Apéndices

Los siguientes apéndices pueden consultarse en formato electrónico:

Apéndice 1: Texto entregado a los estudiantes.

Apéndice 2: Solución al problema de las reinas.

Apéndice 3: Hojas de actividad propuestas para los estudiantes.

Las medidas a través de la historia

Matemàtiques I. Curs 2001–2002

Jordi Deulofeu y Lourdes Figueiras

Índice General

Introducción

Contar y medir son dos de las actividades humanas que popularmente se asocian a la matemática y difícilmente podría elaborarse cualquier trabajo sobre historia de la matemática sin tenerlas en cuenta. Los manuales que intentan presentar el desarrollo de esta ciencia desde sus orígenes encuentran en tales actividades su punto de partida: contar y medir acompañan una historia de necesidades e inquietudes humanas basadas en el trabajo agrícola, en las transacciones comerciales, en las guerras, los repartos o el poder de unos sobre otros.

Para los primeros hombres y mujeres era suficiente distinguir uno y dos de *muchos*. Gran parte de las actividades para las cuales nosotros necesitamos del elaborado andamio de los sistemas de numeración eran llevadas a cabo utilizando distintos tipos de estrategias: muescas sobre una madera; apilamiento de guijarros o caracolas, etc. Igualmente, la actividad de medir, tal y como la entendemos en el lenguaje cotidiano ha estado presente a lo largo de la historia: hombres y mujeres ajustaban el tamaño de la cuerda al arco, calculaban distancias utilizando sus palmos o el alcance del paso de sus animales de labranza y fabricaban utensilios cuyas dimensiones eran adecuadas a sus necesidades.

Los párrafos anteriores bien podrían ser un extracto de la introducción de muchos libros de texto de matemática que se acercan a ella como actividad humana. Esta aproximación parece sugerir una matemática *viva* en la historia de los pueblos; una matemática al servicio de las necesidades humanas y en estrecha relación con la cultura. ¿De dónde viene, entonces, su imagen popular como una ciencia distante, carente de la calidez que transmiten otras ciencias humanas? ¿Dónde está la falla entre esta y aquella matemática? ¿Hay dos matemáticas, realmente? ¿Hay muchas matemáticas? ¿Por qué un manual que comienza hablando de hombres y mujeres que miden un campo al paso de los bueyes continúa inmediatamente con abstracciones difíciles de comprender?

La búsqueda de aclaraciones a este tipo de preguntas son las que motivaron la programación de este curso. Desde nuestro punto de vista, no es interesante para la cultura matemática de nuestra sociedad, y en particular para la educación de chicos y chicas, adoptar posiciones excesivamente rígidas respecto de la actividad matemática. En particular, tan poco beneficiosa es para la educación una imagen exclusivamente axiomática y logicista de la matemática como otra que defienda que las matemáticas son universalmente aplicables y útiles en nuestra actividad cotidiana. La primera porque genera a menudo rechazo e incomprensión; y la segunda, porque limita y empobrece una actividad humana que atiende el placer de pensar en objetos matemáticos y de *crear* otros nuevos.

Encontrar belleza o utilidad técnica en la actividad matemática no ha de ser en ningún caso un imperativo, ni para nosotros ni para los futuros alumnos. Lo interesante, ante todo, es ofrecer y disponer de la posibilidad de decidir si las matemáticas nos parecen bellas o no, y para eso lo más adecuado es aproximarse a ellas abiertamente; mirarlas desde distintas perspectivas; hacer el esfuerzo de comprender qué hay detrás de cada problema y asumir la responsabilidad de hablar de ellas con el rigor y la serenidad que exige cualquier tarea educativa.

La complejidad de la actividad matemática a lo largo de la historia es enorme; también se ha escrito y se ha hablado mucho en torno a las cuestiones a las que antes nos referíamos. En el planteamiento de este curso ha sido necesario desviar hacia un lado muchos contenidos interesantes que incluso nos alejan de una determinada metodología del quehacer matemático. Afortunadamente las bibliotecas están llenas de contenidos matemáticos y reflexiones didácticas acerca de ellos; Internet también; de vez en cuando hay conferencias interesantes sobre matemáticas. Lo realmente interesante es querer, poder y saber acceder a los recursos disponibles, disponer de buenas estrategias de selección y ser capaces de valorarlos críticamente. De modo que para no caer en una exposición abigarrada o superficial hemos optado por escoger un tema contenido concreto pero suficientemente amplio, la medida, y aproximarnos a la matemática a través de su historia. Creemos que a partir de la experiencia colectiva alrededor de esta historia será posible elaborar reflexiones interesantes que nos permitan acercarnos a cualquier otro contenido.

El caso de la medida

Elegir la medida como guía para la elaboración de este curso se debe entre otros motivos a su especial riqueza para comprender la evolución popular de la actividad matemática, ligada a las inquietudes, la forma de vida de hombres y mujeres, las instituciones o la construcción de las ciencias. Medir suele asociarse en nuestra cultura con una acción de tipo instrumental:

reglas, cintas métricas o balanzas son utilizadas para controlar a través de los números cualidades variables del mundo físico tales como peso, volumen, velocidad, temperatura, etc. Tras el esfuerzo de muchos siglos de estudio y de auténticos instrumentos de ingeniería, los físicos lograron *medir* estas magnitudes (siempre numéricamente), abriendo así nuevas posibilidades para la física matemática. Esta importante imagen de la medida está detrás de muchas investigaciones llevadas a cabo desde la historia, la política o la antropología: comprender el significado de las medidas de antaño; su relación con los sistemas de producción, comercio y consumo. Estos, junto el estudio teórico o técnico de la relación entre distintos sistemas y unidades de medida o la exactitud de diferentes aparatos dan cuerpo a una disciplina que viene definiéndose como *metrología*. Su historia y la de las matemáticas ilustra una relación de encuentros y des-encuentros entre una actividad práctica -medir- y una actividad teórica en la que una y otra disciplina han ido definiendo sus características.

Antiguas civilizaciones alcanzaron importantes triunfos intelectuales observando y manipulando medidas que serían criticados siglos después en defensa de una matemática *pura*, en la que lo teórico y lo practico quedara totalmente diferenciado. Nuevos intentos de reconciliación serían llevados a cabo en el curso de la historia para mostrar una matemática que forma parte de la vida y la cultura de los hombres, y de nuevo tales intentos habrían de quedar desvirtuados. La tensión entre "el mundo de las matemáticas y las matemáticas del mundo" es a la vez antigua y actual y está en la génesis de nuestra concepción sobre qué son y para qué sirven las matemáticas. Conocer esta relación entre matemática y medida a través de problemas y relatos históricos es el objetivo de este trabajo.

En la primera parte se presta especial atención a la utilización de propiedades geométricas para calcular distancias de manera indirecta es decir, para *medir aquello que no alcanzamos*. Nos extenderemos en problemas clásicos de agrimensura y en otros que surgieron del esfuerzo por encontrar una medida para la Tierra y el universo.

La segunda parte presta atención al cálculo de áreas y volúmenes. A partir de la formulación de BONAVENTURA CAVALIERI del *principio de los indivisibles* nos acercaremos a las situaciones paradójicas que planteron a lo largo de la historia la consideración del infinito y del continuo.

Parte I

El origen del pensamiento geométrico y la medida indirecta

Capítulo 1

Del mito al pensamiento geométrico

Hoy en día podríamos comenzar a discutir acerca de cuáles son los problemas de los que se ocupa una determinada disciplina; pero siempre lo haríamos sobre la base del conocimiento adquirido acerca de ella, y de otras con las que podrán establecerse relaciones. Podríamos discutir y, sin embargo, sería difícil alcanzar un consenso al respecto, pues para cada disciplina se confunden multitud de creencias acerca de su naturaleza; de la naturaleza de los problemas de los cuales ha de ocuparse; de su finalidad, o de la validez de sus aportaciones. Los difusos límites entre una disciplina y otra se definen a través de las creencias y los intereses particulares de cada comunidad y se van matizando a medida que avanza el conocimiento. Por ello podemos referirnos hoy en día a especialidades científicas que no existían hace años y por ello no podemos contar con otras que aún han de aparecer.

La matemática, igualmente, viene definiéndose a lo largo de aproximadamente 5000 años de historia, y en sus orígenes tuvo una expresión naturalmente primaria que difícilmente reconoceríamos hoy en día como matemática si no recurriésemos a una perspectiva histórica. En particular, las primitivas observaciones astronómicas constituyen uno de los eslabones importantes en la construcción de la experiencia matemática de la humanidad. Los rituales místicos, por ejemplo, fueron un motivo para encontrar una explicación a los fenómenos astronómicos observables.

En la astronomía primitiva encontramos también algunos de los primeros intentos de la humanidad por la *predicción*, al elaborar modelos basados en la observación que tenían el objetivo fundamental de controlar la naturaleza para establecer un calendario que ordenara sus actividades. En la definición de estos modelos astronómicos se vislumbran relaciones que soportan el desarrollo posterior de *algo* que hoy en día podemos discutir si es o no matemática desde la perspectiva aventajada de nuestro conocimiento de la disciplina. Con el paso de los siglos, esos modelos astronómicos se afinaron cada vez más, y de este modo se afinaron al tiempo otros profundos y rigurosos modelos matemáticos; pero ni la astronomía se sirvió de la matemática, ni la matemática de la astronomía, porque tales disciplinas no existían en los términos que hoy las consideramos.

Para asomarse a una historia de la medida desde las matemáticas es igualmente necesario asomarse a historia de la astronomía: la importancia de medir distancias inaccesibles para formular modelos astronómicos fue uno de los mayores impulsos para definir una medida geométrica, más allá de los números.

1.1 La astronomía en antiguas civilizaciones

La experiencia de las antiguas civilizaciones con el universo nos acerca al desarrollo de la astronomía: todas ellas experimentaban por dónde sale el Sol y por dónde se pone. También pusieron nombre a las estrellas de acuerdo con su propia cultura y con su trabajo. En las antiguas civilizaciones, las primeras representaciones del universo son representaciones mitológicas: en Babilonia, Júpiter era *la estrella del dios Marduk*; Venus era la estrella de Isthar, la diosa del amor; Marte era identificado como Nergal, el dios de la guerra. El significado de las estrellas era fundamentalmente religioso: Por ejemplo, puesto que Marte era la estrella de Nergal traía consigo guerras y destrozos; como Venus pertenecía a Isthar, traía el amor, el matrimonio y la fecundidad.

Sin embargo, el hecho de que existiesen conceptos mitológicos que involucraran el cielo, la deificación del Sol o los planetas, o el nombre de las estrellas, no significa que en el seno de aquellas civilizaciones existiese una ciencia consolidada como astronomía. Esta es la razón por la que los aspectos mitológicos no acostumbran a tenerse en cuenta en las investigaciones y reportajes sobre la historia de la matemática. Pero si bien es cierto que efectivamente la mitología no entra en el terreno de lo que consideramos astronomía, el estudio histórico de la representación que los hombres han hecho del universo es profundamente revelador para comprender el origen *científico* del conocimiento.

Los textos de Jean Pierre Vernant indicados al final del capítulo son un complemento en este sentido. Permitirán reflexionar sobre el paso del mito a la razón e introducir la relación entre la producción matemática griega y babilónica.

1.1.1 La astronomía en Babilonia y Egipto

Tanto Egipto como Babilonia mostraron un conocimiento muy sistemático de los hechos astronómicos a través, por ejemplo, de la elaboración de listas ordenadas de estrellas ordenadas según el mes en el que fueron vistas por primera vez.

Especialmente durante los siglos II y III a.e.c., la astronomía babilónica perfilaba importantes consideraciones matemáticas. En particular, el cálculo de los movimientos de la Luna fue uno de los mayores logros de la ciencia en Babilonia. La teoría planetaria, sin embargo, no fue desarrollada con el mismo grado de refinamiento, y la razón que ofrecen algunos autores es especialmente interesante porque nos sitúa ante avances científicos motivados por objetivos de utilidad práctica: La teoría lunar, y no la planetaria, era de una gran importancia práctica para el calendario lunar babilónico, ya que era necesario determinar si un mes tendría 29 ó 30 días. Los calendarios de uso cotidiano esconden un mecanismo profundo de observaciones, cómputos e influencias culturales. El calendario egipcio, por ejemplo, basado exclusivamente en cuidadosas observaciones dividía el año en 12 meses de 30 días cada uno, y añadía cinco días al final de cada año. Tanto el calendario lunar de los babilónicos, dependiente del complicado movimiento de la Luna, como el calendario griego eran muy inferiores al calendario egipcio.

No existen ediciones completas de los textos babilónicos, sino que se dispone únicamente de datos procedentes de unos cuantos miles de tablillas para ofrecer una representación del pensamiento de una civilización de miles de años. En el caso de Egipto la situación es aún más precaria, pues los papiros soportaron peor el paso del tiempo. A pesar de que en el estudio de los avances científicos en diferentes culturas no entran en juego unicamente textos matemáticos, los juicios históricos acerca del desarrollo científico de las antiguas civilizaciones han de aceptarse con precaución.

Adentrarse en el funcionamiento del calendario y remontarnos en el tiempo a través de su historia es una apasionante aproximación a la historia de la ciencia y de los pueblos, pero no es el estudio del calendario el ojetivo de este trabajo. Una bellísima fuente para profundizar en su estudio es *el tiempo a través del tiempo* ([9]); otra, más sencilla y concisa es *Calendarios y medidas del tiempo* ([10]).

Las aportaciones matemáticas, tal y como las entendemos hoy en día, se reducían a la solución de problemas básicos de aritmética. Tales aportaciones están muy ligados a la vida cotidiana de estas civilizaciones, pues el nivel matemático necesario para desenvolverse en la vida diaria se reducía a unas pocas técnicas calculísticas. A menudo este carácter estático de la matemática de antiguas civilizaciones se extiende erróneamente a otras actividades y se pierden de vista otros aspectos como por ejemplo al arte o la religión. Alejarse excesivamente de estos aspectos al estudiar la historia de la matemática de antiguas civilizaciones puede llegar a ofrecer una visión muy sesgada de la realidad cultural de una época. Algo así como si el escaso avance científico que se produjo en Europa durante la Edad Media, al que nos aproximaremos en el capítulo 4, nos hiciese perder de vista el valor, por ejemplo, de otras producciones artísticas de la época.

En general, la astronomía egipcia es considerada desde una perspectiva moderna como *científicamente* pobre porque sólo es estelar y con fines calendáricos; pero la babilónica, al involucrar cálculos de eclipses y efemérides planetarias tiene un gran interés matemático aunque sea exclusivamente observacional.

1.1.2 La astronomía en la Grecia Antigua

Nuestro conocimiento de la matemática griega no proviene de fuentes originales, como sucede en el caso de Babilonia o Egipto, sino que los manuscritos más antiguos de la literatura matemática y astronómica de la antigua Grecia fueron escritos en forma de recopilaciones o comentarios muchos siglos después de los originales de los que en ellos se trata. Los primeros atisbos de astronomía griega se muestran muy similares a la astronomía babilónica y egipcia, tanto en lo que se refiere a sus logros como en su carácter teórico primario. El objetivo era, de nuevo, establecer relaciones entre lo que sucede en el cielo y las estaciones del año, así que el interés por la astronomía surgió de nuevo del interés práctico por el establecimiento de un calendario.

Para algunos autores, no sólo el pensamiento científico, sino también el pensamiento social y político en la Grecia del siglo V a.e.c. aproximadamente, están caracterizados por la geometría. Los astrónomos griegos fundaron una astronomía nueva integrando conocimientos y técnicas que otros pueblos habían desarrollado y que dio como resultado una impresionante astronomía geométrica sobre una base sólida de cálculos y observaciones. Jean Pierre Vernant, uno de los más reconocidos historiadores de la antigüedad, resume en tres las características en la astronomía babilónica con las cuales rompieron completamente los astrónomos griegos en sus planteamientos, a saber:

1. Era una astronomía con fundamento religioso;
2. Era expuesta por los escribas del rey, que era quien debía saber qué pasaba en el cielo;
3. Tenía un carácter calculístico (expresaba mediante números las observaciones realizadas y las organizaba en tablas.)

En consecuencia, la concepción mitológica del universo fue sustituida por una *teoría* y la astronomía se convirtió, de este modo, en un saber que buscaba en primer lugar la utilidad de la inteligencia en un intento por explicar el mundo y la realidad física de una forma exclusivamente racional.

Aunque la matemática griega es, con diferencia, el campo más investigado de la historia de la matemática antigua, es importante no perder de vista que existen vacíos importantes debidos no únicamente a la destrucción de manuscritos, sino al estudio y la transmisión de la propia historia. Como ocurre en cuaquier época, también los escritores griegos contribuyeron a distorsionar el desarrollo de los acontecimientos inventando o exagerando historias que se refieren al trabajo de sus predecesores. A menudo, por ejemplo, se repiten muchas historias sobre Tales, Pitágoras y demás héroes en algunos libros de historia que son consideradas como muy dudosas por otros autores. Tales está considerado en diversas fuentes como el primer astrónomo griego, puesto que algunos autores le atribuyen la predicción de un eclipse solar que tuvo lugar el 28 de Mayo del año 585 a.e.c. Existen argumentos más que suficientes para conjeturar que su predicción se basó en el conocimiento de las observaciones que durante siglos habían anotado los babilonios, y que aunque pudiese haber predicho tal eclipse no podría haber explicado por qué se producía. Otros autores, sin embargo, dudan incluso que la predicción misma sea creible. Las atribuciones a Tales de sus descubrimientos astronómicos son un ejemplo más del desacuerdo de los historiadores y la relatividad de los reportajes históricos.

Hasta aquí hemos esbozado algunos aspectos de la astronomía babilónica y egipcia. El estudio de los eclipses de Sol y de Luna, por qué, cómo y cuándo se producen, nos permitirá comprender la importancia de las cuidadosas observaciones que fueron llevadas a cabo por estas civilizaciones.

1.2 Eclipses de Sol y eclipses de Luna

Para comprender cómo se produce un eclipse de Sol es necesario estar familiarizado con un eclipse de Luna, así que comenzaremos por ello: Un eclipse de Luna puede producirse sólo si la Luna atraviesa alguna porción de la sombra de la Tierra, tal y como muestra la figura 1.1. Se produce un eclipse total de Luna cuando ésta llega a sumergirse en su totalidad en el cono de sombra proyectado por la Tierra.

Un esquema geométrico de lo que sucede en un eclipse de Sol es el que aparece en la figura 1.2. Se produce cuando la Luna pasa entre la Tierra y el Sol. Si la sombra de la Luna cae sobre la Tierra en ese momento, veremos cómo una parte del Sol es *eclipsada* por la Luna. La fase total de un eclipse de Sol es muy breve y raramente dura más que unos pocos minutos. Pero no todos los eclipses de Sol son totales; a veces la Luna es "demasiado pequeña" para cubrir enteramente el disco del Sol. Necesitaremos hablar de la órbita de la Luna en torno a la Tierra para comprender este último aspecto.

La órbita que describe la Luna en torno a la Tierra no es circular, sino que sigue una curva más complicada que se aproxima a una elipse más que a una circunferencia. Simplificando aún la situación, consideraremos a partir de ahora que la órbita de la Luna en torno a la Tierra es elíptica. Cuando la Luna orbita alrededor de la Tierra su distancia varía de 355.810 km a 405.720 km. Esta variación (un 13% aproximadamente) hace que nosotros percibamos también que su tamaño varía en la misma proporción. Tampoco la Tierra se mantiene siempre a la misma distancia del Sol mientras describe su órbita, sino que la variación es aproximadamente de un 3,3%. Si la Luna pasa cerca de la Tierra *parece* más grande que el Sol, y si el eclipse tiene lugar en ese momento será total. Sin embargo, a medida que se aleja parece más pequeña y no llega a cubrirlo, produciéndose entonces un eclipse parcial.

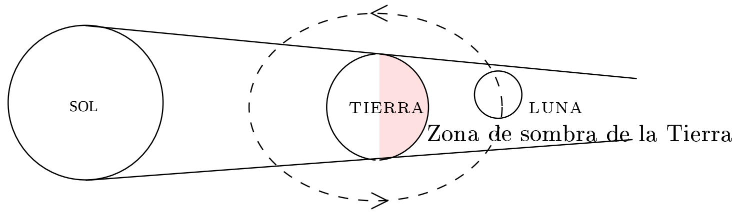


Figura 1.1: Geometría de un eclipse de Luna

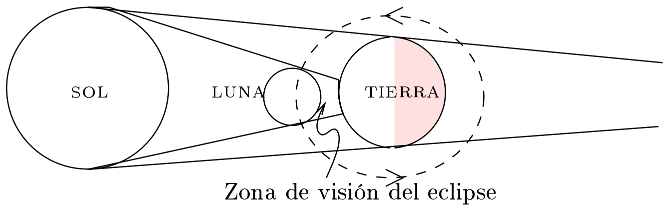


Figura 1.2: Geometría de un eclipse de sol

1.3 Aristarco de Samos

Aunque no se sabe con certeza, Aristarco de Samos vivió aproximadamente entre los años 310 y 230 a.e.c. Realizó un gran esfuerzo por determinar distancias en el sistema solar y llegó a formular la hipótesis que conduciría en el siglo XVI a Nicolaus Kopernick, conocido para la posteridad como Copérnico, a la formulación de la teoría heliocéntrica: que el Sol permanece fijo y la Tierra describe una órbita en torno a él.

Aristarco intentó dar una estimación del tamaño del sistema solar, obteniendo importantes resultados a partir de una serie de hipótesis formuladas exclusivamente mediante la observación directa del Sol y de la Luna. Estudiaremos en lo que resta del capítulo qué resultados obtuvo en su intento por obtener una medida del diámetro del Sol y de la Luna a partir del diámetro de la Tierra.

Uno de los rasgos más interesantes del trabajo de Aristarco es el método axiomático que sigue en sus demostraciones. La coherencia lógica del razonamiento griego exigía que cada resultado derivase de otros ya conocidos, que a la vez debían resultar de otros anteriores; y éstos de ciertas hipótesis cuya validez no se discutiese.

Aristarco llegó al resultado buscado considerando la posición del Sol, la Tierra y la Luna durante un eclipse total de Luna. La secuencia de deducciones que propuso le permitieron describir la geometría del diagrama de la figura 1.3 en términos de proporciones y partir de dichas proporciones llegó al resultado buscado.

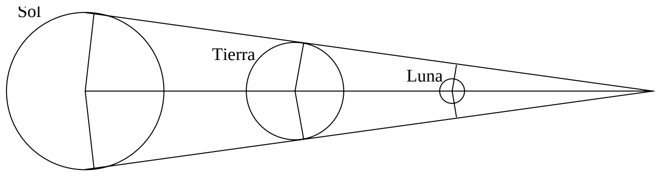


Figura 1.3: Diagrama que representa un eclipse total de luna. El diagrama no está hecho a escala. El objetivo de ARISTARCO es obtener una estimación de las dimensiones del sistema Tierra–Sol–Luna.

La secuencia de resultados propuesta por ARISTARCO es la siguiente:

Medidas actuales (en km) de las distancias astronómicas:

Radio del Sol	717.120
Radio de la Tierra	6.380
Radio de la Luna	1.738,8
Distancia Tierra–Sol	149.659.160
Distancia Tierra–Luna	384.559,77

1. Determinar una proporción entre la distancia a la Tierra del Sol y la Luna.
2. Deducir que los diámetros del Sol y de la Luna han de estar en la misma proporción.
3. Determinar el diámetro de la Luna a partir del diámetro de la sombra de la Tierra en la Luna durante un eclipse.

   Estos tres resultados permitirían dibujar un diagrama como el de la figura 1.3 que respetase las proporciones entre tamaños y distancias relativas del sistema Tierra–Sol–Luna, pero en un papel tan *pequeño* como este difícilmente lograríamos un resultado satisfactorio.
4. Encontrar una expresión para los radios del Sol y la Luna a partir del radio de la Tierra.

Analizaremos a continuación cada uno de estos puntos.

1. El Sol está a una distancia de la Tierra 19 veces mayor que la Luna. (¡Hoy sabemos que esta distancia es aproximadamente 389 veces mayor!)

Anteriormente se habían llevado a cabo algunos intentos por encontrar una proporción entre la distancia a la Tierra del Sol y la Luna. La primera que se conoce fue llevada a cabo po ANAXIMANDRO, quien estableció una proporción 3 : 2. El resultado propuesto por ARISTARCO atribuía al Sol una lejanía de la Tierra aproximadamente 19 veces mayor que la de la Luna. Estudiaremos cómo llegó a este resultado a partir algunas de sus hipótesis, que se detallan a continuación.

- La Luna recibe luz del Sol.
- Cuando la Luna aparece iluminada exáctamente en su mitad, el círculo que separa la parte iluminada de la oscura está exáctamente en la dirección de nuestra visual (figura 1.4).

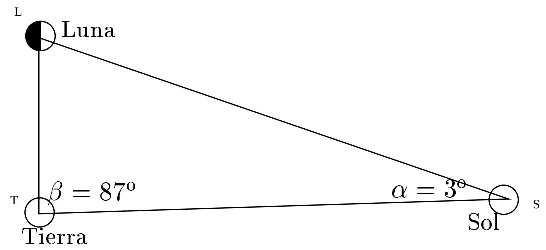


Figura 1.4: Los segmentos $\overline{TL}$ y $\overline{LS}$ forman un ángulo recto en L

Entonces, puesto que la Luna recibe luz del Sol –esto es lo que afirmaba en su primera hipótesis–, tiene que ser que la Tierra y el Sol formen un ángulo recto en la Luna. En cualquier otro caso no puede pasar que el círculo que menciona en su segunda hipótesis esté en nuestra visual y al mismo tiempo que reciba su luz del Sol.

- Era preciso dar una medida para los dos ángulos restantes del triángulo porque una vez conocidos los tres ángulos de un triángulo cualquiera queda caracterizada su forma, aunque no la medida de sus lados. Sin embargo, con ayuda de sencillos cálculos trigonométricos, e incluso por simple semejanza con otro *de la misma forma* pero mucho más pequeño, podríamos conocer la proporción en la que se encuentran la longitudes de sus lados. Volveremos sobre este aspecto en el capítulo 4.

  Puesto que el único aproximable por observación inmediata es el que es medible desde la Tierra, formuló como hipótesis que éste era de 87^o y por tanto, dado que uno de los otros dos ángulos es recto, el tercero tenía que ser de 3^o.

Esta propiedad –la forma del triángulo queda caracterizada si sus tres ángulos son conocidos– es aplicable a cualquier triángulo. Es otra forma de expresar que los triángulos son figuras *rígidas*: no es posible deformar un triángulo sin hacer variar la longitud de sus lados como es posible hacer, por ejemplo, con un cuadrilátero. Por ello se utilizan a menudo formas triangulares para *dar rigidez* a puentes, andamios, librerías, sillas, etc.

Aristarco no disponía de fórmulas trigonométricas y empleó una elaborada y rigurosa demostración geométrica para obtener la proporción en cuestión en la que no nos detendremos aquí. Así llegó a la conclusión de que la proporción buscada era 19 : 1. Esta proporción queda aún muy lejos del valor real, pues aproximadamente el Sol se encuentra unas 389 veces más alejado de la Tierra que la Luna. Sin embargo, su demostración es absolutamente impecable desde un punto de vista lógico.

La definición y el dominio de las propiedades de los ángulos fue un problema difícil a lo largo de la historia. Medir el ángulo a partir del arco de la circunferencia de radio uno que abarca data nada menos que del siglo XVIII.

Uno de los errores cometidos por Aristarco estaba en la aproximación dada al ángulo que forman en la Tierra los segmentos $\overline{LT}$ y $\overline{TS}$, que no era de 87^o, sino mucho más grande: $89^o50'$. Pequeñas variaciones en los ángulos pueden provocar grandes diferencias en la proporción entre los lados de un triángulo –especialmente para ángulos cercanos a 0^o y 90^o–, como sucede en este caso.

2. Una vez determinada la proporción de las distancias del Sol y la Luna a la Tierra dedujo que sus tamaños tendrían que estar también en la misma proporción

Aristarco observó que los diámetros del Sol y de la Luna se ven casi bajo el mismo ángulo γ desde la Tierra (Hoy sabemos que este ángulo es $\gamma = 30'$), lo que produce la sensación de que la Luna y Sol tengan el mismo tamaño aparente cuando los observamos desde la Tierra. Este hecho quedaba confirmado en la observación de un eclipse total de Sol.

En matemáticas se dice que dos triángulos son **semejantes** si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Un triángulo ampliado o reducido en una fotocopiadora nos proporcionará nuevos triángulos semejantes cuyos ángulos son iguales y los lados aumentan o disminuyen los tres en la misma proporción. ARISTARCO debió nacer 15 ó 20 años después de que EUCLIDES escribiera los *Elementos*, así que debía conocer la sofisticada "teoría de semejanza" del libro VII. En paticular, sabía que los triángulos que tienen ángulos iguales son semejantes y que por lo tanto sus lados son proporcionales.

Entonces, tal y como se muestra en la figura 1.5, la proporción en la que se encuentran los tamaños del Sol y de la Luna es la misma que la proporción entre sus distancias a la Tierra.

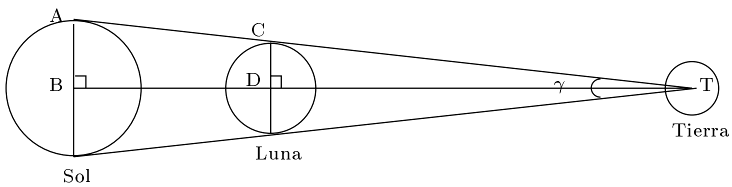


Figura 1.5: Los triángulos ABT y CDT son semejantes, y por lo tanto $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BT}}{\overline{DT}}$. De aquí se deduce que los radios del Sol y la Luna están en la misma proporción que sus distancias a la Tierra.

Así pues, si la proporción en la que se encuentran las distancias a la Tierra de la Luna y el Sol es de $19 : 1$, la misma proporción se mantendrá también para sus diámetros y radios. Lo que haremos a partir de ahora es analizar cómo relaciona estos tamaños con el radio de la Tierra. En primer lugar, para que el diagrama que presentábamos al inicio en la figura 1.3 quede determinado, ARISTARCO encontró una relación entre el diámetro de la Luna y el diámetro del cono que proyectaba la sombra de la Tierra en la sección que la Luna lo atravesaba durante un eclipse.

3. La anchura del cono de sombra proyectado por la Tierra en el lugar donde lo atraviesa la Luna durante un eclipse es de dos veces la anchura de la Luna.

Consideremos de nuevo el esquema de la figura 1.1 en el que representábamos la geometría de un eclipse de Luna. ARISTARCO comprobó que el tiempo que tardaba la Luna desde que comenzaba a taparse por la sombra de la Tierra hasta que se tapaba com-

Aristarco considera en todo momento que el movimiento de la Luna es uniforme, y por tanto que en el doble de tiempo ha recorrido necesariamente el doble de distancia.

pletamente era de una hora. Además, el tiempo que transcurría desde que estaba completamente tapada hasta que se destapaba completamente era de dos horas, de modo que la anchura del cono de sombra proyectado por la Tierra en el lugar donde lo atraviesa la Luna es de dos veces la anchura de la Luna, como se muestra en la figura 1.6.

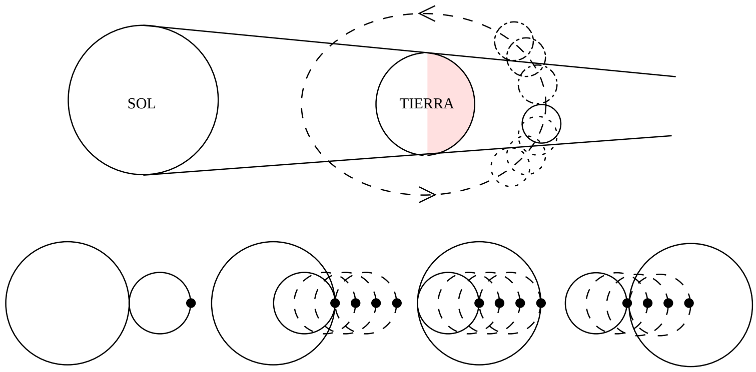


Figura 1.6: El radio de la sombra de la Tierra en la Luna es el doble que el diámetro de la Luna

4. Concluye que el Sol es 6,6 veces más grande que la Tierra y que ésta es 2,85 veces más grande que la Luna. (¡Hoy sabemos que el Sol es 400 veces más grande que la Tierra y que ésta es aproximadamente 3,67 veces más grande que la Luna!)

Fijémonos ahora en el diagrama que se muestra en la figura 1.7, el que aparecen representada la posición del Sol, la Tierra y la Luna durante un eclipse total de Luna. R_s es el radio del Sol, que sabe, según Aristarco, que es 19 veces el radio de la Luna. R_l es el radio de la Luna, que sabe que es la mitad que el radio de la sombra de la Tierra en la Luna. $\overline{ST}$ y $\overline{LT}$ son, respectivamente, las distancias a la tierra del Sol y la Luna, que sabe que están en la proporción 19 : 1.

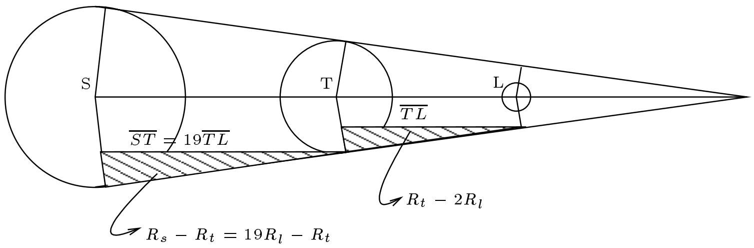
Los triángulos que aparecen sombreados en la figura 1.7 son semejantes, de modo que:

$$\frac{19\,R_l - R_t}{19\,\overline{LT}} = \frac{R_t - 2R_l}{\overline{LT}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{19} = \frac{R_t - 2R_l}{19\,R_l - R_t}$$

o lo que es lo mismo:

$$19\,R_l + 38R_l \;=\; 19R_t + R_t$$

Así que:



Los triángulos sombreados son semejantes, puesto que tienen sus tres ángulos iguales.

Figura 1.7: El sistema Tierra–Sol–Luna utilizado por Aristarco

$$R_l = \frac{20}{57} R_t$$

Y ahora la proporción con el Sol siguiendo el primer resultado de Aristarco es inmediato:

$$R_s = 19R_l = \frac{380}{57} R_t$$

de donde resulta aproximadamente que el radio del Sol (resp. diámetro) es $6,6$ veces el radio (resp. diámetro) de la Tierra, y que la Tierra es aproximadamente $2,85$ veces más grande que la Luna. (¡estos son los cálculos de Aristarco y no los reales!).

Hechos estos cálculos, que hasta ahora sólo proporcionan distancias y radios "relativos", para llegar a obtener cifras absolutas necesitaba conseguir una estimación apropiada para el tamaño de la Tierra. Uno de los cálculos más conocidos para obtener el valor de la longitud de lacircunferencia de la Tierra fue llevado a cabo por Eratóstenes de Cirene en el siglo III a.n.e. A ello nos dedicaremos en el capítulo 3.

Comentario de textos

Texto 1. 1. *El origen del universo.* Jean-Pierre Vernant, 1999. En: L'Univers, les Dieux, les Hommes. Récits grecs des origines. Edición en castellano, 2000: El universo, los dioses, los hombres. Anagrama, col. Argumentos, Barcelona.

Texto 1. 2. *Geometría y astronomía esférica en la primera cosmología griega.* Jean-Pierre Vernant, 1973. En: Mythe et pensée chez les grecs. Tercera edición en castellanno, 1993: Mito y pensamiento en la Grecia antigua. Ariel Filosofía, Barcelona.

Capítulo 2

Geometría para medir distancias

Son muchos los historiadores griegos que consideran que la geometría fue *descubierta* por primera vez en Egipto: Ramses II, aproximadamente en el año 1300 a.e.c. distribuía la tierra entre los ciudadanos en partes iguales por las cuales debían pagar un cierto impuesto. Cuando debido a las crecidas del Nilo parte de las tierras se las llevaba el agua, se exigía una reducción proporcional en los impuestos.

Esta historia se mantiene en muchos libros de texto y de historia de la matemática actuales y es precisamente este origen circunstancial el que prevalece para la mayoría de los historiadores actuales. Otras interpretaciones históricas menos difundidas atribuyen el origen de la geometría a rituales religiosos: Los *Sulvasutras*, obras originarias de la India, describen la construcción, desde muy antiguo, de altares de forma diversa según cada divinidad. La unión de dioses en uno único era un fenómeno habitual en la religión de antiguas civilizaciones, y si a los primeros les correspondía, por ejemplo, un altar cuadrado, entonces la construcción del nuevo altar conducía al problema de encontrar un nuevo cuadrado cuyo área resultara de la suma de las áreas de los anteriores. A menudo, la forma del altar variaba entre círculos y cuadrados según el propósito del sacrificio y surgían disputas teológicas acerca de la forma definitiva que debía tomar. El área debía mantenerse siempre constante y esto conducía al problema de *cuadrar el círculo* –hallar un cuadrado de área equivalente a la de un círculo dado con regla y compás–, uno de los problemas clásicos en la matemática griega de la antigüedad.

El problema de encontrar un cuadrado cuyo área fuera exactamente la de un círculo dado; el de trisecar un ángulo conocido y el de duplicar un cubo de dimensiones dadas utilizando regla y compás son los llamados *Los tres problemas clásicos de la geometría griega* que hasta el siglo XIX, que se demostró que no era posible, permanecieron sin solución. Una gran parte de la producción del pensamiento matemático griego y posterior vino motivada por el intento de resolver estos problemas.

Aunque se trate efectivamente de leyendas, a través de ellas conocemos las costumbres y modos de hacer de cada cultura; los hechos históricos se mezclan a menudo con leyendas que evocan la tradición y la influencia de culturas anteriores.

La solución de problemas en los que se ha de calcular una cierta distancia que no es posible medir directamente con una cinta métrica o similar involucra la utilización de importantes propiedades geométricas. En el capítulo anterior aplicamos la semejanza de triángulos en problemas de cálculo de distancias astronómicas; en este estudiaremos también algunos problemas de medida de distancias inaccesibles, pero en un entorno más o menos cercano. Esas propiedades geométricas garantizan el funcionamiento de muchas de las técnicas populares e instrumentos de ingeniería empleados hoy en día para estimar las dimensiones de terrenos o edificios; la distancia a la que un objetivo alejado de nuestro punto de mira; etc.

El estudio geométrico de los problemas de agrimensura ha sido significativo en la historia de la matemática. En Grecia, por ejemplo, el matemático griego Herón de Alejandría escribió algunos tratados en los que únicamente se refería a diferentes problema de agrimensura y a los múltiples instrumentos que se podían hacer servir para cada uno de ellos. Los tratados de matemática renacentista, por ejemplo, están llenos de grabados en los que se hace referencia a este tipo de problemas. También entre las obras matemáticas chinas de la antigüedad encontramos estudios dedicados exclusivamente a problemas de agrimensura. En general, todos estos tratados aparecieron en momentos en los que el carácter de la matemática era eminentemente práctico. Son problemas en los que el andamiaje geométrico necesario para su solución es relativamente sencillo, y ya había sido elaborado en una época muy anterior al momento en el que dichos tratados se escribieron.

2.1 La anchura de un río

El primero de los problemas nos remonta a la antigua China. El libro *Hai dao Suanjing*, escrito en el año 263 aparecen 9 problemas que tratan todos sobre el cálculo de distancias inaccesibles. Básicamente, los métodos geométricos utilizados para medir distancias se reducían a encontrar relaciones de proporcionalidad entre los lados de triángulos y cuadriláteros.

En uno de los problemas se plantea cómo medir la anchura de un río. El autor ofrece para ello la solución siguiente:

Colocamos tres estacas, a igual distancia una de otra, en los puntos A, B, C, tal y como muestra la figura 2.1. Desde el extremo de B, trazamos una visual a la orilla más cercana del río y marcamos el punto en el que dicha visual corta a la estaca colocada en A, de manera que los nuevos puntos D, E, F están alineados. Del mismo modo, lanzamos una visual a la otra orilla y marcamos el punto H en la estaca colocada en A, de tal manera que D, G, H están alineados.

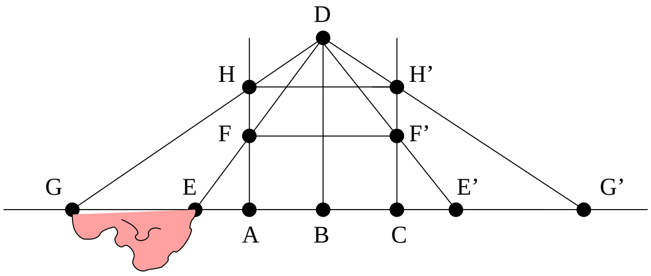


Figura 2.1: Los triángulos $\triangle DGE$ y $\triangle DE'G'$ son congruentes

Trazamos a continuación a la misma altura que F y H sendos puntos F' y H' en la estaca colocada en C y obtenemos uniéndolos con D los puntos E' y G'. La medida, sobre el suelo, entre los puntos E' y G' nos proporciona la medida de la anchura del río que buscábamos.

El método geométrico aplicado en este problema funciona porque hemos construido dos triángulos, iguales en forma y tamaño, que llamaremos a partir de ahora **congruentes**.

En el problema anterior, la condición de que las estacas estén colocadas a la misma distancia es la que permite garantizar esta condición de simetría. La figura 2.2 muestra cómo varía la distancia que queremos medir si no se cumpliese esta condición.

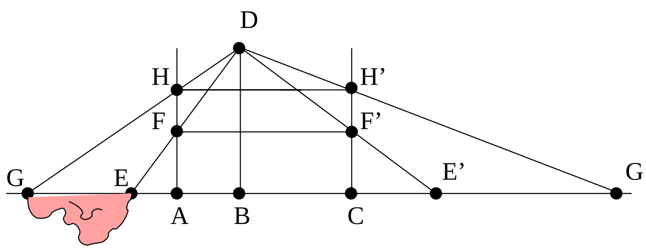


Figura 2.2: Al suprimir la condición de igualdad de distancia entre las estacas, los triángulos $\triangle DGE$ y $\triangle DE'G'$ no son congruentes

En la práctica, para construir un triángulo congruente con el triángulo $\triangle DEG$ de la figura podemos proceder de distintas maneras. Una de ellas es considerar un eje de **simetría** (la dirección de la estaca colocada en B según la figura 2.1) y señalar el simétrico de cada vértice respecto a dicho eje. El nuevo triángulo que obtenemos es congruente con el primero.
El concepto de figuras congruentes tiene gran importancia en la resolución de problemas geométricos y aunque en general puede aplicarse a cualquier tipo de figuras, en los problemas que irán surgiendo a lo largo del texto nos restringiremos al caso de los triángulos.
En términos geométricos, se dice que dos triángulos son congruentes cuando podemos pasar de uno a otro mediante un *movimiento*. Existen otros dos movimientos simples, además de las simetrías, que nos permiten obtener figuras congruentes con una inicial: las **traslaciones**, que deslizan la figura a lo largo de una recta del plano y las **rotaciones o giros**. Además, cualquier realización de uno de estos movimientos a continuación de otro seguirá produciendo triángulos cuyos lados y ángulos permanecen iguales.

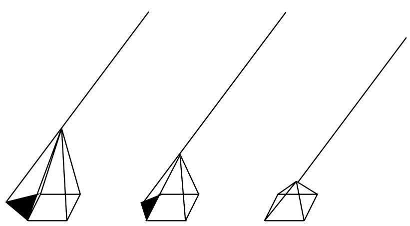
2.2 Las estacas de Tales

Cuentan los historiadores griegos que TALES viajó a Egipto y que introdujo en Grecia el estudio de la geometría. Estaba considerado como uno de los *siete sabios de Grecia*, honorados en tiempos del imperio romano como representantes de la ciencia y la sabiduría, a quienes se les atribuye un importante papel en la organización política de las ciudades griegas después de que cayeran los sistemas feudales. Thomas Heath, uno de los más importantes historiadores de la matemática griega considera que con Tales se inició una transformación de la geometría, pasando de tener un carácter muy práctico y fundamentalmente aritmético a tener un carácter deductivo. Algunos autores le atribuyen que aproximadamente en el año 600 a.e.c. había llegado a establecer un método para determinar dos medidas inaccesibles: la altura de una pirámide y la distancia desde la orilla a la que se encuentra un barco en el mar. Nos ocuparemos a continuación de estos dos problemas.

2.2.1 Altura de una pirámide

La forma en la cual los historiadores de la Grecia antigua nos han hecho llegar cómo procedía Tales para medir la altura de una pirámide no coincide en todas las fuentes. Uno de estos métodos, el más sencillo, consistía en medir la longitud de la sombra (de la pirámide) en el mismo momento en que su sombra (la de Tales) medía exáctamente lo mismo que él.

Imaginemos que vamos disminuyendo la altura de la pirámide sin alterar su base. A la misma hora, el sol proyectará sombras de longitud diferente según las diferentes alturas. Medida desde el centro de la base, la longitud de la sombra es la que nos sirve para determinar la altura según el método de Tales. Pero si la altura de la pirámide es exactamente la misma, o menor, que la longitud desde el centro de la base hasta el lado de la misma, entonces la inclinación de la pirámide impide que la sombra se proyecte sobre el suelo y el método no funciona, porque la pirámide *no da sombra*.



En el momento que la sombra de un objeto determinado es igual a su altura, la misma relación entre ese objeto y su sombra se mantiene para otros objetos. Probablemente este hecho pudo haber sido inducido por mera observación, después de haber hecho mediciones en un número considerable de casos en el momento en que justo la sombra es exáctamente igual que la altura del objeto.

Nos detendremos a observar de nuevo esta situación. Debido a la inclinación que presentan las paredes de las pirámides, la sombra que se observaría en el suelo no corresponde a la altura de la pirámide, sino que la distancia que iguala a esta altura es la que comprende desde el extremo de la sombra hasta el centro de la pirámide, de modo que el problema incluía no sólo medir la sombra sino también la distancia al centro de la pirámide. Esta distancia es muy sencillo medirla si consideramos que la base de la pirámide es cuadrada (figura 2.3).

Existen otras versiones más elaboradas acerca del modo en el que procedía Tales para efectuar sus mediciones que le atribuyen la utilización de una estaca colocada en el extremo de la sombra de la pirámide y que también producía su sombra correspondiente. De este modo obtenía dos triángulos semejantes, cuyo estudio le permitía asegurar que la altura de la pirámide y la altura de la estaca estaban en la misma proporción. Es importante observar que para haber llevado a cabo esta medición tenía que suponer que los rayos del Sol eran paralelos, una consideración

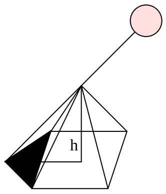


Figura 2.3: La sombra visible no corresponde a la altura de la pirámide, sino que hay que considerar la longitud hasta el centro de la base

importante en la cual nos detendremos en el próximo capítulo.

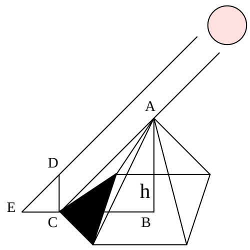


Figura 2.4: Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DCE$ son semejantes

En el problema de Tales encontramos una cierta proporción dividiendo la altura del palo entre la longitud de su sombra, que será exáctamente la misma que obtengamos al dividir la altura de la pirámide entre la longitud de su sombra. Sólo necesitamos conocer cuál es la distancia entre el punto de la sombra que corresponde al vértice de la pirámide y el centro de la base de la pirámide para llegar a determinar su altura (Figura 2.4).

2.2.2 Distancia a la que se encuentra un barco

Se cuenta, aunque no hay un gran acuerdo entre los historiadores, que Tales estaba ocupado en encontrar cuál es la distancia a la que se encontraba un barco de la orilla. Supongamos que queremos encontrar la distancia en linea recta que existe entre un barco que está en algún sitio en el mar, a la vista desde la playa, y el punto en el cual nosotros nos encontramos. La solución que propone Tales es la que se muestra en la figura 2.5:

Desde donde nos encontramos, caminamos a lo largo de la orilla manteniéndonos en la perpendicular a la linea que une A (nuestra posicióm inicial) con B (el lugar donde se encuentra el barco). Elegimos un punto C en nuestro camino y colocamos allí una estaca (Tales debía ir siempre cargado con una bolsa de estacas, el pobre), lo suficientemente alta como para que la veamos claramente a una larga distancia. Continuamos alejándonos de la

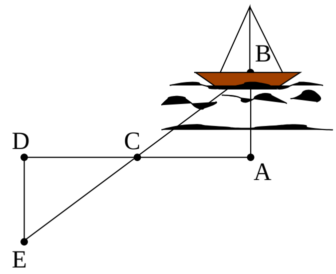


Figura 2.5: Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DCE$ son congruentes.

estaca por la misma linea, hasta recorrer exáctamente el mismo trecho que separa los puntos A (donde estábamos inicialmente) y C (donde hemos colocado la estaca). Este punto corresponde al punto D en la figura 2.5.

A continuación, giramos 90 grados y nos alejamos de la orilla, hasta que veamos alineadas la estaca y el barco (tendremos que girarnos para verlo, si es que no estamos caminando hacia atrás). Ese será el final de nuestro recorrido, pues la distancia a la que se encuentra el barco es precisamente la misma que hemos recorrido en este último tramo, cuando nos alejábamos de la orilla.

La idea que usó Tales es que los ángulos *opuestos por el vértice* son iguales, y cuando dos triángulos tienen dos ángulos iguales y un lado también igual, entonces los triángulos en cuestión son uno copia exacta del otro.

2.3 El problema de la isla

Problemas que tratan de la estimación de distancias en el plano como los anteriores formaron parte del conocimiento estratégico de antiguas civilizaciones que han llegado a nosotros a través de obras egipcias, chinas, indias o griegas. En el problema que proponemos a continuación se pretende determinar la altura de una isla cuando la distancia entre el observador y la isla en cuestión no es conocida. Este problema es uno de los ejemplos que ilustran la transmisión del conocimiento desde oriente hasta occidente, pues desde China, donde se sitúa su origen, se extendió por India, los países musulmanes y Europa.

En el problema en el que calculábamos la altura de la pirámide conocíamos la distancia entre el observador y la pirámide (al menos era posible medirla directamente). Este dato nos permitía resolverlo considerando únicamente dos triángulos semejantes. En este caso, en el que tal distancia es desconocida, tendremos que considerar dos pares de triángulos semejantes.

Para determinar la altura de la isla nos serviremos de nuevo del uso de estacas (figura 2.6). Esta vez serán dos de la misma altura (por ejemplo 5 m) que colocamos a una distancia de 800 m. Supondremos que la altura del observador es 1.70m, de modo que la distancia s señalada en la figura 2.6 es 3.30m.

Nos alejamos de la primera estaca hasta que la visual a la cima más alta de la isla pase por el extremo de la estaca. Supongamos que la distancia que nos hemos alejado son 80 m.

Hacemos lo mismo alejándonos desde la segunda estaca, hasta que su extremo y la cima estén alineadas en nuestra visual. Supongamos que nos hemos alejado 90 m.

Con estos datos queremos encontrar la altura de la isla. Los

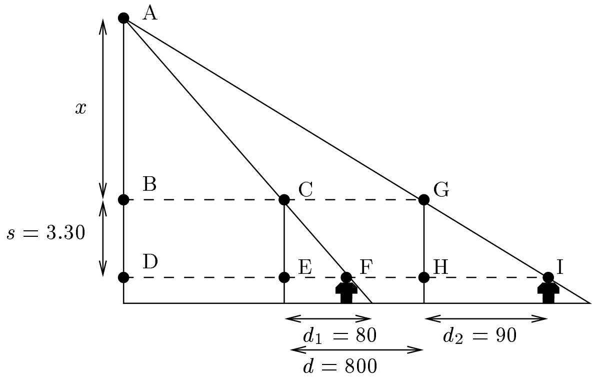


Figura 2.6: El problema de la isla.

triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADF$ son semejantes. Lo mismo ocurre con los triángulos $\triangle ACG$ y $\triangle AFI$. A partir de estas relaciones de semejanza obtenemos dos relaciones de proporcionalidad entre los lados de cada triángulo:

$$\triangle ACG \sim \triangle AFI \Longrightarrow \frac{CG}{FI} = \frac{AC}{AF}$$
$$\triangle ABC \sim \triangle ADF \Longrightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AD}$$

Y combinando estas dos proporciones, podemos obtener una nueva en la que únicamente es desconocido el valor de x:

$$\frac{CG}{FI} = \frac{AB}{AD} \iff \frac{d}{d-d_1+d_2} = \frac{x}{x+s}$$

Una sencilla ecuación permite determinar su valor:

$$\frac{800}{800-80+90} = \frac{x}{x+3.30} \quad \Rightarrow \quad x = 264,$$

de modo que la altura de la isla es $x + 5 = 269$m.

Los problemas de agrimensura y de aplicaciones prácticas de la matemática abundan en las producciones de la matemática china. Para la cultura china era especialmente importante que las obras matemáticas, como el resto, reflejaran y tuvieran en cuenta su propio contexto cultural. Además, el conflicto lógico que pudiera surgir de una concepción axiomática del pensamiento matemático era irrelevante, pues un contenido matemático tenía que estar necesariamente en correspondencia con un objetivo práctico. Cuando los misioneros europeos introdujeron la obra de la matemática axiomática occidental, que incluía las traducciones de autores griegos, el conflicto que esta nueva concepción de la matemática generó en el pensamiento matemático chino se hizo evidente:

Esta cita está extraída del bello y completo libro *A History of Chinese Mathematics*[12], en el que se revisa parte de la producción matemática de la civilización china de acuerdo a las condiciones históricas y culturales en las que se desarrolló.

> "Sus teorías [las de los europeos] se han convertido en oscuras e incomprensibles. Los nuevos libros [las traducciones de las obras europeas] contienen a menudo múltiples referencias de las cuales no tenemos el contexto en el que surgen, de manera que son imposibles de comprender para el lector".

En general, sus libros podrían ser descritos como colecciones de problemas, la mayoría formulados con un carácter general, y reglas de tipo prescritivo que conducían a su solución. Además, eran introducidos generalmente con un prólogo en el que se narraba el origen filosófico o histórico de las matemáticas y su utilidad en las actividades cotidianas. El prólogo incluía también a menudo una biografía sobre el autor y las circustancias que le llevaban a escribirlo.

Los avances en las operaciones con ángulos a los que llegaron los árabes y la perfección de diversos instrumentos de medida permitieron resolver este tipo de problemas de una manera mucho más sencilla, según veremos en el capítulo 4.

Capítulo 3

Una medida para la circunferencia de la Tierra

Hombres y mujeres en la antigüedad percibían cómo las estrellas se movían con respecto a ellos; así asumieron que el suelo sobre el que caminaban estaba fijo y las estrellas estaban dispuestas en una bóveda que giraba sobre sus cabezas. También veían cómo el Sol se levantaba y se ponía y cómo la Luna iba creciendo y decreciendo. A partir de sus observaciones, idearon modelos que dieran explicación a sus percepciones.

Para Tales, la Tierra era un disco plano que flotaba sobre el agua, elemento del cual todo proviene. Para Anaxímenes, otro de los filósofos griegos de Mileto, la Tierra estaba sostenida por el aire. El Sol, la Luna y las estrellas eran discos de fuego que también flotaban en el aire y que se movían alrededor de la Tierra. Según este modelo, el hecho que el Sol no se vea durante la noche se debía a que se escondía en las partes más altas de la Tierra y su distancia a nosotros era tan grande que se perdía de vista.

3.1 La Tierra: planos y esferas

Este tipo de representaciones cosmológicas son abundantes en una etapa de transición de la mitología a la ciencia. Anaximandro, quien vivió aproximadamente el el siglo VII a.e.c., impulsó una concepción geométrica del universo que superó definitivamente no sólo las representaciones arcaicas basadas en la mitología, sino también de manera importante las teorías de Tales o Anaxímenes, aportando algunas de las más originales ideas en astronomía. Las observaciones que hicieron tambalearse la hipótesis de que la Tierra era plana pudieron ser las siguientes:

1. Las estrellas visibles desde diferentes latitudes no son las

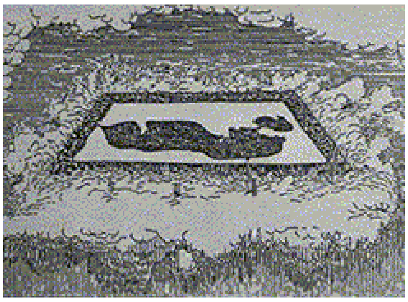


Figura 3.1: Para Anaxímenes la Tierra era rectangular. No sostenía, como la mayoría de filósofos de su época, que el Sol y las estrellas se escondiesen bajo la Tierra durante la noche, sino que eran trasportados a una gran distancia y por eso se perdían de vista.

mismas. Por ejemplo, en Egipto podían verse con toda claridad estrellas que no eran visibles en Grecia; además, constelaciones que eran visibles totalmente desde una determinada ciudad, en otra parecían hundirse en el horizonte.

2. En la observación de los eclipses de Luna, la parte que no se iluminaba tenía un borde circular. ¿Sería la sombra de la Tierra la que eclipsaba la Luna?

Anaximandro propuso que la Tierra era un cilindro con dos bases, sobre una de las cuales vivimos, y cuya profundidad es un tercio del diámetro de dicha base. Además, según este modelo, si la Tierra permanecía inmóvil en el centro del universo es precisamente porque desde dicha posición equidistaba del resto de los cuerpos celestes y no existía ninguna razón para que se desplazara más a un lado o a otro y se alterase el equilibrio celestial. Por tanto, la Tierra se sostenía exclusivamente por las propiedades geométricas del espacio: no tiene raíces, como sugerían algunas representaciones arcaicas, ni necesita de agua o de aire, como sugerían, respectivamente, las representaciones de Tales y de Anaxímenes a las que nos referíamos anteriormente.

Otro de los grandes pensadores griegos que aportó teorías originales sobre la evolución del universo fue Anaxágoras (500-428 a.e.c.) a quien se le atribuye el reconocimiento de que la Luna no brilla con luz propia, sino que recibe su luz del Sol. Este descubrimiento le permitió llegar a dar una explicación del porqué de los eclipses de Luna y de Sol: Aunque Anaxágoras pensaba también que la Tierra era plana, supuso que existían otros cuerpos que por su posición entre la Luna y el Sol causaban los eclipses de Luna.

Para ANAXÁGORAS, el mundo comenzó con un remolino en una parte de una gran masa en la que todos los elementos estaban mezclados. Este movimiento circular empezó en el centro y gradualmente se fue extendiendo en círculos más amplios, produciendo la separación de dos grandes masas, el *éter* y el *aire*, del cual luego se separarían las nubes, el agua, la tierra y las piedras. Las cosas más pesadas quedaron en el centro como resultado del movimiento circular y consolidaron la formación de la Tierra. Pero además de ésto, a consecuencia de la violencia de la centrifugación, muchas piedras salieron despedidas lejos de la Tierra y dieron lugar a las estrellas.

El primer intento de aproximación a la forma esférica de la Tierra fue probablemente un logro de los Pitagóricos. Cómo llegaron a esa conclusión es un misterio. Algunas de las sugerencias hechas por los historiadores se refieren a concepciones místicas que consideran a la esfera como *la más bella de las figuras sólidas*. De cualquier modo, en torno a la idea de que la Tierra era esférica, los pitagóricos desarrollaron un nuevo y completo modelo cósmico.

La escuela Pitagórica fue fundada por Pitágoras aproximadamente en el siglo VI a.e.c. Para la escuela, el número y la geometría eran la expresión misma de la fuerza divina. Nos extenderemos en torno al trabajo de los Pitagóricos en el capítulo 5.

ARISTÓTELES, al revisar las ideas de los astrónomos anteriores consideró un nuevo modelo para el universo: La Tierra, decía, es esférica. Razonaba que percibir el horizonte como una linea recta era en realidad una ilusión óptica producida por el enorme tamaño de la Tierra en comparación con el pequeño tamaño del Sol observado. Otra de sus razones para describir una Tierra esférica se basaban en la observación de los eclipses. Durante un eclipse parcial de Luna, por ejemplo, la linea que lo demarca es siempre curvada, así que el eclipse, que es causado por la sombra de la Tierra, era una prueba de que la Tierra es esférica.

La noción de una Tierra esférica formaba parte del conocimiento de filósofos y científicos de la antigüedad y no admitía ninguna duda. A partir de entonces, muchos se dedicaron a estudiar cómo expresar una posición sobre una superficie esférica, o cómo llevar a cabo una representación cartográfica adecuada.

La cartografía ha tenido a lo largo de la historia una profunda relación con avances matemáticos y astronómicos. El libro *The story of maps* [1] es una magnífica referencia para profundizar en la historia de la cartografía y su relación con el declive y el florecimiento de civilizaciones occidentales. Además, la lectura de la novela *Longitud*, sugerida en la bibliografía, ilustra el dramático proceso que llevó a la determinación de la longitud geográfica y sus consecuencias políticas y económicas.

Intentos por dibujar mapas han sido hechos durante toda la vida. Uno de los mapas más antiguos que aún se conservan es una tablilla de barro que data aproximadamente del tercer milenio a.e.c. y muestra montañas, ríos, lagos y otros accidentes geográficos de la antigua Mesopotamia. El desarrollo de los pueblos y el comercio aumentaron la frecuencia de los viajes y el interés por representar lugares y distancias en los mapas.

3.2 La medida de Eratóstenes

Ante el conocimiento, de base observacional, de que la Tierra era esférica, una de las cuestiones más interesantes que impulsaron el desarrollo de la cartografía fue conocer cuáles serían sus dimensiones. Los intentos por ofrecer aproximaciones para su circunferencia fueron varios durante la antigüedad. Uno de los más interesantes fue el llevado a cabo por Eratóstenes de Cirene, en el siglo III a.e.c. Analizaremos en detalle algunos aspectos interesantes de su vida, y de cómo procedió para obtener una medida de la circunferencia .

Eratóstenes viajó desde la costa de África, donde había nacido, hasta Atenas, para estudiar filosofía. Posteriormente fue requerido por Ptolomeo III para educar al príncipe, así que se marchó a Alejandría, donde pudo acceder a la mejor biblioteca de la antigüedad para aprender matemáticas y astronomía, algo que no podía hacer en Atenas. Alejandría era una ciudad cosmopolita que comenzaba a enriquecerse culturalmente. La ciudad estaba destinada a convertise en el centro de la cultura helénica y así fue como sucedió. Una de las instituciones en la ciudad de Alejandría que merece especial atención es el *museo*, que albergaba la librería real. Desde Alejandría eran enviados corresponsales a todas las partes conocidas de Grecia y Asia a recoger cualquier manuscrito y también muchas colecciones privadas fueron añadidas a la biblioteca. Algunos monarcas, especialmente celosos en lo que a la obtención de libros se refiere, llegaban incluso a registrar a todos aquellos que entraban en la ciudad y confiscaban sus libros para copiarlos inmediatamente. En la época en la que Eratóstenes se ocupó de la dirección de la biblioteca la colección ascendía a 490.000 volúmenes.

A Eratóstenes se le atribuyen estimaciones sobre la inclinación de la eclíptica, las distancias de la Luna y el Sol y el perímetro de la Tierra. El modo en el que midió el tamaño de la Tierra, que analizaremos a continuación, es uno de los más ingeniosos y sencillos.

Eratóstenes conocía que en el solsticio de verano el Sol se encontraba exactamente en el cenit de Siene (actualmente Asuán, en Egipto). Algunas fuentes dicen que la observación fue llevada a cabo en un pozo en la isla de Elefantina, en el Nilo, frente a Asuán, cuyo fondo era iluminado por los rayos del Sol en el solsticio de verano. El pozo tenía una escalera en espiral que bajaba casi 8 metros. Como se suponía que los pozos están excavados siguiendo un radio de la Tierra, el Sol tenía que estar exáctamente encima de la ciudad. Los textos originales de Eratóstenes sobre la medida de la Tierra se han perdido y el conocimiento que tenemos de su trabajo proviene de Cleomedes (siglo I a.e.c.), un escritor popular sobre temas astronómicos.

La idea principal del trabajo de Eratóstenes fue que para dar una medida completa de un meridiano podía ir sumando pedazos de arco de circunferencia, que obtenía a partir de medidas angulares. Para comprender cómo procedió es importante que analicemos previamente tres importantes hipótesis que son asumidas en su método:

1. *Los rayos del Sol llegan a la Tierra de forma paralela.*

   Aunque ya hemos utilizado esta consideración en problemas anteriores (los cálculos de Aristarco en el capítulo 1 y la medida de la altura de la pirámide en el capítulo 2) nos detendremos aquí en analizar la justificación de tal aproximación.

   Imaginemos que el Sol está en la posición 1, bastante cercana a la Tierra, (figura 3.2). Considerar desde esta posi-

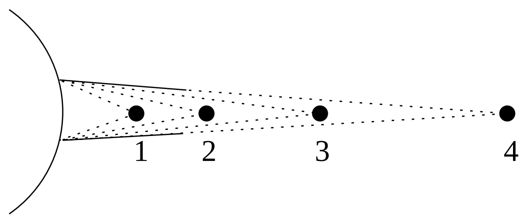


Figura 3.2: La distancia a la que nos encontramos del Sol es lo suficientemente grande como para que Eratóstenes aproximara que los rayos llegan paralelos a la superficie de la Tierra.

   ción que los rayos son paralelos es una mala aproximación. Sin embargo, a medida que consideramos una posición del Sol más alejada, observamos cómo sus rayos, cerca de la superficie de la Tierra, se aproximan cada vez más a rectas paralelas (figura 3.2).

2. Eratóstenes observó que un *gnomon* (reloj de Sol), en Alejandría, proyectaba una cierta sombra, mientras que en Siene no proyectaba ninguna.

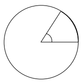
   El *gnomon* era el instrumento astronómico más importante utilizado en la antigüedad. Consistía en un palo vertical colocado sobre una superficie plana, normalmente graduada, para medir la longitud y la dirección de la sombra durante el día. En el problema de Eratóstenes, el gnomon, colocado sobre el suelo, se suponía que estaba alineado con el radio de la Tierra.

   La consideración de la dirección del gnomon y el paralelismo de los rayos del Sol permite aplicar una importante propiedad geométrica que aparece esquematizada en la figura 3.3: dos lineas paralelas cortadas por una recta secante proporcionan 4 ángulos que son iguales, de modo que en el esquema de la figura 3.3 los dos ángulos señalados son iguales. De este modo, ERATÓSTENES encuentra un ángulo en la superficie de la Tierra, que puede medir con ayuda de un gnomon y que le permite medir un ángulo inaccesible en el centro de la Tierra. ERATÓSTENES *midió el ángulo* α *que formaban los rayos del Sol con el gnomon y obtuvo un valor de* $\frac{1}{50}$ *partes de circunferencia.* Esta es otra de las hipótesis que utilizará en su cálculo.

Expresado en grados, el ángulo mide aproximadamente $7,2^o$; pero en aquella época los ángulos no se medían en grados, sino en porciones de circunferencia, de modo que la medida que consideró era de $\frac{1}{50}$ partes de circunferencia.

El uso del radián como medida de ángulos proporciona una relación entre la longitud del arco de una circunferencia y su radio. Un *radián* es la medida del ángulo central abarcado por una arco de circunferencia que mide exáctamente lo mismo que el radio de la circunferencia en cuestión, pero esta definición no fue formalizada hasta el siglo XIX.

La longitud de cualquier circunferencia depende únicamente de su diámetro (d) y se calcula utilizando la fórmula $L = \pi d$. Tal y como hemos definido el radián, resulta entonces que la medida angular total de la circunferencia ha de ser 2π radianes, que equivale a 360^o.


Este ángulo mide un radián.

3. *La distancia entre las ciudades de Alejandría y Siene es de 5.000 estadios.*

   En el mundo antiguo, las medidas de longitud eran expresadas en términos de partes del cuerpo, como el *pie* o el *cúbito*. De manera habitual, las distancias largas eran medidas por los llamados *estiradores de cuerdas* utilizando cuerdas que medían 100 cúbitos. Distancias más largas eran expresadas en *estadios*. Un estadio equivalía a 12.000 cúbitos. Pero ni unas ni otras tenían el mismo valor en todos los lugares, puesto que ni el pie ni el cúbito utilizado en Egipto, por ejemplo, era el mismo que el utilizado en Grecia o en Roma. En concreto, respecto a la medida del estadio que utilizó ERATÓSTENES los historiadores proporcionan valores diferentes.

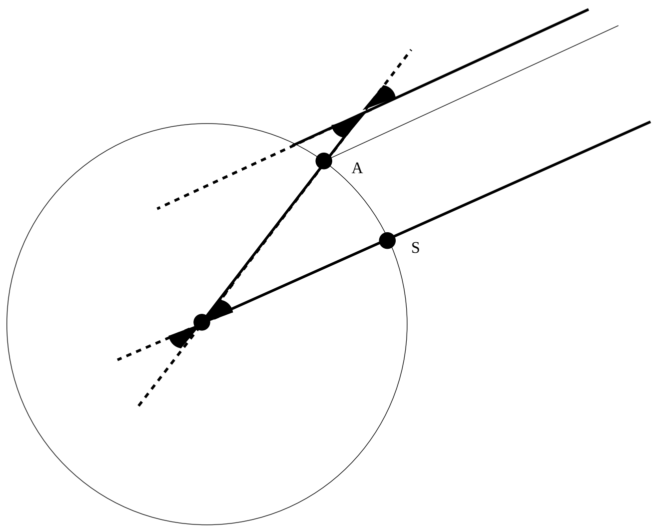


Figura 3.3: La medida del radio de la tierra llevada a cabo por Eratóstenes. Los ángulos sombreados son iguales

Ahora estamos en condiciones de comprender cómo procedió

Eratóstenes para medir la circunferencia de la Tierra.

Tal y como sabemos hoy, en una circunferencia el arco es proporcional al radio. Sin embargo, este hecho no fue considerado hasta mucho después, de modo que Eratóstenes no calculó el radio de la Tierra para luego poder dar una medida de la longitud de la circunferencia, sino que directamente calculó dicha longitud.

Eratóstenes consideraba que Alejandría y Siene estaban en el mismo meridiano, es decir, en un mismo *círculo máximo* de polo a polo de la Tierra (figura 3.4).

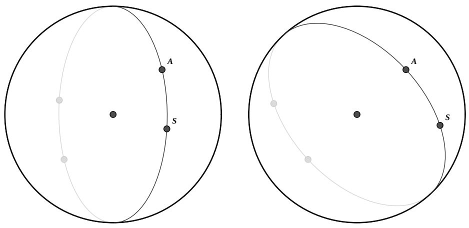


Figura 3.4: Dados dos puntos sobre la superficie de una esfera, siempre podemos encontrar un círculo máximo que los une. Para ello, hemos de considerar el plano que determinan esos dos puntos y el centro de la esfera. Los círculos máximos que pasan por los polos son los **meridianos**

La relación que utilizó Eratóstenes para encontrar la longitud de la circunferencia terrestre fue la siguiente:

$$\frac{\textit{Long. del meridiano}}{\textit{Long. arco Alejandría–Sienne}} = \frac{\textit{Medida}\text{ (angular) }\textit{de un meridiano}}{\textit{Medida}\text{ (angular) }\textit{del arco Alejandría–Sienne}}$$

El primer término de la igualdad es un cociente de longitudes, del cual queremos hallar el numerador y conocemos el denominador: 5.000 estadios.

El segundo término de la igualdad es un cociente de medidas angulares. Como la medida angular de un meridiano es la de una circunferencia completa, el numerador de este segundo término es 1 y el denominador es, de acuerdo con la segunda de sus hipótesis, $\frac{1}{50}$ partes de circunferencia completa.

Ahora el cálculo de la longitud de la circunferencia de la Tierra es inmediato:

$$\text{Longitud de la circunferencia terrestre} = 5.000 \times 50 = 250.000$$

Capítulo 4

Relacionando ángulos y lados

En el siglo VI el emperador bizantino Justiniano cerró las escuelas filosóficas que habían fundado los griegos. En occidente comenzaba un cambio importante en el rumbo que habían tomado las matemáticas hasta entonces. En general, los romanos se sentían muy poco atraídos por la lógica del conocimiento y prestaron una atención mucho mayor a prácticas como la medicina, la arquitectura o la ingeniería, cuyo contenido matemático es, en general, de un carácter diferente al que había tenido durante la época de mayor producción griega.

Para el imperio romano, las matemáticas necesarias eran aquellas exigidas por la economía diaria y las transacciones comerciales, además de otros conocimientos de tipo geométrico que requerían la agricultura, la medida de los campos o la astronomía. Entre tanto, en oriente, matemáticos indios y árabes se dedicaron al estudio de todas las áreas de la matemática y lograron importantes avances. Continuando con el estudio de los triángulos analizaremos en este capítulos las importantes aportaciones que introdujo la matemática árabe para el cálculo de los lados y ángulos de diferentes triángulos.

4.1 En occidente, la Tierra pierde la forma

Fue en el siglo II cuando Ptolomeo desarrolló sus dos grandes aportaciones: el *Almagesto* y la *Geografía*, ambas relacionadas con la elaboración de mapas. Lo que distingue especialmente a estas obras de las de sus predecesores es que, mientras éstos habían combinado astronomía, matemáticas y geografía bajo un mismo cuerpo, Ptolomeo las diferenció considerablemente, incluyendo en el *Almagesto* todas sus teorías científicas y reservando para la *geografía* la elaboración de mapas.

Para Ptolomeo, el cielo era una esfera con la Tierra situada en su centro a una enorme distancia de las estrellas. Para él, la cuestión de la esfericidad de la Tierra no admitía disquisiciones filosóficas, sino que la propia experiencia sensible lo confirmaba: por ejemplo, que el Sol, la Luna y otros cuerpos celestes no aparezcan y se oculten al mismo tiempo para cualquier observador en la Tierra era una prueba, ya que si la Tierra fuera plana, ocurriría a la vez en todos los lugares.

La aproximación que Ptolomeo hizo a la geografía fue estrictamente científica. Estaba interesado en la relación existente entre la Tierra, el Sol y la Luna para proporcionar una representación adecuada de la esfera terrestre y ofrecer un mapa del mundo esférico. Sostenía que en cartografía no se había tenido tenido en cuenta hasta entonces la forma y el tamaño de la Tierra y añadía que "es el gran y exquisito placer de los matemáticos mostrar estas cosas al intelecto humano." Con la ayuda de la astronomía y las matemáticas, -sostenía Ptolomeo- la Tierra podría ser representada con el mismo cuidado con el que sus antecesores habían representado el cielo.

En el artículo *El poder de los mapas*, sugerido al final del capítulo pueden encontrarse importantes consideraciones sobre la representación e interpretación de mapas relacionadas con la finalidad del cartógrafo.

Una vez afirmado que la forma de la Tierra es esférica, el problema principal era cómo dibujarla sobre una superficie plana, y Ptolomeo se ocupó de estudiar y describir posibles representaciones, dando cuenta de la inevitable distorsión que se producía al hacerlo.

A partir del siglo II las proyecciones y los métodos de representación de la Tierra que había desarrollado Ptolomeo fueron tranformándose. Los mapas intentaban ser cada vez más artísticos y fantásticos. Mientras que en los siglos anteriores fueron realizados sobre cuidadosas observaciones, durante el imperio romano se cubrieron de representaciones simbólicas sugeridas por los textos bíblicos y en los 1400 años posteriores a Ptolomeo en occidente no se avanzó absolutamente nada. Más bien, las afirmaciones de la iglesia primitiva estuvieron a punto de destruir completamente los avances científicos: la cartografía medieval en occidente, desde el año 300 al año 900 fue básicamente cristiana y los teólogos eran los encargados de estudiar el universo de acuerdo con lo que se leía en la biblia: tenía que existir un "cielo" que separase *las aguas de arriba de las de abajo* de manera que en un determinado momento pudiera abrirse en él un agujero que produjera una inundación en la Tierra, como había sucedido durante el gran diluvio. ¡Y esto era mucho más fácil de aceptar en el supuesto de que la Tierra fuera plana! Además, era necesario dar una representación del paraiso, un lugar más allá del horizonte, en el oriente lejano, que se representaba en un vértice del mapa. Los mapas de la Edad Media tomaron formas circulares, rectangulares ovaladas y constituyeron una fuente de documentación suficiente como para volver a considerar la Tierra como un disco plano y retroceder a la idea primitiva de que el Sol, después de ponerse por el oeste, viajaba por debajo del horizonte para volver a salir al dia siguiente por el este.

4.2 Nuevos instrumentos para viejas mediciones

Mientras en occidente la situación de la ciencia era la que veníamos describiendo, en oriente, el nacimiento en el siglo VII de la nueva religión iniciada por MAHOMA y la expansión árabe desempeñaron un papel importante en el desarrollo científico. Los árabes pretendían fundar la nueva Alejandría en Bagdad y crear en ella un observatorio astronómico, una biblioteca y un centro de investigación llamado *la casa de la sabiduría*. El islamismo puso a los árabes en contacto con pueblos y regiones que habían acumulado el saber de las antiguas culturas. La tolerancia que mostraban los conquistadores árabes hacia la producción intelectual de los habitantes de las regiones sometidas y la atmósfera de discusión y libertad que había nacido con las polémicas religiosas fueron el contexto que permitió a los árabes disponer de los elementos necesarios para un fructífero desarrollo científico que continuaría durante varios siglos.

Se puso en marcha un proyecto de traducción masiva de las obras procedentes de Babilonia, India y Grecia. Los árabes hicieron una gran selección de la cultura clásica: de los romanos no tomaron prácticamete nada, ni siquiera el derecho, la organización social o la economía que tanto se desarrolló; tampoco tomaron nada de la literatura griega, y sin embargo todo lo referido a la astronomía. La obra de PTOLOMEO llegó con el título de *sintaxis matemática* y fueron los árabes quienes la tradujeron como *Al-megiste*, que significa *el más grande*, la que para ellos fue la obra cumbre de la cultura clásica. El interés árabe por la astronomía fue reconducido a las matemáticas y el amplio desarrollo logrado en trigonometría hizo posible la construcción de tablas astronómicas cada vez más precisas que mejoraron sustancialmente las obras anteriores.

La información proveniente de fuentes históricas modernas ha permitido estudiar la relación entre la religión y la ciencia, especialmente en la astronomía y la geografía: los rituales religiosos influyeron notablemente en las matemáticas que acompañaban a la astronomía. Las oraciones diarias tenían que hacerse en periodos regulados por la posición del sol; por ejemplo, la oración de la tarde se hacía cuando la longitud de la sombra de un objeto era 8 veces mayor que el objeto mismo, y además era necesario hacerlo de cara a la Meca. Estas reglas exigían un conocimiento de los movimientos celestes y planetarios y a partir del siglo XII las mezquitas emplearon astrónomos profesionales que utilizaban astrolabios, cuadrantes y relojes de sol. Los estudiosos de la ley coránica resolvían problemas matemáticos relativos a la medición astronómica del tiempo para establecer las horas de las oraciones de acuerdo a tales preceptos religiosos. Igualmente, determinar la dirección de la Meca desde cualquier posición se convirtió en un problema de geografía matemática. A principios de siglo IX habían resuelto ya el problema, enormemente complejo, de determinar la posición de un punto de la superficie esférica con respecto a otro.

4.2.1 La trigonometría árabe

El inicio de la trigonometría proporcionó un enorme impulso a las matemáticas, sobre todo en su aplicación a la astronomía. Como en tantas otras ocasiones, poco tiene que ver el modo en el que históricamente se llegó a establecer las relaciones entre los lados y los ángulos en un triángulo (las llamadas *razones trigonométricas*) con el modo tradicional en el que son presentadas en los textos actuales de matemáticas. Hagamos el esfuerzo de dejar a un lado las nociones confusas que pudiéramos tener sobre trigonometría porque no las necesitaremos. Hasta ahora hemos tratado de relaciones entre lados de un triángulo y, sencillamente, ahora nos ocuparemos de sus ángulos.

La idea de que los ángulos se miden "directamente" con ayuda de un transportador descansa sobre una asociación de medidas angulares con medidas de longitudes, que será la que iremos deshilvanando a continuación.

Los primeros intentos conocidos por medir ángulos fueron llevados a cabo por los griegos, pero las que hoy se llaman *razones trigonométricas* (seno, coseno, tangente) fueron en sus orígenes lineas, y no razones. El radio de la circunferencia se dividía en 60 partes iguales y después se asociaba a cada ángulo la longitud de la cuerda correspondiente expresada en base 60 (figura 4.1). Los astrónomos griegos comenzaron a elaborar las primeras tablas, que recogían para diferentes aperturas de ángulo la medida correspondiente de la cuerda.

La India compartía con Grecia el interés por la medida de los ángulos y a partir de entonces los matemáticos indios comenzaron a dar forma a lo que después se consideraría *trigonometría*. Desde India, como veremos, se transmitió a los árabes, que introdujeron los mayores avances, y desde allí a Europa, donde en el siglo XV apareció por vez primera un relato detallado del conocimiento de la trigonometría.

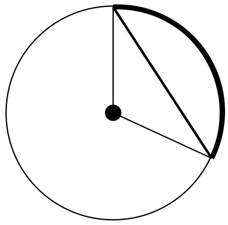


Figura 4.1: En los primeros intentos por dar una medida de amplitud para un ángulo (central en una circunferencia de radio 60), a éste se le asociaba la longitud de la cuerda correspondiente.

Los matemáticos indios usaban para sus cálculos con mayor frecuencia la semicuerda que la cuerda del arco, quizás porque para los problemas de los que se ocupaban era de mayor interés medir ángulos sobre el vértice de un triángulo inscrito, y no sobre el centro de la circunferencia. Una interesante propiedad geométrica asegura que un ángulo central α tienen exáctamente el doble de amplitud que el ángulo que abarca la misma cuerda pero tiene su vértice sobre la circunferencia (figura 4.2).

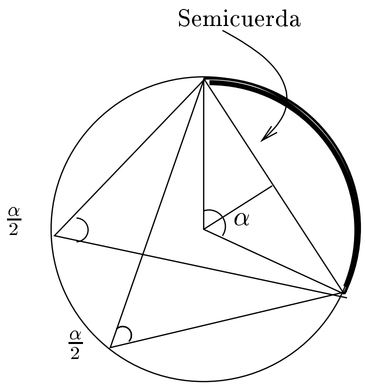


Figura 4.2: Una propiedad geométrica nos asegura que, para una misma cuerda, el ángulo medido sobre el centro de la circunferencia es exáctamente el doble que el ángulo medido sobre el borde de la circunferencia.

El caso es que utilizaban tan a menudo el valor de esta medida dividida por el valor del radio que le dieron nombre:

> "... *jya-ardha* ('semicuerda'), que posteriormente se abrevió a *jya*. De este término procedió la palabra árabe fonéticamente derivada *jiba*, que, siguiendo la práctica árabe de omitir las vocales, se escribía *jyb*. Los primeros traductores latinos, al encontrarse con esta palabra aparentemente sin traducción, la confundieron con otra, *jaib*, que, entre otras acepciones

Esta cita es del libro *La cresta del pavo real* [7], en la que el autor recoje (y reivindica, en ocasiones un tanto acalorado) las aportaciones matemáticas de culturas no europeas desde la antiguedad.

significaba la abertura del vestido de una mujer por el cuello, o seno; *jaib* fue traducido como *sinus*, que en latín tiene distintas acepciones, entre ellas 'pliegue' (de una toga), 'pecho', 'bahía' y, ciertamente, 'curva'. Y de ahí viene la actual palabra *seno*".

De modo que ya tenemos definido qué es un seno: *el resultado de dividir, en un triángulo rectángulo como el de la figura 4.2 el valor del cateto señalado entre la hipotenusa.* A partir de aquí, la definición del *coseno* era la misma, esta vez considerando el otro cateto del triángulo rectángulo. Y después la trigonometría siguió avanzando con los árabes, quienes encontrarían el resto de las razones trigonométricas, pero no manipulando más arcos ni cuerdas, ni siquiera a partir del seno y el coseno que ya conocían sino a partir de algo tal cotidiano como los relojes de sol, de uso muy extendido en aquella época.

Los primitivos relojes solares consistían básicamente de una varilla colocada perpendicularmente sobre una pared (figura 4.3) y se iban haciendo señales allá donde estuviese la sombra según periodos de tiempo regulares. El astrónomo árabe AL-HASIB examinó cómo variaba la longitud de la sombra en la pared cuando el sol incidía con diferentes ángulos y precisamente la longitud de la sombra para cada ángulo fijo es lo que daría lugar a lo que se denomina la **tangente del ángulo** α: *la sombra que produce un reloj de sol colocado sobre una pared.*

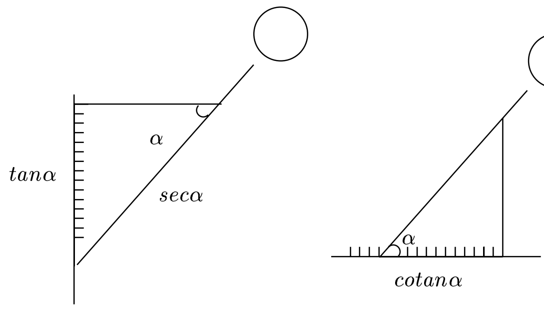


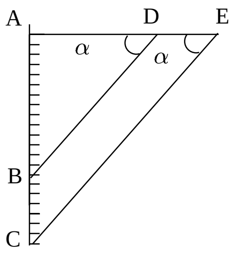
Figura 4.3: Relojes de Sol. Para cada ángulo, la *tangente* era calculada como la longitud de la sombra. El mismo reloj colocado perpendicularmente sobre el suelo proporcionaba las razones inversas.

Y en el triángulo formado aún queda por nombrar la hipotenusa: será la *secante*, que era conocida como "la hipotenusa de la sombra".

Y después consiguieron demostrar una buena cantidad de igualdades que permitirían relacionar los lados y los ángulos de un triángulo cualquiera. El interés primitivo de los árabes por

Colocando el reloj en forma invertida, sobre el suelo, obtuvieron de manera similar el resto de las razones trigonométricas: la **cosecante** y la **cotangente**, que era la "hipotenusa de la sombra invertida".

Supongamos que tenemos dos relojes de sol con varillas de diferente longitud. Tal y como muestra la figura, la sombra que produce cada uno de ellos es diferente aunque el ángulo α de incidencia de los rayos del sol se mantiene.



Puesto que los triángulos $\triangle BAD$ y $\triangle CAE$ son semejantes, se sonsideró (aunque mucho más tarde) la igualdad de proporciones:

$$\frac{BA}{AD} = CA = AE$$

y a esta proporción se la llamó $\tan\alpha$. De este modo, a cada ángulo α le corresponderá un único valor de la tangente, que en el caso de que se considere la longitud de la vara del reloj como una unidad, efectivamente coincide con la longitud de la sombra.

las fórmulas trigonométricas se amplificó de manera notable en cuanto descubrieron su enorme aplicación a la astronomía y a la geometría y comenzó la elaboración de tablas cada vez más precisas que establecían para cada ángulo el valor de sus correspondientes seno y tangente.

A principios del siglo XVII aparecieron las primeras tablas en las que se consideraba el seno de 90^o fuera igual a 1, es decir, que los ángulos se midieran sobre una circunferencia de radio uno; de este modo, las *lineas* trigonométricas se convirtieron en *razones* trigonométricas. Como consecuencia de esta asignación surgiría posteriormente una nueva unidad de medida para el arco: el radián, que corresponde a un arco de circunferencia que mida exáctamente lo mismo que el radio de la circunferencia en cuestión. Por ello, la medida del ángulo –en radianes– coincide con la medida del arco.

El objetivo de la elaboración de tablas es, además de facilitar la tarea de cálculos posteriores, buscar relaciones que iluminen aquello que se está estudiando, pero en el caso de las razones trigonométricas es difícil encontrar una relación entre dos ángulos que se mantenga para sus senos. El seno de un ángulo de 60^o no es el doble del seno del ángulo de 30^o ni el triple del ángulo de 20^o. Lo mismo sucede en el caso de los cosenos y las tangentes: no crecen de este modo proporcional. La trigonometría actual se interesa más por otras características como por ejemplo su periodicidad.

4.2.2 El astrolabio

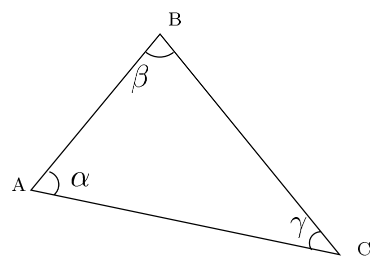
Los árabes habían adoptado la concepción *Ptolemaica* del universo (que ya se utilizaba desde el siglo III a.e.c.), en la que la Tierra, que está quieta, se sitúa en el centro de una serie de esferas concéntricas. El astrolabio (la palabra proviene del griego *astron* –astro– y *lanbanien* –tomar, buscar–, es decir, "buscador de astros") refleja, sobre un plano, ese modelo de universo.

La primera referencia de un astrolabio que se asemeja a lo que hoy conocemos como tal está en una carta que SYNESIOS, obispo de Ptolemais, dirigió a su profesora HIPATIA, la primera mujer matemática que se conoce. El padre de HIPATIA, TEÓN DE ALEJANDRÍA escribió sobre el astrolabio en un tratado que fue recuperado por los autores árabes. Al igual que sucedió con la mayoría del saber de la antigüedad, el conocimiento del astrolabio se perdió en occidente durante la Edad Media, pero se mantuvo y se perfeccionó en el Islam.

El astrolabio tiene forma circular, según se muestra en la fotografía. Su parte frontal es un disco que se denomina *rete* y el dorso se denomina *mater*. Los astrolabios tienen además una anilla que permite sostenerlos colgando para llevar a cabo las mediciones.

La parte frontal es la que se utilizaba para hacer medidas astronómicas como por ejemplo establecer la hora diurna o nocturna después de hallar la altura del sol o de una estrella, o descubrir la configuración exacta del cielo en una fecha pasada o futura. El dorso es la parte que se utilizaba para medir alturas, distancias o profundidades. En la parte posterior suele aparecer la graduaciónde los cuatro

Uno de los resultados especialmente interesante por sus aplicaciones en la resolución de triángulos al que llegaron los árabes es el llamado *teorema de los senos*, que queda expresado en la figura siguiente:



$$\frac{sen\alpha}{BC} = \frac{sen\beta}{AC} = \frac{sen\gamma}{AB}$$

cuadrantes de círculo, de 0º a 90º y una regla (*alidada*) de la misma longitud que el diámetro del astrolabio con dos pequeños orificios en sus extremos. Las observaciones se hacían haciendo girar la regla sobre el eje central, dirigiendo la visual (a través de una pequeña abertura circular denominada *pínula*) al extremo de la longitud que se quería medir.

El grabado de la figura 4.4 y los que aparecen en algunos de los problemas de este capítulo han sido tomados del artículo *Instrumentos matemáticos del siglo XVI* [16], en el que su autora recoge la descripción de distintos instrumentos utilizados por los ingenieros de la corona española durante este siglo.

Por ejemplo, para medir la altura h de una torre accesible (cuya distancia podemos determinar desde nuestro punto de observación) se sujeta el astrolabio de modo que la visual que pasa a través de los orificios de la alidada. El astrolabio nos proporciona una medida de la inclinación del ángulo de mira sobre la horizontal, α, de modo que el cálculo de la altura de la torre es inmediato haciendo uso de la tangente de dicho ángulo (figura 4.4):

$$\tan\alpha = \frac{h_1}{d} \implies h_1 = \tan\alpha \cdot d$$

La altura total de la torre, h, podemos obtenerla sumando al valor hallado, h_1, la altura de la persona que sostiene el astrolabio.

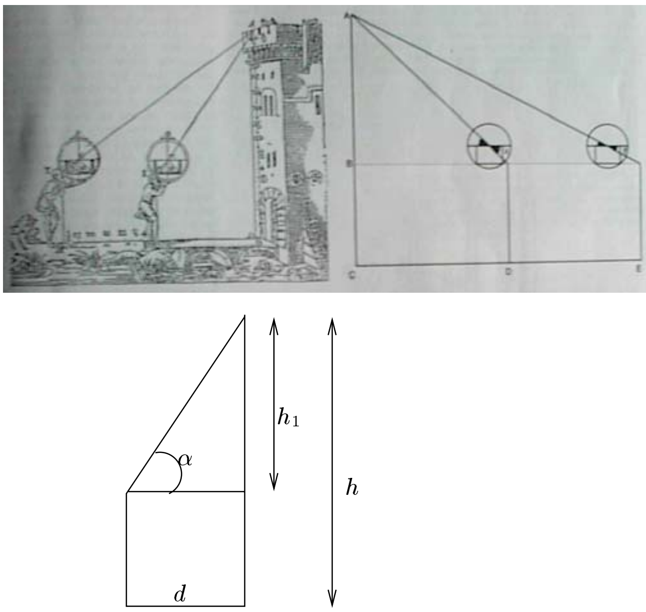


Figura 4.4: Medida de la altura de una torre con un astrolabio.

4.2.3 El álgebra y los números indo-arábigos

El álgebra fue la rama de las matemáticas en la que la más destacó la cultura árabe. Sin embargo, muy diferente a la sintaxis matemática actual, en el álgebra árabe no existía ningún simbolismo, sino que números y operaciones eran expresados por su nombre: Trabajaban con dos operaciones básicas: $Al - \breve{g}\breve{a}bar$, que significaba algo así como "pasar de un término a otro" y $Al - muq\bar{a}bala$, que significaba "reducir términos semejantes", es decir, la cancelación de dos términos semejantes en los dos miembros de la ecuación. A los matemáticos árabes se les debe, además, el cálculo con radicales.

Los árabes, como venimos diciendo, asimilaron rápida y profundamente la cultura de muchas civilizaciones. Además, convivían en un mismo territorio pueblos de orígenes muy variados: griegos, egipcios, sirios, etc. Todas estas diferencias culturales se reflejaron en las obras árabes, y en particular en las matemáticas, que en ocasiones adoptaron el sistema de numeración griego, (alfabético) y en otras el sistema de numeración hindú (posicional, de base diez). Finalmente el sistema hindú se impuso, aunque las variantes en las grafías de los números fueron muy diversas. Los numerales que utilizamos hoy en día son heredados del sistema de numeración árabe y, aunque nuestra escritura no se parecen en nada a la que se utiliza ahora en otros países de cultura islámica, nuestro sistema de numeración se conoce por ello como sistema indo–arábigo.

En occidente, muchos siglos más tarde, algunos autores contribuyeron a popularizar el sistema de numeración indo-arábigo, entre ellos el italiano LEONARDO DE PISA, más conocido como FIBONACCI (1170–1250). En su obra *Liber Abacci* ("libro del ábaco") precisamente expone una descripción libre y muy completa de los métodos algebraicos utilizados por los árabes, recomendando la utilización del nuevo sistema de numeración. El sistema indo–arábigo era conocido en los monasterios, pero popularmente se utilizaban los números romanos (para así evitar el uso del cero), de modo que la obra de FIBONACCI tuvo una gran influencia en la popularización del sistema posicional.

Uno de los problemas más interesantes incluidos en el *Liber Abaci* es el siguiente:
"¿Cuántos conejos se reproducirán en un año, comenzando por una pareja única, si cada més cualquier pareja engendra otra pareja, que comienza a engendrar a partir del segundo mes?"
Este problema da lugar a una famosa sucesión conocida como la *sucesión de Fibonacci*, donde cada término es la suma de los dos anteriores:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 \ldots$$

En el primer mes comenzamos con una pareja de conejos inmaduros, y durante el segundo mes seguimos teniendo la misma pareja, pero esta vez ya son maduros. Al tercer mes ya han producido una segunda pareja, de modo que tenemos dos: una madura y otra

Mientras las culturas orientales avanzaban así en el estudio de la ciencia y las matemáticas, habíamos dejado a Europa *dormida científicamente*, en la que viene llamándose en muchas obras históricas *La edad oscura*.

Hacia el siglo IX la esfericidad de la Tierra y las teorías griegas sobre los movimientos planetarios habían vuelto a ser aceptados por la parte más liberal de la iglesia pero en absoluto era un inmadura. Al cuarto mes, la pareja madura ha criado y la inmadura ha madurado, de manera que tenemos tres parejas. Razonando de este modo obtenemos, para cada mes, un número de la serie anterior, así que al final del primer año tendremos 144 parejas de conejos. La serie de Fibonacci tiene muchas e interesantes propiedades relacionadas con el crecimiento acumulativo, de modo que tiene muchas aplicaciones en la biología, el arte, o la estética.

conocimiento compartido por la población en general. La imagen popular de una Tierra plana continuó hasta el siglo XV e incluso más tarde. En occidente se habían *perdido* los detalles que durante siglos habían ocupado el pensamiento griego.

A partir del siglo XIII y durante el Renacimiento, diversos aspectos propiciaron el clima social necesario para que los europeos comenzaran su carrera científica y tecnológica: la catalogación y estudio de obras de siglos pasados; la invención de la imprenta; la diversidad religiosa y política; el impulso económico y el gran cambio de concepción respecto a la ordenación del espacio y el tiempo fueron el impulso necesario para la ilustración europea. Trataremos de ello en la segunda parte de este curso y volveremos, con cierto anacronismo, a encontrarnos con el trabajo de los pitagóricos, las medidas populares y el nacimiento de los actuales sistemas de medición.

Comentario de textos

Texto 4. 3. *La astronomía en el tiempo de Colón.* Gingerich, O. 1993. En: Investigación y Ciencia, núm. 196, enero.

Texto 4. 4. *El poder de los mapas.* Wood, D. 1993. En: Investigación y Ciencia, núm. 202, julio.

Parte II

El principio de los indivisibles: áreas y volúmenes

Capítulo 5

El área del círculo

Entre los años 1620 y 1623 BONAVENTURA CAVALIERI ((?)1598–1647) desarrolló sus primeras ideas sobre lo que él mismo llamó *El método de los indivisibles*, con el que trataba de formalizar una técnica de medida aplicable al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes. En el espacio tridimensional el principio de los indivisibles afirma que dos figuras de la misma altura cuyas secciones paralelas tienen áreas iguales han de tener el mismo volumen. Así, uno tiende a imaginarse que una figura tridimensional estuviera formada por *muchas, muchas* secciones paralelas. El problema es que una consideración de este tipo resulta, como veremos, algo resbaladiza desde un punto de vista formal porque no es posible evitar la delicadeza que involucra el estudio del infinito.

A menudo aparecen referencias en la historia de la matemática que, aunque pertenecen a una época muy anterior a la que vivió CAVALIERI, nos permiten evocar *su* método de cálculo. Por ejemplo, la *imagen visual* de los indivisibles fue muy utilizada por ARQUÍMEDES para la prueba de importantes teoremas acerca del cálculo de áreas y volúmenes. Sin embargo, la utilización de este método se relacionaba con otros problemas de formalismo lógico que dieron lugar, en la Grecia clásica, a numerosas especulaciones filosóficas y matemáticas. Para los antiguos matemáticos griegos, cualquier razonamiento del tipo “una figura constituida por muchas piezas tan pequeñas como se quiera” resultaba formalmente inaceptable; de modo que aunque heurísticamente su utilización fuese tenida en cuenta, nunca formaba parte de las demostraciones. Debido a este hecho elaboraron importantes y rigurosos argumentos que les permitían resolver los problemas matemáticos con la elegancia y el rigor lógico que exigía su tradición.

En el próximo capítulo estudiaremos algunas de las aplicaciones del método de los indivisibles; pero antes es importante que analicemos esa tensión entre el razonamiento “riguroso” y el razonamiento "intuitivo" a la que nos referíamos en el párrafo anterior. A ello dedicaremos este capítulo, tomando como referencia el problema histórico que supuso encontrar el área de un círculo.

5.1 Círculos y cuadrados: diversas aproximaciones para π

Preguntarse cuándo aparecen el círculo y el cuadrado por primera vez es necesariamente una pregunta de arqueología. Existen evidencias de círculos perfectos –trazados con la ayuda de cuerdas y clavos– en templos construidos aproximadamente en el siglo V a.e.c., y de círculos trazados a mano alzada en el siglo VII a.e.c.

Dado que construir un cuadrado perfecto es considerablemente más difícil que construir un círculo, algunos historiadores de la matemática sugieren la génesis del cuadrado a partir del círculo.

En las antiguas civilizaciones, el problema de encontrar el área de una figura curvilínea se resolvía comparando dicha figura con otra que estuviese limitada por rectas, cuya superficie resultaba siempre más fácil de calcular. De este modo se obtenía una aproximación más o menos fina para la superficie de la figura en cuestión.

Estamos habituados a calcular el área S de un círculo de radio r utilizando la expresión

$$S = \pi r^2$$

aunque la justificación de dicha fórmula no es en absoluto trivial. El cálculo del área de un círculo es un problema histórico importante, puesto que involucra la utilización de π. Estudiaremos a continuación algunos métodos de cálculo del área del círculo llevadas a cabo en Egipto, Babilonia e India y deduciremos para cada una de ellas qué valor de π involucran.

5.1.1 Aproximaciones para el área del círculo en Egipto, Babilonia e India

Uno de los problemas más antiguos de la matemática egipcia relacionado con el área de un círculo dice lo siguiente:

> Se tiene un campo circular de 9 *khets* de diámetro. ¿Cuál es su área?

Como solución, se propone restar $\frac{1}{9}$ al diámetro y elevar el resultado al cuadrado; así que la solución buscada es 64 unidades de área (*khets cuadrados*).

En términos generales, la aproximación que sugieren sigue la regla:

$$\text{Superficie} = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\,d\right)^2 = \frac{64}{81}\,d^2$$

La aproximación llevada a cabo en este problema está ligada a un círculo de diámetro determinado (9 *khets*) y tal y como aparece resuelto en el papiro no proporciona un método de cálculo general que nos permita encontrar el área de un círculo cualquiera. Como contraste, de entre las diferentes aproximaciones para el área del círculo llevadas a cabo en Babilonia, la que expondremos a contiuación sí proporciona una fórmula general.

El método seguido por los babilonios para aproximar el área de un círculo cualquiera era construir un cuadrado cuyo lado L midiese lo mismo que la longitud de la circunferencia correspondiente; a continuación se dividía entre doce el área de dicho cuadrado. El resultado obtenido era la aproximación para el área del círculo inicial. Así pues, el método utilizado, expresado de manera algebraica es el siguiente:

$$\text{Superficie} = \frac{\text{Longitud de la circunferencia}^2}{12}$$

Para encontrar cuáles son las aproximaciones del valor de π *escondidas* en estos cálculos utilizaremos la expresión algebraica habitual para el cálculo de la superficie del círculo de diámetro d, $S = \frac{\pi}{4}\,d^2$ En el primer caso (problema egipcio) obtenemos lo siguiente:

$$\left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\,d^2 \Longrightarrow \frac{64}{81}\,d^2 = \frac{\pi}{4}\,d^2$$

$$\pi \approx \frac{64 \cdot 4}{81} = 3.16$$

Para el caso del problema babilónico el área del cuadrado construido es $(\pi d)^2$ y la aproximación para π podemos deducirla de la siguiente manera:

$$\frac{\pi}{4}\,d^2 \approx \frac{\pi^2 d^2}{12} \Longrightarrow \pi \approx 3$$

Son muchos los textos de historia de la matemática que atribuyen un carácter aritmético a la matemática anterior a la época griega. En parte es debido a que las fuentes no griegas en las que mayoritariamente se han centrado las investigaciones históricas procedían de Egipto y Babilonia. Sin embargo, a medida que se van extendiendo los resultados de investigaciones que han prestado atención al pensamiento matemático en otras culturas, especialmente India, esta separación tan estricta ha ido suavizándose.

Uno de los problemas que se sugieren en los *Sulvasutras*, antiguas obras de geometría procedentes de la India, propone encontrar un círculo cuya superficie sea la misma que la de un cuadrado dado. Se trata del problema inverso al de la *cuadratura del círculo*, que resolvieron siguiendo un método estrictamente aritmético. Algunos historiadores sostienen la tesis de que la imposibilidad de resolver geométricamente el problema de la cuadratura del círculo obligó a los matemáticos indios a encontrar una solución aritmética.

El siguiente método que describiremos para encontrar el área del círculo era utilizado en India. En este caso se propone también un procedimiento de carácter general; sin embargo, mientras que en los dos casos anteriores –Egipto y Babilonia– el problema se resolvía utilizando cálculos aritméticos, en esta ocasión la aproximación se lleva a cabo geométricamente.

Para encontrar el círculo en cuestión, el método que se utilizaba es el que aparece esquematizado en la figura 5.1:

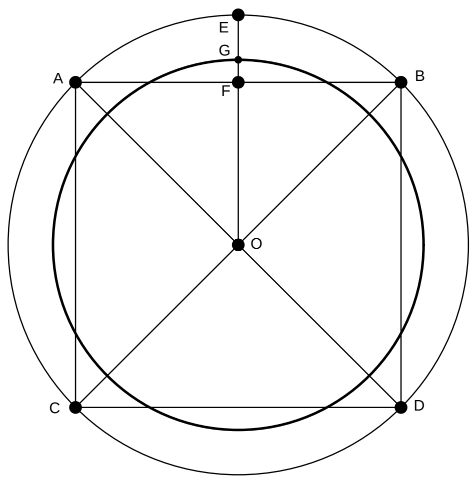


Figura 5.1: Construir un círculo aproximado de igual área que el cuadrado original (India). $\overline{OF} = \overline{FB} = \frac{\ell}{2} \Longrightarrow \overline{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell$

Sea O la intersección de las diagonales del cuadrado $ABCD$ cuyo lado mide ℓ. Dibujamos la circunferencia con centro en O y radio OA. Escogemos el punto G de tal manera que sea:

$$\overline{FG} = \frac{1}{3}\,\overline{FE}.$$

El círculo con centro en O y radio $\overline{FG}$ es, según este método, el que tiene una superficie aproximadamente igual a la superficie del cuadrado inicial.

La aproximación del valor de π implícita en el cálculo se deduce de la siguiente manera:

Una sencilla aplicación del teorema de Pitágoras nos permite afirmar que el radio de la circunferencia circunscrita es $\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$; por lo tanto, el radio de la circunferencia de radio OG será:

$$\frac{\ell}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}\,\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{6}\;\ell$$

Como el área de esta circunferencia ha de ser una aproximación para el área del cuadrado de lado l ha de verificarse la relación:

$$\pi\left(\frac{2+\sqrt{2}}{6}\right)^2 \ell^2 \approx \ell^2$$

De donde la aproximación buscada para π es:

$$\pi \approx \left(\frac{6}{2+\sqrt{2}}\right) \approx 3,09$$

Aunque no todos los historiadores están de acuerdo en ello, es probable que indios, egipcios y babilonios tuvieran una correcta noción de las relaciones entre el área de un círculo, su diámetro y la longitud de la circunferencia correspondiente. Las aproximaciones que utilizaban en sus cálculos se adaptaban suficientemente bien a su actividad matemática de carácter cotidiano: no existía un interés de carácter intelectual por dar una aproximación cada vez más exacta, sino un interés práctico por la utilización de la matemática en su trabajo y su vida diaria.

Estudiaremos también en este capítulo otras aproximaciones para el área del círculo, en particular algunas de las realizadas en Grecia y en China; pero para comprender su método necesitaremos conocer previamente cuál era la situación en la que se encontraba el pensamiento matemático en ambas civilizaciones.

5.2 La intuición y la razón en la Grecia antigua

La cultura del trabajo y los quehaceres cotidianos (el cálculo del grano que se recogía o con el que se comerciaba; la estimación de la cantidad de material necesario para llevar a cabo una construcción, etc.) propició un gran conocimiento práctico para el cálculo de áreas y volúmenes. Se trataba de un saber que era el producto de investigaciones basadas en la observación. Entre tanto, a raíz del comienzo de una matemática deductiva, más ligada al placer intelectual que a la vida práctica, surgieron conceptos abstractos que fueron, en particular, utilizados en el estudio de problemas relacionados con el cálculo de áreas y volúmenes. Fueron este tipo de problemas los que en el siglo XIX impulsaron el desarrollo del cálculo integral, uno de los grandes hitos de la matemática.

Los matemáticos griegos clasificaban los objetos matemáticos en diferentes categorías:

- la categoría que contenía los números naturales; y
- las categorías que agrupaban respectivamente a las figuras de 1, 2 y 3 dimensiones.

Dos objetos que pertenecieran a una misma categoría eran considerados *de la misma clase*. Para medir una figura no se le asignaba directamente un número, sino que su área o volumen eran expresados en términos de la proporción entre la figura que querían determinar y otra figura ya conocida. De este modo, se referían a *magnitudes* y no a números. El concepto de magnitud era lo suficientemente amplio como para que comprendiese todas las proporciones posibles entre dos números.

Pero, ¿por qué no podían asignar un número para la longitud, el área o el volumen de una única figura, tal y como se venía haciendo hasta ese momento? La respuesta a esta pregunta nos conduce a conocer qué fue la Escuela Pitagórica.

5.2.1 Los Pitagóricos y la crisis de las cantidades inconmensurables

Pitágoras fue contemporáneo de Buda, de Confucio, Lao-Tse y probablemente de Zoroastro. Durante sus largos viajes es muy probable que asimilara no sólo conocimientos matemáticos sino también religiosos, en un momento histórico que fue crucial en el desarrollo tanto del pensamiento religioso como matemático. Pitágoras concedía a las matemáticas un papel insustituible para alcanzar un estado de perfección espiritual. Una de las máximas más importantes de la escuela pitagórica era que los números lo eran todo y que nada podía concevirse sin ellos. Hasta entonces, una buena parte de los conocimientos sobre aritmética y geometría se utilizaban en la solución de problemas concretos y con escasa discusión acerca de su lógica y su filosofía. Sin embargo, este tipo de conocimiento práctico no interesaba especialmente a los pitagóricos, profundamente preocupados por un tipo de actividad que se guiaba por el más puro deseo de sabiduría y misticismo.

El ejemplo más antiguo de que se dispone de la utilización práctica del teorema conocido como “El teorema de Pitágoras” procede de Babilonia; posteriormente encontramos también referencias en las obras egipcias, indias y chinas.
Existen dos tradiciones fácilmente diferenciables en la utilización de este teorema desde la antigüedad. La primera es algebraica y afirma que la diagonal de un triángulo rectángulo es la raiz cuadrada de la suma de los otros dos lados; la segunda es constructiva, o geométrica y afirma que la superficie del cuadrado construido sobre la diagonal de un rectángulo es igual a la suma de las superficies respectivas de dos cuadrados construidos sobre sus lados. La primera suele asociarse a una tradición oriental en las matemáticas de antiguas civilizaciones; la segunda a la tradición griega.

Desde inició su escuela en Crotona, en el sur de Italia, fundiendo matemática y misticismo en los principios de una orden secreta cuyos fieles vivían en comunidad con un estricto código moral. Esta *escuela* las civilizaciones más antiguas se había ido extendiendo la utilización de diversos sistemas de numeración que incluían un sistema de fracciones, y que tenían su origen en el trabajo cotidiano o en rituales religiosos. La expresión fraccionaria de cantidades y la utilización de múltiplos y divisores de números naturales era absolutamente necesaria para la medida de distancias, superficies, capacidades o pesos. Los pitagóricos conocían también los números fraccionarios, que les permitían expresar medidas en términos de proporciones; pero sus investigaciones en relación con la teoría de las proporciones les costaron un terrible disgusto cuando se encontraron con un caso particular del hoy conocido como *Teorema de Pitágoras*.

Tomemos algo tan sencillo como un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1. Una sencilla demostración visual nos asegura que el área de cualquiera de los cuadrados construidos sobre los dos catetos es exáctamente la mitad del área del cuadrado sobre la hipotenusa (figura 5.2)

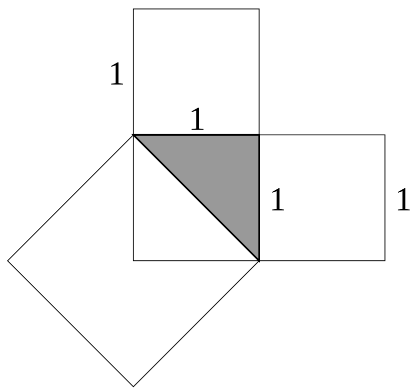


Figura 5.2: Caso particular del teorema de Pitágoras

Es evidente que la hipotenusa no podía ser un múltiplo entero del cateto, porque aunque era mayor que él no llegaba a ser el doble. Puesto que para ellos sólo existían los números naturales y las fracciones, tenían que buscar cuál era la fracción que servía para expresar el valor de la hipotenusa, es decir, encontrar un número expresable en forma de fracción que represente la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1.

Hoy en día sabemos que existen números que no es posible expresarlos en forma de fracción pero que a pesar de ello pueden asociarse con la medida de una longitud; tal es el caso del número $\sqrt{2}$, que se asocia precisamente a la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide una unidad. El número $\sqrt{2}$ está en algún sitio comprendido entre 1 y $\frac{3}{2}$; para ser más preciso, está entre $\frac{7}{5}$ y $\frac{3}{2}$; aún podríamos seguir acotando los extremos del intervalo en el que se encuentra tanto como quisiéramos sin poder obtener su valor exacto.

El caso de $\sqrt{2}$ no es un caso excepcional: existen infinitos números con esta propiedad, que son los que se denominan *irracionales*. Al introducir los irracionales en el sistema de numeración obtenemos una de las propiedades fundamentales de la recta real: su continuidad.

Así que los pitagóricos se encontraron con una medida "real" que no era un número en el sentido que ellos conocían. Algo terrible. Si se piensa que los números eran para los pitagóricos la esencia de todas las cosas es fácil comprender que el descubrimiento les causara una enorme consternación. Denominaron a estas cantidades *inconmensurables* y a partir de entonces optaron por olvidarse de los números para resolver problemas geométricos y referirse a las medidas en términos de proporciones. Hablar de *proporción* entre segmentos de longitudes enteras en lugar de *longitud*, (y análogamente para el caso de áreas y volúmenes) les permitía alejarse un poco de las cantidades *inconmensurables*, aunque su definición siguiera sin ser lógicamente aceptable.

Así pues, el escándalo de las cantidades inconmesurables impuso un cambio de rumbo en las investigaciones de los pitagóricos, transformando en geométricas las consideraciones aritméticas de las que tanto se habían ocupado. Las matemáticas actuales han asumido de tal manera la asociación de un número a una medida geométrica (nosotros tenemos la ventaja de disponer de *todos* los números y por tanto, considerar cualquier distancia como medible), que la idea de semejanza de figuras para la comprensión del concepto matemático de área se pierde en la mayoría de los problemas prácticos que tratan de su cálculo.

5.2.2 El método de exhausción de Eudoxo

Otras paradojas matemáticas agitaban por aquella época la mente de los filósofos griegos, esta vez haciendo emerger la ida de las *distancias infinitamente pequeñas*. Aristóteles protestaba contra la naturaleza aparentemente infinita de las partes que componían una cierta longitud argumentando de la siguiente manera:

> "No puedo llegar de aquí a esa pared. Para hacerlo, primero tendría que recorrer la mitad de la distancia; y luego la mitad de lo que queda; y luego otra vez la mitad de lo que queda. Este proceso puedo seguirlo llevando a cabo siempre, así que nunca llegaré."

Aunque realmente no se sabe mucho acerca de la relación entre los filósofos y los matemáticos griegos, el conflicto generado por las paradojas del infinito y los inconmensurables eran la expresión de un mismo problema, y exigía métodos lógicos que permitieran aclarar cuestiones geométricas evitando las dificultades que se derivaban de dicho problema.

Los matemáticos griegos diseñaron ingeniosas definiciones y axiomas para solucionarlo que encajaban en su esquema de geometría deductiva. De entre ellos, el que nos interesa especialmente en estos momentos es el llamado **axioma de continuidad**, que viene a decir algo tan evidente como que,

> dados dos segmentos, uno mayor que otro, siempre es posible encontrar uno que esté entre los dos.

Supuesto este hecho como indiscutible, el matemático griego EUDOXO propuso el que hoy conocemos como **método de exhausción**, la solución esperada para poder demostrar con un razonamiento lógicamente impecable teoremas importantes relacionados con el cálculo de áreas y volúmenes. El método de exhausción de EUDOXO muestra perfectamente la correspondencia entre una teoría matemática y un concepto intuitivo. Nos acercaremos a él a través del mismo problema que tratábamos anteriormente: encontrar el área del círculo; esta vez en Grecia y en China.

5.2.3 El área del círculo en Grecia y en China

En Grecia, matemáticos anteriores a EUDOXO habían sugerido que lo mejor que se podía hacer para encontrar una aproximación para el área de un círculo era inscribir en la circunferencia correspondiente figuras rectilíneas que tuviesen cada vez un mayor número de lados (figura 5.4) y proceder a calcular sus áreas indefinidamente. De este modo, la superficie de la figura en cuestión se aproximaría cada vez más, y más, a la superficie de la figura curvilínea. Pero una estricta definición de *límite* era, por supuesto, desconocida, de modo que no podían dar a este razonamiento de las aproximaciones una argumentación lógica: ¿Hasta dónde era posible aproximarse? Puesto que el polígono inscrito podía aproximarse al círculo sin llegar nunca a cubrirlo completamente, ¿era entonces imposible llegar a determinar exáctamente el área de un círculo cualquiera?; en tal caso, ¿cuál era el error que se cometía?

El axioma que permitiría a EUDOXO solventar este problema lógico evoca la definición intuitiva de límite y viene a decir que,

> Si de cualquier magnitud quitamos una parte mayor que la mitad, y del resto otra parte menor que su mitad, y así sucesivamente, podemos llegar a obtener algo tan pequeño como queramos.

La mayoría de los problemas que involucraban el cálculo de áreas y volúmenes se resolvían utilizando este axioma.

La primera información explícita sobre el área de un círculo en las obras griegas la encontramos en los trabajos de ARQUÍMEDES, quien demuestra que la superficie del círculo es la misma que la de un triángulo rectángulo, uno de cuyos lados es el radio y otro es la longitud de la circunferencia (figura 5.3).

La prueba que llevó a cabo ARQUÍMEDES es una prueba típica de reducción al absurdo:

1. Probar que no es posible que sea mayor.
2. Probar que tampoco es posible que sea menor.
3. En consecuencia, se puede afirmar que ambas figuras tienen la misma superficie.

Para probar que un sólido C (por ejemplo un círculo) tiene el mismo área que otro sólido C' se procedía de la siguiente manera: En primer lugar se construye un sólido P *dentro* de C (por ejemplo un polígono inscrito en el círculo), de modo que la diferencia entre ambos pueda resultar tan pequeña como queramos; en particular, construyendo sucesivos sólidos de manera que la diferencia se reduzca en cada paso más de la mitad.
En segundo lugar, se construye otro sólido P' (de igual área que P) *dentro* de C'.
A continuación, se prueba que partiendo de las hipótesis $C < C'$ y $C > C'$ se llega a contradicciones y por un razonamiento lógico ha de ser $C = C'$

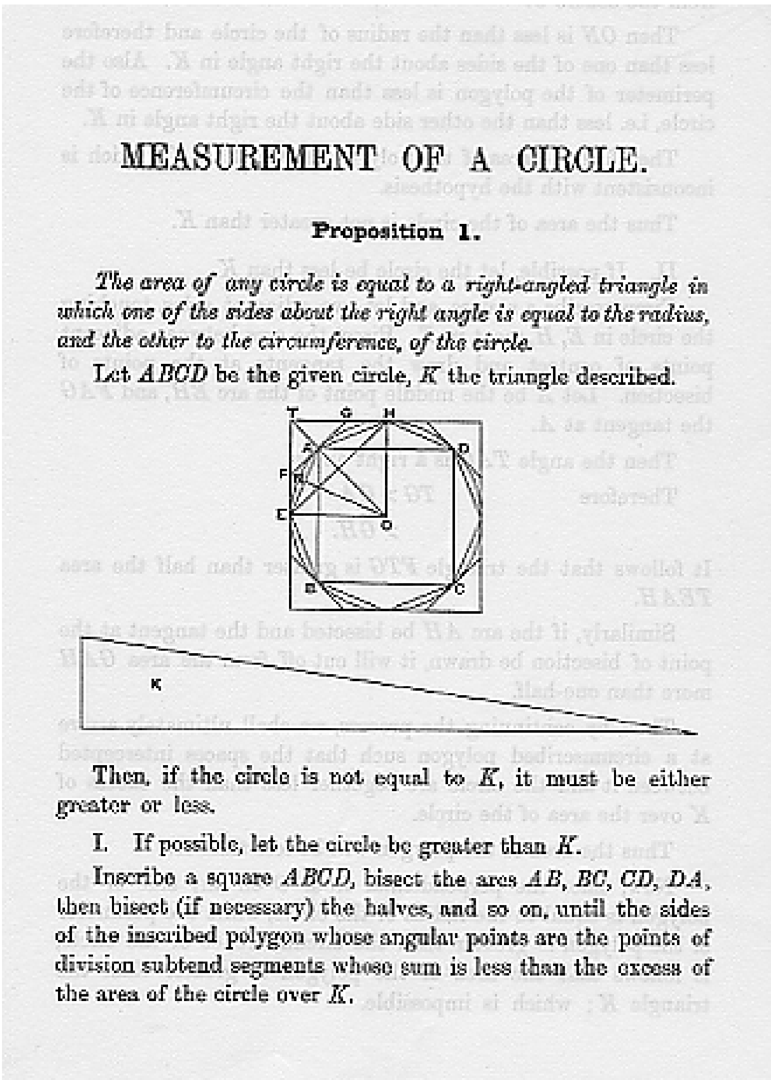
ARQUÍMEDES calculó también una aproximación para el valor de la razón de proporcionalidad entre el área del círculo y el cuadrado de su radio; o entre la longitud de la circunferencia correspondiente y su diámetro. Este valor es precisamente el que conocemos hoy en día como π. Veremos a continuación, alejándonos un poco de la demostración tal y como la llevó a cabo ARQUÍMEDES, cómo podemos obtener geométricamente una aproximación para π:

Consideremos la circunferencia de diámetro d cuya longitud sabemos calcular: $L = \pi\, d$ y el correspondiente cuadrado circunscrito, cuyo lado mide d (figura 5.4) Los lados del cuadrado son tangentes a la circunferencia, de modo que el lado del cuadrado mide d.

Es claro que el perímetro del cuadrado resulta mayor que la longitud de la circunferencia, así que tenemos la relación:

$$4\,d > \pi\, d \qquad \Longrightarrow \qquad 4 > \pi$$

Necesitaremos ahora una aproximación *por debajo* para π que podemos obtener de la misma manera, esta vez consideraremos,



MEASUREMENT OF A CIRCLE.

Proposition 1.

The area of any circle is equal to a right-angled triangle in which one of the sides about the right angle is equal to the radius, and the other to the circumference, of the circle.

Let *ABCD* be the given circle, *K* the triangle described.

Then, if the circle is not equal to *K*, it must be either greater or less.

I. If possible, let the circle be greater than *K*.

Inscribe a square *ABCD*, bisect the arcs *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, then bisect (if necessary) the halves, and so on, until the sides of the inscribed polygon whose angular points are the points of division subtend segments whose sum is less than the excess of the area of the circle over *K*.

Figura 5.3: El área del círculo es la misma que la del triángulo K (T. Heath: *The works of Archimedes*)

por comodidad en los cálculos, el hexágono inscrito en la circunferencia (figura 5.4).

Puesto que el lado del hexágono mide exáctamente lo mismo que el radio, su perímetro es $3\,d$. Como antes, la relación entre este valor y la longitud de la circunferencia será:

$$3d < \pi\, d \quad \Longrightarrow \quad 3 < \pi$$

Uniendo esto al resultado que obtuvimos antes para el cuadrado, podemos afirmar que el valor de π ha de estar comprendido entre 3 y 4.

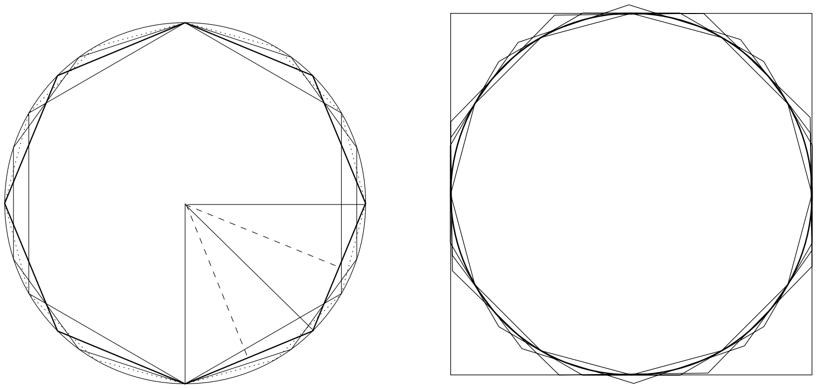


Figura 5.4: Polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia

Si en lugar de hexágonos tomásemos octógonos obtendríamos una aproximación más fina; y aún más si tomásemos decágonos; y así, sucesivamente. La aproximación hecha por ARQUÍMEDES consideraba el perímetro de polígonos de 12, 24, 48 y 96 lados, obteniendo una aproximación para π en el intervalo:

$$223/71 < \pi < 22/7,$$

que proporciona un valor aproximado de 3.1418. En el año 1400 MADHAVA en la India obtenía un valor para π de 3,1416; y en el siglo XV el matemático persa AL-KASHI encontraba una aproximación de 3,1415926535897932, probablemente calculando el perímetro de un polígono regular de nada menos que $3 \cdot 2^{28}$ lados.

Es intuitivamente claro que ningún polígono inscrito ni circunscrito llegará a coincidir con la circunferencia; de modo que, aunque podemos conseguir valores que se aproximan tanto como queramos, no es posible encontrar un valor exacto.

Podríamos considerar este método como el método *clásico* de cálculo de π. Sin embargo, no es el que actualmente se utiliza para continuar encontrando valores decimales de π, el cual involucra sumas infinitas y razones trigonométricas.

Este mismo método de aproximación mediante polígonos inscritos y circunscritos era utilizado por los griegos para aproximar el área del círculo. Sin embargo, de nuevo parece intuitivamente claro que podemos aproximarnos al valor del área tanto como queramos sin necesidad de considerar ambos tipos de polígonos -inscritos y circunscritos-. Si calculamos el área del cuadrado inscrito; y después del hexágono; y después del octógono, y así sucesivamente, podremos aproximar de la misma manera el area del círculo. ¿Por qué entonces era necesario para los matemáticos griegos aumentar la tarea mecánica del problema considerando también el área del cuadrado circunscrito?

Veremos antes de contestar a la pregunta que precisamente este método, prescindiendo de cualquier polígonos circunscrito, era uno de los más utilizados en China para encontrar el área del círculo: aproximadamente en el siglo III. Liu Hiu propone la siguiente fórmula para calcular la superficie de un círculo, que relaciona el diámetro d del círculo, y la longitud C, de la circunferencia correspondiente:

$$S = \frac{C}{2}\,\frac{d}{2}$$

Podemos comprobar con nuestros conocimientos actuales que la fórmula es efectivamente correcta:

$$S = \frac{\pi}{4}\,d^2 = \frac{\pi\,d}{2}\,\frac{d}{2}$$

Para argumentar su validez, Liu Hiu utiliza un método que involucra la idea intuitiva de *pasar al límite*, después de haber aproximado el área del círculo mediante la de una sucesión de polígonos inscritos que tengan, cada uno, el doble número de lados que el anterior).

Veamos en detalle cómo funciona este método:

Consideremos un polígono regular inscrito en la circunferencia (figura 5.4). Podemos obtener la superficie de cualquiera de estos polígonos multiplicando el perímetro por la apotema y dividiendo el resultado por 2. A medida que inscribimos polígonos de un mayor número de lados, vemos cómo la apotema se va aproximando cada vez más al radio; y cómo el perímetro de los polígonos va aproximándose cada vez más a la longitud de la circunferencia. Por eso, el área del polígono *tiende* al área del círculo cuando aumentamos el número de lados; y por eso también parece razonable, y de hecho es cierto, que la superficie del círculo se calcule de modo análogo a la de cualquier otro polígono regular, sustituyendo el perímetro por la longitud de la circunferencia y la apotema por el radio:

$$S = \frac{2\,\pi\,r\,r}{2} = \pi\,r^2$$

Sin embargo, un razonamiento de este tipo utilizado como demostración hubiera horrorizado a cualquiera de los matemáticos griegos clásicos y es importante comprender el porqué. Según venimos viendo a lo largo del capítulo, la concepción de la matemática en la Grecia clásica imponía un rigor de razonamiento lógico incompatible con la consideración del infinito, que no era posible definir en términos matemáticos. Sus demostraciones utilizaban el método de exhausción precisamente para esquivar este tipo de consideraciones, que eran admisibles únicamente como razonamientos heurísticos pero no como una demostración matemática. En este sentido, la naturaleza de la matemática griega y china es completamente diferente. También los filósofos chinos se preocparon por las paradojas que se derivaban de la división infinita de una cantidad finita, y de la posibilidad de considerar una magnitud finita como suma de otras *infinitamente pequeñas*. Sin embargo, los matemáticos chinos se ocupaban de problemas concretos a los que dar una solución práctica. No intentaban evitar el uso de algo “infinitamente pequeño” porque de este modo simplificaban enormemente sus cálculos. Para la filosofía taoista, desarrollada aproximadamente en el siglo V a.e.c., se probaba con el ejemplo, y no con el discurso; en las ciudades griegas, sin embargo, y aproximadamente en los mismos siglos, el discurso lógico era la base de la práctica científica.

La imagen intuitiva que se produce al concebir una figura como constituida de elementos de menor dimensión fue retomada explicitamente por los matemáticos del siglo XVII para evitar la complejidad del método de exhausción en la demostración de teoremas. Se abrió de nuevo la discusión filosófica acerca de el uso de cantidades indivisibles e infinitamente pequeñas, que habían sido excluidas en los razonamientos griegos, y en este contexto Bonaventura Cavalieri planteó el conocido como método de los indivisibles al que nos referíamos al comenzar el capítulo.

Capítulo 6

Arquímedes y Cavalieri: 1900 años de historia

Durante la Edad Media y casi hasta el siglo XVI los métodos utilizados para calcular áreas y volúmenes de figuras geométricas seguían los principios del razonamiento griego.

Al comenzar el capítulo anterior intriducíamos el método de CAVALIERI para el cálculo de áreas y volúmenes. Después de haber comprendido cuáles eran los problemas de formalismo involucrados en él, a continuación analizaremos más en detalle el significado y la utilización de este método. Para seguir el método de CAVALIERI podemos imaginar que una linea está formada por un número infinito de puntos; que una superficie está formada por infinitas lineas, y que un sólido tridimensional está formado por un número infinito de superficies planas. Para CAVALIERI, los "indivisibles" eran *lo que se obtenía al seccionar la figura* siguiendo unas pautas determinadas. Su método se formula de la siguiente manera:

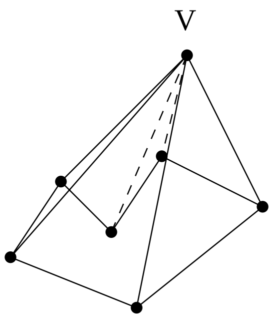
> Si dos sólidos tienen la misma altura y si las secciones hechas por planos paralelos a las bases y a la misma distancia están siempre en la misma proporción, entonces el volumen de los sólidos guarda también la misma proporción.

En particular, si las secciones resultan tener el mismo tamaño, entonces los dos sólidos tendrán el mismo volumen.

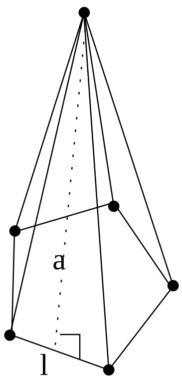
Imaginemos por ejemplo un mazo de naipes colocado sobre una mesa. Cualquier transformación que hagamos del mazo sin llegar a romperlo proporcionará una nueva figura tridimensional que sigue teniendo el mismo volumen.

6.1 Análisis de los indivisibles

Pirámides y conos:
Para construir una pirámide basta con considerar un punto V del espacio y unirlo con los vértices de un polígono cualquiera en un plano que no pase por V:



A partir de ahora, y para simplificar los cálculos, consideraremos el caso particular de pirámides que tengan como base un polígono regular cuyo vértice V esté sobre la vertical en el centro del polígono.



Puesto que todas las caras de una pirámide son triángulos, en este caso serán triángulos isósceles.

Con su método, Cavalieri proponía relacionar el área o el volumen de dos figuras, de modo que pudiera facilitarse el cálculo de tales magnitudes en el caso de que una de las figuras fuera complicada de manejar directamente. En consecuencia, no se trataba de un método para calcular directamente el volumen o el área de una única figura, sino que se establecía una correspondencia (biyectiva) entre los *indivisibles* de dos sólidos de la que se deducía la igualdad de tamaño. Generalmente era conocido el volumen de una de las dos figuras, y esto permitía conocer el de la segunda.

El método de Cavalieri es un excelente ejemplo para reflexionar acerca de la teoría matemática del continuo y de los cambios en el pensamiento matemático en el curso del tiempo. El uso de los indivisibles resultaba muy adecuado para encontrar áreas y volúmenes de figuras geométricas, pero planteaba problemas relacionados con la validez de su uso en relación con el tratamiento de *el contínuo* y estaba aún lejos de las definiciones adoptadas por los matemáticos del siglo XIX y que culminarían con la teoría del cálculo integral.

Utilicemos el principio de Cavalieri para encontrar una expresión del volumen de un cilindro de radio R y altura H. Consideraremos también un prisma de la misma altura H cuya base tenga como superficie $S = \pi R^2$, tal y como se indica en la figura 6.1.

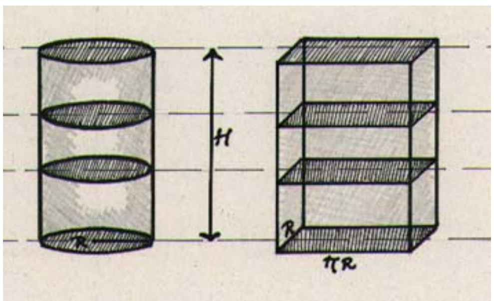


Figura 6.1: Las secciones del cilindro y el prisma tienen igual área.

Seccionando ambas figuras a la misma altura por un plano paralelo a la base se obtienen dos figuras (un disco y un rectángulo) que tienen igual área $S = \pi R^2$.

Siguiendo el método de los indivisibles, podemos concluir que el volumen del cilindro y el volumen del prisma coinciden:

$$\text{Volumen del cilindro} = \pi R^2 H$$

De este modo, hemos simplificado el cálculo del volumen limitado por una superficie curvada (el cilindro) igualándolo al el de una figura con todas sus caras planas (el prisma), mucho más fácil de manejar.

Algo similar podemos hacer para calcular el volumen de un cono de altura H y radio de la base R, comparándolo con el volumen de una pirámide cuya base sea un cuadrilátero de superficie $S = \pi R^2$ (figura 6.2).

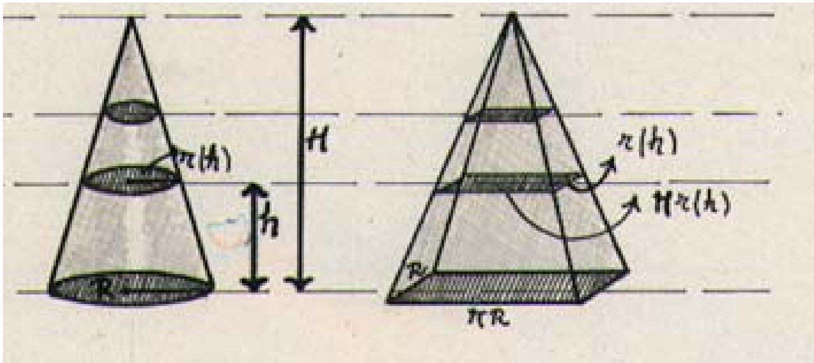


Figura 6.2: Las secciones del cono y la pirámide tienen igual área.

Conocido el volumen de la pirámide, $V = \frac{1}{3}\,\pi R^2 H$, podemos deducir el volumen del cono:

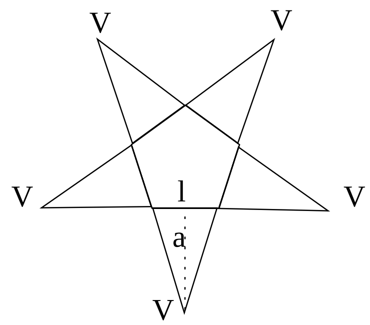
$$\text{Volumen del cono} = \frac{1}{3}\,\pi R^2 H$$

El principio de CAVALIERI funciona perfectamente para comparar el volumen de figuras de este tipo, pero su punto débil está en la consideración de “todas las secciones” de una figura. Aunque efectivamente *todas* las secciones de una figura puedan coincidir con *todas* las secciones de otra, no es posible concluir que la suma de secciones (áreas) constituyan un volumen: para obtener el volumen de un sólido sumando sus partes, necesariamente hemos de sumar partes que tengan un cierto volumen. Por lo tanto, cuando consideramos *secciones* de un sólido, hemos de tener en cuenta que han de tener un cierto grosor, si es que lo que queremos es obtener un volumen. De manera análoga, para el caso del cálculo de áreas, hemos de tener en cuenta que por muchas y muy juntas que estén, de la suma de lineas no resulta una superficie, estrictamente hablando. Analizaremos este punto en detalle a través de los ejemplos siguientes.

Consideremos el círculo C de la figura 6.3, cuyo radio mide R.

Si considerásemos sin el debido cuidado que el interior del círculo está formado por *muchísimas* líneas de longitud R tan

Área lateral de la pirámide

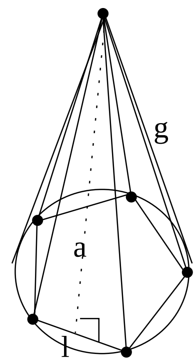


Al desarrollar sobre un plano una pirámide regular recta obtendremos tantos triángulos iguales como lados tenga el polígono de la base. El área de la superfice lateral será, en consecuencia, la suma de las áreas de esos triángulos:

$$S = n\,\frac{l \cdot a}{2}$$

Si la pirámide no fuese recta o no tuviese base regular las caras laterales ya no serían iguales, de modo que habría que calcular por separado el área de cada cara.

Área lateral del cono



Compararemos el cono con una pirámide. En el círculo de la base del cono inscribimos un polígono regular cualquiera y construimos una pirámide cuyo vértice coincida con el vértice del cono. Obtenemos así una pirámide inscrita en el cono. A medida que el número de lados de la base de la pirámide crece aumenta también el número de caras de la pirámide, de modo que el área lateral del cono será $S = \pi\, r\, g$.

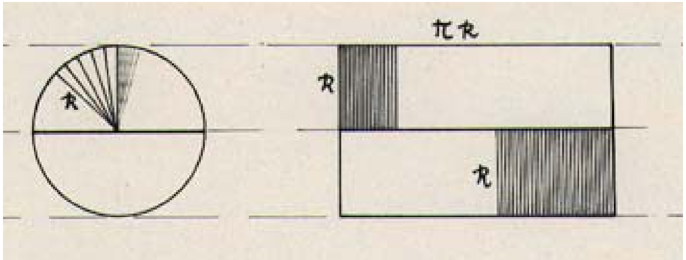


Figura 6.3: Aplicación inadecuada del principio de CAVALIERI: las secciones de ambas figuras no son paralelas.

cercanas como queramos, podríamos concluir erróneamente que sumando sus longitudes a lo largo de la circunferencia correspondiente obtendremos una expresión para la superficie del círculo, esto es, $S = 2\pi R^2$. Según esto el área de un círculo de radio R sería la misma que la de un rectángulo como el que aparece en la figura 6.3. Naturalmente estas afirmaciones son falsas, y el fallo en nuestro razonamiento ha sido no considerar que dos radios cualesquiera, por muy cerca que estén, coinciden en el centro del círculo y se separan en el borde de la circunferencia, dando lugar a un sector circular de superficie no despreciable.

Podríamos argumentar en favor del método de CAVALIERI que nos hemos descuidado en su aplicación, puesto que las sucesivas secciones que hemos considerado en cada una de las figuras no son paralelas.

Analicemos entonces el ejemplo que se ilustra en la figura 6.4. Nos interesa encontrar una expresión para calcular el área lateral del cono de altura H y radio de la base R, de modo que trataremos de construir una figura equivalente pero más sencilla de manejar. Siguiendo un razonamiento que utilice indivisibles, podríamos considerar desde la base del cono la longitud de las sucesivas circunferencias obtenidas al cortar por planos paralelos. El radio[1] $r(h)$ de cada una de estas circunferencias dependerá de la altura h a la que cortemos, de modo que su longitud será $L = 2\pi r(h)$. Además, como los radios sucesivos decrecen según la recta que determina una generatriz del cono, podríamos

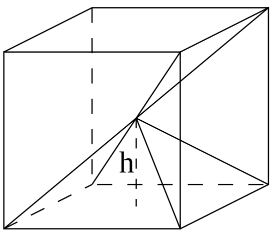
[1]Escribiremos $r(h)$ cuando queramos expresar que el radio varía según cuál sea la altura h de la sección, tal y como indica la figura 6.4. Por semejanza de triángulos se tiene que:

$$\frac{H}{R} = \frac{h}{r(h)}$$

De esta relación de proporcionalidad obtenemos que:

$$r(h) = \frac{Rh}{H}.$$

Volumen de la pirámide
Consideraremos en primer lugar el caso particular de un cubo. El cubo puede descomponerse en seis pirámides que tienen como vértice común el centro O del cubo y por base cada una de las seis caras.



Entonces es imediato comprobar que el volumen V de cada pirámide será $\frac{1}{6}$ del volumen del cubo. Si llamamos A al área de la base y H a la altura de la pirámide será:

$$V = \frac{1}{6}A \cdot 2h = \frac{1}{3}A \cdot h$$

Según veremos a continuación, esta misma relación se verifica para cualquier pirámide, que no tiene por qué ser recta ni de base regular.

concluir que el cono y el triángulo de la figura 6.4 tienen la misma superficie.

Según esto, la expresión algebraica que permitiría calcular el área lateral de un cono sería $S = \pi RH$, y esto es falso, pues el área lateral de un cono se calcula como $S = \pi Rg$, siendo g la generatriz del cono (en las notas al margen, desde el comienzo del capítulo se discute la relación entre la pirámide y el cono para el cálculo de área lateral y volumen).

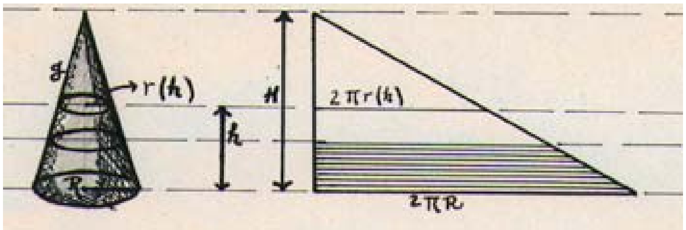


Figura 6.4: Hemos calculado –erroneamente– el área lateral del cono sumando la longitud de sucesivas circunferencias y multiplicando por la altura del cono. No es aplicable el principio de los indivisibles en particular porque el triángulo es una figura plana y el cono es una figura tridimensional.

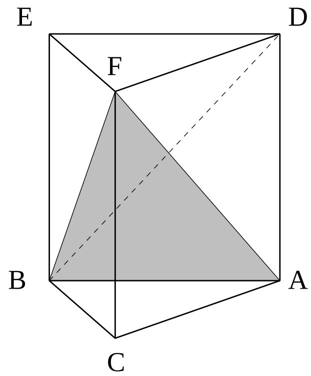
Veamos por qué falla el razonamiento que hemos hecho:

El triángulo que aparece dibujado en la figura 6.4 es un ejemplo de superficie *plana*. Sin embargo, parece evidente que limitar la consideración de superficies al caso de figuras geométricas planas es poco práctico: nos interesa también considerar como superficies otras figuras geométricas tridimensionales como un cono, un cilindro, una pirámide, o un toro. En general, podemos considerar una superficie en el espacio tridimensional como el resultado de doblar, enrollar o deformar sin llegar a romper una superficie plana (figura 6.5).

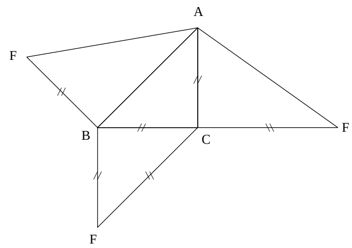
Al sumar las circunferencias que cortan transversalmente al cono de la manera que lo hemos hecho hemos dejado de considerar la torsión que hemos aplicado al pedazo de superficie plana para llegar a construir el cono. En particular, hemos dejado de considerar que dos secciones del cono, por muy cercanas que se encuentren dan lugar a un tronco de cono muy delgado, cuya cara superior está limitada por una circunferencia de menor longitud que la que limita su cara inferior.

El mismo razonamiento aplicado al cálculo de la superficie lateral de un cilindro, sin embargo, nos conduciría a una solución correcta, pues el área lateral del cilindro de radio R y altura H es la misma que la de un rectángulo de base $2\,\pi\,R$ y altura H, pero no se puede afirmar que este resultado se siga de la aplicación del método de CAVALIERI, que no es aplicable para comparar

Una de las pruebas más antiguas para encontrar el volumen de una pirámide es la que se encuentra en el libro XII de los *Elementos de Euclides*. Consiste en darse cuenta que un prisma de base triangular puede dividirse en tres pirámides del mismo tamaño.



Supongamos que tenemos tres desarrollos planos, tal y como aparece en la figura.



ABC es un triángulo rectángulo isósceles. Doblando dos de estos desarrollos de la misma manera y el tercero en sentido opuesto construimos tres tetraedros que unidos forman un prisma regular de base ABC.

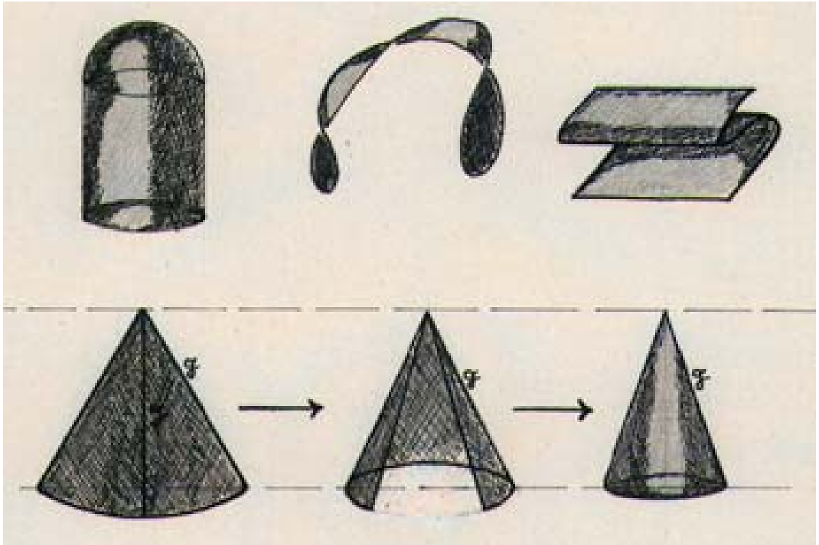


Figura 6.5: Ejemplos de superficies tridimensionales

superficies inmersas en un espacio tridimensional (el cilindro en este caso) con superficies planas (el desarrollo rectangular del cilindro).

Formalizar matemáticamente estas cuestiones exige inevitablemente de las herramientas del cálculo vectorial y no nos detendremos el ello, pero esto no evita que podamos sacar una consideración interesante: De la misma manera que el principio de CAVALIERI funciona adecuadamente para comparar el área de superficies planas, también funciona para comparar volúmenes de figuras tridimensionales. Superficies tridimensionales, sin embargo, no son comparables en general con superficies bidimensionales.

Volumen del cono
A partir del volumen de la pirámide calcularemos cuál es el volumen de un cono siguiendo un razonamiento similar al que utilizamos para encontrar el área lateral.
Si en el círculo de la base inscribimos un polígono cualquiera podemos considerar la pirámide inscrita en el cono. Al aumentar el número de lados del polígono, el volumen de la pirámide inscrita *tenderá* al volumen del cono. Según esto, el volumen V del cono se calcula del mismo modo que el volumen de la pirámide, esto es:

$$V = \frac{1}{3} \text{ área de la base} \cdot \text{altura}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Este tipo de problemas paradójicos que venimos describiendo fueron ampliamente utilizados por la iglesia del siglo XVII para atacar el método de los indivisibles. La iglesia era una gran oponente del uso de los indivisibles por razones más teológicas que matemáticas, que defendían que la división en partes de una figura estaba en contra de las concepciones católicas sobre la continuidad. En 1649 se rechazó públicamente el método de los indivisibles y se prohibió su uso en los colegios religiosos, considerándose que la única prueba aceptable aplicable al cálculo de áreas y volúmenes era el razonamiento por exhausción que se utilizaba en los *Elementos* de EUCLIDES. CAVALIERI estaba perfectamente familiarizado con las paradojas filosóficas que aparecían con la construcción de magnitudes continuas utilizando indivisibles, pero ante todas estas cuestiones él no reveló su opinión. Sostenía que su método era sólo un artefacto práctico para evitar el método de exhauscción.

Puede que la mayoría de los razonamientos que hemos seguido hasta aquí hayan resultado un poco difíciles. Sin embargo, familiarizarse con este tipo de problemas permitirá, sobre todo, comprender que el éxito de la aplicación adecuada de un razonamiento intuitivo es inseparable de un buen conocimiento de las ideas y conceptos que están involucrados en él. La confianza en la intuición en lo que a las técnicas matemáticas se refiere proviene de haber experimentado, una y otra vez, en qué casos funcionan y en qué casos no.

Ahora, en particular, estamos en condiciones de comprender por qué podemos utilizar algo tan intutitivo como el principio de los indivisibles cuando manejamos volúmenes de figuras elementales y por qué se incluye en algunos libros de texto de geometría elemental para su aplicación, exclusivamente, en el cálculo de volúmenes.

6.2 Dos cilindros, seis conos, tres esferas

Cavalieri conocía el trabajo de Arquímedes, que había sido traducido y difundido en Europa después de los siglos más duros de la Edad Oscura. La obra matemática de Arquímedes que se manejaba durante el Renacimiento respondía a las exigencias de rigor y razonamiento lógico de la que ya hemos hablado en tantas ocasiones y aunque los mismos matemáticos contemporáneos de Cavalieri sospechaban que algo similar al principio de los indivisibles habría sido utilizado por los geómetras de la antigua Grecia para descubrir teoremas, lo cierto es que en ninguna de sus obras se mencionaba nada similar.

Sin embargo, en el año 1906 se encontró un pequeño trabajo que Arquímedes envió a Eratóstenes en el cual le explicaba un método intuitivo con el cual podrían ser determinadas áreas y volúmenes. Su método tenía dos características: una mecánica y la otra geométrica. El aspecto mecánico estaba relacionado con la noción de equilibrio de un cuerpo, que le permitía determinar el centro de gravedad de figuras elementales; el aspecto geométrico interesante era que consideraba a los sólidos formados por secciones planas y paralelas. El mismo Arquímedes afirmaba:

> Hombres de mi tiempo y del futuro, y utilizando este método podrían encontrar otros teoremas que aún no me han venido a la mente.

Uno de los teoremas favoritos de Arquímedes acerca del cálculo de volúmenes de cuerpos elementales es el que se ilustra en la figura 6.6, y que permite encontrar una fórmula para calcular el volumen de la esfera. Consideremos, tal y como se indica en la figura, un cilindro de radio R y altura $H = R$ circunscrito a una semiesfera de radio R; y el cono con vértice en el centro de la esfera y base la del cilindro.

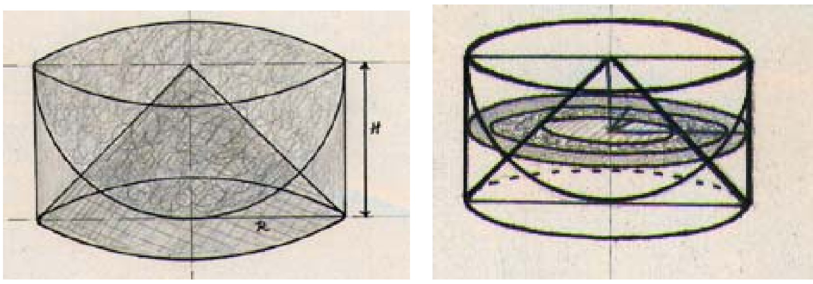
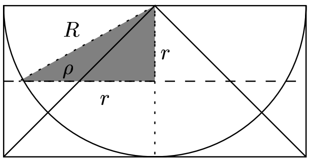


Figura 6.6: Se atribuye a Arquímedes el descubrimiento de que el volumen de la esfera de radio R es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Cualquier sección paralela a la base del cilindro corta a las tres figuras. Una aplicación del teorema de Pitágoras asegura que el área de la sección **en el cilindro** es la suma de las áreas de las secciones producidas **en el cono** y **en la esfera**. A la vista de la figura 6.6, podemos deducir así cuál es el volumen de la esfera:



La sección sobre el cilindro al cortar según una cierta altura h es un disco de radio R que incluye las secciones sobre la esfera (disco de radio ρ), y sobre el cono (disco de radio r).

Según el teorema de Pitágoras podemos asegurar que

$$R^2 = r^2 + \rho^2,$$

y además, sabemos que las superficies de cada una de las secciones sobre el cilindro, la semiesfera y el cono son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{Área de la sección del cilindro} &= \pi R^2 \\ \text{Área de la sección de la semiesfera} &= \pi \rho^2 \\ \text{Área de la sección del cono} &= \pi r^2 \end{aligned}$$

Entonces, la relación que obtuvimos a partir del teorema de Pitágoras significa que el área de la sección del cilindro se obtiene como suma de las áreas de las secciones de la semiesfera y del cono.

Como esto es válido para cada plano paralelo a la base, Arquímedes dedujo utilizando el método de exhausción de Eudoxo que esta relación se mantenía también para el volumen de los tres cuerpos, y por lo tanto:

$$\text{Vol. del cilindro} = \text{Vol. del cono} + \text{Vol. de la semiesfera}$$

Puesto que son conocidos el volumen del cilindro, $V = \pi R^3$, y el del cono, V $= \frac{1}{3}\,\pi R^3$, se tiene que:

$$\pi R^3 = \text{Volumen de la semiesfera} + \frac{1}{3}\,\pi R^3.$$

Ahora es ya inmediato que el volumen de la semiesfera es $\frac{2}{3}\,\pi R^3$ y el de la esfera será el doble:

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3}\,\pi R^3.$$

En su obra geométrica Arquímedes demostró importantes resultados relacionados con el cálculo de áreas y volúmenes. Muchos de ellos estaban relacionados con el diseño y la construcción de inventos geniales. Hasta entonces, e incluso en siglos posteriores, los matemáticos griegos habían desarrollado fundamentalmente cuestiones teóricas y no habían avanzado mucho en el terreno de la técnica. Los instrumentos y la maquinaria que se utilizaban eran, en todo caso, herramientas que amplificaban la fuerza humana, pero el conocimiento científico no se empleaba en perfeccionarlas. El trabajo llevado a cabo por Arquímedes fue una excepción a este hecho: construyó máquinas complejas en las que utilizaba, por ejemplo, los efectos del peso o de la fuerza. Pero máquinas, fuerza, peso o movimiento no eran, como lo son hoy en día, elementos en un mundo científico llamado física. El análisis de los cambios físicos (mecánica) desde las estructuras matemáticas y viceversa no llegarían hasta el siglo XVII, cuando de la simbiosis entre la mecánica y la matemática surgieron modelos muy adecuados para explicar el mundo natural y físico. Así, como una figura *nueva* en el Renacimiento apareció el ingeniero, que se ocupaba desde la práctica del diseño y de la construcción de máquinas; aparecieron numerosos tratados de ingeniería y se tradujeron los trabajos clásicos sobre máquinas. A finales del siglo XVI, con los trabajos, entre otros, de Galileo Galilei, la mecánica comenzó a traducirse al lenguje matemático y en este proceso nuevas y potentes técnicas abrieron otras vías de investigación matemática, en particular el análisis infinitesimal.

Capítulo 7

Forma y tamaño a través de las obras de Galileo

Nuestra historia comienza en los primeros años del siglo XVII. GALILEO se adhirió a la teoría de COPÉRNICO acerca del movimiento de la Tierra y se enfrentó a la censura eclesiástica, que consideraba dicha teoría como herética. A partir de entonces se ocupó de justificar sus argumentos, sentando las bases para una teoría física del movimiento. GALILEO es, para muchos autores, el fundador de la física moderna.

En el año 1630 ya tenía preparada su obra *Diálogo sobre los dos máximos sistemas Ptolemaico y Copernicano*, que fue impresa dos años después. La obra está escrita en forma de un hábil y sútil diálogo entre tres personajes que discuten, tras un análisis filosófico e histórico, acerca de los grandes principios de la *nueva física*. GALILEO fue llevado a juicio pocos años después; la obra se prohibió y él fue condenado a un arresto que le obligaba a no ser recibido y a no escribir sin permiso. A pesar de ello, en 1636 terminó su segunda obra fundamental: las *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. En ella aparecen los mismos personajes que en la obra anterior, esta vez discutiendo sobre el carácter de las matemáticas y la naturaleza. Las dos ciencias a las cuales se refiere en el título son las que atienden, respectivamente, a la estática y resistencia de materiales, y al movimiento uniforme y acelerado.

Estas dos obras de Galileo están estupendamente traducidas al castellano. Su lectura es cómoda y divertida (bueno, al menos a mi me lo parece). Ambas reflejan la personalidad polémica y de valor del genial autor y nos invitan a pensar sobre conocimientos físicos y matemáticos fundamentales

7.1 Crecimiento en área y crecimiento en volumen

En los fragmentos de la obra de GALILEO que leeremos en este capítulo se utilizan algunas propiedades geométricas fundamentales que se refieren a la relación entre la longitud, el área y el volumen de un sólido.

En general, según veremos en detalle a continuación, cuando un sólido aumenta su longitud el aumento de su área es mayor, y el de su volumen aún es todavía mayor que el de su área.

Tomemos como ejemplo qué sucede en el caso de un cubo cuyo lado mide 1 y crece hasta que su arista mide el doble. En la figura 7.1 aparece el desarrollo del cubo en sus estados inicial y final.

Es sencillo comprobar que su área no se ha duplicado, como la arista, sino que se ha multiplicado por 4. ¿Y cómo ha crecido el volumen? En la figura 7.2 apreciamos cómo el volumen se ha multiplicado por 8 al duplicar la longitud de la arista.

Figura 7.1: Un aumento de longitud en la arista del cubo produce un aumento cuadrático en el área.

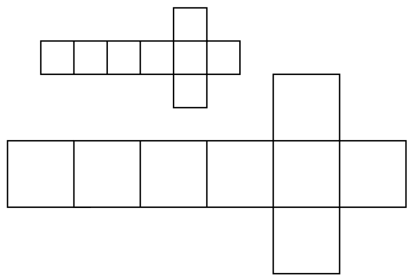
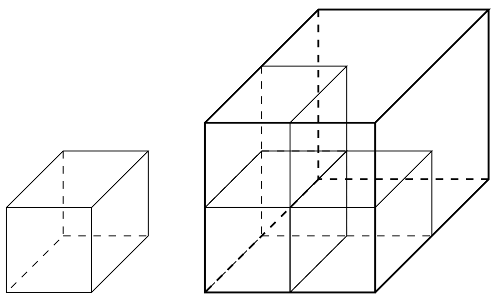


Figura 7.2: Un aumento de longitud en la arista del cubo produce un aumento cúbico en el volumen.



En general, estos factores de crecimento se mantienen para todas las figuras: a medida que aumenta la longitud de los bordes de una figura, su superficie aumenta según el cuadrado y su volumen según el cubo. Lo que ocurre en el caso del crecimiento de los seres vivos, por ejemplo, es que no todas sus dimensiones aumentan en la misma proporción, sino que existe también un cambio de forma a medida que se va creciendo. Importantes conceptos físicos como peso, densidad, gravedad o presión permiten formular modelos que explican la relación entre la forma y el tamaño de los seres y objetos que nos rodean. En particular, la relación existente entre forma y crecimiento a partir de patrones geométricos ha sido aplicada a lo largo de la historia en el arte y la arquitectura. Los artistas observaron que podían intuir ciertas regularidades en el crecimiento de diferentes criaturas, que iban manteniendo su apariencia aunque no todos sus miembros o partes crecieran en la misma proporción. Hoy en día, por ejemplo, la utilización de tales relaciones permite predecir cómo será pasados unos años la figura de una persona; o en arqueología se utiliza en la reconstrucción de los perfiles y cuerpos de nuestros antepasados en la evolución humana.

En el texto *Elvis, la pelvis* de Juan Luis Arsuaga sobre el hombre de neandertal, citado al final del capítulo se trabajan algunos aspectos interesantes de la relación existente entre forma, crecimiento y proporción.

En el siguiente fragmento de las *Consideraciones* de Galileo, *Salviati*, el portavoz de la razón, encargado de convencer al instruido aunque profano en la materia *Sagredo*, utiliza en sus argumentos algunos conceptos físicos como la masa, la energía, la resistencia al aplastamiento o la gravedad, que estamos acostumbrados a manejar y que guardan una estrecha relación con la geometría –forma y tamaño– de un cuerpo:

SALV. Y es que esto que he dicho acerca de las condiciones bajo las cuales un objeto puede sostenerse a si mismo, puede aplicarse a cualquier otro caso análogo. Así, si un tablón puede sostener la carga de diez tablones del mismo peso que el primero, una viga semejante a él no podrá, sin embargo, mantener el peso de diez que sean iguales a ella en peso. Tened la bondad de advertir, V.S. y el señor Simplicio, lo ciertas que son tales conclusiones, a pesar de que parezcan improbables a primera vista. Si se las desarrolla sólo un poco, deponen, sin embargo, los ropajes que las ocultaban para hacer, desnudas y sencillas, gozosa ostentación de sus secretos. ¿Quién no ve que un caballo que cae de una altura de tres o cuatro brazas se romperá los huesos, mientras que un perro que cae de la misma altura, y lo mismo podríamos decir de un gato que cae desde ocho o diez brazas, no se harán mal alguno, como tampoco un grillo que caiga de una torre o una hormiga que se precipite desde el orbe lunar? ¿Quién no ve que los niños salen ilesos de caídas en las que los viejos se romperían una pierna o la cabeza? Del mismo modo que los animales más pequeños son proporcionalmente más fuertes y robustos que los más grandes, así también se sostienen mejor los arbustos que son más pequeños. Tengo la impresión de que, a estas alturas, os daréis cuenta de que una encina de una altura de doscientos brazos no podrá sostener sus ramas, extendidas al modo de una de mediano tamaño, y que la naturaleza no podrá producir un caballo de magnitud equivalente a veinte caballos ni *un gigante diez veces más alto que un hombre normal a no ser milagrosamente o alterando no poco las proporciones de los miembros, especialmente las de los huesos, que tendrían que ser, en lo que respecta al resto del organismo, mucho más grandes de lo que normalmente son.*

El texto de Galileo sugiere considerar cómo se relacionan la forma y el tamaño de un cuerpo: la energía con la que llega al suelo un cuerpo aumenta a medida que aumenta su volumen, y una buena parte de esta energía tiene que ser absorbida por la superficie del cuerpo que llega al contacto con el suelo. El resultado es que cuando el volumen aumenta, también aumenta la importancia de la caída, aunque no aumente su velocidad.

7.2 Gigantes y árboles que llegan al cielo

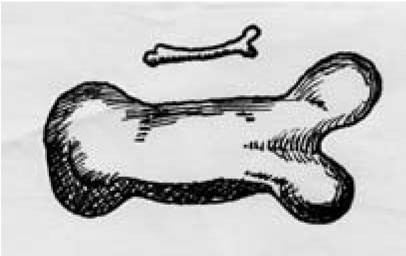
En el fragmento que leeremos a continuación Galileo sugiere explicaciones físicas para las limitaciones de tamaño, aplicables no sólo a los seres vivos sino también por ejemplo a las construcciones arquitectónicas o las montañas. Salviati ha demostrado algunas propiedades involucradas en la resistencia que oponen todos los cuerpos sólidos a la fractura y procede a comunicar a sus dos interlocutores la aplicación de tales propiedades:

SALV: De lo que se ha demostrado hasta el momento, como podéis ver, se infiere la posibiliad de poder, no sólo en el arte sino en la misma nauraleza, aumentar los mecanismos hasta dimensiones inmensas, de modo que sería imposible fabricar naves, palacios o templos enormes, de tal forma que sus remos, patios, vigas, cerrojos y, en suma, todas sus partes constituyentes, pudiesen sostenerse. Así, tampoco podría la naturaleza hacer árboles de un tamaño desmesurado, ya que sus ramas acabarían por venirse abajo bajo su propio peso. Sería imposible, igualmente, construir estrcuturas óseas de hombres, caballos u otros animales, que pudiesen mantenerse y realizar sus propios menesteres, a no ser que se utilizara un material más duro y resistente que el normal, en caso de que no se les agrandaran tales huesos de modo tan desproporcionado que la figura y el aspecto del animal en cuestión llegase a ser algo mostruosamente grande; lo cual, tal vez, intuyó nuestro sagaz Poeta cuando, describiendo un grandísimo gigante, decía:

> *Imposible reconocer su altura*
> *Tan desmesuradamente grande es su grosor.*

Para poner un breve ejemplo de lo que estoy diciendo, dibujemos la figura de un hueso alargado solamente tres veces más de lo *que era, pero habiendo aumentado su grosor en tal proporción que pudiese realizar en el animal grande la función que correspondería al hueso más pequeño en el animal también más pequeño.*

Por las figuras podéis ver qué desproporcionada es la figura del hueso agrandado. De aquí se deduce que quien quisiera mantener, en su inmenso gigante, las proporciones que se dan entre los miembros de un hombre normal, tendría o bien que encontrar un material mucho más duro y resistente para formar así los huesos, o bien que admitir una disminución de su potencia en relación con la de los hombres de estatura normal; de otro modo, si su altura creciese de manera desmesurada, acabaría derrumbándose por obra de su propio peso. Esto se ve, de modo complementario, cuando observamos cómo, al disminuir los cuerpos, no disminuye en la misma proporción su fuerza, sino que, más bien, se hacen más resistentes al ser más pequeños.



Por eso pienso que un perro pequeño podría llevar sobre sí dos o tres perros iguales a él, mientras que no creo que un caballo pudiese sostener ni siquiera un caballo de sus mismas medidas.

Veíamos en la sección anterior cómo el volumen aumenta mucho más rápidamente que la superficie a medida que un cuerpo crece. Con este aumento de volumen viene asociado un aumento de peso que habrá de ser soportado por su base. Así surge el concepto físico de *presión*, que no es más que una medida del peso en cada unidad de superficie. No todos los materiales soportan la misma presión, como conocemos a partir de nuestra experiencia cotidiana, sino que cada uno tiene su propia *resistencia al aplastamiento*. Conocer cuál es esta resistencia en los diferentes materiales de construcción es fundamental, por ejemplo, cuando se trata de construir edificios. De la misma manera, el tallo y las ramas de las plantas, los huesos de los animales y los nuestros propios tienen su particular resistencia al aplastamiento.

Apoyándonos en algunos principios básicos de la física y la geometría podemos comprobar que gigantes como los que aterran a los niños en los cuentos no pueden existir: Un gigante que sea, por ejemplo, veinte veces más grande que nosotros, habrá aumentado su peso original $20^3 = 8000$ veces su peso original. Eso significa que estaríamos hablando de una criatura que midiese aproximadamente 40 metros y pesase nada menos que 720.000 kilos.

El libro *Tamaño y vida* ([13]) es un libro muy bello para profundizar en la relación entre la forma y el tamaño de los seres vivos

Teniendo en cuenta que sus pies medirían aproximadamente 8 metros de largo y 3 metros de ancho obtendríamos una presión de $\frac{720.000}{24} = 30.000$ kilos por cada metro cuadrado, que supera bastante la resistencia de nuestros huesos; de modo que si uno pretende creer en gigantes, debe pensar en unos huesos que fuesen de un material mucho más resistente pues en otro caso, antes de llegar a crecer tanto, se habría deformado bajo su propio peso.

Algo similar sucede con la limitación existente para las plantas, que también tienen limitado su crecimiento. Hablaremos a continuación de otro ejemplo fantástico:

La palabra Oráculo se refiere a un lugar, una figura o persona capaz de responder y dar consejo a preguntas de los mortales acerca del futuro. Un famoso Oráculo era la Encina Parlante de Dodona en la antigua Grecia.

> La encina se alzaba en medio de un espeso bosque y tenía una altura de 40 metros, con ramas que se extendían sobre 5000 metros cuadrados. El consultante permanecía de pie bajo el árbol y gritaba su pregunta hacia las ramas, que le respondían con el susurro de sus hojas. A cambio de un pago razonable, los sacerdotes de servicio interpretaban la respuesta.
>
> Michael Page: *Enciclopedia de las cosas que nunca existieron*

De la misma manera que en el caso de nuestros huesos, la parte inferior del tronco de la encina habría de soportar toda la presión del tronco y sus ramas. En cuanto superase aproximadamente los 350 kg$/m^2$ la parte inferior del comenzaría a quebrarse, y mucho antes se quebrarían las ramas, que en su posición horizontal para abarcar cinco kilómetros cuadrados deberían alcanzar aproximadamente la misma longitud que el tronco. (¡Sólo el tronco de una encina de 40 m de altura y un tronco de 1 m de diámetro podría pesar unas 30 toneladas!)

Continuando con el texto de Galileo, Simplicio plantea a continuación la siguiente duda:

SIMP. Si están así las cosas, me plantean graves problemas las moles inmensas que vemos en los peces, como es el caso de la ballena, que, según creo, son diez veces más grandes que un elefante y, sin embargo, se sostienen.

SALV. Vuestra objeción, señor Simplicio, me sugiere un aspecto que me ha pasado inadvertido y que haría posible que los gigantes y otros animales enormes pudiesen mantenerse y moverse con tanta facilidad como los más pequeños. Esto se produciría si no sólo se añadiese fuerza a los huesos y al resto de las partes, cuyo oficio consiste en sostener tanto su propio peso como el que les toque sostener, sino que, permaneciendo la estructura *de los huesos con las mismas proporciones, del mismo modo, por no decir más fácilmente, se mantendrían tales esqueletos con tal de que se disminuyera, proporcionalmente, el peso del material de los huesos mismos o de la carne o cualquier otra materia que sobre los huesos se apoye. Es de este segundo artificio del que se ha valido la naturaleza en la formación de los peces, haciendo sus huesos y músculos no sólo muy ligeros, sino carentes de peso.*

SIMP. Veo con claridad hacia donde se dirige vuestra argumentación. Queréis decir que, al ser el lugar en donde viven los peces el agua, la cual, debido a su densidad o, como dicen otros, a causa de su pesantez disminuye el peso de los cuerpos que en ella se sumergen. Por tal razón la materia de la que están hechos los peces, al no pesar, puede ser sostenida por los huesos sin que estos se resientan. Pero esto no es suficiente, puesto que aunque el resto de la sustancia del pez no pese, pesa, sin embargo, la materia de los huesos, como es obvio. Por eso, ¿quién afirmará que una costilla de ballena, que tiene una magnitud como la de una viga, no pesa muchísimo, de modo que si cae al agua se va al fondo? Estas moles, por tanto, parece que no podrían sostenerse a sí mismas.

SALV. Vuestras objeciones son muy agudas, pero como respuesta a vuestra dificultad: ¿no habéis observado que los peces se mantienen firmes a su arbitrio, inmóviles bajo el agua sin descender hacia el fondo o elevarse hacia la superficie, sin ejecutar ninguna fuerza nadando?

SIMP. Es ésta una observación al alcance de todos.

SALV. El que los peces puedan permanecer firmes, inmóviles, bajo el agua es un argumento muy concluyente en el sentido de que el material de las partes de sus cuerpos corresponde al peso específico del agua, de modo que si tienen partes más pesadas que el agua, es absolutamente necesario que tengan otras tantas menos pesadas, con el fin de que se pueda producir el equilibrio.

Por eso, si los huesos son más pesados, es necesario que los músculos, o cualesquiera materia que constituyan el cuerpo, sean más ligeras, oponiéndose así con su ligereza al peso de los huesos, de forma que en los animales acuáticos sucederá precisamente lo contrario de lo que ocurre en los animales de tierra: en éstos, es tarea de los huesos sostener tanto su propio peso como el de la carne que los recubre, mientras que, en aquéllos, es la carne la que sostiene no sólo su propia pesantez, sino la de los huesos también. Resolvemos así la perplejidad ante el hecho de que puedan darse en el agua animales vastísimos, cosa que no ocurre sobre la tierra; esto es, en el aire.

SIMP. Me habéis convencido; lo único que quiero añadir es que éstos que nosotros denominamos animales terrestres, con *mayor razón deberían llamarse aéreos, ya que realmente es en el aire donde viven, por el aire están rodeados y aire es lo que respiran.*

SAGR. Me complace la manera de razonar del señor Simplicio, tanto su objeción como la solución que ha dado. Puedo entender ahora con facilidad cómo uno de estos peces enormes, arrojado en tierra, tal vez no se podría mantener durante mucho tiempo, sino que resquebrajándose las ligazones de sus huesos, toda su masa se vendría abajo.

SALV. Es eso lo que me inclino a pensar, por el momento; y aproximadamente pienso lo mismo en lo que se refiere al caso de un gran navío, el cual, cuando flota en el mar, no se derrumba bajo el peso y la carga de tantas mercancías y armamentos, mientras que en tierra firme, circundado por el aire, probablemente se derrumbaría.

7.3 El alargamiento de un cilindro

Una de las figuras geométricas tridimensionales con la que nos encontramos más a menudo es el cilindro. Desde un punto de vista de razonamiento matemático, el interés por encontrar propiedades geométricas aplicables al cilindro queda reflejado en numerosas obras de los matemáticos griegos. Por ahora, bastará con que recordemos algunas propiedades muy sencillas acerca de la geometría del cilindro que nos permitirán continuar con la lectura de otro fragmento de las *consideraciones* de Galileo.

Nuestra experiencia cotidiana al manejar recipientes con forma cilíndrica nos garantiza que cilindros de diferentes dimensiones pueden perfectamente tener la misma capacidad, es decir, pueden contener el mismo volumen. De manera general, podemos decir que un cilindro cualquiera podemos alargarlo y estrecharlo (y análogamente achatarlo y ensanchar sus bases) sin que varíe su volumen. La cuestión sobre la que nos interesa profundizar ahora es qué ocurre con la superficie del cilindro cuando lo alargamos, que traducido a efectos de construcción, implica pensar si necesitaremos la misma cantidad de material para construir dos cilindros que tengan distintas dimensiones pero igual volumen.

En el fragmento que leeremos a continuación, Galileo hace discutir a sus personajes sobre la relación entre una ciencia cualitativa aplicable a la realidad sensible y las matemáticas, en particular, sobre la aplicación de la geometría a la naturaleza. Salvati se ocupará de probar matemáticamente cómo un cilindro, con el mismo volumen que otro dado, va aumentando su superficie a medida que se va transformando en otro más largo y estrecho, algo que era conocido desde la antigüedad:

SIMP. Yo me encuentro totalmente confundido y veo serias dificultades tanto en un campo como en el otro; y de modo especial en éste en el que nos habéis colocado, porque, según vuestro criterio, una onza de oro podría rarificarse y dilatarse hasta adquirir un tamaño superior al de la misma tierra. Por otro lado, toda la tierra podría condenarse y reducirse a un volumen inferior a una nuez, cosa que me niego a creer y que me parece que ni siquiera vos créeis. Como, por otra parte, las consideraciones y demostraciones que nos habéis presentado son cosas matemáticas, abstractas y separadas de la materia sensible, me parece que, aplicadas a las sustancias físicas y materiales, tampoco habrían de conformarse a vuestros principios.

SALV. Que veáis lo invisible es algo que ni yo sabría hacer ni pienso que lo pidáis. Pero en lo que atañe a lo que está a la altura de nuestros sentidos, y ya que habéis nombrado el oro, ¿no veis, acaso, que es susceptible de extender inmensamente sus partes? No sé si habéis tenido la ocasión de ver cómo los artesanos hacen alambre del oro, que no es realmente oro más que en la superficie, ya que el interior es de plata. Veamos cómo es el procedimiento: toman un cilindro o, si queréis, una varilla de plata de una longitud aproximada de medio brazo, y con un grosor de tres o cuatro veces el dedo pulgar. La doran con hojas de oro batido, que, como sabéis, son tan sutiles que flotan casi en el aire, y de tales hojas superponen no más de ocho o diez. Una vez dorado el cilindro, comienzan a tirar de él con una fuerza enorme, haciéndolo pasar por los agujeros de la hilera; operación que repiten muchísimas veces, haciéndolo pasar por agujeros cada vez más estrechos, de modo que, después de que lo hayan pasado muchas veces, queda reducido a algo tan fino como el cabello de una mujer, si no más fino. A pesar de todo, en la superficie, sigue estando dorado. Dejo ahora a vuestra consideración, hasta qué punto de mínimo espesor se haya reducido la sustancia del oro.

SIMP. Yo no veo que de esta operación se siga un adelgazamiento de la materia del oro tal que resulten aquellas maravillas de las que hablábais. Porque, en primer lugar, el dorado inicial era de diez hojas de oro, cosa que representa ya un grosor notable. En segundo lugar, porque si bien es verdad que la plata estirada y hecha más fina crece en longitud, no es menos cierto que disminuye tanto en anchura que, compensando una dimensión con otra, no aumenta de tal modo la superficie como para que sea necesario reducir el oro a una finura superior a la de las hojas empleadas en un principio, al revestir la plata de oro.

Os engañáis con toda seguridad, señor Simplicio, porque el aumento de la superficie es directamente proporcional a la raiz cuadrada del alargamiento, como podría demostraros geométrica-

mente.

Por lo que a mi se refiere, y haciéndolo extensivo al señor Simplicio, os rogaría que nos diéseis tal demostración, si es que pensáis que podemos comprenderla.

La demostración que expone Galileo resulta más compleja que la que proponemos aquí. Nosotros utilizamos con toda libertad las fórmulas de cálculo a las que estamos habituados, pero eso es algo que Galileo no podía hacer.

A continuación, Salviati expone su demostración, para la que parte de la consideración de dos cilindros de igual volumen pero bases y alturas diferentes que corresponderían al cilindro grande de plata y al larguísimo hilo estirado. La proporción entre las áreas de esos dos cilindros nos da una medida del aumento de la superficie, de modo que lo que vamos a probar es precisamente que las superficies de esos dos cilindros iguales en volumen (sin tener en cuenta sus bases), están entre sí en una proporción igual a la raiz cuadrada de la proporción de sus longitudes.

Consideremos dos cilindros C_1 y C_2 de distinta altura y base pero iguales en volumen y escribimos para cada uno de ellos la correspondiente fórmula que nos permite calcular su volumen:

$$\text{Volumen Cilindro 1} = \pi r_1^2 h_1$$

$$\text{Volumen Cilindro 2} = \pi r_2^2 h_2$$

Ahora, como esos dos volúmenes hemos supuesto que son iguales resulta que:

$$\pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2$$

De donde obtenemos la proporción siguiente:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{h_2}{h_1}$$

Ya tenemos un primer resultado interesante para el problema que nos ocupa: que en caso de cilindros del mismo volumen, sus bases (el área de la base es πr^2) están en proporción inversa a sus alturas.

$$\frac{\text{Superfcie lateral cilindro 1}}{\text{Superfcie lateral cilindro 2}} = \frac{2\pi r_1 h_1}{2\pi r_2 h_2}$$

Si elevamos ambos términos al cuadrado podemos utilizar la última relacion que obtuvimos para los radios r_1 y r_2, de modo que:

$$\frac{\text{Superficie cilindro } 1^2}{\text{Superficie cilindro } 2^2} = \frac{r_1^2 h_1^2}{r_2^2 h_2^2} = \frac{h_2 h_1^2}{h_1 h_2^2} = \frac{h_1}{h_2}$$

Y de aquí obtenemos inmediatamente el resultado que nos interesa, que es:

$$\frac{\text{Superficie cilindro 1}}{\text{Superficie cilindro 2}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}$$

Terminada la demostración, Salviati concluye su discurso:

SALV. Si aplicamos ahora a nuestro caso lo que acabamos de demostrar, suponiendo que el cilindro de plata que se había dorado cuando no tenía más de medio brazo de longitud y un grosor no mayor de tres o cuatro veces el dedo pulgar, tras haberlo adelgazado hasta hacerlo tan fino como un cabello, se haya alargado hasta alcanzar la longitud de veintemil brazos (sería incluso todavía más largo), nos encontramos con que su superficie ha llegado a ser doscientas veces más grande de lo que era. Se sigue de aquí que aquellas hojas de oro, que se superpusieron en número de diez, se extienden en una superficie doscientas veces mayor, de tal forma que el oro que recubre la superficie de tales brazas de hilo tiene un espesor no mayor que la vigésima parte de una hoja ordinaria de oro batido. Considerad ahora cuán tenue ha de ser y si es posible concebirla sin una inmensa extensión de sus partes y preguntaos, igualmente, si no nos encontramos delante de una experiencia que nos hace suponer que los cuerpos físicos están compuestos de infinitos indivisibles.

Epílogo

Desde un punto de vista histórico, las primeras nociones metrológicas del hombre fueron antropométricas: se utilizaban como unidades de medida partes del cuerpo: palmos, brazos, etc. También crearon unidades de medición basadas en su trabajo y, en general, en su actividad cotidiana y sus necesidades. Para algunos pueblos que habitan en el desierto, por ejemplo, algo está *a la vista desde la grupa de un camello*; en nuestra cultura, utilizamos expresiones del tipo *algo está a tiro de piedra*; y aún en los pueblos de nuestro alrededor podemos encontrar arrobas, celemines, varas, leguas, millas, jornales, etc. que pueden compartir el nombre en dos lugares diferentes pero no su valor.

La ideología que promovió la Revolución Francesa jugó un importante papel en el desarrollo de los sistemas de medida tradicionales: su objetivo era *acabar con* los sistemas de medida tradicionales (hay quien habla también de *unificar*, eso depende del punto de vista de cada uno), que resultaban ser una expresión del sistema feudal con el que se estaba completamente en desacuerdo: la tierra se medía según la producción o los jornales de trabajo, y eran los señores feudales quienes ajustaban las unidades de medida a sus propios intereses. Todo lo relacionado con la metrología hasta entonces resultaba defectuoso, práctica e ideológicamente, para los intelectuales de la Revolución. Así surgió el interés por encontrar una medida *objetiva*, que no cambiara en el curso de los siglos ni fuera diferente en cada pueblo. Decidieron tomar como unidad de medida de longitud, única *para todos los pueblos y para todos los tiempos* nada menos que una fracción del meridiano terrestre. Y así nació el metro.

Utilizar la geometría para medir longitudes, áreas y volúmenes tal y como hemos venido haciendo en este curso está, en la mayoría de las ocasiones, mucho más allá de nuestra actividad cotidiana. Los usos de diferentes unidades de medidas tienen, hoy en día, más relación con la historia social y tradición popular de una época que con las matemáticas. Pero las matemáticas también forman parte de la historia social y de las tradiciones y además, una delimitación estricta es innecesaria. Una conclusión importante, al menos para nosotros, es que es poco interesante, (o incluso algo peor) pensar la enseñanza de las matemáticas desde la utilidad en un sentido popular: las matemáticas que necesitamos para salir a la calle y *pasar el día* son escasas y simples. La cuestión es que detrás de ese *pasar el día* hay muchas, muchas, aplicaciones matemáticas de alto nivel y hay, además, el placer de pensar más allá de las aplicaciones. Tanto unas como otras pueden encontrar justificiación en si mismas. Las matemáticas, no sólo las de *pasar el día*, podrían pasar así a formar parte de la vida cotidiana.

Bibliografía

[1] Brown, L. (1979): The story of maps. Dover, New York. (Edición original del año 1949).

[2] Castelnuovo, E. (1981): La Geometría. Editorial Ketres, Barcelona.

[3] Deulofeu, J. (2001): Una recreación matemática. Historias, juegos y problemas. Planeta, Barcelona.

[4] Galilei, G. (1994): Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo Ptolemaico y Copernicano. Alianza, Madrid. (Edición original del año 1632).

[5] Galilei, G. (1976): Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias. Editorial Nacional, Madrid (Edición original del año

[6] Garfunkel, S. (Ed.) (1999): Las matemáticas en la vida cotidiana. Adison Wesley Iberoamericana, Madrid.

[7] Gheverghese, G. (1996): La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas. Pirámide, Madrid (Edición original en inglés del año 1991).

[8] Kula, W. (1980): Las medidas y los hombres. Siglo XXI, Madrid.

[9] Lippincott, K. (2000): El tiempo a través del tiempo. Grijalbo, Mondadori, Barcelona. (Edición original en inglés del año 1999).

[10] LLedó, J. (1999): Calendarios y medidas del tiempo. Editorial Acento, colección Flash, Madrid.

[11] Mankievick, R. (2000): Historia de las matemáticas: del cálculo al caos. Paidós, Barcelona

[12] Martzloff, J.C. (1997): A history of chinese Mathematics. Springer, Berlín. (Edición original en francés de 1987).

[13] McMahon, T. y Bonner, J.T. (1986): Tamaño y vida. Labor, colección Prensa Científica, Barcelona. (Edición original en inglés de 1983)

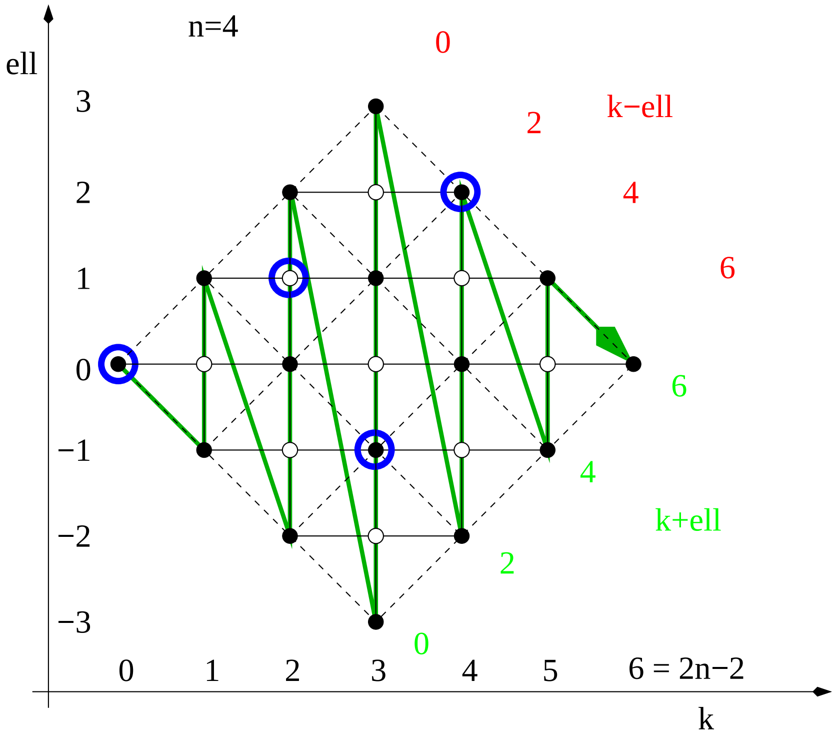
[14] Morrison, P. (1984): Potencias de diez. labor, colección Prensa Científica, Barcelona.

[15] Sobel, D. (1998): Longitud. Debate, col. Pequeña gran historia, Madrid (Edición original en inglés de 1995)

[16] Vicente, M.I. (1993): Instrumentos matemáticos del siglo XVI. En: *Investigación y Ciencia*, núm. 207.

El tablero de Yolanda

Este programa enumera las configuraciones de reinas en un tablero como el propuesto por Yolanda. Como hay muchas más diagonales que líneas horizontales y verticales, conviene girar el tablero por 90°, como se muestra en la figura para el caso particular de $n = 4$ casillas originales:



La idea del algoritmo de enumeración es la siguiente: Recorremos el tablero empezando por $(k, \ell) = (0, 0)$, luego por $(k, \ell) = (1, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, luego $(2, -2), \ldots, (2, 2)$ etc; siguiendo la flecha verde en el dibujo.

A lo largo del algoritmo, mantenemos cuatro "arrays" de variables que cuentan cuántas reinas están en las filas, columnas y diagonales: uno para los valores de k, otro para los de ℓ, otro para los de $k + \ell$, y el último para los de $k - \ell$. Por ejemplo, en la configuración de la figura, estos arrays toman los valores siguientes:

en el valor de k	0	1	2	3	4	5	6
hay cuántas reinas	1	0	1	1	1	0	0

en el valor de ℓ	-3	-2	-1	0	1	2	3
hay cuántas reinas	0	0	1	1	1	1	0

en el valor de $k+\ell$	0	1	2	3	4	5	6
hay cuántas reinas	1	0	1	1	0	0	1

en el valor de $k-\ell$	0	1	2	3	4	5	6
hay cuántas reinas	1	1	1	0	1	0	0

(En el programa, tendremos que sumar $n-1$ a los índices del array para ℓ para que estén en $[0, 2n-2]$.)

Al principio, la *posición actual* es el lugar $(k, \ell) = (0, 0)$. Colocamos allí una reina, e *incrementamos* la posición actual (es decir, pasamos a la posición siguiente siguiendo la flecha verde en el dibujo). En cuanto haya un sitio que no esté atacado por ninguna reina, colocamos allí una, actualizamos los arrays, e iteramos. Si llegamos hasta el final del tablero sin haber podido colocar ninguna reina, retrocedemos quitando la última reina que pusimos.

Primero inicializaremos los datos:

```
#include <Array.h>
#include <Matrix.h>

using namespace polymake;

Array<int> k, ell, k_plus_ell, k_minus_ell;
Matrix<bool> board;
int n(0), n_queens(0), max_n_queens(0), config_count(0);
bool bprint(false), max_given(false);
```

Luego necesitamos dos subrutinas para colocar y quitar reinas. En estas subrutinas, se actualizarán los arrays.

```
void put_queen (int k, int ell)
{
     // k \in [0,...,2n-2]
     // ell \in [-n+1, ..., n-1]
   k_array[k]++;
```

```
    ell_array[ell+n-1]++;
    k_plus_ell_array[k+ell]++;
    k_minus_ell_array[k-ell]++;
    board(k-ell, k+ell) = true;
    n_queens++;
}

void delete_queen (int k, int ell)
{
      // k \in [0,...,2n-2]
      // ell \in [-n+1, ..., n-1]
    k_array[k]--;
    ell_array[ell+n-1]--;
    k_plus_ell_array[k+ell]--;
    k_minus_ell_array[k-ell]--;
    board(k-ell, k+ell) = false;
    n_queens--;
}
```

La expresión `k_array[k]++` quiere decir que se debe incrementar ("++") el valor `k_array[k]`, o sea, el entero guardado en la posición `k` del array `k[]`. Nota que decimos `ell_array[ell+n-1]` en vez de `ell_array[ell]`, ya que ℓ toma valores en $[-n+1, ..., n-1]$.

También hay una rutina para imprimir el tablero, que está guardado en la matriz `board`:

```
void print_board (void)
{
    for (int i=0; i < 2*n-1; ++i) {
        int j(0);
        if (i%2) {    // alfiles
            j = 1;
            cout << "  ";
        } else j = 0;
        while (j < 2*n-1) {
            if (board(j, i))
                cout << "O  ";
```

```
      else cout << ".  ";
      j += 2;
    }
    cout << endl;
  }
  cout << endl;
}
```

El cambio de coordenadas `board(j, i)` hace que, al imprimirlo, el tablero sale otra vez girado como estamos acostumbrados.

El último ingrediente es una función `increment_k_ell`, que *incrementa* los contadores k y ℓ. La idea es que dado un valor concreto de (k, ℓ), esta rutina debe asignar las coordenadas del siguiente punto del tablero en orden a (k, ℓ). La rutina consiste de varias subrutinas para distribuir mejor las tareas:

```
int max_ell (int k)
{
  if (k < n-1)
    return k;
  else return 2*n-2-k;
}
```

Esta rutina devuelve el máximo valor que puede tomar ℓ en la columna k.

```
bool increment_k (int &k, int &ell)
{
  if (k < 2*n-2) {        // la columna vale todavía
    k++;
    ell = -max_ell(k);
    return true;
  } else return false;
}
```

Esta rutina incrementa el contador k y asigna el mínimo valor posible a ℓ.

```
bool increment_k_ell (int &k, int &ell)
{
```

```
   if (k_array[k]) {                // si ya hay reina en la columna k,
      if (!increment_k(k, ell))     // pasar a la siguiente columna
         return false;              // a no ser que no haya más
   } else if (ell < max_ell(k))
      ell++;                       // incrementar fila ell
   else if (!increment_k(k, ell)) // a no ser que ya estamos al final
      return false;                // entonces intentamos incrementar la columna
   return true;
}
```

Aquí ya hemos metido una optimización: Si en la columna k ya hay una reina, no hace falta recorrerla entera, sino que ya podemos saltar a la siguiente. Esta optimización es la razón para girar el tablero como lo hemos hecho.

Cuando hemos llegado al último punto $(k, \ell) = (2n - 2, 0)$ del tablero, la rutina devuelve `false`.

El primer paso del algoritmo consiste en colocar una reina en el punto $(k, \ell) = (0, 0)$. En el paso general, llama a la función `find_next(k,ell)`, que veremos con un poco más de detalle:

```
bool find_next (int _k, int _ell)
{
   int k(_k), ell(_ell);

   while (k_array[k] ||
          ell_array[ell+n-1] ||
          ( !((k+ell) % 2) && k_plus_ell_array[k + ell]) ||
          ( !((k-ell) % 2) && k_minus_ell_array[k - ell]) ) {
      if (!increment_k_ell(k, ell)) {
         return false;
      }
   }
```

Hasta ahora, lo que hace la función es copiar los valores k y ℓ con los que fue llamada a nuevas variables k y ℓ. Mientras que la casilla (k, ℓ) esté atacada por alguna reina, lo cual se refleja en que uno de los cuatro valores de los arrays `k_array`, `ell_array`, `k_plus_ell_array` y `k_minus_ell_array` es “verdadero” (el operador `||` es el “ó” booleano), los contadores (k, ℓ) se incrementan según dice la flecha verde. La única excepción es cuando ya estamos al final $(2n-2, 0)$ del tablero, porque entonces la función `increment_k_ell` devolverá `false`; la expresión `!increment_k_ell(k, ell)` será verdadera porque “!” es la negación lógica en C; y acabaremos la función `find_next` devolviendo `false`.

Además, sólo miramos los arrays `k_plus_ell_array` y `k_minus_ell_array` si $k+\ell$ resp. $k-\ell$ es par (esto es el significado del código `!((k+ell) % 2)`). De esta manera distinguimos entre “alfiles” y “reinas”.

Resumiendo, si llegamos más allá del bucle `while`, es porque hemos encontrado una casilla no atacada por ninguna reina. Proseguimos:

```
put_queen (k, ell);
```

Colocamos una reina en la posición actual.

```
if (n_queens == max_n_queens) {
   if (bprint)
      print_board();
   config_count++;
   delete_queen(k, ell);
   if (!increment_k_ell(k, ell))
      return false;
   return find_next(k, ell);
}
```

Si el número de reinas es el que queremos (por ejemplo 5), y si queremos imprimir el tablero (`bprint=true`), lo imprimimos; en todo caso, contabilizamos la configuración, y quitamos la reina. A continuación intentamos incrementar los contadores; si esto sale bien, llamamos la misma rutina recursivamente para intentar colocar la última reina en otro sitio, y si no, salimos devolviendo `false`.

```
if (!find_next (k, ell)) {
   delete_queen(k, ell);
   if (!increment_k_ell(k, ell))
      return false;
   return find_next(k, ell);
}
```

```
   return true;
}
```

Aquí, la reina que hemos colocado no era la última. Entonces, llamamos directamente a la rutina `find_next` de manera recursiva para colocar más reinas desde la posición actual. Si la rutina devuelve diciendo `false` (lo cual en C++ se escribe `if(!find_next`...), es porque hasta el final del tablero no había manera de colocar otra reina. Por tanto, quitamos nuestra reina del sitio, e intentamos incrementar los contadores. Si no podemos, devolvemos `false`; si lo conseguimos, intentamos colocar otra reina llamando recursivamente a `find_next`.

Ahora lo único que queda es llamar por primera vez a `find_next`. Esto lo hace la línea `find_next(0,0)` a continuación. Lo demás son $C++$ mindundis.

```
int main (int argc, char *argv[])
{
   if (argc < 2 || argc > 4) {
      cerr << "Usage: " << argv[0] << " <size of board> "
           << [<number of queens>"
           << " [0|1 for printing solutions] ]" << endl << endl;
      return 0;
   }
   n = atoi(argv[1]);
   if (n<1) {
      cerr << "Need n>1 !" << endl;
      return 1;
   }
   max_given = (argc>2);
   if (max_given)
      max_n_queens = atoi(argv[2]);
   else max_n_queens = n*n;
   bprint = ((argc>3) ? atoi(argv[3]) : false);

   k.resize(2*n-1);
   ell.resize(2*n-1);
   k_plus_ell.resize(2*n-1);
```

```
   k_minus_ell.resize(2*n-1);
   board.resize(2*n-1, 2*n-1);

   find_next(0,0);
   cout << endl << "================" << endl
        << "Number of configurations: " << config_count << endl
        << "Max. number of queens: " << max_n_queens << endl << endl;

   return 0;
}
```

Resultados

Por ejemplo, esto son las doce soluciones para un tablero con $n = 3$ y tres reinas.

```
0 . .        . 0 .        . 0 .        . . .        . . .        . . .
 . 0          . .          . .          0 0          0 .          . 0
. . .        . . .        . . .        . . .        . . 0        0 . .
 . .          0 0          . 0          . .          . .          . 0
. 0 .        . . .        0 . .        . 0 .        0 . .        . . .

0 . .        . 0 .        . . 0        . . .        . . 0        . . .
 . .          . .          0 .          0 .          . .          . 0
. . 0        . . .        . . .        . . 0        0 . .        0 . .
 0 .          0 .          . .          0 .          . 0          . .
. . .        . . 0        . 0 .        . . .        . . .        . . 0
```

Para cuatro reinas no hay ninguna solución.

Para *siete* reinas en un tablero de $n = 5$ salen 16 configuraciones posibles:

```
. 0 . . .    . 0 . . .    . . 0 . .    . . 0 . .    . . . 0 .    . . . . .    . . 0 . .    . . . 0 .
 . . 0 .      . . . 0      0 . . 0      0 . . 0      0 . . .      0 . 0 0      . . . 0      . 0 . .
. . . . 0    . . . . .    . . . . .    . . . . .    . . . . .    . . . . .    0 . . . .    0 . . . .
 0 . . .      0 . . .      . . . .      . . . .      0 . . 0      . . . .      . . . .      . . . .
. . . . .    . . . . 0    . . . . .    . . . . .    . . . . .    0 . . . .    . . . . .    . . . . 0
 . . . .      . . . .      0 . . .      . . . 0      . . . .      . . . .      0 . . 0      . . . .
. . . . .    0 . . . .    . . . . 0    0 . . . .    . . . . 0    . . . . 0    . . . . .    . . . . .
 0 . . 0      . 0 . 0      . . 0 .      . 0 . .      0 . . .      . . 0 .      . . . 0      0 0 . 0
. . 0 . .    . . . . .    . 0 . . .    . . . 0 .    . . 0 . .    . 0 . . .    . 0 . . .    . . . . .

. 0 . . .    . 0 . . .    . . 0 . .    . . . . .    . . . 0 .    . . . . .    . . . 0 .    . . . . .
 . . . 0      . . 0 .      0 . . .      0 0 . 0      0 . . .      0 . 0 .      . 0 . .      . 0 . 0
. . . . .    . . . . 0    . . . . 0    . . . . .    . . . . .    . . . . 0    0 . . . .    0 . . . .
 0 . . 0      . . . .      . . . .      . . . .      . . . 0      . . . .      . . . 0      . . . .
. . . . .    0 . . . .    . . . . .    . . . . 0    0 . . . .    0 . . . .    . . . . .    . . . . 0
 . . . .      . . . .      0 . . 0      . . . .      . . . .      . . . 0      . . . .      0 . . .
0 . . . .    . . . . .    . . . . .    0 . . . .    . . . . 0    . . . . .    . . . . .    . . . . .
 . . . 0      0 . 0 0      0 . . .      . 0 . .      0 . 0 .      0 . . .      0 . . 0      . . . 0
. . 0 . .    . . . . .    . . . 0 .    . . . 0 .    . . . . .    . . . 0 .    . . 0 . .    . 0 . . .
```

También salen 16 soluciones para 9 reinas en el tablero $n = 6$:

```
. 0 . . . .    . . 0 . . .    . . . . 0 .    . . 0 . . .
 . . 0 . 0      0 . . . 0      0 . . . .      . . . . 0
. . . . . .    . . . . . .    . . . . . .    0 . . . . .
 0 . . . .      . . . . .      0 . . . 0      . . . . .
. . . . . 0    . . . . . 0    . . . . . .    . . . . . 0
 . . . . .      0 . . . .      . . . . 0      0 . . . .
. . . . . .    . . . . . .    0 . . . . .    . . . . . .
 . . . . .      . . . . 0      . . . . .      0 . . . 0
0 . . . . .    0 . . . . .    . . . . . 0    . . . . . .
 . 0 . . 0      . 0 . . .      0 . . . .      . . . . 0
. . . 0 . .    . . . . 0 .    . . . 0 . .    . 0 . . . .

. 0 . . . .    . . 0 . . .    . . . 0 . .    . . . 0 . .
 . . . . 0      0 . . 0 0      0 . . . 0      . 0 . . 0
. . . . . .    . . . . . .    . . . . . .    0 . . . . .
 0 . . . 0      . . . . .      . . . . .      . . . . .
. . . . . .    . . . . . .    0 . . . . .    . . . . . .
 0 . . . .      . . . . .      . . . . 0      . . . . .
. . . . . 0    0 . . . . .    . . . . . .    . . . . . 0
 . . . . .      . . . . .      0 . . . .      0 . . . .
0 . . . . .    . . . . . 0    . . . . . 0    . . . . . .
 . . . . 0      . . 0 0 .      . . . 0 .      . . 0 . 0
. . 0 . . .    . 0 . . . .    . 0 . . . .    . 0 . . . .

. 0 . . . .    . . 0 . . .    . . . 0 . .    . . . . 0 .
 . . . 0 .      0 . . 0 .      0 . . . .      . 0 0 . .
. . . . . 0    . . . . . 0    . . . . . 0    0 . . . . .
 0 . . . .      . . . . .      . . . . .      . . . . .
. . . . . .    . . . . . .    0 . . . . .    . . . . . 0
 . . . . 0      . . . . .      . . . . 0      . . . . .
0 . . . . .    0 . . . . .    . . . . . .    . . . . . .
 . . . . .      . . . . 0      0 . . . 0      . . . . .
. . . . . .    . . . . . .    . . . . . .    . . . . . .
 0 . . . 0      0 . 0 . .      0 . . . .      0 0 . . 0
. . . 0 . .    . . . . 0 .    . . . . 0 .    . . . 0 . .

. 0 . . . .    . . . 0 . .    . . . . 0 .    . . . . 0 .
 . . 0 0 .      0 0 . . 0      0 . 0 . .      . 0 . . .
. . . . . 0    . . . . . .    . . . . . .    0 . . . . .
 . . . . .      . . . . .      . . . . 0      . . . . 0
0 . . . . .    . . . . . .    0 . . . . .    . . . . . .
 . . . . .      . . . . .      . . . . .      0 . . . .
. . . . . .    . . . . . 0    . . . . . .    . . . . . 0
 . . . . .      . . . . .      . . . . .      . . . . .
. . . . . .    0 . . . . .    . . . . . 0    . . . . . .
 0 . . 0 0      . 0 0 . .      0 . . 0 .      0 . . . 0
. . 0 . . .    . . . . 0 .    . . 0 . . .    . . 0 . . .
```

Para cinco reinas en un tablero de $n = 5$ salen **4094** configuraciones.

Nombre: ____ .

1 Propuesta de problemas

1. Formula un problema relacionado con la medida en el que se refleje la utilidad de las matemáticas.

2. Escribe cualquier aspecto que te parezca interesante sobre la utilidad práctica de la medida y que no haya podido quedar reflejado en el enunciado de tu problema.

Nombre:

2 Evaluación de problemas (II)

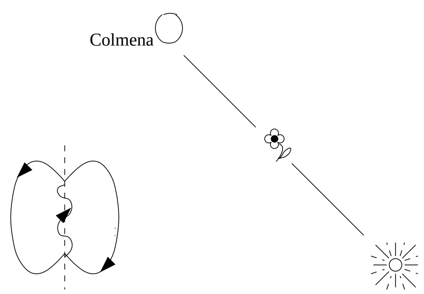
Imagina que una comisión educativa quiere conocer tu opinión como experto en matemáticas acerca del planteamiento de una serie de problemas. Les interesa saber si te parecen adecuados para ser utilizados en una clase de matemáticas.

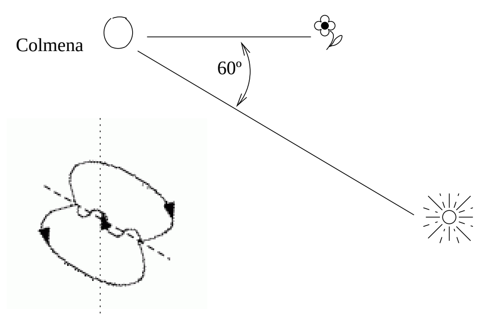
La comunicación entre las abejas

Después de leer el siguiente texto trata de contestar a las dos cuestiones que se plantean.

Las abejas, al regresar a su colmena después de haber encontrado una fuente de alimento, indican al resto de sus compañeras obreras el lugar donde se encuentra el alimento. Para ello, se valen de una danza especial y sonidos emitidos con el contoneo de su abdomen. Las abejas que se encuentran cerca de la que ha encontrado el alimento la siguen, intentando mantener sus antenas en contacto con el abdomen de la danzarina. Esto dura casi un minuto; después, las abejas que han recibido la información salen a buscar la fuente de alimento.

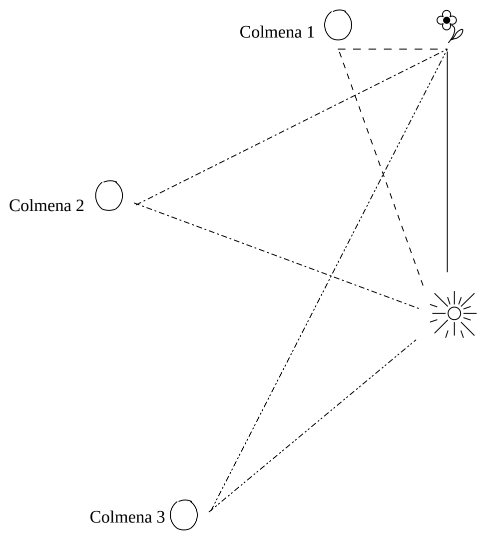
Desde hace siglos se había observado este hecho, pero hasta el año 1943 no se logró interpretar cuál era el sistema que utilizaban para comunicarse. Entre otros aspectos, se descubrió que la dirección hacia la cual se encaraba la abeja danzarina durante su danza *apuntaba al lugar en el que estaba la fuente de alimento, tomando como referencia la posición del sol. En el esquema siguiente aparecen algunos ejemplos que muestran cómo lo hace:*



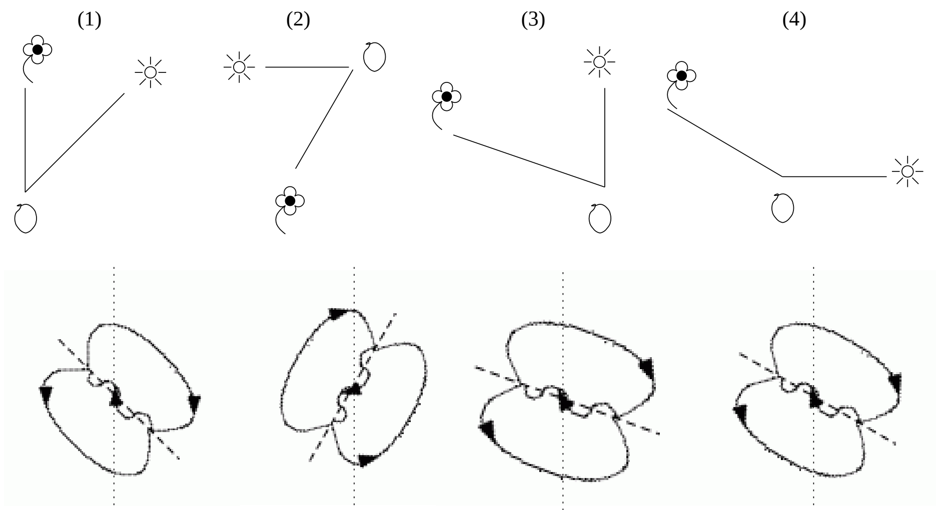


En la primera figura, la flor está en la dirección del sol, de modo que la danza es vertical. En la segunda, la flor está 60° a la izquierda de la dirección de la colmena con el sol; por ello, la danza forma un ángulo de 60° con la vertical.

Cuestión 1: En el siguiente esquema se ha representado la posición de diferentes colmenas y una fuente de polen. Trata de dibujar el esquema de la danza que realizará la abeja en cada una de las colmenas.



Cuestión 2: Asocia con cada figura el esquema de danza que corresponda.



1. ¿Qué crees que ha de saberse para resolver correctamente este problema?

   ¿Consideras que dichos conocimientos son útiles para la formación de una persona? Indica por qué.

2. ¿Te parece un problema adecuado?
   ☐ Sí ¿Para qué nivel?
   ☐ No
   En cualquiera de los casos, argumenta tu respuesta, por favor.

3. ¿Modificarías el problema de forma que resultara más cercano a tu concepción sobre la educación matemática? Si es así, indícanos en qué sentido, por favor.

4. Plantea un nuevo ejercicio en el cual se utilicen los mismos contenidos matemáticos que en este.

Nombre: .

3 Evaluación de la producción de los alumnos

En una escuela de enseñanza primaria están estudiando cúal es el modelo cosmológico que utilizan chicos y chicas en sus explicaciones acerca del universo.

La forma de la Tierra

En cuanto a la forma de la Tierra, sus respuestas han sido clasificadas de acuerdo a los siguientes modelos:

Modelo 1: La Tierra es circular, pero plana como un disco.

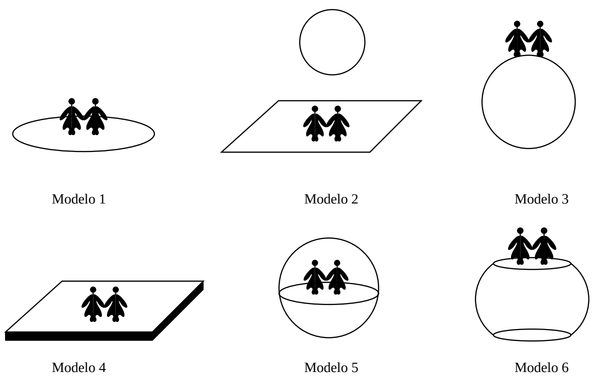
Modelo 2: Hay dos Tierras: una plana, en la que vive la gente; y una *redonda* que está arriba en el cielo.

Modelo 3: La Tierra es una esfera.

Modelo 4: La Tierra es un rectángulo.

Modelo 5: La Tierra es una esfera hueca y la gente vive dentro de ella, en una superficie plana.

Modelo 6: La Tierra, casi esférica, es plana arriba y abajo y las personas viven sobre dicha superficie plana.



1. Trata de ordenar los modelos anteriores, según tu propio criterio, del más avanzado al menos avanzado.

2. ¿Conoces propiedades científicas que estén involucradas en la formulación de estos modelos?

   □ Sí □ No

   Sí es así, escribe cuáles y cómo las secuenciarías. Señala además cuáles de ellas te parecen propiedades matemáticas.

3. Elige uno de los modelos anteriores, excepto el modelo esférico, y esboza una planificación de la actividad escolar que desarrollarías para mejorar dicho modelo.

El ciclo del día y la noche

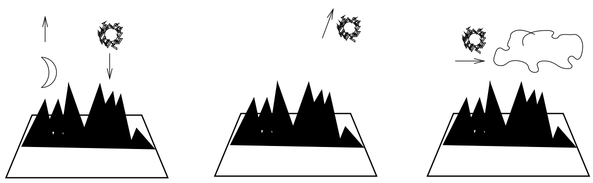
En cuanto a la explicación del ciclo del día y la noche, los modelos expresados por los chicos fueron los siguientes:

Modelo 1 El ciclo puede explicarse en términos del movimiento del sol, que:

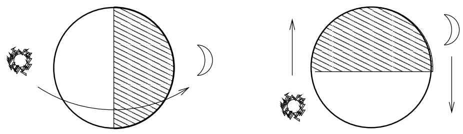
- Se esconde detrás de las montañas
- Se *escapa* al espacio
- Se esconde detrás de las nubes

Modelo 2 El sol y la luna están en lados opuesto de la Tierra. El día y la noche dependen del giro de la Tierra sobre si misma.

Modelo 3 La Tierra –esférica– permanece inmóvil y el sol *sube* cuando la luna *baja*



Modelo 1



Modelo 2 Modelo 3

1. De los modelos expuestos en el apartado anterior para la forma de la Tierra, ¿cuáles pueden asociarse con cada uno de los que se utilizan aquí para explicar el ciclo del día y de la noche?

2. En general, los chicos hacen uso de las relaciones sol–día y luna–noche. ¿A qué crees que se debe la utilización de tales relaciones?

3. Elige uno de los modelos presentados y esboza cómo planificarías una actividad escolar para mejorar la formulación de dicho modelo.

4. El mismo tipo de experiencia se llevó a cabo con niños y niñas en comunidades indias americanas, en 1^o, 3^o y 5^o de primaria. Mostraban una preferencia especial por explicaciones anímicas para elaborar un modelo del ciclo día–noche del tipo:

   - El sol y la luna (día–noche) quieren descansar.
   - El sol brilla más durante el día porque está enfadado
   - El sol y la luna no quieren ser amigos

   ¿Cómo interpretarías estos nuevos modelos explicativos?

5. Algunas de las tradiciones culturales y cosmológicas de la comunidad indo-americana con la que se llevó a cabo la experiencia anterior (pregunta n^o 4) aparecen en el siguiente texto mitológico:

   > *Inyan* (roca) que era suave y sin forma, tomó una parte de sí misma y la esparció por encima y alrededor de ella, formando un gran disco. Su nombre fue *Maka* (tierra).
   >
   > *Maka* se quejaba de frío a *Skan* (cielo), quien creó a *Wi* (sol), un gran disco luminoso. *Wi* se quedaba quieto, de modo que las regiones más bajas de la Tierra estaban en la oscuridad.
   >
   > *Maka* tenía calor y *Wi* quería descansar, de modo que *Skan* dividió el tiempo en día y noche: *Wi* saldría del eje del mundo y viajaría alrededor de la gran bóveda celeste. Durante la noche, iría a las partes más bajas a descansar.
   >
   > *Wi* se sentía solo y quería compañía, de modo que creó otro disco como él y le llamó *Hanwi* (luna). Ambos gobernaban el día y la noche.
   >
   > Durante un banquete, una bella mujer, se sentó cerca del sol, en el lugar de *Hanwi*. Ambas se enfadaron y Wi intentó reconciliarlas, pero *Hanwi* se quejó a *Skan*, quien decidió que a partir de entonces, *Wi* gobernaría en soledad el día y *Hanwi* la noche. Pero los días que *Hanwi* pasara cerca del sol, cubriría su rostro.

   Después de conocer esta información, ¿modificarías en algo la interpretación que has dado en la pregunta anterior acerca de las respuestas de los niños?

   ☐ Sí ☐ No

   Si es así, ¿en qué sentido?

6. ¿Crees que en tu entorno existen aspectos culturales que influyen en la formación científica de los estudiantes?

   ☐ Sí ☐ No

   Si es así, indícalos y especifica cuáles se refieren a la formación matemática. Si no es así, indica a qué crees que se debe que sí existan en otras culturas, como la que se menciona en este caso.

Nombre: ____

4 Evaluación de problemas (i)

Imagina que una comisión educativa quiere conocer tu opinión como experto en matemáticas acerca del planteamiento de una serie de problemas. Les interesa saber si te parecen adecuados para ser utilizados en una clase de matemáticas.

Problemas de herencias

Un hombre muere, dejando dos hijos. Su fortuna consiste en 10 dirhams en dinero, y otros 10 dirhams que le debe uno de sus hijos, al que se los prestó hace algún tiempo. Además, el difunto lega $\frac{1}{3}$ *de su fortuna a un extraño. ¿Cómo ha de hacerse el reparto?*

1. ¿Qué conocimientos se manejan en el proceso de resolución de este problema?

   ¿Consideras que dichos conocimientos son útiles para la formación de una persona? Indica por qué.

2. ¿Te parece un problema adecuado?
   ☐ Sí ¿Para qué nivel?
   ☐ No
   En cualquiera de los casos, argumenta tu respuesta, por favor.

3. ¿Modificarías el problema de forma que el resultado fuera más cercano a tu concepción sobre la educación matemática? Si es así, indícanos en qué sentido, por favor.

Problemas de herencias (II).

Para resolver el siguiente problema has de tener en cuenta que ha sido adaptado de un antiguo manual árabe. Los problemas de este manual contienen una extensa descripción de los condicionantes impuestos por la ley coránica que atañen directamente a los problemas de herencias. En particular:

- Los herederos naturales pueden negarse a ceder a un extraño lo que exceda de $\frac{1}{3}$ de la fortuna total. Si hay herederos directos que no se niegan y otros que sí, sólo los que no se nieguen pagarán el exceso que supere a ese tercio, y no el resto.
- Lo que exceda la deuda de un hijo de su parte legal como heredero se considera un regalo y no debe devolverse.
- La esposa recibe $\frac{1}{8}$ de los bienes, cualquiera que sea la cantidad, y los $\frac{7}{8}$ restantes son divididos entre los descendientes, de tal manera que los hijos varones reciban el doble de lo que reciben sus hermanas.

Un hombre muere, dejando a su esposa, dos hijos y una hija, entre los que reparte su herencia. Además, uno de sus hijos le debe en el momento de su muerte una cantidad igual a la que tiene en el momento de fallecer. El difunto deja también como legado a una persona ajena a la familia tanto como lo que dejaría a un tercer hijo, si lo tuviera. ¿Cómo debería hacerse el reparto?

1. ¿Qué conocimientos se manejan en el proceso de resolución de este problema?

   ¿Consideras que dichos conocimientos son útiles para la formación de una persona? Indica por qué

2. ¿Te parece un problema adecuado?
   ☐ Sí ¿Para qué nivel?
   ☐ No
   En cualquiera de los casos, argumenta tu respuesta, por favor.

3. ¿Modificarías el problema de forma que el resultado fuera más cercano a tu concepción sobre la educación matemática? Si es así, indícanos en qué sentido, por favor.

4. ¿Qué diferencias encuentras entre la formulación de este problema y la que se planteó en el problema anterior?

5. ¿Te parecen relevantes dichas diferencias a la hora del aprendizaje matemático de los alumnos? ☐ Sí ☐ No
   ¿Por qué?

Bibliografía

[1] Abreu, G.; Carraher, D. W. (1989): The mathematics of Brazilian sugar-cane farmers. En: Keitel, C.; Damerow, P.; Bishop, A.; Gerdes, P. (Eds.) *Mathematics, education, and society*, UNESCO, París, p. 68–70.

[2] Ainley, J. (1991): Is there any mathematics in measurement? En: Pimm, D. y Love, E. (eds.) *Teaching and learning in school mathematics*. Hodder and Stoughton–The Open University. London, 69–76.

[3] Alsina, C. (1989): *Medidas españolas tradicionales. Documentos y propuestas de trabajo.* Dirección General de Renovación Pedagógica, MEC.

[4] Alsina, C. y Marquet, Ll. (1982): *Pesos, mides i mesures.* Publicacions del Museu de la Ciència. Obra Social de la Caixa de Pensions, Barcelona.

[5] Altheide, D.L. and Jhonson, J.M. (1994): Criteria for assessing interpretive validity in qualitaive research. En: Denzin, N.K. and Lincoln, Y.S. *Handbook of qualitative research.* Sage, London, 485–499.

[6] Andersen, K. (1985): Cavalieri's method of indivisibles. *Archive for history of exact sciences*, 31, 291–367.

[7] Andrews P. and Hatch, G. (2001): A comparison of hungarian and english teachers' conceptions of mathematics and its teaching. *Educational studies in mathematics,* 43, 31–64.

[8] Arcavi, A. (1991): Two benefits of using history. *For the learning of mathematics*, 11(2), 11.

[9] Arcavi, A. and Bruckheimer, M. (2000): Didactical uses of primary sources from the history of mathematics. *Themes in education*, 1(1), 55–74.

[10] Ascher, M. and D'Ambrosio, U.(1994): Ethnomathematics: a dialogue. *For the learning of mathematics*, 14 (2)36–43.

[11] Barbin, E. (1996): The role of problems in the history and teaching of mathematics. En: Ronald Calinger (Ed.) *Vita Mathematica. Historical research and its integration with teaching.* MAA Notes, 40, 17–25. Academic Press, New York.

[12] Barbin, E. (2000): Integrating history: research perspectives. En: Fauvel, J., van Maanen, J. (Eds.): *History in mathematics education.* The ICMI study, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[13] Barton, B. (1999): Ethnomathematics and Philosophy. *Zentralblatt für didaktik der mathematik*, 99/2, 54–58.

[14] Berggren, J.L. (1986): Episodies in the mathematics of medieval Islam, Sringer Verlag, New York.

[15] Bishop, A. (1988): Aspectos sociales y culturales de la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 6(2) 121–125.

[16] Bishop, A. (1988): Mathematical enculturation. Kluwer, Dordrecht.

[17] Boaler, Jo (1999): Participation, Knowledge and beliefs: a community perspective on mathematics learning. *Educational Studies in mathematics*, 40, 259–281.

[18] Boyce, R.W. (2000): Fallacies in interpreting data. En: Bauer, M. and Gaskell, G. *Qualitative researching with text, image and sound*, Sage, London.

[19] Boyer, C. (1949): The history of the calculus and its conceptual development. Dover, New York.

[20] Boyer, C. (1969): A history of Mathematics. Edición en castellano (1986): Historia de la matemática. Alianza, Madrid.

[21] Brown, T. (1994): Creating and knowing mathematics through language and experience. *Educational studies in mathematics*, 27, p.79–100.

[22] Bruffe, K. (1999): Collaborative learning. Higher education, interdependence, and the authority of knowledge (Rev.ed.). The Johns Hopkins University Press, Londres. Primera edición de 1993.

[23] Burger, E.D.; Starbird, M. (2000): The heart of mathematics. Key Curriculum Press / Springer Verlag, New York.

[24] Cañón, C. (1995): Modas y creencias en epistemología matemática. Su relevancia para la didáctica. En: *Actas de las VII Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, Madrid.

[25] Campbell, N.C. (1956): La medición. En: Silvester, Peirce, Mach, Campbell, Weyl (Edición en castellano de 1969) *La forma del pensamiento matemático*, Grijalbo, Barcelona, p. 66–92.

[26] Carr, E. H. (1961): ¿Qué es la historia? Edición definitiva de 2001, Ariel, Barcelona.

[27] Chamorro, C. y Bemonte, J.M. (1988): El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales. Síntesis, Madrid.

[28] Claxton, G. (1984): Live and learn. An introduction to the Psychology of growth and change in everyday life. Edición en castellano: (1995) Vivir y aprender. Alianza, Madrid.

[29] Cobb, P., and Bauersfeld, H. (Eds.) (1995): The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

[30] Cole, M. (1996): Cultural Psychology. A one and future discipline. Edición en castellano (1999): Psicología cultural. Ediciones Morata, Madrid.

[31] Courant, R. and Robbins, R. (1941): What is mathematics? Oxford University Press, New York. Edición consultada de 1978.

[32] Crawford, K. (1996): Vigotskian approaches in human development in the information era. *Eduational Studies in Mathematics*, 31, 43–62.

[33] Crook, Ch. (1994): Computers and the collaborative experience of learning. Routledge, Londres. Edición en castellano: ordenadores y aprendizaje colaborativo. Morata–MEC, 1999.

[34] Crosby, A. W. (1997): The measure of reality. Edición en astellano (1998): La medida de la realidad. La cuantificación y la sociedad occidental, 1250–1600. Crítica, Barcelona.

[35] Denzin, N.K. and Lincoln, Y. (eds.) (1994): Handbook of qualitative research, Sage, London.

[36] Deulofeu, J. (2001): Una recreación matemática. Historias, juegos y problemas. Planeta, Barcelona.

[37] Deulofeu, J. Figueiras, L. (2002): Inheritance Problems in Arabic Algebra Treatises: How They Stimulate Future Teacher's Beliefs on Mathematics? Comunicación aceptada para su presentación en el *Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, 28 de febrero al 23 de Marzo de 2003.

[38] Diakidoy, I.A., Vosniadou, S. and Hawks, J.K. (1997): Conceptual change in astronomy: models of the earth and of the day/night cycle in american–indian children. *European journal of psychology of education* 12(2) 159–184.

[39] Díaz, F. (1995): La colectividad como fenómeno conversacional: un análisis secuencial. *Revista de psicología social aplicada*, 1–2, 93–111.

[40] Díaz, J.I. (1997): El mundo de la ciencia y las matemáticas del mundo. Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

[41] Diller, A. (1949): The ancient measurements of the earth. *ISIS*, 40(1), 6–9.

[42] Dutka, J. (1994): Eratosthenes' measurement of the earth reconsidered. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 46, 55–66.

[43] Ernest, P. (1989): The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In: Ernest, P. (Ed.) *Mathematics teaching: the state of the art* (249–254), Falmer Press, London. Artículo accesible electrónicamente en `www.ex.ac.uk/~Ernest/impact.html`

[44] Evans, G.W. (1917): Cavalieri's theorem in his own words. *The American Mathematical Monthly*, 24(10), 447–451.

[45] Fauvel, J. (1991): Using History in Mathematics Education. *For the learnig of mathematics*, 11(2) 3–6.

[46] Fauvel, J., van Maanen, J. (Eds.) (2000): History in mathematics education. The ICMI study, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[47] Figueiras, L. (2002): Realidad e historia de la matemática en la formación inicial del profesorado. ¿Qué contenidos? ¿Qué construimos? En: Parafán, G.A. y Adúriz-Bravo, A. (Eds.), *Nuevas perspectivas de investigación en didáctica de las Ciencias y las Matemáticas.* Universidad Pedagógica de Colombia y Magisterio. Gaia, Bogotá.

[48] Figueiras, L. Deulofeu, J. (2002): History of math, stories of diversity. A proposal for pre-service teacher training. Comunicación presentada en la *54th Conference of the C.I.E.A.E.M.* Vilanova i la Geltrú, 12 al 19 de julio.

[49] Figueiras, L., Deulofeu, J. (2002): Las voces de futuros maestros ante el debate de las dos culturas. Actas del congreso internacional *La ciencia ente el público. Cultura humanista y desarrollo científico-tecnológico.* Salamanca, 28-31 de octubre. Sección V.

[50] Galindo, L.J. (1997): Sabor a tí. Metodología cualitativa en investigación social. Universidad Veracruzana, Veracruz.

[51] García Barreno, P. (2000): La ciencia en tus manos (Introducción). Espasa–Calpe, Madrid.

[52] García–Borés, J.M. (1995): 'Captar lo que se vive': Dos ejemplos de acercamiento. Técnicas de Historia de Vida y Refrendación de Texto. En: *Revista de psicología social aplicada*, 5(12), 57–73.

[53] Garfunkel, S. (Ed.) (1999): Las matemáticas en la vida cotidiana. Adison Wesley Iberoamericana, Madrid.

[54] Gaskell, G. and Bauer, M.W. (2000): Towards public accountability: Beyond sampling, reliability and validity. En: Bauer, M.W and Gaskell, G. (eds), *Qualitative researching with text, image and sound*, Sage, London, 336–350.

[55] Gergen, K. (1982): Toward transformation in social knowledge. Springer Verlag, New York.

[56] Gergen, K. (1994): Realities and relationships. Soundings in social construction. Edición en castellano: Realidades y relaciones. Aproximaciones a la construcción social (1996), Paidós, Barcelona.

[57] Gergen, K. (1995): Social construction and the educational process. En: Steffe, L. and gale, J. *Constructivism in education*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.J.

[58] Gete-Alonso, J.C. y del Barrio, V. (1988): Medida y Realidad. Alhambra, Madrid.

[59] Gingerich, O. (1993): La astronomía en el tiempo de Colón. *Investigación y Ciencia*, núm. 196, enero, p. 6–11.

[60] Gulbekian, E. (1987): The origin and value of the stadion unit used by Eratosthenes in the third century B.C., *Archive for History of Exact Sciences*, 37, 359–363.

[61] Gulikers, I. and Blom, K. (2002): 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 223–258.

[62] Harré, R. Clarcke, Carlo, N. (1985): La relatividad cultural de las emociones. Edición es castellano (1989): Motivos y mecanismos introducción a la teoría de la acción. Barcelona, Paidós.

[63] Heath, T.L. (1987): The works of Archimedes (1987) with the method of Archimedes (1912). Dover, New York.

[64] Heath, T.L. (1921): A history of greek mathematics. Vols. I y II. Dover, New York.

[65] Hertz-Lazarowitz, R. Benveniste Kirkus, V. and Miller, N. (1992): Implications of Current Research on Cooperative Interaction for Classroom Application. In: Hertz-Lazarowitz, R. and Miller, N. (Eds), *Interaction in Cooperative Groups: the Theoretical Anatomy of Group Learning*, Cambridge University Press, pp. 253-280.

[66] Hoff, H. and Geddes L.A. (1962): The beginings of graphic recording. *ISIS*, 55(173), 287–324.

[67] Holstein, J.A. and Gubrium, J.F. (1994): Phenomenology, Ethnomethodology, and Interpretative Practice. En: Denzin, N.K. and Lincoln, Y. (eds.) Handbook of qualitative research, 262–272, Sage, London.

[68] Hultsch, F. (1882): Griechische und Römische Metrologie. Akademische Druck- u. Verlagsanstalt, Graz.

[69] Ibáñez, T. (1996): El com i el perquè de la psicologia social. En: Botella et al. Psicología Social. Universitat Oberta de Catalunya, Barcelona, 15–50.

[70] Ibáñez, T. (1990): Aproximaciones a la psicología social. Sendai, Barcelona.

[71] Ifrah, G. (1987): Las cifras. Historia de una gran invención. Alianza, Madrid.

[72] Iñiguez, L. (1995): Métodos cualitativos en psicología social: presentación. *Revista de psicología social aplicada*, 5(1–2), 5–26.

[73] Inter–IREM Commision (1987): Mathématiques au fil des âges. Gauthier–Villars, París.

[74] Inter–IREM Commision (1997): History of mathematics. Histories of problems. Ellipses, París.

[75] Jahnke, H. N.; Arcavi, A.; Barbin, E.; Bekken, O.; Furinghetti, F.; El Idrissi, A.; da Silva, C.; Weeks, C. (2000): The use of original sources in the mathematics classroom. In: Fauvel, J., van Maanen, J. (Eds.): *History in mathematics education*. The ICMI study, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[76] Jacobs, J.K., Makoto, Y., Stigler, J.W. and Fernández, C. (1997): Japanese and american teacher's evaluations of mathematics lessons: a new technique for exploring beliefs. *Journal of mathematical behaviour*, 16(1), 7–24.

[77] Jhonson, D. W. and Jhonson, R.T. (1992): Positive Interdependence: Key to Effective Cooperation. In: Hertz-Lazarowitz, R. and Miller, N. (Eds), Interaction in Cooperative Groups: the Theoretical Anatomy of Group Learning, Cambridge University Press, pp. 174-199.

[78] Koyré, A. (1973): Bonaventura Cavalieri y la geometría de los continuos. En: *Études d'historie de la pensée scientifique.* Edición en castellano: Estudios de historia del pensamiento científico (1977). Siglo XXI, Madrid, p. 320–349.

[79] Kula, W. (1970): Miary i ludzie. Edición en castellano: Las medidas y los hombres (1980). Siglo XXI, Madrid.

[80] de Lange, Jan; 1987: Mathematics, Insight, and Meaning. Rijksuniversiteit, Utrecht.

[81] de Lange, J.(1996): Real problems with real world mathematics. En: Alsina C.; Álvarez, J.M.; Niss, M.; Pérez, A.; Rico, L. and Sfard, A. In: *Proceedings of the 8 th International Congress on Mathematical Education*, 83–110.

[82] Laubenbacher, R. and Pengelley, D. (1999) Analysis: calculating areas and volumes. En: *Mathematical expeditions*, 95–155. Springer Verlag, New York.

[83] Lam Lay–Yong and Shen Kangshen (1986): Mathematical problems on surveying in ancient China. *Archive for History of Exact Sciences*, 36, 1–19.

[84] LeCompte, M., Millroy, W., and Preissle, J. (Eds.) (1992): The handbook of qualitative research in education. Academic Press, London.

[85] Lerman, S.(1996): Intersubjectivity in mathematics learning: a challenge to the radical constructivist paradigm. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 133–150.

[86] Lerman, S. (2001): Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 87–113.

[87] Lerman, S. (1998): Cultural perspectives on mathematics and mathematics teaching and learning. En: Seeger, F,; Voigt, J.; and Waschecio, U. (eds.) *The culture of the mathematics classroom*, Cambridge University Press, Cambridge.

[88] Lerman, S.(2000): A case of interpretations of social: A response to Steffe and Thompson. *Journal for research in mathematics education*, 31, 210–227.

[89] Lim, C.S. (1999): Public Images of Mathematics. PhD dissertation. University of Exeter. Referencia electrónica en: `www.ioe.ac.uk/esrcmaths/csam.html`

[90] Lucas, E. (1977): Le problème des huit reines au jeu des échecs. En: *Récréations mathématiques.* Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, París, Vol I, 59–86.

[91] McLeod, D.B. (1992): Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En: *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, 575–596. MacMillan, New York.

[92] Marton, F. (1981): Phenomenography – Describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*, 10, 177–200.

[93] Martzloff, J.C. (1987): Histoire des mathématiques chinoises. Edición en inglés (1997) A history of chinese Mathematics. Springer, Berlín.

[94] Moreu–Rey, E. (1986): El naixement del metre. Moll, Barcelona.

[95] ben Musa, M. (1831): The algebra of Mohamed ben Musa. Georg Olms Verlag, Hildesheim. (Edición 1986).

[96] Neugebauer, O. (1957): The exact sciences in antiquity. Dover, New York.

[97] Neugebauer, O. (1934): Vorgriechische Mathematik. Springer Verlag, Berlin.

[98] Nunes, T. and Bryant, P. (1996): Mathematics under different names. In: *Children doing mathematics*, Blackwell, Oxford.

[99] Ortega, O. (1986): Ideas y creencias. Alianza, Madrid. (Edición consultada de 1999).

[100] Pajares, M.F. (1992): Teacher's beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307–332.

[101] Malet, A.; Paradís, J. (1984): Els orígens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica. Institut de Ciéncies de l'Educació. Universitat de barcelona, Barcelona.

[102] Pehkonen, E. and Törner, G. (1996): Mathematical beliefs. En: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 96/4, 99–113.

[103] Philippou, G.N. and Christou, C. (1998) The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 189–206.

[104] Reason, P. (1994): Three approaches to participative inquiry. En: Denzin, N.K. and Lincoln, Y.S. *Handbook of qualitative research.* Sage, London, 324–339.

[105] Rowe, D.E. (1996): New trends and old images in the history of mathematics. In: Ronald Calinger (Ed.) *Vita Mathematica. Historical research and its integration with teaching* MAA Notes, 40, 3–16. Academic Press, New York.

[106] Saxe, G.B. (1991): Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.J.

[107] Scriba C.J. and Schreiber, P. (2001): 5000 Jahre Geometrie. Sringer Verlag, Berlin.

[108] Seidenberg, A. (1962): The ritual origin of geometry. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 1, 488–527.

[109] Seidenberg, A. (1962): The ritual origin of counting. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 2(1), 1–40.

[110] Seidenberg, A. (1973): On the area of a semi–circle. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 9, 171–211.

[111] Seidenberg, A. (1980): The ritual origin of the balance. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 23, 179–226.

[112] Seidenberg, A. (1981): The ritual origin of circle and square. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 25(4), 269–327.

[113] Serrano, J. (1995): Discurso narrativo y descripción autobiográfica. *Revista de psicología social aplicada*, vol. 5(1–2), 41–56.

[114] Shoenfeld, A.H. (2000): Objetivos y métodos de la investigación en Educación Matemática. *La gaceta de la Real Sociedad de Matemáticas Española*, p. 185–203.

[115] Sierpinska, A. and Lerman, S. (1996): Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In: Bishop, A. et al. (eds) *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer, Dordrecht.

[116] Skott, J. (2001): Challenging a purely mathematical perspective on teachers' competence. Proceedings of the *25th. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, vol4, p. 193–200.

[117] Slavin, R. (1985): An Introduction to Cooperative Learning Research. In: Slavin, R. Sharan, S. Kagan, S. Lazarowitz, R. Webb, C. and Schmuck, R. (Eds), *Learning to Cooperate, Cooperating to Learn*, Plenum Press, New York, pp. 5-15.

[118] Stake, R.E. (1994): Case Studies. En: Denzin, N.K. and Lincoln, Y.S. *Handbook of qualitative research.* Sage, London, 236–247.

[119] Steffe, L.P. and gale, J. (1995): Constructivism in education. Lawrence Erlbaum Hillsdale, NJ.

[120] Steiner, H.G. (1990): Needed cooperation between science education and mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 90(6), 194–197.

[121] Steiner, H.G. (1987): Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education. *For the learning of mathematics*, 7(1), 7–13.

[122] Terrall, M. (1992): Representing the earth's shape. The polemics surrounding Maupertuis's expedition to Lapland. *ISIS*, 83, 218–237.

[123] Tian-Ss, A. and Swetz, F.J. (1986): A chinese mathematical Classic of the third century: the sea island mahematical manual of Liu Hui. *Historia Mathematica*, vol. 13 (2), 99–117.

[124] Thompson, A. G. (1992): Teacher's beliefs and conceptions. A synthesis of the research. In: Grouws, D.A. (Ed) *Handbook of research on mathematics learning and teaching.*, 127–142, McMillan, New York.

[125] Toeplitz, O. (1949): The calculus. A genetic approach. The university of Chicago Press, London. (Edición 1963).

[126] Tzanakis, C. and Arcavi, A. (2000) Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. En: Fauvel, J., van Maanen, J. (Eds.): *History in mathematics education. The ICMI study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[127] Vernant, J.P. (1965): Mythe et pensée chez les grecs. Edición en castellano (1993): Mito y pensamiento en la grecia antigua, Ariel, Barcelona.

[128] Vigotsky, L. (1978): Mind in society. The development of higher psychological processes. Harvard University Press, Cambridge. Edición en castellano: El desarrollo de los procesos psicológicos superiores (2000), Crítica, Barcelona.

[129] Vogel, K. (1983): Ein vermessungsproblem reist von China nach Paris. *Historia Mathematica*, vol. 10, 360–367.

[130] Vosniadou, S. and Brewer, W.F. (1994): Mental models of the day/night cycle. *Cognitive science* 18, 123–183

[131] Van der Waerden, B.L. (1966): Anfänge der Astronomie. Noordhoff Ltd. Groningen.

[132] Van der Waerden, B.L. (1975): Science Awakening. Noordhoff Ltd. Groningen.

[133] Wilensky, U. (1991): Abstract mediations on the concrete and concrete implications for mathematics education. En: Harel, I. and Papert, S. (eds.) *Constructionism*, Ablex Publishing, Norwood, N.J.

[134] Yackel, E. y Cobb, P. Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), p. 458–477.