiding the instructional design as well as offering students the opportunity to reflect on his the informal mathematical activity, and after will be generalized toward a more formal reasoning.

3. Methodology

3.1. Participants and context

The study participants were 45 first-year students of engineering at a Spanish university who had not previously worked with mathematical modelling, nor had studied the concepts of spanning set and span.

The students participated in the second experimentation cycle of a teaching proposal based on the emergent models heuristic and mathematical modelling, in which they solved a set of tasks aimed at the construction of the concepts of spanning set and span. This experiment was carried out over 5 hours, divided into 3 class sessions, in which they worked in 14 groups (of 3–4 students), and then individually, in the final task.

3.2. Data and focus research

The methodology of this study is the design-based research that is characterized by the design of innovative educational environments that are intertwined with the experimentation and the development of the theory [23]. In this research, a didactic proposal is designed and evaluated for the construction of the concepts of spanning set and span.

The data collected in this experiment were as follows: audio and video recordings of group work, the written responses of the students to the tasks proposed in the HLT and an individual interview at the end of the experimentation.

Regarding the analysis of the data, following the ideas of Dierdorp et al. [7], we compared the HLT with the ALT, looking for background to support or rebut the conjectures of the HLT, and then we used a data analysis matrix for comparing the HLT and the ALT as shown in Table 1. The left side of the matrix summarizes the HLT, and the right side synthesizes the ALT: through the written responses, or excerpts from the transcripts and a description of results by the investigator, as well as a quantitative impression of the level of match between the HLT and the ALT. It was considered that there was a high match between the two (+ sign) when the evidence suggested that the conjecture had been confirmed by at least two-thirds of the groups or the students, or a moderate match (± sign) when the evidence suggested that the conjecture had been confirmed by more than a third but less than two-thirds of the groups or the students, and a low match (− sign) in other cases.

Table 1. Data analysis matrix for comparing the HLT and the ALT.

Hypothetical learning trajectory			Actual learning trajectory		Match between HLT and ALT
Task	Description of the task	Conjecture of how students would respond	Extract of written or oral response	Result	Quantitative impression of how well the conjecture and actual learning matched (expressed as: -,± and +)

3.3. The HLT

The objective of the HLT was to support students in the construction of the concepts of spanning set and span. The HLT was composed of four tasks. Table 2 presents a summary of the connections between: the major task features presented in this study, the major conjectures of the HLT and the activity levels proposed by Gravemeijer [12].

The professor in this teaching experiment tried to maintain a balance between his (minimal) guidance and the (maximal) independence of students, mainly making strategic interventions [24].

Table 2. Summary of the connection between: the major task features presented in this study, the major conjectures of the HLT and the activity levels proposed by Gravemeijer [12].

Major task features	Major conjectures of the HLT	Activity level
Task 1: (1) In task 1, students are presented a brief reading regarding secure passwords. (2) Students are asked to create a secure password generator based on a mathematical model that involves vectors.	(1) Students read information from the secure passwords; (2) Students created a generator password by following the steps of the modelling cycle and using their previous knowledge of vectors and passwords.	Situational
Task 2: Students are asked to make an analogy table between their password generator and the concepts of spanning set and span.	(1) Students properly related the concept of spanning set with their password generator set, which contains the vectors that, after creating the linear combination is obtained by the vector for each numeric password with them; (2) Students properly related the concept of span with their password generator set which has all the vectors that allow the generate numerical passwords to be generated. (3) Students generate an analogy table where the following are linked: the concepts of spanning set and span, with two sets of the password generator, and the name that they receive in the password generator.	Referential
Task 3: Students are asked determine whether the sets A, B and C generate to R^2, that is to say, if they are spanning sets of this space.	(1) Students determine and relate the characteristics of a spanning set for space R^2 with the sets: A, B and C. (2) Students deduce that the set C generates a R^2 while giving a coherent justification. (3) Students deduce that the sets A and B cannot generate R^2 while giving a coherent justification.	General
Task 4a: Given a span of R^4, determine a spanning set for it.	(1) The student relates the span of R^4 with the concept of spanning set; (2) The student observes the characteristics of the span of R^4 to obtain a spanning set for it; (3) The student proposes a spanning set appropriate for the given subspace of R^4.	Formal
Task 4b: Given a span for R^4, determine if two vectors belong to it.	(1) The student performs an appropriate process to determine if each vector belongs to the subspace of R^4 or not; (2) The student determines that the first vector (1,5,0,0) does not belong and that the second vector (5,0,5,0) does belong.	

The tasks of the HLT were based on the emergent models heuristic and mathematical modelling. Mathematical modelling has been considered to be a teaching tool that can start the construction of the concepts under study through a problem, in this case, by means of creating a password generator using vectors. Likewise, as pointed out by Gravemeijer and Stephan [16], the emergent models heuristic served to help design and structure the tasks, in such a way as to motivate students in their transition from an informal mathematical reasoning of their activity toward a more formal type of mathematical reasoning.

4. Results

The results are presented for each of the tasks proposed in Table 2 with the objective of evaluating the didactic proposal of this study through the level of match between the HLT and the ALT, in relation to the construction of the concepts of spanning set and span. This section is organized into four parts that correspond with each of the tasks making up the HLT.

4.1. Task 1

The context to start this teaching experience was the creation of passwords. Students were presented the problem in Figure 2.

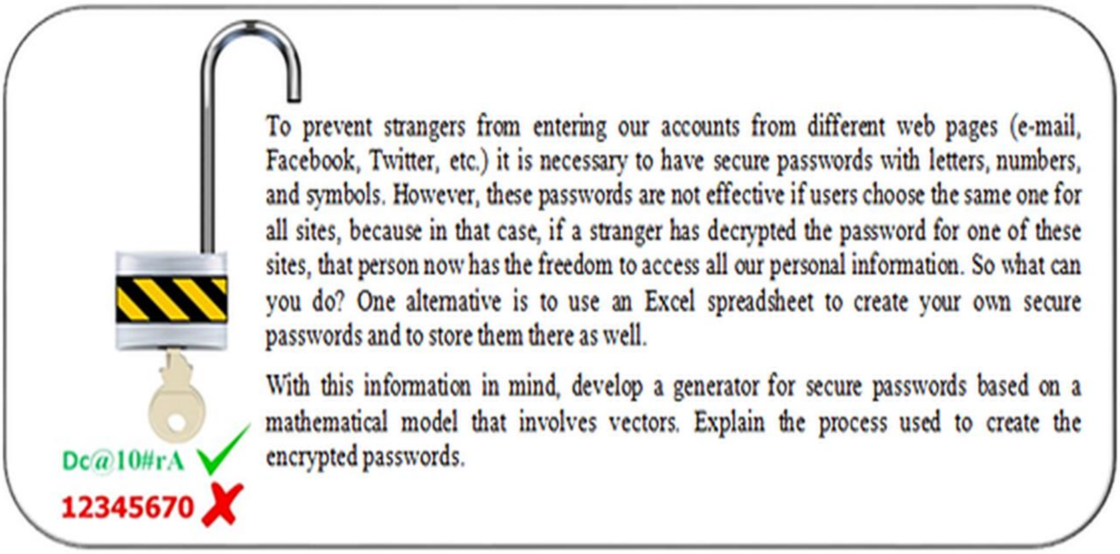


Figure 2. Proposed Task for students to work in groups.

The groups selected their mathematical model for generating passwords, following the footsteps of the mathematical modelling cycle proposed by Blum and Leiss [21], as seen in Table 3, in the written replies and in some dialogues held by the three students that formed group 3.

Table 3. Written answers from Task 1 and some dialogues held by students of group 3 and their correspondence with the steps of the cycle of mathematical modelling.

Steps 1 and 2 of the modelling cycle. *Understand the situation, structure and simplify*: characteristics of your password generator
Traslated
Generates the password from the component 2,x

Step 3 of the modelling cycle. *Mathematisation:* mathematical models proposed by the members of the group

$(\frac{1}{2}x, 2x, x)$, $(4x, x, 5x)$, $(x, 2x, 3x)$

Step 4 of the modelling cycle. *Working mathematically*: choice of the mathematical model to generate passwords
Translated
We chose the model (4x,x,5x) since it works with very large numbers and therefore is more difficult to decipher.

Step 5 of the modelling cycle. *Interpretation*: coding to use to generate passwords

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
f	x	d	8	4	K	j	%	&	≠

S7: Are you going to put *a*, *b*, *c*?
S8: No, look, we can put some numbers to be misleading.
…
S7: 4, it's 4 ¿no?
S9: 4, 4.
S8: Yes, because this misleads them.
S7: Okay, letters, okay.
S9: 5.
S7: I would put a Japanese kanji.
S9: Yes, yes, put a character there.
S8: No, a *k*, a *k* (writes). And 6?
S9: I said a *j*.
S8: 6 (writes).

Step 6 and 7 of the modelling cycle. *Validation and presentation of the solution*: Example of an encrypted password created by your password generator

S8: What number is *x*?
S9: It's 2. 8, 2, 10.
S8: (Typing the answer) 8 is an ampersand, 2 is the letter *d*, 1 the letter *x* and 0 is the *f*. Now we've got the password.
S7: It's very difficult to break, that is, it's really safe.

$(4\cdot 2, 2, 5\cdot 2)$
$(8, 2, 10)$
8210
↓↓↓↓
&dxf

Table 3 shows that the students in group 3 defined the generic vector ($4x$, x, $5x$) as its mathematical model to generate passwords, and then to validate this, they gave as an example the password &*dxf*. That is to say, they passed from the mathematical world to the everyday world and vice versa. In addition, the dialogues held by group 3 revealed that all its members participated in the construction of its password generator. Here, we infer that the students participated actively in the resolution of the problem, and that this could serve as the basis for starting the construction of the concepts of spanning set and span.

With regard to the mathematical model used to create passwords, the groups presented two types: a generic vector and a linear combination of vectors. Those who chose the first option, proposed a generic vector of R^3, R^4 or R^6, while others opted for a linear combination of R^3. In Table 4, we can see that group 12 proposed a generic vector of R^6 with three variables, and group 5 indicated two vectors each represented by a linear combination of three vectors and also with three variables. This gives evidence that students activated their previous knowledge of vectors in the context of creating secure passwords, placing them in the situational activity level [12] in this task.

Table 4. Mathematical models proposed by groups 12 and in 5 Task 1.

Mathematical model proposed by group 12
$P = (x, 2x, y, 3y, z, 4z)$
Mathematical model proposed by group 5
Vector 1: $a(3,-3,4) + b(-1,1,2) + c(0,4,2)$
Vector 2: $a(1,2,-3) + b(-4,9,2) + c(2,0,-7)$

In the analysis of the written responses of the groups relating to this task, along with the audio tracks of the group work, it was noted that the ALT had a high match with the HLT (100% of the groups).

4.2. Task 2

After the professor introduced the concepts of spanning set and span as related to the context of passwords, the students made a table in which they established an analogy between two sets associated with their password generator and the concepts of spanning set and span.

In the analogy between the concept of span and a set associated with the password generator (which possesses all the vectors that allowed the generation of numeric passwords), we observed two types of responses: groups who wrote the set correctly using mathematical notation and related it to the name of the span (43% of the groups) and those who lacked rigorousness in the notation of the set that should have been related with the name of span, because they lacked a parenthesis, a sign or the superscript of R^n or had not used the parentheses appropriate for the set that related with the span. Figure 3 shows that group 1 wrote a set in correct mathematical notation of span, but it lacks a parenthesis in the second vector that was written.

Translated

Name given in your password generator	*How it is written in mathematical language*	*Mathematical name for this concept*
Set that contains the vectors to general numeric passwords	$\langle (2,0,1,0),(0,1,0,3)\rangle$	*Span*
Set that doing the linear combination with their vectors is obtained each vector that generates a password	$(x,y)=\alpha\cdot(2,0,1,0)+\beta\cdot(0,1,0,3)$	*Spanning Set*

Figure 3. Example of a response by group 1 of analogy table between the generator of passwords and the concepts of spanning set and span.

Moreover, regarding the analogy between the concept of spanning set and a set associated with their password generator (which contains vectors that, after making the linear combination with them, the vector was obtained for each numerical password), we observed two main types of responses: those who wrote the set correctly in mathematical notation and related to the name of the spanning set (57% of the groups) and those who did not do so, instead wrote a mathematical expression that included a generic vector or a linear combination, as seen in the example in Figure 3 where group 1 wrote a vector of R^2 as a linear combination of the two vectors of R^4. This difficulty suggests that some students have not yet internalized the notion that only the numeric vectors that make up the linear combination form the spanning set, but not the linear combination itself.

The analogy table, in spite of the difficulties it presented with the mathematical language, enabled students to link two sets in mathematical notation with their assigned names in the context of their password generator, but also with their denominations of the mathematics of spanning set and span, which is to say, they expanded the vision of these concepts in a real context. This could help students better recall the characteristics of each of these concepts, and avoid confusion.

This task placed the students at a referential activity level [12], because in order to solve it, they had to bear in mind the initial task of generating passwords.

In the analysis of task 2, we observed a moderate level of match between the HLT and the ALT (43% of the groups), since some groups did not present an analogy table that was totally correct, mainly due to difficulties with the mathematical language. This result suggests a need to modify this task to improve this level of match in any forthcoming experimentation.

4.3. Task 3

In Task 3, students conjectured with respect to the properties associated with the concepts of spanning set and span, but in this case, this took place outside the context of passwords. As seen in the question in Figure 4, they were requested to identify whether sets A, B and C corresponded to space R^2.

All the groups claimed that set C generated the set R^2, and six of them argued that the vectors were linearly independent (or that none was a linear combination of other). Others suggested an argument that was more intuitive, and among these, C generated R^2 because it had two components, or two vectors. One group did not substantiate its response. Table 5 illustrates the responses of groups 1 and 14.

Determines whether the following sets generate to R^2, that is to say, if without generating sets of this space

Set	Justification of your determination
$A = \{(0,-3)\}$	
$B = \{(5,0),(7,0)\}$	
$C = \{(1,0),(1,-1)\}$	

Figure 4. Example of a question in Task 3, worked on in a group.

With regard to sets A and B, the majority of the groups indicated that they did not generate R^2 (with the exception of two groups who indicated that B generated the R^2 space). The main argument was that to generate R^2, the assembly had to contain two vectors. Among the justifications noting that B does not generate R^2, one stated that the vectors of this assembly were linearly dependent.

Table 5. Examples of responses that set C = {(1, 0),((1,-1)} if they generate the R2 space in Task 3.

Example of response by group 1	
Traslated	
C={(1,0), (1,-1)}	*Yes, because it has 2 vectors, and none of those vectors is a linear combination of the other*
Example of response by group 1	
Traslated	
C={(1,0), (1,-1)}	*Yes, because it has 2 components*

From the results obtained in this task, it is inferred that the groups of students progressed toward a general activity level [12] by deepening their grasp of the concepts of spanning set and span when performing conjectures in problems related to these concepts, but without making reference to the situation of the passwords. Likewise, in the analysis of task 3 through the written responses of the students, there was evidence that the ALT showed a high match with the HLT (86% of the groups).

4.4. Task 4

In Task 4, students individually applied the concepts of spanning set and span in a purely mathematical context. A question that was asked of them was, given a span $W = \{(x,y,z,w) \in R^4 / x = z, y = w = 0\}$, to determine: (1) a spanning set W and, (2) whether the vectors (1,5,0,0) and (5,0,5,0) belonged to W.

With respect to establishing a spanning set for W, 59% of the students responded correctly. Table 6 presents, as an example, the written and oral response of student 35, who shows evidence of having progressed toward a more formal reasoning of the concepts in the study because the student identified the characteristics of span W, and immediately, as he explains in an interview, applied a procedure to obtain a suitable spanning set and wrote it using the relevant mathematical notation. Among those students who did not respond correctly are those that used the span parentheses instead of the spanning set, as shown in the response of student 41 (Table 6) who, in addition, writes two linearly dependent vectors.

Table 6. Examples of responses to question 4a of Task 4.

Student 35

$W = \{(x,0,x,0)\} \rightarrow x \cdot (1,0,1,0)$

$G = \{(1,0,1,0)\}$

I: How do I get the spanning set?

S35: From the space, I replaced each variable according to the equivalent and it gave me this (indicating the vector $(x, 0, x, 0)$). That would leave $(x, 0, x, 0)$ or the same would be, $(z, 0, z, 0)$ and from there you take what would be the variable, which is the vector (1, 0, 1, 0) and this is (indicating his response).

Student 41

$\langle (4,0,4,0),(2,0,2,0) \rangle$

In regard to the question determining if two vectors belonged to W, 90% of the students responded adequately. The main justification was to check whether each vector complied with the conditions of the span given. Other students based their attempt on doing a linear combination of the vector of the spanning set of the span, as seen in Figure 5.

Translated

The vectors belong to W if there is a number that, when multiplied by the spanning set, turn out to be the given vector:

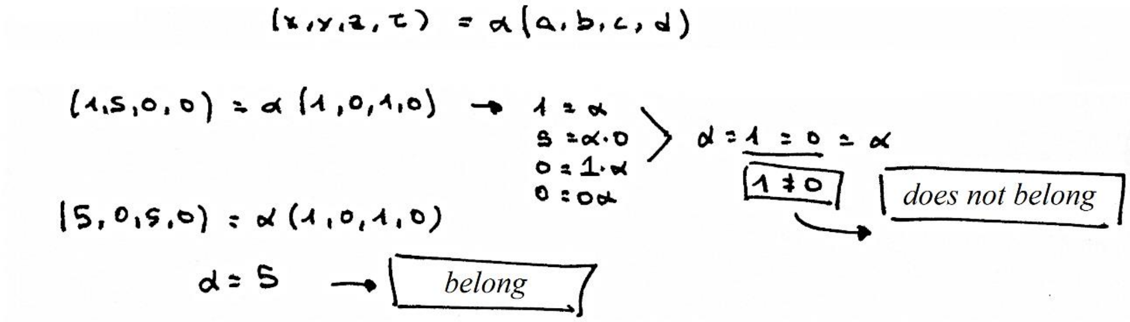


Figure 5. Written answer of a student to question 4b of Task 4

In Figure 5, it is noted that the student correctly used the vector of spanning set W to determine if the two vectors belonged to this span. It follows that he assumed that all vectors of W can be expressed as a linear combination of the element of the spanning set from this span.

In this task, the students worked with procedures and conventional notations in mathematics related to the concepts of spanning set and span, which shows that they indeed progressed toward a formal activity level [12].

In the analysis of Task 4, we observed in one case moderate match (59% of the students in question 4a), and in other case high match (90% of the students in question 4b) between the learning trajectories. In the case of question 4a, Table 6 shows a student proposing $G = \{(1,0,10)\}$ as a spanning set, which is correct for the R^4 subspace. This is the current trajectory of this student for this question, coinciding with the descriptions shown in the HLT (Table 2). In addition, in the case of question 4b, Figure 5 shows that a student performs the appropriate procedure to determine that the first vector (1,5,0,0) *does not belong* to the R^4 subspace, while the second vector (5,0,5,0) *does belong* to this subspace. This is the current trajectory of this student for this question, and its correspondence to the

ALT is nearly bijective, since there is an absolute match with the description of this trajectory (Table 2).

To evaluate the progress of the students, the level of match is compared between the HLT and the ALT, which is connected with the established methodological elements. The responses of the two students presented in Table 6 and Figure 5 are useful to us as evidence demonstrating that the tasks worked on in groups influenced the progress of several students concerning the construction of the concepts in study.

The results obtained in the implementation of this teaching innovation based on the emergent models heuristic and mathematical modelling show the potential that this proposal offers to contribute to the construction of the concepts of spanning set and span, because, as noted in the responses to the tasks, the groups progressed through different activity levels, from the informal level that began with the problem of creating a secure password generator to the formal level. It was found that when they worked with the procedures and conventional notations, their work concerned both spanning set and span. Table 7 presents a synthesis of the level of match between the HLT and the ALT in the tasks given to the students.

5. Discussion and conclusion

This study presented a didactic proposal based on the emergent models heuristic and mathematical modelling with the objective of evaluating it, by determining the level of match between the HLT and the ALT in relation to the construction of the concepts of spanning set and span. As a result, it was found that this proposal allowed students to begin to construct new concepts in linear algebra starting from an informal mathematical activity (through a situation that involves mathematical modelling) and moving toward more formal knowledge by means of emergent models heuristic as proposed by Gravemeijer [12].

Table 7. Synthesis of the level of match between the HLT and the ALT in the proposed tasks for students.

Task	Synthesis of conjecture of the HLT	ALT	Match between HLT and ALT
1	The students created a password generator by following the steps of the modelling cycle and using their preconceptions of vectors and passwords	100% of the groups created a generator of passwords using vectors, either by presenting a mathematical model of generic vector of R^n or a linear combination of vectors of R^3	+
2	Students are given an analogy table where they related the concepts of spanning set and span with two sets of their password generator and mentioned the name which they receive in their password generator.	57% of the groups scored the mathematical notation for spanning set correctly and assigned it that name. 43% of the groups scored the mathematical notation of span correctly and assigned it that name. The other groups had difficulty with the mathematical language.	±
3	Students determine that sets A and B do not generate a R^2, giving a coherent justification, and determine that the set C generates a R^2, giving a coherent justification.	100% of the groups gave a coherent justification of why A does not generate. 86% of the groups gave a coherent justification of why B does not generate and 93% of gave a coherent justification of why C does generate.	+
4a	The student proposes a correct spanning set for the sub R^4 given.	59% of students propose a correct spanning set, of which 20% of students determined the whole was equal to the subspace (W). Others write a set of vectors with parentheses < >.	±
4b	The students uses an appropriate process to determine if each vector belongs to the subspace R^4 or does not, and determines that the first vector (1,5,0,0) does not belong and that the second vector (5,0,5,0) does belong.	90% of students determine that the first vector (1,5,0,0) does not belong and that the second vector (5,0,5,0) does belong, justifying properly by the conditions of subspace R^4 or making a linear combination with the vector of spanning set.	+

The results show a high level of match between the HLT and the ALT in at least half of the tasks, which according to Stylianides and Stylianides [8] suggests that the instructional design supported the learning objective, which is to say that it helped the students to build the concepts of spanning set and span. This is not a coincidence, but is the result of what has been developed up to this point in design-based research that aims to develop a theory of local statements for the construction of the concepts of spanning set and span.

From the analysis of the results, it was observed that the following characteristics of the HLT tasks supported the construction of the concepts of spanning set and span:

- Task 1, which was to create a password generator with vectors, allowed students to activate their previous knowledge of vectors that helped them in later tasks.
- Task 2, through the analogy table, contributed to the students ability to distinguish the concepts of spanning set and span, both in a real context as mathematical, which offers them the opportunity to avoid confusing them when they are presented in a concrete situation.
- Task 3 offered students the ability to move toward a general level of content to explore conjectures involving the concepts of spanning set and span.
- Task 4 allowed students to progress toward a formal activity level of the concepts, to resolve activities with conventional mathematical notation, involving spanning set and span.

The difficulties that were observed in the ALT were mainly associated with the mathematical notation of the sets in study and the procedure of obtaining a spanning set. It is therefore proposed that the next HLT should have an emphasis on the mathematical notation of both spanning set as well as span, and incorporates a task to work in groups that approached the formal level of the emergent models, because it is considered that this would help each student to achieve a better understanding of the concepts.

In addition, the results of this study reveal that many students, as proposed by Gravemeijer [12], went from model of to model for within formal mathematical reasoning with spanning set and span, progressing from a task of the situational activity level, that only required the use of their previous knowledge, both of vectors and passwords (Table 3), toward a formal activity level task, that required the application of these concepts (Table 6 and Figure 5).

We agree with Alsina [13] that mathematical modelling can be a positive step toward success in learning, because the problem of creating passwords provided support for students to continue toward learning spanning set and span since in this task, they linked the context of passwords with the concepts under study, and used mathematical notation through an analogy table (Figure 3).

In accordance with what we have presented, this study shows that this didactic proposal, based on the emergent models heuristic and mathematical modelling, favours the construction of the concepts of spanning set and span. Thus, the main contribution of this research is a teaching innovation for these linear algebra concepts, which had been poorly explored in the field of mathematics education.

Finally, it must be emphasized that the results of this experiment provide a general outlook for both the benefits and the limitations of the HLT proposal, which will be useful for redesigning and applying it again in a new cycle of experimentation. In addition, it is important to note that implementing this specifically designed teaching proposal to another student population could derive similar results.

References

[1] Dorier JL, Sierpinska A. Research into the teaching and learning of linear algebra. In: Holton D, Artigue M, Krichgraber U, Hillel J, Niss M, Schoenfeld A, editor. The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study. Dordrecht (Netherlands): Kluwer Academic Publishers; 2001. p. 255–273.

[2] Trigueros M, Possani E. Using an economics model for teaching linear algebra. Linear Algebra Appl. 2013;438:1779–1792.

[3] Wawro M, Rasmussen C, Zandieh M, et al. Design research within undergraduate mathematics education: an example from introductory linear algebra. In: Plomp T, Nievenn N, editors. Edu- cational design researchpart B: illustrative cases. Enschede (Netherlands): Netherlands Institute for Curriculum Development; 2013. p. 905–925.

[4] Daro P, Mosher F, Corcoran T, editors. Learning trajectories in mathematics: a foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction (CPRE Research Report #RR-68). Philadelphia (USA): Consortium for Policy Research in Education; 2011.

[5] Simon M. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. J Res Math Educ. 1995; 26:114–145.

[6] Leikin R, Dinur S. Patterns of flexibility: teachers' behavior in mathematical discussion. In: Mariotti MA, editor. Electronic Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education; 2003 Feb 28–Mar 3; Bellaria Italy; 2003.

[7] Dierdorp A, Bakker A, Eijkelhof H, et al. Authentic practices as contexts for learning to draw inferences beyond correlated data. Math Think Learn. 2011; 13:132–151.

[8] Stylianides G, Stylianides A. Facilitating the transition from empirical arguments to proof. J Res Math Educ. 2009; 40:314–352.

[9] Wawro M. Task design: towards promoting a geometric conceptualization of linear transformation and change of basis. Paper presented at: Special Interest Group of the Mathematical Association of America. 12th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education; 2009 Feb 26–Mar 1; Raleigh, NC.

[10] Doorman M, Gravemeijer K. Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. ZDM. 2009;41:199–211.

[11] Larson C, Zandieh M, Rasmussen C. A trip through eigenland: where most roads lead to the direction associated with the largest eigenvalue. Paper presented at: Special Interest Group of the Mathematical Association of America. 11th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education; 2008 Feb 28–Mar 2; San Diego, CA.

[12] Gravemeijer K. How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. Math Think Learn. 1999;1:155–177.

[13] Alsina C. Teaching applications and modelling at tertiary level. In: Blum W, Galbraith P, Henn H-W, Niss M, editors. Modelling and applications in mathematics education. New York (NY): Springer; 2007. p. 469–474.

[14] Domínguez-García S, García-Planas M, Taberna J. Mathematical modelling in engineering: an alternative way to teach Linear Algebra. Int J Math Educ Sci Tech. 2016;47:1076–1086.

[15] Gravemeijer K. Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis. In: Phillips B, Busija L, editors. Proceedings of the 6th International Conference on Teaching Statistics; 2002 Jul 7–12; Cape Town, South Africa; 2002.

[16] Gravemeijer K, Stephan M. Emergent models as an instructional design heuristic. In: Gravemeijer K, Lehrer R, Van Oers V, Verschaffel L, editors. Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education. Dordrecht (Netherlands): Kluwer Academic Publishers; 2002. p. 145–169.

[17] Possani E, Trigueros M, Preciado J, et al. Use of models in the teaching of linear algebra. Linear Algebra Appl. 2010;432:2125–2140.

[18] Lesh R, English L. Trends in the evolution of models & modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. ZDM. 2005;37:487–489.

[19] Kaiser G, Schwarz B. Authentic modelling problems in mathematics education – examples and experiences. J Math Didakt. 2010;31:51–76.

[20] Julie C, Mudaly V. Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In: Blum P, Galbraith L, Henn H-W, Niss M, editors. Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study. New York (NY): Springer; 2007. p. 503–510.

[21] Blum W, Leiss D. How do students and teachers deal with modelling problems? In: Haines C, Galbraith P, Blum W, Khan S, editors. Mathematical modelling (ICTMA12): education, engineering and economics. Chichester (UK): Horwood Publishing; 2007. p. 222–231.

[22] Cárcamo A, Gómez J, Fortuny J. Mathematical modelling in engineering: a proposal to introduce linear algebra concepts. J Tech Sci Educ. 2016;6:62–70.

[23] Bakker A, Van Eerde D. An introduction to design-based research with an example from statistics education. In: Bikner-Ahsbahs A, Knipping C, Presmeg N, editors. Approaches to qualitative research in mathematics education. Berlin (Germany): Springer; 2015. p. 429–466.

[24] Blum W, Borromeo R. Mathematical modelling: can it be taught and learnt? J Math Modelling Appl. 2009;1:45–58.

4.3. Publicación 3

La citación del artículo 3 transcrito en este apartado es:

Cárcamo, A. (2017). El uso de contraseñas para introducir los conceptos de conjunto generador y espacio generado. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(1), 101-112.

El artículo 3, a partir de los resultados del primer y segundo ciclo del experimento de enseñanza (expuestos en las publicaciones 1 y 2), propone una secuencia instruccional, que apoya a los estudiantes en la construcción de conjunto generador y espacio generado, basada en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática.

Abstract

El objetivo de este artículo es presentar una propuesta de enseñanza para álgebra lineal fundamentada en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática. Ésta comienza con una situación problemática relacionada con el uso de contraseñas seguras, la que introduce a los estudiantes de primer año de ingeniería en la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado. La propuesta se diseña a partir de los resultados de los dos primeros ciclos de experimentación de enseñanza, de una investigación basada en el diseño, que dan evidencias que permiten a los estudiantes progresar de una situación en contexto real hacia los conceptos de álgebra lineal. Esta propuesta, previamente adaptada, podría tener resultados similares al aplicarse con otro grupo de estudiantes.

The aim of this paper is to present a proposal for teaching linear algebra based on heuristic of emergent models and mathematical modelling. This proposal begins with a problematic situation related to the creation and use of secure passwords, which leads first-year students of engineering toward the construction of the concepts of spanning set and span. The proposal is designed from the results of the two cycles of experimentation teaching, design-based research, which give evidence that allows students to progress from a situation in a real context to the concepts of linear algebra. This proposal, previously adapted, could have similar results when applied to another group of students.

Palabras clave: Modelización matemática, modelos emergentes, conjunto generador, espacio generado, innovación docente.

Keywords: mathematical modelling, emergent models, spanning set, span, teaching innovation.

1 Introducción

El álgebra lineal es difícil para los estudiantes tanto cognitiva como conceptualmente (Dorier y Sierpinska, 2001) y es por este motivo que se han realizado diversas innovaciones para su enseñanza, entre ellas: el uso de la modelización matemática y la aplicación de diseños instruccionales basados en la heurística de los modelos emergentes.

Trigueros y Possani (2013) afirman que la modelización matemática puede resultar exitosa en la enseñanza de los conceptos de algebra lineal a través del uso de ricos problemas contextualizados y que a pesar de que la construcción de conceptos abstractos es un proceso difícil, el uso de actividades de modelización puede ser una herramienta eficaz para que los estudiantes utilicen sus conocimientos previos y afronten las nuevas necesidades conceptuales. A su vez, Calabuig, García y Sánchez Pérez (2015) señalan que problemas conectados con la realidad puede motivar a los estudiantes a tener una visión de la matemática tanto práctica como real. Por su parte, Wawro, Rasmussen, Zandieh y Larson (2013) plantean que el uso de la heurística de los modelos emergentes para la creación de diseños instruccionales de álgebra lineal ayuda a que los estudiantes universitarios avancen desde su razonamiento informal matemático hacia uno más complejo y formal.

A partir de lo expuesto, el objetivo de este estudio es presentar una propuesta de enseñanza, para apoyar a los estudiantes en la construcción de conjunto generador y espacio generado, basada en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática.

Se eligen los conceptos de conjunto generador y espacio generado porque son fundamentales para álgebra lineal por su relación con otros contenidos de este curso como el concepto de base de un espacio vectorial (Stewart y Thomas, 2010).

2 Marco teórico

El marco teórico de esta investigación complementa la heurística de los modelos emergentes con la modelización matemática que sustentan la propuesta de enseñanza.

2.1 La heurística de los modelos emergentes

La heurística para el diseño instruccional de los modelos emergentes es una alternativa a los métodos de enseñanza que se centran en la enseñanza de las representaciones ya hechas (Gravemeijer, 2002) y su objetivo es crear una secuencia de tareas en la que los estudiantes inicialmente desarrollen *modelos de* su actividad matemática informal y que después, se transformen en un *modelo para* el razonamiento matemático más sofisticado (Gravemeijer, 1999).

La transición del *modelo de* al *modelo para* se define en términos de cuatro niveles de actividad establecidos por Gravemeijer (1999) que son: situacional, referencial, el general y formal. La actividad situacional involucra que los estudiantes trabajen hacia los objetivos matemáticos a partir de una experiencia que sea real para ellos. La actividad referencial implica modelos de descripciones, conceptos y procedimientos que se refieren al problema de la actividad situacional. La actividad general supone modelos para explorar, reflexionar y generalizar lo aparecido en el nivel anterior, pero con un foco matemático sobre las estrategias sin hacer referencia al problema inicial. La actividad formal conlleva a que los estudiantes reflejen el surgimiento de una nueva realidad matemática, por lo tanto, trabajan con procedimientos y notaciones convencionales.

2.2 La modelización matemática

El interés de la comunidad investigadora en educación matemática por la modelización matemática ha ido en aumento (Burkhardt, 2006). Lo anterior porque en las últimas décadas, tanto el aprendizaje como la enseñanza de la modelización y las aplicaciones se han convertido en temas importantes, no sólo en la escuela sino que también en la universidad, debido a la creciente demanda en el mundo por el uso de las matemáticas en: la ciencia, la tecnología y la vida diaria (Kaiser, 2010).

A nivel universitario, Alsina (2007) especifica que la investigación en educación matemática destaca que el enfoque de modelización matemática, es exitoso y una constatación de ello, es que hay evidencia científica de que los estudiantes aprenden mejor en contexto, ya sea porque proporciona motivación e interés o porque involucra a los estudiantes en la resolución de problemas del mundo real. Por lo tanto, el énfasis en el contexto, en problemas aplicados, en matematización de la realidad, entre otros, puede ser un paso positivo hacia el éxito en el aprendizaje.

Sin embargo, Trigueros (2009) señala la importancia de la modelización matemática en el aprendizaje de las matemáticas en el ámbito universitario ha tardado en llegar, pues la enseñanza de las matemáticas que sigue predominando es la tradicional, es decir, aquellas en que las clases se imparten casi siempre en forma de conferencia introduciendo definiciones y teoremas de manera más o menos lineal y dejando el trabajo de los estudiantes únicamente para la solución de problemas como tarea a realizar fuera del aula. Lo anterior, sin importar que dicha enseñanza se dirija a estudiantes, cuyo interés primordial es justamente la aplicación de las matemáticas.

En este estudio, la modelización matemática es concebida como una herramienta de ayuda al estudio de las matemáticas (Barquero, 2009) porque se asume que articular la actividad matemática escolar con ciertos ámbitos de la realidad tiene un efecto positivo tanto en la motivación de estudiantes por las matemáticas como en su capacidad para utilizar estas matemáticas en los problemas que le surjan en la vida cotidiana. Además, se considera el ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiss (2007) para guiar a los estudiantes con la tarea de modelización propuesta en este estudio. La relación entre los siete pasos de este ciclo y la tarea de modelización de la propuesta didáctica se presenta en la Figura 1.

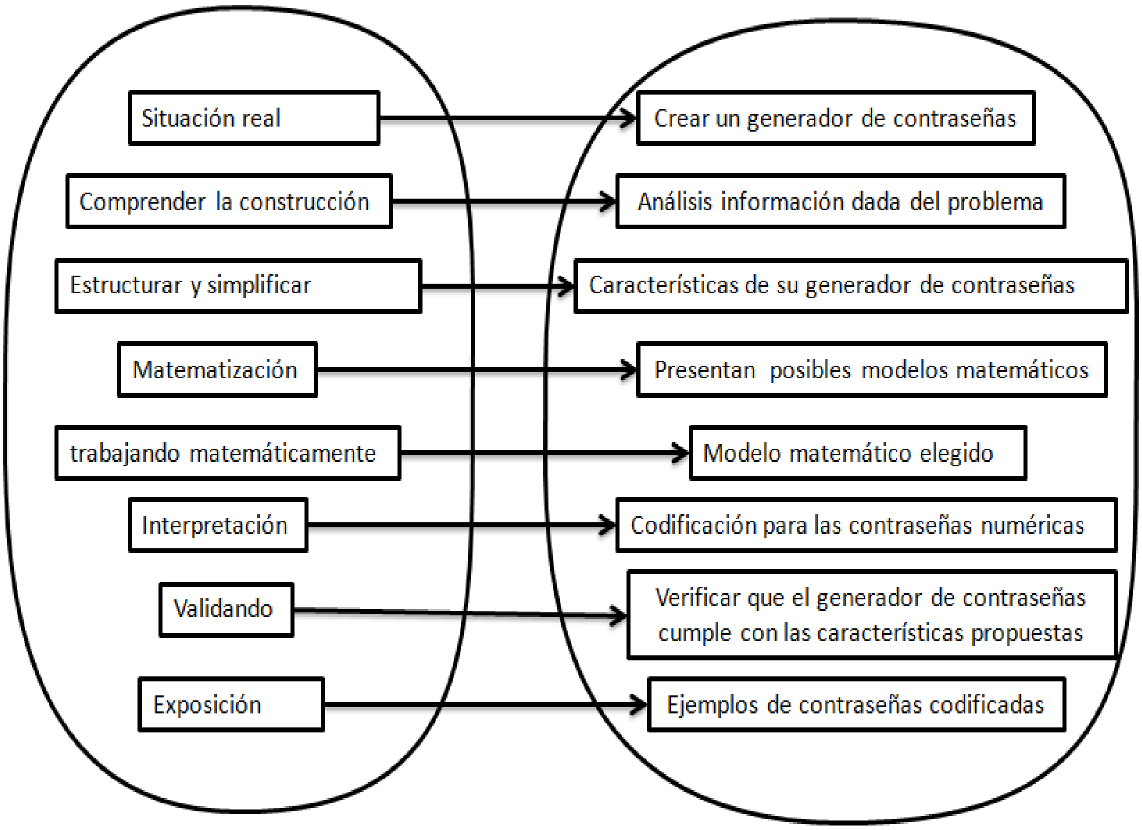


Figura 1: Relación entre el ciclo de modelización según Blum y Leiss (2007) y la tarea de modelización de la propuesta de enseñanza (Cárcamo, Gómez y Fortuny, 2016).

3 Metodología

La metodología de este estudio es la investigación basada en el diseño que se caracteriza por el diseño de entornos educativos innovadores que se entrelazan con la experimentación y el desarrollo de la teoría. Consiste en tres fases: (1) preparación y diseño, (2) experimentos de enseñanza y (3) análisis retrospectivo (Bakker y van Eerde, 2015).

La fase de preparación y diseño abarca, lo que Simon (1995) denomina, la trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) que tiene tres componentes: (1) el objetivo de aprendizaje que define las metas que hay que alcanzar, (2) las actividades de aprendizaje y (3) una posible ruta de aprendizaje o proceso cognitivo que es una predicción de cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes se desarrollarán en el marco de las actividades de aprendizaje.

La fase de experimentos de enseñanza contempló dos ciclos de experimentación. El estudio se efectuó entre los periodos 2013-2014 y 2014-2015 en L'Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú (UPC) situada en Catalunya (España) con estudiantes de primer año de ingeniería que cursaban la asignatura de fundamentos matemáticos y no habían tenido experiencia previa con problemas que involucraran modelización matemática ni habían estudiado previamente los conceptos de conjunto generador y espacio generado. Los datos recopilados en cada ciclo de experimento de enseñanza fueron: registros de audio y video del trabajo en grupo, las respuestas escritas de los estudiantes a las tareas propuestas en la THA y una entrevista individual al finalizar la experimentación. En el primer ciclo participaron 31 estudiantes mientras que en el segundo, 45 estudiantes.

La fase de análisis retrospectivo incluyó un análisis de las regularidades en los dos ciclos de experimento de enseñanza basados en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática para apoyar a los estudiantes en la construcción de conjunto generador y espacio generado. A partir de lo anterior, se elabora la propuesta de enseñanza para estos conceptos de álgebra lineal.

4 Propuesta de enseñanza

Las tareas de la propuesta de enseñanza se fundamentaron en la heurística de los modelos emergentes y la modelización matemática. La modelización matemática se consideró como una herramienta de enseñanza para iniciar la construcción de los conceptos en estudio a través de un problema que consistió en crear un generador de contraseñas con vectores. Asimismo, tal como señalan Gravemeijer y Stephan (2002) la heurística de los modelos emergentes sirvió para diseñar y estructurar las tareas de tal manera de motivar a los estudiantes en la transición de su razonamiento de actividad matemática informal hacia un razonamiento matemático formal.

A partir del análisis retrospectivo de los datos recopilados en este estudio, la propuesta de enseñanza contempla 4 tareas en grupo y una tarea individual, las cuales se detallan a continuación.

4.1 Tarea 1: Generando contraseñas con vectores

El contexto para iniciar la experiencia de enseñanza es la creación de contraseñas. A los estudiantes se les presenta el problema de la Figura 2.

El objetivo de la tarea, es que los estudiantes en grupo, determinen un modelo matemático para generar contraseñas basado en vectores, siguiendo los pasos del ciclo de modelización matemática propuesto por Blum y Leiss (2007).

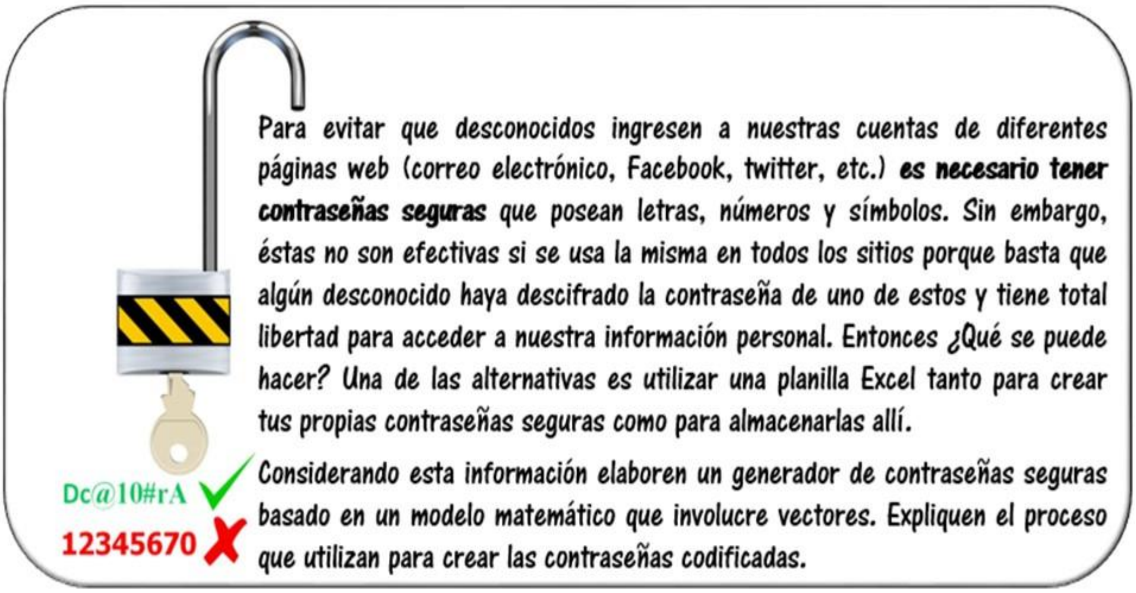


Figura 2: La tarea 1 propuesta a los estudiantes para trabajar en grupo.

4.2 Tarea 2: Relacionando el generador de contraseñas con conjunto generador y espacio generado

Después de que el profesor introduce los conceptos conjunto generador y espacio generado relacionado con el contexto de las contraseñas, los estudiantes en grupo tienen que completar la tabla de la Figura 3 en la que establecen una analogía entre dos conjuntos asociados a su generador de contraseñas (aquel que contiene vectores que al hacer la combinación lineal con ellos se obtiene el vector para cada contraseña numérica y aquel que posee todos los vectores que permiten generar las contraseñas numéricas) y los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

Nombre que recibe en tu generador de contraseñas	Cómo se escribe en lenguaje matemático	Nombre que recibe en matemática

Figura 3: La tabla que los estudiantes deben completar en la tarea 2.

El objetivo de la tarea 2 es que los estudiantes relacionen los conceptos en estudio con un contexto real y así, eviten confundirlos, ya que es una de las principales dificultades que tienen con estas definiciones (Nardi, 1997).

4.3 Tarea 3: Explorando propiedades de conjunto generador y espacio generado

En la tarea 3, los estudiantes en grupo conjeturan respecto a propiedades asociadas a los conceptos de conjunto generador y espacio generado, como se observa en las preguntas de la Figura 4. Además, ellos no hacen alusión al contexto de las contraseñas.

El objetivo de la tarea 3 es que los estudiantes exploren propiedades de los conceptos de conjunto generador y espacio generado para que progresen hacia un nivel de razonamiento más formal en relación a estos.

(a) Los conjuntos C y D que se muestran en la siguiente tabla son conjuntos generadores de $\mathbb{R}^2$ mientras que A y B no lo son. Conjeturen cuál debe ser el rango de la matriz que tiene por filas vectores de un conjunto de $\mathbb{R}^2$ para que este conjunto genere a $\mathbb{R}^2$

Conjunto pertenecientes a $\mathbb{R}^2$	Matriz cuyas filas son los vectores del conjunto	Rango de la matriz	**Su conjetura:**
$A=\{(0,-3)\}$	$M_1=\begin{pmatrix}0 & -3\end{pmatrix}$		
$B=\{(5,0),(7,0)\}$	$M_2=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 7 & 0\end{pmatrix}$		
$C=\{(1,0),(1,-1)\}$	$M_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$		
$D=\{(-1,-4),(2,8),(0,-1)\}$	$M_1=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 2 & 8\\ 0 & -1\end{pmatrix}$		

(b) Conjeturen sobre cuál debe ser el rango de una matriz que tiene como filas vectores de $\mathbb{R}^3$ para que el conjunto que contenga esos vectores genere a $\mathbb{R}^3$. ¿Qué ocurrirá con vectores de $\mathbb{R}^4$?

(c) ¿Cuántos vectores debe tener como mínimo un conjunto para generar a $\mathbb{R}^2$? Fundamenten.

(d) ¿Existe un número máximo de vectores para generar a $\mathbb{R}^2$? Fundamenten.

Figura 4: Ejemplo de preguntas de la tarea 3.

4.4 Tarea 4: Aplicando los conceptos de conjunto generador y espacio generado

En la tarea 4, los estudiantes en grupo aplican los conceptos de conjunto generador y espacio generado. En la figura 5 se observan algunas preguntas de este apartado.

(a) Sea el subespacio $V=\{(w,d,I,P,G)/P=w,d+I=G\}$. w es el crecimiento de los salarios, d es el crecimiento de los impuestos directos, I es el crecimiento de los impuestos indirectos, P es el crecimiento de los precios y G es el crecimiento del gasto. Determinen:

(i) Un conjunto generador de V.

(ii) Si el vector $(3,2,-7,3,-5)$ pertenece a V. Si es así, interprételo según el problema.

(b) Indiquen si $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0)\}$ es un conjunto generador para $W=\{(x,y,z,w)/x=w\}$.

(c) Establezcan si el conjunto de vectores $S=\{(2,1,0),(3,1,1),(3,2,-1)\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$. Si no es así, determina el espacio que genera.

Figura 5: Ejemplo de preguntas de la tarea 4.

El objetivo de la tarea 4 es que los estudiantes en grupo den evidencias de que han logrado un razonamiento más formal de los conceptos, de conjunto generador y espacio generado, al resolver preguntas que implican estos en un contexto matemático.

4.5 Tarea 5: Aplicando los conceptos individualmente

En la tarea 5, los estudiantes individualmente aplicaron los conceptos de conjunto generador y espacio generado en un contexto matemático. El objetivo es observar el nivel de progreso, hacia el razonamiento formal de los conceptos de álgebra lineal que han estado estudiando. Algunas preguntas de este apartado se observan en la figura 6.

(a) ¿Qué le sugerirías recordar a un estudiante que confunde los conceptos de conjunto generador y un espacio generado para que distinga entre ellos?

(b) Si el conjunto $\{(1,2),(2,3)\}$ genera a $\mathbb{R}^2$ entonces $\{(1,2),(2,3),(-2,5)\}$ también genera a $\mathbb{R}^2$? Justifica.

(c) Dado el espacio generado $W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \,/\, x=z, y=w=0\}$ determina:
- (i) un conjunto generador de W
- (ii) si los vectores (1,5,0,0) y (5,0,5,0) pertenecen a W. Justifica.

Figura 6: Ejemplo de preguntas de la tarea 5.

5 Algunas respuestas del segundo ciclo del experimento de enseñanza

A continuación, se muestran ejemplos de respuestas de las tareas 1 y 2 del segundo ciclo del experimento de enseñanza.

La tarea 1 presenta como desafío que los estudiantes en grupo elaboren un generador de contraseñas basado en vectores y guiados por el ciclo de modelización matemática. En la tabla 1 se observa la respuesta escrita del grupo 5 y algunos de los pasos del ciclo de modelización matemática que siguieron para dar ésta.

Pasos del ciclo de modelización. Comprender la situación, estructurar y simplificar: características de su generador de contraseñas
Nuestro método para generar passwords, estará basado en 2 vectores fijos, con tres variables cada uno que luego serán sumados, para mayor seguridad. Cuando estén sumados y tengamos el número, todos los números a excepción del primero y el último, serán sustituidos por este código:
Paso ciclo del modelización. Trabajando matemáticamente: elección del modelo matemático para generar contraseñas
Vector 1: $a(3,-3,4)+b(-1,1,2)+c(0,4,2)$ Vector 2: $a(1,2,-3)+b(-4,9,2)+c(2,0,-7)$
Paso del ciclo del modelización. Interpretación: codificación a utilizar para generar las contraseñas
0 → m; 1 → M; 2 → c; 3 → d; 4 → S; 5 → g; 6 → Q; 7 → r; 8 → z; 9 → P
Pasos del ciclo de modelización. Validación y presentación de la solución: Ejemplo de una contraseña codificada creada por su generador de contraseñas
Ejemplo: $a=2 \quad b=-1 \quad c=3$ $V_1 \to 2(3,-3,4)+(-1)(-1,1,2)+3(0,4,2) =$ $=(6,-6,8)+(1,-1,-2)+(0,12,6)=(7,5,12)$ $V_2 \to 2(1,2,-3)+(-1)(-4,9,2)+3(2,0,-7)=$ $=(2,4,-6)+(4,-9,-2)+(6,0,-21)=(12,-5,-29)$ $(7,5,12)+(12,-5,-29)=(19,0,-17)$ $(19,0,-17) \to 19017$ $\downarrow$ 1PmM7

Tabla 1: Respuesta escrita del grupo 5 a la tarea 1.

En la tabla 1 se ve que los estudiantes en grupo, en general, siguen los pasos del ciclo de modelización matemática (Figura 1), aunque no hay una evidencia escrita del paso de matematización que es donde ellos sugieren posibles modelos matemáticos para su generador de contraseñas. Sin embargo, ellos definen su modelo matemático que corresponde a dos vectores representados ambos por combinaciones lineales de vectores de R^3.

En la tarea 2, los grupos de estudiantes debían completar una tabla de analogía entre su generador de contraseñas y los conceptos en estudio. En la figura 7 se muestra, como ejemplo, la respuesta del grupo 14. En ésta se observa que escribieron correctamente en notación analítica dos conjuntos asociados a su generador de contraseñas: aquel que contenía vectores que al hacer la combinación lineal con ellos se obtenía el vector para cada contraseña numérica y otro que poseía todos los vectores que permitían generar las contraseñas numéricas. Estos conjuntos los asociaron con los nombres de conjunto generador y espacio generado, respectivamente. Se observa falta de rigurosidad con la notación matemática de estos conceptos, ya que anotaron en forma vertical los vectores del conjunto que conectaron con el nombre de conjunto generador.

Nombre que recibe en tu generador de contraseñas	Cómo se escribe en lenguaje matemático	Nombre que recibe en matemática
conjunto que contiene los vectores para generar constraseñas numéricas.	$E=\{(7a,2b,-3c) \in R^3\}$	Espacio generado
Conjunto que al hacer combinación lineal con sus vectores se obtiene cada vector que genera una constraseña numérica	$B=\{(7,0,0), (0,2,0), (0,0,-3)\}$	conjunto generador

Figura 7: Respuesta escrita del grupo 14 a la tarea 2.

La tabla de analogía, a pesar de las dificultades con el lenguaje matemático que mostraron los estudiantes en su respuesta, permitió que vincularan dos conjuntos en notación matemática con los nombres asignados en el contexto de su generador de contraseñas, pero también con sus denominaciones matemáticas de conjunto generador y espacio generado, es decir, ampliaron la visión de estos conceptos hacia un contexto real lo que podría lograr que los estudiantes recuerden las características de cada uno y así, eviten confundirlos.

6 Conclusiones

Se plantea una propuesta didáctica que da la oportunidad a los estudiantes de iniciar la construcción de nuevos conceptos de álgebra lineal desde su actividad matemática informal (a través de una situación que involucra la modelización matemática) hacia un conocimiento más formal por medio de los niveles de actividad asociados a la heurística de los modelos emergentes propuestos por Gravemeijer (1999).

A partir del análisis de los resultados de los dos ciclos de experimentos de enseñanza se observaron que las siguientes características del diseño instruccional apoyaron la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado:

- La tarea 1 que consiste en crear un generador de contraseñas con vectores permitió a los estudiantes activar sus concepciones previas de vectores que les sirvieron para las siguientes tareas.

- La tarea 2 a través de la tabla de analogía contribuyó a que los estudiantes distinguieran los conceptos de conjunto generador y espacio generado tanto en un contexto real como matemático, lo que les ofrece la oportunidad de evitar confundirlos.

- La tarea 3 facilitó que los estudiantes transiten hacia un nivel general de los contenidos al explorar conjeturas que involucren a los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

- Las tareas 4 y 5 permitieron a los estudiantes progresar hacia un nivel de razonamiento más formal de los conceptos de conjunto generador y espacio generado al resolver actividades con notación matemática convencional.

Finalmente, señalar que esta propuesta de enseñanza, previamente adaptada, podría proporcionar resultados similares, a los ciclos de experimentación de enseñanza indicados en este estudio, si se aplica a otra población de estudiantes.

Referencias

Alsina, C. (2007). Teaching applications and modelling at tertiary level. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 469-474). New York: Springer.

Bakker, A., van Eerde, D. (2015). In introduction to design-based research with an example from statistics education. In *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 429-466). Springer Netherlands.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas.* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

Blum W., Leiss D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling* (ICTMA12): Education, Engineering and Economics (pp. 222-231). Chichester, UK: Horwood Publishing.

Calabuig, J. M., Raffi, L. M. G., Sánchez-Perez, E. A. (2015). Áľgebra lineal y descomposición en valores singulares. *Modelling in Science Education and Learning*, *8*(2), 133-144.

Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *ZDM*, 38(2), 178-195.

Cárcamo Bahamonde, A., Gómez Urgelles, J., Fortuny Aymemí, J. (2016). Mathematical Modelling in Engineering: A Proposal to Introduce Linear Algebra Concepts. *Journal of Technology and Science Education* (JOTSE), 6(1), 62-70.

Dorier, J. L., Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 255-273). Springer Netherlands.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 155-177.

Gravemeijer, K. (2002). Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis. In *Proceedings of the 6th International Conference on Teaching Statistics.*

Gravemeijer, K., Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. In *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 145-169). Springer Netherlands.

Kaiser, G. (2010). Introduction: ICTMA and the teaching of modeling and applications. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 1-2). New York: Springer.

Nardi, E. (1997). El encuentro del matemático principiante con la abstracción matemática: una imagen conceptual de los conjuntos generados en el análisis vectorial. *Educación Matemática*, 9(1), 47-60.

Stewart, S., Thomas, M. O. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 173-188.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.

Trigueros, G. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9 (46), 75-87.

Trigueros, M., Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 438(4), 1779-1792.

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., Larson, C. (2013). Design research within undergraduate mathematics education: An example from introductory linear algebra. *Educational design research – Part B: Illustrative cases*, 905-925.

4.4. Publicación 4

La citación del artículo 4 transcrito en este apartado es:

Cárcamo, A., Fortuny J. y Fuentealba C. (en prensa). The emergent models in linear algebra: an example with spanning set and span. *Teaching Mathematics and its Applications*.

El artículo 4 expone los resultados principales del tercer ciclo del experimento de enseñanza de nuestra investigación y describe la función de los modelos emergentes en la construcción de conjunto generador y espacio generado.

Abstract

A continuing challenge in mathematics education at the university level is how to create learning environments that give students the opportunity to progress from their informal ways of reasoning to more formal ways of reasoning. This article shows how the emergent models heuristic (Gravemeijer, 1999) provides this opportunity to first-year university students, specifically for them to construct the linear algebra concepts of spanning set and span. For this, a design-based research methodology was used. A hypothetical learning trajectory (HLT) was applied, created within the framework of this heuristic. The results provide evidence that the emergent models heuristic supports the construction of these concepts of linear algebra. Moreover, useful tips are given for harnessing the potential of this heuristic to construct mathematical concepts.

1. Introduction

For some time, a growing amount of literature in mathematics education has indicated that students have difficulties with advanced mathematical thinking. This is due, on the one hand, to the complexity and abstract nature of advanced mathematical topics, but on the other hand, to the difficulties that they encounter due to the shift from less formal to more formal modes of reasoning. However, despite this, the systematic descriptions of the means by which and the stages through which students advance from informal reasoning to formal reasoning are still in initial research (Dawkins, 2012). These investigations include those that use the levels of activity described by Gravemeijer (1999) to detail the transition of students from an informal mathematical reasoning of their activity toward a more formal type of mathematical reasoning. This research has been carried out in the university courses of: differential equation (Rasmussen & Blumenfeld, 2007), geometry (Zandieh & Rasmussen, 2010) and linear algebra (Wawro, Rasmussen, Zandieh, & Larson, 2013).

In their study, Rasmussen and Blumenfeld (2007) exemplify the four levels of activity of the emergent models as a framework for the analysis of the mathematical activity of the students observed for the study in constructing the solutions to systems of two differential equations. They conclude that their work contributes to the emergent models heuristic, as they "demonstrated how analytic expressions can underpin the entire model-of/model-for transition" (p. 208). This is due to the fact that, in previous research, most of which has been done at the primary and secondary [school] levels, the model-of phase (situational and referential level) has not involved analytical expressions; instead, it usually includes concrete tools, graphs or diagrams. Only later, in the model-for phase (general and formal level) do students work with formal and symbolic expressions.

In addition, Rasmussen and Blumenfeld (2007) consider that their study in the course of differential equations offers a prototypical example of a work inspired by the Realistic Mathematics Education (RME) and the emergent models heuristic at the undergraduate level to support students in creating new mathematical realities. They also note that these ideas about "student thinking can be useful for teachers in their difficult task of making sense of what students say and, do for being proactive in supporting their intellectual growth" (p. 208).

Wawro et al. (2013) describe the reasoning used by students in constructing the concepts of span, linear independence, and linear dependence through the four levels of activity of the emergent models. These authors indicate how the emergent models heuristic reports the creation of an instructional sequence for these concepts of linear algebra. Moreover, they describe how the activity levels of this heuristic are manifested in the sequence. They give evidence of how students give indications of being in the first three levels of activity. However, they argue that the last level of activity (the formal level) does not occur during the sequence, but rather is observed in other tasks unrelated to this sequence. In addition, they indicate that the refinement of their instructional sequence, "and its framing within the four levels was made possible by the cyclical process of design research" (p. 911).

Our research is grounded in the emergent models heuristic. In particular, our research describes how student reasoning has progressed through each of the four levels of activity in relationship to the tasks of the HLT that students worked on. This is the case because we want to contribute to this design heuristic that, according to Dawkins (2012), needs further exploration due to the fact that many mathematical topics do not immediately suggest contexts in which students can begin their learning. Among these mathematical topics are several contents of the linear algebra course, including the concepts of spanning set and span, which we considered in this study. These concepts are chosen because of their relationship with important contents of this course, such as: base and dimension (Stewart & Thomas, 2010).

The objective of this study is to show how the emergent models heuristic supports students in the construction of the concepts of spanning set and span through an HLT that has an initial task that is associated with the context of secure passwords.

2. Theoretical background

The theoretical perspective of our research is based on the instructional design heuristic of emergent models that guide the design of the HLT and the analysis of the data.

The emergent models heuristic is one of the key instructional design heuristics that may help designers or researchers to develop local instructional theories. This heuristic is part of the domain-specific instruction theory for RME. The value of the emergent models heuristic is that it helps students in constructing a mathematical reality by themselves (Gravemeijer, 2007) through a process of gradual growth, in which formal mathematics assume primary importance as a natural extension of their experiential reality (Gravemeijer, 1999). The emergent models heuristic is an alternative to instructional approaches that focus on teaching ready-made representations, this is, the approaches that only transmit knowledge to the student (Gravemeijer, 2002).

The term "model" should not be taken literally (Gravemeijer, 1997). In general, models are defined as ways generated by students for organizing their mathematical activity with both observable and mental tools. Observable tools are things in their environment, such as: graphs, diagrams, explicitly defined definitions, physical objects, etc. Meanwhile, mental tools allude to the ways in which students think and reason as they solve problems (Zandieh & Rasmussen, 2010). Such models are emergent "in the sense that various ways of creating and using tools, graphs, analytic expressions, etc. emerge together with increasingly sophisticated ways of reasoning" (Rasmussen & Blumenfeld, 2007, p. 198).

At this first level, the model must allow for informal strategies that correspond with solution strategies about the context. From that point onward, the role of the model begins to change. Then, while the students gather more experience with similar problems, their attention can shift toward mathematical relations and strategies. As a consequence, the model obtains a more object-like character and becomes more important as a basis for mathematical reasoning than as a way to represent a contextual problem. In this way, the model begins to become a reference base for the level of formal mathematics. In short, model-of informal mathematical activity becomes model-for, more formal mathematical reasoning (Gravemeijer, 2007).

For the transition from model-of to model for, Gravemeijer (1999) details four levels of activity that do not involve any strictly ordered hierarchy, known as: situational, referential, general and formal. The situational activity involves students working toward the mathematical objectives through an experience that is real to them. The referential activity involves models of descriptions, concepts and procedures that relate to the problem of the situational activity. The general activity involves models to explore, to reflect upon and to generalize about what appeared at the previous level, but with a mathematical focus on strategies, without making any reference to the initial problem. The formal activity leads students to reflect the emergence of a new reality in mathematics; therefore, it involves working with procedures and conventional notations.

Regarding activity levels, Zolkower and Bressan (2012) point out that at the situational activity, the real experiential problem is organized by students through strategies that arise spontaneously from the problem. At the referential activity level (model-of), students make graphs, notations, and procedures that outline the problem, but refer to the initial problem. At the general activity (model-for) level, students explore, reflect and generalize what has appeared at the previous level, but no reference is made to the initial context. At the formal activity level, students work with conventional procedures and notations that are disconnected from the situations that gave them their initial meaning.

Dawkins (2015) argues that the levels of activity mentioned by Gravemeijer (1999) are quite general, so it is necessary for instructional designers to elaborate the levels in the mathematical context in which they wish to work.

On the other hand, Dawkins (2015) points out that the teacher guides the construction of mathematical knowledge of students and supports them in three basic processes that are involved with the four levels of activity. These are: when students engage in an experientially real activity, when they reflect on that activity to understand the structure, and when they adapt that structure to other experiences. The last two processes allow students to create the model-of and model-for mathematical activities, respectively.

3. Method

The methodology of our study is the design-based research. This methodology aims to investigate the possibilities of educational improvement through the creation and study of new forms of learning (Gravemeijer & van Eerde, 2009). In design-based research, experiments are designed to transform classrooms into learning environments that foster reflective practices among students, teachers, and researchers (Brown, 1992). These experiments involve continuous cycles of design, review, and redesign until all errors are resolved (Collins, Joseph & Bielaczyc, 2004).

The design-based research distinguishes three phases: (1) the preparation for the experiment, (2) the teaching experiment, and (3) the retrospective analysis (Gravemeijer & van Eerde, 2009). In the first phase, a HLT was elaborated (Simon, 1995) based on emergent models and mathematical modelling. In the experimental teaching phase, three design experimental cycles were developed in which the initial HLT was refined. In the Table 1, we present a summary of the difficulties and modifications that were made in cycles one and two of this research (for more details of these cycles, see the articles Cárcamo, Gómez & Fortuny (2016) and Cárcamo, Fortuny & Gómez (2017)).

The data collected in each design experimental cycles were as follows: the written responses of the students to the tasks proposed in the HLT, audio and video recordings of group work, and an individual interview at the end of the experimentation.

The data of each cycle were analyzed comparing the HLT with the actual learning trajectory (ALT) through the matrix proposed by Dierdorp, Bakker, Eijkelhof & van Maanen (2011), looking for background to support or rebut the conjectures of the HLT. Also, the emergent models were used to interpret students' progress in constructing the concepts of spanning set and span.

The results that we presented correspond to the third cycle of this design-based research. The study participants were seven first-year students of engineering at a Spanish university who had not previously worked with mathematical modelling, nor had studied the concepts of spanning set and span. They were selected for their interest in participating in the teaching experiment and for their communicative competence. This experiment was carried out over five hours, divided into three class sessions, in which the students worked in two groups (group A of four students and group B of three students).

TABLE 1. *Summary of the difficulties and modifications that were made in cycles one and two of this research*

Cycle 1		Cycle 2	
Difficulty	Modification to cycle 2	Difficulty	Modification to cycle 3
Use of mathematical language.	The teacher promotes the use of correct mathematical language.	The mathematical notation of spanning set.	The method for delivering the definitions of the concepts was modified once again, with emphasis to their names and notations.
Obtain a span of R^2 given a certain spanning set of this span.	Questions are added in task 3, about spanning set and span properties.	The mathematical notation of set.	
Graph a span of R^2.	This question is deleted.	Designate the same name to the span and to a spanning set that generates it.	
The different ways to denote span. Associate the spanning set and span names to your notations in an interchangeable way. Name another spanning set by associating it with its mathematical notation.	It modifies the way that definitions of the concepts are given, with emphasis to their names and notations.		

The teacher guided the students in the resolution of the tasks of the HLT and, he led the discussion of topics that he considered relevant to favour learning. For example, in the task 1, the teacher guided the students toward the solutions of the problem using the mathematical modelling cycle proposed by Blum and Leiss (2007). In addition, the teacher provided guidelines for: raising the mathematical model for generating passwords (suggesting the use of vectors or linear combinations) and create a coding for his password generator (suggesting the use of tables and giving them two examples).

The HLT was composed of four tasks. The first task made use of an experientially real problem setting to support the construction of the concepts of spanning and span. This setting is experientially real for students in that it utilizes both their mathematical knowledge and their experience with passwords as a foundation on which to build more formal mathematics. In this task, mathematical modelling serves as a tool to help the study of mathematics (Julie & Mudaly, 2007). We consider the modelling cycle proposed by Blum and Leiss (2007) to guide students in solving this task.

On the other hand, in this study, we emphasize how the four levels of activity linked to the emergent models heuristic can manifest themselves within the tasks of HLT. Table 2 summarizes the tasks and major conjectures of the learning trajectory of the HLT and how students are expected to manifest their activity levels in each of the tasks of HLT.

4. Results

In this section, we describe how the reasoning used by the student groups progressed through each of the four levels of activity using the tasks of the HLT that they developed. In accordance with Rasmussen and Blumenfeld (2007) "these different levels offer a journey through students' mathematical thinking without imposing a strict hierarchy" (p. 201).

4.1 Situational activity

With respect to the first of the four levels of activity, "situational activity involves students working toward mathematical goals in an experientially real setting" (Zandieh & Rasmussen, 2010, p. 58). The context of generating secure passwords serves as an experientially real starting point for initiating the construction of spanning set and span.

TABLE 2. *Summary of the tasks and major conjectures of the learning trajectory of the HLT and how students are expected to manifest their activity levels in each of the tasks of HLT*

Task and its major conjectures of learning trajectory	Manifestation of activity levels
Task 1: create a password generator based on vectors. Major conjectures: (1) Students read information from the secure passwords; (2) students created a password generator by following the steps of the modelling cycle and using their previous knowledge of vectors and passwords.	Situational activity. Students begin the construction of the concepts of spanning set and span in the context of passwords. Students explore different ways of using vectors and linear combinations to propose a mathematical model that generates passwords.
Task 2: make an analogy table between their password generator and the concepts of spanning set and span. Major conjectures: (1) Students find two sets from their password generator (one which has all the vectors that allow for the generation of the numerical passwords and the other which contains the vectors that, after creating the linear combination, is obtained by the vector for each numeric password with them); (2) students identify common features between two sets connected to their password generator and the concepts of spanning set and span; (3) students distinguish between spanning set and span with the analogy table.	Referential activity. Students use the set notations along with the definitions of spanning set and span to find two sets linked to their password generator that in mathematical notation correspond to the concepts of spanning set and span, respectively. These two sets function as models-of with respect to their previous activity with passwords and with vectors.
Task 3: Conjecture what the rank of the matrix should be so that its rows generate R^2. Major conjectures: (1) Students explore particular cases and identify some regularity; (2) students relate spanning set and span with other concepts; (3) students conjecture the number of vectors in a set needed to generate R^2; (4) students determine that the number of vectors is not sufficientto indicate if a set generates the span of R^2.	General activity. Students explore, reflect, and make new conjectures about sets of vectors in R^n that correspond to spanning sets or spans and that do not refer to sets within the context of passwords. The two sets linked to the context of the referential level passwords function as models-for reasoning about properties of this type of set, but without hinting at the initial situation.
Task 4: Indicate if the set C={(1,0,0,1),(0,1,0,0)} is a spanning set for span W={(x,y,z,w)/x=w}. Major conjectures: Students to pose a solution: (1) they explore possible routes for resolution; (2) they find a spanning set or span (according to the resolution they decided); (3) they verify if the set C is a generator of W.	Formal activity. Students work with the conventional notations of spanning set and span as well as their properties in situations that differ from those presented in previous levels, allowing them to demonstrate an overall understanding of these concepts.

In their development of task 1, student groups showed they were at the level of situational activity because they explored different ways of using vectors and linear combinations towards the goal of creating a numerical password generator based on vectors. This is exemplified by the following dialogue of group A where it was observed that they made use of their previous conceptions of vectors and that the students S3 and S1 of this group proposed different ways of using the vectors to propose a solution:

> S3: First, what are we going to use? What operations are we going to do with the vectors? Are we going to add them up, multiply them or something like that?
> S1: A number that multiplies each vector and then, add the vectors.
> S3: How many vectors will we make?
> S4: Three.
> S2: Three vectors.
> S1: Three vectors.

Student S3 started questioning how they would use the vectors to propose a solution for task 1. Student S3 asked to his companions "What operations are we going to do with the vectors? Are we going to add them up, multiply them or something like that?". Student S1 suggested "A number that multiplies each vector and then, add the vectors". That is, implicitly, student S1 proposes to make a linear combination. Then, student S3 asked about the number of vectors their model would contain and the other students in the group answered "three" vectors. The ideas proposed by the students of group A led them to propose their mathematical model to generate the numerical passwords presented in Table 3.

Table 3 presents some of the written work that the groups A and B carried out to propose a solution for the task 1, which they carried out following the steps of the modelling cycle (Blum & Leiss, 2007), but adapted to the task 1 (Cárcamo, Gómez & Fortuny, 2016). Table 3 shows that the mathematical model for generating numerical passwords for group A corresponded to a linear combination of vectors of R^3 while that of group B was a linear combination of vectors of R^4.

TABLE 3. *Some of the written work that the groups A and B carried out to propose a solution for the task 1*

<table>
<tr><td>Group A</td><td>Group B</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mathematical model</td></tr>
<tr><td>$a(1,0,1)+b(1,1,0)+c(0,1,1)$</td><td>$V=a(5,0,0,0)+b(0,-10,0,0)+c(0,0,-18,0)+d(0,0,0,3)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Codification</td></tr>
<tr><td>Translation
"We start from the left, the numbers that correspond to an even position are replaced for a code and the odd numbers for ASCii"

Empezamos por la izquierda los números que corresponden a una posición par se intercambian por un codigo y las impares por ASCii</td><td>Translation
"We changed the second position by code 1 and both the first and last position we change it by code 2"

Cambiamos la segunda posición por el código 1 y la primera y última por el código 2.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Example of how their password generator operates</td></tr>
<tr><td>Ejemplo:
$a=1 \quad b=2 \quad c=3$
$1(1,0,1)+2(1,1,0)+3(0,1,1)=(3,5,4)$
354
ETx Ƶ EOT</td><td>$a=1;\ b=23;\ c=12;\ d=2$
$1(5,0,0,0)+23(0,-10,0,0)+12(0,0,-18,0)+2(0,0,0,3)=$
$=(5,-230,-216,6) \rightarrow 52302166$ → codificación numérica
52302166 → //430216\\</td></tr>
</table>

To develop passwords encoded from numerical passwords, group A designed a mixed coding set, unlike group B, which created their own coding set. Group A created a two-line code: the first line of "code" contains letters and symbols designated by them, whereas the second row "ASCii" consists of characters taken from the ASCII code. The coding of group A operated as follows: those numerical password numbers that were in an even position were replaced by "code" and those in an odd position were replaced by "ASCii". On the other hand, group B designed their own code composed of numbers, letters and symbols that is divided into two rows: “code 1” and “code 2”. To transform a numeric password to a coded one, group B changed the number of the second position of the numeric password using a character from "code 1" and in addition, it replaced both the first and last number of it using "code 2".

The groups showed how they operated their password generator by giving an example (Table 3). Group A gave specific values to the letters of its mathematical model and obtained as a numerical password the vector (3,5,4), corresponding to the numeric password 354. Consequently, they used their own code and had the encrypted password ETXZEOT. Group B followed a process similar to Group A and generated the numeric password 52302166, which was transformed into the encrypted password //430216\\.

The solution given by the two groups for task 1 allowed for these students' level of situational activity to be showed, and also to observe that they made use of their previous conceptions of vectors, and used the steps of the mathematical modelling cycle to propose a mathematical model that generates numeric passwords. They will use this last step to have an initial introduction to the concepts of spanning set and span, since from the mathematical model based on vectors they will obtain two sets that are related to the context of the passwords, but also, with these concepts mathematicians (spanning set and span).

4.2 Referential activity

After students established their mathematical models to create a numerical password generator based on vectors, the teacher introduced the definitions of generating set and generated space in relation to the work and ideas established by the students. The introduction of these definitions served to support students in the transition from situational activity (work done within the context of passwords) to referential activity (work done with sets within the context of passwords that are examples of spanning set and span).

With respect to the four levels of activity, Task 2 led the students towards the referential activity that, according to Gravemeijer (1999), implies the use of descriptions, concepts and procedures that relate to the problem of the situational activity; in this case, of task 1.

Task 2 asked the students to make an analogy table between their password generator that they created in task 1 and the concepts of spanning set and span. In this task, the students showed that they were at the reference level, due to the fact that they used set notations and definitions to find two sets linked to their password generator: one representing a spanning set and another describing a span. To find these two sets, the students used the mathematical model they had designed in task 1.

In the following dialogue between students S1 and S3 of group A, we observe how their ideas for relating the span with a set from their password generator came about:

> S1: Okay, span.
> S3: It's the formula.
> S1: Describes all the vectors that can be made.
> S3: Describes the operations to find the numerical vector that generates a password.
> S1: All the passwords that could exist.

To respond to the relationship between the password generator and span, student S3 made a very general comment, noting that "*it's the formula*", in response to which student S1, said that the span "*describes all the vectors that can be made*". This comment from student S1 is general because it does not specify what the purpose of those vectors is and does not mention the link with the passwords. Perhaps, for this reason, student S3 specified that the span "*describes the operations to find the numerical vector that generates a password*". Student S3 mentioned that the span describes operations. He linked this concept to the context of passwords when he specified that these "*operations*" served to find the numeric vector that generates a password. From the written response of group A (See Table 4), it follows that when student S3 talked about operations, he was referring to those that have a linear combination (addition and multiplication). The answer was the set $\{(a,b,c) \in R^3 : a(1,0,1)+b(1,1,0)+c(0,1,1)\}$. However, student

S1 disagreed with the last statement made by student S3, and he pointed out that the span has "all the passwords that could exist". This statement made by the student S1 allows it to be inferred that he is thinking of the span as the set that contains all the vectors that allow for numerical passwords to be generated.

In Table 4 we present the analogy tables made by each group, in which it is shown that they correctly associated the sets in mathematical notation that arise from their mathematical model to generate passwords using the concepts of spanning set and span. However, we observed that group B designated the letter V for both sets. From this, it could be inferred that the students from this group considered that the two sets are equal, but they give a description of these in the context of their password generator that shows that they differentiate between them, and that the fact they assign the letter V to both set is due only to a notation error.

TABLE 4. *Analogy tables of task 2 of groups A and B*

Group A

Mathematical name for this concept	Name given in your password generator	How it is written in mathematical language
Spanning set	*Vectors that generate numeric passwords.*	$\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$
Span	*Describes the operations to find the numerical vector that generates a password.*	$\{(a,b,c)\in R^3 : \mathrm{a}(1,0,1)+b(1,1,0)+\mathrm{c}(0,1,1)\}$

Group B

Mathematical name for this concept	Name given in your password generator	How it is written in mathematical language
Spanning set	*Spanning set V allows to generate from a pattern different numerical passwords*	$V=\{(5,0,0,0),(0,-10,0,0),(0,0,-18,0),(0,0,0,3)\}$
Span	*Span V provides the characteristics of said pattern while creating our passwords.*	$V=\{(5a,-10b,-18c,3d)\in R^4\}$

On the other hand, in the second column of the analogy table that asks for the name or what corresponds in their password generator. Group B wrote that the spanning set "allows to generate from a pattern different numerical passwords" while the span "provides the characteristics of said pattern while creating our passwords". We deduced that group B used the term "pattern" to refer to the vectors of the spanning set, since it was these vectors that allowed the generation of numerical passwords.

It was important for the students to make the analogy table and to link the real context with the mathematical one. From this form, they continued to expand their grasp of spanning set and span, given that they created a preliminary example of both concepts in analytical notation, and established a distinction between these concepts when they were required to relate them to sets derived from a real situation.

In the referential activity, the two sets linked to the context of the passwords, which were also used as examples of spanning set and span, functioned for the students as a model-of their previous mathematical activity with the passwords and the vectors.

In the next section, students are presented with a more challenging question that allows them to progress toward a general level of activity. In other words, the students begin to change the model they use: from thinking of two sets that are examples of spanning set and span to thinking in terms of properties of these types of sets, but without alluding to the scenario with the passwords.

4.3 General activity

One of the goals of task 3 was to shift students away from situational and referential activity with respect to the context of the passwords, and towards a general level of activity with respect to the concepts. General activity involves exploring, reflecting and generalizing the material that appeared at the previous level, but without referencing the initial context (Zolkower & Bressan, 2012). The students showed they were at this level of activity when they explored, reflected and made conjectures about sets of vectors in R^n that corresponded to spanning sets or spans and that did not refer to the scenario in task 1.

For example, for question (a) of task 3, students conjectured: what should be the rank of the matrix that has a set of R^2 as vector rows such that this set generates R^2? The groups, after calculating the rank of four matrices (M_1, M_2, M_3 and M_4), correctly conjectured that the rank of the matrix having a set of R^2 as vector rows must be two in order for it to generate R^2. This is shown in Table 5.

TABLE 5. *Written answer of groups A and B to question (a) of task 3*

Group A

Sets	Matrix whose rows are the vectors of set	Rank of matrix	Conjecture:
$A=\{(0,-3)\}$	$M_1=\begin{pmatrix}0 & -3\end{pmatrix}$	*1*	*If the rank is 2, the set can generate R^2.*
$B=\{(5,0),(7,0)\}$	$M_2=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 7 & 0\end{pmatrix}$	*1*	
$C=\{(1,0),(1,-1)\}$	$M_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	2	
$D=\{(-1,-4),(2,8),(0,-1)\}$	$M_4=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 2 & 8\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	2	

Group B

Sets	Matrix whose rows are the vectors of set	Rank of matrix	Conjecture:
$A=\{(0,-3)\}$	$M_1=\begin{pmatrix}0 & -3\end{pmatrix}$	$R_{M_1}=1$	*The rank of the matrix must be equal to 2.*
$B=\{(5,0),(7,0)\}$	$M_2=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 7 & 0\end{pmatrix}$	$R_{M_2}=1$	
$C=\{(1,0),(1,-1)\}$	$M_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	$R_{M_3}=2$	
$D=\{(-1,-4),(2,8),(0,-1)\}$	$M_4=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 2 & 8\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$R_{M_4}=2$	

To answer question (a) of task 3, in group A, student S1 indicated that the rank of the matrix M1 "is 1" and then, referring to the other matrices, noted that "this is also 1 (showing M2). Yes, this is two (indicating M3). One, one, two, two". When student S1 mentions one, one, two, two, he alludes to the ranks of the matrices M1, M2, M3 and M4 respectively, for that is what appears in the written answer (Table 5). From this, the students of group A surmised that if the rank is 2, the set can generate R2. The fact that group A has put in its conjecture the word "may" indicates to us that they left open the possibility for there to be a set for which the associated matrix has rank two, but does not generate R2.

The students from group A did not express any idea about the characteristics of the vectors that are contained in each matrix. However, student S3 from group B did comment on it, as he pointed out to his group that the vectors of set B={(5,0),(7,0)} “form a linear combination between them" and then also indicated that "they are not independent of each other". Therefore, the rank of the matrix associated with this set is one. The affirmations of the student S3 from group B allowed for us to infer that he was able to identify when the vectors are linearly dependent, as was the case of the set B={(5,0),(7,0)}.

From the written response of both groups (Table 5), we infer that they noticed that a spanning set of R^2 can have more than 2 vectors (such as set D), but that the minimum must be two vectors that are linearly independent (such as set C). That is, it is not enough that the set has 2 vectors (such as set B). From this it follows that the students observed that the number of vectors is not sufficient to indicate if a set generates R^2, because apart from the fact that they are 2 vectors, they must be linearly independent.

The formation of this conjecture was fundamental, because it made the students relate spanning set and span with the concepts of the rank of a matrix and linear independence. In addition, they identified a property that characterizes the sets that generate the span of R^2, which indicates that the number of vectors is not sufficient to indicate if a set generates R^2.

At a general level, the two sets related to the context of the referential-level passwords functioned for students as models-for, to reason about properties of this type of set, but without referring to the scenario of task 1.

4.4 Formal activity

Formal activity, as described by Gravemeijer (1999), involves reasoning with conventional symbolism, which is no longer dependent on the support of models-for mathematical activity. For their part, Zolkower and Bressan (2012) specify that formal activity involves students working with conventional procedures and notations disconnected from the situations that gave them their initial meaning.

We consider that the development made by students in task 4 of the HLT gave indications that they may have reached the level of formal activity, because they worked implicitly with the concepts of spanning set and span in a situation different from those presented for the previous levels.

In task 4, the students were asked questions different from those they had previously been asked in the tasks of the HLT. For example, they answered the question: indicate if C={(1,0,0,1), (0,1,0,0)} is a spanning set for the span W={(x,y,z,w)/x=w}. The students of the groups gave evidence that they were at the formal activity level when they answered this question (see answer in Table 6), because we have inferred that they used the definitions of spanning set and span to solve it, although this was not indicated in their process for finding the solution to this question.

Both groups pointed out that the set C is not a spanning set for W (Table 6). In the case of group A, to reach this conclusion, they followed a process to determine a spanning set of W, as shown in the dialogue between students S1 and S2 of this group:

> S2: (looking to the set W) condition x is equal to w.
> S1: we are going to replace it.
> S2: you do the operation.
> S1: Look at this (S1 shows what he wrote to S2) ... there w 1 0 0 1. I was left 0 1 ... 0 0. No, it is not because of the z component.
> S2: the z nothing, it does not influence.

S1: this (indicating the set {(1,0,0,1), (0,1,0,0)}) is not a spanning set of this (showing W). Look (showing them w(1,0,0,1)+y(0,1,0,0)+z(0,0,1,0))

TABLE 6. *Written answers of groups A and B to the question: indicate if C={(1,0,0,1), (0,1,0,0)} is a spanning set for the span W={(x,y,z,w)/x=w}*

Group A **Translation** *"It is not a spanning set of W"* $W=\{(x,y,z,w)/x=w\}$ No es un conjunto generador de W $W=\{(w,y,z,w)\ /(w,y,z,w)=w(1,0,0,1)+y(0,1,0,0)+z(0,0,1,0)$
Group B **Translation** *"It is not because it would fail* (0,0,1,0)" No lo es porque faltaria (0,0,1,0)

Student S2 expressed (looking to the set W) that "*condition x is equal to w*" and immediately, student S1 told his colleagues "*we are going to replace it*". Student S1 referred to substitution, the condition that was indicated by student S2, in the generic vector of the span W, since that was what they did and wrote the linear combination *w(1,0,0,1)+y(0,1,0,0)+z(0,0,1,0)*. On seeing it, student S1 stated that the set {*(1,0,0,1),(0,1,0,0)}* is not a spanning set for W because of "*component z*" and, although student S2 pointed out that z does not influence, student S1 added that "*this (indicating the set*{*(1,0,0,1), (0,1,0,0)}) is not a spanning set of this (showing W). Look (showing them w(1,0,0,1)+y(0,1,0,0)+z(0,0,1,0))*". Student S1 proposed to his colleagues that they compare the expression of the three vectors with the set that gave them two. From this, they concluded that it is not a spanning set of W.

On the other hand, group B pointed out in its written answer (Table 6) that C is not a spanning set of W because it lacks the vector (0, 0, 1, 0). From this, it is inferred that these students carried out a process similar to that of group A. This is because the vector they mention is associated with the z component in the linear combination shown by students in group A.

In the responses of both groups, we observe that they verify if the set C is generator of W and give a correct answer. This, approached the one posed in the HLT (see Table 2).

We consider that the students would have given evidence that they were at the formal activity level in this question in task 4 (indicate whether C = {(1,0,0,1), (0,1,0,0)} is a (x, y, z, w) / x = w}) if they had explicitly stated the use of spanning set or span during their attempt to solve the problem. For example, if they had indicated: "we are going to determine a spanning set for W to see if it is C" or "for C to be a spanning set, any vector of W must be a linear combination of the vectors of C". However, this did not occur. It should be noted that emergent models do not specify what happens when students do not give evidence of being at the formal level, but rather that they are in the transition from the general level to the formal level. This may be an indicator of the existence of a new level between the general and formal levels, or the existence of sub-levels within each level.

5. Discussion and conclusions

The main contribution of this research is to show how the emergent models can be a good alternative for the design of a HLT that favors the construction of the students of the concepts of spanning set and span through an HLT for which the initial context is the creation of secure passwords. In this way, it is also intended to contribute to the field of application of emergent models at the university level, since few studies have been conducted in this area.

In order to respond to the objective of the study, we reconstructed the reasoning groups of students used through out each of the levels of activity. We observe that students transitioned from their model-of informal mathematical activity (using passwords and vectors) to a model-for formal mathematical reasoning (on the concepts of spanning set and span). Therefore, we can point out that the emergent models supported the students’ development of the concepts of spanning set and span.

The level of situational activity implied that students would work toward mathematical goals in an experientially real environment, particularly in the context of creating secure passwords. In task 1, students determined how to create a password generator based on vectors. Each group developed a mathematical model that, in both cases, was a linear combination (See Table 3) and that complied with the requested characteristics (create a password generator based on vectors). Consequently, the level of referential activity required students to work with set notations and with the definitions of spanning set and span in the password scenario. This was done to determine two sets that referred to the context of the passwords, but that also were examples of spanning set and span (See Table 3). For the students, these two sets were models-of of what worked in the context of passwords and vectors.

At the level of general activity, the two sets that were models-of at the referential activity level became models-for for reasoning about properties of this type of set of R^n, but without hinting at the initial situation. For example, Table 5 shows that students gave correct conjecture as to what the rank of the matrix should be such that the rows generate R^2. Finally, students gave indications of being at the formal activity level, because, for example, in solving a question from task 4 (Table 6), they worked implicitly with the concepts of spanning set and span in a situation different from those presented at previous levels.

The choice of the emergent model that will support students in the transition from the model-of to the model-for is considered to be essential. This information will allow the teacher to better guide the students in their process of constructing mathematical knowledge. In this study, the emergent models were the two sets that initially emerged as models-of of what worked in task 1, that is, with passwords and vectors. Gradually, however, these two sets changed in nature as students began to change their outlook on these two sets; from seeing the two sets as examples of spanning set and span to reasoning about properties of these types of sets. Finally, these two sets became models-for for reasoning about the properties of spanning set and span. These emergent models allowed students to transition from real experience (passwords and vectors) to a new mathematical reality (spanning set and span).

We agree with the results obtained by Rasmussen and Blumenfeld (2007), in their research conducted on the differential equations course, in relation to which analytic expressions can support the entire transition from the model-of to the model-for. This occurred in our study with the construction of the concepts of spanning set and span. In our case, we observed that students began their work with vectors and linear combinations (situational activity), then continued with sets of vectors (referential activity and general activity) and finally with conventional mathematical procedures and notations (formal activity).

With respect to the tasks applied in this study, Table 2 shows a summary of the HLT and how students were expected to manifest their transition by activity levels. The results provided evidence that students progressed through the different levels of activity by solving the task sequence of the HLT. This indicates to us that there was a close relationship between the HLT and the current trajectory of student learning. However, in order for the teacher to enhance the students' reasoning in their process of solving tasks 3 and 4, we suggested that the teacher ask the students to justify the steps of their solution to a given question by, for example, the use of the definitions of spanning set or span or its properties, or indicating how these concepts were used in their proposed resolution.

We recognize that the tasks and the order in which they are presented to students are critical in facilitating their transition from their informal knowledge to more formal mathematical reasoning. We consider that it is important for each task to offer the student the possibility of fully passing through the level of activity that is intended for this activity, otherwise it will need to be presented differently. In this study, we observed that the sequence of tasks of the HLT tended to lead students to transit through different levels of activity. This was not a coincidence, but rather a result of the two previous refinements of the HLT, that is to say, as indicated by Wawro et al. (2013), it "was made possible by the cyclical process of the design research" (p. 911).

On the other hand, we agree with Dawkins (2015) that the teacher should support the students in the basic processes that are involved in the levels of activity. However, we also consider it important that, prior to this, the teacher should do the following: choose an initial activity that is experientially real, conjecture about what the emergent model will be (the model guiding the transition between model-of and model-for) and develop key questions that promote the advancement of students between levels of activity.

The results showed that the HLT based on the emergent models contributed to the students' progression from their informal mathematical activity to a more formal mathematical form of reasoning regarding the concepts of spanning set and span. Therefore, this didactic proposal could be useful as a teaching tool to be applied in another classroom (previously adapted to its context), but also as a tool for teachers to use as an example in their consideration aimed at devising instructional sequences based on this heuristic design.

We consider that a limitation of emergent models is that they do not detail possible sub-levels within each level which would be useful to help students progress within each level and bring them to the next level. Another limitation is that it does not detail what happens in the transitions between one level and another.

For future research, the challenge will be to design HLTs based on the emergent models for other linear algebra concepts with the objective of determining if this approach also contributes to the construction of these.

Acknowledgement

We would like to express a gratitude to the participants of the seminar led by Dr. Asuman Oktaç for their suggested improvement about this article.

REFERENCES

BLUM W., & LEISS D. (2007) How do students and teachers deal with modelling problems?. *Mathematical modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (Haines C., Galbraith P., Blum W., & Khan S. eds.). Chichester, UK: Horwood Publishing, pp. 222-231.

BROWN A. L. (1992) Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *J. Learn. Sci*., 2, 141-178.

CÁRCAMO A., FORTUNY J. M., & GÓMEZ V. (2017) Mathematical modelling and the learning trajectory: tools to support the teaching of linear algebra. *Int. J. Math. Educ. Sci. Tech.*, 48, 338-352.

CÁRCAMO A., GÓMEZ J., & FORTUNY J. (2016) Mathematical modelling in engineering: A proposal to introduce linear algebra concepts. *J. Tech. Sci. Educ.*, 6, 62-70.

COLLINS A., JOSEPH D., & BIELACZYZ K. (2004) Design research: Theoretical and methodological issues. *J. Learn. Sci.*, 13, 15-42.

DAWKINS, P. C. (2012) Metaphor as a possible pathway to more formal understanding of the definition of sequence convergence. *J. Math. Behav*., 31, 331-343.

DAWKINS, P. C. (2015) Explication as a lens for the formalization of mathematical theory through guided reinvention. *J. Math. Behav.*, 37, 63-82.

DIERDORP A., BAKKER A., EIJKELHOF H., & VAN MAANEN J. (2011) Authentic practices as contexts for learning to draw inferences beyond correlated data. *Math. Think. Learn.*, 13, 132-151.

GRAVEMEIJER, K (1997) Mediating between concrete and abstract. *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (Nunes T., & Bryant P. eds.). Hove, East Sussex, UK: Psychology Press, pp. 315–343.

GRAVEMEIJER, K. (1999) How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Math. Think. Learn.*, 1, 155–177.

GRAVEMEIJER, K. (2002) Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis. *Proceedings of the 6th International Conference on Teaching Statistics* (Phillips B. ed). Cape Town, South African: ICOTS6, pp. 1-6.

GRAVEMEIJER, K. (2007) Emergent modeling and iterative processes of design and improvement in mathematics education. Paper presented at the *Tsukuba International Conference III.* Tokyo Kanazawa & Kyoto, Japón: APEC.

GRAVEMEIJER, K., & VAN EERDE, D. (2009) Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *Elem. School J.*, 109, 510-524.

JULIE, C., & MUDALY, V. (2007) Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study* (Blum W., Galbraith P. L., Henn H.-W., & Niss M. eds.). New York: Springer, pp. 503–510.

RASMUSSEN, C., & BLUMENFELD, H. (2007) Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions. *J. Math. Behav.*, 26, 195-210.

SIMON, M. A. (1995) Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *J. Res. Math. Educ.,* 26, 114-145.

STEWART S., & THOMAS M. O. (2010) Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *Int. J. Math. Educ. Sci. Tech*., 41, 173-188.

WAWRO, M., RASMUSSEN, C., ZANDIEH, M., & LARSON, C. (2013) Design research within undergraduate mathematics education: An example from introductory linear algebra. *Educational design research–Part B: Illustrative cases* (Plomp T., & Nieveen N. eds). Enschede, Netherlands: SLO, pp. 905-925.

ZANDIEH, M., & RASMUSSEN, C. (2010) Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *J. Math. Behav.*, 29, 57-75.

ZOLKOWER, B., & BRESSAN A. (2012) Educación matemática realista. *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (Pochulu M., & Rodríguez M. eds). Argentina: UNGS – EDUVIM, pp.175-200.

SECCIÓN III.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

5. Resumen y discusión de resultados

6. Conclusiones

5. Resumen y discusión de resultados

"…todo es según el color del cristal con que se mira".

Ramón de Campoamor

En este capítulo se presentan y discuten los resultados centrales expuestos en los cuatro artículos, los cuales surgieron del proceso que efectuamos con el fin de producir una innovación docente con respecto a los conceptos de conjunto generador y espacio generado fundamentada en los modelos emergentes y la modelización matemática. Dicho proceso involucró:

- El diseño e implementación de una primera THA que se presenta en el artículo 1. Esto se presenta y discute en el apartado 5.1.
- La evaluación y el refinamiento de la primera THA que se realizó en los tres ciclos del experimento de enseñanza y que se describen en los artículos 1, 2, 3 y 4. Lo anterior, se sintetiza y comenta en el apartado 5.2.
- La identificación del rol de los modelos emergentes y la modelización matemática en la construcción de conjunto generador y espacio generado. Esto se observó en los resultados de cada ciclo del experimento de enseñanza (artículos 1, 2 y 4) y se discute en el apartado 5.3.

5.1. Diseño de una primera THA para conjunto generador y espacio generado

El artículo 1 (Cárcamo, Gómez y Fortuny, 2016) informó sobre el diseño de una THA referente a conjunto generador y espacio generado que se fundamentó en los modelos emergentes y la modelización matemática. Dicha publicación se enfocó en entregar una primera aproximación del uso de estas dos perspectivas y el aprendizaje de estos conceptos de Álgebra Lineal a nivel universitario.

Los resultados de la aplicación de la primera THA dieron una visión preliminar con relación a: el orden y el tipo de tareas que incluyó esta, el aprendizaje que los estudiantes lograron por medio de dicha THA y la contribución de los modelos emergentes y la modelización matemática en la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

En el artículo 1 no se hizo una alusión explícita con respecto al orden o tipo de tareas de la THA. No obstante, desde sus conclusiones se infiere que fue pertinente la disposición en que se presentaron éstas porque se manifiesta que los estudiantes transitaron de un modelo-de a un modelo-para, tal como plantea Gravemeijer (1999). En concreto, de un modelo-de razonamiento informal a un modelo-para un razonamiento matemático más formal. Conjeturamos que esta transición se alcanzó debido a la disposición de las tareas de la THA.

Las tareas que incluyó la primera THA facilitaron que los estudiantes lograran tanto diferenciar como relacionar conjunto generador y espacio generado. Igualmente, les permitió asociarlos con la noción de combinación lineal (Cárcamo, Gómez y Fortuny, 2016). Sin embargo, a fin de que los estudiantes consigan una mayor profundización de dichos conceptos de Álgebra Lineal, en las conclusiones del artículo 1, se explicita la necesidad de modificar la tarea 3 de la primera THA de forma que contenga preguntas de propiedades y aplicaciones de estos.

De acuerdo con las conclusiones del artículo 1, los modelos emergentes contribuyeron a la construcción de conjunto generador y espacio generado. Por una parte, orientaron el diseño de la secuencia instruccional y por otra, favorecieron el desarrollo cognitivo de los estudiantes porque les dio la posibilidad de evolucionar del contexto de generar contraseñas a problemas matemáticos convencionales. Esto último, dio indicios de que las características de la primera THA les permitieron realizar la transición que plantea Gravemeijer (1999) de un modelo-de a un modelo-para.

Por otro lado, en las conclusiones del artículo 1, se consideró que la modelización matemática colaboró en la construcción de conjunto generador y espacio generado por tres razones. En primer lugar porque facilitó a los estudiantes, tal como menciona Gravemeijer (2007a), a modelar su propia actividad matemática informal para que posteriormente, continuaran con otras tareas que los guiarían hacia un conocimiento más formal de estos conceptos de Álgebra Lineal. En segundo lugar porque los situó con un contexto real que se vincula con los conceptos que están aprendiendo. Finalmente, en tercer lugar porque les dio la posibilidad de indagar nuevas situaciones y contenidos matemáticos en interacción con sus pares, disminuyendo la dependencia con el profesor.

En resumen, el artículo 1 dio las primeras pistas de que una THA de conjunto generador y espacio generado, basada en los modelos emergentes y la modelización matemática, apoya la construcción de estos conceptos de Álgebra Lineal.

5.2. Refinamiento iterativo de la primera THA sobre conjunto generador y espacio generado

Los artículos 1, 2 y 4 presentaron los resultados de los tres ciclos del experimento de enseñanza que englobaron nuestro estudio.

El refinamiento iterativo de la primera THA, a través de los tres ciclos del experimento de enseñanza, nos muestra las tareas que dan evidencias de contribuir a la construcción de conjunto generador y espacio generado. Además, nos permite identificar las dificultades que tuvieron los estudiantes durante el desarrollo de las tareas incluidas en la THA. Todo lo anterior, será el cimiento para dar respuesta a dos objetivos de nuestro estudio: desarrollar una TIL y bosquejar una secuencia instruccional para los conceptos ya mencionados de Álgebra Lineal.

5.2.1. Tareas que favorecieron la construcción

En los artículos 1, 2 y 4 podemos observar las principales tareas de cada THA que ayudaron a los estudiantes en su construcción de conjunto generador y espacio generado. En la Tabla 5 se muestran las principales tareas comunes en los 3 ciclos del experimento de enseñanza y las que difieren.

Tabla 5. Las principales tareas comunes y diferentes del experimento de enseñanza.

Tareas comunes		
Tarea 1. Crear un generador de contraseñas seguras basado en vectores		
Tarea 2. Hacer una tabla de analogía entre su generador de contraseñas y los conceptos de conjunto generador y espacio generado.		
Tareas diferentes		
Ciclo 1	**Ciclo 2**	**Ciclo 3**
Tarea 3. Verificar si un vector pertenece a un cierto espacio generado.	*Tarea 3.* Determinar si los conjuntos A, B y C generan a R^2, es decir, si son conjuntos generadores de este espacio.	*Tarea 3.* Conjeturar cuál debe ser el rango de la matriz que tiene por filas vectores de un conjunto de R^2 para que ese conjunto genere a R^2.
	Tarea 4. Dado un espacio generado de R^4, determinar un conjunto generador de éste y si dos vectores pertenecen a él.	*Tarea 4.* Indicar si el conjunto $C=\{(1,0,0,1),(0,1,0,0)\}$ es un conjunto generador para el espacio $W=\{(x,y,z,w)/x=w\}$.

En la Tabla 5 podemos ver que las tareas 1 y 2 fueron presentadas a los estudiantes de los 3 ciclos del experimento de enseñanza. Los resultados de estos ciclos coinciden en que la tarea 1 permitió a los estudiantes activar sus concepciones previas de vectores, las cuales les sirvieron en la resolución de las siguientes tareas. En lo que se refiere a la tarea 2, las conclusiones del ciclo 1 (artículo 1) como del ciclo 2 (artículo 2) señalan que favoreció a que los estudiantes visualizaran los conceptos de conjunto generador y espacio generado en un contexto real como matemático. Esto les ofreció la posibilidad de distinguirlos al vincularlos con una situación real. En tanto, los resultados del ciclo 3 (artículo 4) acerca de la tarea 2 coinciden con los ciclos anteriores, pero además destacan que fue importante para que los estudiantes continuaran profundizando sobre conjunto generador y espacio generado, pues ellos a través de la tabla de analogía realizaron un primer ejemplo en notación analítica de ambos conceptos.

Asimismo, en la Tabla 5 observamos que hubo variaciones en las tareas que se ubicaban después de las dos primeras en cada THA. Esto debido a que los resultados obtenidos en cada ciclo del experimento de enseñanza condujeron a hacer modificaciones a la THA que sería aplicada en un ciclo posterior. En el caso del ciclo 1, en las conclusiones del artículo 1, se indica la necesidad de replantear la tarea 3 con la finalidad de que existan preguntas tanto de propiedades como de aplicaciones de conjunto generador y espacio generado. Esta sugerencia se incorporó en la THA del segundo ciclo, por lo que se replanteó la tarea 3 que se enfocó en propiedades de estos conceptos de Álgebra Lineal y se añadió una tarea 4 individual sobre aplicaciones de dichos conceptos.

El artículo 2 muestra que los resultados del ciclo 2 dieron evidencias de que la THA aportó a la construcción de conjunto generador y espacio generado, aunque en sus conclusiones se propone agregar una tarea en el ciclo 3 que contemple trabajar en grupo y que esté relacionada con el nivel formal de los modelos emergentes, ya que se considera que esto ayudaría a cada estudiante a lograr una mejor comprensión de los conceptos. Esta sugerencia se incorporó en la THA del tercer ciclo. Los resultados del ciclo 3 (artículo 4) dieron evidencias de que los estudiantes transitaron por los diferentes niveles de actividad de los modelos emergentes a través de la resolución de la secuencia de tareas de la THA. Esto nos dio indicios de que dichas tareas contribuyeron a la construcción de conjunto generador y espacio generado. Por esta razón, pensamos que ellas deben ser uno de los elementos primordiales en la TIL de nuestra investigación.

Tabla 6. Conjeturas de la ruta de aprendizaje de las tareas finales de cada THA utilizada en el experimento de enseñanza.

Tarea y su conjetura de la ruta de aprendizaje del ciclo 1	**Tarea y su conjetura de la ruta de aprendizaje del ciclo 2**	**Tarea y su conjetura de la ruta de aprendizaje del ciclo 3**
Tarea 3a: Pide determinar si los conjuntos B y C (B=<(1,0,0),(0,1,0),(0,0,2> y C={(1,0,0),(0,2,0),(0,0,1)}) tiene la misma cantidad de elementos. Los estudiantes: (a) Identifican que los conjuntos B y C tienen distintos paréntesis. (b) Reconocen que el conjunto B tiene notación de un espacio generado mientras que el conjunto C corresponde a la notación de un conjunto generador. (c) Determinan que los conjuntos B y C no tienen la misma cantidad de elementos, pues B posee infinitos, a diferencia de C que contiene solo tres vectores.	Tarea 3: Pide determinar si los conjuntos A, B y C generan a R^2, es decir, si son conjuntos generadores de este espacio. Los estudiantes: (a) Determinan y vinculan las características de un conjunto generador para el espacio R^2 con los conjuntos: A, B y C. (b) Deducen que el conjunto C genera a R^2 dando una justificación coherente. (C) Deducen que los conjuntos A y B no generan a R^2 dando una justificación coherente.	Tarea 3: conjeturar cuál debe ser el rango de la matriz que tiene por filas vectores de un conjunto de R^2 para que ese conjunto genere a R^2. Los estudiantes: (a) Exploran casos particulares e identifican algún patrón. (b) Relacionan conjunto generador y espacio generado con otros conceptos. (c) Conjeturan el número de vectores de un conjunto para que genere a R^2. (e) Determinan que el número de vectores no es determinante para señalar si un conjunto es generador del espacio de R^2.
Tarea 3b: Pide establecer si es verdadero o falso que el vector (2,-3) pertenece al espacio generado por {(1,0), (0,-1)}. Tarea 3: Pide determinar si los conjuntos A, B y C generan a R^2, es decir, si son conjuntos generadores de este espacio. Los estudiantes: (a) Determinan y vinculan las características de un conjunto generador para el espacio R^2 con los conjuntos: A, B y C. (b) Deducen que el conjunto C genera a R^2 dando una justificación coherente. (C) Deducen que los conjuntos A y B no generan a R^2 dando una justificación coherente.	Tarea 4a: Dado un espacio generado de R^4, determinar un conjunto generador de él. El estudiante: (a) Relaciona el espacio generado de R^4 con el concepto de conjunto generador. (b) Observa las características del espacio generado de R^4 para obtener un conjunto generador de éste. (c) Propone un conjunto generador apropiado para el subespacio de R^4 dado.	Tarea 4: indicar si el conjunto C={(1,0,0,1),(0,1,0,0)} es un conjunto generador para el espacio W={(x,y,z,w)/x=w}. Los estudiantes para plantear una solución: (a) Exploran posibles rutas para su resolución. (b) Hallan un conjunto generador o un espacio generado (según la resolución que decidieron). (c) Verifican si el conjunto C es generador de W.

Por otra parte, a través de las conjeturas de la ruta de aprendizaje de las últimas tareas de cada THA usada en el experimento de enseñanza (ver Tabla 6), nosotros inferimos que cada vez que se aplicó una THA, en un nuevo ciclo del experimento de enseñanza, a los estudiantes se les otorgaron mayores oportunidades de profundizar en la construcción de conjunto generador y espacio generado.

Las conjeturas de las últimas tareas de cada THA que se muestran en la Tabla 6 fueron modificadas de acuerdo con los resultados obtenidos en cada ciclo. A partir de los resultados del primer ciclo surgió la necesidad de incorporar preguntas referentes a sus propiedades. Luego, de los resultados del segundo ciclo agregamos una tarea sobre sus aplicaciones para trabajar en grupo. Posteriormente, los resultados del tercer ciclo mostraron que los estudiantes tuvieron una aproximación alta con la THA asociada a dicho ciclo.

De acuerdo con los resultados obtenidos de los artículos 1, 2 y 4, es importante mencionar que en cada ciclo hubo evidencias de que las trayectorias actuales de aprendizaje de, al menos algunos estudiantes, se aproximaban a las conjeturas de la THA. En los resultados del primer ciclo (artículo 1) observamos que la mayoría de los estudiantes diferenciaron entre conjunto generador y espacio generado así como también verificaron si un vector pertenecía a un cierto espacio generado. En el segundo ciclo (Cárcamo, Fortuny y Gómez, 2017) constatamos que muchos estudiantes hicieron conjeturas de propiedades y algunos obtuvieron el conjunto generador de un cierto espacio. En el tercer ciclo (Cárcamo, Fortuny y Fuentealba, en prensa) notamos que los estudiantes hicieron lo mismo que aquellos de los ciclos previos e incluso pudieron determinar si un conjunto de R^4 generaba a un subconjunto de R^4.

5.2.2. Dificultades en la construcción

En los artículos 1, 2 y 4 podemos identificar las adversidades que los estudiantes manifestaron durante la construcción de conjunto generador y espacio generado a través de la THA aplicada en cada ciclo del experimento de enseñanza.

Las dificultades que evidenciamos durante la implementación de la THA en los tres ciclos del experimento de enseñanza y que se explicitan en los artículos 1, 2 y 4 son:

- La notación matemática de conjunto generador y espacio generado o con los nombres de estos conceptos (NC). Cuando los estudiantes no escribieron correctamente en notación matemática a uno de estos dos conceptos de Álgebra Lineal o le designaron otro nombre a al menos alguno de ellos.
- El lenguaje matemático (LM). Cuando lo estudiantes no aplicaron correctamente los símbolos matemáticos o no describieron algún concepto matemático rigurosamente.
- La aplicación de conjunto generador y espacio generado (AC). Cuando los estudiantes no aplicaron conjunto generador o espacio generado adecuadamente o simplemente, no los emplearon cuando correspondía.

En el ciclo 1 se presentan estos tres tipos de inconvenientes (NC, LM, AC) mientras que en el ciclo 2 solo los dos primeros (NC, LM). En tanto, en el ciclo 3 se detecta como obstáculo el uso del lenguaje matemático (LM).

En el ciclo 1 observamos la barrera de la aplicación de los conceptos (AC) en el momento que se les pidió a los estudiantes determinar un espacio generado de R^2 dado un cierto conjunto generador y graficar el mismo, pues como se indica en el artículo 1, solo algunos grupos lograron hacer lo que se les solicitó. Este obstáculo se vincula con la dificultad cognitiva planteada por Dorier y Sierpinska (2001), ya que los estudiantes tuvieron problemas vinculados con representar en registro geométrico y analítico a un espacio generado de R^2.

El inconveniente del uso del lenguaje matemático (LM) en el ciclo 1 se refiere a que algunos estudiantes, por ejemplo, escribieron "combinaciones lineales de A", pero deducimos que se referían a las combinaciones lineales de los vectores de A en donde A es un conjunto de R^n. Finalmente, detectamos barreras con la notación matemática de conjunto generador y espacio generado o con sus nombres (NC) cuando: no anotaron correctamente a un espacio generado, asociaron los nombres de estos dos conceptos de Álgebra Lineal con sus notaciones de forma intercambiada (a la de conjunto generador la vincularon con la notación de espacio generado o viceversa) o le designaron otro nombre a conjunto generador al momento de asociarlo con su notación matemática (vectores generadores, conjunto de vectores u otro). El obstáculo que se refiere a manejar estas nociones de forma intercambiada ya había sido indicado por Nardi (1997).

La dificultad esencial que detectamos en el ciclo 2 fue la notación de conjunto generado o espacio generado (NC) en la tarea 2 de la THA que consistía en hacer una tabla de analogía. En los resultados del artículo 2, se menciona que los estudiantes tuvieron como contratiempo escribir analíticamente tanto conjunto generador (escribieron una expresión matemática que incluyó un vector genérico o una combinación lineal o no manipularon los paréntesis de este concepto) como espacio generado (les faltó algún símbolo matemático, ya sea, un paréntesis, un signo o el superíndice de R^n o no utilizaron los paréntesis de esta definición matemática). Consideramos que esta situación surgió porque los estudiantes todavía no tenían una comprensión profunda de estos conceptos. Este obstáculo, según Carlson (2004), es conceptual con respecto a las definiciones.

La barrera que notamos en los ciclos 2 y 3 del experimento de enseñanza se refiere a que algunos estudiantes al obtener y escribir un conjunto generador de un cierto espacio generado, le designaron como nombre la misma letra mayúscula que tenía el espacio generado (LM). Cabe señalar, que el error fue solo de notación porque en su trabajo escrito en donde describieron estos conceptos se evidenciaba que los diferenciaban.

Conjeturamos que los estudiantes que presentaron el obstáculo de la notación de conjunto generador y espacio generado (NC) fue porque tuvieron conflicto con la comprensión de la simbología matemática de ambos conceptos. Desde nuestra perspectiva, pensamos que aquellos que no reconocieron conjunto generador o espacio generado en su notación matemática fue porque no comprendían las definiciones vinculadas a estos conjuntos. Esto último, se encuentra asociado a la dificultad conceptual de las definiciones de Álgebra Lineal mencionada por Carlson (2004). Por otra parte, suponemos que una manera de evitar esta limitación es agregando preguntas en las tareas de la THA tanto de las características como de las notaciones de estos conceptos de Álgebra Lineal.

Con la finalidad de superar la dificultad de aplicación de conceptos (AC) con una pregunta del ciclo 1, decidimos eliminar esta porque resultó compleja para los estudiantes según lo que se informa en el artículo 1. Con respecto a los otros obstáculos detectados (NC y LM), nosotros proponemos algunas modificaciones fundamentadas en los resultados de nuestra investigación y que creemos contribuirán al desarrollo de la TIL sobre conjunto generador y espacio generado. Estas modificaciones, se presentan en la Tabla 7.

Tabla 7. Las modificaciones propuestas para contribuir a superar los obstáculos de NC y LM.

Obstáculo	Modificación que se sugiere
La notación matemática de conjunto generador y espacio generado o con los nombres de estos conceptos (NC).	Agregar preguntas en la tarea 1 que en relación con diferenciar conjunto generador y espacio generado. Incorporar preguntas en la tarea 2 sobre las características y las notaciones de conjunto generador y espacio generado.
El lenguaje matemático (LM).	El profesor debe promover el uso adecuado del lenguaje matemático dándole énfasis cada vez que lo utilice en el aula. Igualmente, ayudando a los estudiantes a darse cuenta de que no han empleado correctamente el lenguaje matemático mientras monitorea la realización de la secuencia instruccional.

5.2.3. Propuesta preliminar de una secuencia instruccional

El artículo 3 (Cárcamo, 2017) presenta una propuesta preliminar de una secuencia instruccional elaborada a partir del análisis de los datos de los dos primeros ciclos del experimento de enseñanza. Dicha secuencia con más detalles fue aplicada en el tercer ciclo.

Las tareas de la secuencia instruccional preliminar, según se especifica en el artículo 3, se basaron en los modelos emergentes y la modelización matemática. Esta última se consideró una herramienta de enseñanza para iniciar la construcción de conjunto generador y espacio generado a través de una situación en contexto real que consistió en crear un generador de contraseñas con vectores (tarea 1 de la THA).

A la vez, tal como señalan Gravemeijer y Stephan (2002) los modelos emergentes sirvieron en el diseño y organización de las tareas de la secuencia instruccional con la finalidad de motivar a los estudiantes en su transición de un razonamiento de matemática informal hacia uno más formal.

La secuencia instruccional propuesta en el artículo 3 contempló cuatro tareas en grupo y una individual. Como se observa en la Tabla 8, el objetivo de la mayoría de ellas (a excepción de la tarea 1) se relaciona con conjunto generador y espacio generado. Con la finalidad de que el objetivo de la tarea 1 también se encuentre vinculado a estos conceptos necesitamos modificar esta tarea e incorporar nuevas preguntas a ella. Esto puede que conlleve a una modificación de la tarea 2.

Tabla 8. Los objetivos de las tareas de la secuencia instruccional preliminar.

Objetivo de cada tarea de la secuencia instruccional
Tarea 1. Los estudiantes determinan un modelo matemático para generar contraseñas basado en vectores siguiendo los pasos del ciclo de modelización matemática.
Tarea 2. Los estudiantes relacionan los conceptos en estudio con un contexto real con la finalidad de que eviten confundirlos.
Tarea 3. Los estudiantes exploran propiedades de conjunto generador y espacio generado a fin de progresar hacia un nivel de razonamiento más formal de estos.
Tarea 4. Los estudiantes en grupo resuelven preguntas que implican el uso de conjunto generador y espacio generado dando evidencias de que han logrado un razonamiento más formal de estos.
Tarea 5. Los estudiantes individualmente resuelven problemas que implican el uso de conjunto generador y espacio generado dando certeza de que han alcanzado un razonamiento más formal de estos.

Uno de los objetivos del artículo 3 fue divulgar el carácter práctico de nuestra investigación por medio de una secuencia instruccional y así, aportar a la enseñanza de estos contenidos de Álgebra Lineal. Lo anterior, porque consideramos primordial que el profesor tenga a su alcance una secuencia de tareas que se haya probado empíricamente y que adaptada a su contexto, pueda ser efectiva con sus estudiantes. Sin embargo, pensamos que esta secuencia instruccional relativa a la construcción de conjunto generador y espacio generado no es suficiente por sí sola para que se use en el aula. Creemos que su aplicación tendría mayores posibilidades de resultar exitosa en otros contextos, si se le entrega al maestro la THA asociada a ésta y un mayor detalle de su rol durante la aplicación de la misma.

Los resultados en el tercer ciclo (artículo 4) dieron evidencias de que los estudiantes transitaron por los diferentes niveles de actividad de los modelos emergentes a través de la secuencia instruccional vinculada a la THA. Esto da indicios de que dicha secuencia cumple con su objetivo. A pesar de ello, en las conclusiones del artículo 4 se sugiere pedirle que justifiquen los pasos de su resolución en las preguntas de las tareas 3 y 4 con la finalidad de que el profesor pueda profundizar en el razonamiento que ellos han realizado. Así, creemos que se promovería que ellos expliciten el uso que hacen de conjunto generador y espacio generado.

5.3. Los modelos emergentes y la modelización matemática en la construcción de conjunto generador y espacio generado

En los cuatro artículos presentados en nuestra investigación se mencionan aspectos relevantes de los modelos emergentes o de la modelización matemática que nos van dando indicios de su rol en la construcción de conjunto generador y espacio generado.

Según lo planteado en los artículos 1, 2 y 4, los modelos emergentes en la construcción de conjunto generador y espacio generado orientaron el diseño de las tareas de las THAs de nuestro estudio. Específicamente, en el artículo 4 indicamos que esta heurística de diseño puede ser una buena alternativa para esbozar una THA sobre estos conceptos de Álgebra Lineal.

En todos los artículos de nuestro estudio se destaca que los modelos emergentes favorecieron a los estudiantes en su progreso del nivel de actividad matemática informal hacia un razonamiento más formal de conjunto generador y espacio generado. En concreto, en el artículo 4 se describió el razonamiento de los grupos que participaron en el tercer ciclo del experimento de enseñanza desde cada uno de los niveles de actividad ligados a los modelos emergentes.

En las conclusiones del artículo 4 se describe la transición de los estudiantes del modelo-de al modelo-para y cuáles fueron los modelos emergentes que ayudaron a que se diera ésta. En dicha publicación planteamos que es esencial la elección del modelo emergente que va a apoyar la evolución del modelo-de al modelo-para porque esta información va a facilitar que el profesor los guíe de mejor manera en su proceso de construcción del conocimiento matemático.

Cabe señalar que el modelo emergente se encuentra estrechamente vinculado con las herramientas (objetos físicos, símbolos o notación) que son una componente de la TIL (Gravemeijer, 2004a). Con la finalidad de definir las herramientas de la TIL que se desarrolla en nuestra investigación, nosotros consideraremos los modelos emergentes descritos en el artículo 4 (los dos conjuntos vinculados al generador de contraseñas creado por los estudiantes que en notación matemática corresponden a los conceptos de conjunto generador y espacio generado).

Por otra parte, con respecto al rol de la modelización matemática en la construcción de conjunto generador y espacio generado en el artículo 1 concluimos que el uso de la modelización matemática como herramienta de enseñanza permitió que los estudiantes le dieran un sentido en contexto real a los conceptos de Álgebra Lineal que estaban construyendo. De igual modo, les proporcionó la posibilidad de que indagaran tanto nuevas situaciones como contenidos matemáticos en interacciones con sus pares (trabajo colaborativo) y como consecuencia, disminuyeran su dependencia con el profesor. A la vez, el ciclo de modelización matemática guio la resolución de un problema con contexto real (Tarea 1) y su uso potenció el desarrollo de habilidades matemáticas ligadas primordialmente a la modelización e interpretación.

En el artículo 2, indicamos que el problema de modelización (crear un generador de contraseñas) admitió que los estudiantes activaran sus concepciones previas de vectores, las cuales utilizaron para avanzar hacia las siguientes tareas de la THA. Asimismo, en las conclusiones de este mismo manifestamos que coincidimos con Alsina (2007) en que la modelización matemática puede ser un paso positivo hacia el éxito en el aprendizaje. Lo anterior porque el problema de inventar contraseñas sirvió de apoyo a la construcción de conjunto generador y espacio generado al vincular el contexto de las contraseñas con ellos a través de una tabla de analogía (Tarea 2). En particular, como se revela en los resultados del artículo 4, los estudiantes usaron el modelo matemático que genera contraseñas numéricas con el propósito de tener una primera aproximación de estos dos conceptos de Álgebra Lineal, pues desde él obtuvieron dos conjuntos que se vincularon con el contexto de las contraseñas y con dichos conceptos matemáticos (conjunto generador y espacio generado).

A partir de los resultados de los cuatro artículos, podemos señalar que la modelización matemática contribuyó a la construcción de conjunto generador y espacio generado porque favoreció que los estudiantes activaran sus concepciones previas de vectores, las que aprovecharon para progresar en la construcción de estos conceptos y les permitió visualizarlos en un contexto tanto real como matemático.

Con la finalidad de diseñar una innovación docente en Álgebra Lineal, nosotros adoptamos como enfoques teóricos la modelización matemática junto con los modelos emergentes. A través de los resultados de nuestra investigación, observamos que estas teorías se complementan con el fin de ayudar a los estudiantes en la construcción de conjunto generador y espacio generado.

6. Conclusiones

"Lo importante es no dejar de hacerse preguntas".
Albert Einstein

Nuestra investigación tuvo como objetivo general aportar con una innovación docente, probada empíricamente, acerca de conjunto generador y espacio generado de Álgebra Lineal a nivel universitario. Ésta se fundamentó en los modelos emergentes y la modelización matemática. Con el propósito de responder a nuestra meta, nos propusimos tres objetivos específicos. La respuesta al primer objetivo que corresponde con desarrollar una TIL para estos conceptos matemáticos la describimos en el apartado 6.1. En tanto, el segundo objetivo vinculado al diseño de una secuencia instruccional lo respondemos en el apartado 6.2. Finalmente, en el apartado 6.3. reflexionamos referente al rol de los modelos emergentes y la modelización matemática en la construcción de conjunto generador y espacio generado.

Finalizamos este capítulo con las limitaciones de nuestro estudio (apartado 6.4.), las contribuciones que hacemos al campo de la educación matemática (apartado 6.5.) y las recomendaciones a futuras investigaciones (apartado 6.6.).

6.1. Una TIL sobre conjunto generador y espacio generado

La discusión de los resultados en el capítulo 5 y principalmente, el apartado de refinamiento de la THA, nos condujo a desarrollar una TIL acerca de conjunto generador y espacio generado.

La TIL que presentamos en la Tabla 9 contempla las componentes señaladas por Gravemeijer (2004a): los objetivos de aprendizaje, las tareas, las herramientas que serán usadas y la ruta de aprendizaje prevista. Además, incorporamos las principales acciones del profesor durante el proceso de aprendizaje de conjunto generador y espacio generado porque consideramos que es una componente importante en la planificación del aprendizaje.

Tabla 9. La TIL sobre los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

Objetivo y tarea	**Herramienta**	**Ruta de aprendizaje**	**Acciones del profesor**
Objetivo 1: Identificar alguna diferencia entre el conjunto generador y el espacio generado. *Tarea 1:* Pide crear un generador de contraseñas basado en vectores. Luego, determinar dos conjuntos vinculados al generador de contraseñas que cumplan ciertas características y determinar alguna diferencia entre ellos.	Vectores, combinaciones lineales, dos conjuntos de R^n (A y B) relacionados con su modelo matemático que son ejemplos de conjunto generador y espacio generado, respectivamente.	Los estudiantes: (a) Leen información de las contraseñas seguras. (b) Crean un generador de contraseñas basado en vectores siguiendo los pasos del ciclo de modelización matemática. (c) Encuentran dos conjuntos de su generador de contraseñas (uno que tiene todos los vectores para generar contraseñas numéricas y otro que posee los vectores que al hacer combinación lineal entre ellos se obtiene cada contraseña numérica). (d) Identifican al menos una diferencia entre los dos conjuntos vinculados a su generador de contraseñas.	*Procurar que los estudiantes estén utilizando correctamente los conceptos de vector y combinación lineal. *Incentivar a que los estudiantes usen el ciclo de modelización matemática para crear un generar de contraseñas. * Constatar que los dos conjuntos del generador de contraseñas de los estudiantes correspondan a un conjunto generador y a un espacio generado.

Objetivo y tarea	**Herramienta**	**Ruta de aprendizaje**	**Acciones del profesor**
Objetivo 2: Determinar las características de un conjunto generador y un espacio generado. *Tarea 2:* Pide hacer una tabla de analogía entre su generador de contraseñas y los conceptos de conjunto generador y espacio generado. A continuación, observar las tablas de analogía de sus compañeros para establecer características de conjunto generador y espacio generado.	Los conjuntos A y B de R^n que son ejemplos de conjunto generador y espacio generado, respectivamente, los que fueron escritos por sus compañeros de aula.	Los estudiantes: (a) vinculan los dos conjuntos de su generador de contraseñas con los conceptos de espacio generado y conjunto generador, respectivamente a través de una tabla de analogía (b) observan los conjuntos de las tablas de analogía de sus compañeros para identificar características de conjunto generador y espacio generado. (c) Identifican las notaciones matemáticas de conjunto generador y espacio generado.	Introducir las definiciones de conjunto generador y espacio generado relacionándolas con la tarea 1. Guiar a los estudiantes a caracterizar estos conceptos.
Objetivo 3: Identificar algunas propiedades vinculadas a conjunto generador y espacio generado. *Tarea 3*: Pide conjeturar propiedades de conjunto generador y espacio generado.	Conjuntos de R^n diferentes a los trabajados en el contexto de las contraseñas.	Los estudiantes: (a) Exploran casos particulares e identifican algún patrón. (b) Relacionan conjunto generador y espacio generado con otros conceptos (por ejemplo: independencia lineal, rango de una matriz). (c) Conjeturan acerca de lo que le preguntan y justifican su respuesta. (d) Deducen propiedades de conjunto generador y espacio generado.	Formalizar las propiedades de conjunto generador y espacio generado.

Objetivo y tarea	Herramienta	Ruta de aprendizaje	Acciones del profesor
Objetivo 4: Aplicar los conceptos de conjunto generador y espacio generado. *Tarea 4:* Pide aplicar los conceptos de conjunto generador y espacio generado.	Conjuntos de R^n diferentes a los trabajados en las tareas previas.	Los estudiantes con el objetivo de plantear una solución a cada problema: (a) Exploran posibles procedimientos hacia una resolución. (b) Utilizan conjunto generador o espacio generado (por ejemplo: relacionándolo con otros conceptos, aplicando sus propiedades, diferenciando entre ellos). (c) Describen el procedimiento que les permitió llegar a la solución del problema. (d) Plantean la solución del problema.	Guiar a los estudiantes en la resolución de los problemas.

Por último, queremos resaltar que esta TIL da la oportunidad a los estudiantes de ir construyendo conjunto generador y espacio generado desde su razonamiento informal referido a contraseñas y vectores. Además, hacemos hincapié que en esta TIL, el rol del profesor es de facilitar el aprendizaje de sus estudiantes.

6.2. Una secuencia instruccional para conjunto generador y espacio generado

Una contribución práctica de nuestra investigación es una secuencia instruccional de conjunto generador y espacio generado (Ver anexo 1) que se sustenta en la TIL (detallada en el apartado 6.1.) y en los análisis de los resultados del experimento de enseñanza. Estos últimos, de acuerdo con Gravemeijer (2004a) dan origen a la secuencia instruccional que se compone de un conjunto de actividades de instrucción que son consideradas efectivas.

La secuencia instruccional acerca de conjunto generador y espacio generado, la damos a conocer con la finalidad de que sea aplicada con estudiantes de antecedentes similares a los participantes de nuestro estudio. La forma de implementarla dependerá en gran medida de los contextos de aula en donde se pretende emplear. Su implementación en el aula debería tener una duración aproximada de 4 horas.

El diseño instruccional propuesto de conjunto generador y espacio generado pensamos que es una innovación para el curso de Álgebra Lineal a nivel universitario, esencialmente, por tres razones. La primera es que se centra en que el estudiante construya su propio conocimiento desde una situación experiencialmente real como lo plantea Gravemeijer (1999). En tanto, la segunda se refiere a que dicha situación (inserta en el contexto de las contraseñas) da la oportunidad que se utilice el ciclo de modelización matemática. Finalmente, el tercer argumento es que el profesor orienta el proceso de construcción de dichos conceptos matemáticos y por tanto, el estudiante es el protagonista de su aprendizaje.

A partir de los resultados de nuestro estudio, conjeturamos que las siguientes cuestiones se deben tener presente, previo a aplicar esta secuencia instruccional u otra similar:

- Diseñar una THA que sea utilizada por el profesor con la finalidad de que pueda guiar a los estudiantes a conseguir el aprendizaje previsto.
- Detallar el rol del profesor durante la aplicación de la secuencia instruccional y sus intervenciones importantes.
- Establecer conjeturas acerca de las posibles respuestas de los estudiantes a las tareas de la secuencia instruccional.
- Prever los conflictos que puedan surgir durante la implementación de la secuencia instruccional.
- Conocer los conocimientos previos de los estudiantes.
- Elaborar preguntas claves que promuevan la transición de los estudiantes por los niveles de actividad de los modelos emergentes.

6.3. El rol de los modelos emergentes y la modelización matemática en la construcción de conjunto generador y espacio generado

Los modelos emergentes junto a sus niveles de actividad cumplieron un papel clave en nuestra innovación docente. Por una parte, guiaron el diseño de la THA y por otra, apoyaron a los estudiantes en la construcción de conjunto generador y espacio generado. La realización de estos roles por parte de los modelos emergentes implicó: buscar una situación experiencialmente real que se pudiera conectar con dichos conceptos de Álgebra Lineal; definir el modelo-de y el modelo-para; diseñar tareas que se vincularan con cada nivel de actividad; y crear una posible ruta mental relativa al posible camino de aprendizaje.

En lo que se refiere al rol de la modelización matemática, en nuestra innovación docente pensamos que ejerció tres papeles. El primero aludió a que los estudiantes a través de un problema de modelización vincularon conjunto generador y espacio generado con un contexto real con el objeto que los visualizaran en un escenario tanto real como matemático, puesto que comúnmente, se enseñan de forma abstracta. En tanto, el segundo tuvo como objetivo activar sus conocimientos previos con el propósito de que los usaran hacia la construcción de estos dos conceptos de Álgebra Lineal. Por último, el tercer rol fue que ellos utilizaran el ciclo de modelización matemática implícitamente con el fin de encaminarlos al desarrollo de las sub-competencias involucradas en éste. Por último, inferimos de los resultados del experimento de enseñanza que la modelización matemática cumplió el papel de motivar a los estudiantes en su proceso de construcción de estas nociones matemáticas que comúnmente, se enseñan exclusivamente de forma abstracta.

6.4. Limitaciones del estudio

Los estudiantes que participaron de nuestra investigación fueron de una misma universidad y de características similares académicamente. Esto conlleva a que los resultados de nuestra investigación se encuentren delimitados a un determinado contexto.

Consideramos que otra limitación de nuestra investigación fue que se invirtió más tiempo de lo que se utiliza normalmente en la enseñanza de conjunto generador y espacio generado en el aula. Lo anterior ocurrió porque los estudiantes que participaron en el experimento de enseñanza estaban habituados a la metodología de enseñanza tradicional, es decir, donde el profesor les transmite el conocimiento. Esto trajo como consecuencia que les llevara un tiempo involucrarse con la innovación docente descrita en esta tesis.

6.5. Contribuciones al campo de la educación matemática

Con nuestro estudio colaboramos en el campo de la educación matemática porque entregamos información referente a cómo los estudiantes pueden construir conjunto generador y espacio generado junto con sus posibles inconvenientes en relación con los mismos, ya que la literatura en educación matemática respecto a estos conceptos es escasa.

Los hallazgos de este trabajo representan la primera innovación docente empírica basada en los modelos emergentes y la modelización matemática de conjunto generador y espacio generado. Está contempla una primera TIL de estos conceptos de Álgebra Lineal y un diseño instruccional, lo que es una importante contribución a la didáctica de este curso así como también, a las teorías de instrucción local a nivel universitario.

Por otro lado, hemos determinado el rol de la modelización matemática en la construcción de conjunto generador y espacio generado en nuestra innovación docente. Por consiguiente, estamos aportando a la problemática de investigación que manifiesta García (2005) referente al rol que la modelización matemática desempeña o podría ejercer en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Esperamos que nuestro estudio sea pragmático para las futuras investigaciones acerca de instrucción en Álgebra Lineal a nivel universitario, así como teóricamente útil, a fin de continuar extendiendo la heurística de los modelos emergentes en este nivel educativo.

6.6. Recomendaciones sobre futuras investigaciones

Se necesitan futuras investigaciones que implementen nuestra TIL con el fin de constituir una teoría robusta con respecto al aprendizaje y a la enseñanza de conjunto generador y espacio generado. Al mismo tiempo, se pueden emprender futuros proyectos que tengan como objetivo producir TILs emergentes de otros conceptos de Álgebra Lineal que conciernan a conjunto generador y espacio generado, como por ejemplo, base y dimensión.

Además, otras cuestiones que aún no han sido resueltas en nuestra investigación se encuentran vinculadas con indagar en:

- el rol del profesor o las normas de clase cuando se aplica una innovación docente como la presentada en nuestro estudio.
- El alcance de la modelización matemática y los modelos emergentes en la construcción de otros contenidos de Álgebra Lineal, es decir, ¿El vínculo de estas dos perspectivas favorece el aprendizaje de este curso?
- La contribución de la modelización matemática usada como herramienta de enseñanza en el desarrollo de sub-competencias involucradas con el ciclo de modelización matemática.
- Plantear una innovación docente que involucre espacios generados diferentes a los presentados en la nuestra (por ejemplo, polinomios o matrices).

Los hallazgos de nuestra investigación y de otras que involucran métodos de enseñanza innovadores en la universidad están muy lejos de sus metas si no se hacen esfuerzos por darlos a conocer a quienes están directamente involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática a nivel universitario. Para ello, creemos que es primordial hacer un trabajo futuro en dirección a apoyar la integración de propuestas educativas innovadoras por medio de la colaboración entre investigadores, profesores de matemáticas y otros implicados en el ámbito educativo universitario.

SECCIÓN IV.

REFERENCIAS

Referencias

Alsina, C. (2007). Teaching applications and modelling at tertiary level. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study* (pp. 469-474). New York: Springer.

Aydin, S. (2009). The factors effecting teaching linear algebra. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *1*(1), 1549-1553.

Andrews-Larson, C., Wawro, M., y Zandieh, M. (2017). A hypothetical learning trajectory for conceptualizing matrices as linear transformations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-21.

Bakker, A., y Van Eerde, H. A. A. (2015). An introduction to design based research with an example from statistics education. En A. Bikner - Ahsbahs, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.), *Doing qualitative research: Methodology and methods in mathematics education* (pp. 429 - 466). New York: Springer.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Biembengut, M., y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática*, *16*(2), 105-125.

Blomhoj, M. (2004). Mathematical Modelling – A Theory for Practice. En B. Clarke et al. (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). Göteborg: National Center for Mathematics Education.

Blomhøj, M., y Kjeldsen, T. (2013). Students' mathematical learning in modelling activities. En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, y J. P. Brown (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 141–152). Dordrecht: Springer.

Blum, W., y Borromeo-Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of mathematical modelling and application*, *1*(1), 45-58.

Blum W., y Leiss D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems?. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester, UK: Horwood Publishing.

Borromeo-Ferri, R. B. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 99-118.

Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *ZDM*, *38*(2), 178-195.

Cárcamo, A. (2017). El uso de contraseñas para introducir los conceptos de conjunto generador y espacio generado. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(1), 101-112.

Cárcamo y Fortuny (2017, julio). A hypothetical learning trajectory for spanning set and span. 2017. Diapositivas del reporte de investigación presentado en *41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Singapore, Singapore. Disponible en: http://edumat.uab.cat/PME41_Andrea.pdf

Cárcamo, A., Fortuny J. y Fuentealba C. (en prensa). The emergent models in linear algebra: an example with spanning set and span. *Teaching Mathematics and its Applications*.

Cárcamo, A., Fortuny J. y Gómez, J. (2017) Mathematical modelling and the learning trajectory: tools to support the teaching of linear algebra, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(3), 38-352, DOI: 10.1080/0020739X.2016.1241436

Cárcamo, A., Gómez, J. y Fortuny, J. (2016). Mathematical Modelling in Engineering: A Proposal to Introduce Linear Algebra Concepts. *Journal of Technology and Science Education* (JOTSE), 6(1), 62-70, DOI: 10.3926/jotse.177

Carlson, D. (1997). Teaching linear algebra: Must the fog always roll in? En D. Carlson, C. R. Johnson, D. C. Lay, A. D. Porter, A. Watkins y W. Watkins (Eds.), *Resources for Teaching Linear Algebra, MAA Notes* (Vol. 42, pp. 39-51). Washington: Mathematical Association of America.

Carlson, D. (2004). The Teaching and Learning of Tertiary Algebra. En K. Stacey, H. Chick,M. Kendal, B. Barton, y J. C. e Silva (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra, the 12th ICMI Study* (Vol. 8, pp. 293–309). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32 (1), 9–13.

Cobb, P., y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (eds.). *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dierdorp, A., Bakker, A., Eijkelhof, H., y van Maanen, J. (2011). Authentic practices as contexts for learning to draw inferences beyond correlated data. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 132-151.

Domínguez-García, S., García-Planas, M. I., y Taberna, J. (2016). Mathematical modelling in engineering: an alternative way to teach Linear Algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(7), 1076-1086.

Dorier, J. (2002) Teaching Linear Algebra at University. En Li Tatsien (ed.) *Proceedings of the International Congress of Mathematician*, (V. 3, pp. 875-884). Beijing, China: Higher Education Press.

Dorier, J., y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En D. Holton et al. (ed), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level - An ICMI Study* (pp. 255-273). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Doorman, M. (2005). *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change*. (Tesis doctoral). Center for Science and Mathematics Education, Holanda.

Doorman, M., y Gravemeijer, K. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM*, 41(1-2), 199-211.

Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter* (Tesis doctoral). Utrecht, the Netherlands.

Galbraith, P. (2007). Authenticity and goals – Overview. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 181–184). New York: Springer.

Galbraith, P. L., Stillman, G., y Brown, J. (2010). Turning ideas into modeling problems. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, y A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA 13* (pp. 133-144). New York: Springer.

García, F. J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis Doctoral). Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén, Jaén.

Gómez, J. (1998). *Contribució a l'estudi dels processos de modelització a l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivell universitari* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

Goodchild, S. (2008). A Quest for "Good" Research. En Barbara Jaworski y T. Wood (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (pp. 201–220). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-_ Press.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. En T. Nunes y P. Bryant (eds.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (pp. 315–343). Hove, UK: Psychology Press.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 155-177.

Gravemeijer, K. (2002). Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis. In B. Phillips (Ed.), Developing a Statistically Literate Society; *Proceedings of the Sixth International Conference of Teaching*

Statistics [CD-ROM]. Voorburg, the Netherlands: International Statistics Institute.

Gravemeijer, K. (2004a). Learning trajectories and local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical thinking and learning*, 6(2), 105–128.

Gravemeijer, K. (2004b, Julio). *Creating opportunities for students to reinvent mathematics*. Conferencia regular presentada en 10Th International Congress in Mathematics Education (ICME 10), Kopenhagen, Dinamarca.

Gravemeijer, K. (2007a). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 137–144). New York: Springer.

Gravemeijer, K. (2007b, diciembre.) *Emergent modeling and iterative processes of design and improvement in mathematics education*. Comunicación presentada en APEC - Tsukuba International Conference III, Tokyo Kanazawa y Kyoto, Japón.

Gravemeijer, K. y Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perpective. En Plomp T. y N. Nieveen (Eds.) *Educational Design research. Part A: a introduction* (pp. 72-113). Enschede, The Netherlands: SLO.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., y Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225 - 273). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gravemeijer, K., y Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. En K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, y L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 145–169). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer

Gravemeijer, K., y van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *The Elementary School Journal*, *109*(5), 510-524.

Greefrath, G., y Vorhölter, K. (2016). *ICME-13 Topical survey --Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from German-speaking countries*. Switzerland: Springer International Publishing AG.

Grossman, S. I. (1996). *Álgebra Lineal*. México: Mc Graw Hill (5ª Edición).

Hannah, J. (2017). Why Does Linear Algebra Have to Be So Abstract?. En S. Stewart (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* (pp. 205-217). Switzerland: Springer International Publishing.

Hannah, J., Stewart, S., y Thomas, M. (2016). Developing conceptual understanding and definitional clarity in linear algebra through the three worlds of mathematical thinking. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, *35*(4), 216-235.

Harel, G. (1999). Students' understanding of proofs: A historical analysis and implications for the teaching of geometry and linear algebra. *Linear Algebra and its Applications, 302-303,* 601- 613.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(1), 71-90.

Hazzan, O., y Zazkis, R. (2003). Mimicry of proofs with computers: The case of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(3), 385-402.

Ikeda, T. (2013). Pedagogical reflections on the role of modeling in mathematics instruction. En G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, y J. Brown (Eds.), *Teaching mathematical modeling: Connecting to research and practice* (pp. 255-275). Dordrecht: Springer.

Julie, C., y Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study* (pp. 503–510). New York: Springer.

Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.*), Mathematical modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics* (pp. 110–119). Chichester: Horwood.

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. (*ZDM*) *the international journal on Mathematics Education,* 38(3), 302-310.

Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M., y Garcia, F. J. (2007). Report from the working group modelling and applications—differentiating perspectives and delineating commonalities. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the fifth congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 2035–2041). Larnaca Cyprus, ERME, 22–26 February 2007. Nicosia: University of Cyprus.

Kaiser, G., y Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 51-76.

Kamii, C., Lewis, B. A., y Livingston, S. J. (1993). Primary arithmetic: Children inventing their own procedures. *Arithmetic Teacher*, *41*(4), 200-204.

Kanselaar, G. (1993). Ontwikkelingsonderzoek bezien vanuit de rol van de advocaat van de duivel [Design research: Taking the position of the devil's advocate]. En R. de Jong y M. Wijers (Red.) (Eds.), *Ontwikkelingsonderzoek, theorie en praktijk* . Utrecht: NVORWO.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with cabri and maple. *Linear Algebra and its Applications, 432* (8), 2100-2111.

Larsen, S. P. (2013). A local instructional theory for the guided reinvention of the group and isomorphism concepts. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(4), 712-725.

Larson, C., Zandieh, M., y Rasmussen, C. (2008, Febrero). *A trip through eigen-land: Where most roads lead to the direction associated with the largest eigenvalue.* Artículo presentado en la 11th Annual Conference for Research in Undergraduate Mathematics Education, San Diego, California.

Lay, David A. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. México: Pearson (3ª edición).

Leiss, D. (2007). *Hilf mir es selbst zu tun – Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren* [Help me to do it myself - Teacher interventions in mathematical modeling]. Hildesheim, Germany: Verlag Franzbecker.

Lesh, R., y Caylor, B. (2007). Introduction to the special issue: Modeling as application versus modeling as a way to create mathematics. *International Journal of computers for mathematical Learning*, *12*(3), 173-194.

Lesh, R., y English, L. D. (2005). Trends in the evolution of models y modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. *ZDM*, *37*(6), 487-489.

Lipschutz, S. (1992). *Álgebra Lineal.* España: McGraw Hill (2da. edición).

McClain, K., y Cobb, P. (1998). The role of imagery and discourse in supporting students' mathematical development. *Talking mathematics in school: Studies of teaching and learning*, 56-81.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Nardi, E. (1997). El encuentro del matemático principiante con la abstracción matemática: Una imagen conceptual de los conjuntos generadores en el análisis vectorial. *Educación Matemática, 9*(1), 47-60.

Nickerson, S. D., y Whitacre, I. (2010). A local instruction theory for the development of number sense. *Mathematical Thinking and Learning*, 3, 227–252.

Nieveen, N. (1999). Prototyping to reach product quality. En J. van den Akker, R.M. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen, y T. Plomp (Eds), *Design approaches and tools in education and training* (pp. 125-136). Boston: Kluwer Academic.

Niss, M. (1992). *Applications and modelling in school mathematics – directions for future development*. Roskilde: IMFUFA Roskilde Universitetscenter.

Niss, M. (2012). Models and modelling in mathematics education. *Newsletter of the European Mathematical Society*, 86, 49-52.

Niss, M., Blum, W., y Galbraith (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, M. Niss, H.-W. Henn (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 3-32). New York: Springer.

Plomp, T. (2007). Educational design research: An introduction. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds.), *An introduction to educational design research* (pp. 9-35). Enschede, the Netherlands: SLO.

Plomp, T. (2013). Educational design research: An introduction. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds.), *Educational design research – Part A: An introduction* (pp. 10-51). Enschede, The Netherlands: SLO.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., y Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *432*(8), 2125-2140.

Rasmussen, C., y Blumenfeld, H. (2007). Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(3), 195-210.

Salgado, H. (2015). *El papel de la modelización en la enseñanza de conceptos abstractos del álgebra lineal* (Tesis doctoral). Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 100-120.

Sierpinska, A., Trgalova, J., Hillel, J., y Dreyfus, T. (1999). Teaching and learning linear algebra with Cabri. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, (pp. 119 – 134). Haifa, Israel.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.

Stewart, S., y Thomas, M. O. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 173-188.

Trigueros, G. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9 (46), 75-87.

Trigueros, M., y Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 438(4), 1779-1792.

Talbert, R. (2014). Inverting the linear algebra classroom. *Primus, 24*(5), 361-374.

Turgut, M., y Drijvers, P. (2016, julio). *Students' thinking modes and the emergence of signs in learning linear algebra*. Artículo presentado en el 13th Congress on Mathematical Education, Hamburg, Alemania.

Uicab, R., y Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(3), 459-490.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 521-525). Netherlands: Springer.

Vergara, G., Avilez, A., y Romero, J. (2016). Uso de Matlab como herramienta computacional para apoyar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra Lineal. *Revista de Matemática MATUA*, *3*(1).

Vos, P. (2010). The Dutch maths curriculum: 25 Years of modelling. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, y A. Hurford (Eds.). *Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA13* (pp. 611-620). New York: Springer.

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., y Larson, C. (2013). Design research within undergraduate mathematics education: An example from introductory linear algebra. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds.), *Educational design research – Part B: Illustrative cases* (pp. 905-925). Enschede, The Netherlands: SLO.

Wawro, M., y Zandieh, M. (2016, Marzo). *An Inquiry-Oriented Task Sequence for Eigentheory and Diagonalization in Linear Algebra*. Artículo presentado en la First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics, Montpellier, Francia.

Zandieh, M., y Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(2), 57-75.

Zbiek, R. M., y Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in mathematics*, *63*(1), 89-112.

Zolkower y Bressan (2012). Educación matemática realista. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comp.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp.175-200). Argentina: UNGS – EDUVIM.

Zöttl, L., Ufer, S., y Reiss, K. (2010). Modelling with heuristic worked examples in the KOMMA learning environment. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 143-165.

SECCIÓN V.

ANEXOS

Anexo 1: Una secuencia instruccional para conjunto generador y espacio generado

De la creación de contraseñas seguras a los conceptos de conjunto generador y espacio generado

Los objetivos de las tareas que les proponemos son:

- ✓ Conocer, diferenciar, caracterizar y aplicar los conceptos de conjunto generador y espacio generado.
- ✓ Observar los conceptos de conjunto generador y espacio generado tanto en un contexto real como matemático.

Tarea 1. El problema de las contraseñas

Para evitar que desconocidos ingresen a nuestras cuentas de diferentes páginas web (gmail, facebook, twitter, etc.) es necesario tener contraseñas seguras que posean diferentes caracteres (letras, números y símbolos) para ingresar a cada una de ellas. Pero, ¿Cómo podemos crear estas contraseñas? Inventando nuestro propio generador de contraseñas, por ejemplo.

1. Elaboren un generador de contraseñas seguras que utilice un modelo matemático basado en vectores para generar contraseñas numéricas que luego, se conviertan en contraseñas codificadas utilizando algún tipo de codificación. Para ello, sigan los siguientes pasos:

   (a) Definan las características del generador de contraseñas que garantice que creará contraseñas seguras.

   (b) Propongan posibles modelos matemáticos para crear las contraseñas numéricas (Cada integrante del grupo puede proponer uno).

   (c) Elijan el modelo matemático para generar contraseñas numéricas.

   (d) Decidan la codificación a utilizar para generar las contraseñas codificadas.

   (e) Muestren ejemplos de contraseñas seguras creadas con su generador de contraseñas.

2. A partir de su modelo matemático basado en vectores, indiquen dos conjuntos: un conjunto A que tiene todos los vectores para generar contraseñas numéricas y un conjunto B que posee los vectores que al hacer combinación lineal entre ellos se obtiene cada contraseña numérica.

Conjunto A
Conjunto B

3. ¿Qué le señalarían a un compañero para que diferencie entre el conjunto A y B?

Tarea 2. El problema de la tabla de analogía

1. Realicen una tabla de analogía entre su generador de contraseñas y los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

Cómo se escribe en lenguaje matemático	Nombre o a qué corresponde en su generador de contraseñas	Nombre que recibe en matemática

2. Compartan su tabla de analogía con los compañeros de su aula. Observen los conjuntos de las tablas de analogía de ellos y a partir de esto, discutan las similitudes y diferencias entre un conjunto generador y un espacio generado. Luego, establezcan las características principales de estos dos conjuntos.

3. En la siguiente Tabla den 4 ejemplos de un conjunto generador y un espacio generado en lenguaje matemático. ¿Hay solo una forma de expresar cada uno de estos conjuntos? Anoten su respuesta.

Ejemplos de conjuntos generadores
Ejemplos de espacios generados

Tarea 3. Conjeturas sobre propiedades de conjunto generador y espacio generado

Conjeturen propiedades sobre conjunto generador y espacio generado. Recuerden justificar sus respuestas.

Conjetura la propiedad 1

a) Sea el conjunto C={(1,0), (0,2)}. C genera al espacio de R^2. ¿Es C el único conjunto que genera a R^2?

b) Sea el conjunto D={(4,2,2),(1,2,3),(-1,1,-2)}. D genera al espacio de R^3. ¿Es D el único conjunto que genera a R^3?

c) Conjeturen si un espacio generado puede tener un único conjunto generador o puede tener distintos conjuntos generadores.

Conjetura la propiedad 2

a) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos no generan al espacio de R^2?

A={(1,-2), (0,0)}	B={(5,5), (-7,-7),(9,9)}	C={(1,1), (5,2)}
D={(8,3)}	E={(2,1), (1,5), (-2,-1)}	F={(2,4), (3,6)}

b) Conjeturen sobre las características que deben tener los conjuntos para que generan a R^2. ¿Estas características se pueden generalizar a cualquier espacio de R^n?

Conjetura la propiedad 3

a) Analiza las siguientes afirmaciones y conjetura las características que pueden tener dos conjuntos generadores de un mismo espacio.

i. Sea W el conjunto de vectores generado por D={(1,0,1),(0,1,0)}. Si (2,7,2) pertenece a W entonces E={(1,0,1),(0,1,0), (2,7,2)} genera también a W.

ii. Sean B={(1,2,0,0), (0,0,3,0} y C={(3,6,0,0), (0,0,8,0}. B y C son conjuntos generadores del espacio G.

iii. Sean R={(-5,0)} y S={(1,0), (3,0}. R y S son conjuntos generadores del espacio T.

Tarea 4. Aplicar conjunto generador y espacio generado para resolver problemas

En la resolución de cada uno de los siguientes problemas indiquen si están aplicando las definiciones de conjunto generador, espacio generado o alguna de sus propiedades.

a) Sea W= {(x,y,z,w)/x=w}. Determina un conjunto generador de W.

b) Establece si el conjunto S={(2,1,0),(3,1,1),(3,2,-1)} es un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$. Si no es así, determina el espacio que genera.

c) Sea S el espacio generado por los vectores (0,4,-2,6) y (-2,3,-1,5) en R^4. ¿Existen valores de a y b para que el vector (3,-a,1,b) pertenezca a S?

d) Sea el espacio F={(x,y,z)/-x-3y+4z=0}. Determina un conjunto generador para F que tenga dos vectores. ¿Puede un solo vector generar a F? ¿Pueden tres vectores generar a F?

e) Sea el subespacio V={(w,d,I,P,G)/P=w, d+I=G}}. w es el crecimiento de los salarios, d es el crecimiento de los impuestos directos, I es el crecimiento de los impuestos indirectos, P es el crecimiento de los precios y F es el crecimiento del gasto. Determinen:

i. Un conjunto generador de V.

ii. Si el vector (3,2,-7,3,-5) pertenece a V Si es así, interprétenlo según el problema.