Historia, matemáticas y realidad. El caso de la medida en la formación matemática de futuros maestros.

Lourdes Figueiras Ocaña

Tesis doctoral dirigida por Jordi Deulofeu Piquet
Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona

Diciembre de 2002

Cansadament et contemples. Hi ha dies
que el més senzill seria dir que no,
negar aquest cos feixuc, renunciar,
fugir de tot i de tu, tal vegada.

A poc a poc, però, l'embruix del mots
convertirà la rutina en misteri;
la rel de tu mateix torna a xuclar-te:
créixer, què és, sinó interrogar-se?

Dellà el mirall que et reflecteix hi ha sempre
un espai que el temps omple de preguntes
que solament el temps i tu podeu
respondre, perquè algú, més tard, se senti
tan ple de si mateix com tu et sents ara.

Miquel Martí i Pol

Índice General

Agradecimientos

Han sido muchas las personas que a lo largo de años han compartido conmigo el desarrollo de este trabajo desde la Universitat Autònoma de Barcelona. Mi agradecimiento es especialmente intenso hacia los estudiantes de magisterio que participaron en esta investigación. Ellas y ellos son, sin duda, los grandes protagonistas del trabajo.

El profesor Josep Maria Fortuny me animó y ofreció su tiempo y espacio para comenzar una tesis doctoral. Los comienzos siempre son difíciles y él tuvo la amabilidad de guiarme en aquellos primeros momentos. Xavier Valls y Lluís Bibiloni han sido personas importantes, como matemáticos y como amigos, en todo este proceso de trabajo y siempre me han brindado su apoyo y su sonrisa. No puedo olvidar tampoco a David Barba, dispuesto en todo momento a prestarme su ayuda y sus consejos. También los estudiantes de doctorado que han pasado durante estos años por el Departament de Didàctica de la Matemàtica han sido un apoyo importante. Las discusiones que hemos mantenido y sus sugerencias han enriquecido notablemente el trabajo.

Por último, no puedo escatimar ni una sola palabra de agradecimiento hacia Jordi Deulofeu. Como director y compañero de trabajo ha compartido su tiempo y sus palabras. Desde su sensibilidad para reconocer, a pesar de mi hermetismo, cuáles han sido durante estos años los momentos más duros, ha guiado mi actividad con rigor, generosidad y una delicadeza absoluta.

Otras personas ajenas a esta universidad me han ofrecido también su tiempo y sus ideas para discutir el trabajo. La profesora Christine Keitel y los profesores Miguel de Guzmán y Mariano Martínez me apoyaron, en muchos sentidos, durante mis estancias académicas en Berlín y Madrid, respectivamente. El profesor Abraham Arcavi encontró también espacios para discutir el trabajo durante su estancia como profesor visitante en Barcelona.

Tampoco puedo olvidarme en este agradecimiento público de Marina, sin cuya cercanía y ayuda la soledad hubiera tomado en los últimos meses unas proporciones insoportables, ni de otras personas a quienes tanto quiero. Ana y Misha, las mujeres de mi vida, merecen una atención especial. Las tres vamos creciendo juntas en la distancia, encontrando espacios para cuidarnos en este desorden que se nos impone. Ninguna permite que cualquiera de las otras se quede atrás. Eso significa crecer y lo hemos aprendido juntas. Y también está Julian, amante y amado. Jul es la generosidad, el amor sin condiciones. Con una paciencia inmensa me ayuda siempre a no perder el sur, me cuida, me mima y me llena con su alegría infinita.

Finalmente, queda el agradecimiento implícito a todas las personas a quienes no puedo nombrar aquí y que me han hecho ser como soy a lo largo de mi vida: a quienes me invitaron con su presencia y su talante a creer en la tolerancia y en el diálogo; a quienes con su modelo humano me ayudaban a definir mi ideología política; a quien me empujó a buscar en los libros de historia y de filosofía mi sentido común. Y en el comienzo de todo este viaje me invade el calor de mi familia y, ante todo, de mis padres y mis abuelos. Con su corazón inmenso han movido montañas.

Introducción

Hace algo más de un año se inició en Colombia un proyecto editorial cuyo objetivo era que los estudiantes de doctorado en didáctica de las ciencias y las matemáticas tuviésemos un espacio para que nuestros proyectos de investigación fuesen dados a conocer. Se contemplaba la publicación de dos libros: el primero recopilaría investigaciones que tuviesen relación con la formación del profesorado y el segundo recogería, aun a riesgo de ser sólo un batiburrillo de buenos propósitos, experiencias educativas en general o trabajos que no se supiese muy bien cómo calificarlos.

Cuando me ofrecieron la posibilidad de escribir un capítulo para el primero de los libros pensé que era un buen momento para *contar* en qué estaba trabajando, dejando entrever algunas dudas que me habían hecho reflexionar desde que comencé a pensar en una tesis doctoral. En primer lugar se amplificaba la preocupación por utilizar un lenguaje llano, quizás ante mi reticencia para referirme a la complejidad en términos igualmente complejos. El convencimiento de que una expresión sencilla no ha de ser necesariamente la imagen de un acontecimiento simple o reduccionista me acompaña desde que comencé a vivir la escritura como un acto de creación y de crecimiento.

En segundo lugar se amplificó también la rebelión interior, casi adolescente, ante la obligación implícita de incluir citas y citas bibliográficas de autores que a su vez citaban a otros autores, quienes a su vez citaban a otros autores. Sentía que esta necesidad mermaba en múltiples ocasiones la posibilidad de dar rienda suelta a mis razonamientos y me defendía de quien cuestionaba mi respeto por las ideas ajenas con el argumento más humilde y sincero que puedo ofrecer: que asumo que en las ideas que puedan desprenderse de este tipo de trabajos, al menos en lo que a los míos se refiere, no existe originalidad en los términos que se reclama en determinados círculos científicos. A menudo tengo la sensación de leer en palabras de otros aquello que yo misma he afirmado o he intuido; o de dar sentido a otros argumentos que un día quedaron en el abandono porque aún estaban lejos de la gama de mi propio conocimiento. Tales sensaciones se insertan en mi conciencia como la creencia de que el construir conocimiento no es sino transformar nuestra realidad, la cual es a su vez expresión del conocimiento de otros. La cuestión que quiero destacar es que en la investigación en didáctica de la matemática el interés que tiene la producción de *nuevas* teorías generales está sujeto a discusión. Personalmente, no creo que podamos ir mucho más allá de una actuación puntual sobre nuestro entorno cercano. Ante el ejercicio absolutamente necesario y enriquecedor de reflexionar sobre las investigaciones de otros autores, sobre todo aquellos que se dedican a la didáctica de las matemáticas, he rastreado hasta encontrar que sus fuentes originales son en numerosas ocasiones las mismas que han servido a psicólogos, sociólogos, filósofos, educadores o incluso políticos revolucionarios. Son ideas reformuladas con la historia, las experiencias, la política y el devenir de los acontecimientos. Pero ideas libres al fin y al cabo, que nos permiten conocer, transformar, y volver a preparar para conocer de nuevo, nuestra realidad inmediata. Puesto que la didáctica de la matemática involucra la discusión y las perspectivas de otras muchas disciplinas, la lectura de cualquier investigación en el área será, necesariamente, superficial desde muchas de ellas y no tanto desde otras. Es la certeza desde la que asumo, aún antes de que sean hechas explícitas, muchas de las carencias que pueda presentar esta investigación. Merece la pena asumir este hecho a cambio de la posibilidad de acercarse a la realidad desde diferentes puntos de vista y desde la perspectiva de autores y disciplinas muy diversas. Encuentro esta opción especialmente enriquecedora, muy al contrario de quien defiende una super–especialización en la producción del conocimiento.

En tercer lugar, estaba segura que el trabajo dejaría entrever también mi preocupación por la excesiva abstracción que en ciertos círculos ha tomado la didáctica de la matemática, alejándose completamente de la práctica. Sentía la necesidad de reivindicar su naturaleza como una *praxis* y al mismo tiempo no renunciar a la búsqueda de claves teóricas que tanto preocupa a nuestra comunidad.

Finalmente elaboré un capítulo en el cual, a pesar de las reflexiones anteriores y utilizando un lenguaje lo más académico que pude, aludía explícitamente a algunas de las referencias bibliográficas que había anotado con disciplina mientras devoraba las lecturas relacionadas con mi trabajo. Opté también por presentar lo que a mi juicio era una investigación que culminaría en la búsqueda de teorías, aunque fuera a partir de una experiencia práctica. Pero mi capítulo quedó relegado al segundo de los libros. Quien me había ofrecido la publicación me comunicó con gran apuro que los editores habían considerado mi trabajo había sido considerado poco adecuado como investigación, porque era escaso en referencias bibliográficas y porque relataba más bien una experiencia docente.

Es evidente que hoy modificaría algunas de las cosas que escribí entonces, sobre todo para resaltar el conocimiento, antes inexistente, que ha creado el desarrollo mismo de la investigación. Sin embargo, en el tiempo que ha transcurrido desde entonces, y a pesar de haber valorado en un ejercicio de autocrítica aquellas tres cuestiones esenciales que se citaban más arriba, continúo pensando, con toda honestidad, que aluden a aspectos de la investigación actual en didáctica de las matemáticas que son razonablemente interesantes para la discusión. Me interesa destacar especialmente la *obsesión* que se lee entre líneas en muchas de las investigaciones publicadas por dotar a la didáctica de la matemática de una identidad propia, alejándose a una velocidad sorprendente de reflexiones, por ejemplo, de carácter histórico o filosófico. También me llama la atención la *obsesión* por explicitar que cada área de conocimiento tiene unas características individuales, hecho que provoca el que no se acepten fácilmente trabajos llevados a cabo desde una perspectiva de didáctica general. Incluso dentro de la misma didáctica de la matemática, se ha llegado a afirmar que la didáctica de la estadística, de la geometría o hasta de la geometría dinámica, necesitan crear *su* propio cuerpo de conocimiento porque los objetos de los que se ocupan son esencialmente distintos de otros que también forman parte de la matemática. Una de las mejores cosas que podríamos hacer por los estudiantes es ofrecerles una imagen global de la matemática y el conocimiento, de las enriquecedoras relaciones que pueden establecerse entre distintas perspectivas para acercarse al conocimiento científico como una labor humana multidisciplinar. Sin embargo nos empeñamos, en parte porque así podemos sobrevivir como didactas, en parcelar nuestro conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Y aún más, creo que no es descabellado afirmar que para hacerlo es necesario crear términos que *definan* esas diferencias que se pretenden crear, llegando incluso a rayar lo indescifrable[1]. Las investigaciones en didáctica, quizás a pesar de que la parcela de autoridad de muchos didactas de la matemática se vea cuestionada, ha de ser asequible a cualquier persona interesada por la educación, desde el catedrático en didáctica hasta el estudiante de magisterio. Creo que ése es un compromiso moral que va bien que se acepte, al menos, como freno a esta especie de tendencia a la abstrusidad y la escritura barroca que no sé por qué se nos impone y aun peor, implícitamente se demanda. Reconozco que en ocasiones me he visto envuelta no sólo en la lectura sino también en la redacción de textos oscuros, abigarrados y a veces demasiado alejados de una reflexión profunda desde el punto de vista de la matemática. Por este motivo considero necesaria una postura crítica en este sentido.

De todo lo dicho hasta aquí se desprende parte de la problemática que se contempla en esta tesis doctoral. Por otra parte, el hecho de encontrarme en una facultad de educación ha permitido que me sensibilizara especialmente con la formación inicial de maestros, y que el objetivo específico del trabajo sea profundizar en la experiencia de los estudiantes de magisterio en lo que a su actividad matemática se refiere.

Esta investigación se ha desarrollado a partir de la puesta en práctica de un curso de matemáticas en el primer curso de la diplomatura de magisterio. Los datos que se han tenido en cuenta para el análisis han surgido de la experiencia de los estudiantes y de la nuestra

[1] Releo estas lineas y recuerdo el famoso, aún actual, y controvertido *caso Sokal* (Sokal, A. and Bricmont, J. (1998) *Intellectual impostures.* Traducción en castellano: Imposturas intelectuales, Paidós, Barcelona, 1999). En mi opinión la actitud de los autores es absolutamente déspota, malintecionada y nada respetuosa con el trabajo intelectual de un grupo de personas. Desde esta base es imposible plantear ninguna crítica por muy necesaria que se considere. Espero dejar claro que mi reflexión hacia algunas de las investigaciones llevadas a cabo en didáctica de las matemáticas es simplemete una llamada a la consideración de otros puntos de vista y una explicitación de mis inquietudes.

a lo largo del curso. En consecuencia, la separación teoría–práctica o marco teórico–marco metodológico tiene a lo largo de todo el trabajo básicamente una función exclusivamente sistemática. Puesto que las referencias a los contenidos y la metodología de este curso serán abudantes desde las primeras páginas y a lo largo de todo el trabajo, merece la pena extenderse ahora, al comenzar, en caracterizar el contexto y el curso del que estamos hablando. Así, confiamos que resultará mucho más fácil entender cómo se ha estructurado la exposición del trabajo.

El contexto de la formación inicial del profesorado

La formación matemática de los futuros maestros en el momento de iniciar sus estudios universitarios es en muchos casos bastante deficiente. Podemos utilizar todo tipo de eufemismos para aceptar la situación sin escandalizarnos, tales como que “saben otras muchas cosas,” “saben unas matemáticas distintas a las que se aprendían antes,” “saben las matemáticas necesarias para vivir” etc. El problema no es sólo que tales afirmaciones tampoco sean ciertas en muchos casos sino que por su vaguedad distorsionan la información sobre la realidad existente. A una formación insuficiente tanto de carácter conceptual como de técnicas para la resolución de problemas, hay que añadir un escaso interés por cuestionarse qué sentido tiene tanto aquello que saben como aquello que no, y con un carácter más general cuestionarse cuál es la importancia de las matemáticas para la formación de los futuros ciudadanos. Este hecho plantea, a nuestro entender, un problema serio que es necesario sacar a la luz durante los años de estancia en la universidad.

La reforma de los planes de estudio de magisterio realizada en la década de los noventa para adaptarse a la entonces nueva ley general de educación (LOGSE) agravaron la situación en lo que se refiere a la formación básica de los futuros maestros, en concreto en relación con su formación científica y matemática. Decidir qué contenidos deben ser tomados en cuenta durante los tres años de la diplomatura de magisterio es sin duda una cuestión delicada y difícil. Por una parte, es cierto que cada profesor ha de tener una base sólida en áreas como matemáticas, biología, lengua, historia o geografía; pero por otro lado también hay que prestar una especial importancia al conocimiento profesional que engloba pedagogía, sociología, psicología o didáctica. El marco legal actual prioriza estos últimos y este hecho supone implícitamente que el conocimiento de los futuros profesores y profesoras en áreas específicas debe ser adquirido durante la enseñanza obligatoria. Suponiendo que la alfabetización científica que ofrecemos en la enseñanza secundaria fuera la adecuada, esto significa que un futuro profesor no necesita saber más que cualquier otro ciudadano para enseñar, algo que resulta, cuanto menos, discutible.

Para intentar reducir, aunque no solucionar, el problema expuesto, la Universitat Autònoma de Barcelona introdujo una asignatura de matemáticas obligatoria en primer curso de 40 horas lectivas. Los futuros maestros generalistas de primaria tienen, además, dos asignaturas de didáctica de las matemáticas, de 60 horas cada una, y pueden elegir otras dos asignaturas optativas (una de matemáticas y una de didáctica), opción que toman sólo el 10% aproximadamente. Este curso es, por lo tanto, el único específico de matemáticas para la mayoría de los estudiantes.

La situación con la que nos encontramos mayoritariamente en las aulas es que una gran parte de los alumnos no pueden resolver problemas de matemáticas propios de la educación secundaria obligatoria por dos motivos: en primer lugar, porque desconocen o han olvidado los conceptos básicos alrededor de los cuales se trabaja, y en segundo lugar porque los problemas que se plantean no son presentados dentro de un tópico concreto que sugiera las técnicas que hay que emplear. Al margen de estas dificultades tanto conceptuales como técnicas, que difieren mucho de unos alumnos a otros, su visión acerca de qué son las matemáticas, qué han representado para el desarrollo de la humanidad o cuál es su importancia en la formación de los ciudadanos es, en la mayoría de los casos, muy primitiva y claramente negativa.

Durante muchos años se ha desarrollado un primer curso de matemáticas basado en la resolución de problemas, con la finalidad de mostrar que en los problemas está la clave para comprender la evolución de las matemáticas, y que es posible encontrar un sentido a partir de ellos. Metodológicamente, las clases se convierten en un lugar para el trabajo en pequeño grupo, la reflexión y la discusión. Esta tradición en la enseñanza de las matemáticas tiene aspectos muy positivos que han sido recogidos en una gran cantidad de referencias bibliográficas. Supone, además, una manera de trabajar a la que en general los estudiantes no están habituados y que rompe con una secuencia que tienen muy interiorizada, según la cual primero se conocen los conceptos y las técnicas y luego se aplican a la resolución de problemas.

Sin embargo, a pesar de que un planteamiento de este tipo muestra para muchos alumnos una manera distinta de entender las matemáticas y significa un paso adelante, resulta insuficiente para reflexionar sobre la relación de la matemática con el contexto y con la cultura. En definitiva, aunque se ilustra muy adecuadamente el método de trabajo matemático, no permite abordar directamente la cuestión sobre el sentido que tienen las matemáticas en la formación de las personas. Por este motivo decidimos diseñar y realizar un nuevo curso que llevamos a la práctica entre septiembre y diciembre de 2001, en el cual los problemas siguieron teniendo un papel esencial, pero se priorizó la discusión al hilo de su contextualización histórica. Al hacerlo perdíamos, sin duda, una parte del énfasis en la resolución de problemas que se había puesto en años anteriores; pero a cambio introducíamos otros aspectos para la reflexión que consideramos igualmente interesantes para la formación de los futuros profesores de matemáticas.

Así pues, la experiencia que describiremos en esta investigación puede ser considerada desde el punto de vista de una experiencia de innovación didáctica llevada a cabo en el marco de los estudios de magisterio. Como tal, tiene una intencionalidad muy clara, que es la de ofrecer algunos aspectos para la formación que antes no se consideraban –por ejemplo la contextualización histórica de los conceptos matemáticos, la divulgación científica y en especial la divulgación matemática, o la relación entre las matemáticas y otras ciencias– y evaluar su desarrollo e implicaciones futuras. También ha de ser considerada desde el punto de vista de la investigación, con una lógica, un objetivo y un método de análisis determinados. Es cierto que ambos puntos de vista se confunden y que la investigación se basa absolutamente en el diseño y la puesta en práctica del curso. El curso, sin embargo, podría haberse llevado a cabo sin formar parte de un proyecto de investigación.

A los estudiantes se les proporcionó un material escrito que les permitiera ubicar histórica y socialmente los conceptos y problemas que se trabajaban y se añadieron, para su lectura y comentario, textos que relacionaban las matemáticas que se estudiaban con las ciencias naturales o sociales, y la cultura en general.

Por otra parte, también modificamos algunos aspectos metodológicos de la asignatura. En las clases, además de realizar un trabajo de discusión en pequeño grupo se incluyeron otras sesiones de carácter expositivo con la finalidad de contextualizar históricamente los problemas y de justificar su origen, aportando abiertamente nuestra propia concepción sobre los temas que se trataban.

Teniendo en cuenta el número reducido de sesiones y la importancia que damos a las aportaciones de cada uno de los estudiantes se les pidió que comunicaran sus reflexiones sobre los contenidos y la metodología del curso, diseñándose para ello cinco actividades específicas. Al comenzar decidieron si lo harían a través de narraciones escritas o participando en grupos de discusión que se reunirían fuera del horario habitual de clases. Pretendíamos, de este modo, que cada estudiante tuviese dentro del marco curricular en el que se desarrollaba la experiencia la posibilidad de optar por cualquiera de estas dos posibilidades. Las narraciones, orales o escritas de los estudiantes constituyen el corpus de datos de esta investigación, cuyo objetivo general es analizar cómo han utilizado los estudiantes el contexto de esta asignatura para dar sentido a la actividad matemática.

Ahora que la investigación ha quedado contextualizada en el marco de la formación del profesorado pasemos a introducir cómo ha sido estructurada esta memoria de tesis. La redacción del trabajo ha sido ordenada en tres partes. En la primera se analiza su marco teórico, comenzando por exponer cuál es la lógica de la investigación, sus objetivos y cómo se relaciona con las tendencias actuales en educación y en didáctica de las matemáticas. La segunda abarca la exposición detallada de la metodología y los contenidos del curso que se ha llevado a cabo, y la tercera se ha dedicado al análisis de la experiencia de los estudiantes.

Lógica de la investigación y referencias teóricas

La propuesta teórica ha sido adapatada principalmente a partir de las aportaciones llevadas a cabo en el seno de la psicología social construccionista. Es habitual que las investigaciones didácticas se sitúen en el marco de alguna teoría psicológica del aprendizaje y esto supuso un problema en el comienzo del trabajo, porque hasta donde las estudié ninguna de ellas encajaba con *mi* sentido común. En la búsqueda de otras alternativas aparecieron las tendencias de la psicología social crítica y en particular el socio–construccionismo. La sensación que tuve a partir de las primeras lecturas las podría describir brevemente con la expresión *"¡Claro! Es lo que yo pienso, no puede ser de otra manera"*. De modo que opté por esa vía en la que encontraba legitimado, incluso, mi convencimiento de que las opciones teóricas en este tipo de investigaciones son básicamente ideológicas. Muchas de las tendencias que se derivan de estas aportaciones desde la psicología o las ciencias sociales resultan ajenas a mi formación universitaria y en este sentido se convierte en delicado el hecho de su discusión, pero han sido, sin duda, la fuente que ha permitido estructurar lógicamente la investigación.

Los dos aspectos esenciales que se discuten el **capítulo 1** son la controversia teoría–práctica en las investigaciones didácticas y la función social transformadora de cualquier investigación llevada a cabo. Estos dos aspectos han sido discutidos en un mismo capítulo para amplificar la importancia de su relación: Por una parte, es indiscutible que la realidad se ve afectada por el conocimiento, pero lo cierto es que hasta ahora la investigación en didáctica no ha tenido el suficiente impacto como para producir cambios importantes que se le puedan atribuir directamente. A pesar del crecimiento en el número de investigaciones en educación matemática y del impulso que se les atribuye para mejorar la práctica docente, la realidad es que los cambios son muy escasos en lo que se refiere al modo en el que los estudiantes se relacionan con las matemáticas. El punto esencial que resaltaremos es que la idea de *cambio* en el ámbito educativo no soporta un análisis de las relaciones entre teoría –producción de la investigación didáctica,– y práctica. Pensamos que ninguna teoría sobre la enseñanza puede predecir lo que un profesor o un estudiante harán en circunstancias diversas. No se pueden simplificar las relaciones que estudiantes y profesores establecen con las matemáticas para hacer predicciones fiables sobre su desarrollo futuro. Puede creerse que una teoría sugiera restricciones e incluso sucesos probables, pero su efecto transformador será ínfimo en comparación con el que puede ofrecer la comprensión de la idiosincrasia de cada situación docente.

En el **capítulo 2** se presentan los referentes teóricos relacionados con los contenidos centrales del curso: historia de la matemática, desde una perspectiva amplia del conocimiento científico, y atención específica a problemas históricos relacionados con la medida. Es cierto que el aumento de la matematización y la medición sobre todo a partir de la Edad Media, fue notable en occidente y crucial en la posterior definición de las disciplinas científicas. Pero, ¿cuál es el interés de hacer extensiva esta reflexión a los futuros profesores y profesoras? La historia de las matemática y del pensamiento humano en general ilustra cambios, conflictos, tensiones, pactos y convivencia de opciones epistemológicas. Es el reconocimiento de esta diversidad el que impulsa la atención a la historia de la matemática en este proyecto: queremos creer que el estudio de los problemas matemáticos a través de la historia de la matemática y, recíprocamente, el conocimiento de la historia a través de los problemas, pueden ser un buen punto de partida para que los futuros maestros y maestras reconozcan esa pluralidad de opciones. Los contenidos matemáticos que se eligieron para el planteamiento del curso están todos relacionados con la medida. Esto se debe, en gran parte, a su especial riqueza para comprender la evolución popular de la actividad matemática, ligada a las inquietudes, la forma de vida de hombres y mujeres o las instituciones. Además, desde el punto de vista de los conceptos matemáticos, la medida puede ser trabajada desde la geometría y desde los números y constituye, por tanto, una temática lo suficientemente rica de cara a la formación de futuros maestros.

En el **capítulo 3** nos centramos en dar significado a las investigaciones sobre creencias en torno a la matemática desde la perspectiva construccionista. La investigación llevada a cabo en torno a las creencias ha sido intensa especialmente en la última década, sobre todo en lo que se refiere a la reflexión meta-matemática de los profesores: qué son las matemáticas, para qué sirven y cómo influyen en la práctica docente. Tales cuestiones han sido atendidas en una gran cantidad de estudios cualitativos y cuantitativos que relacionan las creencias de los profesores en torno a la matemática con la práctica escolar. Sobre todo en los últimos años, como corresponde a un cambio de corriente de pensamiento, comienzan a surgir perspectivas críticas hacia estas investigaciones que cuestionan la premisa de que las creencias de los profesores sirvan como principio explicativo para la práctica. En este capítulo justificamos cuál es el interés de conocer cómo surgen, cómo se modifican y negocian las creencias de los estudiantes en contextos particulares.

Marco metodológico

De los aspectos teóricos que se desarrollan en la primera parte de la memoria se desprende que, desde el punto de vista de la acción, el objetivo de la investigación es doble: por un lado pretende producir un conocimiento útil para los estudiantes. Por otro, hacer que ellos mismos sean más poderosos haciendo uso del conocimiento que construyen. Por este motivo, el método utilizado ha intentado fomentar, sobre todo, la participación.

En el **capítulo 4** nos extenderemos en estas y otras consideraciones teóricas que han conducido a la utilización de métodos participativos. Estos métodos han de permitir recoger y exponer con detalle la *voz*, la opinión, el proceso de construcción de las teorías que utilizan los estudiantes para dar sentido a la actividad matemática. Hemos querido acercarnos a los estudiantes de formas diferentes, intentando en lo posible respetar estilos de acción diferentes. Por ello, hemos recogido su participación tanto de forma escrita, con un carácter de exposición básicamente individual, como de forma dialogada a través de grupos de discusión. Las consideraciones teóricas específicas sobre ambos tipos de participación también se exponen en este capítulo.

Tanto las narraciones escritas de los estudiantes como sus diálogos quedan contextualizados en el desarrollo de la asignatura, y por tanto están íntimamente relacionados con los contenidos que se les ofrecieron y la forma en la que se trabajaron. Por ello, hemos considerado necesario exponer también con detalle cuáles fueron los contenidos y las actividades que se plantearon durante el curso.

El contenido del capítulo finaliza atendiendo la cuestión de la validación. Parece natural que de acuerdo con la lógica que seguimos en la investigación, una validación en términos de *veracidad* –este es el significado habitual que se da a la validación– no pueda ser tenida en cuenta. Sin embargo, este hecho no le quita importancia a la reflexión sobre la *fortaleza* de la investigación, que pensamos que ha de desprenderse del nivel de acción que ésta produce en los estudiantes. Discutiremos una posible propuesta de validación coherente con la lógica de la investigación y que surge de las propias narraciones de los estudiantes. Sin embargo, pensamos que puesto que cada acción genera una nueva realidad y nuevas posibilidades para la acción, cualquier intento de validación en este sentido formaría parte de un proceso recursivo.

Análisis de los datos y conclusiones

La tercera parte se refiere al análisis de los datos. Hemos elegido analizar la experiencia de los estudiantes a través de lo que hemos definido como *movimientos*, que son indicios de agitación intelectual en cuanto a la forma en la que los estudiantes se relacionan con la actividad matemática. Por ejemplo, explicitar un interés por la historia de la ciencia que antes no existía, vacilaciones en el proceso de argumentación acerca de la calidad o cualidades de un problema, y en general impresiones que involucran una nueva forma de acercamiento a la actividad matemática, son movimientos que nos interesa analizar. Hemos escogido para analizar cuatro de estos movimientos. Los tres primeros surgieron en las reflexiones individuales de los estudiantes que escribieron a lo largo del curso sobre su experiencia. El cuarto surgió, de manera diferente, en dos de los grupos de discusión.

En el **capítulo 5** se analizan los tres movimientos individuales. En cada caso se describe cuál ha sido el movimiento detectado y cómo ha ido gestándose y desarrollándose en relación con los contenidos del curso. En cada uno de los casos se encontrará una descripción detallada de los contenidos matemáticos trabajados durante el curso que fueron considerados especialmente relevantes por los propios estudiantes involucrados. En particular, se encontrará una discusión detallada del problema de Herón y otros problemas de máximos y mínimos; de algunos problemas de visualización; de ciertos aspectos relacionados con el método de Cavalieri de los indivisibles y de algunos problemas concretos de agrimensura y cuadraturas.

El **capítulo 6** atiende a la descripción y el análisis del último de los movimientos considerados, que apareció en los grupos de discusión. En el conjunto de los movimientos detectados en estos encuentros encontramos uno especialmente relevante que se repetía en dos grupos distintos. Se había gestado de manera diferente y también con diferente nivel de implicación por parte de los participantes. Desde este punto de vista resultaba muy interesante para el análisis. A diferencia del proceso seguido en el análisis de los textos escritos, en esta ocasión se atiende la construcción del movimiento desde una perspectiva *micro*. Aunque aparecen algunas referencias a lo que aconteció durante la totalidad de los encuentros de cada grupo, éstas tienen un carácter más aclaratorio que analítico. Nos interesa atender a la evolución del contexto de interacción en el grupo y explicitar los recursos y los procedimientos que los participantes utilizan en el trancurso de la conversación para dar sentido a su actividad. Esta es la característica que distingue de manera evidente la construcción de sentido en el caso individual –escrito– y en el caso de las discusiones, y por ello hemos considerado oportuno utilizar dos aproximaciones que realcen y saquen el máximo partido de ambas experiencias.

A lo largo de nuestro proceso de análisis en ningún momento hemos tratado de ofrecer una muestra *representativa* en términos estadísticos, sino una representatividad de carácter cualitativo, que recoja diferentes situaciones en las que los estudiantes dan sentido a su experiencia matemática. Nuestra intención no es, ni siquiera, desarrollar ejemplos de casos que evidencien la certeza de determinadas teorías o presentar alternativas didácticas que pretendan mejorar la práctica docente, sino percibir la investigación como el pretexto para conocer mejor la experiencia de los estudiantes. El proceso de conocer y hacer público el conocimiento produce cambios y la realidad investigada ya no es la misma, de modo que surge así la exigencia de conocerla de nuevo.

Concluimos esta tercera parte del trabajo con el **capítulo 7** en el que exponemos las conclusiones de la investigación. Hemos estructurado la exposición de las conclusiones comenzando por un aspecto que encontrábamos generalizado en los estudiantes al comienzo del curso: una visión muy elemental de la actividad matemática que se centraba en su utilidad aritmética. A partir de esta situación, concluimos cómo los movimientos que hemos analizado van ampliando y matizando esta visión y la hacen, en los casos estudiados, más rica y compleja. En algunos de ellos se ofrecen nuevas alternativas para la aplicación; en otros se genera un espacio para la concepción intelectual de la matemática y se caracteriza su sentido en la demostración. Finalmente, exponemos algunas de las perspectivas que abre la investigación y que podrían ser tenidas en cuenta en futuros trabajos.

Parte I

Marco teórico

Capítulo 1

Lógica de la investigación

La mayor parte de los estudios didácticos sobre matemáticas han ido definiendo sus características como investigaciones en los últimos cuarenta años. Para delimitar un espacio desde el cual reivindicar la pertenencia a una comunidad de "investigadores e investigadoras en didáctica de las matemáticas" han surgido voces que reclaman respuestas, y otras que las ofrecen, a preguntas tales como: *¿Cuáles son los objetos de los que se ocupa la educación matemática? ¿Qué le concede su carácter de especificidad frente a una didáctica general? ¿Cuáles son sus fines? ¿Cuáles son los métodos? ¿Por qué es necesaria? ¿Qué elementos validan sus conclusiones? ¿Podemos hablar realmente de una teoría de la educación matemática?*

Todas ellas son preguntas absolutamente necesarias para emprender un trabajo de investigación y generalizables a otras áreas de conocimiento. En el caso particular de la educación matemática podrían conducirnos, por citar sólo algunos ejemplos, a discutir sobre los orígenes mismos de la socialización: al valor de educar; al porqué y para qué educamos; al significado de la palabra *aprender* o a las relaciones entre profesores y estudiantes. Además, deberían conducirnos a reflexionar sobre la naturaleza del conocimiento matemático: qué matemáticas enseñar; cuál es su sentido en la vida de las personas; cómo imbricarlas dentro del complejo entramado educativo o de las teorías del aprendizaje.

Es evidente que si bien esta tesis doctoral podría ser interpretada a partir de diferentes marcos teóricos que responden a las preguntas anteriores, no es razón para incluir aquí disquisiciones sobre todos ellos. En primer lugar porque ello constituye más un proyecto de vida que un proyecto de tesis, y además porque evidentemente harían del trabajo un compendio inabarcable, de modo que en el intento quedarían deslucidas sus posibles aportaciones específicas. Pasaremos por alto muchas discusiones relacionadas con distintos enfoques de la educación, de las teorías del aprendizaje o de aproximaciones didácticas llevadas a cabo específicamente en la didáctica de las matemáticas. Nos restringiremos a discutir aquello que hemos considerado directamente relacionado con la posición teórica adoptada en el trabajo o que permite articular, por comparación o crítica, dicha posición. Sin embargo, estamos convencidos que esta decisión es absolutamente particular; que los mismos hechos podrán interpretarse con marcos teóricos diferentes y que otras herramientas metodológicas podrían haberse utilizado con los mismos fines.

1.1 Problemas y objetivo de la investigación

Los *Handbook* de investigación en educación matemática editados periodicamente en Europa y en Estados Unidos y los estudios monográficos del ICMI constituyen una referencia de consulta obligada en el marco de la disciplina. Estas fuentes reflejan las corrientes dominantes y permiten un primer acercamiento a la cuestión de la investigación. Otra fuente de aproximación, quizás menos valorada académicamente pero no por ello menos acertada, es la experiencia personal de todos los grupos involucrados en las investigaciones. Prestarles la debida atención asegura no sólo que puedan plantearse preguntas relacionadas con las tradiciones de investigación más consolidadas, sino también que se oiga la participación de otras voces alejadas del entorno académico.

Por ejemplo, una gran mayoría de los estudiantes de magisterio manifiestan su frustración hacia las matemáticas cuando comienzan sus estudios universitarios. La situación es evidente para muchos de los que nos hemos dedicado a la formación inicial del profesorado. Muchos explicitan su aversión a las matemáticas y otros afirman disimular su rechazo hacia la materia, conscientes de que al finalizar sus estudios universitarios serán responsables de la educación matemática de muchos niños y niñas. Si estos aspectos están o no *documentados* por investigaciones didácticas, o si existen referencias escritas que los saquen a la luz, lo cierto es que obviarlos puede conducir a un análisis poco adecuado de los problemas que se atienden en una investigación. Un pequeño grado de libertad a la hora de formular estos problemas, aceptando juicios que procedan de la intuición o la experiencia, y no de justificaciones teóricas, puede contribuir notablemente a responder mejor a las necesidades de las personas involucradas.

Desde esta perspectiva de la intuición y la experiencia existen algunos problemas focales a los que atenderemos en este trabajo. Se contextualizan en la formación del profesorado de educación primaria en España, aunque nuevas intuiciones apuntan que se podrían extender también a otros contextos geográficos. Son problemas que también han sido considerados desde la investigación didáctica, pero *ahora* no es el momento de discutirlo. Queremos concederles relevancia exclusivamente desde el punto de vista de la experiencia, porque son los que han motivado el diseño del curso que hemos llevado a cabo y al que ya nos hemos referido en la introducción. Esta pequeña concesión a nuestra intuición o la de otros participantes en la investigación es compatible con la perspectiva teórica que adoptamos en este trabajo y que concede un espacio a la interiorización de las relaciones mundo–objeto que el investigador lleva a cabo a partir de sus impresiones. Creemos que se encontrará suficiente discusión teórica en esta investigación como para no poner en duda que consideramos absolutamente imprescindibles las aportaciones de otros autores. A continuación exponemos cuáles son estos problemas a los que nos estamos refiriendo:

1. El escaso conocimiento de la matemática con el que muchos de los estudiantes finalizan sus estudios universitarios.

2. La escasa reflexión que llevan a cabo sobre el porqué enseñar y aprender matemáticas o sobre la naturaleza misma del conocimiento matemático.

3. La fragmentación de su idea de cultura en términos de asignaturas escolares.

Hemos seleccionado algunos pasajes de las discusiones llevadas a cabo durante el curso para ilustrar a qué nos estamos refiriendo al enumerar estos tres problemas. Pensamos que recoger aquí las palabras de los estudiantes resulta mucho más interesante que extendernos en exponer cuál es nuestra percepción.

> *¿Qué matemáticas necesitas saber?*
> ELI: Sí, vamos a ver. Cuando tú tienes más tiempo, que te dieran las mates más a fondo. Porque a ver, yo tengo 18 años y no he pasado del seno y el coseno. O sea, que a mí no me hables de derivadas, no me hables de integrales... A mí me dejas en las ecuaciones, en los sitemas de reducción y todo eso, y ya está. Porque sé sumar, restar y para de contar. Y a mí las mates no es una cosa que yo dijera "no, hale, no me gustan". No, a mí las ecuaciones me gustaban y las prestaba atención y las pillé en seguida y a mí las mates... Pero te las enseñan de una manera que llega un punto que dices... que vas con prisas, que va, va, va, el temario. Y a lo mejor tú no pillas una cosa y te pierdes todo un tema. Porque las mates es una cosa que es... ir andando, ¿vale? Es como una rueda que va corriendo y si tú llega un punto que te pierdes en el camino pues dices, "madre mía..." Pero yo creo que mi formación de matemáticas es malísima.
> MARIA: Es que tampoco creo que necesites saber nada más. ¿Tú crees que tú en tu vida vas a tener algún problema por no saber lo que no sabes de matemáticas?
> VANESSA: Ah, no...
> MARIA: Por eso digo. Es que yo creo que según qué cosas has estudiado, creo que en la vida... No sólo en matemáticas. También en otras cosas. Yo, lo que me pasa en las matemáticas... Yo nunca entendí para qué debía yo saber integrales. Es que no creía yo que me fuera a servir para nada. O los logaritmos.
> NÚRIA: Pero claro, tú no, pero alguien que está estudiando informática sí.
> MARIA: Exacto. Sí que le servirá. Yo hablo por mí. Alguien que ahora vaya a estudiar la carrera de ciencias exactas dirá, "¡Ah! pues menos mal que me enseñaron esto". Pero yo...
> LOURDES: ¿Qué matemáticas necesitas saber tú?
> MARIA: ¿Yo? ¿En mi vida? Pues eso: sumar, restar, multiplicar y dividir. Y mira, si tengo una calculadora ni eso. [Risas] Es que es verdad. Si tienes una calculadora, ¿qué necesitas saber?

Núria: Pero por ejemplo en los bancos y todo eso utilizan las matemáticas.
Vanessa: Pero tú lo das, aunque...
Xavi: Hoy en día todo está informatizado y eso no son matemáticas, matemáticas. Son economía.
Eli: Es que en un banco tú no vas a utilizar una cosa que no pasa de la suma, la resta y la división, porque... porque todo son fórmulas. Que si tienes que calcular un crédito, un rédito o no sé... lo que son matemáticas mercantiles y todo esto, que yo he dado muy poco, pero algo me acuerdo. Es que eso son matemáticas básicas. Yo creo que las más difíciles las deberían dejar para un nivel... para una persona que quiera estudiar más. A ver, a mí no me parece mal que den una ecuación. Hay que dar algo. Hay que tener un poco de cultura. A ver, si estamos estudiando es porque nosotros queremos y porque nos gusta, bueno, entre comillas. Pero a ver, es que hay muchas cosas que damos que no...
Xavi: Pero para algo tienen que servir si por ejemplo, de cinco bachilleratos, en cuatro la obligan. Tiene que haber algo, pero yo ese algo...
Ana: Pero te tienen que introducir en eso. Porque claro, la gente que no hacemos carreras de estas, pues vale, nos da igual y eso no lo vamos a utilizar en nuestra vida. Pero si no tuviéramos esa base, a ver, hay gente que sí que elige carreras de esas que necesitan fórmulas de esas cosas raras de integral. Aunque yo que sé.
Eli: Claro, pero es lo que me refiero. Que las personas que quieran hacer eso...
Núria: Pero no van a separar las clases. "Los que quieran hacer esto: esto. Y los que no quieran hacer esto..." Entonces las mates se quedarían en nada. A casi nadie...
Xavi: No, porque hay mucha gente que le gusta.
Maria: Pero lo que no pueden hacer... No pueden coger y decir, "esto es muy difícil y lo vamos a poner en la carrera en vez del bachillerato", porque por eso, con todo: una persona que se quiera dedicar a ciencias exactas, ¿qué más le da saber quién era Sócrates y quién era Platón? ¿A mí qué me importa, si yo para mi carrera no lo necesito?

¿A qué se dedica un matemático?

Xavi: Un matemático, o sea, todo el mundo en su profesión tiene algo de matemáticas pero un matemático en sí...
Eli: ¿En qué piensa?
Xavi: Eso es lo que yo siempre me he preguntado. Da clases, ¿o hace algo más? Acabas la carrera. Sí, estoy estudiando matemáticas. ¿Y luego qué harás? Bueno, daré clases. Es como si un matemático estudia para dar clase a otro matemático, para que otro matemático dé clases a otro matemático.
Eli: Y aquellos matemáticos que no dan clase, ¿qué hacen después?
Xavi: Vale que luego pueden aplicar... yo que sé: el que hace los muebles, pues tiene que tomar las medidas, pero...
Ana: Pero se puede aplicar a la ciencia también, ¿no?
Maria: Pero entonces ya es un científico.
Xavi: Entonces ya es un físico ¿no? Esa es mi duda que tengo. No sé vosotros.
Maria: Un matemático es como... Una persona que estudia la carrera de filosofía, ¿qué va a ser? ¿Filósofo? ¿Se va a dedicar a filosofar, a estar en su casa y decir... ? ¿Te van a

pagar por estar en tu casa pensando: "Sí, porque yo creo que la vida..."?
ANA: No, pero se puede dedicar por ejemplo a la bioética y dar...
MARIA: ¿A la qué? [Risas]
ANA: A la bioética. Los médicos. A ver, en estos casos por ejemplo de la eutanasia, pues piden los consejos de... [Risas]
MARIA: No, es que no sabía qué era. A ver, yo lo pregunto, si no sé qué es...
ANA: Pues eso. Que dan... pueden... es que es un poco como si...
MARIA: ¿Cosas como si la eutanasia es algo correcto o incorrecto? Pero tú no puedes vivir de eso. Es como lo que dice él: si un matemático no da clases, qué va a estar, que a lo mejor un día, oye, encuentra la gran fórmula que resuelve el gran problema de las matemáticas. Sí, pero si en toda su vida encuentra una, a lo mejor cuando la encuentra tiene ya ochenta años. ¿Y qué? Hasta los ochenta años, ¿qué? ¿De qué cóme?
ELI: Yo conozco a una chica que está estudiando ciencias exactas, matemáticas, en la Complutense de Madrid y la han llamado para dar clase. O sea, es lo que dice él. Tiene matrícula de honor en todo porque la chica es un cerebrito, pobrecita, qué le vamos a hacer. Pero si después de estudiar una carrera tú eres matemático y te tiras toda tu vida dando matemáticas, ¿para qué has estudiado tanto si luego terminas al fin y al cabo siendo lo mismo que yo, un profesor y dando clase? Es que yo no lo entiendo. Y la voy a llamar. Y se lo voy a preguntar. Mira, ahora ya me ha dado la curiosidad. Mira tú por dónde. Y le voy a preguntar, ¿tú qué estás haciendo? ¿Para qué te sirve lo que haces? Siento mucho si la desanimo pero...
VANESSA: Pero igual es lo que quieren. O sea, quieren estudiar y llevar los conocimientos de las matemáticas. Entonces ellos pues luego comerse... yo qué sé, intentar...
XAVI: No creo. A ver, yo supongo que los matemáticos también trabajarán en campos un poco ayudando a físicos o a químicos en alguna cosa, y supongo que en física y química en la carrera también tendrán mates. Pero física y química, que son carreras también así del palo ciencias, -no sé si son exactas o no son exactas, para mí nunca han sido exactas ninguna porque siempre la he cagado en todas- pero yo qué sé: químico. La química ya sirve para muchas cosas de farmacia, de medicina. La física...
ANA: Pero todo se basa en las matemáticas. Todo eso, la física, la química... todo en realidad estás haciendo fórmulas y sin las matemáticas no podrían existir esas ciencias y no tendríamos la tecnología que tenemos ahora.
MARIA: Ya, pero tú... No está diciendo que no sirvan. Pero tú, por ejemplo, para ir a un laboratorio vas a contratar, creo vaya, van a contratar antes a un físico que a un matemático que haga...
REGINA: ...matemáticas.
MARIA: ...un año de física.
ANA: Evidentemente, pero si...
MARIA: Entonces, como ya hay gente más especializada y más preparada... Si tú necesitas físicos, pues una persona que haga la carrera de físicas, y no que haga la carrera de matemáticas y dé un año de físicas o dos años.
ANA: Pero ese físico si no sabe matemáticas no puede saber tampoco...
ELI: Un físico toca las matemáticas en un campo más superficial, nunca igual que un matemático.

> XAVI: Pero yo digo una cosa: un arquitecto tiene que saber un poco de mates; un físico tiene que saber un poco de mates; un químico tiene que saber un poco de mates. Pero un matemático... sólo sabe matemáticas, ¿no?
> MARIA: ¿De qué puedes trabajar?
> XAVI: Pero no abarca. Sabe mucho sobre una materia, lo que luego, todos saben un poquito. O tendrían que saber un poquito. No lo sé.
> MARIA: Pero que aparte de para profesor, ¿de qué más? ¿para qué sirve?
> ELI: Yo llamaré a mi amiga y le preguntaré.
> MARIA: ¿De qué puedes trabajar si tienes esa carrera, a parte de maestro que es lo mismo que estamos haciendo sólo que para gente más mayor? ¿De qué más puedes trabajar?
> ANA: Pues enseñar la base a futuros...
> XAVI: ...matemáticos...
> ANA: ...científicos, físicos...
> MARIA: Enseñar a gente que no sabe.
> ANA: Bueno, la base para que a quien le gusta tanto esto de las mates luego se dedique.
> MARIA: Yo digo que aparte de para dar clase, ¿para qué sirve?
> ANA: Pues no sé.

Los tres problemas que citábamos con anterioridad a la conversación de los estudiantes en relación con la formación del profesorado –escaso conocimiento de la matemática; poca reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas o su aprendizaje y fragmentación de la idea de cultura– convergen en muchas propuestas de utilización didáctica de la historia de las matemáticas y nos extenderemos en su discusión en el capítulo 2. Pensamos que una de las posibles causas que originan estos problemas es la carencia de referencias que agiten la reflexión sobre el sentido de cualquier actividad matemática. Pensamos también que una perspectiva histórica y cultural es adecuada para promover la reflexión en este sentido y parece razonable, por tanto, proponer a los estudiantes una materia de matemáticas que integre contenidos de historia. Así pues, la investigación que hemos llevado a cabo incluye el diseño y la puesta en práctica de un curso de matemáticas que utiliza la historia, con el propósito de generar un espacio desde el cual puedan *moverse* sus creencias.

Llegado este punto, nuestro problema de investigación podría ser interpretado desde perspectivas muy diversas: desde un marco psicológico tradicional, por ejemplo, se buscaría validar o no la certeza de nuestras afirmaciones, medir las diferencias antes y después del curso, comparar grupos de estudiantes que hubieran seguido el curso con otros que no, o comparar el efecto de experiencias diversas en contextos diferentes. Cualquiera de estas opciones tendría como objetivo caracterizar tipos de situaciones que produjesen un determinado efecto sobre las creencias de los estudiantes. Nuestro **objetivo específico**, sin embargo, es ofrecer a los estudiantes una situación en la que los contenidos matemáticos son presentados desde una perspectiva histórica y analizar, a lo largo del curso, cómo utilizan los estudiantes este espacio. Nos interesa descubrir qué elementos de reflexión desde un punto de vista matemático introducen en su experiencia y cómo **ellos mismos** re–formulan los problemas anteriores en este contexto para dar sentido a su actividad.

Este objetivo específico surge de la expresión positiva de los problemas que anteriormente citábamos, expresado de acuerdo al marco teórico que hemos elegido para la investigación y que es el que discutiremos a continuación.

1.2 Perspectiva socio–construccionista

El socio–construccionismo como una teoría del conocimiento y la actividad social tiene su origen en los debates llevados a cabo desde la psicología social como crítica a las tradiciones psicológicas individuales. Tomás Ibáñez [69] resume con claridad la trayectoria histórica de diferentes teorías en psicología social de las que se ha nutrido la perspectiva socio–construccionista.

La idea central, que se gesta según Ibáñez en el siglo XVIII, es que todas las sociedades han de ser consideradas según una dimensión histórica ineludible. Una aserción de ese tipo abrió vías para caracterizar, *grosso modo*, dos concepciones diferentes de la psicología, una de ellas centrada en el individuo y otra centrada en los grandes colectivos humanos y patrones culturales que regulan la socialización de las personas, sus lenguas, sus creencias culturales, etc. La separación de estas dos tendencias y las sucesivas reformulaciones de las teorías sociales y cognitivas han dado lugar a diversas perspectivas. Todas ellas comparten entre sus primeros supuestos el conceder un valor fundamental a la cultura y al hecho social dentro de la investigación psicológica. Cole [30] resume así cuál fue el producto de los primeros intentos por tomar en consideración la cultura dentro del paradigma dominante de la psicología general:

> Cuando la cultura se convirtió en tema de investigación, fue en la forma de investigación *trans*cultural. La mayor parte de este trabajo se desarrolló en el marco del conductismo metodológico, en el que se concede a la cultura la categoría de variable independiente. Distintas circunstancias culturales proporcionan estímulos diferentes a sus miembros que, en consecuencia, aprenden diversas clases de respuestas. La suma total de esa conducta aprendida en un momento y en un lugar particulares sirve como definición operativa de la cultura. [30], p. 46.

Paralelamente a una psicología social que seguía manteniendo como foco de atención categorías psicológicas individuales, comenzaron a desarrollarse otras teorías que concebían como unidades de análisis la propia interacción social y que eran mejor consideradas como teorías sociológicas que psicológicas. Una genealogía detallada de la aparición y desarrollo de la psicología social puede encontrarse en las obras de Ibáñez [70], y la ya citada de Cole [30].

La psicología social construccionista se nutre de la controversia entre el individuo y lo social, en el diálogo entre la psicología y la sociología. La lógica de la investigación que hemos llevado a cabo está guiada según algunas pautas del construccionismo social, principalmente en lo que se refiere al objetivo de dilucidar cuáles son los procesos que seguimos los individuos para dar sentido a nuestras experiencias. Esta atención a los procesos es central en otras tendencias psicológicas y prácticamente unánime en la actualidad educativa. Pero la característica fundamental que nos inclina a tomar el construccionismo como teoría es que se aleja de la perspectiva individual afirmando que el significado atribuido a la realidad no proviene de la cognición de un individuo, sino de las relaciones entre personas y de los intercambios que se establecen en el seno de nuestra experiencia.

1.2.1 Controversia teoría–práctica

Shoenfeld [114] ofrece una aportación importante y sistemática al debate que desde hace aproximadamente un siglo agita la discusión respecto a la producción de un conocimiento teórico o de un conocimiento práctico. El autor clasifica así los objetivos principales en el conjunto de las investigaciones en educación matemática:

> La investigación en Educación Matemática tiene dos objetivos principales, uno puro y otro aplicado:
>
> - Puro (Ciencia Básica): Comprender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje;
> - Aplicado (Ingeniería): Usar esa comprensión para mejorar la instrucción en matemáticas.
>
> Ambos objetivos están íntimamente relacionados, siendo el primero al menos tan importante como el segundo. La razón es simple: sin una profunda comprensión del pensamiento, la enseñanza y el aprendizaje, no es posible ningún progreso consistente en el "frente aplicado". Una analogía útil es la relación entre la investigación en medicina y la práctica médica. Hay una gran cantidad de investigación médica. Alguna se hace de manera urgente, con aplicaciones potenciales en un futuro inmediato. Otras investigaciones se hacen con el fin de comprender los mecanismos fisiológicos básicos. A largo plazo los dos tipos de trabajo viven en sinergia. Esto es así porque el conocimiento básico es de interés intrínseco y porque establece y refuerza los fundamentos sobre los que se basa el trabajo aplicado. [114], p. 186.

A continuación exponemos nuestra réplica a la propuesta de Shoenfeld en lo que respecta a la consideración de una didáctica "básica" y una didáctica "aplicada."

La caracterización de objetivos propuesta por Shoenfeld y sobre todo la comparación de la didáctica con la medicina son especialmente relevantes para introducir la perspectiva desde la cual se contemplan la teoría y la práctica en esta investigación. La medicina es, ante todo, una *praxis*, de modo que podríamos discutir qué significa, en medicina, hablar de ciencia *básica*. Pero la debilidad de una afirmación que recoge la existencia de un conocimiento *puro* resulta aún mucho más evidente en la didáctica que en la medicina. La explicación de determinados mecanismos fisiológicos o el descubrimiento de la acción catalizadora de una enzima sobre una molécula en un medio determinado podría admitirse en la categoría de ciencia básica que propone Shoenfeld. Pero admitir la producción de un conocimiento teórico que asegure que *tal* actividad permite al estudiante apropiarse de *tal* significado o concepto matemático resulta evidentemente dudoso, aun cuando se añade que ha de ser "en un determinado contexto". Los *contextos* a los que a menudo nos referimos con total libertad en las investigaciones tampoco pueden reproducirse, porque cada persona crea su propia realidad, tiene su propia historia y vive su futuro de manera diferente. Todas las ciencias sociales se desarrollan en este ambiente de incertidumbre y por ello pensamos que es importante dejar de lado la consideración de una educación matemática como ciencia básica. Sin embargo, ello no está reñido con el interés de comprender la naturaleza del pensamiento matemático y su enseñanza o aprendizaje, solo que utilizarlo para caracterizar un tipo de investigación que por exclusión se considera *no aplicada* es una cuestión resbaladiza. Desde cualquier punto de vista, el objetivo último es un objetivo exclusivamente práctico: mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas, al igual que el objetivo último de la medicina es mejorar la calidad de vida de las personas.

Discutiremos esa distinción entre los objetivos puros y los objetivos aplicados desde la perspectiva del socio–construccionismo.

En el modelo tradicional teórico–práctico que se propone en la didáctica, los roles están perfectamente etiquetados: el investigador es el teórico y el profesor es el práctico, de modo que el investigador en didáctica propone al profesor una serie de abstracciones, que pueden haber sido traducidas en *materiales didácticos*, para que éste los utilice en sus clases. A través de este modelo, la investigación pretende aventurar si los estudiantes o los profesores responderán positiva o negativamente a un tipo de programa u otro, además de establecer condiciones bajo las cuales sus teorías son aplicables. El profesorado lleva años quejándose de que la teoría no le sirve en el aula y cuestionando si la investigación didáctica sirve como instrumento de predicción o de control sobre la complejidad de la actividad escolar.

Un punto de partida razonable para suavizar el desencuentro entre ambas perspectivas es afirmar que, si bien las investigaciones seguirán elaborando perspectivas teóricas para comprender el pensamiento, el aprendizaje y la enseñanza, un objetivo deseable es que el profesor se reconozca a sí mismo *activando* a partir de la teoría las formas de conocimiento que ya posee, y no aplicándola. Y para ello el investigador ha de estar dispuesto a aceptar que sólo de esta manera pueden salvarse las ambigüedades de su teoría. Las propuestas metodológicas de la investigación cualitativa que tuvieron su auge en los años 80 sacaron a la luz esta controversia especialmente significativa en las investigaciones educativas [84]. El propósito que subyace tras este planteamiento es atender a la **transformación** que produce el hecho de investigar, pero no en un sentido de aplicación, sino de re–construcción de la realidad inmediata de quienes participan de esa investigación. La perspectiva construccionista desde la que nos situamos al realizar esta investigación enfatiza la transformación social a partir del conocimiento y la vida cotidiana. Ibáñez afirma:

> Des d'aquesta perspectiva que va adquirint una influència creixent en la psicologia social, queda clar que, canviant els costums, els éssers humans tenen la possibilitat de canviar la societat que en resulta i canviar-se ells mateixos. [69] p. 42.

Galindo sintetiza así el interés de las investigaciones que observan las relaciones que se dan en el entorno cotidiano:

> La forma de acercarse a la composición social desde lo micro hacia lo macro es la vida cotidiana. La vida cotidiana es el horno donde se cocina la vida social, en ella se dan las grandes transformaciones, en ella se confirma y continúa el orden social establecido. Sólo puede entenderse la vida social y su devenir si se comprende la vida cotidiana y su composición. [50], p. 228.

La búsqueda de generalidad no pierde importancia en este enfoque. Lo que se enfatiza es que las relaciones locales impulsan grandes cambios y que, por lo tanto, los grandes movimientos sociales hay que buscarlos en las experiencias particulares. En este contexto, la incidencia global de esta investigación para construir una imagen de la matemática alternativa a otras que imperan en nuestra sociedad, **no** puede ser evaluada de manera práctica debido a su carácter local. Su justificación se desprende del marco teórico utilizado. Desde un enfoque construccionista, no existe una distinción esencial entre teoría y práctica. El trabajo teórico, afirma Kenneth Gergen [55] constituye una forma de praxis y la aplicabilidad, o la utilidad de los conocimientos teóricos, es un valor personal y por lo tanto normativo.

> No longer is it necessary for the scientist to entertain the dim hope that one day a particular finding, a measure, or function form will be employed by some unknown person for purposes of public good. Rather, through the conduct of science itself one can hope to achieve directly the benefits of value–sustaining effort. No longer is it necessary to answer existential challenges of life's purpose with murmurs of contribution to an ultimate truth. Rather, the settlement can be accomplished in the immediate, concrete renderings of understanding. To communicate one's understanding is to make a small investment in the creation of the future. [55], p. 106.

1.2.2 Componente transformadora de la investigación

Supongamos que aceptamos momentáneamente la categoría de investigaciones *puras* a las que nos referíamos en el apartado anterior, que aportan teorías sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Analizaremos un ejemplo actual directamente relacionado con el contenido de esta investigación: Andrews y Hatch [7], en una investigación que compara las concepciones en torno a las matemáticas y su enseñanza de profesores ingleses y húngaros, concluyen que muchas de las diferencias y similitudes que encuentran en su estudio pueden ser explicadas a partir de los presupuestos filosóficos que subyacen tras sus respectivas instituciones educativas. Los autores sostienen que la herencia cultural inglesa, basada en un sistema de dualidades tales como *instituciones democráticas y no democráticas*; o *tradiciones racionalistas y no racionalistas*, ha jugado un importante papel en contra del desarrollo de una concepción pedagógica uniforme y coherente. En Hungría, argumentan los autores, es más evidente una tradición filosófica que privilegia aquellas áreas de conocimiento que impulsan el cambio social a través del razonamiento.

Estas consideraciones permiten a los autores interpretar adecuadamente por qué las concepciones de los profesores húngaros en torno a las matemáticas y su enseñanza son muy consistentes respecto a un marco pedagógico global, escasamente referidas a la utilidad de las matemáticas, pero significativamente comprometidas con su dimensión educativa. Por otra parte, las concepciones de los profesores ingleses operan en un marco inconsistente desde el punto de vista pedagógico en el que entran en conflicto muchos aspectos ideológicos.

Bajo tales argumentos, los autores concluyen con un juicio de valor que da cuenta de una posible relación entre las diferencias de rendimiento de los estudiantes en ambos países y las concepciones del profesorado:

> This study has indicated the existence of both similarities and differences in the way in which mathematics and its teaching are conceptualised in two different countries. It leads us to conclude that the differences, rather than the similarities, are more likely to account for differences in pupil attainment. Therefore we infer that some of the conceptions of mathematics and its teaching held by English teachers may be unproductive in respect of their contribution to children's mathematical attainment. [7], p. 59.

Imaginemos que un hipotético grupo de profesores ingleses haya accedido al conocimiento que han producido los autores en la mencionada investigación. El solo acceso a esta información genera en estos profesores una posibilidad de acción para invalidar o posicionarse institucionalmente ante dicho conocimiento. Por ejemplo, pueden optar por amplificar o suavizar una perspectiva pedagógica en su discurso en torno a la matemática y en su actividad profesional **con la intención** de apoyar o refutar el conocimiento al que han accedido. Es evidente que la relación que dicho grupo de profesores han establecido con el conocimiento producido por la investigación genera en ellos un potencial de acción que afecta a su práctica docente.

El psicólogo Kenneth Gergen [55] ha desarrollado cuáles son las implicaciones de esta característica de los saberes sociales elaborados en una investigación y que involucra al investigador no sólo en lo que a las aplicaciones se refiere, sino en el conocimiento que su propio conocimiento genera. Se refiere a ella como *enlightenment effect*[1].

> One may usefully understand alterations in conducte in terms of the human capacity for symbolic activity. As symbols or conceptual systems are altered, so may related patterns of conducte be modified. At the same time, we see that the chief products of the sciences themselves are symbol systems. Thus the institution of science furnishes to the culture inputs into the existing arrangements of understanding. Science may establish, transform, or sustain common symbol systems of the culture and the resulting patterns of activity. We may refer to the effects of scientific constructions on common modes of thinking and actig as *enlightenment effects*.
> [55], p. 22.

Desde una perspectiva construccionista el acento está puesto precisamente en el potencial de transformación social que genera la investigación misma. Es cierto que esta percepción de la actividad investigadora como un generador de acciones y reacciones sociales puede producir escaso conocimiento teórico, precisamente por la evidente complejidad que la caracteriza, pero también es cierto que tiene importantísimas implicaciones en la práctica.

Consideraciones similares acerca del efecto natural de transformación que posee la actividad investigadora pueden extenderse también a una reflexión sobre la metodología de las investigaciones. En su papel como sujetos investigados, los profesores o los estudiantes relatan su experiencia en entrevistas más o menos estructuradas, contestan a cuestionarios o elaboran diarios. Inevitablemente, esta parte de la investigación repercute de manera directa sobre los fenómenos que estudia.

La lógica de la investigación construccionista enfatiza su potencial transformador de la realidad de los profesores y las consecuencias que puedan derivarse de dichas transformaciones, y no tanto sus aplicaciones posteriores. Al hacerlo, esta perspectiva teórica no se posiciona respecto a si otra tendencia es mejor o peor.

1.3 Perspectivas sociales en la educación matemática

El conocimiento matemático está modelado con valores sociales. Esta es la tesis que comparten todas las perspectivas teóricas etiquetadas como *socio–culturales*. La componente social en la educación matemática se ha teorizado, implícita y explícitamente, desde diferentes perspectivas. El constructivismo social [29]; la etnomatemática [10, 13], o las perspectivas discursivas [86], culturales [16, 106] y hermenéuticas [21], han ido abriéndose camino en la didáctica de

[1]El término *enlightenment effect* admite una difícil traducción al castellano. Algunos autores [69] han optado por utilizar el término **ilustración**, pero no deja de resultar ambiguo. Ciertamente su traducción literal como *iluminación* adquiere una connotación esotérica difícil de amortiguar, de modo que hemos optado por mantener el término en inglés. Confiamos que la comprensión de su significado sea clara a la luz de la discusión y el ejemplo propuesto en esta sección.

las matemáticas en la última década, especialmente ante la demanda de interpretar diferentes situaciones educativas que involucran la cultura o relaciones de poder.

En matemáticas, el movimiento hacia perspectivas sociales y culturales refleja el intento de examinar los procesos que tienen lugar en una clase tanto desde un punto de vista psicológico como sociológico, y las relaciones sociales que se dan entre los individuos.

Es evidente que la educación matemática viene elaborando su propio discurso para atender la especificidad de los contenidos o niveles educativos con los que se trabaja, pero hablar de una *epistemología de la educación matemática* no resulta claro. Sierpinska y Lerman aluden a esta duda en un interesante capítulo del *International Handbook of Mathematics Education*:

> Our assignment was to write a chapter titled 'Epistemologies of mathematics and of mathematics education'. The second 'of' was quite puzzling and we spent some time thinking about what kind of work we would have to do in order to take the second part of the title seriously. Should we study the origins of the validity of our beliefs about the teaching and learning of mathematics? Should we study the psychological and historical genesis of these beliefs? Should we discuss the methods of justification of statements about the teaching and learning of mathematics? [115], p. 866.

La didáctica del álgebra, la geometría o la estadística comienzan a ser consideradas como categorías didácticas que van atomizando la investigación en educación matemática. La especificidad es cada vez mayor. Algunos registros como *contexto*, *matemáticas y realidad* o *creencias* han dado lugar en ocasiones a extensos debates que han pretendido matizar el significado de cada término hasta llegar a convertirlos en resbaladizos y de difícil uso, sobre todo cuando pretenden ser utilizados únicamente en su sentido más primario. Pero la especialización y la proliferación de investigaciones es, a la vez, la expresión de que el conocimiento avanza. Las caracterizaciones ofrecidas por el discurso de cualquier investigación ilustran la expansión de nuevos significados. El desorden aumenta a medida que aumenta el conocimiento y la dificultad radica en encontrar espacios para equilibrar este desorden necesario sin caer en simplificaciones carentes de significado. En lo que respecta a la perspectiva educativa, este alto nivel de entropía se manifiesta también en la didáctica de las matemáticas, y tanto las múltiples tendencias teóricas que se perfilan como las diversas interpretaciones de una comunidad crecen de manera considerable.

La influencia que las perspectivas psicológicas, sociológicas o filosóficas tienen en la educación matemática han trasladado a nuestro entorno didáctico debates muy similares a los que ya iniciaron en esas ciencias hace mucho tiempo. La compilación de Steffe y Gale [119] en torno a las perspectivas constructivistas en la educación es un ejemplo de ello. Reflexiones en torno a dicotomías del tipo individuo–sociedad o teoría–praxis han producido un vasto conocimiento en otros contextos diferentes a la educación matemática. Dicho conocimiento es considerado en nuestra comunidad para re–crear otro más adaptado a las normas, las necesidades, el estado de desarrollo o el conocimiento compartido en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El debate individuo–sociedad sirvió como detonante para el desarrollo de una psicología social y cultural en la cual los matices diferenciales también se han disparado de forma vertiginosa y manifestado a través del lenguaje. El contraste entre posiciones individuales y socio–culturales, por ejemplo, ha sido debatido y enriquecido en discusiones elaboradas en forma de artículos teóricos de los que son un ejemplo las aportaciones de Lerman, Steffe y Thompson a lo largo de las últimas décadas [85, 121, 88].

La tradición de las investigaciones en educación matemática ha estado cercana a las tradiciones psicológicas constructivistas. Sin embargo, no permanece ajena a los debates sobre la necesidad de considerar el papel de la sociedad y de la cultura en el aprendizaje de las matemáticas [115].

Las referencias anteriores ofrecen una panorámica detallada de las diferentes tendencias sociales en el área de la educación matemática. A continuación nos detendremos en analizar cómo y dónde situar la posición teórica por la que hemos optado en esta tesis doctoral.

El construccionismo cuenta con escasos antecedentes en la educación matemática, si bien ha sido tenido en cuenta por algunos autores desde comienzos de los años 90 [133]. En la compilación de Steffe que citábamos anteriormente [119], Gergen [57] critica que el conocimiento sea considerado como una categoría mental y afirma que la mente y el mundo no son independientes. Presenta el construccionismo social como una ruptura con ese dualismo mente–mundo y pone el acento en el lenguaje, en la interacción social y en las relaciones. Estos planteamientos, sin embargo, tuvieron entonces poca aceptación en la comunidad matemática, principalmente por su posición crítica y radical respecto de la separación teoría–práctica y porque no era considerada una teoría específicamente diseñada para la educación.

Una de las tradiciones sociológicas que más impacto ha tenido para las investigaciones en educación matemática que han adoptado una perspectiva social es el interaccionismo simbólico. Esta teoría, junto a otras relacionadas con la etnometodología o la adquisición del lenguaje se han fundido en un tipo de enfoque que podríamos considerar *interaccionista* y que encontramos en los trabajos de Cobb [29, 134]. Esta perspectiva es la que más se acerca a la que tomamos en esta investigación, de hecho, en algunos contextos de educación matemática se ha considerado el término *construccionismo* como una manera diferente de referirse al interaccionismo simbólico:

> Epistemological ideas close to interactionism sometimes appear under a different name like, for example, the social constructionism proposed by Gergen. [115], p. 850.

Efectivamente el interaccionismo simbólico ha nutrido en gran medida al construccionismo, pero lo interesante de la propuesta psicológica construccionista, como de la psicología cultural de Cole [30], es que nació de la separación entre *dos* psicologías sociales. Estas teorías recogen, por tanto, el esfuerzo de una comunidad de psicólogos por encontrar elementos de diálogo entre una *psicología social psicológica*, que adopta las definiciones de tradiciones psicológicas cognitivas para analizar el impacto que tienen los factores sociales sobre la actividad intelectual, y una *psicología social de tradición sociológica*, en la que el interaccionismo simbólico era una corriente estable y dominante. Esta necesidad de diálogo entre perspectivas psicológicas y sociológicas que se generó en los años 70 también se ha puesto de manifiesto en multiples ocasiones dentro de la comunidad matemática [115, 119] y resulta ser un debate aún mucho más primitivo que en el contexto de la psicología social. El interaccionismo simbólico es una tradición sociológica y al adaptarlo a la psicología en forma de otras teorías se consigue una nueva forma de entender la disciplina, de la misma manera que la adaptación a la educación matemática de teorías gestadas en otras áreas nos ayuda a definir en nuestro propio terreno qué es la didáctica de las matemáticas. Si no fuera por estos esfuerzos de unión, la psicología y la sociología continuarían siendo tradiciones separadas, con teorías y metodologías de investigación igualmente separadas.

Como el interaccionismo simbólico, la etnometodología ha tenido también una fuerte influencia en la psicología social actual, y una fuerte expresión en la educación y la didáctica de la matemática a través de la etnomatemática [10, 13]. En los planteamientos construccionistas queda también reflejada una de las características más interesantes de la etnometodología, y es el hecho de negar que los individuos interioricemos a través de la socialización ciertas normas, valores o imposiciones culturales sin que nos percatemos de ello [70]. Esta percepción del individuo como sujeto que se *deja llevar por la corriente cultural* no es coherente con una visión de las personas como agentes sociales, capaces de dar sentido a su experiencia. Por ello la perspectiva etnometodológica propone estudiar de qué manera los individuos elaboran significados, más allá de cualquier categoría teórica previamente establecida [67].

En general, el construccionismo enfatiza aún más el papel del lenguaje en la elaboración del conocimiento que el interaccionismo simbólico o la etnometodología, pero sobre todo, en el contexto de esta investigación, hemos encontrado en la propuesta construccionista dos características especialmente relevantes que nos han impulsado a tomarlo como referencia teórica.

En primer lugar su insistencia en que en el transcurso de la experiencia se modifica necesariamente la realidad (*enlightenment effect*): cuando el profesor de matemáticas lleva a cabo una actividad de aula con sus estudiantes produce un conocimiento que modifica la actividad matemática que llevan a cabo. Cambiando actuaciones, por tanto, existe la posibilidad de cambiar uno mismo y un objetivo de las investigaciones, en consecuencia, es analizar la transformación que la propia investigación produce en el investigador, los participantes o los lectores de la investigación.

En segundo lugar, es especialmente significativo su planteamiento mucho más ecléctico que el de otras corrientes quizás más sólidas. El relativismo construccionista en lo que se refiere a las teorías sociales ha permitido aunar muchos de los planteamientos que critican los supuestos positivistas o post–positivistas, y esta unión se ha conseguido precisamente por considerarlos a todos como fuentes de inspiración. Una consecuencia inmediata de este esfuerzo de unión es que el significado individual que implicitamente se atribuye a las investigaciones psicológicas se modifica. Una investigación psicológica *puede* ser una investigación social sin necesidad de recurrir a la sociología. Kenneth Gergen alude así a este hecho:

> Al depender de las consideraciones pragmáticas, éstos son unos tiempos en los que la pureza del género puede sacrificarse útilmente a fines alternativos, y pudiéndose considerar así deseable una combinación continuada de los significantes. Esto es como decir también que cualquier intento, como el mío propio, de establecer una forma coherente de dar cuenta del construccionismo ha de considerarse como algo que tiene una situación –y está, por consiguiente, abierto a la impugnación, a la subversión y la transformación–. [56], p. 95.

Y más adelante, en tono provocador afirma:

> En efecto, la cultura podría ser bien servida si la comunidad especializada pudiera superar su ya larga histeria sobre el relativismo y empezar a explorar sus posibilidades positivas. [56], p. 125.

La influencia de este tipo de tradiciones psicológicas en la educación matemática es absolutamente actual. La tradión de la psicología cultural y la psicología discursiva en la educación matemática ha sido expuesta recientemente por Lerman [86] con el objetivo de recoger de qué modo se expresa la actividad matemática a través de la experiencia de los profesores, cómo se establecen relaciones entre ellos o cuáles son los objetivos y motivos de los estudiantes cuando llevan a cabo una determinada actividad matemática. El autor presenta una adaptación de las diferentes tendencias sociales en psicología a la educación matemática que sirven para analizar cómo las fuerzas sociales afectan al desarrollo de las distintas formas de pensamiento en matemáticas. La propuesta descansa, por tanto, sobre las mismas consideraciones que la sociología o la psicología social: relacionar las acciones de los individuos o los grupos en una clase y la historia o la cultura a partir del análisis de las relaciones entre los individuos.

> Thus, as researches, searching for evidence of, or ways to bring about, mathematical 'understanding' as a decontextualised mental process might be abandoned. Instead, the focus for researches would be on the developing identities of students as speakers and actors of mathematics in school classrooms, the student–in–mathematics–classroom–in–student. The elements of identity include: the ways in which the mathematical activity has been framed by the teacher, the texts, and the students' previous experiences; the ways in which the social relationships have been framed; the positions produced in the classroom; and the histories and functions of the mathematical artefacts. [86], p. 98.

Como el mismo autor indica, las aproximaciones culturales y discursivas de la psicología constituyen un marco que puede ser tomado en cuenta cuando consideramos las investigaciones en educación matemática, pero la especificidad de cada una de esas herramientas debe ser establecida en cada investigación particular. Esta será una de las aportaciones de la investigación que hemos llevado a cabo: trataremos de adaptar el marco construccionista a los dos aspectos centrales que se tienen en cuenta en el trabajo, que son la historia y las creencias en la educación matemática. Ese será el objetivo de los próximos dos capítulos.

Capítulo 2

Historia y medida

En el año 2000 se publicó el estudio del ICMI (International Commision on Mathematical Instruction) dedicado a la utilización de la historia en la educación matemática [46]. Se trata de la fuente bibliográfica con carácter monográfico más reciente en este sentido, que reúne un esfuerzo colectivo de matemáticos y educadores por hacer públicas sus reflexiones y proyectos educativos. El estudio ofrece, además, una amplia selección anotada de referencias de artículos de investigación, experiencias didácticas y recursos electrónicos en torno a la utilización de la historia en la educación matemática. Las dos razones fundamentales que se desprenden del conjunto de las aportaciones publicadas en este trabajo en favor del uso de la historia son: a) que la historia proporciona una oportunidad para profundizar en una determinada imagen de las matemáticas y b) que nos permite alcanzar una mejor comprensión de los propios conceptos matemáticos. Aunque ambas nos parecen importantes, en esta investigación analizaremos y matizaremos la primera de ellas.

> The historical dimension encourages us to think of mathematics as a continuous process of reflection and improvement over time, rather than as a defined structure composed of irrefutable and unchangeable truths. [12], p. 64.

Este es un punto de partida fundamental en la concepción de esta investigación, pues determina en gran medida el tipo de actividad matemática que hemos llevado a cabo con los futuros maestros. Sin embargo, el aspecto esencial de nuestra discusión será poner en tela de juicio su generalización. La dimensión histórica **nos** estimula para pensar las matemáticas de una determinada manera. Sí, pero, ¿a quienes? ¿en qué condiciones?

La mayoría de los artículos que hacen públicas investigaciones en torno el uso de la historia apuntan aspectos que *evidencian* su efectividad para que los profesores cambien su perspectiva sobre el modo en el que razonan los estudiantes. Desde nuestra posición teórica, esta sensación de evidencia es una ilusión (utopía) que también nosotros compartimos[1], pero que no se puede generalizar. No entraremos en discusiones históricas sobre la dualidad realismo–utopía en las teorías sociales, pero sí resulta especialmente importante examinar y exponer nuestra propia concepción en este sentido. Nos referiremos brevemente a algunos apuntes de Edward Hallet Carr, uno de los grandes historiadores contemporáneos, en los que afirma que la utopía y la realidad son facetas esenciales de la vida política. Haremos nuestra esta concepción considerando igualmente esenciales ambas facetas para impulsar una alfabetización científica:

> La función de la utopía es la de concretar los ensueños... la utopía reconciliará los intereses individuales con los universales. Verdadera utopía distinguida del optimismo vano (inmotivado). [26], p. 41.

2.1 Historia y didáctica de la matemática

Durante muchos años y en todos los países, el interés por acercar la historia a la clase de matemáticas ha quedado reflejado en las experiencias innovadoras de profesores y profesoras. La década de los años ochenta fue especialmente fructífera en este sentido. Hasta entonces, pocas voces habían encontrado un espacio público desde el cual reivindicar la importancia de la historia en la educación y mostrar su entusiasmo e interés por innovar, por conocer más acerca de la historia de la matemática o de su utilización didáctica.

Fauvel [45] recogía en 1991 una lista de quince *buenas razones* para utilizar la historia en la enseñanza de las matemáticas entre las que ya apuntaba "cambiar la percepción de las matemáticas que tienen los estudiantes". A partir de aquí, se demandó a las investigaciones respuestas que hicieran referencia a *cómo* incorporar la historia en la actividad escolar: cómo hacer para que conduzca a la asimilación de algunos contenidos; cómo hacer para que permita cambiar la percepción que los estudiantes tienen sobre la matemática. Desde entonces, se han llevado a cabo numerosas investigaciones y creado una considerable cantidad de materiales dirigidos tanto a los estudiantes como a los profesores en formación. Tzanakis y Arcavi [126] llevan a cabo una revisión de trabajos realizados en relación con el porqué y cómo utilizar la historia en la educación matemática, así como un análisis de diferentes ideas y estrategias didácticas.

Según la mencionada aportación de Fauvel, hace algo más de diez años, lo que se demandaba de la historia era *remediar* el efecto de una educación que transmitía una concepción de la actividad matemática como un conjunto de reglas aplicables mecánicamente, un producto acabado y alejado de consideraciones sociales y culturales. Sin embargo, es evidente que

[1] El hecho de que también nosotros compartamos esa utopía hace que hayamos llevado a cabo precisamente esta investigación y que sigamos defendiendo el uso de la historia para la alfabetización matemática de las personas. Pero hemos de aceptar que se trata sólo de un intento por acercar nuestros intereses a los de los estudiantes.

si desde un principio no se impone tal concepción, formular el objetivo de utilización de la historia en términos de cambio pierde su sentido. Es por ello que entre las razones que se esgrimen actualmente para utilizar la historia en relación a las creencias se percibe un cambio de formulación: ya no se pone tanto énfasis en el cambio, sino en la *construcción* de una determinada imagen de la matemática, ligada a un contexto histórico y humano determinado.

En lo que a la práctica escolar se refiere, la atención a la historia está tomando un enfoque muy instrumental. El proyecto de la universidad de Groninger, en Holanda, es un ejemplo reciente en este sentido. Su objetivo es convertir las conclusiones de los estudios de geometría llevados a cabo desde una perspectiva histórica en materiales apropiados y *efectivos* para que el profesorado los utilice en el aula [61]. A pesar de ser este el objetivo general del proyecto, los autores no descuidan la reflexión del *porqué* utilizar la historia, reformulando en términos actuales algunas viejas preguntas que relacionan la discusión teórica con la práctica docente:

> [...] a gap exists between historians, writing 'general' articles, and teachers, writing 'practical' articles. Most of the essays lack a legitimation of the ideas and suggestions. For example, the following questions have hardly been answered: What makes one think that the use of history deepens the mathematical understanding? It is really motivating to stress the human aspect of mathematics or is it the enthusiastic teacher who motivates his class? Has any research been done to confirm these previous thoughts? Is there any psychological theory to confirm it? And how do people justify their choice of resources? If we could answer these questions it would probably be easier to generalise the various different ideas. With such a generalisation we could probably develop a sort of 'checklist' to be consulted if we decide to teach with the history of mathematics as a didactic tool. [61], p. 242.

Aunque ya nos extendimos en discutir las consecuencias de esta separación "teoría–práctica" en el capítulo anterior, discutiremos aquí su concrección en el uso de la historia para la educación matemática. Se continua buscando una legitimación para las actividades que se llevan a cabo en las aulas –la práctica– en la investigación teórica de caracter psicológico –entendiendo una concepción tradicional de la psicología–. La cuestión es que eso no será posible encontrarlo porque esta cualidad que se demanda a las investigaciones de carácter psicológico, para decirnos qué funciona y qué no, es una engañifa. Crear la necesidad de justificar sobre esos términos teóricos las aplicaciones 'prácticas' limita enormemente la capacidad de acción, y el uso de la historia se pone al servicio de una investigación educativa entendida en términos deterministas. Es evidente que no cualquier práctica producirá los resultados que el investigador o el profesor considere óptimos, pero la cuestión es que tampoco tiene por qué ser este el objetivo de la investigación. Sobre todo teniendo en cuenta el fracaso que esta perspectiva está demostrando en las investigaciones de caracter social. Las personas cambiamos nuestra percepción teórica a lo largo de nuestra experiencia, las teorías psicológicas también cambian y lo que funciona para unos grupos y para un profesor no funciona para otros. Por otra parte, las "listas de chequeo" generadas de manera teórica pueden tranquilizar nuestra conciencia pero no nos permitirán determinar si una actividad conduce o no a los resultados esperados. Si esperamos a encontrar en las investigaciones la confirmación de que la historia permitirá a los estudiantes profundizar en su conocimiento de la matemática no la llegaríamos a utilizar nunca. En consecuencia, los investigadores perderíamos la oportunidad de comprender cuál es el sentido que los estudiantes dan a la utilización de una perspectiva histórica.

No pretendemos con esta discusión deslegitimizar la elaboración de materiales didácticos destinados a utilizar la historia. Sería poco coherente porque nosotros mismos adoptamos esta postura. Lo que se critica aquí es la concepción de la investigación educativa sobre la que estas propuestas se sustentan. Si analizamos qué imagen de la relación profesor–investigador transmiten este tipo de propuestas, encontramos que el teórico de la didáctica es el único capaz de discernir lo que es una buena propuesta de lo que no –sobre una teoría psicológica supuestamente objetiva–, y por tanto es quien ha de dirigir la acción del profesorado. Además, en ocasiones se formula el hecho de que el profesor pueda no ser un profesional de la historia en términos de *problema*:

> The first objection is that most teachers **do not have historical expertise** [...] Secondly, teachers do **not have access to the right materials**. The third objection for teachers is related to the former two: **'lack of time'**. [61] p. 231. [La negrita es nuestra].

Ante estos planteamientos lo más probable es que ningún profesor se atreva a utilizar la historia o que quien lo haga sea juzgado de intrépido. Plantear un proyecto de investigación desde una perspectiva menos dramática podría hacer más accesibles muchos de los objetivos que persiguen las investigaciones –evidentemente no su conclusión en términos deterministas–. Ésto podría conducir a cambios mucho más profundos en la práctica docente, quizás menos *teóricos*, pero que aprovechasen mucho más la capacidad de acción e intuición del profesorado y de los estudiantes. Se critica a menudo que en la mayoría de las experiencias llevadas a cabo no se utilizan argumentos didácticos o metodológicos que den soporte a las ideas y que las estrategias didácticas se basan en preferencias personales. Pensamos que lo que ocurre es que no puede ser de otra manera porque los mismos argumentos didácticos o metodológicos son preferencias personales.

2.1.1 Enseñar matemáticas a través de la historia vs. enseñar historia de la matemática

La necesidad de síntesis en torno a experiencias didácticas relacionadas con el uso de la historia de la matemática ha conducido a distinguir entre: a) su utilización para enseñar matemáticas; b) su consideración como contenido en sí mismo; y c) su utilización como elemento que contextualiza estudios culturales sobre la matemática, tales como su imagen pública o rol social

[12, 45]. Pero lo cierto es que la concepción de la historia y de la historia de la matemática cambian a lo largo del tiempo de la misma manera que cambia la concepción sobre la matemática y sin embargo, existe poca discusión en este sentido en los trabajos de educación matemática que integran una perspectiva histórica. Aún más, existe una demarcación explícita que invita a no considerar esta posibilidad:

> At least two types of danger can arise when using history explicitly. First, using piece–meal historical illustrations can give a false and truncated view of what mathematics, and indeed history, was really like historically. Alternatively, in triying to present a global historical view, we could be in danger of ending up with an education in mathematics history quite independent of the needs of mathematics education. At worst, one could fear that mathematics might one day be replaced by a teaching of its history. [12] p. 65.

Es cierto que todos estos aspectos (historia, historia de la matemática, matemática sin consideración de la historia, enseñanza de la historia, etc.) pueden considerarse separadamente. Pero también es cierto que cualquier intento por separarlos conduce a contradicciones, sobre todo en el contexto de la educación obligatoria, donde el objetivo fundamental es logar una alfabetización científica integral. No es posible caracterizar realmente qué diferencia enseñar matemáticas de enseñar historia de las matemáticas, cuando defendemos que la matemática es una creación histórica. En el aprendizaje de la historia se aprenden matemáticas, de la misma manera que en el aprendizaje de la matemática que proponen tales enfoques se aprende historia. Al mantener una distinción de este tipo seguimos anclados en una perspectiva discreta del conocimiento que nuestra propia historia necesita revisar. No podemos concebir como un peligro que la historia de la matemática reemplace a la matemática misma porque son inseparables, y que así sea es una gran posibilidad para promover un ambiente social favorable para el desarrollo de un conocimiento matemático cívico[2]. Plantear en términos de dicotomía la enseñanza de la matemática vs. la enseñanza de su historia recuerda lo que algunos historiadores han nombrado como *the fallacy of the missing middle* ([18], p. 324).

[2]García Barreno estructura el conocimiento científico en *práctico, cultural y cívico*: "El conocimiento científico práctico define el acceso a técnicas y el aprendizaje de métodos que ayudan a resolver problemas prácticos inmediatos relacionados con la superivencia y la salud. Por su parte, el conocimiento cultural es, hoy, el representante genuino de la alfabetización científica. Cuando un estudiante de historia lee algo sobre ADN en *Scientific American*, cuando un abogado contempla en televisión un programa sobre la Vía Láctea, o cuando los alumnos de un instituto de secundaria o un grupo de jubilados visitan el Museo de la Ciencia, están, todos, mejorando su conocimiento científico al nivel cultural. Cada uno de ellos lo hace con el mismo espíritu que cuando un estudiante de física se interesa por la historia antigua, un ingeniero lee poesía, un médico se deleita con las tragedias griegas o un mecánico disfruta en el Museo del Prado. El conocimiento científico cultural está motivado por el deseo de conocer algo acerca de la ciencia en cuanto logro de la humanidad. Es una aventura "cultural" que no soluciona problemas "prácticos," pero que pretende promover un ambiente social favorable para la implantación del conocimiento científico cívico. [...] El conocimiento científico cívico busca la capacitación de los ciudadanos para que sean más conscientes de la incidencia de la ciencia y de la técnica en los aspectos más comunes de la vida diaria." [51], p. 19.

Falacia porque sugiere una dicotomía entre dos términos que no son ni mutuamente excluyentes ni exhaustivos en los temas que abarcan. El conocimiento matemático no se va a perder porque se aprenda su historia, ni siquiera si los profesores se empeñasen mucho en ello. Lo importante es que ni nosotros, ni los futuros profesores perdamos de vista la finalidad por la cual se enseñan matemáticas en la educación obligatoria.

Las investigaciones llevadas a cabo en historia de la matemática a lo largo de los últimos 80 años reflejan perfectamente la evolución en la percepción de la historia y de la historia de la matemática. La obra clásica de Heath [64] sobre la matemática griega, escrupulosa y de un rigor indiscutible, reflejaba una visión que separaba el desarrollo histórico de los conceptos matemáticos, de la historia en un sentido amplio. Los que se consideraron aspectos puramente contextuales para el avance de la historia de la matemática griega se recogieron en un capítulo introductorio en el que se esbozaban las condiciones sociales favorables para el desarrollo de la filosofía o el significado atribuido a la matemática. Si consideramos, sin embargo, la obra de Martzloff [93] sobre la historia de la matemática china, encontraremos absolutamente imposible separar qué es matemáticas, qué es historia en su sentido humano más amplio, o qué es historia de la matemática. El resultado es un magnífico reflejo de la complejidad de nuestro conocimiento actual, que evidentemente no tiene nada que ver con la concepción de la historia o de la historia de la matemática que Heath transmite con su obra.

En los últimos 20 años se ha amplificado de manera notable la intuición de que el conocimiento de la historia *promueve* la reflexión sobre la actividad matemática como una actividad humana. Y esto tiene mucho que ver con esta amplia perspectiva en la que el conocimiento científico se fundió con una interpretación histórica y social de su evolución, haciéndolos inseparables. Si nuestra propia intuición y la saludable ilusión de que el contacto con la historia construirá unas creencias determinadas en torno a la matemática tienen su origen en esta compleja elaboración del conocimiento, no tiene sentido una separación en términos de "enseñar historia de la matemática" vs. "enseñar matemáticas," y aún menos preocuparse por el peligro de que una reemplace a la otra[3].

Pensamos que lo realmente interesante es que los profesores puedan acercarse a la historia de la matemática como una vía que enriquece su formación y la de los estudiantes, y que llena de significado la actividad matemática:

> There is an important distinction to be made between the history of mathematics within the teaching of mathematics, and teaching the history of mathematics as a subject [...] They are often confused; teachers may fear they are being urged to teach a subject they know little about and which is not on the syllabus, namely history of mathematics,

[3]A lo largo de toda esta reflexion estamos pensando en la enseñanza obligatoria y la formación de futuros maestros. Es posible que si nos refiriésemos a la formación específica dirigida, por ejemplo, a un estudiante de matemáticas, hubieran de considerarse también para la discusión otros aspectos desde el punto de vista de la especialización del conocimiento.

> when what they are actually being encouraged to do is to explore ways of helping their teaching of mathematics itself to become reacher and more varied and effective in certain ways. [45], p. 5.

En una reflexión sobre la integración de la historia de la matemática con la enseñanza, Rowe [105] analiza la obra de algunos de los pricipales historiadores de la matemática para mostrar la tensión existente entre un enfoque cultural y uno formalista, alejado este último de las implicaciones que contexto y cultura tienen en la evolución de la actividad matemática y en la propia formulación de su historia. El autor propone la identificación de dos direcciones principales: la seguida por quienes se aproximan a la historia de las matemáticas desde la historia de la ciencia, las ideas o las instituciones; y la seguida por quienes toman el punto de vista de las matemáticas modernas. Frente a esta tensión, el autor propone una visión más amplia que refleje la variedad de perspectivas que afectan a la producción y el conocimiento matemático, con la que nos sentimos plenamente identificados.

> I wish to emphasize at the outset that, in my opinion, the history of mathematics should be approached from a variety of perspectives. At the same time, it should be recognised that historical studies in mathematics serve numerous different and very diverse constituences. Indeed, the ever widening range of interests among scholars and students alike reflects one of the major trends now taking place in the history of mathematics. This trend is linked with a shift from a relative narrow, eurocentric vision of a monolithic body of mathematical knowledge to a broader, multi-layered picture of mathematical activity embedded in a rich variety of cultures and periods. A major challenge facing the history of mathematics as a discipline today will be to stablish a constructive dialogue between the parties representing these differing interests. This survey hopes to contribute to such a dialogue not only by examining major disciplinary issues but also by indicating how influential mathematicians, historians, and philosophers have addressed them. [105], p. 4.

2.2 Realidad histórica de los problemas matemáticos

Cuando desde nuestro planteamiento proponemos a los estudiantes que reflexionen sobre un problema histórico nuestra intención es proporcionarles un medio en el cual puedan reconocerse diferentes creencias en torno a la matemática. Problemas o actividades especialmente interesantes son aquellas cuyo enunciado o solución está claramente afectada por su contexto histórico. Diversos problemas de agrimensura, de astronomía en la antigua matemática babilónica, egípcia y griega, de numerología en la antigua matemática china, o problemas de herencias que se derivan de las antiguas leyes árabes son ejemplos ilustrativos de este tipo de problemas[4]. Desde nuestro marco teórico, el interés didáctico de este tipo de problemas

[4]Pueden encontrarse referencias de investigaciones en historia de la matematica sobre el tipo de problemas mencionados en [93, 95, 109, 111, 129].

surge de su inmersión en un determinado contexto histórico. Este es el rasgo que los hace especialmente interesantes para estimular a los estudiantes hacia la búsqueda de sentido en su actividad matemática. A continuación discutiremos algunos ejemplos de este tipo de problemas: los problemas de herencias en la antigua matemática árabe y otros que hemos calificado como *problemas absurdos*.

2.2.1 Problemas de herencias

Los *problemas de herencias* podrían considerarse característicos de las antiguas leyes árabes más que de las matemáticas. En ocasiones, las soluciones que se ofrecen en los antiguos manuscritos árabes son incorrectas desde un punto de vista matemático en el sentido que no respetan las condiciones impuestas en el enunciado. Para comprender este desequilibrio entre la solución de un problema y su enunciado es necesario atender a su contexto histórico. El objetivo de los abogados cuando resolvían este tipo de problemas podía ser, por ejemplo, favorecer a los herederos evitando el pago de impuestos. El siguiente es un problema de herencias tomado del *algebra* de Mohamed ben Musa (Al-Khowarizmi) [95]:

> A man dies, leaving four sons and his wife; and bequeathing to a person as much as the share of one of the sons less the amount of the share of the widow. [95] p. 95–96.

La pregunta se refiere, naturalmente, a cómo ha de hacerse el reparto. Si intentamos resolver este problema como un ejercicio sencillo de aritmética percibimos que algo no marcha bien porque en cada contexto legal la solución es diferente. Para nosotros no es habitual que la viuda reciba menos que un hijo, de manera que no tiene sentido ceder a un extraño la fracción que se indica en el enunciado. Pero consideremos el contexto histórico y cultural en el que tal problema se propone. La ley árabe imponía, entre otros, los siguientes condicionantes:

1. En lo que respecta al orden de la partición, el legado que se deja a quien no es miembro de la familia precede a la división entre los herederos directos.
2. Una viuda recibe $\frac{1}{8}$ del legado.
3. El resto del legado es repartido entre los hijos.

Con estas condiciones, el problema puede resolverse facilmente de la forma siguiente:

Sea x la fracción del legado que corresponde al extraño. La viuda recibe $\dfrac{1}{8}$ de lo que resta, es decir, $\dfrac{1-x}{8}$, y cada hijo recibirá $\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{7}{8} \cdot (1-x)$.

La fracción que recibe el extraño, x, es, según nos dice el enunciado, la fracción que corresponde a uno de los hijos menos la que corresponde a la viuda, es decir:

$$x = \left(\frac{7}{4} - 1\right) \cdot \frac{1-x}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1-x}{8},$$

de donde se obtiene que $x = \frac{3}{35}$. Cada hijo recibe $\frac{7}{35}$, y la viuda $\frac{4}{35}$.

Algunos autores afirman que en cierto modo la complicada ley de herencias fue un estímulo para el desarrollo del álgebra. De hecho, los encargados de resolver cualquier tipo de repartos de este tipo eran miembros de una clase especial de *aritméticos* [101]. Otras importantes consideraciones complementarias en torno al origen y el desarrollo del álgebra simbólica que incluyen una propuesta didáctica pueden encontrarse igualmente en [101]. Los mencionados aspectos culturales fueron obviados en las traducciones al latín de las obras árabes, probablemente porque su gran carga contextual los alejaba de los intereses matemáticos occidentales [20], convirtiéndolos, en cierto modo, en *problemas absurdos.* Por ejemplo, una detallada discusión sobre los problemas de herencias con ejemplos como el que sigue se encuentra en los manuscritos árabes del *Álgebra* de Al–Khowarizmi, pero no en sus traducciones latinas:

> Muere un hombre dejando dos hijos y legando un tercio de su capital a un extraño. El hombre deja unas propiedades que valen diez dirhams y una reclamación de deuda de diez dirhams a uno de sus hijos. [20] p. 302.

Una propuesta lógica para resolver el problema sería que el hijo pagase su deuda de 10 dirhams con el difunto, y que la fortuna a repartir fueran los 20 dirhams en total. Entonces el extraño recibe $6\,\frac{2}{3}$, aceptando que sea esta la propiedad, y después cada hijo recibe otro tercio, es decir, $6\,\frac{2}{3}$ dirhams cada uno.

Pero de nuevo nos encontramos con otros condicionantes ajenos a nuestro contexto:

1. Los herederos naturales pueden negarse a ceder a un extraño lo que exceda a $\frac{1}{3}$ de la fortuna total (en este caso no es ninguna restricción, porque esta es la fracción que se lega). Si hay herederos que se niegan y otros que no, entonces sólo quienes no se nieguen pagarán la diferencia que supere a $\frac{1}{3}$.

2. Lo que la deuda de un hijo exceda de su parte legal es un regalo y no debe devolverse ni considerarse parte de la herencia.

3. El regalo precede al legado a un extraño[5].

[5]Documento personal elaborado por Mariano Martínez. "Problemas de herencias, de la tercera parte del *Álgebra* de Al–Khuarizmi (c.780–c.850). Universidad Complutense de Madrid.

Si x es la cantidad que le corresponde a cada uno de los hijos tras el reparto, la fortuna neta que se ha de repartir será:

$$\underbrace{\text{total bruto}}_{20} - \underbrace{\text{regalo}}_{(10-x)} = \underbrace{\text{total neto}}_{10+x}$$

Entonces la parte de legado que le corresponde al extraño es $\dfrac{(10+x)}{3}$.

$$10 + x = \frac{(10+x)}{3} + 2x$$

Es decir, $x = 5$ dirhams.

Los problemas de herencias llegan a ser mucho más complicados, atendiendo a otros condicionantes impuestos por las leyes como por ejemplo los siguientes:

- Cada hijo recibe el doble de cantidad que la hija.
- Si todos los herederos son mujeres, la viuda recibe la misma cantidad que las hijas.
- En algunos casos, si hay un matrimonio entre los herederos, al hombre le corresponde $\frac{1}{4}$, y a la mujer $\frac{1}{6}$. Sin embargo, en ocasiones reciben $\frac{3}{13}$ y $\frac{2}{13}$ respectivamente.

A partir de la información que nos ofrecen los ejemplos anteriores, *nosotros* podríamos referirnos a los problemas de herencias como una clara ilustración de las implicaciones culturales e históricas en el desarrollo de las matemáticas, y en este sentido considerarlos interesante para que los estudiantes, o quien sea, reflexione sobre este hecho. Esa es nuestra intención y una proyección de nuestra propia concepción, pero no podemos esperar que sea la que elaboren los estudiantes. Tal y como analizaremos más adelante, en la relación que establecen los estudiantes que participaron en la investigación con este tipo de información, entran en juego otros muchos factores que ni habíamos considerado previamente, ni podemos abarcar.

2.2.2 Problemas *absurdos*

Una nuevo ejemplo sobre la contextualización histórica de los problemas nos transporta a la historia de la matemática china, en este caso a un libro de aritmética, el *Sunzi Suanjing*, citado por Markloff [93]. Es un texto de aritmética cuyo autor y fecha en la que fue escrito son desconocidos. El primero de los capítulos comienza con una descripción de los sistemas de medida de longitudes, pesos y capacidades y continúa con una breve presetación de caracteres chinos para referirse a las potencias de diez. Los capítulos siguientes se refieren al cálculo con fracciones, proporciones para el cálculo de áreas y volúmenes y el famoso teorema de los restos chinos, que puede encontrarse en muchos textos medievales posteriores y que se estudia actualmente en nuestras universidades como un teorema de álgebra. Resulta significativo que en la misma obra aparezca el siguiente problema:

> A woman aged 29 has been nine months pregnant. What is the sex of her future baby?
> Answer: Male
> Method: Set down 49, add the gestation period and substract the age [of the woman]. From the remainder take away 1 [the number of the] heaven, 2 that of the earth, 3 he man, 4 the four seasons, 5 the five phases, 6 the six pitchpipes, 7 the seven stars [of *Ursa Major*], 8 the eight winds and 9 the nine territories [of China under Yu the Great]. If the remainder is odd, the infant will be a male, if even, a female[6] [92], p. 138.

El problema ha sido calificado como ilógico y de interés nulo para un tratado de matemáticas, pero como el propio Markloff menciona, tiene sentido si se consideran las antiguas tradiciones médicas y numerológicas chinas. Para nosotros, la situación planteada es absurda porque no está de acuerdo con nuestra concepción de la racionalidad y el conocimiento científico, en la que evidentemente no hay lugar para la numerología. Esto no significa, sin embargo, que tenga que ser absurda en el contexto en el que fue planteada.

Un ejemplo aun más evidente por su trancendencia en el entorno de la investigación en educación matemática, que proviene además de nuestra tradición occidental es el problema de la "edad del capitán" que se ha convertido en un clásico en los estudios sobre psicología de la educación matemática:

> En un barco hay 26 corderos y 10 cabras. ¿Cuál es la edad del capitán?

En 1980 el IREM de Grenoble planteó a sus alumnos entre 7 y 9 años el problema y se observó que de los 97 estudiantes a los que se les planteó, 76 calcularon la edad del capitán a partir de los datos (26+10, por ejemplo). En nuestra opinión, lo sorprendente no es la respuesta de los niños, sino que se les haga perder el tiempo con tales estudios. El problema, que se plantea con el convencimiento de que se trata de un problema absurdo, no lo sería si se tuviera en cuenta su origen. Independientemente de que en el enunciado del problema se hable de cabras, corderos o dimensiones del barco, la realidad es que deriva de problemas que tenían sentido en una época previa al descubrimiento de la máquina de vapor, en la que la edad del capitán era relevante para evaluar en qué condiciones una persona de determinada edad podía capitanear un barco:

> During the sailing–ship era, marine risk was assesed according to the age of the captain. However, with the introduction of steam driven ships, many other factors, apart from the captain's age, were taken into account. Consequently, the french term "l'âge du capitaine" came to symbolise irrelevant or useless information.
> Fuente: S.A.R.T.R.E. European Drivers and Traffic Safety.
> Presses des ponts et Chausséees. Paris, 1994
> `http://sartre.inrets.fr/documents-pdf/repS1V2E.pdf`

[6]La respuesta es un hombre porque después de restar el 7 se obtiene 1. El 8 y el 9 no es posible restarlos porque los números negativos "no existen".

Nadie se sorprendería tanto hoy en día si en un test de educación vial apareciera una pregunta del tipo. "¿Cuántos años puede tener el conductor de una motocicleta de 500 centímetros cúbicos?" Considerar el problema de la edad del capitán como un problema absurdo es más bien un juicio emitido sin tener en cuenta su origen.

A partir de la discusión de los ejemplos anteriores nos hemos introducido en la búsqueda de ilustraciones históricas que *avivan* una concepción de la actividad matemática, en su sentido más amplio, como construcción histórica, que tiene su origen en la resolución de problemas contextualizados.

Consideramos que el estudio de la medida es especialmente interesante desde este punto de vista para la formación matemática de los futuros profesores y a continuación nos extenderemos en argumentar por qué lo creemos así.

2.3 Interés de la medida

Contar y medir son dos de las actividades humanas que popularmente se asocian a la matemática y difícilmente podría elaborarse cualquier trabajo global sobre su historia sin tenerlas en cuenta. Los manuales que intentan presentar el desarrollo de esta ciencia desde sus orígenes encuentran en tales actividades su punto de partida: contar y medir acompañan una historia de necesidades e inquietudes humanas basadas en el trabajo agrícola, en las transacciones comerciales, en las guerras, los repartos o el poder de unos sobre otros.

Elegir la medida como guía para la elaboración de este curso se debe entre otros motivos a su especial riqueza para comprender, por una parte, la evolución popular de la actividad matemática con un caracter no científico, ligada a las inquietudes, la forma de vida de hombres y mujeres o las instituciones. Por otra, es necesario para la alfabetización científica de cualquier persona el conocimiento, entre otros, de importantes conceptos matemáticos que se han desarrollado alrededor de la medida.

Medir suele asociarse en nuestra cultura con una acción de tipo instrumental: reglas, cintas métricas o balanzas son utilizadas para controlar a través de los números cualidades variables del mundo físico tales como peso, volumen, longitud, etc. Esta importante imagen de la medida está detrás de muchas investigaciones llevadas a cabo desde la historia, la política o la antropología: comprender el significado de las medidas de antaño; su relación con los sistemas de producción, comercio y consumo. Tras el esfuerzo de muchos siglos de estudio los físicos lograron *medir* ciertas magnitudes (entendiendo por ello asignar un número), abriendo así nuevas posibilidades para la física. Nos detendremos a continuación en discutir estas diferentes perspectivas para acercarse a la medida.

Medida tradicional desde la perspectiva de la historia, la política o la antropología

Investigaciones y estudios sobre medida han sido llevados a cabo desde muchas disciplinas. La obra del filólogo Friedrich Hultsch, *Griechische und Römische Metrologie*, por ejemplo, [68] tomada también como referencia en las obras de Van der Waerden [131] o Neugebauer [96], recupera la evolución de la medida en las culturas griega y romana. Su objetivo es ante todo un objetivo histórico: recuperar la metrología griega y romana como un hecho digno de memoria y que merece ser narrado para su permanencia en la cultura.

Un segundo autor cuyo trabajo de investigación en relación con la medida resulta especialmente interesante desde un punto de vista histórico alejado de la matemática es Kula [79]. En *Las medidas y los hombres*, el autor polaco analiza las relaciones de poder y dependencia humanas que produce el uso de la medida. La manifestación de la carga ideológica de esta obra es significativa. Kula realiza su investigación en un contexto de intensas transformaciones políticas y desde su propia posición consigue con su exposición agitar, en una dirección u otra, nuestras consideraciones ideológicas. Se trata de un estudio antropológico y, como tal, su objetivo es dar explicación al comportamiento de hombres y mujeres como miembros de una sociedad. En general, el tema de la metrología tradicional y los esfuerzos de unificación alrededor del Sistema Métrico Decimal son considerados de una gran importancia histórica.

Las investigaciones sobre metrología aportan datos a nuestro conocimiento de la historia de la ciencia mucho más allá que el de la utilización de un sistema de medidas u otro. Cuestiones tales como la defensa de los pueblos frente a las intervenciones estatales para imponer medidas, la dificultad de la industria y los sistemas de producción y comercio para adaptarse a los cambios, o la difusión de las ideas matemáticas y científicas que se llevaba a cabo en escuelas o encuentros científicos, las convierte en interesantes desde muchos puntos de vista.

Sin embargo, existe una diferencia importante entre lo que se considera medir como actividad cotidiana y práctica –cuyo interés se agota en seguida desde un punto de vista matemático– y el desarrollo de la matemática alrededor de importantes problemas históricos relacionados con la medida, como por ejemplo la medida de magnitudes físicas, el problema de la inconmensurabilidad, la cuadratura del círculo o el cálculo de áreas y volúmenes. Discutiremos brevemente a continuación estos aspectos.

La medición como producto de la investigación científica

La medición es para nosotros hoy parte del sentido común, y así es para la mayoría de los estudiantes. Campbell define la medición como “la atribución de números a propiedades, para representarlas” [25] y como él mismo afirma, lo que supuso un hito en la historia del pensamiento científico fue encontrar qué propiedades pueden ser representadas mediante números para poder llegar a caracterizar el concepto de magnitud. En este sentido, la medida se asienta profundamente en el significado de *número*. El paso importante de la matemática para la física fue la capacidad de comparar las propiedades de los números con propiedades de los objetos.

En esta asignación de números a magnitudes, el proceso hasta descubrir que una propiedad es medible y llegar a establecer un método para medirla se basa exclusivamente en la investigación experimental. Campbell considera "pre–científicas" propiedades como la longitud, el peso, el volumen o el área; pero el paso hasta definir otras propiedades medibles que dependan de ellas (densidad, presión, etc.) y que puedan establecerse leyes que las midan, es un producto de la investigación científica consciente. Las primeras propiedades son las que llevan asociados métodos de medida *fundamentales* y las segundas, métodos *derivados*.

Medida y propiedades geométricas

Desde un punto geométrico, la atención a los métodos fundamentales a los que nos hemos referido permite distinguir otros dos métodos cuya relevancia, especialmente en el mundo educativo, es evidente: la medida directa y la medida indirecta. La medida indirecta es igualmente un producto del pensamiento matemático y depende de importantes y sofisticados conceptos como la semejanza de triángulos o la trigonometría, además de haber impulsado la construcción de una gran cantidad de instrumentos para la medición de distancias inaccesibles.

Puesto que la idea de medida de una cierta magnitud se asocia con la de asignar un número a partir de una unidad, resulta interesante destacar la relación entre medida y geometría que apareció y se desarrolló en la matemática griega en torno a esas que hemos llamado "medidas fundamentales". En efecto, la existencia de los segmentos inconmensurables provocó la que se ha llamado *primera gran crisis* de la matemática de la antigüedad, puesto que significaba que, en general, no era posible encontrar un número que expresara la medida exacta de un segmento tomando otro como unidad. La existencia de magnitudes inconmensurables no es evidente para la intuición, que nos lleva a pensar en un primer momento que dados dos segmentos siempre será posible hallar un tercero, tan pequeño como sea necesario, que mida de manera entera los dos anteriores.

La cuestión que nos interesa destacar desde un punto de vista didáctico es que las propiedades de los números son tan "obvias" cuando se explicitan, que a los estudiantes les cuesta mucho entender su importancia y aún más relacionarlas con la medición de magnitudes. El método axiomático es fundamental para el desarrollo de la matemática pero no tiene un interés esencial si lo que hemos de plantearnos es, globalmente, la alfabetización matemática de la población.

Todos los aspectos que hemos discutido hasta aquí convierten a la medida en un tema lo suficientemente atractivo como para elaborar en torno a él el programa del curso que hemos llevado a cabo: por la atención que se le ha prestado desde distintas disciplinas y porque permite rastrear rasgos externos a la propia ciencia que influyen en su desarrollo y métodos;

por los elementos de reflexión filosófica que convoca; por el rol indiscutible que tuvo en la transformación del saber científico entre los siglos XIII y XVII; y por su versatilidad para ser estudiado desde un punto de vista matemático tanto aritmética como geométricamente. Así, hablar de *medida* nos permitía evocar tanta riqueza intelectual y cotidiana que escogiendo sólo algunos de los aspectos que han sido señalados hasta aquí era posible diseñar el programa del curso y a la vez dejar abiertas una gran cantidad de preguntas que estimulasen la búsqueda de nuevas respuestas.

Nuestra decisión fue recoger algunos de los contenidos matemáticos que hemos mencionado hasta aquí para re–considerarlos desde el punto de vista de la *medida* y analizarlos desde una perspectiva histórica. Por ello se ha prestado una atención especial durante el curso a algunos problemas clásicos de medida indirecta; al problema de la inconmensurabilidad; a los conceptos de área y volumen, y a las paradojas que suscitó la formulación de estos conceptos en relación con el infinito.

Los contenidos del curso serán expuestos en detalle en el capítulo 4; sin embargo, discutiremos a continuación, a modo de ejemplo, uno de los problemas científica y culturalmente más significativos que ha ocupado a muchos científicos en diversos momentos de la historia: la estimación de la medida de la Tierra. El problema de la medida de la Tierra y otros derivados de observaciones astronómicas son, desde la perspectiva matemática, ejemplos interesantes que ilustran el intento de los hombres por situarse a sí mismos, por tener una imagen del mundo en el que viven. Son ejemplos especialmente hermosos porque sólo una perspectiva de ciencia humana puede plantear tales problemas.

Durante el curso se discutió la medida de la circunferencia terrestre utilizando el método de Eratóstenes, después de haber estudiado algunos de los resultados obtenidos por Aristarco para estimar proporciones entre tamaños y distancias en el sistema formado por la Tierra, el Sol y la Luna. El método de Eratóstenes es especialmente interesante por la sencillez y la genialidad de su planteamiento y aparece en diversas referencias didácticas [74], pero también fueron llevados a cabo otros intentos. Diller [41] menciona desde Aristóteles algunos de ellos, que aparecen sintetizados en la tabla 2.1. Hemos añadido a esta revisión el método de Al-Bīrūnī, que consideramos especialmente interesante por ser una sencilla aplicación de la trigonometría y no hacer uso de observaciones astronómicas. El método utilizado por el matemático árabe incluye además, la medida de la altura de una montaña de base inaccesible. La evolución histórica de este nuevo problema de medida indirecta será discutida en el capítulo 5.

De los cuatro métodos que hemos recogido (tabla 2.1) explicaremos en detalle los métodos de Eratóstenes y Al-Bīrūnī. Para el primero, se ha tenido en cuenta especialmente [42]; para el segundo [14]. La estimación de la medida utilizando los otros dos métodos fue propuesta a los estudiantes como un problema de aplicación.

Arquitas IV-III a.n.e.	El método, que se atribuye a Arquitas, consiste en considerar dos posiciones sobre el mismo meridiano y observar, en cada uno de esos puntos y a la misma hora, qué estrellas están en el cenit. A continuación se mide el ángulo entre ellas. Una de las estrellas de la costelación del Dragón, aparece en el cenit sobre la ciudad de Lysimachia (antes Gallípoli), en Turquía, cuando una de las estrellas de la constelación de cáncer está en el cenit de Siene, y la distancia angular entre las dos estrellas es de aproximadamente $\frac{1}{15}$ del meridiano celeste. La distancia entre las dos ciudades se consideraba, sobre el mismo meridiano, de 20 000 estadios. Se consigue una estimación de 300 000 estadios para la circunferencia.
Eratóstenes III a.n.e.	Se observó que al mediodía en el solsticio de verano un gnomon en Alejandría proyectaba una cierta sombra, mientras que en Siene no. El ángulo que formaban los rayos del Sol con el gnomon era de $\frac{1}{50}$ de circunferencia. La distancia entre Alejandría y Siene era de 5 000 estadios. Se consigue una estimación de 250 000 estadios para la circunferencia. (Desarrollado en la sección 2.3.2)
Posidonius III a.n.e.	Se asumía que Rhodas y Alejandría estaban en el mismo meridiano y que la estrella Canopos, en la constelación de Carina, era visible en Rhodas justamente en el horizonte, mientras que en Alejandría, más al sur, se veía a una altitud sobre el horizonte de $\frac{1}{48}$ partes del círculo del meridiano celeste. La distancia considerada entre Rhodas y Alejandría era de 5 000 estadios. Se consigue una estimación de 240 000 estadios para la circunferencia.
Al-Bīrūnī s. II	El método prescinde de referencias astronómicas y se utiliza el astrolabio. Estimando previamente la altura de una montaña se calcula el radio de la Tierra mediante trigonometría elemental. Se consigue una estimación de $30,39$ cúbitos [14] para el radio de la Tierra. (Desarrollado en la sección 2.3.3)

Tabla 2.1 Antiguas medidas de la circunferencia o el radio de la Tierra

2.3.1 La medida de la circunferencia terrestre

Antes de presentar el método de Eratóstenes para calcular la longitud de la circunferencia de la Tierra preguntamos a los estudiantes cuándo se descubrió que la Tierra era redonda. Nos encontramos con respuestas varias, entre ellas Colón, Galileo y Juan Sebastián el Cano. Merecía pues la pena ofrecer un recorrido por las antiguas concepciones sobre la esfericidad de la Tierra y la mención de alguna de las medidas llevadas a cabo[7].

El conocimiento de la forma redonda de la Tierra perteneció siempre al saber occidental y fue introducido en las unversidades a través de la traducción de las obras aristotélicas. La comparación de diferentes métodos para resolver un mismo problema a lo largo de la historia ilustra cómo han ido diseñándose instrumentos mecánicos y conceptuales para facilitar los cálculos de medidas indirectas. El estudio de las diferentes aproximaciones llevadas a cabo para la medida de la longitud de la circunferencia terrestre ilustra perfectamente este hecho.

2.3.2 La medida de Eratóstenes

Detallamos a continuación cómo fue presentado el problema a los estudiantes. Eratóstenes sabía que en el solsticio de verano el Sol se encontraba exactamente en el cenit de Siene (actualmente Asuán, en Egipto)[8]. Algunas fuentes dicen que la observación fue llevada a cabo en un pozo en la isla de Elefantina, en el Nilo, frente a Asuán, cuyo fondo era iluminado al mediodía por los rayos del Sol en el solsticio de verano. El pozo tenía una escalera en espiral que bajaba casi 8 metros. Como se suponía que los pozos están excavados siguiendo un radio de la Tierra, el Sol tenía que estar exactamente encima de la ciudad. Una completa discusión del método utilizado por Eratóstenes puede consultarse en [42].

La idea principal del trabajo de Eratóstenes fue que para dar una medida completa de un meridiano podía ir sumando pedazos de arco de circunferencia, que obtenía a partir de medidas angulares. Para comprender cómo procedió es importante que se analicen previamente tres importantes hipótesis que son asumidas en su método:

1. *Los rayos del Sol llegan a la Tierra de forma paralela.*

2. Eratóstenes observó que al mediodía en el solsticio de verano un *gnomon* en Alejandría, proyectaba una cierta sombra, mientras que en Siene no proyectaba ninguna.

   El *gnomon* era el instrumento astronómico más importante utilizado en la antigüedad. Consistía en un palo vertical colocado sobre una superficie plana, normalmente graduada, para medir la longitud y la dirección de la sombra durante el día. En el problema de Eratóstenes, el gnomon, colocado perpendicularmente al suelo, se suponía que estaba alineado con el radio de la Tierra.

[7] Sobre el origen del mito de Colón como descubridor de que la Tierra era redonda puede consultarse [59].

[8] La discusión del método de Eratóstenes ha sido tomada del texto que se elaboró para los estudiantes.

La consideración de la dirección del gnomon y el paralelismo de los rayos del Sol permite asegurar la igualdad de los ángulos sombreados en la figura 2.1. De este modo, Eratóstenes encuentra un ángulo en la superficie de la Tierra, que puede conocer con ayuda de un gnomon y que le permite medir un ángulo inaccesible en el centro de la Tierra. Eratóstenes *midió el ángulo* α *que formaban los rayos del Sol con el gnomon y obtuvo un valor de* $\frac{1}{50}$ *partes de circunferencia.*

3. *La distancia entre las ciudades de Alejandría y Siene es de* 5 000 *estadios.*

   En el mundo antiguo, las medidas de longitud eran expresadas en términos de partes del cuerpo, como el *pie* o el *cúbito*. De manera habitual, las distancias largas eran medidas por los llamados *estiradores de cuerdas* utilizando cuerdas que medían 100 cúbitos. Distancias más largas eran expresadas en *estadios*. Un estadio equivalía a 12 000 cúbitos. Pero ni unas ni otras tenían el mismo valor en todos los lugares, puesto que ni el pie ni el cúbito utilizado en Egipto, por ejemplo, era el mismo que el utilizado en Grecia o en Roma. En concreto, respecto a la medida del estadio que utilizó Eratóstenes los historiadores proporcionan valores diferentes. Una completa discusión sobre el origen y diferentes hipótesis sobre el valor del estadio utilizado por Eratóstenes puede encontrarse en [60].

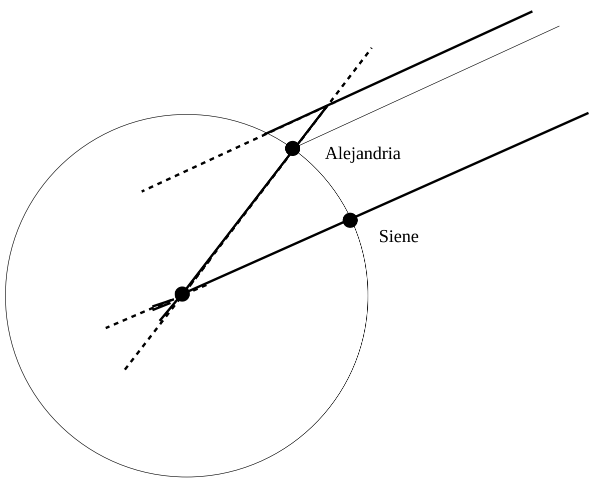


Figura 2.1 La medida del radio de la tierra llevada a cabo por Eratóstenes. Los ángulos sombreados son iguales.

Eratóstenes consideraba que Alejandría y Siene estaban en el mismo meridiano. La relación que utilizó Eratóstenes para encontrar la longitud de la circunferencia terrestre fue la siguiente:

$$\frac{\textit{Long. del meridiano}}{\textit{Long. arco Alejandría–Sienne}} = \frac{\textit{Medida}\ \text{(angular)}\ \textit{de un meridiano}}{\textit{Medida}\ \text{(angular)}\ \textit{del arco Alejandría–Sienne}}$$

El primer término de la igualdad es un cociente de longitudes, y el segundo un cociente de medidas angulares. Ahora el cálculo de la longitud de la circunferencia de la Tierra es inmediato:

$$\text{Longitud de la circunferencia terrestre} = 5\,000 \cdot 50 = 250\,000 \text{ estadios}$$

2.3.3 La medida de Al-Bīrūnī

Al-Bīrūnī (s.II) propone un método para calcular la circunferencia de la Tierra[9] expuesto en *The Determination of the Coordinates of Localities* [14].

Sea KL el radio de la Tierra, según aparece señalado en la figura 2.2 y E la cima de la montaña, donde nos encontramos. Consideremos una circunferencia $ABGD$ con centro en E que tiene sus ejes graduados y un diámetro ZEH, también graduado, que puede moverse con centro en la circunferencia –el instrumento que sugiere el astrónomo árabe podría ser un astrolabio–. Colocamos la regla de tal manera que quede alineada con el horizonte T y a continuación la movemos hasta la posición horizontal BED. Así podemos medir el ángulo $\angle BEZ = \angle EOL = d$

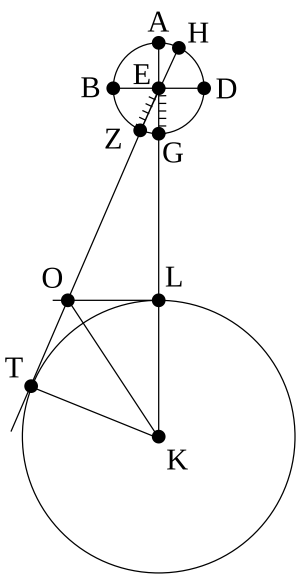


Figura 2.2

[9]El método no fue trabajado con los estudiantes, sino únicamente referenciado como una aplicación de trigonometría elemental para encontrar el radio de la Tierra. La única razón para no hacerlo fue que los estudiantes se "espantan" cuando oyen hablar de razones trigonométricas. Debería quedar fuera de discusión que cualquiera de los estudiantes que comienza sus estudios de magisterio pudiera seguir un argumento que involucra trigonometría elemental.

Considerando el triángulo $\triangle ETK$ de la figura 2.2, si llega a conocerse el lado ET y los ángulos interiores, una aplicación directa de la geometría elemental permite encontrar fácilmente el radio de la Tierra. Es inmediato que $\angle TEK = 90^{\text{o}} - d$.

Consideremos a continuación una recta LO tangente a la superficie de la Tierra en el punto L (figura 2.2). Los triángulos $\triangle ETK$ y $\triangle EOL$ son semejantes, puesto que son rectángulos y comparten el ángulo $\angle TEK$. Así pues, $\angle TKE = d$.

Por trigonometría elemental, en el triángulo $\triangle EOL$ se obtiene:

$$EO = \frac{EL}{\sin d}$$

Como EL es la altura de la montaña, que es conocida (analizaremos en el capítulo 5 cómo procede para calcularla), podemos determinar LO utilizando el teorema de Pitágoras:

$$LO = \sqrt{EO^2 - EL^2}$$

Y como $TO = LO$, puesto que ambas son tangentes a la circunferencia desde O, se obtiene fácilmente $ET = EO + OT$.

Ahora que son conocidos los tres ángulos del triángulo $\triangle ETK$ y el lado ET puede utilizarse de nuevo la definición del seno y se obtiene KT, que es el radio de la Tierra:

$$KT = ET \sin(90^{\text{o}} - d)$$

A lo largo de este capítulo hemos detallado la solución de algunos problemas con el objetivo de ilustrar por qué pensamos que la contextualización de los problemas no puede continuar siendo entendida en los términos estrictos del entorno inmediato de los estudiantes. Este hecho, como veremos en los capítulos 5 y 6 impulsa cambios en las creencias de algunos estudiantes en torno a la matemática.

Un mismo problema –como el de medir la Tierra– refleja diferentes realidades según el momento histórico en el que está planteado y es abordado con métodos e instrumentos diferentes. Por ejemplo, aunque los árabes conocieran una aproximación para la medida de la circunferencia de la Tierra, disponían de un instrumento –el astrolabio– fundamental para contrastar la precisión de otras medidas llevadas a cabo con anterioridad. El hecho de que a los estudiantes se les plantee la solución del problema de la medida de la Tierra propuesta por Al-Bīrūnī, o incluso la de Eratóstenes, tiene sentido si se recurre a su sentido histórico y humano. Si no se hace así, entonces puede que sea mejor olvidarnos definitivamente de este tipo de problemas, de la misma manera que los traductores latinos obviaron incluir en sus traducciones del árabe los problemas de herencias porque no podía encontrárseles sentido.

Capítulo 3

Creencias del profesorado en torno a la matemática

¿Qué son las matemáticas? ¿Para qué sirven? Sean las que fueren las creencias que mantenemos en torno a la matemática, el hecho es que tales preguntas de carácter más filosófico que didáctico se convierten en relevantes para la investigación educativa cuando se intuyen relaciones entre la enseñanza–aprendizaje y las *creencias*. La tendencia teórica predominante en las investigaciones es considerar las creencias en la confluencia de los dominios cognitivo y afectivo [124, 102]. Pero la demarcación entre lo que es conocimiento y lo que es creencia o emoción resulta poco operativa desde un punto de vista educativo en el que cada vez resulta más difícil separar teóricamente lo subjetivo de lo objetivo, lo social de lo individual, lo cognitivo de lo afectivo. La tendencia a inter–relacionar perspectivas ha dado lugar a la consideración, por ejemplo, de términos como *concepciones*, *actitudes* o *percepciones* en lugar de *creencias* con una intención holística [124, 7], pero estos términos tienen también significados diferentes en diferentes investigaciones. Ernest, por ejemplo, a diferencia de los autores anteriores, se refiere en [43] a las concepciones como sistemas de creencias.

En esta investigación continuaremos utilizando el registro *creencia*, pero con un sentido pleno de construcción social. Nos referiremos a las creencias en el sentido filosófico de Ortega y Gasset, alejado en un principio de implicaciones educativas:

> [...] la creencia no le es dada hecha al hombre, tiene que fabricársela él. Ese retroceder de la situación perpleja, de la vacilación ante la encrucijada hacia nuestro interior para hallar en él una creencia no es ni más ni menos que la meditación, el esfuerzo de conocimiento. En vista de lo que le rodea, el hombre se forma una idea del universo y esa idea le significa un plano donde colocar su vida y orientado por el cual resuelve lo que va a ser y supera la perplejidad. [99], p. 77.
> El psicólogo nos dirá que [la creencia] se trata de un pensamiento habitual, y que por eso no nos damos cuenta de él, o usará la hipótesis de lo subconsciente, etc. Todo ello,

> que es muy cuestionable, resulta para nuestro asunto por completo indiferente. Siempre quedará que lo que decisivamente actuaba en nuestro comportamiento, como que era su básico supuesto, no era *pensado* por nosotros con conciencia clara y aparte. [99], p. 27.

Las creencias, en consecuencia, pertenecen al dominio de la realidad de cada individuo y esta realidad es inevitablemente una realidad compleja y personal.

> Sólo el creyente sabe cuáles son sus creencias, al observar qué posibilidades y experiencias intenta evitar, negar o refutar "en exceso"; lo que constituye un intento razonable de hacer que la vida se deslice de la manera más suave posible y lo que constituye una urgencia poco razonable de forzar a la vida a saltar por el aro de sus prejuicios. [28], p.142.

De estas consideraciones en torno a las creencias se desprende que nuestro objetivo no es *conocer* las creencias de los estudiantes, porque pensamos que no es posible hacerlo, sino ofrecerles elementos externos que les permitan dar sentido a la actividad matemática que llevan a cabo y construir, así, sus propias creencias. Además, nuestro interés como investigadores es conocer cómo utilizan la experiencia para producir nuevos significados.

Discutiremos algunas de las investigaciones llevadas a cabo sobre creencias en la educación matemática desde la perspectiva construccionista, que enfatiza entre otros aspectos el origen social tanto del conocimiento como de los afectos. Expresiones como *odiar las matemáticas*, o *miedo al fracaso*, han de ser consideradas a la luz de la propia construcción social del significado de "odio" o "fracaso". En este sentido, la propuesta construccionista se aleja de los planteamientos psicológicos que consideran las creencias como un constructo individual para concederles la categoría de constructo social.

Los trabajos desarrollados desde las perspectivas de la etnomatemática o la cognición situada, que enfatizan el poder de los factores sociales en la comprensión de las creencias juegan un papel interesante, al considerar que pueden existir creencias acerca de la matemática o de su aprendizaje culturalmente distintas [13, 17, 98]. Desde estas posiciones, se sostiene que las creencias están mediadas por factores sociales y culturales que regulan la actividad del profesor en el aula [43]. Son este tipo de perspectivas teóricas las que permiten interpretar las investigaciones que relacionan las creencias con diferentes rasgos sociales o culturales como género, etnia, procedencia geográfica, etc. [7, 62, 76]. Pero la certeza de que en un mismo contexto conviven y aún más *surgen* creencias diferentes nos lleva de nuevo a considerar de que son múltiples las realidades que confluyen en esa misma cultura. Es razonable pensar que las creencias son construidas de manera local, y no sólo en un sentido amplio de cultura. En este sentido, nos apoyamos en la propuesta de Lerman, quien afirma que las creencias son relativas al contexto (micro) y por tanto construidas en cada ocasión de manera diferente [85]. El marco del construccionismo proporciona pautas teóricas interesantes para acercarse a las creencias desde este punto de vista porque considera que tienen un carácter discursivo y por lo tanto, social.

3.1 Relatividad cultural e histórica de las creencias

Ernest establecía tres categorías de profesorado atendiendo al método que seguían en el desarrollo de sus clases –instructor, explicador, facilitador– y establecía una relación causal con otras tres categorías de creencias en torno a la matemática [43]. Otras investigaciones han ampliado esta categorización y han propuesto alternativas más completas o que atienden a una mayor cantidad de condicionantes epistemológicos o contextuales. Los trabajos de Crawford o Andrews, por ejemplo [7, 32] incluyen referencias muy completas de tales investigaciones. Aquí nos centremos en la caracterización propuesta por Ernest citanda anteriormente. El trabajo de Ernest fue una de las primeras aportaciones públicas en el entorno de la didáctica de la matemática y ha sido ampliamente elaborada y discutida posteriormente. El tomar como referencia el trabajo de Ernest es porque ha tenido una gran influencia en investigaciones posteriores, y es lo suficientemente sistemática como para ilustrar cómo se perciben desde los planteamientos construccionistas las conclusiones de este tipo de investigaciones.

Las tres categorías de creencias en torno a la matemática propuestas por Ernest son las siguientes:

1. Una categoría **instrumental**: las matemáticas como una acumulación de hechos, reglas y destrezas que han de ser utilizadas para conseguir un fin específico.

2. Una categoría **platónica**: la matemática como un cuerpo unificado de conocimiento. La matemática se descubre, no se crea.

3. Una categoría de **resolución de problemas**: la matemática como una creación humana. Los resultados no son acabados sino sometidos continuamente a revisión.

Ernest concluía que estas tres categorías pueden ser consideradas como una jerarquía:

> These three philosophies of mathematics, as psychological systems of belief, can be conjectured to form a hierarchy. Instrumentalism is at the lowest level, involving knowledge of mathematical facts, rules and methods as separate entities. At the next level is the Platonist view of mathematics, involving a global understanding of mathematics as a consistent, connected and objective structure. At the highest level, the problem solving view sees mathematics as a dynamically organised structure located in a social and cultural context. [43] p. 2.

Sin embargo, la consideración de estos tres niveles como niveles evolutivos en la construcción de concepciones sobre la matemática no puede sostenerse junto a una posición de relativismo histórico hacia la actividad matemática. Si las matemáticas son un campo de conocimiento de la creación humana en continua expansión, dependientes de cada cultura y cada contexto, entonces esta concepción no puede expresar el grado máximo de desarrollo evolutivo, porque se carece entonces del perspectivismo histórico del cual se dice que se impregna la matemática. La mayoría de nosotros aceptaríamos que si bajo la dominación romana prevaleció en occidente una creencia instrumental no es porque se hubiese perdido capacidad cognitiva con respecto a la época clásica; tampoco porque los romanos estuvieran intelectualmente aún en un estadio previo al de los matemáticos actuales, sino porque de acuerdo con las tradiciones romanas, la matemática *era* mayoritariamente un conjunto de reglas utilitaristas, y no un campo de conocimiento dinámico sugerido por el interés de resolver problemas.

Las creencias, y en particular las creencias en torno a la matemática que surgen naturalmente de las relaciones que establece el individuo en su ambiente son modeladas por un proceso de socialización, por el orden y acontecer histórico en el que cualquiera de nosotros nos desarrollamos. Algunas se suprimen y otras se amplifican. Si actualmente prevalece una imagen pública de la matemática como universalmente aplicable o instrumental es porque el papel que ha jugado en el desarrollo tecnológico en este último siglo se impone a cualquier otra consideración. Una persona que sostenga una imagen de las matemáticas como ciencia destinada al cultivo del placer intelectual no se habrá socializado según las normas que imponen la tecnología y la búsqueda de beneficios a corto plazo, aunque sí lo haya hecho como miembro de una comunidad de matemáticos teóricos.

Una categorización como la que propone Ernest contradice uno de los presupuestos básicos de las perspectivas sociales y discursivas, que es la caracterización a través del lenguaje de las acciones cognitivas de los individuos: la diferencia de registros del lenguaje es la expresión de la diferencia de realidades. El efecto sistematizador de tales categorías puede limitar de forma innecesaria la apertura hacia el conocimiento matemático.

El partir de unas categorías previamente definidas por investigadores externos o adaptadas de otras investigaciones implica asumir que los significados que se atribuyen a estas categorías son comunes y entra en contradicción con la cualidad personal de interpretación. Este tipo de consideraciones ha sido recogido también en las investigaciones llevadas a cabo en educación matemática realizadas con un enfoque fenomenográfico. Crawford et al. apuntan en [32] que el enfoque discursivo permite una aproximación general para el análisis de los significados construidos en contextos y dominios específicos y enfatizan, sobre todo, los intereses de los estudiantes. La perspectiva de la cognición situada que adopta Boaler [17], también recoge como consideración que las creencias que se sostienen en una determinada situación son siempre un producto de personas, con sus objetivos, intereses, y relaciones. Este tipo de enfoques se aleja de los análisis psicológicos tradicionales hacia una comprensión global de los **procesos** en contextos particulares.

Epistemología y creencias

Las investigaciones que toman como marco de análisis categorías *a priori* que surgen de la epistemología y la revisión histórica de la matemática –como en la propuesta de Ernest– se apoyan desde nuestra perspectiva en dos presupuestos discutibles: En primer lugar, que la expresión de los estudiantes o los profesores está **determinada** por grandes categorías históricas o filosóficas; en segundo lugar, que cada individuo actúa según una perspectiva metamatemática, de carácter epistemológico, y que si ésta no se explicita naturalmente el investigador ha de encontrarla operando implícitamente.

La primera de ellas nos devuelve a la consideración de un individuo pasivo en la construcción social y limitado por potentes tradiciones históricas. La segunda asume que *existe* en el individuo un posicionamiento filosófico sobre el conocimiento matemático independientemente de que él lo haya elaborado.

Algunos de los estudiantes con los que hemos trabajado en esta investigación se refieren a las matemáticas como "una asignatura", es decir, consideran que la matemática *es* una ciencia escolar. Esta creencia expresa una relación de los estudiantes con las instituciones educativas y no con la matemática misma. Ante un investigador que se esfuerza en encontrar una categoría epistemológica implícita, el estudiante buscará en su experiencia escolar –y no en la matemática desde una perspectiva más amplia que no tiene– cuáles son las características de aquello que busca el investigador. Desde esta misma consideración de la matemática como una ciencia escolar es natural que los estudiantes expliciten que "estudiar matemáticas sólo sirve para dar clase". Esta afirmación podría ser interpretada como que **no saben** para qué sirven y relacionarlo con su conocimiento de la materia. Sin embargo, una posición más prudente sería interpretar que desde su perspectiva la labor del matemático es de una utilidad clara: perpetuar el sistema educativo. Lo que se está describiendo para el estudiante es una materia escolar, mientras que para el investigador es algo mucho más amplio. A menudo se afirma que la experiencia en la escuela determina las creencias epistemológicas sobre la matemática. Lo que queremos destacar aquí es que no puede ser de otra manera, porque para los estudiantes la matemática es precisamente, y únicamente, *eso* que se hace en la escuela.

En los últimos años se ha cuestionado la premisa de que las creencias de los profesores en torno a la matemática sirvan como principio explicativo para la práctica. Se ha hecho desde otra posición crítica que no niega que exista una relación entre ambas, pero sostiene que las creencias sobre la matemática que se tienen en el aula son cualitativamente diferentes de las que se tienen en otras situaciones. Y son cualitativamente distintas porque en el aula existen simultaneamente múltiples circunstancias que hacen que algunas intenciones emerjan y otras queden eclipsadas [116]. Elementos como la atención individualizada, el tiempo empleado en la gestión del aula, la atención, la motivación, etc, son elementos que van más allá de la enseñanza de las matemáticas y que por lo tanto no nos informan sobre las creencias de los profesores respecto al aprendizaje de las matemáticas sino respecto a otro tipo de situaciones. Este planteamiento nos devuelve a la consideración de un *sistema de creencias*, sin duda más complejo y amplio que el anterior, pero que continúa entendiendo la práctica docente como expresión de unas creencias determinadas.

3.2 Poder de acción de las investigaciones

Las categorías de creencias que *caracterizan* implicitamente una parte de la actividad profesional de los docentes los convierte, al menos retóricamente, en personas que actúan a merced de condiciones imprevistas –las creencias–, sobre las que no existe posibilidad de acción. De hecho, al hablar de creencias se habla de *algo* alejado del control de los creyentes y que pueden tener efectos negativos sobre su práctica, utilizando en muchos casos un tipo de discurso determinista:

> Beliefs may pertain to the existence of entities outside the believer's control, they may represent an idealistic alternative world. (citado en [7], p. 33.)

> Teacher's conceptions of mathematics can have positive but also very *negative effects* on their teaching, and in particular on their ability and readiness to try out and develop new approaches [121], p. 8. [La cursiva es nuestra.]
> Teachers' beliefs, views, and preferences about mathematics and its teaching, regardless of whether they are consciously or unconsciously held, play a significant, albeit subtle, role in the teacher's characteristic pattern of instructional behavior [121], p. 68.
> The individual's conceptions and self–perceived relationship to mathematics are of primary importance in the formation of their learning and teacher behavior [103], p. 189.

Además, se añade con frecuencia que es *muy difícil cambiar* las creencias, es decir, pasar de una categoría a otra. No es nuestra intención cuestionar esta dificultad, sino enfatizar que el tipo de caracterizaciones a las que dan lugar muchas investigaciones la potencian aún más, y en cualquier caso dejan muy pocas posibilidades de acción para las personas que están siendo investigadas, al augurarles un esfuerzo personal quizás desproporcionado. De modo que generar un determinado tipo de retórica en relación con las creencias o su efecto sobre la práctica puede dificultar que un profesor, a quien se haya caracterizado como "instrumentalista" o como "resolutor de problemas", se abra a otras alternativas.

> Al tener que actuar como si algo fuese de una determinada forma, sin saber si realmente lo es o no, es difícil evitar la profunda sospecha de que puede que no sea así. De hecho, es bien sabido que cuanto menos segura se siente una persona sobre una creencia, más ruidosa y enérgicamente la defiende. [...] Cuando una experiencia amenaza una creencia, el creyente se siente ansioso. [28] p. 141.

Las investigaciones educativas sobre creencias, entre otras, han jugado un papel muy importante para justificar, por ejemplo, la modificación de un curriculum, la capacitación profesional de los profesores o el fracaso escolar de los estudiantes. Pero el curriculum es sólo un elemento más en la elaboración de una cierta imagen de las matemáticas por parte de los estudiantes.

Las investigaciones mismas producen un significado de *creencia* que limita el cambio y la acción social. El lenguaje de las investigaciones que se ocupan de las creencias funciona ampliamente como sostén del devenir de la actividad matemática de los estudiantes. Es un medio que refuerza las lineas de acción que ya están asumidas, porque resulta extremadamente difícil considerar categorías nuevas si existen otras que se imponen universalmente como estables y consensuadas. Además, cuando cualquier individuo se expresa en relación con las matemáticas no lo hace desde el marco una categoría de creencias creadas por el investigador, sino desde la relación particular que establece con el mundo social.

No cuestionamos que las creencias de los profesores puedan tener implicaciones en su práctica docente. Es sólo que ante la certeza de que no podemos dar cuenta de ellas sino es a través de simplificaciones de cuestionable utilidad, planteamos que una posible vía de acción para las investigaciones sea incidir para que los estudiantes, los profesores, o quien sea, reconozcan sus creencias desde la perspectiva de la construcción social y no desde su identidad individual. Pensamos que sólo así son posibles cambios profundos. La perspectiva construccionista propone una orientación inevitablemente imperfecta de concebir la situación, pero más pragmática y compleja. El acento está puesto en la expresión de los individuos sobre la realidad que construyen cotidianamente para dar un significado a aquello en lo que individualmente se ven involucrados.

¿Cómo se ocuparía entonces de las creencias una investigación que toma como perspectiva teórica el construccionismo? Básicamente, potenciando que sean los mismos sujetos de investigación quienes puedan reconocer sus creencias como construcciones sociales expuestas a cambio y negociación, más que como rasgos que definen su identidad. A menudo los estudiantes que participaron en la investigación manifestaban que las matemáticas son sólo números o aplicación de fórmulas algebraicas, de modo que carecían de recursos para dar sentido a una buena parte de la actividad matemática. Es en el diálogo con otros donde construyeron nuevos significados. El siguiente fragmento, extraído de uno de los grupos de discusión organizados durante la investigación, ilustra esta idea.

> [Los estudiantes están comentando la siguiente frase que ha escrito una de sus compañeras de curso: "el conocimiento matemático permite a los ciudadanos encontrar soluciones viables a los problemas cotidianos de la sociedad en la que se encuentran."]
>
> Xavi: Yo me he planteado con lo de esta frase, a ver, por ejemplo el problema de las cortinas de Núria[1]. El conocimiento matemático le permitiría encontrar la solución ma-

[1] El problema al que se refiere es el siguiente: "Se tiene una ventana en forma de cuadrado que tiene 2 metros

temática al problema de la cortina, pero definiendo conocimiento matemático "dos más dos." Así. Pero también lo puede hacer... pues mirando cuántas partes caben y tal, sin utilizar ninguna fórmula de tanto por aquí, tanto por allí, multiplicando nos dará tantos metros de tela. Pues también se puede conseguir sin usar conocimiento matemático. Pero mi duda es: la manera de resolver este problema, que es como a veces ahora estamos haciendo, lo de los cuadraditos, para intentar luego que te salgan las áreas, ¿también es conocimiento matemático ese modo de pensar? ¿Sí?

LOURDES: ¿Qué opináis?

VANESSA, NÚRIA, ANA: Que sí.

XAVI: Pues entonces sí que sirve. Sí que permite a los ciudadanos encontrar soluciones. Si sólo pensamos que el conocimiento matemático es la fórmula de altura por base, pues entonces también habría la otra manera, que es la que estaba diciendo ahora, para solucionarlo.

Como podemos apreciar, una misma situación está siendo caracterizada de manera diferente, porque la perspectiva de cada uno de los estudiantes es particular y sólo en momentos determinados es propuesta públicamente para establecer un acuerdo. Investigar cómo surgen, se modifican y se negocian estas creencias en un contexto micro de relaciones permite dar cuenta del sentido que los estudiantes otorgan a sus propias creencias, y genera nuevas posibilidades para la acción, la negociación y el acuerdo.

3.3 Evolución de las creencias en el marco de programas específicos

Los estudios que consideran la evolución de las creencias en el marco de un programa de formación determinado no son tan abundantes en comparación con los que analizan cuáles son las creencias de los profesores o qué efectos tienen éstas sobre su práctica docente. Por esta razón pensamos que nuestra contribución puede ser relevante en el ámbito de la educación matemática. Entre las investigaciones llevadas a cabo con esta intención, el trabajo de Philippou y Christou [103] es un precedente muy interesante para nuestra investigación, puesto que comparte aspectos esenciales del trabajo: a) atiende a las creencias de los profesores en torno a la matemática, a su enseñanza y aprendizaje en un análisis longitudinal; b) incluye un programa de formación especialmente diseñado para investigar cambios en las creencias; c)

cuadrados y se quiere hacer una cortina con piezas cuadradas de un metro de lado. ¿Cómo ha de cortarse y coserse dicha cortina?" Discutiremos en mayor profundidad este problema en el capítulo 5. Por ahora, adelantamos que fue planteado en el transcurso de una clase y discutido un par de días después. Núria afirmaba que el enunciado no quedaba claro, pues para cubrir la ventana se necesitaría una pieza rectangular cuyo ancho fuera al menos el doble del ancho de la ventana, para permitir así que la cortina ondulara, y además contar con sobrante para las costuras y el dobladillo. También hubo quienes manifestaron que lo habían entendido como un puzzle sin dar ninguna importancia al contexto de las cortinas y por tanto acordaron que una solución requeriría dos piezas que había que recortar adecuadamente para que encajaran en un marco cuadrado.

presta una atención específica a los contenidos históricos y d) incluye la evaluación del programa en términos de cambio en las creencias del profesorado. Sin embargo, se encontrarán aquí diferencias sustanciales, en cuanto a los presupuestos teóricos y metodológicos utilizados, que conducen inevitablemente a diferencias importantes en lo que se refiere a la interpretación de los datos y las perspectivas futuras que surgen de la investigación.

El hecho de investigar las creencias de un grupo en relación con las matemáticas bajo la acción de un programa didáctico específico ha sido considerado desde dos perspectivas: la de la causalidad y la de la atención a los procesos. En el primer caso se diseña e implementa un curso determinado y se evalúan cuáles son las creencias antes y después del curso. Normalmente se confirman las hipótesis de *cambio* previstas por los investigadores y cuando no es así, se formulan nuevas hipótesis que pudieran explicar por qué no ha existido modificación. Por lo general, además, no se contempla la posibilidad de que existan personas para quienes no sea efectivo un curso de ese tipo. La no existencia de un cambio en las creencias o la actitud de los participantes se atribuye por ejemplo a la escasa duración del curso o a la intensa influencia *negativa* de los prejuicios sociales hacia la matemática [103]. Las perspectivas para la acción que se deducen de este tipo de investigaciones son muy débiles, puesto que se ciñen a una continua revisión del contenido de los currículum o a una ampliación del número de horas que se dedica a la asignatura, todo ello bajo las perspectivas e intenciones de los investigadores. Por si fuera poco, las interminables revisiones que se llevan a cabo de los progamas no conducen siempre a los cambios deseados. Ese es el principal problema de los enfoques deterministas cuando se trata de dar cuenta de la compleja realidad humana en un contexto educativo: que los muchos intentos por *perfeccionar* los programas educativos no encienden el auténtico motor del cambio social, que es el reconocimiento por parte de los implicados en la investigación de sus posibilidades de acción.

El segundo enfoque –el que presta más atención a los procesos que a las causas– sirve de una manera más adecuada a este reconocimiento, en tanto que da cuenta de la experiencia de los participantes en relación con el contenido del curso. Naturalmente, una investigación de este tipo podría concluir también en afirmaciones de tipo determinista y por eso es importante que el marco teórico que se considera para interpretar los datos no lo sea.

El objetivo de la investigación que hemos llevado a cabo, que incluye el diseño y la puesta en práctica de un curso, no es *cambiar* una opción epistemológica individual insertada en la mente de los estudiantes, sino brindarles la posibilidad de generar nuevas relaciones en el escenario académico habitual. Para muchos de ellos serán relaciones de cambio positivo en el sentido que muchos investigadores desearían; para otros representarán cambios en otro sentido o no representarán modificación alguna. Pero a lo que realmente puede aspirar la investigación es a dar cuenta de esas relaciones. No se trata de comprobar la efectividad del curso diseñado sobre el cambio de creencias o actitudes, sino sobre las posibilidades de acción que los propios participantes generan en ese contexto académico.

Parte II

Marco metodológico

Capítulo 4

Diseño del curso y metodología de investigación

En su sentido más habitual, el concepto "metodología" se restringe al conjunto de los **procedimientos** utilizados para garantizar la aceptabilidad de los conocimientos que se elaboran en una cierta disciplina [70]. La descripción de dichos procedimientos ha de ir acompañada de su justificación explícita, y ésta ha de hacer eco las consideraciones teóricas que sustentan la investigación. Los planteamientos metodológicos, tanto en lo que a las técnicas concretas de recogida de datos se refiere –dimensión instrumental–, como a la forma en la que en ellos se concretan los planteamientos teóricos asumidos –dimensión teórica–, exigen un examen crítico que dilucide, sobre todo, cómo influyen en el conocimiento que se deriva de su utilización.

Sobre la relación entre la teoría y la metodología en las investigaciones se pueden distinguir dos grandes orientaciones: la primera de ellas supedita la metodología a la teoría, es decir, considera que las opciones metodológicas son una parte integral de los sistemas teóricos que se utilizan en la investigación.

> Las propuestas teóricas en la elaboración de los métodos determinan sus resultados y esto probablemente más que a la inversa. [72], p. 12.

En la segunda orientación, los datos mismos y su análisis son considerados como elementos teóricos de la disciplina, porque se considera que son los problemas de investigación los que determinan los métodos que serán utilizados. La teoría, por lo tanto, se subordina a la metodología.

Desde la perspectiva que consideraremos en esta investigación, la teoría y la "realidad" a la que se refieren los métodos de recogida y análisis de datos están íntimamente relacionadas, pero se da preponderancia a la teoría sobre la metodología en el sentido siguiente: El carácter intrínsecamente práctico de la lógica de la investigación conduce de manera natural a la utilización de métodos dirigidos a la comprensión –más que a la predicción o explicación de causas– de la actividad matemática que llevan a cabo los estudiantes. Además, el compromiso transformador de la teoría conduce a utilizar métodos que movilicen la capacidad innovadora de quienes participan en la investigación.

Desde esta posición teórica se contempla al ser humano como co-creador de su propia realidad a través de la participación y las relaciones en comunidades y desde la metodología de las investigaciones se enfatiza la participación y cuestiona el *método científico* en su aplicación a las ciencias sociales. La investigación queda entonces caracterizada como un proceso de vida –una experiencia– más que como una actividad académica. El investigador pierde protagonismo, y son las relaciones entre todas las personas que participan de la experiencia quienes se expresan a través del investigador.

La filosofía de la investigación cualitativa encuentra su origen en planteamientos de carácter humanista que sostienen que las personas se auto-determinan a través de sus intenciones, de sus propósitos y de sus elecciones intelectuales. Los métodos cuantitativos tradicionales, en consecuencia, son considerados poco relevantes porque excluyen los sentimientos, pensamientos o expresión de estas personas de los resultados que se obtienen [104].

La *polémica* sobre la utilización de métodos cuantitativos y cualitativos que se inició en los años 20 en los ámbitos de la sociología y la antropología se extendió en primer lugar al ámbito educativo con un auge de las tradiciones descriptivas e interpretativas. Para estas tradiciones el objeto de la investigación social son principalmente los significados que otorgan los individuos a su experiencia. Lo que entendemos por significado es, como indica Ibáñez,

> [...] inapresable en los formalismos necesarios para proceder a una cuantificación. En efecto, su carácter de "sistema abierto", de proceso "permanentemente en construcción" y de fenómeno siempre "contextualizado" lo convierten en un objeto radicalmente **no–formalizable**. [70], p. 248.

Una discusión exhaustiva de los rasgos que definen la investigación cualitativa a través de su historia, los diferentes paradigmas interpretativos que se identifican con este tipo de métodos, así como diferentes métodos de recogida y análisis de datos puede encontrarse en el *Handbook of qualitative research* [35]. Específicamente en el ámbito educativo, el *Handbook of qualitative research in education* [84] abarca un amplio rango de perspectivas teóricas y tradiciones metodológicas cualitativas en las ciencias humanas concretadas en investigaciones educativas.

En este capítulo profundizaremos únicamente en aquellos aspectos relevantes para el marco metodológico que hemos adoptado *a partir* de la lógica teórica que expusimos en los capítulos anteriores.

4.1 Perspectivas individualistas vs. holísticas

Las investigaciones cualitativas se centran por lo general en el análisis de grupos o de individuos que forman parte de un grupo. Pero en este esfuerzo por integrar en una investigación la *voz* de las personas que participan en ella se abre el debate sobre el individuo o el grupo como constituyentes de la realidad social y sus tesis, llevadas hasta las últimas consecuencias, cuestionan que la sociedad misma pueda ser estudiada según el método científico [26]. En muchos casos, las investigaciones *personalizan* un grupo, al que se atribuyen diversas actitudes, creencias e incluso emociones, que podrían ser atribuídas individualmente a cada uno de sus miembros. De este modo, cada una de las personas que componen ese grupo podría ser observada individualmente asumiendo que tiene esas características. Este tipo de consideraciones metodológicas son las que enfrentan posturas individualistas y posturas holistas dentro de un mismo enfoque cualitativo. Para los primeros, el grupo es considerado como una suma de individuos y por extensión, una determinada comunidad o toda la sociedad es considerada también como suma de indiviuos. Por lo tanto, cualquier explicación de fenómenos sociales habría de ser articulada en términos de lo que los individuos piensan, pretenden o hacen.

Los holistas, sin embargo, enfatizan precisamente que la sociedad no consiste únicamente de individuos sino de *algo* más escurridizo, menos físico, que son las relaciones entre ellos, de modo que cualquier explicación de los fenómenos sociales ha de explicarse a partir de la realidad que los individuos construimos en el seno de dichas relaciones.

Un planteamiento de carácter individualista tiende a intentar “comprender” por qué ocurren ciertas cosas: por qué los estudiantes no aprenden; por qué se bloquean ante un problema; por qué un estudiante no se integra en el grupo; por qué un estudiante no contesta cuando se le pregunta. La causalidad predomina en la investigación porque se supone que existen motivos *a priori* que hacen a las personas comportarse de una u otra manera. Presuponen, a menudo implícitamente, que las actuaciones de los estudiantes responden a un estímulo externo como puede ser, por ejemplo, el lenguaje. El investigador es, desde esta posición, un nuevo individuo que tiene la posibilidad de ver a sus sujetos de investigación desde otra perspectiva. Las técnicas cualitativas de recogida de datos basadas en entrevistas, cuestionarios de preguntas abiertas o notas de campo son aplicables en este tipo de investigaciones. Es importante resaltar que no son las técnicas las que marcan la diferencia entre una perspectiva individualista o una perspectiva holística, sino la teoría con la que se interpretan los resultados.

Las investigaciones cualitativas de carácter individualista, en tanto que consideran que un grupo está constituido por individuos, estudian personas que sumadas constituyen el grupo y por ello generalizan sus resultados a lo que ocurre en el grupo clase. La metodología en estudios cualitativos de carácter holístico, sin embargo, pone el acento en las relaciones que se establecen entre personas, en la construcción colectiva de la realidad, porque considera que los grupos cohesionan no sólo por el pensamiento individual, sino por acción e interacción.

Por ello el foco de la investigación es la comunicación, ya que mediante la comunicación son los individuos quienes superan sus diferencias.

De toda la reflexión hecha hasta aquí se desprende que asumir plenamente una posición teórica que defiende una realidad discursiva implica asumir que las aportaciones de un individuo no *son* originales, sino que surgen en la interacción y pertenecen a una realidad colectiva. La investigación misma es una producción colectiva. Por tanto, lo que es original es la vivencia de dicha idea para una persona o un grupo. La "propiedad intelectual" no existe desde este punto de vista porque las ideas, las relaciones y la interactividad no pertenecen al individuo, sino a la colectividad. Al investigador le corresponde únicamente la última interpretación de la experiencia. Intentar defender originalidad en la producción intelectual cuando se asume un marco de este tipo dejaría al investigador en una situación de debilidad, en tanto que la idea de construcción social del conocimiento está siendo utilizada para el grupo de estudio, pero no para la propia actividad investigadora.

Aprendizaje cooperativo y colaborativo

Tanto la posición individualista como la posición holística están presentes en la tendencia actual de las investigaciones educativas cualitativas que se ocupan, respectivamente, del aprendizaje *cooperativo* y del aprendizaje *colaborativo*.

La información que apuntan quienes establecen un origen para el aprendizaje cooperativo consideran su inicio en los modelos instruccionales de los años 70, que trataban de llevar a la práctica estrategias muy sistemáticas de trabajo en grupo para ser utilizadas en cualquier nivel y para todo tipo de contenidos [117]. El interés fundamental era determinar sus efectos en el rendimiento y las habilidades adquiridas por los estudiantes.

Todos estos estudios defendieron una conclusión clara y ampliamente extendida: en un marco amplio de condiciones, de los esfuerzos cooperativos resultan un gran rendimiento y mucha más productividad que de los esfuerzos competitivos o individuales [77]. Posteriormente, el interés se desplazó hasta considerar cuáles son los mecanismos de la cooperación, para así identificar procesos cognitivos y sociales que actúan moderando la relación entre cooperación y relación interpersonal o productividad [65], y comprender bajo qué condiciones la cooperación es o no es efectiva, considerando como evidente, por tanto, que la cooperación no siempre funciona.

Desde nuestra discusión teórica, cualquiera de estas opciones corresponde a una concepción del conocimiento de carácter individualista y contrasta con las tendencias teóricas que surgen de una concepción colectiva del conocimiento. Estas últimas comenzaron a tomar fuerza en los años 90, dando lugar una nueva concepción del aprendizaje: el aprendizaje colaborativo [33, 22]. El interés de la investigación en el aprendizaje colaborativo se centra en descubrir cómo se movilizan los individuos a partir de sus acciones para crear un significado conjunto.

Lo interesante para el aprendizaje desde esta perspectiva es la actitud de los miembros del grupo hacia el propio grupo.

En general, los modelos de aprendizaje cooperativo que se ocupan de los procesos sociales están basados en los principios del constructivismo social, que hace especial hincapié en la construcción psicológica que el estudiante individualmente elabora, concediendo cierta prioridad al proceso social en dicha construcción. En la propuesta del aprendizaje colaborativo, sin embargo, existe un rasgo diferencial muy importante, que es el interés por el proceso microsocial y las relaciones entre los estudiantes. La distinción que ofrece la perspectiva colaborativa es particularmente importante para enfatizar que en las relaciones humanas reside el potencial de transformación de la sociedad[1].

Los aspectos metodológicos que hemos desarrollado hasta ahora nos permiten describir de manera justificada el método de trabajo que hemos seguido durante el curso. El estudio de casos, las notas etnográficas o el análisis del discurso ofrecen las pautas generales de una aproximación que en cada investigación es necesariamente distinta, original, no en las ideas sino en la realización. No hemos seguido al pie de la letra un determinado procedimiento habitual en el análisis cualitativo y a la vez hemos considerado muchos de ellos: las entrevistas, el uso de materiales escritos, las notas de campo, etc. se concretan en otras técnicas particulares, que son las que creamos al hacernos participantes activos de esta investigación. Somos, en cierto modo, herederos de una fértil y productiva tradición de investigadores que han impulsado los métodos cualitativos en la investigación.

En la introducción de esta memoria ya se apuntaron cuáles eran las características fundamentales del curso. Ahora analizaremos en detalle cuáles fueron los contenidos trabajados, qué actividades complementarias se llevaron a cabo y cómo se gestionaron las narraciones escritas y los grupos de discusión en los que participaron los estudiantes.

4.2 Desarrollo del curso

La experiencia se desarrolló con 56 estudiantes de primer curso de magisterio en la titulación de maestro de primaria (generalista). La asignatura que se cursó fue Matemàtiques I, y las clases tuvieron lugar entre septiembre y diciembre del año 2001.

Cuando presentamos el curso a los estudiantes se les informó que formaba parte de un

[1] Bruffee [22] integra ambas perspectivas proponiendo que cada uno de ellos fue desarrollado originalmente para personas de diferentes edades, experiencia y niveles de destreza, en relaciones de interdependencia. En este sentido, en algunos aspectos el aprendizaje colaborativo en niveles superiores complementa la cooperación en niveles inferiores: El aprendizaje cooperativo enfatiza la integración social en las escuelas y garantiza un aprendizaje efectivo en los primeros niveles educativos. Sin embargo, el colaborativo enfatiza la construcción social del conocimiento, ofreciendo a los estudiantes la posibilidad de aprender a trabajar de manera eficaz, en interdependencia, sobre un contenido determinado.

proyecto de investigación, razón por la cual impartiríamos el curso dos profesores. Pusimos en común cuál era nuestra forma de entender la matemática y su didáctica y cuáles eran los objetivos del curso[2]. Básicamente enfatizamos los siguientes:

1. Reflexionar sobre el papel de la historia en la evolución del pensamiento matemático.
2. Distinguir distintas aproximaciones para resolver un mismo problema matemático.
3. Alcanzar los objetivos anteriores a partir de contenidos matemáticos e históricos en torno a la medida.

A los estudiantes se les entregó el texto que habíamos preparado para el desarrollo del curso, y que puede consultarse en el apéndice 1 de esta investigación. La síntesis de los contenidos del curso, tal y como fue presentada a los estudiantes, es la siguiente:

Contenidos

1. Evolución del mito al pensamiento racional. La relación de la astronomía con las matemáticas en antiguas civilizaciones.
2. Propiedades geométricas aplicadas al cálculo de distancias inaccesibles. Congruencia y semejanza de triángulos.
3. Propiedades geométricas aplicadas a la medida de la circunferencia de la Tierra. Relación entre ángulos y arcos de circunferencia.
4. Inicio de la trigonometría. Relación entre los ángulos y lados de un triángulo cualquiera.
5. Crecimiento de área y volumen. Tamaño y proporción. Ideas históricas que relacionan las matemáticas y la física.
6. Area del círculo y aproximaciones diversas para el valor de π.
7. El principio de Cavalieri aplicado al cálculo de volúmenes.

Se les informó además de las principales características metodológicas del curso, tanto en lo referente al desarrollo de las clases como a las actividades complementarias (comentarios de texto y actividades para la discusión) que se llevaron a cabo, y que por su interés para la investigación detallamos a continuación.

[2] En todo momento se informó a los estudiantes de cuál era nuestra intención y nuestra perspectiva teórica, porque pensamos que es la manera más natural de proceder. La *obsesión* de algunas investigaciones por ocultar este tipo de información, preveyendo que pueda influir en los resultados, está fuera de lugar desde nuestra perspectiva. En primer lugar, porque defendemos que no tiene ningún sentido intentar crear una situación "de laboratorio". Por otra parte, si sólo con el hecho de explicitar las creencias de uno se pudiesen cambiar las de los demás, aún mayor motivo para explicitarlas abiertamente.

Comentario de textos

Algunos de los temas que se trabajaron durante el curso incluyeron la lectura y el comentario de textos de divulgación científica. Según nuestra experiencia, los estudiantes de magisterio están poco habituados a leer artículos en revistas de divulgación o de ciencia en general. Los textos fueron escogidos especialmente por su interés en relación con la matemática o por la conexión con otras disciplinas y temáticas que se *abren* a partir de los contenidos presentados. La relación de textos planteados en este curso fue la siguiente:

1. *El origen del universo.* Vernant, J.P. (1999). En: El universo, los dioses, los hombres (edición en castellano, 2000). Anagrama, col. Argumentos, Barcelona, p. 15–26.

2. *Geometría y astronomía esférica en la primera cosmología griega.* Vernant, J.P. (1973). En: Mito y pensamiento en la Grecia antigua (tercera edición en castellano, 1993). Ariel Filosofía, Barcelona, p. 183–188.

3. *Nuevas geometrías para un nuevo universo.* Albers, D; Campbell, P.J; Crowe, D; Schuster, S; Thompson, M. (1994). En: Las matemáticas en la vida cotidiana (edición en castellano, 1999). Addison-Wesley Iberoamericana, Madrid, p. 629–634; 648.

4. *La astronomía en el tiempo de Colón.* Gingerich, O. (1993). En: Investigación y Ciencia, núm. 196, enero, p. 6–11.

5. *El poder de los mapas.* Wood, D. 1993. En: Investigación y Ciencia, núm. 202, julio, p. 50–55.

6. *Elvis, la pelvis.* Arsuaga, J.L. 1999 En: El collar del neandertal, Eds. Temas de Hoy, Madrid, p. 97–107.

Una síntesis detallada de los objetivos específicos del curso en relación con los contenidos, los problemas que se propusieron y la relación de textos para comentar, aparece sintetizada en la tabla **??**.

Tabla 4.1: Síntesis del contenido del curso

CAPÍTULO	OBJETIVOS Y CONTENIDOS		PROBLEMAS	COMENTARIO de TEXTOS
1: Del mito al pensamiento geométrico	Comprender el papel de la astronomía en el desarrollo histórico de las matemáticas. Comprender cómo se utilizan algunas propiedades geométricas en mediciones astronómicas.	Astronomía en antiguas civilizaciones: Egipto, Grecia, Babilonia. Eclipses de sol y de luna: Cómo y por qué se producen.	Sistema Tierra-Sol-Luna: Tamaño aparente y relación tamaño-distancia.Órbitas. Geometría de los eclipses. Triángulos semejantes Construcción con regla y compás de la circunferencia que pasa por tres puntos. Conversión de unidades en diferentes sistemas.	Evolución del mito a la razón: Textos 1 y 2.
2: Geometría para medir distancias	Comprender el pensamiento geométrico desde diferentes perspectivas. Comprender el sentido matemático de la medida indirecta	Características de la producción matemática griega y china. Relación entre algunas de las propiedades matemáticas del triángulo con la presencia de esta forma geométrica en la vida cotidiana. Conocer algunas características de la producción matemática griega y china.	Movimientos en el plano: simetrías, rotaciones, traslaciones. Triángulos congruentes por movimientos del plano. Semejanza de triángulos rectángulos. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza.	Introducción a los sistemas axiomáticos y a las geometrías no euclidianas: Texto 3.

Continúa en la página siguiente

Tabla 4.1: Continuación

CAPÍTULO	OBJETIVOS Y CONTENIDOS		PROBLEMAS	COMENTARIO de TEXTOS
3: Redondeando la Tierra	Conocer diferentes modelos históricos para explicar la forma de la Tierra. Comprender el método geométrico utilizado en algunos cálculos aproximados de la circunferencia de la Tierra.	Modelos de Tierra plana como producto de la experiencia cotidiana. Situación científica en Alejandría.	Sentido del ángulo como región del plano y como medida numérica. Relación entre longitud de arco y su ángulo central correspondiente. Distancia sobre una esfera. Coordenadas esféricas: longitud y latitud. Elipsoide y geoide. Medidas de *achatamiento*	
4: Relacionando ángulos y lados	Relacionar ángulos y lados en un triángulo a partir de la trigonometría. Conocer algunas de las características de la ciencia de diversas culturas en la Edad Media.	Introducción de la obra de Ptolomeo. Situación cultural y científica en Occidente en los siglos de dominación romana. Algunas características de la producción matemática árabe.	Origen de la trigonometría. Teorema de los senos. Sentido matemático de la medida indirecta con instrumentos diversos: astrolabios, cuadrante, sextante, ballestilla, grafómetro. Teorema de Tales.	Significado político de los mapas y, el mito de Colón y su *descubrimiento* de la forma esférica de la Tierra: Textos 4 y 5.

Continúa en la página siguiente

Tabla 4.1: Continuación

CAPÍTULO	OBJETIVOS Y CONTENIDOS		PROBLEMAS	COMENTARIO de TEXTOS
5: El área del círculo	Reflexionar sobre qué consideramos *razonamiento riguroso* y un *razonamiento intuitivo*. Relacionar el área del círculo con el área de los correspondientes cuadrados inscrito y circunscrito. Idem para la longitud de la circunferencia y el cuadrado. Conocer métodos diversos para dar una aproximación de π.	El sistema axiomático de la geometría griega en comparación con otras aproximaciones a la geometría. Los pitagóricos y el problema de la inconmensurabilidad. El método de exhausción de Eudoxo y el problema filosófico del infinito.	Aproximaciones para el área del círculo en India, Egipto, Babilonia y China. El método de reducción al absurdo y los cálculos de Arquímedes para encontrar el área del círculo y una aproximación para π. Aproximación a la circunferencia mediante polígonos regulares inscritos.	
6: El método de Cavalieri	Utilizar el método de Cavalieri para el cálculo de volúmenes. Conocer y relacionar el volumen de la esfera, el cono y el cilindro del mismo radio y altura. Relacionar el método de cálculo de áreas y volúmenes de Arquímedes con el de Galileo.	Paradojas relacionadas con la utilización del principio de los indivisibles Utilización de heurísticos en la resolución de problemas	Área lateral de la pirámide y el cono División de un prisma triangular en tres pirámides del mismo tamaño Volumen de la pirámide y el cono Volumen de la esfera	

Continúa en la página siguiente

Tabla 4.1: Continuación

CAPÍTULO	OBJETIVOS Y CONTENIDOS		PROBLEMAS	COMENTARIO de TEXTOS
7: Forma y tamaño a través de las obras de Galileo	Relacionar el crecimiento en longitud, área y volumen de un cuerpo físico. Relacionar propiedades físicas y matemáticas a partir de algunos textos de Galileo.	Relación entre crecimiento, forma y proporción. Situación cultural y científica en Occidente en el Renacimiento. Características de la obra de Galileo.	Conceptos físicos: presión, resistencia al aplastamiento. Cálculo del volumen y la superficie de un cilindro. Diferentes superficies para un mismo volumen. Problema de la duplicación del cubo.	Utilización de proporciones en antropología. Relación entre crecimiento y proporción. Texto 6.

Actividades para la discusión y la reflexión escrita

Periodicamente se distribuyeron hojas de actividades (cinco en total) en las que se pedía a los estudiantes que plantearan un problema o bien que comentaran algun ejercicio sencillo. Hemos incluido estas hojas en el apéndice 3. En ellas se incluían algunas preguntas para reflexionar sobre la actividad matemática en relación con la vida cotidiana, la historia o la didáctica.

La primera actividad coincidió con los primeros días del curso y consistía en la redacción de un problema que tuviera relación con la medida. Las tres siguientes pretendían recoger temáticamente diferentes dimensiones o criterios que se consideran en "ese movimiento denominado alfabetización científica (*science literacy)*; un escalón más allá del alfabetismo funcional"([51], p. 18.) La última de las actividades propuestas volvía a ser el planteamiento de un problema, esta vez sin restricciones temáticas.

Las hojas de actividad eran entregadas individualmente y además, en relación con el trabajo llevado a cabo al elaborarlas, se podía elegir entre participar en grupos de discusión (uno por cada actividad) o entregar una breve memoria escrita sobre cada uno de ellas. Fueron, en general, actividades cuyo objetivo era exclusivamente crear una situación en la que los estudiantes discutieran o escribieran sobre distintas aproximaciones a la matemática. Las preguntas sobre las cuales se pretendía que los estudiantes reflexionaran aparecen recogidas en la tabla 4.2.

4.3 El análisis narrativo

Las narraciones de los estudiantes, orales o escritas, constituyeron la principal fuente de datos para la investigación. Las narraciones son consideradas por algunas tradiciones psicológicas como un ejercicio del pensamiento en el que el narrador delimita sus propias elecciones y va dando sentido a su experiencia. Por tanto, no se trata sólo de un vehículo de comunicación, sino de un instrumento para construir la propia experiencia [113] y tiene sentido considerarlas como *datos* de investigación. Las consideraciones teóricas y los objetivos de esta investigación sugieren adoptar las tesis de dichas tradiciones psicológicas.

El objetivo de un análisis de este tipo es hacer inteligibles aquellas narraciones que los sujetos hacen de su propia experiencia. En concreto, en esta investigación, el objetivo del análisis es comprender los esquemas interpretativos con los que los estudiantes dan sentido a su experiencia matemática anterior, y las posibles consecuencias de la transformación que pueden estar viviendo durante este curso. No se busca relacionar causalmente lo que *saben* al finalizar el curso y el contenido del mismo, sino identificar qué características de las que se van introduciendo en relación con la matemática podrían hacer que situaciones diferentes produjeran finales diferentes.

Actividad	Descripción y preguntas sugeridas
1. *Problema inicial*	Proponer un problema relacionado con la utilidad práctica de la medida. Se utilizó como **descriptor de la situación inicial del curso**.
2. *Abejas*	**El conocimiento científico en su dimensión cultural:** Se plantea interpretar la descripción hecha en un artículo de divulgación sobre la danza de las abejas en una colmena. Preguntas relacionadas con la actividad son: ¿Es importante leer divulgación científica? ¿Qué interés tiene para la formación de los individuos? ¿Cómo se relacionan las matemáticas con otras ciencias?
3. *Modelos de la Tierra*	**El profesor como investigador en el aula:** Se pide a los estudiantes que interpreten las respuestas dadas por niños, en contextos culturales diferentes, al intentar explicar cuál es la forma de la Tierra y cómo es el ciclo del día y la noche. Preguntas relacionadas con la actividad son: ¿Cómo interpretan los futuros profesores los modelos explicativos de los niños? ¿Cuál consideran que es el papel de la cultura en sus modelos explicativos? ¿Qué papel juegan los conceptos matemáticos en la formulación de modelos habitualmente considerados en otras ciencias? Nos referiremos más detalladamente a esta actividad en el capítulo 6.
4. *Herencias*	**Contextualización histórica de los problemas**: Se plantea la comparación del enunciado de dos problemas de herencias de la matemática árabe (ver discusión en el capítulo 2). La pregunta principal que se planteó en relación con esta actividad fue: ¿Cómo influye el contexto histórico en el enunciado o el método de solución de un problema?
5. *Problema final*	De la misma manera que al inicio del curso, la participación de los estudiantes concluyó con la propuesta de un problema, que pudo ser comparado con el que se planteó al inicio del curso. Se utilizó como **descriptor de la situación final del curso**

Tabla 4.2 Síntesis de contenidos y objetivos de las hojas de actividad utilizadas.

4.3.1 Transformación e investigación

Los procedimientos que describimos a continuación se sitúan dentro del paradigma interpretativo sobre el que volvemos una y otra vez en cada uno de los capítulos de este trabajo. Adoptar esta posición supone, en primer lugar, que los datos que nos interesan para la investigación han de recoger la interpretación que hacen los estudiantes de su actividad matemática a lo largo del curso. Además, el propósito de obtener datos para la investigación es, teórica y moralmente, inseparable del propósito de ofrecer a los estudiantes elementos relevantes para su formación, que entendemos aquí como *trans*formación. Esto requiere una indiscutible flexibilidad metodológica, desde el diseño de las técnicas hasta el tratamiento que se lleva a cabo de la información obtenida.

> El diseño de las estrategias metodológicas debe ajustarse tanto a los objetivos de la investigación, como a las características del objeto y las circunstancias a las que está sometido. [52], p. 58.

No sorprenderá, por lo tanto, que los temas que se proponían para la reflexión, el tipo de actividades que los estudiantes llevaron a cabo y de las que luego hemos obtenido la mayoría de los datos y, en general, todos los contenidos del curso, estuvieran contextualizados en su futura actividad profesional como profesores de matemáticas.

Al conjunto de la clase se le explicaron los objetivos del trabajo, así como la información que pretendíamos recoger a partir de las narraciones escritas y de las discusiones llevadas a cabo en los grupos. Se informó también de que uno de nuestros compromisos en la investigación era que todo lo que se hiciera debía ser útil para su formación como futuros maestros, y que debían llamar nuestra atención si sentían que en algún momento se priorizaban objetivos específicos de la investigación. Las alteraciones sobre lo previsto que se sugirieron en este sentido fueron mínimas a lo largo de todo el curso: una mayor flexibilidad en los plazos previstos de entrega de trabajos de acuerdo a las condiciones personales de cada uno, y pequeños cambios que afectaron a la composición de los grupos de discusión. De acuerdo con el número de personas que acordaron participar en estos grupos, se organizaron cuatro de 6, 7, 5 y 8 personas respectivamente. Cada uno de ellos se reunió cuatro veces a lo largo del curso junto con la investigadora y fuera del horario habitual de clases. Todas las sesiones fueron grabadas en vídeo, de manera que al finalizar el curso disponíamos aproximadamente de 16 horas de grabación.

4.3.2 Grupos de discusión y narraciones escritas

Los grupos de discusión se planteaban de forma no directiva y abierta. En el primero de los encuentros con cada uno de los grupos se discutieron los problemas que habían escrito los estudiantes en los primeros días del curso. La investigadora había leído los problemas propuestos por cada uno de los miembros del grupo y seleccionado algunos de ellos para que su autor o autora lo expusiese. Alguna de las restantes personas en el grupo comentaba o criticaba el problema desde su punto de vista y a partir de este momento se dejaba que fuese el propio grupo quien fuera negociando la temática de la discusión.

Las temáticas generales para cada una de las sesiones segunda, tercera y cuarta, fueron introducidas a partir de las actividades que previamente habíamos diseñado (tabla 4.2). En general, en cada una de las sesiones se discutían: a) el sentido que habían encontrado a cada una de las actividades; y b) cuestiones de carácter global relacionadas con cada una de ellas.

En lo que se refiere a las sesiones en particular, en la segunda se discutió el papel de la divulgación en la alfabetización científica y la relación de las matemáticas con otras ciencias. Además, coincidiendo aproximadamente con la mitad del curso, se pidió a los estudiantes que explicasen algún momento del curso que hubiera sido especialmente relevante para su experiencia. En la tercera sesión se debatió el sentido que se le concedía a las aplicaciones matemáticas en la explicación de hechos físicos y el papel de la cultura en nuestra forma de interpretar cuestiones que tienen que ver con la ciencia. En la cuarta y última sesión se discutieron algunos aspectos relacionados con el papel de la historia en el desarrollo de la matemática y se evaluó la experiencia de los estudiantes durante el curso. El mismo esquema de sesiones fue propuesto para quienes participaban mediante narraciones escritas.

Narraciones escritas

Quienes optaron por escribir acerca de su experiencia nos entregaron sus relatos en cuatro ocasiones, que en general coincidieron temporalmente con las ocasiones en las que se reunían los grupos de discusión. En algunos casos particulares, los estudiantes demandaron una cierta flexibilidad en la entrega de sus narraciones.

Desde el momento en el que propusimos la opción de que los estudiantes escribieran sus reflexiones sobre la marcha del curso pensábamos que quien escribe tiene la oportunidad de *darse cuenta* de cuál es su proceso de conocimiento. Mediante la escritura se crea un registro textual que al ser leído permite volver una y otra vez sobre las propias creaciones, sobre las vacilaciones o sorpresas, de manera que desde esta lectura puede impulsarse la creación de significado. La textualidad que generan los grupos de discusión tiene una diferencia esencial con respecto a la escritura y es precisamente su temporabilidad limitada, que no necesariamente queda recogida más allá del recuerdo de una dramatización. Además, tal y como fue diseñada la experiencia, las reflexiones escritas por los estudiantes son el reflejo de una trayectoria con rasgos mucho más íntimos y particulares que las que se producen en el contexto de los grupos de discusión, en los que la interacción de cada uno de los participantes proporciona otra dimensión a la experiencia del conocimiento sobre la actividad matemática. Esta característica equilibra la riqueza de interacciones que surgen en el grupo y que no se dan en el caso individual. Es importante señalar que no intuíamos a priori qué diferencias encontraríamos entre los textos escritos y orales.

Aunque el análisis de ambos tipos de datos se realiza sobre la misma base teórica del conocimiento social, nuestro foco en el caso de las reflexiones escritas está puesto en los movimientos que surgen de la historia de personas particulares a partir de la experiencia colectiva del curso. Cada persona es producto único de numerosos condicionantes y perspectivas sociales y culturales. Las teorías sociales del conocimiento que hemos adoptado como marco teórico también se interesan en la comprensión del individuo, pero no tanto en el estudio cognitivo de su mente, como en la comprensión de las transformaciones que se producen mientras se van relacionando todas aquellos condicionantes y perspectivas, que no se pretenden abarcar.

Los grupos de discusión producen un tipo de conocimiento basado en el encuentro con personas que se desata a partir de la experiencia. Las narraciones escritas, sin embargo, amplifican la búsqueda interior de significado. En consecuencia, los datos recogidos en los grupos de discusión y en los informes escritos son estructuralmente diferentes y han sido analizados de manera diferente.

4.4 Validación

El tema de la validación ha sido enfatizado en gran medida por las investigaciones de carácter cualitativo. Algunos autores afirman que existe una *sabiduría* general sobre criterios implícitos que evalúan y guían las investigaciones. Cuando aparecieron los primeros intentos de utilización de una metodología de investigación cualitativa, los aspectos relacionados con la validación de los resultados fueron dejados en cierto modo en segundo plano, concentrándose todos los esfuerzos en definir un marco alternativo claro ante los métodos tradicionales de carácter positivista. A medida que la aplicación de los métodos cualitativos fue ganando fuerza, también se profundizó en la discusión sobre aspectos de validación, lo que ha conducido al desarrollo de criterios explícitos que dan cuenta públicamente de la viabilidad o la utilidad de las investigaciones. Una discusión sobre diferentes criterios de validación ampliamente reconocidos en investigaciones que utilizan técnicas de análisis cualitativo puede encontrarse en [5, 54].

El problema de la validación en la investigación cualitativa tiene mucho que ver con el poder predictivo de las investigaciones que surgen de un planteamiento determinista. Hacer predicciones es una herramienta muy potente en el refinamiento de una teoría, y en oposición, aceptar abiertamente que las predicciones precisas son imposibles deja al investigador en una posición desde la que puede ser fácilmente blanco de críticas [70]. La crítica ante la ausencia de resultados *fiables* ha dado lugar a argumentos muy interesantes en el seno de las investigaciones de carácter particular o interpretativo. Ante la incapacidad para la generalización y el trabajo con un número reducido de personas, García–Bores se refiere a autores que invierten la cuestión: "¿Cómo es posible particularizar a partir de un estudio que comprende a una población numerosa?" [52]. Otra postura ante esta crítica es que al conocer al sujeto se está conociendo, en realidad, la concrección de toda la cultura en la que ha transcurrido su experiencia.

A lo largo de nuestro proceso de análisis en ningún momento hemos tratado de ofrecer una muestra *representativa* en términos estadísticos, sino una representatividad de carácter cualitativo, que recoja diferentes situaciones en las que los estudiantes dan sentido a su experiencia matemática. Nuestra intención no es, ni siquiera, desarrollar ejemplos de casos que evidencien la certeza de determinadas teorías o presentar alternativas didácticas que pretendan mejorar la práctica docente, sino percibir la investigación como el pretexto para conocer mejor la experiencia de los estudiantes. El proceso de conocer y hacer público el conocimiento produce cambios y la realidad investigada ya no es la misma, de modo que surge la exigencia de conocerla de nuevo.

Este tipo de investigaciones donde se da el protagonismo a los participantes, tiene como consecuencia la pérdida de significado de una validación en términos de *veracidad*. Lo que tendría sentido considerar como validación es el hecho de que los participantes se sientan identificados con lo que en la investigación se dice de ellos; que reconozcan en nuestra exposición su propia interpretación de la experiencia. A estas alturas del trabajo aún volvemos sobre la misma premisa que establece la lógica de la investigación: para comprender por qué los estudiantes actúan de una determinada manera hay que saber qué alternativas se le han ofrecido, como las valoran y cómo las seleccionan.

Serrano desarrolla en [113] varios criterios para establecer la validez de una investigación basada en el estudio narrativo: la **co–responsabilidad** y el **pragmatismo**.

> A través de la corresponsabilidad, el investigador contrasta los datos con los propios sujetos investigados, en un proceso dialéctico de co–construcción. Es pues una regla general la conveniencia de ofrecer las elaboraciones empíricas producidas por el investigador a los sujetos, individuo o grupo que participan en el estudio. Esta regla no sólo contribuye a incorporar una dimensión ética a la investigación, sino que, además, cumple una función epistemológica: los comentarios e interpretaciones de los sujetos sobre los resultados "provisionales" aportan nuevas ideas que representan una nueva fuente de imaginación y conceptualización teórica. No obstante, con ser importante, la co–responsabilidad de los sujetos no puede diluir completamente la autoría de la investigación. De hecho, las interpretaciones de los sujetos pueden asimismo ser cuestionadas y, justamente porque la construcción narrativa no es estática, irán tranformándose con el paso del tiempo. De lo cual cabe concluir que la última síntesis interpretativa corresponde al propio investigador, que de este modo asume la responsabilidad final de sus análisis. [113], p. 53.

El criterio que denomina **pragmatismo** hace alusión a la descripción, lo más detallada posible, de la producción de nuestras interpretaciones, de hacer el proceso *visible* para otros investigadores. Es contemplado como criterio para un amplio abanico de opciones teóricas dentro de la práctica de investigación cualitativa. Se trata de un criterio que se hace absolutamente necesario en dos sentidos: en primer lugar, consigue que otros investigadores puedan valorar la plausibilidad de nuestro trabajo y prepara las conclusiones de la investigación para una *generalización natural*[3].

Además, al no asumir un procedimiento explícito en la interpretación, el que los datos obtenidos y la interpretación de sus conclusiones puedan servir a otros autores depende de criterios que necesariamente han de ser explicitados.

Co–responsabilidad y pragmatismo son los métodos que mejor permitirían dar coherencia a la lógica de tranformación que subyace al planteamiento teórico de la investigación. Ambos han sido tenidos en cuenta durante toda la experiencia. A lo largo de todo el curso se evaluaron los contenidos de la materia con los estudiantes, haciéndoles partícipes de la importancia de su participación como parte misma de la investigación.

Pensamos que la validación actuaría desde esta perspectiva teórica como un nuevo elemento que modificaría la realidad de los estudiantes, puesto que les involucra en una acción. Como tal, es susceptible de ser, al menos teóricamente, validada de nuevo. Y así sucesivamente. Concluimos, por lo tanto, afirmando que en este tipo de estudios no es necesaria una validación en los términos habituales que toman las investigaciones. Sí sería posible, sin embargo, plantearla como una extensión de la propia investigación, en el sentido que puede transformar la realidad que ha creado la investigación misma. Por ello, aunque nosotros no hemos planificado un programa específico de validación, de contemplarse la necesidad sugeriríamos hacerlo en los términos que hemos descrito aquí.

Como resultado de todas las premisas metodológicas que hemos considerado a lo largo del capítulo, los datos y el análisis que se ofrecen son particulares en el contexto de esta investigación, pero abren inmediatamente nuevas vías de utilización. Pueden ser utilizados: a) como falsaciones de teorías que pretenden una determinada generalización, como por ejemplo afirmar que la utilización de la historia de la matemática *ensancha* la percepción epistemológica sobre las matemáticas; b) como ejercicio de comprensión fenomenológica en el trabajo con futuros maestros y maestras, o c) cómo generador de nuevas hipótesis de investigación. Una característica evidente es que tanto los datos como sus conclusiones son ofrecidos de manera que pueden ser discutidos permanentemente.

[3]"From case reports we learn both propositional and experiential knowledge [...] The reader comes to know some things, as if he or she had experienced them. Enduring meanings come from encounter, and are modified and reinforced by repeated encounter" [118], p. 240.

Parte III

Análisis de los datos

Capítulo 5

Estudio de los casos I: Textos escritos

El análisis de los datos toma en consideración experiencias individuales y colectivas y se inicia en una primera etapa de *exploración*. A esta etapa le seguirán otras dos: la *descripción* y la *significación*.

La exploración es la etapa en la cual la intuición y la experiencia como docente, como didacta y como persona, van abriendo paso a un ejercicio de organización y sistematización de los datos recogidos. El objetivo de esta etapa es preparar un corpus de datos para el análisis a partir de las reflexiones escritas de los estudiantes y las grabaciones de lo que acontecía en los grupos de discusión. La noción de *corpus* es utilizada a menudo en investigaciones cualitativas y constituye la selección de los registros sobre los que se articulará el resto del análisis. El corpus es el resultado de un proceso en el cual el investigador decide qué casos resultan más representativos y significativos para organizar y dar sentido a la experiencia.

La fase de *exploración* permite obtener una imagen global de la experiencia desde la perspectiva de los estudiantes y definir lo que llamamos en forma genérica *movimientos*, que entendemos como expresiones del estado de agitación intelectual en cuanto a la reflexión sobre la actividad matemática. Un interés explícito por la historia de la ciencia que antes no existía, vacilaciones en el proceso de argumentación de la calidad o cualidades de un problema, e impresiones que involucran una nueva forma de acercamiento a la actividad matemática son ejemplos de movimientos, de casos que hemos seleccionado para sistematizar y describir el proceso de construcción de las creencias de los estudiantes. A estos movimientos nos referiremos a partir de ahora como los **casos de estudio** en esta investigación. Su descripción permite apreciar la pronunciada divergencia de sentimientos, creencias e intereses de los estudiantes en su proceso de reflexión metamatemática. Nos referimos como casos de estudio a los movimientos, y no a personas individuales, para poder así analizar en conjunto tanto los datos escritos como los que provienen de los grupos de discusión.

La descripción de los casos analizados permite atender la diversidad de conocimiento que expresan los alumnos al comenzar sus estudios universitarios. La variedad y complejidad que ilustran los movimientos elegidos para la investigación sugirieron una búsqueda detallada de relaciones entre la experiencia de los estudiantes y el desarrollo del curso. Para cada uno de estos movimientos hemos encontrado otros que han permitido elaborar una interpretación de la trayectoria de los estudiantes en relación a los contenidos –historia, realidad, medida– y la gestión metodológica del curso. De todo ello nos ocupamos en la siguiente etapa de la investigación: la *descripción*.

Cualquier descripción lleva inmediatamente a la búsqueda de un sentido de la acción que se describe, de interpretación de la experiencia. Es la etapa de la investigación a la que algunos autores se refieren como *significación*; la etapa más compleja, y la más creativa:

> Este tercer objetivo cognitivo [la significación] es el más complejo y el que requiere mayor creatividad e imaginación. En el primero [la exploración] se necesita sobre todo sensibilidad y honestidad. En el segundo [la descripción] es indispensable un oficio y una buena capacidad de observación y organización. En este tercero se requiere una firme vocación de sentido, sin ella no es posible indicar dónde algo significa una cosa y podría significar otras. Éste es el objetivo en que el oficio configurador requiere toda su plenitud; el que configura significados sociales es un artista, un filósofo, un humanista y un científico, o está en proceso de serlo. [50] p. 89.

De los casos analizados presentamos aquí los que se refieren a la experiencia de personas que han escrito individualmente sus reflexiones a lo largo del curso. Para la selección se tuvo en cuenta tanto el cambio en el planteamiento del problema propuesto al comienzo y al final del curso, como el compromiso y el nivel de implicación de los estudiantes. En particular, se valoraron especialmente los siguientes aspectos:

En cuanto a los problemas planteados al comienzo y final del curso[1]:

- Que el primer problema se refiriese a contenidos escolares tradicionales, mientras que el segundo rompiera de alguna manera con esta característica.
- Que en la totalidad de los casos seleccionados, los rasgos novedosos introducidos en el problema planteado al final del curso mostraran una diversidad de imágenes de la matemática. Por ejemplo, si dos estudiantes optaron al finalizar el curso por proponer una recreación matemática, sólo seleccionamos uno de ellos.

En cuanto a los estudiantes:

[1] Según describíamos en el capítulo 4, al comenzar el curso se pidió a los estudiantes que plantearan un problema en el cual, según su opinión, quedara reflejada la utilidad de la medida. También a final de curso se les pidió que planteasen un problema, esta vez sin más restricciones que considerarlo un problema de matemáticas interesante.

- Que las personas seleccionadas explicitaran sus argumentos con claridad.
- Que hubieran asistido prácticamente a la totalidad de las clases y seguido el curso con interés. Que mostraran, además, capacidad de crítica respecto a la marcha del curso.
- Que la totalidad de los casos reflejara niveles diferentes de implicación con aquello que exponían: por ejemplo, hubo quien al plantear un problema incluía también su solución y quien sólo escribió el enunciado; o quien apoyó sus argumentos en lecturas complementarias, etc.
- Que hubiera entre ellos personas a quienes les agradase la materia y a quienes no.

De los 28 estudiantes que optaron por escribir sus reflexiones y atendiendo a las condiciones anteriores, seleccionamos tres personas para analizar cuál fue su experiencia durante el curso. A este análisis dedicamos el resto de este capítulo. En cada caso aparecen discutidos aspectos conceptuales que resultaron significativos en la experiencia de los particiantes. En la mayoría de las ocasiones esta discusión se lleva a cabo considerando, en primer lugar, cómo se trataron estos aspectos -conceptos, problemas, etc.- durante el curso, hasta dónde se llegó en su estudio o qué dificultades presentaron para los estudiantes.

Por otra parte, hemos considerado especialmente enriquecedor para la investigación, por sus implicaciones didácticas, ampliar dicha discusión. Lo hacemos, a) introduciendo nuevos aspectos históricos que no fueron compartidos con los estudiantes pero que abren nuevas posibilidades de acción para un futuro; proponiendo diferentes alternativas de resolución para problemas determinados que han ido apareciendo a lo largo del proceso de análisis, o bien c) exponiendo métodos que, en este momento y dado el escaso nivel de conocimientos matemáticos que muestran los estudiantes, no pueden ser utilizados en las aulas, pero que resultarían perfectamente asequibles e interesantes si la alfabetización matemática que se pretende con la enseñanza secundaria realmente se consiguiera.

5.1 Movimiento principal M1 (Patricia): Matemática como ciencia de la demostración

En el primer caso que describimos la estudiante, Patricia, acaba caracterizando la actividad matemática a través de la demostración. Adquieren una significación especial problemas con una tradición histórica importante, aunque no necesariamente es esto lo que ella ha valorado más del curso. Pasaremos directamente a describir cuál ha sido su trayectoria desde el comienzo del curso.

El problema planteado por Patricia al iniciar el curso fue el siguiente:

> *Los catetos de un triángulo rectángulo miden 9 y 12 cm y la hipotenusa de otro triángulo semejante al anterior mide 100 cm. Calcula la hipotenusa del primer triángulo y los catetos del segundo.*

El enunciado propuesto evoca una perspectiva de la matemática como materia escolar en un contexto tradicional, en tanto que el sentido de *utilidad* que se da a la actividad se refiere a una práctica que involucra la semejanza de triángulos rectángulos y el teorema de Pitágoras. El problema requiere encontrar en primer lugar la hipotenusa del primer triángulo para después poder establecer relaciones de proporcionalidad que permitan hallar los catetos del segundo. Si bien es cierto que el ejercicio va más allá de una aplicación directa de una fórmula o la consideración de una cierta razón de semejanza, no deja de ser un ejercicio de traducción de técnicas algebraicas típicas del ámbito académico. La medida es considerada como un apartado del currículo escolar de matemáticas y por tanto este tipo de ejercicios son útiles en tanto que permiten consolidar conceptos y relaciones que surgen en el contexto normativo del aula.

Recordamos que en la misma hoja de actividad en la cual los estudiantes plantearon este primer problema se les pedía también que se indicaran otros aspectos que consideraran interesantes y que no hubieran quedado reflejados en el enunciado de su problema (anexo 3). Ante esta cuestión, Patricia considera que conceptos como volumen y capacidad son relevantes. Globalmente resaltamos de su aportación dos consideraciones: en primer lugar, la referencia a un contexto académico que viene reflejada por el enunciado de su problema y que es el que ofrece los recursos necesarios para poder plantear un ejercicio (cualquier ejercicio de los que se hayan trabajado en años anteriores es, desde un punto de vista académico, percibido como útil). Por otro lado, la consideración de situaciones que involucran el cálculo de volúmenes o capacidad trasladan el sentido de utilidad a otro más popular que el que refleja el enunciado del problema. A lo largo del curso, Patricia va elaborando una posición teórica que la permitirá interpretar estas dos consideraciones hasta llegar a construir su propia posición en relación con la matemática.

En sus reflexiones escritas incorpora en ocasiones el diálogo con autores que teorizan sobre la matemática y que actúa como contrapunto respecto de la perspectiva inicial descrita, que tomaba como punto de referencia el contexto escolar o situaciones cotidianas como el cálculo de volúmenes. Sus escritos adquieren en este sentido ciertos rasgos de agitación intelectual; de tensión entre lo que ella imagina y lo que piensan otros. De acuerdo con las premisas teóricas ya discutidas en capítulos anteriores, esta tensión expresa el proceso de construcción del conocimiento que la estudiante está llevando a cabo. A menudo aparecen escritas reflexiones de un considerable nivel de complejidad diluidas con otras creencias populares o tópicos acerca de la matemática. La riqueza de este contraste es interpretada, desde nuestro punto de vista, como un signo claro de apertura hacia la reflexión sobre el propio conocimiento matemático.

> ***Las matemáticas no son solo una ciencia que genera conceptos y teorías*** *sino que también son un instrumento utilizado en el desarrollo científico y tecnológico.* [...] *Existen muchas situaciones en las que sin darnos cuenta utilizamos las matemáticas. Por ejemplo, cuando nos disponemos a* ***cocinar*** *y necesitamos unas cantidades exactas de alguna especie o condimento hacemos uso de la* **balanza**. *Esta situación es muy simple pero aún así queda reflejado el uso que realizamos de la medida. Pero, además podemos analizar otros temas muy diversos y complejos en los que se aplica esta ciencia como es en las relaciones* **económicas** [...] ***oficios y profesiones*** *e incluso para la participación* ***política***. [La negrita es nuestra.]

En sus escritos aparece un posicionamiento firmemente asumido que refleja una visión de la matemática característica en la educación primaria y secundaria (útil para cocinar, por ejemplo, dando importancia al uso de la balanza) y que irá matizándose y ampliándose a lo largo del curso. Esta consideración de la matemática para uso cotidiano se repetirá también en otros casos y se debe, en nuestra interpretación, a dos hechos fundamentales. Por un lado, la contextualización que los estudiantes hacen de la matemática en su realidad como futuros maestros de educación primaria y de la cual tampoco nosotros pretendimos alejarnos en ningún momento. En segundo lugar, esta perspectiva coincide, como señala Lim [89], con una imagen pública de la matemática que en ocasiones se manifiesta como previa a la reflexión desde un punto de vista filosófico sobre la naturaleza del conocimiento matemático.

En el momento de finalizar el curso, Patricia plantea un nuevo problema (figura 5.1), esta vez introducido por una reflexión que refleja, en coherencia con nuestro planteamiento teórico, el efecto de sus reflexiones escritas en la construcción de sus creencias acerca de la matemática:

PROBLEMA PROPUESTO DE MATEMÁTICAS I

El último día de clase nos pedisteis que propusiésemos el problema que creyésemos que mejor se adecuaba a aquello que habíamos aprendido durante este curso de matemáticas. Si tomo como base de referencia mis informes escritos, debería proponer un problema basado en el campo de la economía ya que siempre me decanto por esta aplicación de las matemáticas; pero esto no me parece lo suficientemente interesante con toda la materia que hemos dado durante estos cuatro meses.

Creo que lo más interesante de este curso, ha sido la demostración del porqué el problema se realizaba de tal manera y no de otra que hemos ido realizando de cada uno de los ejercicios propuestos. Por este motivo, lo más adecuado para la propuesta de este último problema creo que es alguno que requiera una demostración y no necesariamente una resolución matemática.

PROBLEMA PROPUESTO

El problema que propongo es el siguiente: Si existe una curva de área máxima para un perímetro dado ¿qué forma debería tener dicha curva?

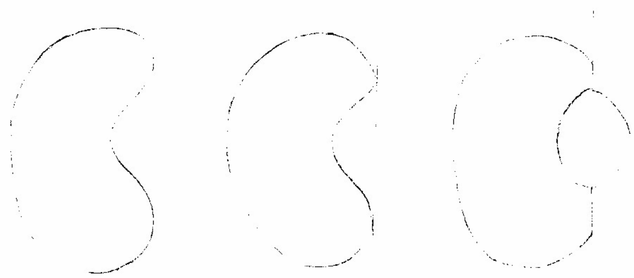
Nuestra primera respuesta ante un problema como éste sería decir que la forma que debería tener esta curva tendría que ser circular. Esto es lo que llamaríamos una respuesta intuitiva ya que sabemos que es la respuesta correcta (algunos dirían que es la respuesta más lógica) pero no sabemos como demostrar que estamos en lo

Figura 5.1 Problema propuesto por Patricia al finalizar el curso.

cierto y que es esta forma y no otra; como sabemos, en matemáticas, intuición y demostración no es lo mismo aunque se puede obtener la respuesta correcta con un razonamiento equivocado.

En un principio diré que la respuesta correcta es que esta curva debería ser circular pero vamos a realizar la demostración del porqué:

a) *Primer paso: la curva ha de ser convexa*



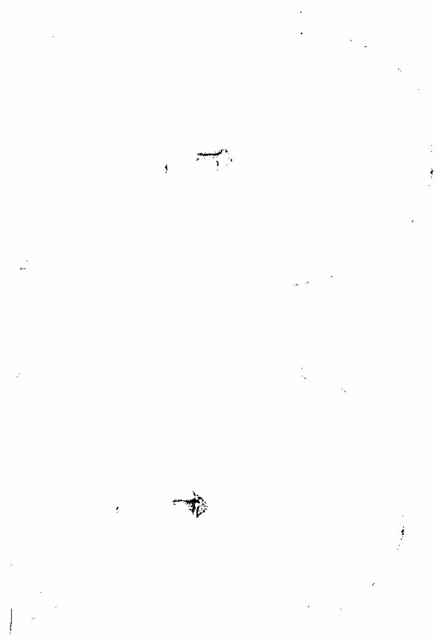
Supongamos que la curva propuesta tiene un entrante (parte ensombrecida); si trazamos una recta que corte a la curva en dos puntos y formamos una nueva curva (de igual longitud que la inicial) aumentaríamos el área de esta figura: Por tanto, la conclusión es que la curva ha de ser convexa.

b) *Segundo paso: cogemos la mitad de la curva y el ángulo "subtendido" por su diámetro es siempre recto.*

El ángulo subtendido es aquel que se forma cuando se trazan rectas desde cada extremo del diámetro al punto de la curva.

Supongamos que este ángulo no es recto: si fuera menor, podríamos aumentar el área de la curva y si fuera mayor de 90° tendríamos que estrechar el ángulo.

c) Tercer paso: la curva debe ser un círculo



El ángulo ABC es de 90º ya que el ángulo cuyo arco es un semicírculo es de 90º .

d) *Cuarto paso*: debido a que cada semicurva es un semicírculo y ambas se empalman en un mismo diámetro, *la curva completa es un círculo.*

El problema planteado es el conocido en el ámbito de las matemáticas como el *problema isoperimétrico,* el cual aparece discutido en profundidad en referencias clásicas de matemáticas [31]. El problema isoperimétrico puede ser catalogado como uno de los problemas de máximos y mínimos, que eran ya conocidos para los matemáticos de la antigua Grecia y que resultan interesantes desde muchos puntos de vista. Se trata, en primer lugar, de un tipo de problemas cuyo enunciado es claro, conciso y fácil de entender, pero cuya resolución completa es compleja. Además, es un problema en el que se apoyan otros muchos de importancia práctica. Por otra parte, y desde un punto de vista didáctico, los más sencillos problemas isoperimétricos tienen para los estudiantes una componente paradójica: por ejemplo, el hecho de que dos triángulos de la misma base situados sobre las mismas paralelas tengan igual área resulta para ellos intuitivamente sorprendente. Esto podría ser evitado en cierto modo si al introducir el concepto de área se hace superando la consideración particular de figuras que mantienen la relación mayor área–mayor perímetro. De este modo, un objetivo específico al introducir el concepto de área ha de ser concluir que el perímetro no es un criterio para evaluar el área de la figura y recíprocamente[2].

Patricia esboza, aunque se muestra muy vaga en sus explicaciones, una de las más conocidas demostraciones para el caso de una curva cualquiera, la de Steiner [31]. La demostración se desarrolla según los pasos siguientes (figura 5.1):

1. Si existe una curva de área máxima, esta ha de ser convexa.
2. Cualquier diámetro que divida a la curva en dos arcos de igual longitud ha de dar lugar a dos recintos de igual área.
3. Cada uno de estos recintos ha de ser un semicírculo.

   En conclusión, la curva C ha de ser una circunferencia.

En su exposición, Patricia comienza considerando una idea intuitiva que la ayuda a conducir la demostración. En su explicación distingue entre *razonamientos intuitivos* y *demostraciones.* Ella afirma que la forma que debería tener esta curva es circular y añade:

[2] La comparación de áreas de figuras que tienen formas diversas pero igual perímetro fue uno de los problemas que se trataron en la antigua matemática griega. Zenodorus, aproximadamente en el siglo segundo a.n.e. demuestra tres importantes proposiciones que tienen que ver con el problema isoperimétrico [64]:

1. De todos los polígonos regulares de igual perímetro, el que tiene mayor área es el que tiene el mayor número de ángulos.
2. El círculo tiene mayor área que cualquier otro polígono regular con el mismo perímetro.
3. De todos los polígonos que tienen el mismo número de lados y el mismo perímetro, el regular es el que tiene mayor área.

La solución del problema para el caso de una curva cualquiera, sin embargo, fue muy posterior y la más conocida es una de las desarrolladas por Jacob Steiner (puede encontrarse, por ejemplo, en [31]).

> [...] *esto es lo que llamaríamos una respuesta intuitiva ya que sabemos que es la respuesta correcta (algunos dirían que es la respuesta más lógica) pero no sabemos cómo demostrar que estamos en lo cierto y que es esta forma y no otra; como sabemos, en matemáticas, intuición y demostración no es lo mismo aunque se puede obtener la respuesta correcta con un razonamiento equivocado.*

Alrededor de este problema, la estudiante concentra todo un proceso de maduración en torno a qué son las matemáticas. A la mención de lo que es un razonamiento intuitivo se añade la distinción planteada en la introducción del problema entre una “resolución matemática” y una demostración. Se ponen en juego tres aspectos fundamentales, interdependientes, de la matemática como una actividad que se ocupa de resolver problemas mediante *demostraciones*: intuiciones y conjeturas; fórmulas y algoritmos (a lo que se llama “resolución matemática”), y demostraciones.

En conclusión, este problema (al igual que el primero que propuso) es uno en el que la temática considerada es curricular, puesto que se centra en el concepto de área, pero su naturaleza es completamente distinta a la del primero: el acento se pone en la investigación, la exploración y la demostración. Además, la utilización de heurísticos se manifiesta de manera indirecta al introducir una reflexión entre lo que constituye una idea intuitiva y una demostración.

En el análisis de este movimiento principal, característico en la experiencia de Patricia, han sido detectados otros cuatro que hemos interpretado en relación con el desarrollo de la asignatura y en cuyo análisis nos detenemos a continuación.

M11: Matemática aplicable a la vida cotidiana

En la realización de la hoja de actividad número 2, *abejas* (apéndice 3), Patricia afirma que hablar de matemáticas útiles se refiere a la consideración de unas matemáticas implicadas con la realidad física, que involucra objetos materiales y no elucubraciones mentales y afirma:

> *Toda aquella cuestión matemática que sea aplicable a la vida cotidiana es interesante.*

Aunque no está segura de haber realizado correctamente la actividad de representación de ángulos que se pedía en la actividad correspondiente, el ejercicio le resulta interesante. Esta expresión de interés a pesar de no haber tenido éxito en la resolución de un problema se repite en la experiencia de algunos estudiantes que participaban en el curso, mientras que en otros resulta ser precisamente el detonante para el desinterés ante una determinada actividad. Tal asimetría sugirió la búsqueda de nuevas relaciones entre este hecho y el tipo de movimientos que se estudian. Desde nuestra interpretación, esta actitud de interés independiente del éxito en la resolución de un problema está relacionada con una posición de libertad. Esta posición facilita una apertura hacia un tipo de reflexión filosófica y conduce en algunos casos a contemplar la actividad matemática desde diferentes perspectivas.

En referencia a los contenidos que se trabajan en la actividad, Patricia se restringe a señalar competencias de carácter exclusivamente matemático ("ha de saberse trabajar con ángulos") y no aparece ninguna referencia a la contextualización del enunciado o al hecho de inferir un método general a partir de un ejemplo o situación concreta. Sin embargo, cuando se pide que plantee un problema similar en el que se trabajen los mismos contenidos matemáticos sí adopta una perspectiva más amplia. El problema propuesto por Patricia (figura 5.2) es: a) un problema cuyo contexto tiene relación con las ciencias naturales; b) que utiliza las matemáticas para describir una situación, y c) cuyo objetivo no es directamente trabajar un concepto matemático sino conocer y comprender una situación, más o menos anecdótica –la del pez arquero–, en la cual los registros matemáticos son una parte más de la descripción de dicha situación.

M12: Matemáticas para entender, razonar y resolver

En el informe escrito en el que se pidió a los estudiantes que reflexionasen sobre la relación de la matemática con otras ciencias, Patricia se re–afirma en la idea de una matemática aplicada; sin embargo, comienzan a aparecer palabras clave que continúan evocando lecturas complementarias y que son para nosotros un indicador de movimiento en sus creencias en torno a la matemática:

> *La física es la ciencia que a través de la experimentación y la elaboración de conceptos, estudia las propiedades de la materia y del espacio–tiempo. Podemos preguntarnos que relación tiene la materia, el espacio y el tiempo con la ciencia matemática; la respuesta que personalmente daría sería que no son precisamente estos conceptos los que establecen la relación físico–matemática sino el papel constitutivo y descriptivo que desempeñan las matemáticas en su teoría y experimentación. Además de esto, también es indispensable, en mi opinión, para poder llegar a* ***entender, razonar y resolver*** *un problema físico tener los conceptos matemáticos dominados,* ***es decir, saber aplicarlos.*** [La negrita es nuestra.]

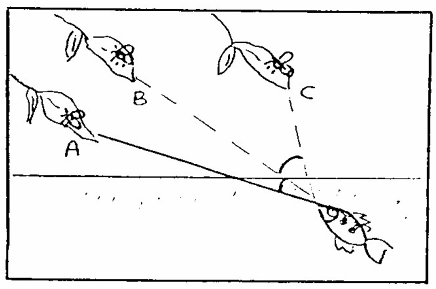
4. Plantea un nuevo ejercicio en el cual se utilicen los mismos contenidos matemáticos que en este.

El pez arquero es muy popular por sus insólitas actividades cazadoras, ya que captura insectos aéreos lanzando certeros chorros de agua, por la boca. Las piezas que se encuentran "a tiro" posadas en la vegetación cercana a la superficie del agua son abatidas por una granizada de gotas, como una perdigonada. Paulatinamente, mientras el animal crece, los tiros van ganando en potencia y precision, llegando a extremos asombrosos. Para disparar, el pez arquero adopta una actitud tipica, con la boca tocando justamente la superficie y todo el cuerpo sumergido. Y este es un problema que ha intrigado durante varias épocas a los zoólogos, pues éste extraño animal dispara con los ojos sumergidos. La base del problema está en el conocido fenómeno de la refracción, consistente en que cuando la luz pasa de un medio a otro de diferente índice de refracción, los rayos luminosos sufren una apreciable desviación ¿Cómo entonces el tiro de éste pez puede ser tan preciso si la imagen que se forma en su retina está situada, en su espacio visual, en una posición diferente de la del insecto real?

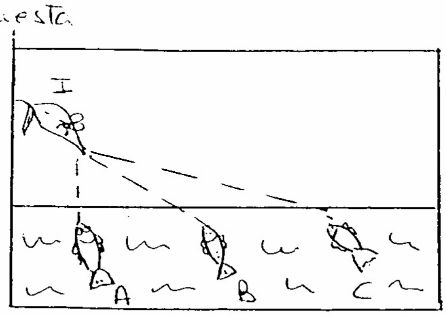
1. Conociendo el fenómeno de la refracción, responde y justifica tu respuesta.

Figura 5.2 Problema planteado al llevar a cabo la actividad *abejas*.

2. Debido al mencionado fenómeno de la refracción, Sabiendo que A es la posición real de la presa, ¿dónde se localizaría la imagen en el espacio retiniano, en B o en C? Argumenta tu respuesta



3. Si I es la imagen real de la presa, ¿dónde se tendría que situar el pez arquero para dar caza a su presa? Argumenta tu respuesta



En este momento detectamos un segundo movimiento **M12**: La matemática ya no es exclusivamente una ciencia aplicada sino una "ciencia constitutiva" de otra. A pesar de esta novedad en sus afirmaciones, Patricia vuelve a retrotraerse hacia las características utilitaristas que tomaba en consideración en su estado inicial y encuentra en la relación con la química una justificación para la consideración de tales características: la metrología y en particular, el uso de la balanza:

> *En mi opinión, creo que para poder entender los problemas que plantea la química debemos también tener un dominio de los conceptos matemáticos. Además, para estos problemas utilizamos, entre otros utensilios, la* ***balanza*** *que es un instrumento de* ***medida directa*** *(esto hace referencia a las matemáticas).* [La negrita es nuestra.]

Sin embargo, alrededor de la metrología su discurso se ha enriquecido con un detalle importante: el término *medida directa*, que ha sido trabajado de manera continuada en el transcurso de las primeras semanas del curso, ha pasado a formar parte su repertorio discursivo.

M13: La matemática como conocimiento teórico... que luego se aplica.

Cuando Patricia trabaja alrededor de la hoja de actividad número 3, *la forma de la Tierra* (apéndice 3), interpreta las respuestas dadas por los niños y niñas en términos de su "rigor científico", y por lo tanto establece una cierta relación de orden según el nivel de certeza de cada respuesta:

> *El modelo que me parece más interesante de los anteriores expuestos es el número seis, ya que aunque no es realmente el reflejo de la realidad ya que afirma que la Tierra es plana por arriba y por abajo y que las personas viven sobre estas superficies planas* ***es aquel modelo que más se aproxima a la realidad****. Y aquel que me parece menos interesante es el número dos ya que habla acerca de la existencia de dos tierras, una plana en la que viven las personas y una redonda que se encuentra situada en la parte superior de la plana. Me parece que es el que menos interés requiere debido a que, a mi parecer, no es adecuada esta interpretación acerca de la Tierra.* [La negrita es nuestra].

La interpretación que Patricia hace del enunciado de esta cuestión está directamente relacionada con el objetivo de transmitir una explicación real de los acontecimientos físicos. Al realizar esta actividad, sus explicaciones en general resultan vagas e imprecisas y cuando se requiere una información concreta sobre un determinado hecho, tal explicación no se da. Su alusión a que el modelo número seis es el que más se acerca a la realidad es un ejemplo que muestra la "debilidad" en su bagaje matemático y/o físico.

> *El procedimiento que seguiría para explicar a los alumnos que la Tierra es esférica y no plana sería mediante dibujos e imágenes visuales adaptadas para ellos de forma que les*

> *resultara más fácil entenderlo ya que, a mi parecer, lo más difícil es que consigan llegar a entender que están viviendo encima de una superficie que no es plana sino esférica y que no nos caigamos (ya que es la típica pregunta que se haría a sí mismo un niño de esta edad).* [...]
> *Normalmente, los chicos asocian el astro Rey, el Sol, con el día ya que creen que es el Sol el que desprende luz con sus rayos y, por otro lado, siempre relacionan la luna con la noche, ya que piensan que la luna no desprende luz y por este motivo está todo en la oscuridad cuando ésta aparece.*

Ella misma plantea preguntas y dificultades cuya respuesta no incluye en su argumentación ni en su propuesta de explicación y afirma, más adelante, que desconoce qué propiedades están involucradas en la formulación de dichos modelos. Estas muestras de vaguedad se repiten en un momento posterior, cuando completa la hoja de actividad número 4, *herencias* (apéndice 3) y de nuevo aparecen signos que reflejan una cierta carencia de los contenidos matemáticos relacionados. Este aspecto contrasta significativamente con el nivel de posicionamiento y argumentación que mantiene en otras ocasiones. Según nuestra interpretación, es este desconocimiento conceptual el que no le permite valorar las situaciones que se plantean ni adoptar una posición crítica respecto a la actividad. Esta será una de las conclusiones de la investigación en relación con los programas de formación del profesorado. Sumándonos a una posición que defiende que el conocimiento y la discusión de conceptos matemáticos es fundamental para la formación de los futuros profesores de primaria, sostenemos además que es necesario que sean ellos quienes interioricen y den significado a esta afirmación. A partir de su propia experiencia, pueden valorar hasta qué punto el desconocimiento conceptual limita sus recursos de interpretación y posicionamiento crítico ante determinadas situaciones didácticas.

En el informe escrito en el que Patricia reflexiona sobre la resolución de problemas y la naturaleza del conocimiento matemático emerge el movimiento que hemos definido como **M13**. En esta ocasión, se hace explícita una primera aproximación a la matemática como un conocimiento teórico que no precisa ser aplicado para que adquiera justificación, aunque a largo plazo la necesidad de la aplicación se sigue manteniendo. La teoría, en consecuencia, pertenece al dominio de la especulación. La inseguridad que genera este posicionamiento queda aliviada, en cierto modo, retomando la idea de la aplicabilidad:

> *A mi parecer, el conocimiento que permite encontrar soluciones viables a sus problemas cotidianos o del día a día es aquel que los individuos de una sociedad han aprendido primero de una manera teórica o especulativa pero con el paso de los días puede aplicarse en la práctica en cualquier situación en la que se encuentren estos individuos.*

Las aplicaciones a las que se refiere continúan siendo las mismas a las que se refería en el momento de comenzar el curso, estableciendo categorías de conocimiento que permiten describir, de nuevo, aplicaciones simples (cocinar con cantidades exactas y hacer uso de la balanza) y aplicaciones complejas (relaciones económicas que incluyen la producción y el comercio). Así pues, tras pequeñas incursiones en una matemática teórica vuelve a manifestarse con fuerza la necesidad de una aplicación, dejando ver cómo su propia agitación se alimenta del acercamiento a su posición inicial cuando se ha producido un cierto distanciamiento.

M14: La matemática como la ciencia de la demostración

Es en el momento de reflexión final ante el planteamiento del problema con el que se cierra el curso cuando se explicita el gran movimiento (considerar la matemática como la ciencia de la demostración) que ya describimos al introducir la descripción del caso. Para que tal movimiento se produzca es decisiva, como ella misma indica, su iniciativa de re-lectura de los informes escritos que ha ido presentando a lo largo del curso. Patricia pone en tela de juicio sus propias argumentaciones y eso le permite romper por completo con la idea de aplicación para encontrar el sentido de la actividad matemática en la demostración. Repetimos aquí, con el objetivo de hacer más fácil la lectura, el fragmento en el que la estudiante hace explícito este hecho y que ya incluíamos al comienzo del capítulo:

> *Si tomo como base de referencia mis informes escritos, debería proponer un problema basado en el campo de la economía ya que siempre me decanto por esta aplicación de las matemáticas; pero esto no me parece lo suficientemente interesante con toda la materia que hemos dado durante estos cuatro meses.*
> *Creo que lo más interesante de este curso ha sido la demostración del porqué el problema se realizaba de tal manera y no de otra que hemos ido realizando de cada uno de los ejercicios propuestos. Por este motivo, lo más adecuado para la propuesta de este último problema creo que es alguno que requiera una demostración y no necesariamente una resolución matemática.*

Es interesante para nuestra interpretación de la experiencia de Patricia su reflexión sobre cuáles son los momentos que le han resultado significativos durante el curso. Ella plantea, con carácter general, que el hecho de basarse en la historia es especialmente enriquecedor y se decanta en concreto por el *problema de Herón*. Describimos a continuación cómo se desarrolló la experiencia con los estudiantes en torno a este problema.

5.1.1 El problema de Herón

El problema de Herón es habitual enunciarlo de la siguiente manera:

> Dada una recta s y dos puntos A y B en el mismo lado de la recta, ¿Para qué punto P en s es $AP + PB$ el camino más corto que une A y B?

Patricia se refiere a este problema como uno que “le fascinó, aunque no le saliera”:

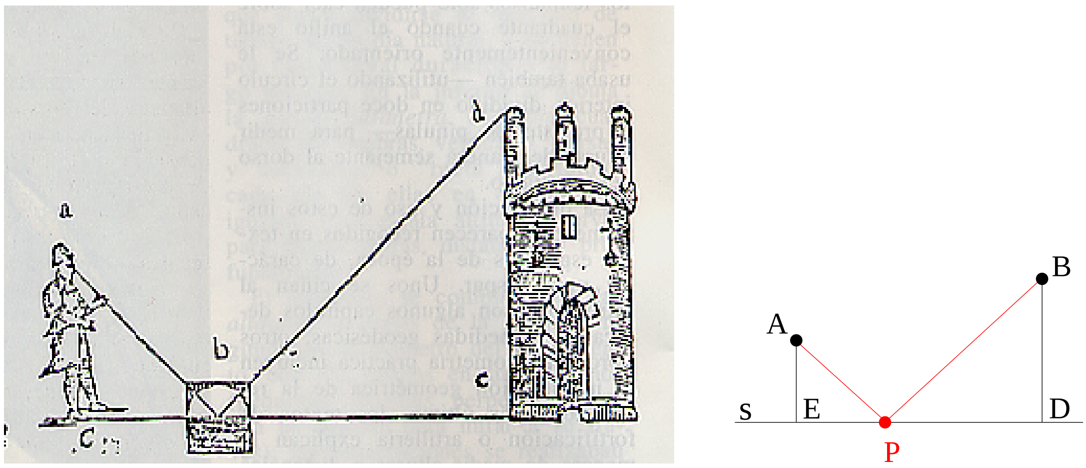


Figura 5.3

Si de todas las clases que han transcurrido durante estos dos meses que llevamos haciendo esta asignatura me dijeran que obligatoriamente tengo que escoger uno de tantos "momentos" que se han dado, supongo que me decantaría por la clase en la que se realizó la explicación del "problema de Herón" ya que me resultó fascinante la manera de demostrar que la solución del problema era ésa y el porqué de ésta (aunque he de reconocer que no conseguí solucionarlo por mí misma).

El problema de Herón está relacionado directamente con el problema que Patricia presenta en el momento de finalizar el curso. Se trata de nuevo de un problema de máximos y mínimos que además encuentra aplicación en muchos otros campos de la ciencia. El planteamiento del problema surgió mientras analizábamos problemas típicos de medida indirecta que han sido planteados desde hace siglos.

Ante el grabado de la figura 5.3, preguntábamos cómo se podía utilizar el método del espejo para medir alturas inaccesibles. A la vista del esquema que se muestra en la misma figura, la proporción que se establece es $AE : EP = BD : DP$ y los estudiantes resuelven el problema sin excesivas dificultades. Cuando planteamos que justifiquen por qué los triángulos APE y BPD son semejantes, la respuesta es que tienen los tres ángulos iguales.

El hecho de considerar los ángulos $\angle APE$ y $\angle BPD$ iguales es atribuido a que "es una propiedad del espejo," y alguien apunta que "son iguales porque el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión."

Esta discusión nos permite plantear el *Problema de Herón* en su contexto histórico. Herón relaciona la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión con el trayecto mínimo en la *catoptrica*. Esta obra contiene problemas cuyo propósito es construir espejos con formas diversas, o combinarlos, de forma que produzcan reflejos de una determinada manera. Heath

[64] cita algunos de ellos, como por ejemplo hacer que el lado derecho de la imagen real aparezca también en el lado derecho en la imagen especular (en lugar de en el lado izquierdo); permitir a una persona que pueda ver su espalda o aparecer en el espejo cabeza abajo, con la cara distorsionada o con dos narices; construir en el interior de una casa un espejo de manera que pueda verse lo que ocurre en la calle teniendo en cuenta la posición de una ventana, etc.

La construcción geométrica llevada a cabo en la demostración de Herón es la que se utiliza habitualmente para resolver este problema, que suele formularse como un problema de máximos y mínimos, tal y como lo enunciamos más arriba. Para determinar la solución utilizaremos la construcción propuesta por Herón (figura 5.4). Sea C el simétrico del punto A respecto de la recta s, de manera que la recta determinada por el segmento $\overline{AC}$ es perpendicular a s. Se obtiene así un nuevo punto E sobre la recta s. La recta que une los puntos B y C interseca a s en un punto P que es el punto buscado[3].

El problema ahora consiste en demostrar que para cualquier otro punto Q sobre la recta, la longitud de la línea quebrada $\overline{AQB}$ es mayor que la longitud de la quebrada $\overline{APB}$. Ahora, según hemos construido P:

$$AP = CP \qquad \text{y} \qquad AQ = CQ$$

$$AP + PB = CB \qquad \text{y} \qquad AQ + QB = CQ + QB$$

[3]Herón no plantea el problema en términos de hallar el camino mínimo entre dos puntos A y B dados pasando por una recta s. Lo plantea como un problema de óptica y toma como hipótesis que los ángulos $\angle APE$ y $\angle BPF$, de incidencia y reflexión, son iguales. Construye entonces el punto C como la intersección de la recta BP con la perpendicular a s por A. Esto le permite afirmar que cuando un rayo de luz se quiebra al incidir sobre un punto en s, este punto ha de marcar el camino más corto que conecta el ojo, en A, con el objeto, en B. Al plantear el problema Herón dice "la naturaleza no hace nada en vano" ([64], p. 353) y es por eso que los rayos de luz han de viajar de la manera más rápida posible, por tanto recorriendo un camino mínimo. Este tipo de razonamiento concuerda con el esfuerzo de sistematización racional característico en los *constructores de máquinas* griegos, de los que Herón es un representante al igual que Ctesibios, Filón o Arquímedes. El autor griego recuerda que tal sistematización "debe partir de lo que es evidente y cuya causa es evidente; [...] quien quiere avanzar en el descubrimiento de las causas ha de partir de uno o varios principios físicos y relacionar con ellos todas las cuestiones que se presenten [127], p. 285."

La igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión había sido también considerada con anterioridad por Arquímedes, quien establecía el resultado por *reductio ad absurdum* [64]:

Supongamos que $\angle APE > \angle BPQ$. Entonces si se *invierte* el rayo de luz de tal manera que el ojo esté situado en B en lugar de A y el objeto en A en lugar de B debería ocurrir $\angle BPQ > \angle APE$, pero esto contradice la hipótesis inicial. De la misma manera no puede suceder que $\angle APE < \angle BPQ$ y por tanto ha de ser $\angle APE = \angle BPQ$.

La demostración de Arquímedes admite sin discusión que la trayectoria de la luz ha de ser la misma después de intercambiar ojo y objeto, y que la relación entre los ángulos de incidencia y reflexión ha de mantenerse al invertir el proceso. En la época clásica, por tanto, se trata de un problema relacionado con la reflexión de la luz. Posteriormente el problema pasa a ser considerado como un problema de los que se clasifican como de máximos y mínimos. Fermat, por ejemplo, al aplicar su método de máximos y mínimos, lo propone como uno de los casos para mostrar que la solución obtenida coincide con las soluciones obtenidas por métodos clásicos.

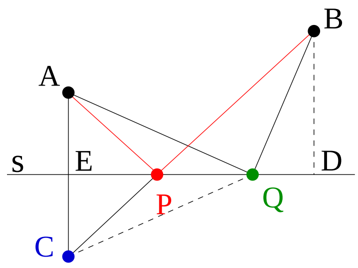


Figura 5.4

Y el resultado buscado se desprende de la desigualdad triangular para los lados del triángulo $\triangle CBQ$:

$$AP + PB = CB < CQ + QB = AQ + QB$$

De la figura 5.4 se desprende que

$$\angle BPQ = \angle EPC \qquad \text{y que} \qquad \angle EPC = \angle APE$$

de donde se deduce que $\angle BPQ = \angle APE$.

Así pues, el rayo de luz que se refleja en s, y que se sabe que forma ángulos iguales de incidencia y reflexión, toma el menor camino.

Cuando se discutió este problema con los estudiantes surgieron diferentes conjeturas, que quedan recogidas en la tabla 5.1. Todas ellas buscan el punto P en la intersección de líneas construidas a partir de la recta s y los puntos A y B. Se da por supuesto que el punto P ha de estar situado en entre los puntos E y D obtenidos de la intersección de s con sus perpendiculares por los puntos A y B respectivamente. Sin embargo, el hecho de que no todas las quebradas AQB han de tener la misma longitud que las quebradas CQB, no resultaba intuitivamente claro. Tampoco resultaba familiar la desigualdad triangular, hecho que convertía la sencilla demostración geométrica propuesta más arriba en un proceso un tanto artificioso para los estudiantes.[4]

[4] A la vista del dibujo de un triángulo, el hecho de que la suma de longitudes de los dos lados más cortos de cualquier triángulo ha de ser mayor que el tercer lado, es considerado como *evidente* por los estudiantes; sin embargo, no se relaciona con la pregunta *¿Es posible construir un triángulo con tres medidas dadas cualesquiera?* El diálogo que aparece a continuación tuvo lugar en uno de los grupos de discusión. Se estaba discutiendo el enunciado del problema inicial propuesto por una de las estudiantes, Sandra, en el que se hacía referencia a la construcción de un triángulo de perímetro 15 cm.

LOURDES: ¿Puedes construir un cuadrado con tres medidas cualesquiera? [silencio]

SANDRA: ¿Cómo?

LOURDES: ¿Tú puedes construir un triángulo con un lado que mida 6, otro que mida 6 y otro que mida 3?

VERÓNICA: Depende de los ángulos...

GEORGINA: Sí.

VERÓNICA:... a lo mejor luego no cierra.

Pasemos a comentar brevemente las diferentes conjeturas que surgieron en la clase (tabla 5.1, página 137). En la primera de ellas se define P como el punto en el que la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ corta a la recta s.

Considerar el punto P sobre la mediatriz entre A y B permite *equilibrar* la distancia entre los dos segmentos de la quebrada. Ante su refutación con un caso en el cual el punto P ha salido fuera del segmento ED, surge una nueva construcción que asegura que el punto buscado se encuentra siempre sobre el segmento deseado: P es el punto de intersección de la recta s con su perpendicular por el punto medio del segmento $\overline{AB}$. También esta conjetura se refuta fácilmente tomando A muy cercano a s.

Las conjeturas 3 y 4 son obtenidas mediante una construcción que no responde a ninguna estrategia aparente, salvo conseguir que el punto resulte entre los extremos E y D. La tercera es sencilla de refutar de nuevo con una situación extrema. La cuarta, sin embargo, resulta ser cierta. Fueron dos estudiantes trabajando juntos quienes propusieron esta última conjetura a la vez que otra, en la que obtenían P a partir del simétrico de A respecto de s, y coincidiendo, por tanto, con la que se utiliza en la demostración de Herón. Esta última resulta para ellos claramente la solución del problema porque según dicen "la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta." Con esta afirmación, están describiendo la construcción de la figura 5.5, en la que el problema ahora es hallar el camino más corto entre los puntos C y B, que obviamente resulta ser el segmento $\overline{CB}$.

Los estudiantes comprobaron que el punto P que obtienen con ambas construcciones coincide en todos los ejemplos que se plantean. Sin embargo, visualizar el punto P obtenido mediante la construcción de la conjetura 4 (tabla 5.1) como la solución al problema es extremadamente menos intuitivo. De hecho, cuando los estudiantes la plantearon, pensamos en buscar un caso límite que la refutara, hasta que consideramos la posibilidad de que fuese cier-

---

Georgina: Puedes hacerlo como quieras, si no te dicen que es rectángulo ni nada...

Marta: Un triángulo con 6, 6 y 3 es imposible.

Georgina: sería... dado...

Marta: Porque la hipotenusa es más grande que...

Georgina: No, pero no te está diciendo qué tipo de triángulo es.

Sandra: A lo mejor el problema es que en el problema tengo que decir qué tipo de triángulo es.

Georgina: Pero tú puedes hacerlo como quieras. Claro, si tú tienes 6, así, [hace un gesto con los brazos, formando un ángulo] pues abrirlo lo que quieras, o cerrarlo. Si no te dicen que es rectángulo...

Verónica: Pero depende de los ángulos a lo mejor no cierra.

Georgina: Ya, pero si no te ponen ninguna condición, dos lados de 6 y uno de 3 sí que puedes.

Lourdes: ¿Y dos lados de 6 y uno de 15?

Marta: Uno obtuso.

Aunque es importante y positivo para los estudiantes afirmar conceptos y propiedades que no conocen, es dramático, desde un punto de vista matemático, asistir a una discusión de este tipo en un primer año universitario. No tanto porque ilustra, de nuevo, que el conocimiento de las matemáticas que tienen estos estudiantes es muy pobre, sino porque refleja el fracaso de una formación académica que debería asegurar la consolidación de este tipo de contenidos desde los últimos años de la educación primaria.

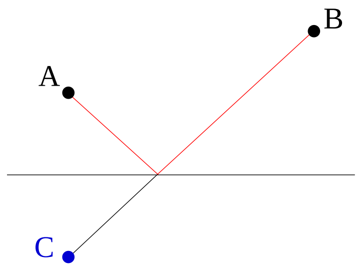


Figura 5.5 Hallar el camino más corto entre A y B pasando por s es equivalente a encontrar el camino más corto entre C y B.

ta. Sorprendentemente es así, y una demostración de que el punto P es solución al problema (tabla 5.1, conjetura 4) puede obtenerse directamente de las relaciones de semejanza entre los pares de triángulos

$$\triangle ADE \quad \text{y} \quad \triangle ODP$$
$$\triangle BED \quad \text{y} \quad \triangle OEP$$

Si se demuestra que los ángulos $\angle APE$ y $\angle BPD$ son iguales, el problema está resuelto. Y esto es cierto por semejanza, pues:

$$\frac{AE}{OP} = \frac{ED}{PD} \quad \text{y} \quad \frac{BD}{OP} = \frac{ED}{EP}$$

de donde se tiene

$$AE \cdot PD = BD \cdot EP$$
$$AE : EP = BD : PD$$

En consecuencia los triángulos $\triangle AEP$ y $\triangle BDP$ son semejantes y se tiene la igualdad de ángulos $\angle APE = \angle BPD$.

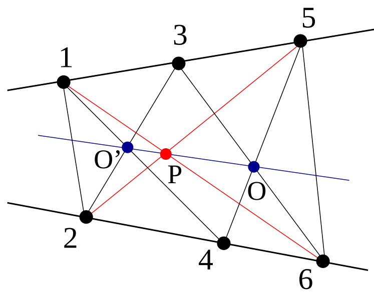
Casualmente, y con posterioridad a la discusión del problema, encontramos una bonita manera de probar su validez a partir del teorema de incidencia de Pappus[5] que podemos enunciar como se hace a continuación.

[5] Lo que ocurrió es que estábamos *jugando* con Cinderella, un programa de geometría dinámica. Sus autores han implementado en el programa una aplicación que permite demostrar teoremas geométricos y presentan como ejemplo el teorema de incidencia de Pappus.

Si los seis vértices de un hexágono se sitúan de manera alternante sobre un par de rectas secantes, entonces los puntos O, P, O' tales que:

$$\begin{array}{c} O \text{ es el punto de intersección de las rectas } \overline{36} \text{ y } \overline{45} \\ O' \text{ es el punto de intersección de las rectas } \overline{14} \text{ y } \overline{23} \\ P \text{ es el punto de intersección de las rectas } \overline{16} \text{ y } \overline{25}, \end{array}$$

son colineales.



La construcción de la figura 5.6 que se desprende de la conjetura número 4 (tabla 5.1), puede considerarse como un caso particular del teorema de Pappus. El punto P obtenido en la conjetura coincide con el punto P que se obtenía en la construcción de la solución propuesta por Herón.

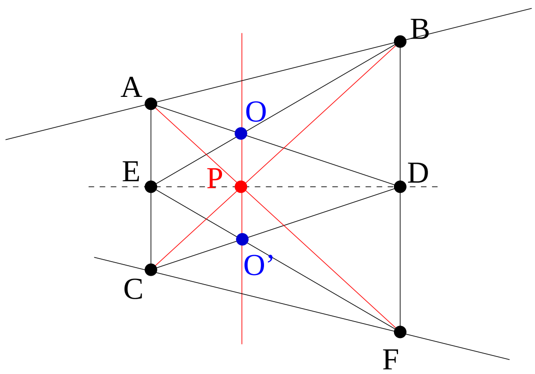


Figura 5.6

Según el teorema de Pappus, los puntos O', P y O de la figura 5.6 son colineales, por tanto P es la intersección de la recta $\overline{CB}$ con s.

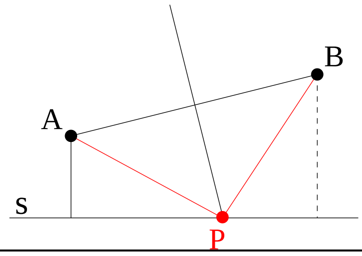
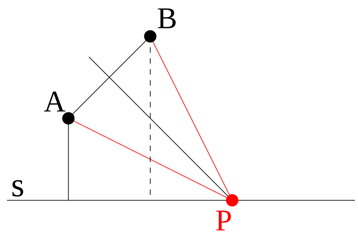
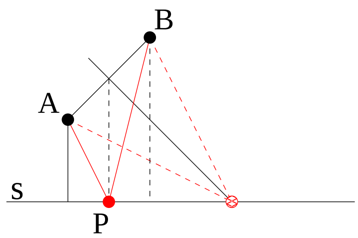
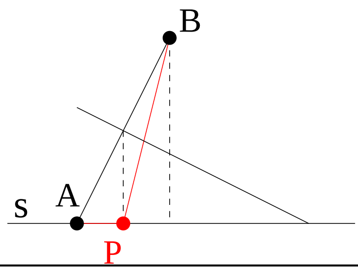
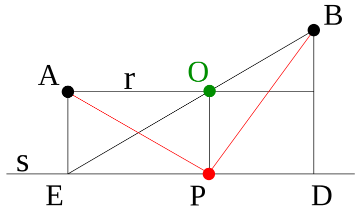
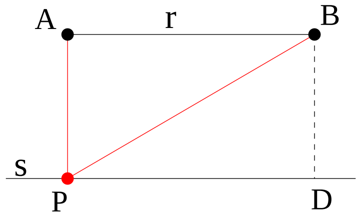
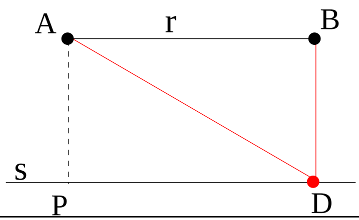
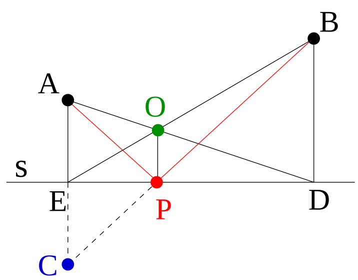
Conjetura		Casos límite
1. P es el punto en el que la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ corta a la recta s.		
2. P es el punto de intersección de la recta s con su perpendicular por el punto medio del segmento $\overline{AB}$.		
3. r es la perpendicular a la recta $\overline{BD}$ por A. O es el punto de intersección de las rectas r y $\overline{BE}$. P es el punto de intersección de la recta s con su perpendicular por O.		
4. O es el punto de intersección de las rectas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$. P es el punto de intersección de la recta s con su perpendicular por O.		La conjetura conduce a la solución adecuada. Un caso particular del teorema de incidencia de Pappus permite comprobar que el punto P coincide con la solución propuesta en la construcción de Herón.

Tabla 5.1 Conjeturas para resolver el problema de Herón y técnica de los casos límite.

5.2 Movimiento principal M2 (Yolanda): Juegos para pensar.

Tanto éste como el siguiente caso que describiremos presentan una diferencia clara con respecto al analizado anteriormente: en ellos, la matemática es contemplada siempre en relación con su aprendizaje. No existe una separación tan evidente entre estos dos aspectos como la que se desprendía de la experiencia de Patricia. En esta ocasión, matemática y aprendizaje de la matemática no se construyen como dos categorías diferentes, sino que evoluciona una única categoría en la que se confunden ambas perspectivas. Las referencias a la matemática evocan recuerdos de una experiencia de aprendizaje o sugieren recursos para su enseñanza. El problema con el que Yolanda inicia el curso es un problema clásico en el contexto escolar tradicional: un problema de trenes.

> *Un tren sale de una estación a las 11h, la misma hora en que otro tren sale de otra estación dirigiéndose hacia el primer tren. Si sabemos que entre una estación y la otra hay hora y media de recorrido, ¿qué hora será cuando los dos trenes se encuentren?*

El planteamiento del problema es incompleto, puesto que desconocemos la relación entre la velocidad de ambos trenes –y en un mayor nivel de detalle, si sus trayectorias son en el mismo sentido o en sentido contrario–. De nuevo nos encontramos con problemas contextualizados en el ambiente escolar que tuvieron sentido en un momento determinado, probablemente cuando el uso de una vía única hiciera necesario que el cruce se produjera necesariamente en las estaciones.

En el momento de plantear este problema, al comenzar el curso, Yolanda se refiere a las matemáticas como algo que utilizamos en "casi todos los aspectos de la vida cotidiana" y pone como ejemplo las compras, la velocidad, la medida de distancias o los cálculos cotidianos. Este es un hecho que se repite de forma generalizada en la mayoría de los estudiantes del curso y que dibuja un contexto educativo y social en el que abundan referencias de ejercicios aritméticos muy simples para construir creencias acerca de la matemática.

> *Las matemáticas las hacemos servir en casi todos los aspectos de la vida cotidiana. Por ejemplo, cuando vamos a comprar utilizamos algunos productos como la fruta, la carne,* [...] *una medida que es el peso nos ayuda a saber la cantidad que compramos y lo que nos costará según sea esa cantidad. Las utilizamos también cuando vamos de viaje en coche, ya que en las autopistas hay carteles que nos indican cuantos kilómetros nos quedan hasta llegar a nuestro destino y como éstos muchos ejemplos más se pueden dar.*

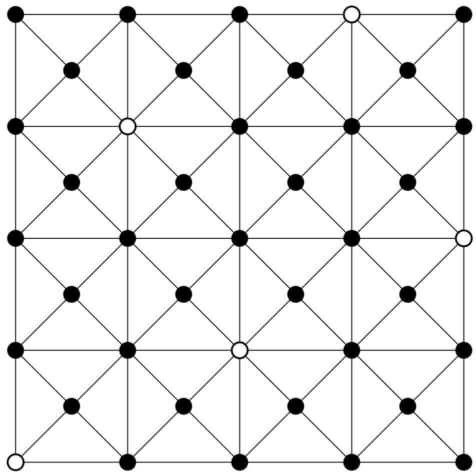
Yolanda se refiere a la importancia de las matemáticas para ejercitar la abstracción en un relato inicial en el que reflexiona sobre su enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, los ejemplos de problemas que propone se refieren a utilizaciones de la matemática en las cuales su carácter abstracto ha pasado a ser considerado *trivial* en el contexto de la actividad cotidiana. Es evidente que los sistemas de numeración, la aritmética comercial o la definición de propiedades medibles en cuerpos físicos se sostienen sobre una base abstracta, pero que no es reconocida como tal en el ámbito popular. Esto podría llevarnos a concluir que la relación *matemática–abstracción* fuera repetida más como un tópico que como una característica reconocida. Sin embargo, a medida que avanza el curso, Yolanda busca otros ejemplos de los que apropiarse y que le permitan dar sentido a la matemática como una actividad intelectual abstracta e integrarla en el quehacer cotidiano:

> *Enseñar matemáticas en el colegio es una función importante ya que es una de las materias que ayudan al niño, conforme va avanzando en sus estudios, a alcanzar cada vez mayor grado de abstracción.*
> *Gracias a las matemáticas que se enseñan en el colegio (en primaria, sobre todo) los niños pueden conocer los números (que para mí son la base de todas las matemáticas) y aprender todas las utilidades que le damos en la vida cotidiana. La mayoría de los estudiantes tienden a pensar (más que nada los adolescentes, los de primaria no tanto) que las matemáticas son una materia que sólo hay que aprobar que no tiene ninguna utilidad en la vida real (de hecho lo pensaba). Pero éstas son aquellas matemáticas en las que nos pasábamos la hora haciendo ecuaciones o funciones o problemas de trigonometría. Pero ahora que he tenido que hacer una reflexión, me he dado cuenta de que si en la etapa de primaria no enseñaran las matemáticas que se enseñan difícilmente sabríamos operar con monedas y saber ir a comprar.*

Yolanda expresa en su relato cómo la actividad matemática va perdiendo sentido a partir de la enseñanza primaria. Hasta aquel momento cabían las utilidades básicas de la aritmética, y ella misma expresa que el truncamiento se produce, para ella y para la mayoría de los estudiantes, durante la enseñanza secundaria. El contexto escolar es básicamente el único en el que los estudiantes tienen contacto con la matemática, y sólo en la enseñanza primaria les aporta los elementos típicos (leer carteles que incluyan información numérica, interpretar tiquets de compra, etc.) que *salvan* la cuestión del sentido dado a la matemática en los primeros años escolares. El sentido comienza a desaparecer en niveles superiores y la construcción del conocimiento acaba en la ignorancia o el automatismo que se arrastra durante la edad adulta.

Así que para Yolanda las actividades matemáticas quedan contextualizadas en su realidad como futura maestra (por ejemplo las que proporcionan situaciones como cocinar, comprar, jugar, hacer trajes, pintar campos, compartir, etc.) En su problema final, sin embargo, aun sin abandonar la contextualización escolar de sus creencias, la opción es elegir un juego de tablero, que justifica como un buen problema porque está planteado como un juego y por lo tanto *motiva, hace pensar, hace observar.* El problema planteado es el siguiente:

*O*bserva el tauler on hi ha pintats 5 cercles. Pinta tu d'un altre color 5 cercles més, amb la condició de no pintar 2 cercles sobre una mateixa linia (horitzontal, vertical i diagonal).



Yolanda no lo resuelve, pero es evidente que la potencialidad de este problema para estimular la actividad matemática es mucho mayor que la que se podría obtener del ejercicio de los trenes que planteó al comienzo del curso. Las características "motivar" y "observar" contextualizan en el ambiente escolar una nueva creencia hacia la matemática: "hacer pensar". La búsqueda de sentido en la actividad planteada surge con mucha fuerza en este momento del curso.

Penso que aquest és un bon problema perquè està plantejat com un joc i aquest fet fa que tant nenes com adults mirem el problema amb uns altres ulls, amb disposició positiva. També em resulta interessant perquè tot i que sembla un problema fàcil, s'ha de parar a pensar i sobre tot a observar, cosa que als nens els hi costa molt de fer. Amb aquest problema es treballen vàries nocions de matemàtiques com és el cercle, els números (noció de quantitat) i les direccions de les línies i el nom d'aquestes segons cap a on estiguin traçades.

Analicemos en detalle las características del problema propuesto. La solución ofrecida en el enunciado del problema es una de las que resuelven el conocido como "el problema de las ocho reinas" para el caso de un tablero de 5×5. El problema al que nos referimos es el siguiente:

Encontrar todas las maneras de colocar ocho reinas en un tablero de ajedrez (64 casillas) de manera que ninguna de ellas pueda comer a otra; es decir, colocar las ocho piezas de manera que dos de ellas no se encuentren sobre la misma línea paralela a uno de los bordes del tablero o sobre cualquiera de sus diagonales[6].

[6]Este problema fue objeto de una correspondencia mantenida entre Gauss y Schumacher y puede encontrarse un recorrido histórico en las *Récréations mathématiques* de Édouard Lucas [90].

El problema propuesto por Yolanda no es equivalente a uno sobre un tablero de casillas cuadradas, puesto que su configuración es de $(25 + 16 = 41)$ casillas. No obstante, estudiaremos las soluciones del problema para el caso de las **cinco reinas** como paso previo a la discusión del problema de Yolanda, pues pensamos que es una buena referencia para evaluar la dificultad del que ella propone.

Utilizaremos como notación una de las que se sugieren en [90]. Puesto que cada una de las piezas ha de estar necesariamente en una columna diferente del tablero, todas las columnas cuentan con una pieza. A cada una le asignamos un número del 1 al 5 que indica la casilla de la columna donde se encuentra, comenzando a contar de abajo hacia arriba. Comenzamos la asignación siguiendo las columnas del tablero de izquierda a derecha. Por ejemplo, la solución que aparece en el problema planteado por Yolanda es la ordenación 14253.

Las condiciones impuestas en el problema tienen una traducción sencilla en esta notación:

- Que no estén situadas sobre la misma columna equivale a que la configuración sea de cinco dígitos.

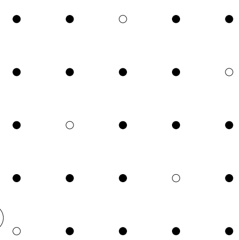
- Que no estén situadas sobre la misma fila equivale a que no aparezca dos veces el mismo número en la configuración.

  Estas dos condiciones dan como resultado las $5! = 120$ permutaciones de 5 elementos.

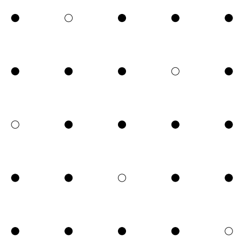
- Que dos piezas no estén situadas sobre la misma diagonal equivale a que la distancia entre las columnas en las que se encuentran no coincida con la distancia entre sus filas respectivas. Por lo tanto, el valor absoluto de la diferencia entre los números asignados a piezas cualesquiera ha de ser diferente al de la diferencia entre sus respectivos números de orden en la permutación.

Las soluciones al problema de las *cinco reinas* utilizando esta notación son 10 y vienen dadas por las configuraciones siguientes:

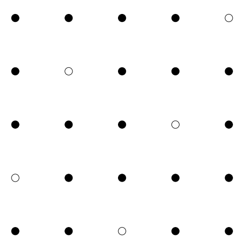
13524



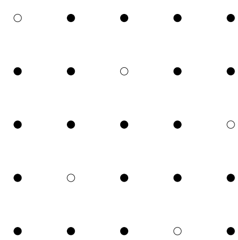
35241

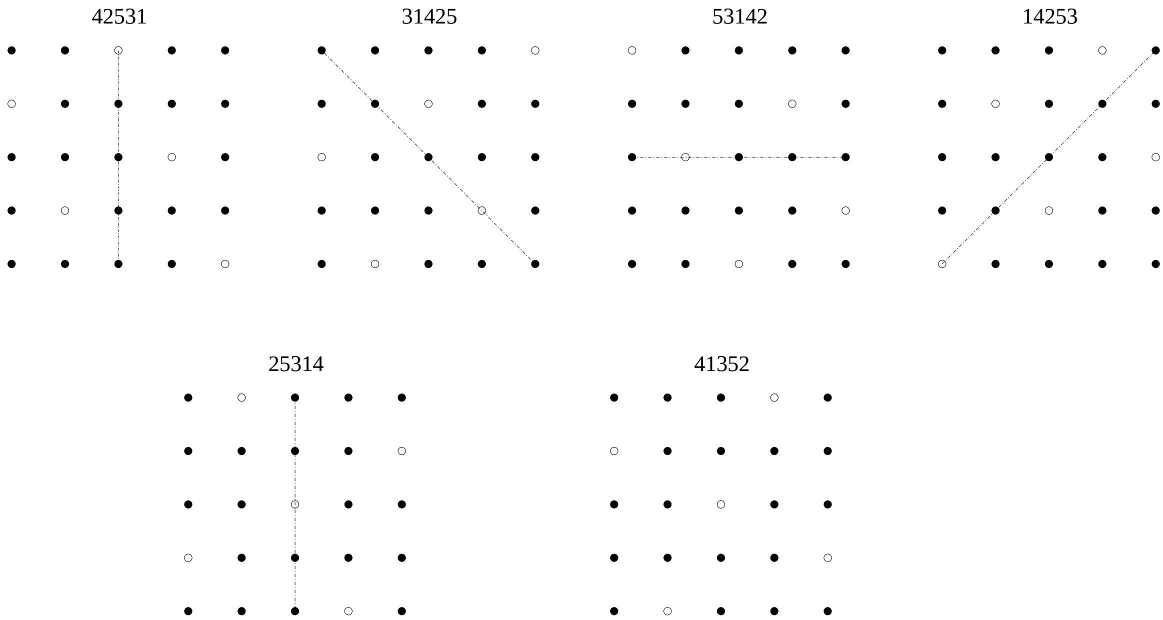


24135



52413





Las ocho primeras configuraciones pueden obtenerse a partir de la primera 13524 al aplicar los giros de $90^0, 180^o$ y 270^o con centro en el centro del tablero y tomando, además, las simetrías axiales s_1, s_2, s_3 y s_4, que dejan invariante el cuadrado. Las dos últimas se obtienen una a partir de la otra al girar el tablero 180 grados[7].

La gran dificultad del problema propuesto radica en que el número de combinaciones de piezas que son compatibles entre sí crece muy rápidamente y sin un orden aparente, de modo que la construcción manual de las soluciones resulta impracticable. Sin embargo, si se considera el problema de las cinco reinas existe una probabilidad $P = \frac{10}{\binom{25}{5}} = 7,7 \cdot 10^{-6}$ de encontrar alguna solución. Las soluciones para el problema propuesto por Yolanda[8] son 4094. La probabilidad, por tanto, es ahora de $P = \frac{4094}{\binom{41}{5}} = 2,3 \cdot 10^{-4}$.

Desde un punto de vista didáctico, la comparación de estos dos problemas aporta nuevos elementos para la reflexión. Por una parte, permite evaluar la dificultad de un juego en términos de la probabilidad para encontrar alguna de sus soluciones. Además, permite discutir acerca del interés matemático de hallar *todas* las soluciones posibles. Por último, permite reflexionar sobre el método utilizado para encontrar dichas soluciones.

En la experiencia de Yolanda han aparecido a lo largo del curso dos nuevas categorías que utiliza para dar un significado a la actividad matemática en la enseñanza primaria y que antes

[7] Por lo tanto, podríamos considerar, salvo movimientos rígidos, dos únicas soluciones, (13524) y (25314), ya que para esta última configuración hay simetría central.

[8] El algoritmo que permite calcular las soluciones ha sido programado en C++ y puede consultarse en el apéndice 2, junto con una explicación detallada de su funcionamiento. Julian Pfeifle tuvo la amabilidad de llevar a cabo este trabajo.

no existían: matemáticas para pensar y para entretenerse. Construir una creencia de este tipo, en su contexto de futura profesora de primaria, es potencialmente mucho más interesante que mantener únicamente la de las aplicaciones aritméticas. Es más interesante, ante todo, porque sus futuros alumnos podrán apropiarse de una creencia que puede continuar desarrollándose en niveles superiores de la educación. Además, abre una importante vía para la indagación en aquellos alumnos de primaria interesados por este tipo de problemas matemáticos.

Veremos a continuación cuál ha sido el proceso que ha seguido la estudiante durante el curso.

M21: Ciencia que resuelve e investiga

En su reflexión al realizar la actividad *abejas* (apéndice 3), Yolanda distingue dos objetivos: a) la formación "como persona", en la que cuestiones básicas como la medida de ángulos no son consideradas útiles y b) la formación académica, que tiene como objetivo permitir el avance hacia estudios superiores y en la que el aprendizaje de este tipo de conceptos se llena de sentido. Esta separación refleja la percepción de un contexto matemático escolar alejado de la formación humana. Los saberes *útiles* se reducen a los que reiteradamente se mencionan en la mayoría de los casos: comprar, contar, etc, y más allá de ésto se plantean ejercicios tradicionales de aplicación de técnicas. Por ejemplo, cuando en la hoja de actividad *abejas* se pedía a la alumna que plantease una actividad en la que se trabajaran los mismos conceptos que allí aparecían, su propuesta fue la siguiente:

> *Tenemos un triángulo del cual sólo sabemos que el ángulo A es de 35^o y el C es de 90^o. Y el lado que va de A a B es de 5 cm. ¿Cuánto mide el ángulo B? Calcúlalo mediante los dos procedimientos que sabes.*

Yolanda interpreta que ha de proponer un problema en el que aparezca el concepto de ángulo y propone un sencillo ejercicio con un triángulo. Además, trata de reunir en un solo ejercicio diferentes contextos en los que ha trabajado con triángulos: a) uno muy básico, en el que conocidos dos ángulos de un triángulo puede conocer el tercero y b) uno característico de la enseñanza secundaria en el que se tienen en cuenta razones trigonométricas. La información de la longitud del lado $\overline{AB}$ es evidentemente superflua para calcular el valor del ángulo B. Pero ella necesita esa información para adaptar el ejercicio a "dos formas diferentes de resolución". La fuerza de su creencia en una matemática escolar es tal que le bloquea un buen criterio. En general, Yolanda no resuelve los ejercicios que propone. Parece que tome siempre como referencia ejercicios que recuerda de la escuela, porque los contenidos que se proponen –en este caso ángulos–, son considerados como un tópico escolar.

En el texto en el que Yolanda reflexiona sobre la matemática en su relación con otras ciencias, y junto con la lectura del texto relativo a las geometrías no euclideas, aparece una aproximación explícita, aunque vaga, a la matemática como una ciencia que *resuelve* o *investiga* hechos o cuestiones que las personas se han planteado alguna vez. No se mencionan ya las características de utilitarismo que aparecían al principio y los ejemplos que se plantean se refieren a situaciones de matemática aplicada de un nivel de complejidad mayor que las que se proponían en los primeros textos.

> [...] *Como por ejemplo, cuántas estrellas deben haber en el cielo, desde el punto de vista de la astronomía; qué elementos intervienen para que se produzcan los cambios de clima y éstos sean diferentes en diversas partes del mundo, desde el punto de vista de la geografía; cómo se podría medir la anchura de un río o el grosor de un folio, desde el punto de vista de las matemáticas.*
> *Como conclusión podría decir que las matemáticas se complementan con otras ciencias y podría ser que todas juntas formaran una única ciencia, solo que cada una con una determinada especialidad. De manera que las matemáticas están especializada en hechos y problemas más de la vida diaria; la astronomía se especializa más en aspectos relacionados con los astros y los planetas; la geografía, cuya especialidad no es tan concreta como en la astronomía, al igual que las matemáticas, puede consistir tanto en estudiar la demografía de un país, ciudad... como los fenómenos atmosféricos o la economía de un determinado país, etc.*

M23: La matemática como un "saber reflexivo"

Al reflexionar específicamente sobre las características del conocimiento matemático comienza a hacerse evidente la separación entre una matemática aplicada básica y una actividad intelectual. Si de lo que se ha de hablar es de aplicaciones en la vida cotidiana, entonces pueden tenerse en cuenta los mismos ejemplos de siempre: ir a comprar, amueblar una habitación, construirse una casa, un traje a medida, etc. Pero puede dársele, además, otro sentido más profundo:

> *Con el conocimiento matemático, creo que se hace referencia a los saberes más básicos que se aprenden en matemáticas, como son los números, las operaciones entre ellos (sumar, restar, multiplicar, dividir, etc.) Aunque se le puede dar un sentido más profundo, por lo que haría alusión a la capacidad de las personas para reflexionar, para dedicarle tiempo a las cosas, tener paciencia, para saber establecer relaciones entre elementos o entre saberes anteriores y saberes actuales (saber y entender que un conocimiento lleva a otros más complejos) etc.*

Este último movimiento aparece en clara relación con la lectura y la síntesis que realiza del artículo de las geometrías no euclídeas. El esquema que **ella misma** propone para describir la evolución del pensamiento matemático a partir del artículo es el siguiente:

1. A partir de un planteamiento inicial se empiezan a investigar las causas y consecuencias de este planteamiento hasta llegar a nuevas teorías.
2. Del hecho de investigar la demostración de una afirmación pueden surgir nuevas afirmaciones.
3. El hecho de replantear una afirmación modificándola puede llevar a nuevas consecuencias y por lo tanto se pueden obtener nuevas afirmaciones que resultan de la evolución de la primera afirmación.
4. El hecho de investigar un postulado y sustituirlo por otro no sólo lleva a nuevos postulados sino también a formar un nuevo tipo, en este caso, de geometría.
5. Podemos concluir diciendo que el pensamiento matemático evoluciona a partir de una primera afirmación, de un plantemiento inicial que al ser investigado y discutido por pensadores posteriores a ese planteamiento se crean nuevas afirmaciones que pueden afirmar ese planteamiento inicial o por el contrario a negarlo (como es el caso que se muestra en el artículo). No sólo nuevas afirmaciones se pueden crear sino que también el replanteamiento de la afirmación básica (la primera) se puede convertir en la base de un nuevo movimiento.

A través de sus reflexiones, Yolanda concibe una matematica aplicada en el sentido cotidiano de los niños, pero se acerca a una concepción que recuerda a las ideas platónicas de una matemática abstracta, sin llegar nunca a romper con la vida cotidiana. En parte, las actividades matemáticas son entendidas como un entretenimiento mental que exige rigor y al mismo tiempo entrena para el rigor lógico y la concentración. Este nuevo sentido le permite encontrar actividades que ejemplifican lo que al comienzo del curso era mencionado como tópico: que las matemáticas pueden ser utilizadas para entrenar un tipo de razonamiento abstracto.

> *Aquestes* [las matemáticas] *no existeixen perquè si, i que sempre hi ha un motiu que porta a la resolució de tots aquells problemes matemàtics que els antics passaven dies i dies investigant.*

Tal sentido es el que la lleva a hablar de paciencia, de concentración, etc. Este nuevo planteamiento conduce a liberarse, en cierto modo, de la presión de ajustar los ejercicios planteados a los enunciados tradicionales escolares. Aunque continúa sin ofrecer la solución de sus problemas y esto no le permite evaluar ni su dificultad, ni la corrección de los mismos, sí ha adquirido nuevos criterios que le permiten ampliar su concepción sobre la actividad matemática.

5.2.1 Problemas que desafían la intuición

Yolanda escribe que le resultan especialmente interesantes y significativos los problemas que "desafían la intuición" y menciona como ejemplos algunos de los que se discutieron a lo largo del curso:

1. Toma un DINA4 y construye a partir de él dos cilindros. Así, a bote pronto, ¿dirías que tienen el mismo volumen? ¿Por qué?

2. Hace poco tiempo (según los periódicos durante el verano de 1999) la población mundial alcanzó la cifra de 6 000 000 000 de personas.

   (a) Formemos una cola con toda la población. ¿Cuántas vueltas daría a la Tierra una cuerda que tuviese la misma longitud que esa cola? ¿Llegaría hasta la Luna? ¿Y hasta el Sol?

   (b) Imagina ahora que reunimos a toda la población del mundo en una región y que cada persona ocupa un cuadrado de 50 cm de lado. Con estas condiciones, ¿crees que la superficie ocupada llegaría a la de la comarca de la Noguera (la mayor de Cataluña, con unos 1 700 km^2), ocuparía toda la comunidad de Andalucía o bien sería necesaria toda la península ibérica?

   (c) Supongamos algo todavía más inverosímil, y a decir verdad algo claustrofóbico: colocamos a toda la población mundial dentro de un gran cubo, de manera que cada persona ocupe un cubo de volumen igual a 1 metro cúbico. ¿Cuál será aproximadamente la arista de aquel cubo? (Tomado de [36] p. 96.)

3. Imagina que colocamos una cuerda, a modo de cinturón, alrededor del ecuador de la Tierra. La cuerda tendrá de longitud L, la circunferencia de la Tierra. Imagina que añadimos un metro a esta cuerda y la volvemos a colocar alrededor, separándola de la superficie de manera uniforme. ¿Qué animal crees que cabrá entre la cuerda y la tierra? ¿Una hormiga? ¿Un ratón? ¿Un conejo?

   ¿Cuál crees que será el resultado si en lugar de una esfera del tamaño de la Tierra tomamos para la misma experiencia una pelota de tenis?

El mensaje erróneo que pueden entender los estudiantes cuando llegan a resolver problemas de este tipo es que al resolver problemas hay que estar siempre alerta con la intuición, y que son los cálculos, en ocasiones mucho más abstractos, los únicos que garantizan la validez de nuestro razonamiento. Es una cuestión extremadamente delicada, si tenemos en cuenta que la intuición y la visualización son dos de las herramientas fundamentales en el trabajo matemático. La cuestión interesante desde un punto de vista didáctico es cómo utilizar estos problemas para *educar* la intuición; para visualizar qué es lo que no hemos intuído adecuadamente. En cursos anteriores habíamos concluido la discusión de este problema con una sencilla demostración algebraica, que prueba que la distancia d que se separará la cuerda de la superficie de la esfera, en las condiciones del enunciado, es independiente del radio R de la esfera:

Sea L la longitud del meridiano de la esfera. La cuerda que la rodea, después de añadir un metro tendrá una longitud $L+1$. Entonces, la distancia d que separa la cuerda de longitud $L+1$ de la superficie de la esfera es:

$$d = \frac{L+1}{2\pi} - \frac{L}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

Y este valor es independiente del radio.

El cálculo algebraico que permite calcular la distancia $d = \dfrac{1}{2\pi}$ que la cuerda se separa de la esfera suele utilizarse para *demostrar* que la intuición engaña cuando se lee el enunciado del problema.

Abraham Arcavi durante su estancia como profesor visitante en la Universitat Autònoma de Barcelona en el año 2001 exponía otra posibilidad para trabajar este problema, ampliando su potencialidad desde un punto de vista didáctico:

Imaginemos que en lugar de una esfera, lo que hemos de rodear es un cubo y para simplificar los pasos, resolveremos el problema en el plano. El objetivo es rodear un cuadrado con una cuerda que mide 1 metro más que su perímetro. Un sencillo esquema permite demostrar visualmente que el metro de cuerda sobrante se ha dividido por igual alrededor de las cuatro esquinas del cuadrado (figura 5.7). La separación d entre el cuadrado inicial, sea cuales sean sus dimensiones, y la de la cuerda imaginaria es siempre la misma $d = \dfrac{1}{2\pi}$, puesto que éste es el radio del círculo del cual se ve un cuarto en cada esquina en la figura 5.7.

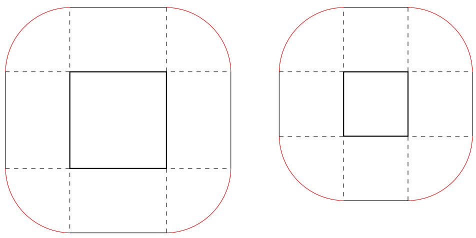


Figura 5.7

El siguiente paso es considerar sucesivamente otros polígonos regulares de mayor número de lados (figura 5.8): La separación entre la cuerda y el polígono inicial es la misma en todos los casos. Aumentando el número de lados del polígono, n, se concluye que la situación será la misma en el caso del círculo. Por lo tanto, la distancia d que se separa la cuerda de la superficie de una esfera de radio **cualquiera** es constante.

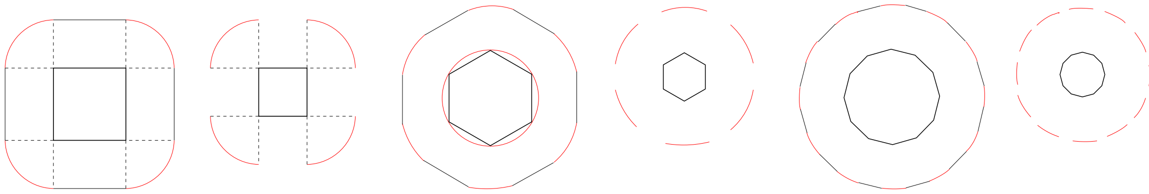


Figura 5.8

Al discutir este problema desde este punto de vista no algebraico, surgen otros aspectos interesantes relacionados con la interpretación que se da a la *forma* en la que la cuerda se separa de los sucesivos polígonos. Es claro que con el método descrito esta distancia es la misma medida desde cualquier punto del polígono que se considere. Sin embargo, cuando nosotros mismos, y después con los estudiantes, nos planteábamos cómo manipular la hipotética cuerda para separarla de la esfera, surgieron nuevos aspectos para la discusión en forma de nuevos problemas.

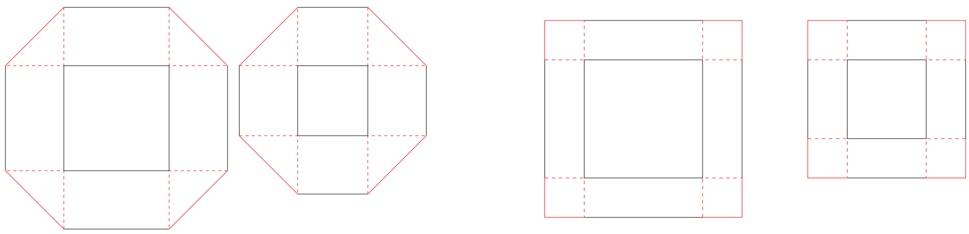


Figura 5.9 La separación entre dos aristas correspondientes del cuadrado original y la cuerda es, en el primer caso, $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ de metro. En el segundo caso es $\frac{1}{8}$.

Al considerar la figura 5.9 estamos reproduciendo el estiramiento de una cuerda alrededor de 8 postes colocados perpendicularmente a los lados en los cuatro vértices del cuadrado. Sin embargo, es posible considerar el estiramiento manteniendo figuras semejantes, como se muestra en la misma figura. En cualquiera de los dos casos, es fácil concluir que sea cual sea el tamaño del cuadrado original, la separación será siempre constante, puesto que el metro sobrante ha de repartirse uniformemente alrededor de las esquinas del cuadrado. Pero el problema se complica desde el punto de vista de la formalización, porque aunque intuitivamente puede considerarse una sucesión de polígonos regulares de cada vez mayor número de lados, la distancia d_n no es ahora constante (figura 5.10). Sería descabellado, dado el conocimiento actual de los estudiantes, plantearse siquiera encontrar el término general de las diferentes sucesiones d_n que pueden aparecer[9] y aún más comprobar que su límite es, como podría intuirse $\dfrac{1}{2\pi}$.

[9]En cualquiera de las dos situaciones que se describen a través del ejemplo del pentágono en la figura 5.10 es ambiguo hablar de *la distancia* que separa los polígonos interior y exterior en cada caso, puesto que alrededor de los vértices pueden considerarse diferentes posibilidades. Esto no sucedía al considerar la situación descrita

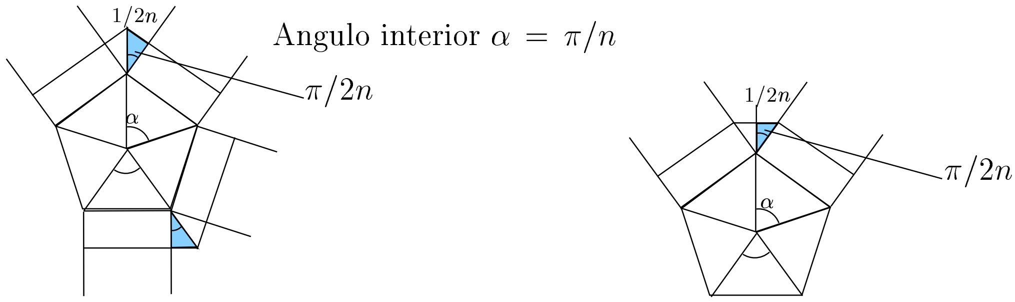


Figura 5.10

5.2.2 Cavalieri y las paradojas del continuo

Otros problemas que Yolanda menciona como interesantes reflejan la misma idea de "desafío a la intuición" a la que ella misma se refería. Fueron discutidos al presentar el método de los indivisibles de Cavalieri y tenían que ver con las conocidas como *las paradojas del continuo.* Incluimos a continuación a través de una cita de Koyré la idea que quisimos dar a los estudiantes acerca de la obra de Cavalieri.

> La obra de Bonaventura Cavalieri goza entre los historiadores del pensamiento matemático de una bien establecida reputación de oscuridad a toda prueba.
> Lejos de mí querer revelarme contra esta apreciación tradicional: la obra de Cavalieri es efectiva e incontestablemente oscura, difícil de leer y aún más difícil de comprender. No

---

en la figura 5.7. Veamos dos ejemplos:

Caso 1: Polígonos semejantes: Sea d_n la separación entre dos aristas correspondientes de dos polígonos regulares de n lados, de igual centro y lados correspondientes paralelos, cuando la diferencia de sus perímetros es constante, e igual a 1, y el número de lados aumenta. El metro de longitud que diferencia el perímetro de ambas figuras puede considerarse repartido alrededor de cada uno de los vértices, como indica la figura 5.10. Si consideramos el ángulo $\alpha = \dfrac{\pi}{n}$ de la figura 5.10, se tiene la relación

$$\tan\frac{\pi}{2n} = \frac{\frac{1}{2n}}{d_n}$$

De modo que la separación d_n es:

$$d_n = \frac{1}{2n \cdot \tan\frac{\pi}{2n}}$$

Y en el límite, que corresponde con la situación de la circunferencia se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{2n \cdot \sin\frac{\pi}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\pi}{2n}}{2\pi \cdot \sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{2\pi}$$

Caso 2: Figuras no semejantes: La nueva sucesión d_n que se considera ahora es:

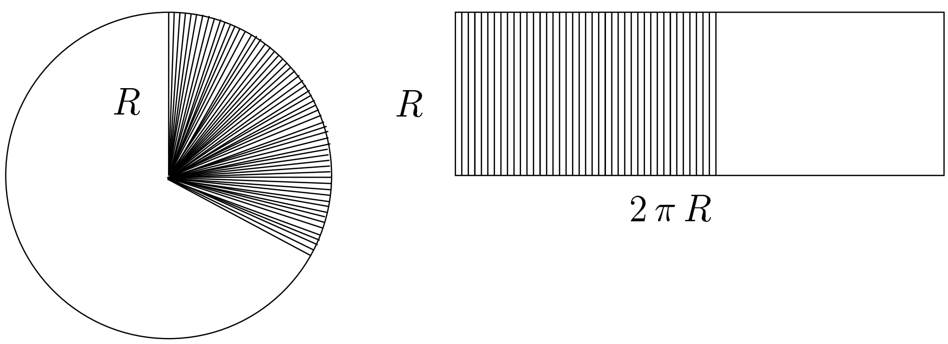
$$d_n = \frac{1}{2n \cdot \sin\frac{\pi}{2n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2n}}{2\pi \cdot \sin\frac{\pi}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2n}}{2\pi \cdot \sin\dfrac{\pi}{2n}} = \frac{1}{2\pi}$$

> obstante, me pregunto si la penosa impresión de estar sumido en la bruma y las tinieblas que no deja de experimentar todo el que aborda el estudio de la *Geometría indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* o de las *Exercitationes geometricae sex* proviene efectivamente de la oscuridad –por otro lado normal e inevitable– de su pensamiento, o más bien del hecho de que Cavalieri se nos muestre incapaz de expresarlo y exponerlo de una manera suficientemente clara: Cavalieri escribe muy mal y sus interminables frases a veces, e incluso a menudo, son auténticos rompecabezas. Por esto mismo obliga, o por lo menos incita, al historiador a traducirlo en un lenguaje que no es el suyo (el del cálculo infinitesimal), lenguaje que se ha desarrollado a partir de concepciones muy diferentes de las suyas y que, en consecuencia, no siempre refleja exactamente su pensamiento, sino que lo oscurece a menudo al tiempo que lo simplifica.
> Como compensación, me parece que si se hace el esfuerzo necesario para familiarizarse con el *estilo* de Cavalieri –y por *estilo* entiendo tanto su manera de pensar como su manera de escribir–, si se estudia su técnica de prueba que proporciona un sentido concreto a nociones a menudo mal definidas *in abstracto*, y sobre todo si se le sitúa en su época, a saber, entre Kepler por un lado y Torricelli por otro –a los que se refiere expresamente– veremos perfilarse un pensamiento suficientemente firme y consciente de si mismo y, al mismo tiempo, suficientemente inteligible como para asegurar a Cavalieri un lugar muy honroso entre los grandes representantes del pensamiento matemático. Con la condición, en todo caso, de no interpretarlo en sentido contrario. A. Koyré [78] 320–321.

Cuando introducimos el cálculo de áreas, propusimos a los estudiantes que dieran una explicación de la siguiente paradoja:

Podemos calcular el área de un rectángulo considerando que está formado por infinitas rectas de longitud l, que colocadas paralelamente una al lado de otra le cubren completamente. Por lo tanto el área del rectángulo es $A = b \cdot l$. Sin embargo, este razonamiento no funciona si intentamos determinar el área de un círculo de radio R y perímetro $P = 2\pi R$, pues obtenemos una área $A = 2\pi R^2$.



Los estudiantes *intuyen* que hay una diferencia entre ambas situaciones, y que en el caso del círculo no es evidente una correspondencia entre *todos* los radios del círculo y las rectas en el interior del rectángulo construido. Expresan esta diferencia en términos tales como *en* *el rectángulo, dos rectas siempre se separan igual arriba y abajo, mientras que en el círculo no ocurre eso.* La conclusión a la que los estudiantes llegaron en la discusión de clase es que el cálculo del área se realiza en ambos casos sumando pedazos más pequeños de área, y no rectas, de manera que en el caso del rectángulo suman rectángulos y en el caso del círculo suman sectores circulares. Puesto que los sectores circulares se asemejan a triángulos, entonces el área del círculo resulta ser $A = \dfrac{2\pi r r}{2} = \pi r^2$. De este modo, el *engaño* queda resuelto y la explicación que han desarrollado les resulta lo suficientemente convincente para explicar ambas situaciones.

La discusión nos permitió introducir la formulación de Cavalieri del principio de los indivisibles. A la noción de lo *infinitamente pequeño* pero de las mismas dimensiones que la figura de partida se opone el concepto de *indivisible* en la obra de Cavalieri. Alexandre Koyré discute, con el rigor y la claridad que caracterizan sus obras, la interpretación generalizada entre los historiadores modernos del pensamiento matemático, que reprochan a Cavalieri el querer componer una figura con otras de dimensión menor. Para Koyré, Cavalieri sabe que es imposible sintetizar una figura a partir de otras de menor dimensión y tras la definición de los indivisibles no se encuentra la idea de una suma infinita, sino más bien al contrario, los encuentra después de cortar la figura en cuestión con un plano o una recta, según si se trata de una figura en el espacio o una figura plana.

> La terminología de Cavalieri no debe inducirnos a error. Cuando Cavalieri nos habla de "todas las líneas" *(omnes lineae)* y de "todos los planos" *(omnia plana)* de una figura geométrica y los declara equivalentes a aquella, en absoluto pretende formar las sumas de estas líneas o de estos planos. Por el contrario, declara que el conjunto de un número indefinido (infinito) de elementos es, en general, el mismo indefinido (infinito) y que tales conjuntos no pueden ser relacionados. Sin embargo, piensa que esta proposición no es universalmente válida y, en especial, que cualquiera que sea la opinión que se tenga sobre la naturaleza del *continuum*, a saber, que se admita que en el *continuum* (una superficie) sólo hay líneas o que se admita que hay, además, algo más que líneas, no se puede dejar de reconocer el hecho patente y cierto que las encontramos en *todas partes* y que, al atravesar una superficie, las encontramos a *todas.* Por ello estima que es imposible negar la equivalencia de una superficie (figura) dada con *todas* sus líneas y poner en duda que la relación del conjunto de todas las líneas de otra es la misma que se establece entre las figuras mismas. De otro modo, habría que negar la posibilidad de comparar dos figuras entre sí, lo cual es evidentemente absurdo. Esta constatación justifica el empleo de los *indivisibles* y nos permite substituir el estudio de las relaciones entre las figuras por el de las relaciones que subsisten entre sus elementos, con la condición, no obstante, de que sepamos establecer una correspondencia. [78] 328–329.

El cómo dar con la correspondencia adecuada es lo que hoy ya no se incluye en el currículum escolar de matemáticas, y que Cavalieri recoge en el principio que lleva su nombre:

> Las figuras planas, colocadas entre dos paralelas en las que cualesquiera líneas, paralelas a las primeras, cortan segmentos iguales, son iguales.

Y es conocido que el mismo principio se hace extensivo al caso de cuerpos en el espacio, excepto que en lugar de líneas se utilizan planos.

Es claro que la técnica anterior para comparar figuras no es aplicable en todos los casos, en particular cuando las figuras estudiadas son de diferente dimensión y no pueden colocarse entre paralelas. Este es el caso de la paradoja que también se les propuso a los estudiantes para que analizaran la aplicación del principio de Cavalieri a la comparación de la superficie lateral de un cono y un rectángulo como se indica en la figura 5.11.

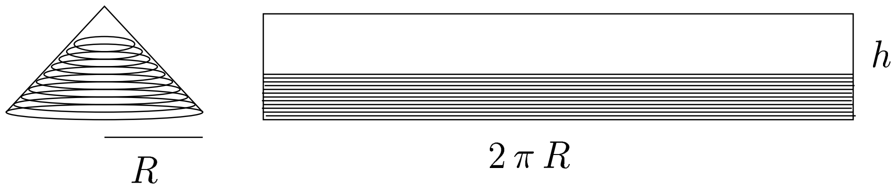


Figura 5.11

Algunas de las situaciones paradójicas que se atribuyen al método de los indivisibles son tenidas en cuenta por Cavalieri, por lo que él mismo propone como una exigencia fundamental que los elementos indivisibles que se ponen en correspondencia en las figuras comparadas han de ser "homólogos".

Toeplitz ([125], p. 61) presenta la siguiente paradoja:

Consideremos los dos triángulos, T y T' [han de ser desiguales] que se obtienen al dividir un triángulo dado por su altura. Se trata de dos triángulos de la misma altura h pero diferentes bases AB y CD. Para cada linea MN paralela a la base del primer triángulo es seguro que encontraremos una de la misma longitud en el segundo triángulo (figura 5.12), de dónde podría concluirse que ambas figuras son equivalentes porque existe una correspondencia entre todas las verticales de T y las de T'.

La misma paradoja fue enviada a Cavalieri por una persona anónima con la intención de desacreditar su método de los indivisibles [7]. En las *Exercitaciones* Cavalieri aborda este tipo de situaciones, imponiendo como condición que los indivisibles correspondientes han de obtenerse en un mismo *barrido* de la figura inicial con secciones paralelas a las bases. Así, aunque efectivamente la correspondencia que se considera en la paradoja existe, no cumple las condiciones que determinan los elementos correspondientes, u homólogos, en el método de Cavalieri.

Cavalieri prueba con su método que la razón de semejanza entre las áreas de figuras planas es el cuadrado de su razón de semejanza lineal, y este hecho le permite deducir resultados que

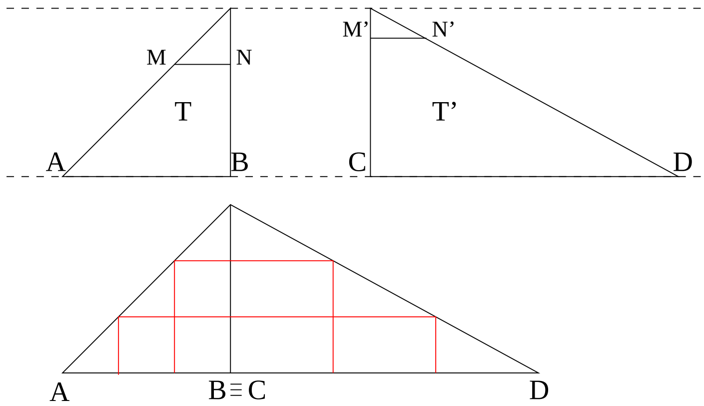


Figura 5.12

involucran colecciones de figuras planas semejantes. De este modo, puede comparar figuras sólidas, y se dedica especialmente a la comparación de cilindros, conos, prismas o pirámides. Por ejemplo, si C_1 y C_2 son círculos que mantienen una proporción determinada, los cilindros que generan mantienen también la misma propiedad.

El siguiente paso en el estudio de volúmenes de figuras sólidas es comparar figuras no semejantes a partir de sus secciones planas. Por ejemplo, Cavalieri considera un cono y su *cilindro correspondiente*, de la misma base. Puesto que ha demostrado que la relación entre sus secciones es 1:3 concluye que ésta será también la proporción entre sus volúmenes:

> Un cono, según el lenguaje de Cavalieri, está compuesto por un número infinito de círculos decrecientes de la base al punto más alto, mientras que el cilindro de la misma base y de la misma altura, se compone de una infinidad de círculos iguales. Por lo tanto, tendremos la razón del cono y el cilindro si encontramos la relación de la suma [Cavalieri nunca habla de sumas, sino de elementos agregados] de todos los círculos decrecientes en el cono, infinitos en número, con la de todos los círculos iguales del cilindro, cuyo número es igualmente infinito. En el cono, estos círculos decrecen de la base al punto más alto, como los cuadrados de los términos de una progresión aritmética. En los demás cuerpos siguen otra progresión [...] El objetivo general del método es asignar la relación de esta suma de términos crecientes o decrecientes con la de términos iguales de la que está formada la figura uniforme [el cilindro] y conocida de la misma base y altura. [78] p, 341.

Más allá de la utilización del método de Cavalieri para encontrar relaciones de proporcionalidad entre figuras, lo especialmente relevante en la discusión con los alumnos fue la contextualización histórica de su método; las discusiones en cuanto a formalización matemática que se derivan de él, y las diferentes valoraciones de su trabajo por parte de diferentes historiadores. Andersen presenta en [6] una completa descripción del método de los indivisibles, los resultados obtenidos y las diferentes reacciones e interpretaciones de los historiadores de la matemática hacia su obra.

Capítulo 6

Análisis de los datos II: Grupos de discusión

Tal y como se apreciará en este capítulo nos hemos acercado a lo que aconteció en los grupos de discusión desde una perspectiva diferente a la que la que utilizamos en el caso de los textos escritos. Se han tomado como referencias teóricas algunos aspectos del análisis conversacional. La premisa básica de este enfoque metodológico es que la organización de las conversaciones constituye la mejor evidencia para comprender socialmente a las personas [39]. La razón para sostener esta premisa es *tan evidente* como que para mantener una conversación y responder a lo que se acaba de decir, aunque sea con evasivas o cambiando de tema, es necesario que las personas involucradas comprendan el significado de lo que se ha dicho y que, al menos implícitamente, sean capaces de pensar hacia dónde quieren que se dirija su respuesta.

La segunda premisa teórica que tomamos también del enfoque del análisis conversacional es que el esfuerzo dialogante de la gente que participa en conversaciones se dirige continuamente a generar un cierto contexto, que a su vez es modificado con cada intervención, y que este contexto puede ser tan poderoso que haga que cambien los significados atribuidos a un contenido determinado. Estas premisas teóricas justifican por qué prestamos atención a lo que acontece en los grupos de discusión, siendo el objetivo de esta investigación comprender cuál es el sentido que los estudiantes dan a la actividad matemática.

El análisis de los grupos de discusión actúa, por lo tanto, como un recordatorio intenso de la lógica de este trabajo, sin pretensión alguna de crear teorías generalizables pero coherente con la teoría de que los fenómenos sociales existen en el momento en que los participantes están en acción [39]. La regularidad con la que los estudiantes interaccionan con el resto del grupo muestra que, en su participación social, se involucran siempre para mantener ciertas reglas por las que se rige la construcción de las creencias hacia la matemática y que dichas creencias se generan en el grupo. Es a partir de la detección de estas reglas cuando es posible teorizar sobre la evolución de las creencias, que es nuestro objetivo principal. La investigadora tiene como tarea, entre otras, describir de forma metódica y sistemática los aspectos del proceso de interacción **que los propios estudiantes manifiestan que son interesantes.**

Es importante señalar que en los grupos de discusión se busca descubrir patrones empíricos. No comenzamos el análisis con una teoría sobre qué es lo que piensan o intentan los estudiantes. Simplemente buscamos describir movimientos relacionados con las creencias sobre la matemática y encontrar cómo se genera el contexto de la conversación en el cual surgen estos movimientos.

En los grupos de discusión los estudiantes viven y relatan su experiencia de una forma muy diferente a cómo lo hacen cuando escriben sus reflexiones. Las ideas individuales se matizan y toman forma en la totalidad del grupo. El grupo es considerado desde nuestra perspectiva teórica como un organismo en el que se conjugan cualidades individuales y sociales. No se considera como una suma de individuos, sino que define un nuevo nivel de experiencia social. Al hacerse preguntas y relatar su experiencia, los estudiantes construyen nuevas creencias **en el seno del grupo** y para ello recurren a menudo a su propia historia, en ocasiones inventada, para explicitar aquello que les preocupa o les interesa.

En consecuencia, nuestro copromiso es ilustrar cómo los estudiantes utilizan, tanto el conjunto de actividades y contenidos del curso, como los entornos de interacción que se generan en los grupos de discusión. El grupo es quien ha de utilizar estos recursos, otorgar a los contenidos y las situaciones vividas la relevancia que considere adecuada y negociar su uso. Así pues, las conclusiones que se extraen del análisis de los grupos de disciusión necesariamente han de estar relacionadas con la elaboración de sentido por parte de los participantes.

> La única diferencia es que los participantes aplican ese conocimiento de forma implícitamente evidente para ellos, y el analista explicita las características de esa evidencia. [39], p. 109.

Aunque en pocas ocasiones discuten realmente sobre matemáticas, muchas veces discuten de manera rutinaria sobre otros aspectos y no esperamos tanto que los participantes expresen sus dudas filosóficas sobre la matemática, como que cuestionen cualquiera de las intervenciones que otro hablante propone en ese momento. Ese es un punto esencial que distingue el diálogo de la reflexión individual que se llevaba a cabo a través de los textos escritos. Una de las cuestiones que se muestra de manera especial en los grupos de discusión y que no era tan evidente en el caso del análisis de los textos escritos, es que los estudiantes, para dar un sentido a su actividad, se toman muchas molestias en asegurarse de que los acuerdos a los que llegan están bien regulados y aceptados o consensuados por el grupo.

El procedimiento seguido para el análisis de los grupos de discusión fue el siguiente:

1. Se llevaron a cabo 16 encuentros, aproximadamente de una hora de duración cada uno, que fueron grabadas en vídeo. Cada uno de los cuatro grupos se reunió en cuatro ocasiones a lo largo del curso. Nuestro objetivo era, como en el caso de los informes escritos, detectar ejemplos de movimientos para determinar su estructura, así como su relación con el desarrollo del curso.

2. Selección de dos de los cuatro grupos de discusión sobre los cuales centrar el análisis. Los argumentos que decidieron nuestro interés por estos dos grupos fueron los siguientes:

   (a) Los participantes intervenían con agilidad y buena calidad de argumentación.

   (b) En uno de los grupos seleccionados había una mayoría de personas a quienes no les gustaban las matemáticas o habían tenido malas experiencias escolares. En el otro, sin embargo, se daba la situación opuesta, pero en ambos había una persona contraria, en este sentido, a la mayoría del grupo.

   (c) Pudimos encontrar entre los movimientos detectados en cada grupo uno cuya caracterización era la misma (en concreto, cuestionar si el conocimiento matemático consistía exclusivamente de números y fórmulas algebraicas o involucraba otros aspectos, en particular propiedades geométricas.)

3. Detección y transcripción de los episodios correspondientes a los grupos de discusión seleccionados en los que se detectaron movimientos y selección del movimiento que analizaríamos en detalle, que surge de manera independiente en ambos grupos.

4. Estudio detenido de las transcripciones correspondientes, identificando las experiencias y aportaciones relevantes de las conversaciones para el movimiento que se describe. Esto nos permite mostrar cómo cada grupo acuerda y gestiona las causas y las consecuencias de llevar a cabo un problema que se considera relevante en su formación matemática. Es especialmente enriquecedor ver cómo un mismo movimiento emerge de dos situaciones conversacionales diferentes.

La idea fundamental que queremos enfatizar con esta segunda parte del análisis es que el colectivo de los futuros profesores no existe independientemente de lo que ellos tienen que decir y de lo que representa para ellos ser un grupo. Es importante romper con la idea de que los estudiantes *son* lo que los investigadores dicen de ellos. Los estudiantes actúan colectivamente de forma espontánea y generan nuevos significados acerca de su actividad matemática sin que un investigador les apremie a que lo hagan.

Al no intervenir, quien investiga no tiene la necesidad de decidir teóricamente sobre los errores o aciertos de otro. De acuerdo a la lógica de la investigación, la investigadora forma parte de la experiencia y requiere tanto compromiso y participación, como distancia. No es un participante cualquiera pero eso no impide que intervenga, interpele o cuestione en el seno del grupo cuando lo considera adecuado para comprender mejor la situación.

> El investigador entrevista y conversa, y en otro momento expresa y difunde lo que ha comprendido. [50] p. 97.

Como se apreciará en los diálogos que aparecerán a lo largo del capítulo, el papel que asumió la investigadora con su participación en los grupos fue priorizar ante todo las intenciones de los participantes. A los estudiantes se les explicó previamente cuál era nuestro objetivo al plantear los grupos de discusión, tanto en relación con la obtención de datos para la investigación, como con los aspectos de aprendizaje que creemos que se favorecen al trabajar de este modo. Se les explicó, igualmente, que ellos habrían de plantear y gestionar mayoritariamente las preguntas y que el papel de la investigadora sería básicamente de moderadora.

6.1 Movimiento principal M4: De fórmulas a propiedades geométricas

El primer grupo reúne personas con un nivel conceptual de matemáticas en general bastante bajo. No les gustan las matemáticas y lo explicitan abiertamente. Repiten a menudo que han tenido malas experiencias y expresan sus dudas respecto a la utilidad o el sentido de los contenidos aprendidos. Hay personas con un nivel de crítica desde la óptica de otras disciplinas, como la historia, suficientemente profundo.

El movimiento seleccionado para el análisis amplía considerablemente el significado dado a la actividad matemática. Se desprende del siguiente fragmento de la conversación que, en parte, ya fue introducido en el capítulo 2 de esta investigación. A continuación lo incluimos íntegro para proceder a su análisis detallado.

6.1.1 Grupo 1: Las matemáticas de un puzzle

[Los estudiantes están discutiendo el significado de la afirmación: “el conocimiento matemático permite a los ciudadanos encontrar soluciones viables a los problemas cotidianos de la sociedad en la que se encuentran,” que escribió una de sus compañeras de curso.]

1. Núria: Que por ejemplo, cualquier conocimiento matemático es cualquier... por ejemplo la suma es un conocimiento matemático, ¿no?, la resta, los ángulos, los triángulos. Todo eso es un conocimiento matemático que permite a los ciudadanos encontrar, hacer todo.
2. Por ejemplo, para lo de las cortinas el conocimiento matemático serán las áreas, pues le permiten las matemáticas aplicarlo para hacer algo cotidiano, por ejemplo la cortina o el mantel.
3. Lourdes: ... o el mantel. ¿Y tú qué opinas?

4. Vanessa: Yo pienso que bueno, el conocimiento matemático sería el conocimiento básico, ¿no?, o sea, un conocimiento básico, la gente sepa hacer las cosas pero son cosas básicas de matemáticas, por ejemplo como esas cosas que no hace falta saber mucho sino el conocimiento básico, o sea, hacer cosas que le sirvan, le sean útiles, pero que tampoco sean muy rebuscadas. Cosas que sirvan para la vida, como lo de la tela, lo de las cortinas. Pero sin que no sea muy difícil.
5. Lourdes: ¿Y tú qué opinas?
6. Ana: Bueno, no sé, que es relativo, que un conocimiento básico te permitirá hacer una cosa y un conocimiento más amplio pues como en todo te permitirá hacer otras cosas. No digo que un conocimiento muy extenso se puede aplicar todo a la vida diaria porque nos estaríamos engañando. Como decía Eli con lo del círculo, que eso aplicado a la vida diaria, no lo sé, a mi no se me ocurre. Yo creo que, bueno, además es que lo dijiste tú, que eso lo hicieron los griegos pues para satisfacción personal propia, no tiene una aplicación.
7. Lourdes: Xavi, ¿Tú qué piensas?
8. Xavi: Yo me he planteado con lo de esta frase, a ver, por ejemplo el problema de las cortinas de Núria. El conocimiento matemático le permitiría encontrar la solución matemática al problema de la cortina pero, definiendo conocimiento matemático dos más dos, así. Pero también lo puede hacer pues mirando cuántas partes caben y tal, sin utilizar ninguna fórmula de tanto por aquí, tanto por allí, multiplicando nos dará tantos metros de tela. Pues también se puede conseguir sin usar conocimiento matemático, pero mi duda es: la manera de resolver este problema que es como a veces ahora estamos haciendo lo de los cuadraditos, para intentar luego que te salgan las áreas, ¿también es conocimiento matemático ese modo de pensar? ¿Sí?
9. Lourdes: ¿Qué opináis?
10. Vanessa, Núria, Ana: Que sí.
11. Xavi: Pues entonces sí que sirve. Sí que permite a los ciudadanos encontrar soluciones. Si solo pensamos que el conocimiento matemático es la fórmula de altura por base pues entonces también habría la otra manera que es la que estaba diciendo ahora para solucionarlo.
12. Ana: O sea, que lo aplicamos de una forma inconsciente, quieres decir?
13. Vanessa: Claro, porque juegas con áreas, ¿no? También, o sea, con formas, porque si tú dices que tienes un cuadrado, tú tienes que usar eso y dices: “tengo una medida así, un cuadrado, ¿cuántos trozos me cabrán?”, pues tienes que aplicar igualmente, aunque dices, uno; doblas, dos; tres. Es lo mismo.
14. Xavi: Pero eso no es un conocimiento matemático. Eso es un razonamiento lógico.
15. Lourdes: A ver.
16. Xavi: O a ver, bueno vale...
17. Lourdes: A ver, ha salido “razonamiento lógico”
18. Xavi: Cada vez que hablo me parece que la cago más.
19. Lourdes: ¿Qué es razonamiento lógico? ¿Qué es conocimiento matemático? Tú cuestionabas si conocimiento matemático no es sólo dos más dos y contar.
20. Xavi: La fórmula.
21. Lourdes: Que no es sólo la fórmula. Tú decías que había otra cosa que no sabías si era conocimiento matemático o no.
22. Xavi: Cortina, pues, con cachitos, a ver cuántos caben, tal...
23. Lourdes: Cachitos, trozos, puzzles, ¿eso es conocimiento matemático o no? Vamos a llegar a un acuerdo.
24. Xavi: ¿O es razonamiento lógico?
25. Lourdes: ¿Y el razonamiento lógico es conocimiento matemático?

26. Ana: Es un razonamiento lógico basado en un conocimiento matemático.
27. Vanessa: Matemático, sí.
28. Ana: Porque si no tienes un conocimiento matemático previo no podrías hacer ese razonamiento.
29. Xavi: El único conocimiento previo que tienes es que tienes una unidad que es la cortina que quieres hacer y tienes tela. Y has de ver cuántos cuadraditos te caben.
30. Ana: Pues empezando porque si no supieses contar y no supieses lo que son los números.
31. Xavi: Hostia, vale, vale, Ana María, pero al...
32. Eli: Pues mi abuela sabe qué son los números, no sabe matemáticas y sabe contar...
33. Xavi:... vale pero al uno llegamos todos. A contar uno, dos, tres, cuatro, cinco a lo mejor no... pero uno...
34. Ana: Ya, pero esto lo puedes aplicar también a otros problemas mas complejos.
35. Xavi: Bueno, no sé, a lo mejor la estoy cagando pero yo...
36. Ana: Que no, si yo estoy de acuerdo.
37. Eli: Yo estoy de acuerdo con él, para variar.
38. Lourdes: Venga, Eli, ¿tú qué opinas?
39. Eli: Jolines, pues yo, mi abuela la he visto 80 veces hacer cortinas y hacer... y mi abuela la pobre mujer no ha podido estudiar y de conocimiento matemático tiene lo mismo que puede tener, yo que sé, un crío de dos años. A ver, sabe contar, sabe sumar, dentro de lo que cabe, pero lo que es cortar una cortina, mi abuela está harta de hacer cortinas y se apaña de mil maneras pero las cortinas le salen bien, y bueno, lo de las faldillas...
40. Mi abuela a lo mejor no ha llegado a la universidad para hacer ese problema ni ha llegado a segundo de EGB, pero simplemente se pone. Pero eso yo lo veo un razonamiento de su mente, no un razonamiento matemático.
41. Se puede decir que es un razonamiento matemático cuando tú usas las matemáticas como base, pero si tú no conoces las matemáticas, no puedes utilizarlas como base. Utilizas un razonamiento lógico, que es de tu mente, vamos, eso ya cada uno allá él, pero no sé. Yo... mi abuela o cualquier persona mayor que vivió antes de la guerra o después no tiene un conocimiento de matemáticas, de lengua, no sabe escribir, no sabe leer...
42. Ana: Pero lo está aplicando aunque no sea consciente de que lo está haciendo.
43. Eli: Bueno, entonces yo ahí diferencio de que no es conocimiento matemático lo que ella tiene. Ella es... un razonamiento suyo, ella no sabe si lo está haciendo bien, si ese razonamiento está bien o está mal. Simplemente ella lo hace como cree que está bien. Yo lo veo como que es un razonamiento lógico de su mente y no le hace falta conocer la gran fórmula del triángulo o yo que sé.
44. Lourdes: ¿Y para tí sería conocimiento matemático equivalente al conocimiento de las fórmulas que haces en la escuela o en el colegio?
45. Eli: Sí, para mi un conocimiento matemático es algo que... bueno la base, es lo que estaba diciendo. Una base matemática de la que tú partes.
46. Lourdes: Que se aprende, ¿dónde?
47. Eli: Que se aprende pues sí, a base de la educación que tú te dan desde que eres pequeño.
48. Ana: ¿Y no sabes eso a partir de razonar?
49. Xavi: Perdona Ana María, pero estás aprendiendo esos conocimientos razonando, eso sí, pero porque tienes a un padre que te lo está explicando, o a un centro, o a una escuela, o a un parvulario, que te lo están inculcando, pero muchos razonamientos parten de tu cabeza.
50. Núria: ¿Y cómo han hecho las matemáticas los...

51. VANESSA: Claro, entonces nunca se llegarían los niños a tener un conocimiento matemático, porque si sólo se les enseñan los números entonces si sólo se considera conocimiento matemático a los números, a sumar, que es lo básico...
52. ELI: Pero yo no...
53. VANESSA:...entonces los niños usarán siempre un razonamiento lógico y no un conocimiento matemático y cuando lleguen a un grado superior dirán, pues esto no es un razonamiento, es un conocimiento matemático, entonces dirán vale... ¿y ahora qué? ¿Y después del conocimiento matemático qué habrá, razonar o...? No sé, va ligado.
54. XAVI: Las dos cosas.
55. ANA: Es que todo conocimiento matemático parte de un razonamiento lógico.
56. XAVI: Pero un razonamiento lógico no tiene por qué partir de un conocimiento matemático.
57. ANA: No, es que es al revés.
58. ELI: Exáctamente.
59. XAVI: Y las dos cosas se aprenden, en la etapa infantil, y en la etapa adulta.
60. VANESSA: No, si sí... Que quede claro.

El fragmento de conversación que acabamos de leer está lleno de acuerdos entre los participantes. Son acuerdos que van dirigidos a encontrar un sentido a la actividad matemática y que modifican el contexto de la conversación para dar sentido a la actividad:

La primera intervención de Núria establece los elementos básicos para iniciar la discusión a través de la enumeración de conceptos, que para ella son los que permiten a los ciudadanos "hacer de todo": suma, resta, ángulos y triángulos. Inicia así una primera aproximación a la matemática desde dos perspectivas: una aritmética y otra geométrica, operaciones y figuras básicas. Su intervención concluye con un ejemplo que será clave en la nueva formulación del contexto de la discusión: el *problema de las cortinas.* A este problema ya nos hemos referido en el capítulo 2, pero lo analizaremos en detalle a continuación. Tal y como fue enunciado en clase decía lo siguiente:

> Se tiene una ventana en forma de cuadrado que tiene 2 metros cuadrados y se quiere hacer una cortina con piezas cuadradas de un metro de lado. ¿Cómo ha de cortarse y coserse dicha cortina?

El problema fue planteado para que lo trabajaran fuera de clase y pudiese ser discutido en un día posterior. La mayoría de los estudiantes interpretaron el problema como un puzzle y por tanto el contexto que se transmitía en el enunciado al hablar de cortinas y ventanas cuadradas no generaba bloqueo alguno. Aunque aparecieron dos soluciones diferentes, esperadas, para el problema que son las que ilustramos en la figura 6.1, no faltaron alumnos que no utilizaban piezas triangulares y que trataban de completar el cuadrado mediante piezas rectangulares.

Sin embargo, cuando el problema se discutió en el aula, Núria planteaba que no se entendía. Explicaba que lo había hecho preguntando a su madre y que en el enunciado no quedaba claro que lo que había que coser para hacer "bien" la cortina era una pieza rectangular, que para ella estaría formada aproximadamente por seis piezas como las que decía en el enunciado. La

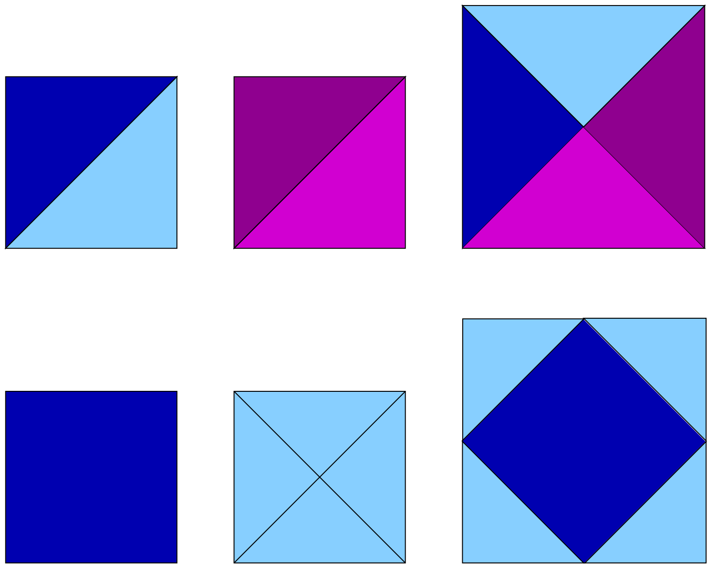


Figura 6.1

justificación era que para hacer una cortina siempre se necesita el doble de tela que el ancho de la ventana (para asegurar que cuando cubra la ventana no se terse, sino que ondee) y además el largo ha de permitir que la cortina cubra el marco de la ventana una vez cosido el dobladillo.

Por lo tanto, Núria interpreta el problema como un problema real, que puede resolverse a partir de un conocimiento que en principio no está relacionado con ninguna actividad matemática, y por esto le pide ayuda a su madre. Desde el punto de vista de Núria, el problema planteado no tiene ningún sentido en la clase de matemáticas porque no le encuentra un significado matemático. Su intervención nos permitió discutir en la clase cómo se utiliza el contexto al que se alude en el enunciado de un problema cuando se intenta solucionar.

Algunos días después, en el grupo de discusión, Núria volvía a afirmar su punto de vista respecto del enunciado del problema:

> Núria: Un momento, el problema de la cortina... De todas maneras eso no se hace así, porque como lo hicimos en clase quedaba un churro de cortina.
> Eli: Ya la veo con la tela...
> Lourdes: Evidentemente...
> Núria: Queda un churro de cortina
> Lourdes: ¡...queda un churro de cortina!
> Núria: Porque eso no se hace así, eso lo primero. No sé, que queda un poquito churro, un poquito fea la cortina. A no ser que sea de diferentes colores, entonces sea de diseño Agatha Ruiz de la Prada, pero...
> Ana: Pues eso, podría ser más *práctico* hacerlo sin usar eso[1].

[1] La cursiva es nuestra. Nos interesa resaltar que a partir de aquí comienzan a manejarse dos significados

> Lourdes: ¿Sin usar el lenguaje de las cortinas?
> Núria: Porque mi madre es costurera y yo la veo hacer cortinas y la verdad...
> Eli: Y la verdad la mia también y no ha llegado a esos niveles de matemáticas la verdad.
> Núria: No, es que yo cuando vi la cortina esa dije, un poquito...
> Lourdes: ¿Os acordáis cuando discutimos al final de la clase sobre los enunciados de los problemas? Por ejemplo, el problema de la cortina, tal y como lo hicimos en clase, ¿es un problema de matemáticas interesante?
> Ana: Como problema sí, como aplicación a la vida diaria, nadie lo va a hacer así las cortinas.
> Núria: Bueno, no sé, antiguamente a lo mejor una mujer sólo tenía esos trozos de tela y no podía comprar más y decía...

El problema de las cortinas permitió a los estudiantes discutir sobre la utilidad o no del conocimiento matemático y en el movimiento que describimos aquí fue crucial para acordar un nuevo sentido a la actividad matemática. Junto con el enunciado del problema de la cortina, en el fragmento numerado 2 del diálogo principal de este movimiento, Núria alude también al "mantel." El problema al que se refiere fue propuesto después de la discusión de la cortina, cuando ya habíamos trabajado en clase la aproximación a la circunferencia mediante polígonos regulares, inscritos y circunscritos, de cada vez un mayor número de lados. El enunciado decía:

> Una costurera está habituada a cortar piezas circulares a partir de piezas rectangulares de tela. Piensa por ejemplo en el trabajo de preparar unas *faldillas* para una mesa circular (hechas a partir de una sola pieza de tela y que llegan hasta el suelo). Trata de estimar las dimensiones de la pieza de tela que necesitarías y cómo procederías para cortar una pieza aproximadamente circular.

Quien resolvió el problema lo hizo preguntando a su madre, o reconociendo en el problema una actividad cotidiana útil:

> Lourdes: Eli, cuéntanos. Has dicho que te parecía interesante el problema de cuadrar, o sea, de convertir un polígono cualquiera en un cuadrado que tuviese la misma área. ¿Y cómo relacionas el interés de ese problema con el hecho de que las matemáticas sirvan para algo? O sea, a ti te parece interesante, pero el otro día decías que no lo veías útil porque no servía para nada.
> Eli: A ver, es que para mi interesante no es útil.
> Lourdes: Muy bien, a ver, explica eso mejor.
> Eli: A ver, lo veo interesante, no porque a mí me vaya a servir. Vale, pues hoy, mira, he

para la palabra "práctico." Por una parte, plantear el problema tal y como se hizo (utilizando el lenguaje de las cortinas) y pretender una solución geométrica, no resulta *práctico*. Más adelante Ana se referirá a que es un problema *interesante*, pero que realmente el problema no es confeccionar una cortina. Por otra parte, la palabra "práctico" tiene un significado de utilidad cotidiana, de modo que el problema, planteado como puzle es poco *práctico* desde este punto de vista.

visto útil lo de las faldillas estas de la mesa, a parte yo ya lo sabía porque mi abuela era... me lo había enseñado. Siempre se recurre a las abuelas.
Lourdes: ¿Sabías hacerlo?
Eli: Sí, es que mi abuela cosía y hacía cosas de esas. Bueno, y mi madre, y más de una vez la veo por allí. ¿Qué estás haciendo? Unas enagüillas para la mesa –porque en Andalucía se dice enagüillas– aunque eso ya lo sabía... No, pero, no sé, los problemas estos de cuadrar, pues nunca me había parado a mirarlo así. O sea, no sé, siempre pues yo es que lo veo todo en matemáticas negativamente porque a mi las matemáticas excepto sumar y restar no me saques, pero lo demás no sirve. Eso, pues independientemente de que sea útil me gustó porque nunca me lo habían dado así, entonces, quieras que no es una manera... Yo lo veo más fácil de entender así que no como te lo enseñan, porque tal y como te lo enseñan pues te dicen esto es así por así, porque es una fórmula y yo te lo digo. En cambio pues tal y como lo explicáis vosotros sabes de dónde viene eso, de dónde sale, sabes la manera que está bien hecho y sabes la manera que está mal. No sé, me gustó. No hay más explicaciones.

La rectificación de la circunferencia y los problemas de cuadraturas fueron de los problemas más valorados por los estudiantes. Al plantear el problema del mantel, nuestro objetivo era visualizar la idea de *rapidez* con la que los polígonos regulares inscritos en una circunferencia se aproximan a ésta a través de la manipulación de papel. Cinco dobleces a partir de un cuadrado permiten obtener una aproximación a la circunferencia mediante una poligonal de 36 aristas (figura 6.2). Además, desde el punto de vista de la aplicación que se propone en el enunciado del problema, la aproximación resultaba aceptable como solución, a diferencia de lo que sucedía con el problema de las cortinas.

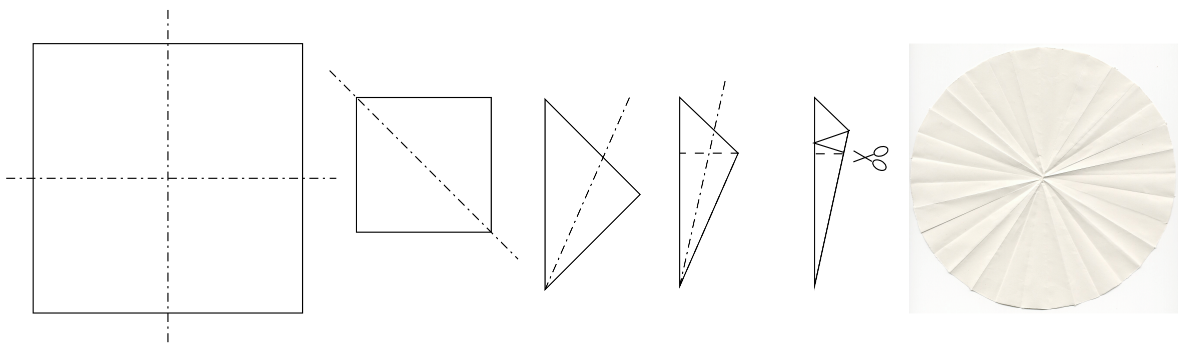


Figura 6.2

Vanessa, en la intervención número 4, asocia el conocimiento matemático básico con la idea de facilidad. Los conceptos introducidos por Núria en la intervención anterior son, a través de la repetición de los mismos ejemplos (la tela, las cortinas) calificados como *fáciles*. Se añade entonces un sentido de utilidad al aprendizaje en el sentido de *hacer cosas*.

Ana, en la intervención número 6 introduce un aspecto esencial que matiza la intervención anterior de Vanessa: No todo ha de ser fácil. Se sigue mantenenido implícitamente la idea de aplicación en el comienzo de la intervención, aplicaciones que dependiendo de su grado de sofisticación requerirán un mayor nivel de dificultad. Sin embargo, en su misma intervención rompe con la idea de aplicación que se ha generado desde el comienzo de la discusión e introduce un aspecto fundamental. La idea de las matemáticas *no aplicadas*, que ejemplifica recogiendo una intervención anterior de Eli ("como decía Eli con lo del círculo, que eso aplicado a la vida diaria, no lo sé, a mí no se me ocurre") y busca dar garantía a su intervención afirmando que durante las clases se dijo que de ese tipo de problemas devenía una satisfacción personal no relacionada con las aplicaciones[2].

El papel de Ana en el grupo es siempre un papel conciliador, en el sentido de que recoge explícitamente en sus intervenciones los comentarios o explicaciones de otras personas. Esto le permite que sus aportaciones, a menudo muy diferentes a las del resto del grupo, sean tenidas en cuenta. Ana es una persona a la que no le gustan las matemáticas pero que está muy contenta con el curso que se está llevando a cabo.

Hasta el fragmento número 8, en el que interviene Xavi, se ha generado un contexto que crea el clima adecuado para que brote el movimiento fundamental que estamos describiendo y que despuntará inmediatamente. Repasemos hasta aquí cuáles son los elementos que interviene en su estructura:

- Ejemplos de problemas que han sido trabajados en clase y que permiten cuestionar la utilidad o no de las actividades matemáticas: el problema de las cortinas, el del mantel y el del cálculo del área de un círculo.
- Diferentes aproximaciones a la actividad matemática: operaciones y problemas geométricos.
- No aparece clara cuál es la definición de utilidad. Aparece una **utilidad** en sentido práctico y un **interés** en sentido intelectual.

Xavi exterioriza en su intervención una duda que se refiere directamente a una cuestión epistemológica sobre el conocimiento matemático: se admite sin discusión que cuestiones como *dos más dos*, y en general la utilización de fórmulas, son conocimiento matemático y se ofrece como elemento para la discusión si se admiten otro tipo de contenidos con un carácter distinto, concretamente geométrico, para la resolución de un problema matemático.

Algo que resulta especialmente relevante para que el movimiento se produzca es que **el mismo problema** que se ha resuelto como un ejercicio de geometría sintética –el de la cortina–

[2]El problema al que se refiere con "lo del círculo" es el de la deducción de la fórmula que se utiliza para calcular el área del círculo a partir de la aproximación mediante triángulos isósceles inscritos, según descríbíamos en el capítulo anterior.

puede ser interpretado algebraicamente porque involucra medidas. Desde su punto de vista, un problema de áreas admitía hasta entonces una única solución algebraica y ahora han de decidir si existe otro método, de naturaleza geométrica, que pueda ser igualmente admisible para su solución. Ante problemas estrictamente geométricos que no admiten esta doble percepción (por ejemplo "Dada una trama cuadrada de 9 puntos, construir todos los triángulos posibles") no se genera este tipo de debate y se puede admitir sin confusión que se trata de un problema de matemáticas *porque involucra triángulos*.

El aspecto esencial desde el punto de vista del contenido matemático que encontramos en este fragmento de la conversación es, resumiendo, el siguiente:

- El concepto de área está siendo considerado desde dos perspectivas: la de las fórmulas de cálculo y la de la geometría sintética.

Ante el acuerdo de Vanessa, Núria y Ana, Xavi admite abiertamente (11) dos enfoques para entender la actividad matemática que dan lugar a dos formas de entender la solución de un problema de geometría: un método algebraico y un método sintético.

En el transcurso de la conversación, la intervención de Ana en 12 genera un nuevo contexto a partir de la intervención de Xavi. El nuevo contexto tiene un grán interés didáctico: esa otra manera de entender los contenidos matemáticos, la geométrica, es la que "aplicamos de una forma inconsciente." Implícitamente se está asumiendo que cuando los estudiantes hablan de "conocimiento matemático" como la aplicación de fórmulas se refieren directamente a una creencia basada en su experiencia escolar. Vanessa matiza esta intervención inmediatamente después, en la intervención número 13, introduciendo un nuevo objeto del que se ocupa el conocimiento matemático: la forma.

En este momento la construcción de un nuevo significado para la actividad matemática está en pleno desarrollo. Se acaban de añadir elementos fundamentales que renuevan el contexto de la conversación y la preparan para establecer nuevos acuerdos:

- Existe un conocimiento matemático cuya percepción se basa en la experiencia consciente y que está asociado con la utilización de fórmulas. Aparece, además, un conocimiento matemático *inconsciente*, que hasta entonces no era reconocido como tal y que añade un nuevo objeto de interés matemático: la forma.

A pesar de que en la unidad 11 Xavi decía aceptar como conocimiento matemático ciertos aspectos relacionados con la geometría, retoma de nuevo la distinción entre dos conocimientos que concibe como epistemológicamente diferentes y les pone nombre para diferenciarlos: conocimiento matemático y razonamiento lógico. La alusión de Xavi a que "cada vez que habla parece que la caga más" describe un aspecto esencial de la forma en la que el grupo organiza sus discusiones. Cada vez que perciben diferencias de contenido tratan de calificarlos introduciendo un nuevo registro. Una buena parte de las conversaciones del grupo, por ejemplo, se dedicó a caracterizar cuando una determinada actividad era interesante (por ejemplo la discusión de los problemas de astronomía de la antigüedad o el problema de la cuadratura de un polígono); cuando era útil (por ejemplo cortar el mantel); cuando era curioso (por ejemplo conocer cómo era la danza de las abejas); cuando era emocionante (por ejemplo los problemas que desafían la intuición). Con su intervención, Xavi ha generado un nuevo contexto para la conversación en el que surgen las intervenciones numeradas a partir del fragmento 15.

- Se define un cierto tipo de actividad, asociada a la resolución de un problema como **razonamiento lógico**. La necesidad inmediata del grupo es llegar a caracterizar qué tipo de actividad es esa.

Ana está empeñada en justificar hasta el final que eso que Xavier llama *razonamiento lógico* es razonamiento matemático y por eso desde la intervención numerada en el fragmento 26 crece el nivel de implicación emocional de los estudiantes, hasta que Ana vuelve a asumir su papel conciliador (36). Las intervenciones de Ana (36) y Eli (37) son aparentemente iguales en la forma, pero su función en la conversación es completamente diferente. Mientras que Ana busca conciliar dos posturas que han aparecido enfrentadas, la de Eli es reafirmar la posición que ella y Xavi tienen en el grupo: nunca discuten el uno las opiniones del otro sino que se refuerzan. Esto hace que a menudo sus intervenciones se repitan o se maticen, con lo cual una sola voz aparece en general mucho más amplificada.

En el fragmento 39 Eli deja muy clara su opinión introduciendo a su vez un elemento clave que permite personificar la discusión: la abuela. Nadie discutirá que la abuela, analfabeta, resuelve un problema similar al que a ellos se les ha planteado en clase de matemáticas en la universidad, y sin embargo, **como la abuela no ha estado escolarizada, no puede saber matemáticas**. Esta intervención de Eli marca, en consecuencia, un aspecto muy importante en la conversación:

- En la discusión entre lo que es un conocimiento matemático y lo que es un razonamiento lógico se añaden las referencias al contexto escolar. Si se habla de conocimiento matemático y de razonamiento lógico hay que diferenciar entre aquello que se aprende en la escuela y aquello que se aprende por inmersión en la vida social no académica.

La actividad de coser unas *enagüillas* para la mesa, ¿es realmente una actividad matemática?[3]

[3] Sobre ejemplos parecidos se han llevado a cabo una considerable cantidad de investigaciones [30, 98, 1] que han conducido a interesantes discusiones acerca de la naturaleza social de la matemática, al menos en lo que se refiere al aprendizaje de conceptos básicos y sobre las que no existe un acuerdo explícito.

La intervención de la investigadora en el fragmento 44 está cargada de una intencionalidad evidente: buscar el origen de tal diferencia en la experiencia escolar del aprendizaje. Eli ha de posicionarse respecto a si aquello que ella llama “conocimiento de matemáticas” se aprende en la escuela, y elude hacerlo. Algo falla si concreta dónde se aprende, en el colegio o fuera, aunque fuera este el mensaje que transmitía al hablar de la experiencia de su abuela. Una nueva duda surge entonces implicitamente: ¿dónde se aprenden las matemáticas? Xavi encuentra una respuesta acudiendo a un modelo mental del conocimiento (49). Hay “algo”, el *razonamiento lógico*, que es parte de la mente de las personas. Núria y Vanessa encuentran confusa tal separación y buscan con sus intervenciones posteriores mezclar ambas opciones.

La intervención que Vanessa hace en 51 aporta un nuevo elemento que modifica de manera evidente el contexto de la conversación. Ella exterioriza una nueva duda, que se relaciona con la necesidad de disponer de teorías que nos permitan evaluar y valorar nuestras acciones sin confusiones. Si no está clara la relación entre una cosa y otra, las personas se hacen un lío y no encuentran respuesta a sus preguntas. Ella lo pone en boca de una pesona hipotética que estudia en un grado superior y que se hace preguntas de carácter metamatemático.

> This is a fundamental issue and one that has to be faced not only by people involved in the philosophy of education and the psychology of learning but also by mathematics teachers. It is consequently frequently discussed. The points that we ourselves want to contribute to this debate are controversial and we do not claim to have found the answer.
> [...]
> Mathematics, like literature, music, sports and science, is a cultural product and a cultural defined activity. The boundaries of what is mathematics and what is not mathematics are also cultural defined. Growing up in a Western society, we have learned much about this social definition. Below are some beliefs that have become part of how people in our society view mathematics:
>
> - Mathematics is a special kind of activity and any other activity is, by definition, not mathematics.
> - Mathematics is learned in school –consequently, people who have not gone to school don’t know any mathematics.
> - Mathematics is something one gets qualifications in –if you don’t have any qualifications, you can’t possibly know much mathematics.
> - Mathematics is abstract and is not about the everyday world –therefore you don’t learn about mathematics in everyday life.
> - Mathematics is difficult; few people can get qualifications in mathematics –that means that few people know mathematics.
> - Mathematics is used by mathematicians, some scientists, and some higher-level technically qualified people (mostly men!) –these are the people who know mathematics.
>
> [98] p. 100–101.

Pero nuestro interés ahora no es profundizar en esta discusión desde la perspectiva de las investigaciones didácticas, ni siquiera constatar si los puntos que se enumeraban en la cita anterior se manifiestan también como creencias en el grupo de discusión, sino adentrarnos en el proceso de construcción de las creencias que elabora el grupo a través de la conversación.

- Los intentos de caracterización sobre aquello que es “conocimiento matemático” y “razonamiento lógico” han llegado ya a un punto en el que generan un nuevo ambiente de confusión. Es necesario establecer, sin más dilación, una teoría.

Xavi recoge inmediatamente la demanda implícita en la intervención de Vanessa y se apresura a concluir cual es la relación entre los términos que se han acuñado: todo conocimiento matemático parte de un razonamiento lógico; pero razonamiento lógico no implica conocimiento matemático. Su intervención, en términos de implicaciones lógica, resulta contundente, clara y precisa, y satisface al resto de los integrantes del grupo.

A medida que los estudiantes se encuentran con una nueva faceta de la actividad matemática que antes no existían le ponen un calificativo y ese es un aspecto especialmente importante en la búsqueda de sentido. A medida que van creando estas categorías, pueden ir encajando su experiencia: problemas que hasta entonces no se habían planteado como una actividad matemática, pasan a ser considerados problemas “interesantes”. En otra de las sesiones, en la que discutían sobre la divulgación matemática se referían a los contenidos matemáticos que encontraban como “curiosidades”, etc. Destacamos de nuevo este hecho porque lo hemos considerado muy importante para la investigación. Pensamos, además, que puede ofrecer nuevas conclusiones en un análisis complementario.

Pasaremos a continuación a analizar lo que aconteció en en el segundo de los grupos de discusión elegido para el análisis. Como se percibirá en seguida, el nivel de discusión y elaboración de contenidos matemáticos es mucho más preciso.

6.1.2 Grupo 2: Propiedades geométricas en la explicación de la forma de la Tierra

El movimiento elegido para analizar en el segundo de los grupos podría resumirse de manera aséptica exáctamente igual que el anterior: en el grupo surge un sentido para la actividad matemática que parte de una creencia basada exclusivamente en las operaciones y fórmulas algebraicas –aunque con un sentido más amplio– y concluye con la consideración también de propiedades geométricas. Este paralelismo con el movimiento anteriormente analizado le convierte en especialmente interesante para nuestra investigación. El contexto en el que este movimiento se genera y la manera en la que se negocia difieren mucho de lo que aconteció en el primer grupo. Lo importante, sin embargo, no es que sean diferentes en forma (esto es evidente puesto que cada situación es inevitablemente distinta) sino entender cuáles son los mecanismos, especialmente en lo que se refiere a los contenidos que toman como referencia, que hacen que la negociación, los significados comunes y los acuerdos sean diferentes.

En este segundo grupo hay personas a quienes les gustan especialmente las matemáticas, tienen un buen recuerdo escolar de la asignatura, les gusta hacer problemas y en general están contentos con el curso. Sólo hay una excepción, Rocío, que explicita que tiene bloqueos importantes con respecto a la asignatura. El movimiento que describimos a continuación se produce en la tercera reunión del grupo discusión, cuando estamos conversando sobre la actividad propuesta de los *modelos de Tierra* (anexo 3).

Nos detendremos a explicar en detalle cómo fue elaborada esta actividad para que pueda comprenderse el contexto de la conversación.

Tomamos como referencia algunos modelos ingénuos que expresan niños y niñas y que aparecen recogidos en algunas de las investigaciones de Vosniadou sobre cambio conceptual [38, 130]. La investigación sobre el cambio conceptual ha surgido en el marco de la investigación psicológica constructivista del esfuerzo por proponer una teoría para explicar el aprendizaje de conceptos científicos por parte de los niños. Vosniadou desarrolla las investigaciones a las que nos hemos referido a partir de descripciones particulares de "tipos de cambio conceptual," que tienen lugar durante el proceso de adquisicion del conocimiento científico de niños y niñas. Para la investigadora, algunos de estos cambios se basan en la experiencia no escolar; otros, sin embargo, son considerados una consecuencia evidente de la instrucción. Un ejemplo de cambio conceptual basado en la instrucción es el que tiene lugar cuando los niños y niñas, al expresar cuál es la forma de la Tierra, manifiestan por ejemplo que "hay dos Tierras, una plana y otra esférica" o que "la Tierra es una esfera hueca con un plano interior donde vivimos"[4].

En este tipo de investigaciones confluyen las perspectivas de la psicología cognitiva y la enseñanza de las ciencias para dirigirse a un objetivo común que es proponer intervenciones didácticas apropiadas.

La investigación sobre cambio conceptual ha dado lugar a una considerable producción científica por parte de muchos otros autores y nuestra intención no es, en absoluto, abarcar estas aportaciones. Desde nuestro punto de vista, las propuestas didácticas que se desprenden de este tipo de trabajos reflejan el enfoque de los investigadores y no de los profesores, pero adentrarnos en una discusión en este sentido se escapa del objetivo específico de esta investigación, aunque lo consideramos interesante para futuros trabajos. El hecho de no estar de acuerdo con que las prácticas instruccionales hayan de partir de investigaciones con un carácter psicológico tradicional y no de la acción de los profesores mismos es algo que venimos repitiendo desde el comienzo del trabajo y se desprende de nuestra manera de entender el conocimieno y el aprendizaje.

Hecho este breve resumen, es importante aclarar que lo que recogimos de las investigaciones de Vosniadou para nuestro trabajo fueron únicamente los modelos detectados en las explicaciones de los niños cuando intentan explicar la forma de la Tierra o el ciclo del día y la noche. Partiendo de nuestro enfoque teórico, queríamos saber cómo estos futuros profeso-

[4]A este tipo de modelos explicativos la autora los denomina *sintéticos*. Los modelos sintéticos son intentos que llevan a cabo los estudiantes para, valga la redundancia, sintetizar las explicaciones que les llegan de fuera (la Tierra es esférica) con otros aspectos que parten de su experiencia (la Tierra es plana.)

res dan sentido a la actividad matemática cuando intentan *ellos mismos* diseñar un proceso instruccional, en este caso encaminado a explicar cuál es la forma de la Tierra.

Elegimos elaborar una activiadad relacionada con los modelos de la Tierra por varias razones:

1. En primer lugar, el exponer modelos elaborados por los niños nos permitía contextualizar la actividad en la futura labor profesional de los estudiantes de magisterio. Pensamos, además, que las ilustraciones que se presentan en dichos modelos pueden resultar extremadamente sugerentes para los estudiantes, que aún no habían llevado a cabo ninguna práctica escolar.

2. Habíamos comenzado el curso con astronomía, planteando las diferentes concepciones sobre la esfericidad de la Tierra.

3. Se ofrecía la posibilidad de acercarse a la discusión desde un punto de vista no únicamente conceptual, sino también de tradición histórica.

4. Era un ejemplo que, aunque tomado de la enseñanza de las ciencias experimentales, involucraba propiedades específicamente matemáticas, concretamente, el hecho de que una superficie esférica es localmente aproximable por un plano.

5. Las investigaciones de las cuales extrajimos los ejemplos habían contemplado también la influencia de aspectos culturales en la explicitación de los modelos expuestos. Esto nos permitía referirnos a distintas perspectivas culturales a la hora de elaborar argumentos sobre cuestiones de ciencia.

Todos estos factores permitían la consideración y la interpretación de la actividad desde múltiples perspectivas y por tanto era previsible que fuera un buen estimulante para el diálogo, que es lo que más nos interesaba. En el fragmento de conversación que se incluye a continuación surge el movimiento que hemos considerado para el análisis.

Conversando sobre la forma de la Tierra:

[Los estudiantes han comentado algunos de los modelos propuestos en la hoja de actividad e intentan acordar un método para explicar alguna propiedad geométrica que permita explicar porqué la Tierra nos puede parecer plana aunque sabemos que es más o menos esférica. Durante el curso habíamos hablado de las diferentes concepciones a lo largo de la historia sobre la esfericidad de la Tierra y ya habíamos discutido el problema de la medida de Eratóstenes del meridiano terrestre.]

1. LOURDES: ¿Aquí hay matemáticas o no hay matemáticas?
2. ROCÍO: Yo no he visto las matemáticas.
3. LOURDES: ¿Ninguno las habéis visto?
4. ROCÍO: Yo sólo he visto la lógica. La lógica.
5. SONIA: Yo he visto lo que me han enseñado. A mi me han enseñado que la Tierra es redonda y yo tengo que explicar eso. ¿Cómo? A ver, o sea, yo me encuentro con un niño que me dice que la Tierra es plana y está muy convencido de ello y creo incluso que me convencería antes él a mi que yo a él. Yo no sería capaz de decirle "pues mira, es redonda porque..."
6. ROCÍO: Pero él está convencido de eso porque es lo que ve. Los niños se basan en lo que ven.
7. SONIA: Pues ya está. Yo no sabría explicarle a un niño por qué es redonda. ¿Cómo le hago creer a ese niño que es redonda? ¿Le digo "tírate por el borde"? No puedo. El niño me dirá: "mira, no hay borde."
8. ROCÍO: Pero tú tienes mucha más experiencia de la vida que un niño y muchos más conocimientos.
9. SONIA: Pero enseñar no se trata de experiencia de la vida. Se trata de... Yo sé que es redonda y él ve que es plana. En la gente prevalece siempre lo que se ve que lo que...
10. ELENA: No, pero si se lo sabes explicar bien...
11. ROCÍO: Si se lo sabes explicar bien, el niño lo entiende.
12. SONIA: Yo no sabría.
13. ELENA: Porque yo... se me ocurrió [risas] lo de los dibujos de Willy Fog[5]... Willy Fog da la vuelta al mundo. Pues ya está. [risas] Pues a ver, si tú a un niño... El niño ve que la Tierra es plana. Pero si tú haces en plan cuento, ¿vale? de Willy Fog... Claro, Willy Fog llega un momento que si la Tierra es plana se cae. Entonces Willy...
14. SONIA: Se cae.
15. ELENA: Si Willy Fog es capaz de llegar al mismo sitio, el niño dice, vale, pues igual sí. El niño sabe que puede que... puede ser un tubo. No, pero luego se lo explicas mejor. Algo que visualmente puedan entender.
16. SONIA: ¿Pero dónde están las matemáticas?
17. ROCÍO: Es que no hay matemáticas.
18. SONIA: Es visual. Es Willy Fog.
19. ELENA: Pues igual más tarde.
20. SONIA: Es más lógico, es lo que quieras, pero matemáticas... A mi no me dices "suma esto y esto y verás que la Tierra es redonda."
21. GEMMA: ¿Dónde están las matemáticas?
22. LOURDES: Quiero que habléis todos y vosotros dos ahora habéis hablado poco. Venga. ¿Hay matemáticas o no hay matemáticas?
23. GEMMA: Yo no las he visto.
24. SONIA: O sea, algo de matemáticas tiene que haber cuando alguien se ha dado cuenta de que la Tierra es redonda y no plana. Algo tiene que haber hecho para llegar a esa conclusión. No creo que haya dado toda la vuelta así...
25. MIQUEL: Es una comprobación empírica. Dar la vuelta al mundo y ver que no es plano.
26. ROCÍO: Si tú eres capaz de echarte a andar y volver al mismo sitio, algo falla. La Tierra no es plana. Y si tú estás en un punto y te pones a andar, llegará un momento en que...
27. SONIA: Vale, pero puedes andar así, [simula que dibuja una circunferencia sobre un plano], en un mismo plano, pues andar así y llegar al mismo sitio.

[5]Willy Fog es el personaje televisivo de una serie de dibujos animados de los años 80. Representa un rico aristócrata inglés que apuesta que puede dar la vuelta al mundo en 80 días. Y claro, al final gana...

28. Rocío: Pero entonces ya no estás andando en linea recta.
29. Miquel: También, también está la demostración de la mandarina, de la naranja.
30. Lourdes: ¿Cuál es la demostración de la naranja?
31. Miquel: ¿No la sabes? Esta es la mandarina y el pecíolo ¿no? [hace como si tuviese una naranja en la mano]. Como si aquí hubiese una hoja. El rabito. Eso yo lo he visto en una película de Colón o algo así, que ahí está Colón mirando el horizonte del mar y ve cómo un barco que se va yendo, se va yendo, y que llega un momento que desaparece. No es que no se vea de tan lejos que está.
32. Rocío: Claro.
33. Miquel: Y entonces Colón tiene una mandarina aquí [se acerca la mandarina imaginaria a dos dedos de la nariz] y la ve gigante y redonda y ve que hay un momento en que ya no se ve el barco. Entonces ha de ser redonda porque hay un momento en el que el barco desaparece. Si fuese plana la seguiríamos viendo. Más grande o más pequeña, pero la seguiríamos viendo. Y desaparece de la vista porque la Tierra está curvada.
34. Lourdes: ¿Sirven esos argumentos para explicar por qué a nosotros nos parece plana?
35. Miquel: No, eso explica que es redonda.
36. Rocío: Claro, eso explica que es redonda. Pero entonces, si ellos te dicen que es plana...
37. Miquel: Pues es plana, porque si tú miras a tu alrededor. Si no caminas...
38. Lourdes: Todavía no tenemos explicación del porqué nos parece plana. [silencio] Es una cosa muy grande...
39. Elena: Por la curva...
40. Sonia: Luego está la idea esa que es... Vale, es redonda, pero tiene que haber un plano sobre el que nosostros andamos. Yo tambien eso lo he escuchado a veces. O sea, sí, es redonda, pero es como si fuese muchos planos por los que va andando la gente. O sea, la gente no anda siempre por encima de la esfera, no anda siempre cuesta arriba [barullo].
41. Gemma: Un lado del poliedro... es plano. Sería como un lado del poliedro.
42. Sonia: Sería como un gran, gran, gran poliedro. Con muchos planitos. Es que si no... Es que si no, de verdad que no... a mi me dicen que la Tierra es plana y está muy convencido, y yo no sería capaz de decirle: “No, es redonda.” O sea, ¿y qué hago? Me le llevo a la playa y le digo: “Mira aquel barco” Hasta que el barco se va... Eso es como...
43. Lourdes: Sí, pero una vez le has convencido de que es redonda...
44. Sonia: Ya. ¿Qué matemáticas hay?
45. Lourdes: ...¿cómo le convences de que él está caminando sobre algo que no es plano?
46. Sonia: Sí. No sabría.
47. Rocío: A ver, tú puedes convencer de que la Tierra es redonda, ¿vale?, porque si tú le explicas como lo ha explicado el Miki ya lo puedes, ya puedes quedarte convencido de que sí, es redonda. Lo que encuentro difícil de explicar por lógica es que no sea plana. Yo creo que eso es más difícil. Yo no sé. No sabría explicarlo.
48. Lourdes: Pero, ¿no sabes explicarlo o no sabes por qué?
49. Rocío: Y tampoco sé por qué.
50. Elena: Yo creo que sí que hay matemáticas ahí.
51. Rocío: No, no... las matemáticas para explicar por qué nos movemos en un plano y la Tierra es redonda, no.
52. Miriam: El porqué, sí. Porque si tú tienes una bola muy pequeña y marcas un punto, cuando la bola se hace más grande, el punto se hace cada vez más grande, y seguirá siendo plano. Yo que sé.
53. Lourdes: Sí, sí, si lo has explicado perfectamente.

54. MIQUEL: Sí, sí, sí es eso...
55. MIRIAM: A ver, no es que la Tierra sea plana, sino que va creciendo...
56. MIQUEL: Es como si haces un círculo, con el Paint Brush [risas] y vas aumentando haciendo puntos. Y al principio hace mucha curva, y cuantos más puntos haces...
57. GEMMA: Es lo que hicimos también el otro día.
58. LOURDES: ¿Dónde lo hicimos?
59. GEMMA: En clase, lo de los triángulos, los quesitos esos que salían del círculo. Que eran triángulos porque era poca curva. Se va aproximando cada vez más al triángulo.
60. LOURDES: Pero eso lo vimos en la clase de matemáticas, ¿no?
61. SONIA: [risas] Aquí hay algo que falla. O no damos mates en clase de mates...
62. LOURDES: ...o aquí estáis hablando de cosas de mates.
63. GEMMA: Pues sí, sí, hay. Por ahí están.
64. ELENA: Porque es una esfera. Una esfera es una figura. [barullo]
65. ELENA: A ver, si es una esfera, y en matemáticas tenemos una figura que es una esfera, tiene que tener unas propiedades como tal.
66. SONIA: O sea, en historia no hablas de esferas,...
67. MIQUEL: Pero es cuestión de dimensiones.
68. SONIA:... en lenguaje no hablas de esferas...
69. MIQUEL: Y ya está. Ella lo ha dicho antes y lo ha dicho perfecto. Si es pequeñito tú puedes ver una esfera, pero con grandes dimensiones no parece una esfera.
70. ROCÍO: Yo no lo entiendo.
71. SONIA: Es como si dibujas un puntito en un globo sin hinchar y luego lo vas hinchando, hinchando, hinchando, teniendo en cuenta que no estallaría nunca, claro, porque si no... Y si lo sigues hinchando hasta que lo haces gigantesco, entonces ese punto llegará un momento en que será una bestialidad de punto.
72. ROCÍO: Ah, claro, como cuando dibujas en un globo, que a medida que lo hinchas...
73. ELENA: Pero la pregunta era si aquí las matemáticas...
74. ROCÍO: Pues no sé. Yo no las he sabido ver, pero por lo que estamos diciendo sí que tiene matemáticas. A la hora de pensarlo yo no he sabido...
75. MIQUEL: Por ejemplo, si tú haces una circunferencia. Bueno, una esfera en el plano es una circunferencia y si haces la linea que une los dos... O sea, si haces un arco en un cuarto de circunferencia y haces un segmento que une los dos puntos hasta el final del arco, entonces...
76. SONIA: Cuanto más grande sea la circunferencia...
77. MIQUEL: Si tú haces grande la circunferencia pero el segmento se queda igual, la circunferencia se ira acercando cada vez más al segmento.
78. SONIA: Hasta que llegue un poquito...
79. MIQUEL: Hasta que serán prácticamente iguales. No sé, ¿me explico?
80. LOURDES: Perfectamente.
81. MIQUEL: Hasta que sean prácticamente iguales, y por eso parece que es un plano. O sea, que al ser dimensiones tan bestias, pues son prácticamente igual al arco, como si dijéramos.
82. ROCÍO: Es más fácil así...
83. LOURDES: Muy bien.
84. GEMMA: A ver, ¿dónde están las mates?
85. ELENA: [risas] Matarile, rile, rile... En planos y volúmenes y cosas así nos referimos a las mates ¿no? pero... Es que las mates es el nombre que se le da a unas ciertas cosas.
86. ROCÍO: Es que estamos hablando constantemete de términos matemáticos, o sea, el arco, la circunferencia, pero eso es... simplemente se habla de términos. No se aplican unas matemáticas.

87. Lourdes: ¿Qué sería para tí aplicar las matemáticas?
88. Rocío: Aplicar números y... Para mi las matemáticas son números, ¿vale? Y para mi ver esto con matemáticas es aplicar todo de números para darle una explicación lógica desde el punto de vista de las mates.
89. Sonia: Sería muchísimo más complicado.
90. Rocío: Entiendes lo que te quiero decir, o...
91. Lourdes: Sí, sí...
92. Rocío: Y explicado sin números y sin nada, simplemente con la palabra decir: "tenemos una esfera y un arco, y si la esfera se va haciendo más grande..."
93. Miquel: Con arco. Con el arco esto se puede explicar. Y con la tangente.
94. Rocío: Vale Miki, vale.
95. Miquel: Es que ahora me he acordado que...
96. Lourdes: Vale, pero la has cortado. Venga [a Rocío], entonces...
97. Rocío: Eso, pues tienes una esfera y un arco, y cuando la esfera se hace más grande, el arco se va acercando. Pues lo veo más fácil así que empezar a decir: "Tenemos una esfera de tanto diámetro, de no sé qué..."
98. Sonia: Pero son matemáticas igual.
99. Lourdes: Pero no hemos dicho de hacer algo así, ¿o sí?
100. Rocío: Pero a mi, verle la aplicación matemática en esto sería eso.
101. Sonia: Pero lo de Miquel es matemáticas. Es matemáticas sin números, pero es matemáticas.
102. Gemma: Pero las matemáticas no son números solamente.
103. Sonia: Pero para mi las matemáticas son números, porque yo las matemáticas que he hecho son números, y entonces las matemáticas se hacen con números.
104. Lourdes: Y entonces, ¿qué te pasa en las clases? Porque aquí habéis dicho que no salen muchos números en las clases.
105. Rocío: Que no, es que no lo entiendo. No entiendo las explicaciones y ya está. Es cuestión de que yo me aclare.
106. Lourdes: ¿O de que te lo expliquemos mejor?
107. Rocío: No, si explicado bien ya está.
108. Elena: Es cambiar el chip.
109. Rocío: Tengo que cambiar yo.

Rocío comienza diciendo que ella no ve matemáticas, que sólo ha visto "la lógica." De nuevo aparece la misma distinción que aparecía en el grupo analizado anteriormente: hay *algo* que son matemáticas y *algo* que es lógica. A esta distinción se añade la que propone Sonia inmediatamente después (5) y que resulta clave para el desarrollo posterior de la conversación. Ella explicita que no sabe cómo argumentar que la Tierra es redonda y eso supone un problema para su trabajo futuro. Tiene claro que en su actividad como maestra existen algunos contenidos que ha de transmitir *porque a ella se los han enseñado:* A ella le han enseñado que la Tierra es redonda y tiene que explicar eso. Sonia expone abiertamente cuál es su problema: no sabe cómo hacerlo.

En la intervención de Sonia hay dos aspectos esenciales que generan un contexto para la discusión y que en la conversación no se diferenciarán hasta un momento muy posterior: Por un lado, surge la necesidad de encontrar una argumentación del porqué la Tierra nos parece plana aunque sea esférica –Sonia afirma en el fragmento 9 que lo que prevalece en las creencias de las personas es la percepción; su problema, por lo tanto, es que ha de explicar algo que desafía la intuición. Por otro lado está la acción didáctica de explicárselo a los niños. Veremos cómo estos dos aspectos van mezclándose en la conversación a partir de su intervención.

Elena se aventura a hablar de Willy Fog. Su preocupación no es tanto el argumentar por qué la Tierra es redonda, algo que no se discute en el comienzo de su intervención, sino el *cómo* hacérselo llegar a los niños.

El argumento que se tiene en cuenta para justificar que la Tierra es esférica es que si no fuera así, no se podría dar la vuelta al mundo, y que eso se puede hacer es considerado implícitamente como evidente. Ahora, a la hora de transmitir a los niños la idea de que se puede dar la vuelta al mundo se asume que, puesto que para ellos los cuentos son convincentes, las propiedades físicas que en ellos se explican, cuando son ciertas, han de ser también convincentes. Si la Tierra fuera plana, la serie de Willy Fog no sería lo que es y si la Tierra fuera plana Willy Fog se caería. El problema de Elena no es explicar por qué la Tierra es redonda, sino contar que hay quien viaja alrededor del mundo y lo puede hacer porque la Tierra es *redonda*. Ella misma, mientras explica su propuesta se da cuenta de un problema: la forma de la Tierra puede ser entendida como un tubo. Aquí comienzan ya a aparecer algunas consideraciones matemáticas, ¿qué quere decir que sea redonda? Efectivamente, no únicamente en el caso de que la Tierra fuera plana Willy Fog se caería, sino también en el caso de que la Tierra tuviera una forma cilíndrica y camináramos por un plano interior. Una vez este nuevo modelo ha sido explicitado, ella misma apunta que es necesario explicar las cosas mejor.

Sonia continúa sin poder explicarse *ella misma* por qué la Tierra le parece plana aunque sea esférica, ni si hay propiedades matemáticas involucradas en esa explicación que no encuentra. En principio, no hay matemáticas porque no hay algo tan claro y evidente como decir que "suma esto y verás que la Tierra es redonda" para explicar por qué la Tierra es redonda. En 24 quiere ir más allá. Ella no cree que nadie haya dado toda la vuelta al mundo para comprobar que la Tierra es redonda y si no lo ha hecho así es que algo de matemáticas ha tenido que utilizar para asegurar tal propiedad. En este momento de la conversación han aparecido, por lo tanto, dos consideraciones interesantes sobre el conocimiento matemático:

- Si hay una explicación matemática ésta ha de ser clara e indiscutible, algo como "suma esto y verás que la Tierra es redonda."
- Ha de ser una explicación generalizable y abstracta, que no precise de la comprobación empírica de dar, físicamente, la vuelta al mundo.

Miquel interviene ahora con el mito de Colón y la historieta del barco que se pierde de vista en el horizonte (31). Es una persona con un fuerte poder de intervención. Le gusta destacar en clase y se considera "bueno" para las matemáticas. Tiene buenas ideas resolviendo problemas y le gusta aportarlas al grupo. Es cuidadoso a la hora de recoger las intervenciones que hacen el resto de las personas y a menudo cuestiona de manera sutil las aportaciones matemáticas de otros cuando no las considera correctas, tratando que el otro se de cuenta del error que ha detectado.

La decisión de la investigadora es intervenir (34) para buscar diferentes opiniones y dirigir la conversación hacia la búsqueda de una explicación al hecho de que la Tierra parezca plana. Se genera así un nuevo contexto en la conversación:

- Los argumentos que se proponen dirigen la conversación a la búsqueda de propiedades geométricas que permitan dar una explicación del porqué la superficie sobre la que caminamos parece plana.

Al intentar buscar esa explicación aparecen registros del lenguaje con los que habitualmente trabajan en clase de matemáticas: circunferencia, plano, línea recta.

Sonia, en la intervenión 40 propone un nuevo modelo para la forma de la Tierra. Afirma que la Tierra puede ser considerada como un gran poliedro de muchas caras, "que son los planos por donde caminamos." Es más sofisticado y matemáticamente mucho más interesante que cualquiera de que aparecían en la hoja de actividad, pero el objetivo es el mismo: poder conjugar la percepción con su aprendizaje de que la tierra es esférica. En la formulación de este modelo aparece involucrada la propiedad de rectificación de la circunferencia en el caso tridimensional que se utiliza a menudo en las clases de matemáticas. Sonia no está de acuerdo con las explicaciones de tipo empírico de Miquel, que le parecen difícilmente comprobables (No se va a ir a la playa y ver que un barco se aleja para comprobar que la Tierra es redonda). Necesita un modelo explicativo de carácter no empírico y puesto que cualquier circunferencia se puede aproximar por polígonos de un número cada vez mayor de lados, algo similar puede suceder en el caso de la esfera.

Ante la posibilidad de que puedan existir propiedades matemáticas involucradas en la explicación, Rocío muestra un bloqueo evidente (51): "No, no, las matemáticas para explicar por qué nos movemos en un plano y la Tierra es redonda, no." Rocío no lo pasa bien en las clases y no entiende por qué en clase de matemáticas se está haciendo lo que hacemos durante el curso.

La intervención de Miriam (52), que hasta este momento de la conversación no ha intervenido en ningún momento es decisiva para el resto de la conversación. Ella da con la propiedad geométrica que permite explicar por qué la superficie de la Tierra parece plana: "A ver, no es que la Tierra sea plana, sino que va creciendo". A partir de aquí se genera un nuevo contexto para resolver el problema y la conversación se centra en un problema de visualización. Su aportación es recogida rápidamente por Miquel y Gemma. Gemma recurre a una situación vivida en las clases que le permite recuperar la idea de la aproximación de una curva por un segmento de recta. Este es el momento más interesante para que el movimiento en las creencias se desate. Resumiendo, los elementos que acaban de aparecer para generar el nuevo contexto de la conversación son los siguientes:

- Se expone una idea clave desde el punto de vista matemático: la relación entre la idea de curvatura y las dimensiones de la superficie que se considera. Miriam ha premanecido ajena a la discusión hasta que consigue elaborar esa idea.
- La idea desata la asociación con otros problemas resueltos durante el curso en los que se intuye la misma propiedad, concretamente el cálculo del área del círculo mediante la aproximación de una circunferencia por una poligonal.

El interés del problema del cálculo del área del círculo había sido explicitado con anterioridad en este grupo de discusión, concretamente cuando los estudiantes comentaron una situación que hasta entonces les hubiera resultado especialmente interesante. También en aquella ocasión se discutió sobre la naturaleza de la actividad matemática. Hemos introducido a continuación otro fragmento de conversación que ilustra esto que estamos diciendo. No forma parte del texto analizado para describir el movimiento, pero sí nos aporta, como otros tantos, información importante para comprender e interpretar la actividad de los estudiantes.

> [Cada uno de los estudiantes expone algún momento del curso que le ha resultado especialmente interesante, como hicieron individualmente quienes participaban a través de textos escritos.]
> Lourdes: Que dijérais qué momento, qué clase, qué... lo que sea, os ha parecido más interesante y por qué. Venga.
> Gema: Ah, bueno... el de los árboles y la pared.[6]
> Lourdes: El problema.
> Gema: Sí, el problema ese. Porque era diferente que los otros que he hecho, y cómo que lo podíamos calcular nosotros. Bueno, estuvimos ahí fuera midiendo con postes e intentando ver con los pies, tal... y así.
> Miquel: Muy interesante.
> Lourdes: ¿Y a tí? [a Miquel] ¿Cuál ha sido? ¿También ese problema?
> Miquel: Pero porque lo hicimos fuera. Lo trabajamos más. Incluso por ver y demostrar que lo habíamos conseguido. Pero todas las clases merecen un poco. No ha habido ninguna clase que sea tostón. Todas siempre han ido más o menos en la misma dinámica. Ha habido algunas quizás más de recopilatorio de todo lo que llevamos hecho y todo eso, pero... pero todas las clases han sido más o menos distendidas y en la misma línea, o sea, proponer problemas pero bastante comprobables visualmente y cosas cotidianas. No ha

[6] El problema al que se refiere es el problema de Herón. Cuando lo propusimos en clase comentamos que era uno de los que habitualmente planteábamos en esta materia y que otros años lo habíamos enunciado diciendo que los puntos A y B del enunciado del problema eran árboles y la línea s representaba una pared, de modo que había que encontrar el camino más corto para llegar de un árbol a otro tocando antes la pared.

habido ninguna clase de matemáticas pura... así, entre comillas.
Lourdes: ¿Por qué entre comillas? ¿Qué quiere decir matemática pura?
Miquel: Pues números, números, que no sea lógica. Son más problemas lógicos, no numéricos.
Gema: No es tan abstracto. No es la matemática que te dan en el cole.
Miquel: Exacto, es lo que decimos siempre, que las clases siempre son amenas, por eso.
Lourdes: ¿Pero son mates también, o es otra cosa distinta?
Miquel: Sí, sí, pero quiero decir que es difícil destacar una clase porque más o menos todas han sido parecidas.
Lourde: ¿Y la tuya?
Sonia: La misma. El problema este de los árboles porque a ver... por lo mismo, porque me ha hecho pensar un poco más que no en primero de ESO, que ya veías que con la regla de tres...
Miriam: Porque era otra cosa. Yo también el mismo problema. No sé. Es un juego de niños, pero que... puedes llegar a alguna cosa que con no sé... la anchura del radio de la Tierra, con reglas de tres... Bueno, no sé. Puede ser que alguno se interese por eso, pero a mi ver cuál es el camino más corto, eso sí.
Elena: A mi... lo que es todo. En el momento que tú sabes que una cosa se hace de una manera... pero en el momento que siempre se dice, en la clase, vamos a ver cómo lo hizo, pues yo no sé. Lo de cuadrar una figura. Yo aluciné. Yo pienso, ¿quién es el que piensa?, o sea, claro, probando y tal sí que descubres eso pero lo encuentro una... o sea, cómo una persona puede llegar a cuadrar una cosa haciendo triángulos. Pero, ¿cómo se le ha ocurrido a esta persona? O cualquier otra cosa. Lo de los ángulos del sol y eso. Las teorías de Eratóstenes y tal. Claro que dices... ¡hala, qué fuerte! Y lo del otro día que era no sé qué de triángulos... que estábamos aquí Ada y yo pero... porque Ada estaba también impresionada.
Gema: ¿Pitágoras? ¿Lo de las empanadas?[7]
Elena: No, es que todo... no me acuerdo... que me explican...
Gema: Era lo del círculo, que se hacía así, con quesitos.
Elena: Eso, eso, lo del círculo. Que se ponían todos así y entonces el vértice era el radio. Bueno, la altura era el radio y así... No sé, no sé, es que no... piensas, ¿cómo puede una persona comenzar por aquí, o sea, plantear claro que cuando te explican una teoría... y vale, la entiendes pero claro ¿quién va a ser el que empezó a tener esta idea? Y es eso, que en las matemáticas normal tú sabes que Pitágoras era este y que descubrió eso, pero ¿a partir de dónde lo descubrió? O sea, eso son las matemáticas que no hemos visto nunca.
Miquel: ... Y que es lo que ...
Sonia: ...motivó...
Miquel: ....movió a esa persona para descubrirlo.
Elena: Claro. [barullo]
Miquel: Normalmente son cosas...
Elena: Es como la base.

[7]"Lo de las empanadas" se refiere al siguiente problema que les propusimos en clase: Si tuvieran tres empanadas cuadradas o circulares, de tamaños diferentes, cómo se podría decidir sin efectuar ninguna medida si comerían más cantidad tomando únicamente la grande o tomando las dos más pequeñas.

> Miquel: Bueno, es solucionar cosas o problemas prácticos.
> Elena: Con la fórmula. Y eso de la fórmula... Nosotros sí que hicimos la fórmula, pero ya no es la típica fórmula que te tienes que empollar y cuando sale un problema la has de aplicar. No, no, esta fórmula tiene un motivo para ser así. Y el número pi, por ejemplo. Pues yo no me había planteado nunca como... Sabes que es 3,14 pero no sabes bien de dónde viene. Eso. Es comenzar las matemáticas desde abajo. Desde donde se tienen que comenzar.
> Lourdes: ¿Se tienen que comenzar desde ahí?
> Elena: Sí, pero nunca te lo enseñan. A ver, te dan unas matemáticas que ya están. Se ha descubierto esto y a partir de aquí, trabajamos. Pero no sabes... o sea, no sabes si delante de eso...
> Miriam: Es como una forma de motivarte a que te gusten las mates.
> Elena: Por ejemplo lo de los egipcios. A mi eso me encanta. En cambio pones un problema de geometría y me quedo igual. Pero con eso de las historietas... con eso es como que te motiva más. Y hala, después hicieron eso, y hale...
> Sonia: Es como una historieta que se hace, que no son las matemáticas de fórmula, fórmula, fórmula y problema, problema, problema, problema. O sea que hay una historieta que de ahí sale una fórmula y que esta fórmula es la que se puede utilizar para eso.
> Elena: Es que las matemáticas siempre te las daban... bah, matemáticas... números. Pues no ¿qué eran? Números. Pues no, pues una figura. Va, agarramos cualquier figura y a ver qué podemos sacar...

Se recurre de nuevo, como sucedía en el primero de los grupos, a un ejemplo trabajado en el aula: el problema del área del círculo. Mientras que el caso del primer grupo este problema servía de estímulo para discutir sobre la utilidad o la no utilidad de las matemáticas, en este caso permite a los estudiantes extraer propiedades geométricas. Antes las matemáticas eran números y ahora "va, agarramos cualquier figura y a ver qué podemos sacar." Este rasgo es especialmente diferencial en los dos grupos. En general, siempre que se discute de problemas, en este segundo grupo se analizan propiedades matemáticas, mientras que en el primero las discusiones conducían rápidamente hacia aspectos de carácter general como son el interés, o la utilidad de un problema y raras veces se entra a discutir aspectos de conceptualizacion matemática. El nivel de conocimiento conceptual de los estudiantes en lo que a la matemática se refiere tiene mucho que ver con este hecho. Los estudiantes del segundo de los grupos no son tampoco especialmente brillantes en matemáticas, pero al menos no se bloquean si se les propone un problema ni se aferran a la idea defensiva de que "las matemáticas no sirven para nada."

La complejidad de la conversación es creciente a partir de la intervención de Miriam. Cada uno de los participantes busca llevar la conversación a su terreno: Miquel sigue queriendo discutir la propiedad geométrica que acaba de plantearse. Elena y Sonia intentan adivinar cuál es la pauta que, implícitamente, marca la intervención de la investigadora en 62 y Rocío trata de comprender la explicación. La intervención de Elena en 64 es clara: una esfera es una figura geométrica y como tal tiene propiedades de las que se ocupan las matemáticas. Admitida esta afirmación, Rocío, que no puede abandonar su creencia, comienza a decir que eso sólo son términos, palabras.

El problema de Rocío es que abandonar esa creencia la dejaría en una situación de debilidad. Una creencia firme como la que sostiene le permite expresarse y sobre todo explicar por qué no puede adaptarse a las clases. Cuando esta creencia se tambalea necesita aferrarse más a ella (86). Ella no cuestiona que en las matemáticas se pueda hablar de rectas, planos, etc, pero eso no es *hacer matemáticas*, porque no hay números. La situación de Rocío es el reflejo claro de la permanencia y el poder de las creencias para algunas personas. De la misma manera que el resto del grupo puede explicitar sus dudas, ella no, y sin embargo son sus intervenciones las que estimulan las respuestas y las afirmaciones de los otros participantes.

De nuevo, como en el caso anterior, después de momentos de discusión, y confusión de términos llega el momento de recoger y sintetizar todo lo que se ha dicho y se habla de "matemáticas sin números" y de "matemáticas con números."

En los grupos de discusión la rapidez de los cambios es aosmbrosa. Se sucede un movimiento después de otro y cada intervención desata una nueva percepción de lo que está sucediendo. El hecho de haber analizado un mismo movimiento en los dos grupos de discusión nos ha permitido interpretar los cambios desde una perspectiva fundamental, que es la de la influencia del conocimiento matemático en la construcción de las creencias de los estudiantes. Si bien este aspecto ya había quedado apuntado en el análisis de los casos escritos, el análisis micro de las conversaciones de los estudiantes en esta ocasión ha permitido amplificarlo de manera notable.

Las diferencias que hemos encontrado en el análisis de los grupos de discusión y de los casos escritos nos han sorprendido de manera grata. Ninguna de las dos opciones es mejor que la otra y ahora tenemos la sensación que de ambas se nutre una construcción rica y estable de las creencias. Las que en un principio se había planteado como vías alternativas para la participación y la acción han resultado ser, además, formas complementarias para *conocer* y no sólo alternativas. Tan importante ha resultado ser una como la otra. En los grupos de discusión las ideas se revuelven como en una centrifugadora y en el proceso de apropiarse de ellas surgen otras que inmediatamente vuelven a mezclarse con las anteriores. El conocimiento que se produce en todo este proceso es diferente del que se produce cuando cada persona se detiene, a solas, a pensar mientras escribe.

A continuación incluimos una síntesis del análisis de los movimientos anteriores –casos escritos–, para que pueda ser comparados con el que acabamos de presentar. Después sólo nos resta exponer cuáles son nuestras conclusiones.

6.2 Síntesis de los movimientos M1 a M3

Cada uno de los movimientos analizados ha dado lugar a un mapa. Estos mapas son un resumen que nos permite interpretar cómo se construyeron y evolucionaron las relaciones esta *agitación* en las creencias de los estudiantes acerca de la matemática. Desde la situación al comenzar el curso hasta el final, hemos recogido cada uno de los movimientos parciales detectados en cada caso y explicitado cuál es su relación con actividades llevadas a cabo durante el curso.

Situación inicial	M11	M12	M13	M14	Situación final
Perspectiva escolar. Aplicación de mecánicas escolares.	Matemáticas referidas a la realidad física. Búsqueda de aplicaciones.	Se mantiene la búsqueda de aplicaciones y aparecen registros como *entender, razonar, resolver*.	Debilidad en la argumentación que involucra conceptos de matemáticas y/o física.	Las posiciones anteriores en tela de juicio.	Distinción entre operaciones matemáticas y demostraciones teóricas.
Signos de lecturas complementarias; agitación.	El interés de la actividad es independiente del éxito.	Matemática como ciencia constitutiva de otras.	Matemática como teoría. A largo plazo existe una aplicación.	Ruptura con la necesidad de aplicaciones.	Se mantienen lecturas complementarias.
Aplicaciones simples y complejas: economía, oficios, política.	Actividades escolares que incluyen el lenguaje matemático como un aspecto más en la descripción de una situación.	Apropiación de registros para referirse a la actividad matemática que surgen en el desarrollo del curso.		Distinción entre aplicaciones simples y complejas.	Interés de la actividad independientemente del éxito. La demostración dota de sentido a la actividad matemática.
RELACIONES	Problema de Herón; Actividad *abejas*.	Relación entre matemática y otras ciencias.	Protocolo *modelos de Tierra*. Reflexión sobre resolución de problemas.	Problema de Herón; Problema final.	

Tabla 6.1 Descripción del movimiento M1: Matemática como ciencia de la demostración.

Situación inicial	M21	M22	M23	Situación final
Matemática en el contexto escolar.	Aritmética básica para la formación humana.	La matemática es una ciencia que *resuele* e *investiga*.	La matemática como saber reflexivo.	Matemática en el contexto escolar.
Aplicaciones de aritmética básica.		Ejemplos de aplicaciones más complejas.	Interés más allá de aplicaciones básicas o promoción académica.	Juegos y situaciones que *hagan pensar*.
Ejercicios contextualizados en la escuela tradicional.		Conceptos tradicionales para promoción académica.		
RELACIONES	Actividad *abejas*. Relación con otras ciencias.	Astronomía griega. Cavalieri y paradojas del continuo	Texto sobre geometrías no euclideas. Problemas que “desafían” la intuición.	

Tabla 6.2 Descripción del movimiento M2: Juegos para pensar.

Situación inicial	M31	M32	M33	M34	Situación final
Las matemáticas importantes son las de la *vida diaria* aritmética y medida directa.	La contextualización de un problema permite entender el carácter intrumental del conocimiento matemático.	Interpretación de la actividad matemática desde posiciones históricas y culturales.	Carencia de conocimiento matemático para interpretar y argumentar.	Crítica de la dicotomía teoría–ejercicios en alusión al contexto escolar.	Contextualización histórica y contextualización en la vida cotidiana de la actividad matemática.
Matemática como una materia escolar.	Matemática inseparable de su enseñanza y aprendizaje.	Diálogo con otros autores. Discurso característico de las ciencias sociales.	"El saber no ocupa lugar" justifica un conocimiento al que no se encuentra sentido.	Carácter histórico del conocimiento.	Matemática inseparable de su enseñanza y aprendizaje.
Cualquier conocimiento es válido y útil.	El descubrimiento y la deducción como motor del conocimiento matemático.		Matemática como transmisora de valores sociales.	Valor de la historia para interpretar el conocimiento matemático.	Matemática como pretexto para relacionar conocimientos históricos, culturales y filosóficos.
Búsqueda de un espacio para hacerse preguntas más allá del enunciado del problema.	Calificación de los problemas de cálculo como "problemas que no sirven para nada."		Alusión al matemático como alguien "tozudo" e "inconformista."	Búsqueda de respuestas.	La matemática se descubre. Es cosa de sabios.
RELACIONES	Actividad *abejas*. Texto geometrías no euclídeas. Problemas de medida indirecta (Tales)	Actividad *modelos de Tierra*. Reflexión sobre la utilidad del conocimiento matemático. Utilización de la historia	Actividad *herencias*.	Evaluación final del curso. Utilización de la historia. Geometría griega	

Tabla 6.3 Descripción del movimiento M3: La matemática, pretexto para consideraciones históricas o filosóficas.

Capítulo 7

Conclusiones

El objetivo de este trabajo era ofrecer a los estudiantes una situación desde la cual construir un sentido para la actividad matemática. Nuestro compromiso es analizar desde un punto de vista matemático qué elementos del curso, conceptuales o metodológicos, han resultado importantes en esta construcción.

La lógica que ha guiado la investigación dirige también la elaboración y la exposición de las conclusiones, de manera que, en buena medida, se recordará también aquí el carácter profundamente descriptivo que hemos intentado mantener durante toda la memoria. Hemos querido recoger, sobre todo, la voz y los intereses de los estudiantes. Sin embargo, a medida que avancemos en la síntesis de los datos analizados aparecerá, desde nuestra percepción de esta experiencia concreta, una profunda crítica al estado actual de la alfabetización matemática y científica de los estudiantes de magisterio. Como hemos constatado, cuando no existe un conocimiento matemático básico la capacidad de crítica de los estudiantes y la evolución en la construcción de sus creencias acerca del conocimiento en general se estanca.

Por otra parte, pensamos que la formación inicial del profesorado de enseñanza primaria es una pieza importante, como muchas otras, en el ciclo del sistema educativo desde la cual es necesario y posible promover el cambio social.

Situación inicial de los estudiantes al inicio de sus estudios de magisterio

A través de los movimientos que hemos analizado encontramos un rasgo común, no demasiado sorprendente, en la experiencia de los estudiantes. Es el hecho de que al comenzar sus estudios universitarios perciben la matemática estrictamente como una *materia* escolar. De esta percepción se desprende un sentido de utilidad muy primario: la matemática es útil para situaciones como ir a comprar, cambiar dinero, tomar medidas o hacer un mueble. Se trata de un sentido que los estudiantes han podido crear a lo largo de la enseñanza primaria y que se relaciona con conocimientos matemáticos propios de los primeros años de escolarización. En esta etapa, situaciones cotidianas como las que mencionábamos anteriormente pueden resultar adecuadas al nivel de conceptualización matemática que algunas de nuestras escuelas ofrecen a los niños y niñas. Para que esto ocurra es importante que tales situaciones se presenten con un nivel de contextualización suficientemente cercano a su realidad. Pero a medida que los estudiantes van avanzando cursos, su vida cotidiana crece en complejidad... y las matemáticas también. Se produce entonces una separación entre su vida y las matemáticas que aprenden, de modo que el sentido de utilidad que hasta entonces podían otorgar a las matemáticas no se amplía, y por tanto se empobrece. Las matemáticas se separan de la vida cotidiana y el sentido de utilidad, referido únicamente a las actividades básicas, queda inmóvil: se convierte en un tópico. Cuando las ideas con las que se enfrentan los estudiantes se vuelven, matemáticamente hablando, más complejas, el único sentido al que pueden aferrarse es al de la técnica. Se refieren a la matemática, no a partir de ideas, sino de palabras que evocan conceptos o técnicas. ("Yo tengo 18 años y no he pasado del seno y el coseno. O sea, que a mi no me hables de derivadas, no me hables de integrales... A mi me dejas en las ecuaciones, en los sistemas de reducción y todo eso, y ya está."). La matemática, por tanto, deja de percibirse como un conocimiento para convertirse en una técnica.

Durante muchos años, uno de los grandes retos de la educación matemática ha sido mostrar su aplicabilidad en el entorno cotidiano de los estudiantes. Se impuso para una minoría como un intento tanto por acercar las matemáticas a la vida cotidiana, como por hacer más amigables una materia que hasta entonces transmitía el formalismo de un lenguaje ajeno, hasta el punto que un indicador de la calidad de los problemas era que su enunciado estuviese *contextualizado*. La mayoría de estos contextos, sin embargo, no eran reales sino que sólo trataban de parecerlo. En este sentido, la comunidad educativa invertimos tanto esfuerzo que los estudiantes que llegan a magisterio consideran inmediatamente como poco apropiados problemas que utilizan, por ejemplo, unidades de medida diferentes a las que utilizamos habitualmente, problemas contextualizados en la realidad de otras culturas, o sistemas de numeración históricos. Utilizar y mostrar aplicaciones de las matemáticas es evidentemente enriquecedor y positivo, siempre que dichas aplicaciones no se trivialicen y de ello no se desprenda que la matemática sólo tiene sentido cuando se pueda hablar de matemática aplicada.

El problema es que, en el intento de acercar la matemática a la vida cotidiana en niveles de educación secundaria puede llegar a reducirse su interés hasta tal punto que sólo se dé cabida a unas pocas técnicas, que supuestamente son las que servirán a los ciudadanos para desenvolverse como tales. Hemos puesto tanto empeño en acercar a la escuela una matemáticas de la vida cotidiana que la hemos despojado de sus raíces culturales e históricas; hemos trabajado tanto por mostrar que las matemáticas son útiles, que ahora el único sentido que se les otorga fuera del contexto escolar gira en torno a sus aplicaciones en el ámbito científico y tecnológico. El placer de la actividad intelectual, la investigación y la creatividad es obviado en numerosas ocasiones.

Cuando los estudiantes llegan a la universidad para comenzar sus estudios de magisterio ya son personas adultas; y los adultos cada vez tenemos más claro lo que queremos y lo que no queremos aprender, porque la selección se convierte en una herramienta de supervivencia en un mundo en el que es absolutamente imposible concebir el conocimiento en términos enciclopédicos. Cuando estos estudiantes se convierten en maestros y maestras de escuela vuelve a comenzar el ciclo y la lentitud de los cambios esperados se hace insoportable.

Una creencia acerca de la matemática exclusivamente como materia escolar, es en muchos casos lo suficientemente firme como para que no sea necesario buscar otro sentido en las matemáticas que se aprenden, ni para preguntarse cuál es su rol en nuestra sociedad. En consecuencia, el papel profesional de un matemático es, para muchos de estos estudiantes, perpetuar el sistema académico a nivel superior, y en particular el suyo como futuros profesores de primaria es transmitir una matemática elemental reducida a las reglas aritméticas básicas, que son las únicas que dan un sentido a la actividad matemática: la utilidad en su sentido escolar más primario. Desde esta perspectiva, otros contenidos matemáticos más renovadores que también forman parte del currículun de primaria no pueden ser tenidos en consideración, y mucho menos aquellos que no forman parte de él.

Es importante que los futuros profesores perciban que en esa matemática que enseñarán a sus futuros alumnos y alumnas están involucradas ideas matemáticas muy sofisticadas (números naturales, sistemas de numeración, etc.) alrededor de las cuales trabajar.

La necesidad de categorías descriptivas

En esta investigación hemos atendido el proceso de elaboración de las creencias de los estudiantes a partir de la situación inicial que acabamos de describir. Expresado de una manera muy breve, hemos seguido el movimiento de sus creencias en relación con el curso y como conclusión pensamos que la experiencia ha aportado a los estudiantes, ante todo, libertad –en un sentido de amplitud– a la hora de pensar la actividad matemática: de la uniformidad de una creencia basada en las aplicaciones populares más primarias se han abierto vías de expresión muy diferentes que expresan intereses, experiencias y formas diversas de entender la actividad matemática. Entendemos que la homogeneidad y simplicidad en las creencias que describen la situación de los estudiantes de magisterio cuando llegan a la universidad es un claro reflejo de que la alfabetización matemática que ofrece nuestro actual sistema educativo está estancada, resulta insuficiente y no logra conectar con sus intereses.

Por otra parte, entendemos que a esta situación de estanco no le favorece la tendencia categórica de muchas investigaciones didácticas. El problema de intentar *cerrar* alrededor de unas pocas categorías, habitualmente excluyentes, cuáles son las creencias de los estudiantes es que al hacerlo se elimina el rasgo que verdaderamente potencia su cambio desde una perspectiva social: la diversidad. En general percibimos una tendencia a utilizar teorías sobre las creencias en torno a la matemática que no admiten posiciones relativistas: o se sostiene una creencia, o se sostiene otra. Sin embargo, considerar que pueden convivir creencias diferentes incluso para una misma persona es un paso que hay que cuidar mucho en la formación de los futuros profesores. El sentido que los estudiantes pueden dar a su actividad matemática no es único. El primero de los movimientos que hemos analizado (M1) ilustra perfectamente este hecho: Patricia afirma, cuando finaliza el curso, que *debería* proponer un problema relacionado con aplicaciones de la matemática a la economía o a la política, pero que dada su experiencia durante el curso se decanta por otro. El motivo es que ha encontrado sentido a la matemática no sólo en sus aplicaciones sino en la existencia de demostraciones.

Tan importante como ofrecer a los estudiantes espacios para crear nuevos sentidos es crear un espacio para comprender la actividad matemática desde diferentes perspectivas, porque los diferentes significados que ellos elaboren son los que les permitirán atender la diversidad de sus futuros alumnos. Tan importante es crear nuevas creencias como no vivir atrapados en ellas. Queremos enfatizar que este aspecto es muy importante desde una perspectiva didáctica.

La estabilidad en cualquiera de las categorías que se proponen en otras investigaciones y a las que nos hemos referido en el capítulo 3 de esta memoria no es, desde nuestro punto de vista, ni aceptada ni rechazada; simplemente es algo que desde una perspectiva de la acción tiene poca efectividad porque tiene un escaso valor para quienes deberían ser los verdaderos protagonistas del cambio, que son los futuros profesores. De las aportaciones de la investigación que hemos llevado a cabo no puede desprenderse ninguna clasificación de las creencias de los estudiantes, pero los movimientos analizados pueden considerarse como descriptores de diferentes aproximaciones a la experiencia matemática. Conocerlos implica conocer las posibilidades de acción de los futuros profesores implicados.

Los movimientos detectados están en correspondencia con distintas direcciones para fundamentar o reorganizar aquel sentido primario de materia escolar que se le daba a la actividad matemática en el momento inicial. Del análisis llevado a cabo destacaremos dos aspectos fundamentales que se refieren directamente al sentido que los estudiantes le dan a la actividad matemática: el sentido cotidiano de la actividad matemática, y la aceptación de la matemática como una actividad para el placer intelectual y la evolución del conocimiento.

La matemática del ámbito cotidiano

Decíamos que la idea de la matemática con la que llegan estos estudiantes a las escuelas de magisterio se refiere, en general, a una matemática *de la vida cotidiana*, pero entendida casi exclusivamente en términos aritméticos muy simples. Alrededor de la matemática y la vida cotidiana, sin embargo, pueden adoptarse perspectivas muy diversas y matemáticamente mucho más complejas, casi todas ellas relacionadas con su “aplicabilidad”: aplicaciones a la física, la economía o la biología; aplicaciones en el mundo tecnológico y la ingeniería en general; aplicaciones en la expresión artística, etc. Pueden encontrarse ejemplos de este tipo de perspectivas y ejemplos de aplicaciones en un número importante de referencias bibliográficas

[23, 53]. Aunque en el curso no se hizo especial hincapié en ellos, al margen de comentarios esporádicos, algunos estudiantes apuntaban este tipo de aplicaciones cuando se referían a las matemáticas de la vida cotidiana.

Junto a la creencia de la matemática como una actividad aplicada se desarrolla otra culturalmente opuesta: la matemática no tiene por qué adquirir sentido a partir de su aplicación. La matemática puede ser percibida exclusivamente en términos de una actividad puramente intelectual. Esta nueva categoría ha aparecido en algunos de los casos analizados. Nos interesa destacar que este sentido que los estudiantes dan a la actividad matemática se ha creado precisamente desde la dualidad matemática aplicada–no aplicada. La identificación de la actividad matemática de la vida cotidiana como matemática aplicada es consecuencia de una visión *naturalista* [26] de la realidad, más que de una visión *histórica*. Desde nuestra perspectiva, la superación de esta dualidad pasa por entender la realidad –la vida cotidiana– como una realidad humana y no como una realidad física. Cuando el placer intelectual y la producción de conocimiento forma parte de lo que entendemos por vida cotidiana, la matemática adquiere un sentido pleno de actividad intelectual que no es opuesto ni complementario al de las aplicaciones. Es importante, en consecuencia, no sólo tener en cuenta distintas creencias respecto a la actividad matemática, sino a la realidad misma. En el contexto escolar, los estudiantes perciben en la matemática como en ninguna otra materia esta *obsesión* por la aplicabilidad, por encontrar una respuesta al "*¿Para qué sirve?*"

Después de la experiencia que hemos llevado a cabo con los estudiantes tenemos la sensación que, sobre todo para quienes afirman que no les gustan las matemáticas, la creencia de una actividad matemática destinada al placer intelectual es muy difícil de interiorizar y pensamos que, en buena parte, se debe a que no es posible hacerlo bajo una visión naturalista de la vida cotidiana. Por eso es importante que los estudiantes hagan suya alguna reflexión acerca de la que hemos llamado expresión histórica de la realidad. Esta perspectiva genera un espacio, evidentemente más complejo, desde el cual relativizar las creencias en torno a la actividad matemática o científica.

Aunque parezca paradójico, explicitar la creencia de que la matemática es una actividad intelectual resulta sin embargo extremadamente útil para los estudiantes y la utilizan, especialmente aquellos a quienes no les gusta, para defender que si cada persona tiene unos intereses diferentes ha de elegir qué le gusta y qué no. Al adoptar esta creencia desde una perspectiva *defensiva* los estudiantes pretenden alejarse de cualquier forma de actividad matemática en la que verse involucrados. El único sentido que le pueden dar a lo aprendido en clase de matemáticas es que "el saber no ocupa lugar" y por lo tanto ellos deciden que quieren alejarse de ellas y les parece incomprensible que haya quien pueda encontrarlas interesantes. Sin embargo, cuando se adopta esta creencia desde la perspectiva del placer intelectual, la tendencia es a abrirse a nuevas opciones. Encuentran interés en la solución de un problema que hayan trabajado aunque no les haya salido sin frustrarse; desatan reflexiones nuevas sobre la actividad matemática, y viven su relación con dicha actividad de una forma mucho menos dramática.

Al hablar de la matemática como una actividad intelectual los estudiantes expresan, al menos, estas dos creencias diferentes y es importante entenderlas de manera diferente: una –la defensiva– surge de uno mismo para defender que no quiere dedicarse a las matemáticas y la otra –la del placer intelectual– se refiere a la valoración de una situación externa, en la que pueden o no involucrarse. Ambas se generan de manera diferente y sirven a propósitos diferentes.

Cuando la actividad matemática sólo encuentra sentido en las aplicaciones a una realidad entendida en términos naturalistas, los problemas que se plantean en la escuela llegan a ser verdaderas caricaturas de la realidad. Buscar matemáticas en las actividades cotidianas para poder llevar a la escuela es algo común en las propuestas didácticas, pero puede conducir rápidamente a una pérdida de sentido. Más bien nuestra propuesta de alfabetización matemática incluiría un proceso en sentido inverso: la matemática entendida en su sentido histórico ha de integrarse en la vida cotidiana de la misma manera que lo ha hecho la matemática aplicada.

Cómo relacionar los movimientos descritos con los contenidos y la metodología del curso.

Existe un aspecto esencial respecto a la metodolgía del quehacer matemático, muy comentado ya en otras ocasiones, que también ha aparecido en esta experiencia: la separación entre una matemática de las técnicas y algoritmos como método único para resolver problemas, frente a una matemática de la intuición, la visualización y el razonamiento lógico. En el caso concreto de nuestra experiencia con los estudiantes durante este curso, esta separación se ha concretado en la alusión, por un lado, a una *matemática de las fórmulas* y por otro, a un *razonamiento lógico*. La cuenta "a la vieja", recortar, pegar, o considerar situaciones geométricas sencillas en lugar de su traducción abstracta al lenguaje del álgebra no tienen cabida en la categoría "matemáticas." Es evidente, además, que dados los contenidos del curso se han visto amplificados los ejemplos de tipo geométrico, donde es evidente la importancia de la intuición y la visualización.

Si, como decíamos al principio de este capítulo, durante la enseñanza primaria se potenciaba con la enseñanza de la matemática un sentido de utilidad muy básico, durante la secundaria fundamentalmente se potencia una visión muy técnica. La *matemática de las fórmulas* no sirve para resolver situaciones matemáticas elementales, así que hay que darle un nuevo sentido, que es el de caracterizar la actividad matemática a partir de la aplicación de fórmulas. La formalización matemática y la generalidad que impone el álgebra es mucho más influyente para los estudiantes que otros aspectos como la intuición o la visualización, que pasan a ser consideradas actividades más propias del sentido común que de la formación matemática de una persona.

Los contenidos de historia trabajados durante el curso han permitido que algunos alumnos pongan en tela de juicio estas dos aproximaciones –matemáticas de las fórmulas y visualización o intuición– a la actividad matemática. Este hecho se aprecia claramente cuando elaboran sus argumentaciones sobre los problemas que les han parecido más interesantes. Los problemas que no tienen una utilidad en su entorno inmediato pero que tienen una perspectiva histórica les permiten relativizar y encontrar un sentido no en su actividad, sino en la actividad de otros. Sin esta perspectiva histórica el sentido de tales problemas se pierde y, como haríamos cualquiera de nosotros, los estudiantes se revelan ante algo a lo que no pueden dar sentido. El hecho de que, en general, los libros de texto estén llenos de ejercicios desprovistos de su contextualización histórica es, más que un esfuerzo de contextualización, un reflejo de nuestra propia ignorancia y del beneficio que ésta tiene para la economía de las editoriales.

Es importante destacar que la historia, en si misma, no estimula a los estudiantes en la creación de nuevas ideas en el desarrollo de conceptos; no les proporciona necesariamente una visión más humana del conocimiento matemático. Potencialmente podemos considerar que conocer la historia es una manera de *cambiar* una cierta imagen de las matemáticas. La cuestión es que esta afirmación se gesta en una determinada forma de concebir la matemática –como una construcción histórica– y por ello la historia *es*, para quienes tenemos esa concepción, "la prueba" de que la actividad matemática es eso de lo que nosotros hablamos. Es importante no olvidar el proceso, mucho más complejo, que conduce a elaborar esta creencia en la que nosotros nos sentimos tan a gusto.

De hecho, hay algunos –muchos– estudiantes a los que incluso les bloquea enormemente acercarse a esta creencia en torno a la matemática. Es evidente que este modelo histórico, como cualquier otro que pudiera proponerse, *orienta* hacia la construcción de sentido, pero no lo *crea*. Cada estudiante tiene su propia trayectoria y a muchos de ellos les gusta o al menos satisface su búsqueda de sentido aquella *matemática de las fórmulas* y de aplicación directa y repetitiva de técnicas, de modo que lo único que les aporta la perspectiva histórica es confusión. Cuando los estudiantes llegan a la universidad ya comienza a ser demasiado tarde para tratar la cuestión del sentido.

Existe otro aspecto digno de mención en cuanto a la relación entre los movimientos detectados y el desarrollo metodológico del curso. Se trata de las diferencias que se desprenden de los movimientos analizados en los grupos de discusión y en los informes escritos. Las reflexiones escritas han ofrecido un nivel de reflexión mucho más profundo que las discusiones y esto se ha visto reflejado en unos movimientos más amplios y definidos que los que se daban en los grupos de discusión, aunque escasos en número. Las reflexiones escritas tienen, además, un carácter más filosófico que matemático.

En las discusiones orales aparecían, sin embargo, muchos movimientos pequeños, más desordenados y difíciles de recordar para una elaboración posterior, en los que prevalecía la búsqueda de aceptación y consenso. La riqueza desde un punto de vista de la elaboración de conceptos matemáticos ha sido, sin embargo, mucho más evidente en los grupos de discusión.

Durante todo el trabajo venimos defendiendo que ambos aspectos son indispensables en la búsqueda de sentido, de modo que pensamos que es importante fomentar estrategias que se dirijan a complementar ambas vías de expresión. En nuestro caso, sería interesante para mejorar la metodología del curso que todos los estudiantes se involucraran en ambos tipos de tareas.

El papel del conocimiento matemático en la formación de las creencias

Las cualidades de la argumentación y preguntas que los estudiantes se hacen en torno a la actividad matemática están muy relacionadas con su nivel de conocimiento de conceptos matemáticos. Hemos detectado que los estudiantes con una adecuada formación en materias consideradas tradicionalmente como *sociales* tienen una disposición mucho mayor para discutir aspectos relacionados con sus creencias acerca de la matemática o del conocimiento que aquellos que no la tienen. En general son estudiantes con un nivel de argumentación y crítica muy interesante en lo que respecta a discusiones tradicionalmente consideradas humanistas. Sin embargo, es impresionante percibir cómo sus argumentos se agotan al entrar en discusión aspectos muy básicos relacionados con la cultura científica o en particular con conceptos matemáticos. El sentido más generalizado que estos estudiantes otorgan a la actividad matemática es que “el saber no ocupa lugar.” En sus discusiones se amplifican los tópicos habituales que se refieren a la matemática como ciencia que “ayuda a pensar”, “es imprescindible para la vida”, etc. El disponer de conocimientos matemáticos, aunque no estén perfectamente consolidados, permite sin embargo que los cambios puedan producirse de manera mucho más concreta y rápida. Este hecho quedaba ilustrado perfectamente al comparar el movimiento M4 que tenía lugar en los dos grupos de discusión. Las creencias en torno a la matemática no pueden ser consideradas independientes de la formación matemática específica y esto debería llevar a plantearse a la comunidad educativa y a las propuestas políticas de formación que los cambios que se demandan a nuestra sociedad en relación con la cultura científica son muy poco probables si no se cuida más la propia formación científica. Cuando a los estudiantes no se les ofrece y exige esta formación se está limitando enormemente su capacidad para aceptar y elaborar nuevas creencias, para aplicar conocimientos matemáticos importantes y, en último término, para la participación social en lo que a decisiones técnicas o científicas se refiere.

¿Qué dificultades han aparecido en relación con los contenidos?

Aunque el objetivo de la investigación es atender al movimiento de las creencias en torno a la actividad matemática, es evidente que el desarrollo del curso y el tipo de trabajo realizado nos ha permitido también recoger una amplia información acerca del nivel de conocimento matemático de los estudiantes. Como mencionábamos anteriormente, todo apunta a que el movimiento de sus creencias está en estrecha relación con el conocimiento de conceptos matemáticos concretos. Aunque no nos hemos detenido en analizar las dificultades que presentan los estudiantes respecto de los contenidos tratados sí nos parece interesante apuntar, al menos desde un punto de vista fenomenológico, algunos aspectos de carácter conceptual que merecerían un análisis didáctico más detallado. Pensamos que, en este sentido, los datos que se han recogido durante la investigación apuntas nuevas vías de investigación y apuntamos aquí algunas de ellas. Antes de proceder a su enumeración, es importante resaltar que la mayoría de ellas hacen referencia a aspectos muy básicos de la alfabetización matemática y científica de cualquier persona. Queremos destacar también que la lista no es exhaustiva y que está limitada por los contenidos del curso, que se han centrado casi exclusivamente en problemas de medida.

- No se considera que la igualdad de forma pueda ser caracterizada matemáticamente.
- Cualquier función creciente es considerada una función de proporcionalidad y por lo tanto puede aplicarse la "regla de tres."
- No se conoce la relación entre los perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes.
- Escuchar la palabra "trigonometría" produce espanto y no se encuentra relación alguna entre una razón trigonométrica y la medida de un ángulo.
- Existe una gran confusión en torno a la idea de unidad de medida y no se admite que cualquier segmento pueda ser considerado como una unidad: han de ser milímetros, centímetros, metros, etc. En consecuencia, el cambio de unidades de medida se reduce a multiplicaciones y divisiones "por la unidad seguida de ceros."
- Aunque se mantiene firme la creencia de que las matemáticas son sólo fórmulas, apenas se conocen unas pocas y sólo puede apelarse a la memoria para utilizarlas. Al margen de las pocas que recuerdan, los estudiantes no pueden deducir otras fórmulas básicas relacionadas con el cálculo de áreas y volúmenes; no saben cómo resolver una ecuación de segundo grado y cometen errores en la resolución de las de primer grado.

Este tipo de dificultades conceptuales o técnicas no se ve en absoluto compensado con una buena aproximación a los problemas desde el punto de vista de procesos o estrategias ni con un interés por la divulgación científica o el acercamiento a la actividad matemática desde un punto de vista cultural. Es evidente que hay que trabajar por solventar estas dificultades, pero el problema es que hacerlo a estas alturas de su formación es muy difícil y en la mayoría de los casos estéril: ni les interesa, ni piensan que sea diferente a algo que ya han estudiado antes y esto es así tanto para los que llegan a magisterio con un nivel de matemáticas aceptable como para los que no, que son la mayoría.

La denuncia que los propios estudiantes hacen respecto a su formación matemática constituye en sí misma un elemento de reflexión para comparar con la denuncia que los docentes hacemos respecto a la formación matemática de los estudiantes y con los efectos de años de investigación en didáctica. Unos y otros nos pasamos la pelota sin llegar a acuerdos significativos y en el mejor de los casos tales acuerdos se concretan en decisiones políticas que cambian el currículum desoyendo en muchos casos las experiencias de todos los colectivos involucrados.

Sin restar importancia a las investigaciones didácticas tradicionales, pensamos que también es importante clarificar qué matemáticas interesan a los estudiantes porque pueden ayudar mucho a re–formular nuestras propuestas. La situación es lo suficientemente delicada como para legitimizar el esfuerzo por comprender qué pasa en las aulas y qué pasa en nuestra sociedad desde perspectivas teóricas diferentes. Nos parece interesante que se abra un debate crítico que cuestione que las técnicas de investigación que ha desarrollado la didáctica puede que estén invirtiendo mucho esfuerzo en aspectos formales, excesivamente abstractos para los estudiantes y para el profesorado. Puede ser que desde la didáctica se esté tan preocupado por la coherencia y la validación en términos que sólo interesan a los investigadores, que se esté construyendo un conocimiento inútil para la práctica, aunque eso sí, cada vez más organizado y sistemático.

Paradójicamente, adoptar un punto de vista menos teórico situaría al didacta en una posición muy poderosa profesionalmente, porque su trabajo sería dependiente de una realidad que no va a desaparecer: siempre va a tener estudiantes y profesores diferentes con los que estudiar, a los que aproximarse y a los que permitir hablar. Si está dispuesto a permitir que sean sus voces la que mas se escuchen tendrá una panorámica de la realidad sólida y responsable para cualquier conclusión a la que quiera llegar. Participación de la gente nunca va a faltar.

Propuestas de acción y perspectivas futuras para la investigación

A lo largo de este capítulo han ido apareciendo algunos aspectos que consideramos relevantes para su atención en futuras investigaciones. Una parte importante de los datos no ha sido analizada aún y podría servir para responder a preguntas diferentes de las que hemos planteado aquí, incluso desde perspectivas teóricas diversas. Apuntamos aquí algunas que nos interesan especialmente.

Una buena parte de las discusiones de los estudiantes se referían al papel de la matemática en la divulgación científica. La integración de la divulgación en la formación de los futuros maestros conduce a interesantes cuestiones de investigación.

Cuando los estudiantes califican el conocimiento matemático en las discusiones o reflexiones escritas se refieren a diferentes contenidos matemáticos como "curiosos", "interesantes", "útiles", "tope de emocionantes", etc. Con cada una de estas palabras dejan entrever creencias diversas y un análisis micro, complementario al que hemos llevado a cabo en este trabajo, podría ofrecer otros resultados interesantes sobre su percepción de la actividad matemática.

Un análisis sistemático de todos los problemas propuestos por los estudiantes desde la perspectiva de la medida y de la concepción de "vida cotidiana" que reflejan resultaría también especialmente intersante para profundizar en aspectos relacionados con el poder del contexto escolar y con la dualidad entre la matemática aplicada y la actividad intelectual de la que hablábamos en este mismo capítulo.

Tanto estas propuestas como las que han ido apareciendo a lo largo de nuestra exposición descansan sobre la intuición de que existen muchas ideas y creencias a la espera de ser interpretadas y, ante todo, sobre las ganas de actuar para posibilitar su conocimiento. El deseo es que las investigaciones involucren la participación de un número amplio de personas y colectivos diversos, que recojan su creatividad y movimiento, que hagan eco el que cada profesor y cada estudiante, cuando tiene posibilidad de acción, puede cambiar la realidad de la enseñanza de las matemáticas mucho más que la mayoría de nuestras investigaciones.