Universitat Autònoma de Barcelona

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS

Geometria analítica a Batxillerat: un enfocament didàctic contextualitzat i amb eines TIC

Tesi doctoral de Joaquim Costa Llobet dirigida per:
Dr. Josep Maria Fortuny Aymemí

Any 2009

Agraïments

El meu agraïment per al Dr. Jordi Servat Susagne, que em va orientar amb generositat en els meus primers passos d'investigació en didàctica de la matemàtica.

Un especial agraïment per al Dr. Josep Maria Fortuny Aymemí. Amb el seu guiatge, la meva activitat investigadora s'ha concretat i desenvolupat en aquest treball.

Gràcies també a la professora Gemma Vilarrubias Albertí, per la seva tasca de suport en el procés de recollida de dades durant la fase d'implementació a l'aula.

Una investigació a l'aula no és possible sense alumnes. Agraeixo als alumnes de primer de Batxillerat de l'IES Rocagrossa de Lloret de Mar la seva bona acollida de la implementació del plantejament didàctic d'aquest treball.

Índex

pàgina

Prefaci

Només en aquest prefaci utilitzaré la primera persona del singular. Després, passaré al convencional distanciament que proporcionen la primera persona del plural i les oracions impersonals.

A la part final de la dècada de 1990, quan vaig iniciar la meva activitat docent professional a l'educació secundària pública, els centres educatius estaven immersos en un canvi de gran abast, organitzatiu i també pedagògic, arran de la implantació d'un nou marc legal en el conjunt del sistema. La tecnologia s'incorporava a l'educació i ja molts centres, entre els quals es trobaven aquells on jo ensenyava matemàtiques, disposaven d'ordinadors i una certa varietat de programari educatiu. Era el temps en què vaig començar a utilitzar, per a la geometria, el programa Cabri, que poc més tard evolucionaria cap a la versió CabriII.

Al mateix temps que adquiria experiència a les aules, realitzava també els cursos de doctorat, centrant-me en crèdits de didàctica de la matemàtica. Aquesta formació en teoria i en investigació em va situar per una banda (i per pròpia elecció) en el camp de la didàctica de geometria analítica, i per una altra banda em va permetre anar madurant idees sobre un plantejament didàctic no tradicional en el qual els recursos de tecnologies de la informació i la comunicació (TIC) hi apareguessin perfectament integrats, no només afegits o superposats.

En el moment actual, després d'aquest període de pràctica docent i de reflexió personal, considero que hi ha elements suficients per afirmar que som a la fase inicial d'una gran transformació educativa, de més gran abast que aquella que vaig trobar quan començava la meva activitat docent professional. Ara existeix, com mai, debat i pressió social; existeix la voluntat de l'administració educativa d'impulsar un canvi (voluntat reflectida en la producció normativa); i assistim a una decidida i accelerada incorporació de les TIC als processos d'ensenyament i aprenentatge. Som davant d'un canvi profund en les metodologies didàctiques a les aules.

El meu treball se situa en aquests contextos: el personal, l'educatiu i el social. Està, com qualsevol activitat humana, profundament influït pels contextos: és el producte d'una voluntat personal immersa en unes determinades circumstàncies col·lectives. I jo assumeixo plenament aquest fet, amb el propòsit de realitzar una contribució en el camp de la didàctica de la geometria analítica que respongui al que considero que són reptes actuals, de la mateixa manera que els investigadors del passat van elaborar els seus treballs en resposta a les motivacions del seu temps, i de la mateixa manera que els investigadors del futur elaboraran els seus, situats dins de les seves circumstàncies. Bertrand Russell expressa admirablement aquesta idea al prefaci de la seva *Història de la filosofia occidental*: "Els filòsofs són al mateix temps efectes i causes: resultat de les seves circumstàncies socials, de la política i de les institucions de la seva època; causes, si són afortunats, de creences que donen forma a la política i les institucions d'èpoques posteriors. A la majoria de les històries de la filosofia, cada filòsof sembla flotar en el buit, les seves idees són exposades sense connexió, excepte, com a molt, en allò que es refereix als filòsofs anteriors. Jo he intentat, en canvi, presentar cada filòsof, atenint-me a la veritat, com un resultat del seu *milieu*, com una persona en la qual es van cristal·litzar i concentrar els pensaments i sentiments que en forma vaga i difosa van ser comuns a la comunitat de què formava part."

El meu treball planteja i desenvolupa un dels camins possibles que hi ha per implementar un plantejament didàctic diferent del tradicional per a la geometria analítica, amb les TIC integrades, i orientat, és clar, a la millora dels processos d'ensenyament i aprenentatge en situacions purament reals: en un centre real, amb alumnes reals, amb recursos materials reals, i dins de la realitat del currículum.

Preàmbul

El nostre treball mostra, des de les motivacions que l'impulsen i els fonaments teòrics sobre els quals es construeix, fins a l'aplicació a l'aula, els resultats i les conclusions, un enfocament didàctic innovador per a l'ensenyament de la geometria analítica al primer curs de Batxillerat.

El nostre plantejament didàctic consisteix en una seqüència que s'inicia amb activitats contextualitzades que indueixen la matematització en els alumnes, en l'entorn TIC del programari interactiu Geogebra, i que es completa amb una posterior formalització dels continguts. És un plantejament "de baix a dalt", ja que, a diferència de la metodologia tradicional, no comença amb la presentació formal i perfectament estructurada dels continguts per passar a continuació als exercicis d'aplicació, sinó que la formalització arriba després que la matematització induïda per les activitats contextualitzades hagi preparat el terreny per a la fixació formal dels continguts. Amb el nostre enfocament, aconseguim una millor aprehensió dels continguts per part dels estudiants i també una major motivació, en comparació amb una metodologia tradicional.

Iniciem la redacció de la memòria del nostre treball (capítol 1) amb una mirada a l'estat actual de l'ensenyament de les matemàtiques a l'educació secundària, no tan sols des d'un punt de vista estrictament acadèmic, sinó també des d'un punt de vista social, ja que el debat sobre l'educació ha esdevingut públic. Aquesta contextualització en el moment actual ens permet abordar la necessitat d'evolucionar des d'una metodologia didàctica tradicional cap a una metodologia innovadora. En concret, el nostre plantejament passa per integrar completament la innovació en el desplegament de la programació didàctica a l'aula de la geometria analítica de primer curs de Batxillerat (no tan sols superposar-la o utilitzar-la com a element complementari, sinó integrar-la). Des d'aquesta posició inicial, al final del primer capítol explicitem quina és la nostra hipòtesi de treball i quins són els objectius operatius per a la implementació.

Al segon capítol presentem els fonaments teòrics del nostre treball. Per una banda, prenem com a referents els textos de diversos autors agrupats en tres blocs temàtics: contextualització, matematització i modelització (esmentem els noms dels autors que tenen un paper destacat en el marc teòric del nostre treball: Biembengut i Hein; Chamoso i Rawson; English; Filloy; Freudenthal; Niss; Niss, Lesh i Lee; Niss i Blum; Peralta; Treffers; Van den Heuvel-Panhuizen; Van Reeuwijk). La presentació per extens d'aquests blocs de referències teòriques, i el fet d'explicitar el nostre posicionament en cada un d'ells, ens permet afirmar que en el nostre plantejament, la contextualització, la matematització i la modelització són diferents facetes d'una única realitat didàctica en la qual els alumnes realitzen activitats contextualitzades en l'entorn del programari interactiu Geogebra que els indueixen a matematitzar i a construir models matemàtics

senzills. L'anàlisi de la matematització que realitzen els alumnes té una importància absolutament central en el nostre treball.
A continuació acudim a la classificació dels mètodes d'ensenyament de les matemàtiques (Peralta) per situar on es troba el nostre plantejament "de baix a dalt" en cada una de les seves dues fases (la matematització induïda la primera; la formalització dels continguts la segona) i sobretot per mostrar que, essent globalment innovador, el nostre enfocament supera la dicotomia innovador – tradicional i la dicotomia constructivisme – empirisme perquè, encara que és innovador i potencia el procés de descobriment personal de l'alumne en la primera fase, conté també en la segona fase elements vàlids i útils de la metodologia tradicional.
També en el capítol dedicat al marc teòric, realitzem un complet recorregut per la història de la geometria analítica i la seva didàctica perquè considerem que la perspectiva històrica és imprescindible. La història de les matemàtiques, i en concret la de la geometria analítica, evidencia que els continguts i la seva presentació emergeixen a partir de les necessitats humanes en contextos concrets, i que l'estructuració formal es produeix amb posterioritat La història ens proporciona, doncs, potents arguments de suport al nostre plantejament "de baix a dalt", que se sumen als proporcionats pels referents de la contextualització, la matematització i la modelització.

Dediquem el tercer capítol al disseny operatiu que permet traslladar el nostre plantejament a l'aula, dins de la realitat d'un centre de secundària. Reestructurem els continguts de la programació didàctica per adaptar-los al nostre plantejament, planifiquem la seqüència operativa de la implementació i dissenyem les activitats contextualitzades en l'entorn del programari interactiu Geogebra. En aquest disseny és especialment important la previsió de com els alumnes ens han de proporcionar la informació que sotmetem a anàlisi. Ja hem assenyalat que l'anàlisi de la matematització que realitzen els alumnes és un aspecte nuclear del nostre treball.

En el quart capítol mostrem els aspectes més rellevants sorgits del seguiment diari de la implementació a l'aula de les activitats amb Geogebra. És el que anomenem "primer nivell d'anàlisi". Ens proporciona una visió molt propera del procés de treball diari a l'aula i ens permet extreure algunes primeres conclusions sobre com el disseny de les activitats i la seva seqüència d'implementació indueixen la matematització en els alumnes.

El cinquè capítol conté la part més extensa i profunda de l'anàlisi de la matematizació dels alumnes en les activitats contextualitzades. Contemplem el conjunt de la seqüència de les activitats, sobre el qual apliquem una metodologia pròpia d'anàlisi de les dades, convenientment explicada amb detall. Analitzem amb instruments quantitatius i també qualitatius el resultats grupals i els resultats individuals dels alumnes en el procés de matematització, i realitzem una classificació dels alumnes en diferents categories. Tot això ens permet afirmar que les activitats efectivament indueixen la matematització en els alumnes, i detallem com es produeix això i amb quines diferències dins de cada categoria. Per aprofundir l'estudi qualitatiu de la matematització, duem a terme un estudi de casos sobre quatre alumnes en què

analitzem com matematitzen en les activitats amb Geogebra i ho comparem amb com realitzen una prova escrita convencional (amb “llapis i paper”).
També analitzem les valoracions subjectives dels alumnes sobre la realització de les activitats amb Geogebra, tant de la perspectiva grupal com des de la perspectiva individual. Aquesta anàlisi ens permet constatar que les activitats tenen un efecte clarament positiu sobre la motivació i la implicació de l’alumnat en el procés d’aprenentatge, així com una millor autoconsciència i una millor valoració de la comprensió dels continguts, en comparació amb una metodologia tradicional,.
A partir de l’anàlisi detallat de la matematització i les valoracions subjectives de l’alumnat, realitzem una sèrie de consideracions de les quals emergeix una síntesi interpretativa. És la sistematització del nostre plantejament didàctic, un cop analitzat i interpretat, sota la denominació de “plataforma de matematització”. Això comporta que a partir dels resultats del nostre treball d’implementació convertim el nostre plantejament en una proposta didàctica que creiem que pot ser extensible a altres unitats didàctiques i fins i tot a altres nivells educatius.

El sisè capítol està dedicat a presentar les conclusions del nostre treball. Després de mostrar que la hipòtesi de partida ha estat validada i els objectius operatius complerts, exposem de quina manera el nostre plantejament “de baix a dalt” ha induït la matematització a través d’activitats contextualitzades en l’entorn del programari interactiu Geogebra (a partir de la qual abordem la formalització final dels continguts), i de quina manera ha aconseguit una millor aprehensió dels continguts per part dels estudiants i també una major motivació, en comparació amb una metodologia tradicional, a la unitat didàctica de geometria analítica dins de les matemàtiques de primer curs de Batxillerat.
Acabem amb una sèrie de consideracions sobre les implicacions i perspectives del nostre plantejament innovador.

1. Introducció

Iniciem aquest capítol introductori fent referència a l'estat actual de l'ensenyament de les matemàtiques a l'educació secundària, no tan sols per situar-nos en el context estrictament acadèmic actual, sinó també per remarcar que el debat sobre l'educació ha transcendit l'àmbit acadèmic i ha esdevingut objecte de debat social. Aquesta contextualització en el moment actual ens permet abordar una de les motivacions inicials del nostre treball: la necessitat d'evolucionar des d'una metodologia didàctica tradicional cap a una metodologia innovadora.
A partir de diverses consideracions sobre la metodologia didàctica tradicional per a l'ensenyament de les matemàtiques, explicitem que el nostre treball, ja des del seu plantejament inicial, passa per integrar completament la innovació en el desplegament de la programació didàctica a l'aula de la geometria analítica de primer curs de Batxillerat (no tan sols superposar-la o utilitzar-la com a element complementari, sinó integrar-la). També fem les primeres pinzellades de quina és la nostra posició teòrica, especialment pel que fa a l'estudi de la matematització (un aspecte central en el nostre treball) i pel que fa a la nostra convicció que el coneixement de la història (en aquest cas de la geometria analítica) és una qüestió fonamental i prèvia a la concreció d'un plantejament didàctic.
Al final del capítol formulem quina és la nostra hipòtesi de treball i quins són els objectius operatius per a la implementació, els quals acompanyem d'una sèrie de comentaris que introdueixen i prefiguren el desenvolupament del nostre treball, un desenvolupament que realitzem en els capítols següents a aquest.

1.1. Les matemàtiques en els àmbits educatiu i social

1.1.1. Les matemàtiques dins del debat social sobre l'educació

El debat sobre l'estat de l'educació no queda limitat a l'àmbit docent o a l'àmbit de la investigació. Es tracta d'una qüestió pública: els mitjans de comunicació la consideren objecte de l'interès de tota la ciutadania. Des de l'última dècada del segle XX, dues forces propulsores han col·locat l'educació en aquesta situació: una és el debat polític i l'altra són els resultats de les proves internacionals que avaluen les competències de l'alumnat.
El debat polític s'ha desenvolupat en un context marcat pels canvis legals i normatius, que han sotmès el sistema educatiu espanyol a unes transformacions enormes (per exemple, l'extensió de l'educació obligatòria fins als 16 anys) però sense proporcionar-li estabilitat. La *Ley de Ordenación General del Sistema Educativo* (LOGSE) de 1990 va iniciar aquest període de profundes transformacions. La seva implantació efectiva va

començar a mitja dècada de 1990. El 2002, s'aprovava la *Ley de Calidad de la Educación* (LOCE), la qual no es va arribar a aplicar a causa d'un canvi de govern el 2004. El 2006 entrava en vigor la *Leu Orgánica de Educación* (LOE). La discussió política que van generar aquests processos es va convertir en assumpte d'interès social en la mesura que, a l'hora de debatre la conveniència o inconveniència dels canvis legals, s'aportaven i es difonien arguments, dades i opinions sobre l'estat de l'educació, els seus problemes i les possibles vies de millora.
D'entre les dades utilitzades en aquest procés de debat permanent i de canvis normatius, destaquen especialment els resultats de les proves internacionals d'avaluació de competències. I és ben conegut que una de les competències considerades fonamentals és la competència matemàtica. S'han citat molt els informes Pisa (*Programme for International Student Assessment*) que l'Organització per a la Cooperació i el Desenvolupament Econòmic (OCDE) realitza cada tres anys, a partir de proves estandarditzades per a estudiants de 15 anys. Per exemple, a l'informe corresponent al 2006 hi van participar 57 països, entre països considerats desenvolupats i altres en vies de desenvolupament, amb mostres representatives entre 3.500 i 50.000 alumnes per país. És important destacar que les proves mesuren la capacitat d'entendre i resoldre problemes presentats en contextos personals o culturals rellevants. Concretament, l'any 2003 les proves estaven dissenyades per mesurar amb més profunditat la competència matemàtica que les altres dues que hi intervenen sempre (comprensió lectora i ciències naturals).
El fet que els resultats espanyols, i més en particular els catalans estiguessin, des de la primera tanda de proves del 2000, sempre per sota de la mitjana dels països de l'OCDE i de la Unió Europea en els tres àmbits d'avaluació, ha captat l'atenció dels mitjans de comunicació i ha provocat que el debat hagi desbordat els àmbits estrictament científics o docents i s'hagi convertit en un assumpte públic. A això s'hi suma, com ja s'ha comentat abans, l'efecte que han tingut les controvèrsies polítiques, també difoses pels mitjans, sobre el marc legal de l'educació.

1.1.2. Les matemàtiques a l'educació secundària obligatòria i al Batxillerat

Les matemàtiques són considerades una matèria "instrumental" segons la terminologia utilitzada a l'educació obligatòria. És a dir, una matèria que proporciona a l'alumnat un conjunt d'instruments aplicables en contextos personals o socials. Quan les administracions amb competències educatives desenvolupen la normativa sobre el currículum tenen en compte aquest caràcter instrumental. A Catalunya, la normativa vigent és perfectament explícita en aquest sentit. Així, a l'etapa de la secundària obligatòria, el decret pel qual s'estableix l'ordenació d'aquests ensenyaments (143/2007, de 26 de juny) defineix la competència matemàtica com a competència bàsica:

"S'entén per competència la capacitat d'utilitzar els coneixements i habilitats, de manera transversal i interactiva, en contextos i situacions que requereixen la intervenció de coneixements vinculats a diferents sabers, cosa que implica la

comprensió, la reflexió i el discerniment tenint en compte la dimensió social de cada situació."

I més concretament:

"La competència matemàtica és necessària en la vida personal, escolar i social, ja que sovint cal analitzar, interpretar i valorar informacions de l'entorn i l'ús de les eines matemàtiques pot ser un instrument eficaç. Aquesta competència adquireix realitat i sentit en la mesura que els elements i raonaments matemàtics són utilitzats per enfrontar-se a aquelles situacions quotidianes, per tant, una competència que caldrà tenir en compte en totes les àrees del currículum i activitats d'aprenentatge. La competència matemàtica implica l'habilitat per comprendre, utilitzar i relacionar els números, les seves operacions bàsiques, els símbols i les formes d'expressió i raonament matemàtic, tant per produir i interpretar distints tipus d'informació, com per ampliar el coneixement sobre aspectes quantitatius i espacials de la realitat, i per entendre i resoldre problemes i situacions relacionats amb la vida quotidiana i el coneixement científic i el món laboral i social."

A partir d'aquestes referències, resulta del tot evident que és la pròpia administració educativa qui subratlla la importància de la contextualització i l'interdisciplinarietat.
Aquesta concepció no s'atura a l'acabament de l'educació obligatòria, sinó que també és present al Batxillerat. El decret pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments del Batxillerat (142/2008, de 15 de juliol) es refereix explícitament a la continuïtat respecte l'etapa obligatòria i insisteix en la necessària connexió del procés educatiu amb els contextos reals.

"Les matèries del Batxillerat s'orienten i estructuren en coherència amb les etapes educatives anteriors i els ensenyaments superiors, a partir del concepte de competència, entesa com l'aplicació de coneixements i destreses en la resolució de problemes i en situacions complexes, mobilitzant recursos diversos adquirits en diferents moments del trajecte acadèmic, que sovint depenen de diverses disciplines o de l'experiència adquirida."

"Tot i que el que s'accepta en matemàtiques és el que està provat, la matemàtica en el seu procés de gestació està formada per experiències, observacions i intuïcions que, en alguns casos, condueixen a descobriments plausibles. Contrastar aquests descobriments a través de l'estudi de casos concrets conduirà a modificar-los, rebutjar-los o acceptar-los. Posar a prova les conjectures descobertes i potser refutar-les és una activitat que facilita una correcta interpretació de l'error, forma part del procés de millora del raonament i educa el pensament crític dels nostres alumnes. La necessitat del rigor quedarà justificada quan l'alumne/a descobreixi i defensi, oralment i per escrit, conjectures que posteriorment ell mateix pugui refutar."

"La competència en contextualització és consubstancial al treball matemàtic en el Batxillerat. L'aprenentatge de la matemàtica a l'ensenyament obligatori es produeix en contextos específics i a través de problemes concrets."

I encara més: apareixen referències directes a quin tipus de plantejament metodològic general es considera convenient. Primer, partir de situacions concretes, contextualitzades, per després, a partir d'elles, abordar la formalització.

"Sense abandonar l'experimentació, l'observació i el treball conjectural propis de les etapes obligatòries, l'ensenyament de la matemàtica a Batxillerat ha de facilitar entorns d'aprenentatge en els quals sorgeixi la necessitat de rigor i la concreció d'aquest. La formalització de resultats haurà de ser introduïda com a punt d'arribada del procés de construcció de coneixement matemàtic."

"Cal facilitar entorns d'aprenentatge en els quals la resolució de problemes forci l'alumne/a a fixar l'atenció en la situació plantejada, cercar relacions entre les variables implicades i descobrir patrons generals per tal d'obtenir un model que, amb un nivell de sofisticació gradual, permeti interpretar el problema plantejat."

I s'aposta per integrar l'ús de les tecnologies de la informació en el desenvolupament de les activitats didàctiques:

"En la realitat d'aquest moment, l'alumne empra aparells tecnològics amb facilitat i freqüència; per tant, i a fi que en faci un ús correcte cal que disposi de la guia i l'orientació del professorat. Les noves tecnologies poden integrar-se en l'ensenyament de la matemàtica amb finalitats diametralment oposades. Així, el programari que permet efectuar càlculs numèrics o simbòlics pot conduir a incrementar l'exposició de resultats tancats, ja que les seves aplicacions poden ser exemples reals que, tot i ser rutinaris, requereixen gran potència de càlcul. La selecció dels recursos tecnològics ha de permetre, a més, que siguin una eina que s'empri en la resolució de problemes per experimentar, observar, proposar conjectures i contrastar-les, en definitiva, una eina al servei de la creativitat. El disseny d'activitats que participen de la capacitació tecnològica i la competència digital són àmplies i és desitjable afavorir aquelles que faciliten el descobriment per part de l'alumne. No es pot perdre de vista que l'estudiant té una gran facilitat en l'ús de les noves tecnologies i, en conseqüència, hem d'orientar la seva utilització per tal que estiguin al servei de l'alumne/a i no aquest a disposició d'elles."

Aquesta posició de l'administració educativa, reflectida en el decret d'ordenació del Batxillerat, representa una evident intenció de canvi respecte de la metodologia tradicional de l'ensenyament de les matemàtiques a les aules. Aquest és un assumpte que no tan sols es reflecteix en la normativa d'ús específic per als professionals de l'educació, sinó que també arriba a tot l'àmbit social. No d'una manera tan tècnica com la que correspon als decrets de l'administració, però sí de manera resumida i clara, a través dels mitjans de comunicació. Així, per exemple, el 13 de desembre de 2007 apareixia una notícia al diari *La Vanguardia* amb el títol "La Generalitat canviarà les proves de selectivitat en el curs 2008-2009". Del text d'aquesta notícia destaquen aquestes línies:

"El catedràtic Joaquim Prats, director del Consell Superior d'avaluació del Sistema Educatiu, estimava necessari canviar l'orientació del sistema d'aprenentatge de manera que l'exigència cap als alumnes fos menys enciclopèdica i més d'aplicació didàctica. I és en aquesta línia en la que s'està treballant a Educació.
«Estem introduint canvis en els procediments, en sintonia amb el que es fa a Europa i en consonància amb la manera que PISA avalua els coneixements dels alumnes», assenyala Graells. A la pràctica, això significa que els alumnes aprendran de forma més transversal, relacionant els coneixements que s'imparteixen en diferents assignatures. Encara que el currículum manté les seves estructures, el que varia és la forma de treballar-lo a l'aula.
Les assignatures tenen un enfocament més pràctic i proper, i es passa d'un sistema de transmissió descriptiu a un altre basat en la interacció, investigació i reflexió, de tal manera que l'alumne es planteja preguntes i resol problemes més reals a partir dels coneixements que adquireix."

1.2. L'ensenyament de les matemàtiques a les aules de secundària

1.2.1. El Predomini de la metodologia tradicional i el paper de les TIC

El debat social, vehiculat pels mitjans de comunicació, posa de relleu problemes i mancances a l'educació. Es discuteix, sovint amb ardor, sobre quines mesures legislatives i organitzatives caldria prendre per obtenir millores. Per la seva banda, l'administració educativa defineix les competències que l'alumnat ha d'adquirir en l'Educació Secundària Obligatòria i en el Batxillerat, i fins i tot entra en el terreny de la metodologia didàctica. Mentrestant, els centres educatius viuen el seu dia a dia, en el qual:

"... la major part dels equips directius i docents continuen aplicant sistemes pedagògics tradicionals, que no es caracteritzen per la participació de l'alumnat en el seu procés formatiu: Encara que els centres de secundària s'han connectat massivament a Internet i tenen ordinadors, una quarta part dels directors assegura que en els últims anys al seu institut no s'han realitzat canvis en les pràctiques pedagògiques."

La cita anterior pertany a una informació publicada pel diari *La Vanguardia* el 21 d'agost de 2008 sobre els resultats de l'estudi *Second information technology in education study 2006* (Sites 2006), que és un projecte internacional d'avaluació de l'aplicació de les TIC a l'educació secundària.
Efectivament, tal com assenyala la cita, i malgrat que la societat actual experimenta canvis profunds en la gestió i difusió de la informació i el coneixement, la manera com s'expliquen i es treballen els continguts de les programacions didàctiques a l'educació secundària i en particular al Batxillerat no ha variat, en essència, des de fa molts anys. I és perfectament possible fer un breu resum de les principals característiques del procés que es mantenen inalterables.

En una aula, el professor o professora realitza una classe magistral (és dir, explica els continguts en veu alta i va omplint, esborrant i tornant a omplir la pissarra) davant d'un alumnat que seu, escolta i pren apunts (prendre apunts sol significar, en la immensa majoria dels casos, copiar el que el professor o professora escriu a la pissarra). De vegades, el docent pregunta alguna cosa a un alumne en concret o llança una qüestió al conjunt de la classe i espera que algú respongui. També de vegades, fa sortir un alumne a la pissarra perquè resolgui algun exercici o problema a la vista de la resta dels seus companys. Però aquests exercicis i problemes arriben després que s'hagin explicat els continguts teòrics necessaris per poder-los realitzar. Existeix una seqüència, un ordre, que no ha canviat: primer els continguts teòrics, presentats de manera formal (definicions, propietats, teoremes...) amb alguns exemples d'aplicació si el docent considera que escauen i, sempre després d'això anterior, els exercicis i problemes que l'alumnat ha de treballar a l'aula o a casa, sabent que el professor els comentarà a la pissarra, o escriurà anotacions als quaderns dels alumnes (com se sol dir, el docent "corregeix" els exercicis i problemes).
En la primera part de la seqüència, que és l'explicació teòrica, no tan sols s'introdueixen els continguts, sinó també el llenguatge amb el qual s'expressen. Per tant, l'alumnat es troba davant d'un bloc teòric estructurat, coherent i expressat en un llenguatge concís. És com si els continguts teòrics baixessin des de l'Olimp de la teoria fins a l'aula, perfectament acabats, refinats i condensats. És el professor qui dirigeix aquesta baixada i per tant el seu paper en el procés és fonamental. És la persona experta que transmet els continguts.
Però aquests continguts, i més en particular la manera com estan organitzats, són també en un registre escrit que s'anomena llibre de text. El professor i tots els alumnes en tenen un exemplar cada un. El llibre està redactat seguint la mateixa seqüència que hem comentat abans. Cada unitat didàctica comença amb una exposició dels continguts teòrics, que pot estar més o menys complementada per exemples, i acaba amb una col·lecció d'exercicis i problemes, tot i que també n'hi pot haver d'intercalats en el desplegament de la teoria. En tot cas, si s'intercalen, és amb la intenció de no deixar tots els exercicis per a després de tota la teoria, i de fragmentar el procés en blocs més petits que al cap i a la fi també segueixen el mateix ordre de primer teoria i després aplicació.
El docent pot seguir, si vol, el llibre amb molta fidelitat o bé usar-lo com a suport per a la seva versió de les explicacions. I és habitual que els alumnes copiïn el que escriu a la pissarra encara que tinguin sempre a mà els mateixos continguts al llibre de text.

Actualment les tecnologies de la informació i la comunicació (TIC) són presents a la immensa majoria dels centres educatius de primària i de secundària. Hi són sobretot, i especialment des de l'última dècada del segle XX, a les anomenades aules d'informàtica: uns espais on hi ha instal·lats de manera fixa una sèrie d'ordinadors. Més recent és la idea de portar les TIC a l'aula ordinària, és a dir, d'utilitzar equipament mòbil per al professor i de vegades també per als alumnes, amb connexions inalàmbriques a Internet (ja que cada vegada més la xarxa ofereix recursos didàctics). Però a la majoria dels centres educatius són les aules d'informàtica els espais on els alumnes treballen amb les TIC quan el professor hi organitza una sessió.

Ara bé: malgrat que, aparentment, els centres educatius estan "informatitzats", l'ús de les TIC és en general escàs. La presència d'ordinadors i d'equips multimèdia no es tradueix a la pràctica en una integració efectiva de les TIC a les activitats d'ensenyament i aprenentatge. Continua predominant l'estil tradicional d'impartir les classes.
L'escassa incorporació de les TIC a les activitats d'ensenyament i aprenentatge no tan sols s'ha constatat mitjançant estudis fiables, sinó que també ha ocupat planes de la premsa i per tant s'ha incorporat al debat públic. És significatiu que un diari d'àmplia difusió a Catalunya com és *La Vanguardia* publiqués el 21 d'agost de 2008 dues planes completes dedicades a presentar resumidament, i comentar, els resultats de l'estudi Sites 2006. L'article col·locava precisament en el terreny del debat públic el fet que, segons l'estudi, només el 38,4% del professorat de matemàtiques dels 356 centres educatius catalans que hi havien participat declarava que usava les TIC a l'aula i que hi feia participar el grup classe. Això, a pesar que:

"El professorat que utilitza les TIC amb la classe assoleix nivells de confiança superiors als de la resta de docents i la majoria opina que la seva actuació té un impacte positiu a la motivació del seu alumnat, a les habilitats per tractar la informació i en el coneixement de la matèria. Prop del 70% del professorat usuari de les TIC assegura que utilitzar-les a classe augmenta "molt o bastant" les habilitats d'autoaprenentatge de l'alumnat, i més del 50% diu que incrementa l'autoestima de l'alumnat, la seva habilitat per solucionar problemes i la capacitat de col·laboració i comunicació."

Ja ho hem esmentat abans en aquest capítol introductori, i cal insistir-hi perquè es tracta d'un assumpte rellevant: la realitat quotidiana ens indica que no tan sols estem en el terreny de la discussió d'idees entre experts o professionals, sinó que el debat ha transcendit l'àmbit dels especialistes i s'ha convertit en un assumpte públic. Citàvem en línies anteriors una notícia apareguda a la premsa (21 d'agost de 2008) sobre els resultats de l'estudi Sites 2006 referits als centres educatius catalans. No es tracta d'una presència esporàdica o aïllada en els mitjans de comunicació de gran difusió. Tres mesos després, el 25 de novembre de 2008, la premsa insistia sobre el mateix assumpte (el Sites). Aquesta vegada a causa que el departament d'Educació donava a conèixer bàsicament les mateixes dades que tres mesos abans ja havien estat avançades per altres fonts. Així, el diari *El Periódico* publicava una informació que contenia aquestes frases:

"… menys de dos de cada 10 docents d'aquestes disciplines [Ciències i Matemàtiques] *utilitzen les noves tecnologies amb una freqüència setmanal i la immensa majoria dels ensenyants utilitzen gairebé en exclusiva les classes magistrals com a instrument per transmetre els coneixements."*

"La gran majoria dels professors de Ciències i Matemàtiques imparteixen la docència a l'ESO com es feia dècades enrere, d'esquena a l'ús dels ordinadors a l'aula i sense tenir en compte els recursos que proporcionen les tecnologies de la informació i la comunicació (TIC) per familiaritzar l'alumnat amb les matèries."

I al diari *Avui* apareixien aquestes frases:

"Els directors de secundària valoren les TIC principalment com a eines per augmentar la motivació dels alumnes (38,6%) però són molts pocs (el 13,6%) els que consideren que aquests instruments són importants per millorar el rendiment i només l'11,6% en destaca la seva importància per preparar els alumnes de cara al món laboral. Aquest últim percentatge és el més baix de tots els països consultats."

"… els resultats de l'informe constaten que més de la meitat dels centres de secundària tenen concentrats els ordinadors a les aules d'informàtica i a la biblioteca, mentre que la presència d'ordinadors a la majoria de les aules només es dóna en un de cada 100 instituts catalans. Israel és l'únic país que registra un percentatge menor d'ordinadors que Catalunya a les classes."

L'impacte que aquestes notícies puguin tenir en una persona no especialista en educació, sinó simplement lectora habitual de la premsa, i que en general puguin tenir sobre el gran públic, contribueix a modelar la percepció col·lectiva dels problemes de l'educació i, inevitablement, incideix sobre les centres educatius, pel simple motiu que de la mateixa manera que l'estat de l'educació influeix sobre el debat social, el debat social influeix sobre l'estat de l'educació.

Tornem a les TIC: la possibilitat d'usar-les a l'aula no està tan sols condicionada pel fet de disposar de més o menys maquinari, o de més o menys espai, sinó que també depèn dels recursos didàctics a l'abast dels docents. En el temps en què van aparèixer de manera prou generalitzada els ordinadors als centres educatius de primària i de secundària, aquests recursos consistien en programari que calia instal·lar a cada una de les màquines, amb l'acompanyament de manuals tècnics i potser alguna guia didàctica. Actualment, el programari a l'abast és més divers i potent, i més ben dissenyat per a aplicacions específicament didàctiques. I també s'ha obert un camp encara més ampli: els recursos en xarxa. L'ús d'Internet s'ha estès a la immensa majoria dels centres educatius, i això ha multiplicat les possibilitats d'accés a múltiples recursos didàctics, en constant augment. Amb l'avantatge que es poden descarregar directament de la xarxa o bé permeten l'ús directe sense descàrrega ni instal·lació.
No obstant això, tal com hem comentat abans en aquesta mateixa introducció, el nucli central del plantejament didàctic tradicional segueix majoritàriament vigent. I quan s'utilitzen TIC, sovint actuen per superposició, com a suport més o menys ocasional del plantejament tradicional. Això significa que constitueixen un recurs extra que certament complementa les classes tradicionals i hi afegeix valor, però que si queda reduït o suprimit per qualsevol causa no produeix cap alteració important en el desenvolupament de la programació didàctica de la matèria.
L'estratègia d'integrar les TIC com a part essencial i inseparable del plantejament didàctica a l'aula, per desenvolupar una programació didàctica que vol assolir uns certs objectius curriculars, és encara lluny de ser majoritària. De fet, l'ús de les TIC per realitzar aquest propòsit és, per si mateix, una innovació didàctica en el moment actual. Potser en un futur no gaire llunyà no ho serà, perquè sense TIC serà impensable implementar una programació. Però ara sí que és una innovació. Per tant, podem canviar l'acrònim "TIC" per la paraula "innovació" a la frase inicial d'aquest paràgraf i el

resultat serà igual de cert: "L'estratègia d'integrar la innovació com a part essencial i inseparable del plantejament didàctica a l'aula, per desenvolupar una programació didàctica que vol assolir uns certs objectius curriculars, és encara lluny de ser majoritària".

En el camp concret de les TIC a la geometria i a l'àmbit educatiu europeu, es va produir un salt qualitatiu quan van aparèixer les primeres versions del programa de geometria dinàmica Cabri-Géomètre. El mot Cabri ve de la frase en francès *le CAhier de BRouillon Interactif* (literalment, el quadern interactiu per a esborranys). Aquest programa tenia l'origen en una proposta de Jean Marie Laborde, desenvolupada com a aplicació informàtica en una primera versió elaborada per Apple el 1988. El 1989, Cabri s'implantava amb força al mercat educatiu francès amb el ple suport del ministeri d'educació i tot seguit es distribuïa per molts altres països.
El pas evolutiu següent va arribar amb l'aparició de Cabri II, desenvolupat per Texas Instruments. El Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, a través del Programa d'Informàtica Educativa (PIE), el va començar a distribuir als centres de secundària al final del curs 1999-2000. Cabri II permetia totes les construccions de la versió anterior i a més incorporava novetats rellevants entre les quals destacava la possibilitat de treballar amb eixos de coordenades i equacions (rectes, circumferència, còniques en general...) i també l'opció de visualitzar llocs geomètrics. És a dir, que, a diferència de les versions anteriors, Cabri II es convertia en una eina de gran utilitat per treballar la geometria analítica, amb l'avantatge afegit que es tractava d'un programa distribuït per l'administració educativa.
Posteriorment, en aquest àmbit de programari per a la geometria, apareix Geogebra, de lliure accés, en llenguatge Java, a partit d'un projecte iniciat el 2001 per Markus Hohenwarter a la universitat de Salzburg. Geogebra, a més de la representació geomètrica en un sistema de coordenades, ofereix una finestra on apareix la "traducció" algebraica i desplega utilitats per a la representació de funcions. Per tant, permet treballar en un mateix entorn continguts i procediments de geometria, àlgebra i anàlisi que abans requerien de diversos programes específics. Com a programari educatiu, ha obtingut prestigiosos premis a Europa i als Estats Units.

Els recursos TIC per a l'educació han evolucionat ràpidament en pocs anys i és raonable esperar que encara han d'evolucionar molt més. Per aquest motiu, les especificitats tècniques concretes d'un programa o d'una aplicació concrets no són el més important. D'aquí a uns anys, altres versions dels programes actuals, o programes diferents, o aplicacions en línia a Internet, substituiran les eines TIC que s'utilitzen ara. Però les investigacions actuals encara tindran valor si són didàcticament consistents, i les innovacions que hi estiguin associades hauran, en major o menor mesura, obert camins.

1.2.2. La innovació didàctica integrada en el currículum

Qüestionar si és convenient mantenir un enfocament tradicional de l'activitat didàctica no ha de fer perdre de vista en cap moment que hi ha unes programacions didàctiques

que s'han de complir i, per tant, uns objectius que cal assolir. En acabar l'etapa educativa del Batxillerat en la qual es desenvolupa la investigació que ocupa aquest treball, els nois i les noies estudiants han d'haver adquirit uns coneixements i unes habilitats que no tan sols han de satisfer els estàndards mínims fixats per l'administració educativa, i desenvolupats pel centre educatiu on estudien, sinó que també els han de situar en bones condicions per superar les proves d'accés a la universitat, si és que desitgen accedir als estudis universitaris. En conseqüència, qualsevol enfocament didàctic que plantegi algun tipus d'alternativa a la manera tradicional d'impartir les classes, ha d'assumir que haurà de funcionar en condicions reals i haurà de complir les programacions. Aquesta observació resulta especialment pertinent si tenim en compte que és fàcil caure en la temptació de reorganitzar continguts, buscar metodologies alternatives i crear materials nous que, malgrat la seva brillantor, tinguin un difícil encaix, o impossible, dins de les exigències i els límits que marquen el currículum i les programacions.
Així, per exemple, podria fàcilment succeir que el plantejament alternatiu consumís molt més temps que un enfocament tradicional i que per tant impedís abordar tots els continguts previstos dins del curs escolar. Cal tenir en compte que el mètode tradicional comença per presentar els continguts teòrics de manera formal, i per tant ofereix un producte perfectament acabat que l'alumnat ha d'assimilar i en tot cas aplicar després a diversos exercicis i problemes. Pretendre que aquest ordre no es mantingui i que l'alumnat participi en un procés que no comença per un bloc teòric acabat sinó que s'hi apropa gradualment, implica un procés de treball que necessita temps. Respecte això anterior, cal tenir també en compte que els currículums fixats per l'administració i les programacions didàctiques que els desenvolupen parteixen precisament de la metodologia tradicional, amb llarga experiència d'aplicació, per calcular quants continguts es poden encabir en un curs escolar. Malgrat això, existeix una queixa que és habitual entre el professorat: falta temps per ensenyar tots els continguts del currículum. En aquestes condicions, és senzill adonar-se que si en un plantejament tradicional ja existeix un problema de temps, en un plantejament alternatiu aquesta dificultat es pot agreujar.
Podria també fàcilment succeir que un enfocament alternatiu plantegés uns reptes organitzatius i una demanda de recursos materials inassumibles per al centre educatiu. Per exemple, un treball que necessités grups reduïts i per tant més professorat que un plantejament tradicional. O un projecte que demandés uns recursos tecnològics que el centre no té o que no pot proporcionar amb la intensitat requerida perquè s'han de distribuir també entre altres nivells i matèries. O també podria succeir, per exemple, que no tingués en compte que de vegades no es possible realitzar una sessió perquè el professor no hi pot ser per algun motiu, i que per tant s'ha d'ajornar. O que no sempre es té el grup sencer d'alumnes a classe perquè alguns d'ells poden faltar a causa d'algun motiu pertanyent a un conjunt molt ampli de circumstàncies.
En resum, un plantejament alternatiu que pretengui superar la fase de propòsit i de disseny per poder-se aplicar de manera efectiva, ha de situar-se en la realitat del context docent, amb tots els condicionants organitzatius i materials que això comporta.

1.3. La història com a referent i el bagatge teòric

Els continguts curriculars que s'ensenyen a les classes de matemàtiques tenen, evidentment, una història: van aparèixer en un moment determinat, en els treballs de determinats matemàtics; alguns són tan antics que és difícil situar cronològicament la seva aparició i identificar l'autoria. Però tots sorgeixen en uns contextos intel·lectuals que són una part dels contextos generals de les diferents èpoques històriques. Les matemàtiques no es creen el buit: són un producte humà inseparable de les aspiracions i les necessitats humanes. Moltes vegades comencen com a bones respostes per a necessitats purament pràctiques. És el cas, per exemple, dels inicis de la geometria com a eina per a l'agrimensura en les societats antigues, o de l'aritmètica com a indispensable instrument de comptabilitat. Més tard, les regles pràctiques s'eleven fins a l'abstracció i esdevenen un producte intel·lectual refinat, aparentment deslligat de les aplicacions, que proporciona nous resultats i obre magnífiques perspectives. És el cas, per exemple, de la geometria clàssica dels grecs antics. Aquesta és la seqüència més corrent en la història. Primer els resultats pràctics, limitats però útils; després, la generalització, la teoria, l'estructura, l'abstracció.

A la didàctica de les matemàtiques hi operen forces anàlogues. La presentació dels continguts, fins i tot en un plantejament estrictament tradicional de les classes, no consisteix en l'exposició per ordre cronològic dels resultats històrics, i tampoc és una reproducció més o menys comentada dels resultats originals. Així, per exemple, parlem de coordenades cartesianes i de Descartes com a fundador de la geometria analítica, però una ullada a l'obra original, en aquest cas *La geometria* (1637) de René Descartes, ens descobreix un text que ens resulta molt poc familiar perquè no s'assembla als textos moderns sobre la matèria, ni els elementals ni els avançats. En el trajecte des d'aquella obra fundacional fins al present, s'hi han sumat altres contribucions teòriques i la labor de molts ensenyants, que han desembocat en l'organització i la presentació dels continguts que s'ofereixen a l'alumnat actual. Es tracta, per tant, d'un procés llarg, d'una prolongada destil·lació. És la *transposició didàctica*: el conjunt de transformacions que pateix un saber científic amb la finalitat de ser ensenyat.

La selecció, l'organització, la presentació i la metodologia que intervenen a la didàctica de les matemàtiques tenen també una història i són, en tots els sentits, productes intel·lectuals i culturals. En apartats anteriors d'aquest capítol ens hem referit sovint a la metodologia tradicional i hem utilitzat també la paraula innovació. Ara bé: per molt que la paraula innovació vulgui referir-se a una cosa explícitament diferent de la metodologia tradicional (és dir, diferent d'un producte amb una història al darrere, hereu d'una pràctica elaborada i consolidada al llarg de molts anys), no ha de cometre l'error de pretendre erigir-se com un artefacte totalment deslligat dels referents històrics, ja que la manera com apareixen, es desenvolupen i es consoliden els coneixements, ens proporciona dades molt valuoses per abordar els processos d'ensenyament i aprenentatge. De la mateixa manera que les primeres exploracions sobre casos relacionats amb les necessitats pràctiques de la humanitat desemboquen finalment en elaborades estructures abstractes, l'abordatge d'un determinat contingut començant per situacions concretes i contextualitzades, per acabar en l'abstracció, és un procés didàcticament productiu.

Hem apuntat, de manera molt breu, com a exemple pertinent, cap a la fundació de la geometria analítica i al seu posterior desenvolupament fins a la formalització teòrica i la construcció d'una presentació dels continguts amb finalitat didàctica. Aquí hi advertim que efectivament la formalització és un producte final d'un procés que comença per la resolució de situacions concretes. De fet, els esforços originals de qui és considerat el fundador, René Descartes, anaven dirigits a les aplicacions molt més que a la teoria per si mateixa. Pot fins i tot resultar sorprenent per a algú familiaritzat amb la presentació moderna dels continguts didàctics a l'estil tradicional (primer la teoria, després les aplicacions) que al mateix Descartes no li interessés tant el món com hauria de ser idealment (en un pla teòric idealista, platònic) sinó comprendre'l tal com és. Utilitzava les matemàtiques com a camp de pràctiques especialment adequat per al seu famós "mètode".
Ríbnikov, un historiador de la matemàtica, assenyala que el procés d'introducció i consolidació de les coordenades, i el de la geometria analítica en general, va necessitar temps. No va ser fins al 1731 que es van començar a utilitzar les coordenades a l'espai de manera sistemàtica. Encara durant el segle XVIII no estava clara, per a força matemàtics, quina podria ser la utilitat de la geometria analítica (amb coordenades i àlgebra) enfront de la tradició geomètrica heretada dels grecs (amb regle i compàs). Això no són més que breus apunts que pretenen reforçar amb un necessari èmfasi la idea que presideix aquest apartat: a l'evolució històrica, el més corrent és que primer l'interès estigui centrat en les aplicacions; més tard arriba la formalització teòrica. És natural: la necessitat de resoldre situacions concretes proporciona l'impuls inicial cap a un procés de matematització que esdevé progressivament més abstracte.

A partir d'aquí podem formular la pregunta següent: ¿per què, doncs, a la didàctica tradicional es comença primer per la presentació abstracta i formal dels continguts, i és només després d'això que s'aborda la resolució de situacions concretes, més o menys contextualitzades?
Conèixer la història de la matemàtica, i en concret la història de la geometria analítica, ens permet adonar-nos com s'han originat, com han evolucionat i com han adquirit la forma moderna els continguts que s'ensenyen a les aules. Per tant, té una funció important que consisteix a proporcionar un acostament als continguts matemàtics ben diferent de l'abordatge didàctic tradicional, que es basa en una teoria perfectament acabada, estructurada i coherent que no és cap altra cosa, en realitat, que un producte final d'un llarg procés històric. Observar només aquest producte final significa perdre de vista la gestació en la qual ha pres forma. És, per tant, conformar-se amb una perspectiva sens dubte consistent des d'un punt de vista formal, però descontextualitzada i desproveïda d'una informació rellevant per a la didàctica.
El nostre treball dedica part d'un capítol a la història de la geometria analítica i la seva didàctica, on hi apareixen no tan sols aspectes purament tècnics des d'un punt de vista matemàtic, sinó que també hi figuren elements dels contextos històrics i reflexions diverses sobre l'evolució d'aquesta branca de la matemàtica, moltes pertanyents a historiadors de la matèria, i algunes nostres.

Per buscar els fonaments teòrics del nostre treball en textos d'autors que s'han dedicat a la didàctica de les matemàtiques, ens hem inspirat, com a punt de partida, en el que se'ns revela després d'examinar la història de la geometria analítica (exposada amb deteniment al capítol 2). La història ha passat per unes etapes que, amb l'algebrització i la formalització dominant dins la metodologia didàctica tradicional, han quedat ocultes: primer, va ser el temps dels problemes concrets considerats des d'un punt de vista geomètric; després, s'hi va incorporar l'àlgebra, però sense perdre de vista la geometria; finalment, va arribar l'abstracció purament algebraica. A més, ja hem comentat en apartats anteriors d'aquesta introducció com opera la metodologia didàctica tradicional: primer la teoria, després les aplicacions.

Hi ha autors teòrics que han tractat en profunditat com enfocar l'educació matemàtica partint de la resolució de situacions concretes per arribar després a les generalitzacions. Hem triat com a base teòrica fonamental aquells que pertanyen a una tradició investigadora amb un important recorregut: es tracta dels autors del que podríem anomenar "l'escola holandesa", que sorgeix i es desenvolupa a partir de l'obra de Freudenthal, com a autor, i de les investigacions d'altres autors vinculats al conegut i reconegut Institut Freudenthal (Institut Freudenthal per a l'Educació de la ciència i les matemàtiques, que forma part de la facultat de Ciències de la Universitat d'Utrecht, a Holanda).

Ens basem especialment en la Matemàtica Realista (*Realistic Mathematics Education,* RME), la qual distingeix entre les matematitzacions horitzontal (MH) i vertical (MV). Tractem això amb el detall que es mereix al capítol 2, dedicat al marc teòric, perquè la MH i la MV són fonamentals per al nostre plantejament.

Però també bevem de les fonts dels autors de la modelització, o modelatge matemàtic. La matematització i la modelització incideixen, amb punts de vista similars, sobre el mateix aspecte: l'organització i la resolució de situacions contextualitzades comporta l'aplicació de les matemàtiques no tan sols per abordar problemes de caire realista, sinó que també condueix a l'elaboració de conceptes més generals i abstractes. De fet, podríem dir que la diferència és de mida. Se sol parlar de modelització quan es matematitza un fenomen o una situació d'una certa complexitat, mentre que el terme matematització ja es pot usar des d'un nivell més bàsic, com a aplicació de les matemàtiques per descriure una determinada realitat, i per treballar sobre ella, sigui gran o petita, senzilla o complexa.

La nostra inclinació per plantejaments on es pugui aplicar l'adjectiu "realista" no es limita tan sols a les situacions concretes en què l'alumnat hagi de matematitzar. Més enllà de la RME (que desenvolupem en el capítol 2) tal com apareix en els textos dels autors seleccionats, ens agrada afirmar que busquem un marc de treball a l'aula estrictament realista. No pretenem assajar activitats, passar proves o qüestionaris que actuïn com un artefacte superposat, o afegit, a un determinat procés didàctic. Ben al contrari: ens proposem una implementació absolutament integrada, en el sentit que no se superposi, sinó que conformi el propi procés. A més de treballar dins dels límits del currículum i de la programació didàctica de la matèria de matemàtiques de primer de Batxillerat, ho volem fer amb tot el grup d'alumnes, sense considerar cap mostra. Tot l'alumnat ha de participar en el procés i generar dades que seran objecte d'anàlisi, grupal i individual.

Aquest enfocament concedeix una gran importància no tan sols a determinades activitats, sinó també a quin conjunt integrat en el currículum formen, quina seqüència tenen i, en definitiva, a quin entorn didàctic configuren. Per això hem cregut convenient fer referència, en el capítol dedicat al marc teòric, a la classificació dels mètodes d'ensenyament de les matemàtiques i als conceptes de "sistema didàctic" i "transposició didàctica", pel fet que subratllen que allò que s'ensenya resulta condicionat per les decisions curriculars i organitzatives en un marc institucional (les autoritats educatives, les decisions del centre educatiu) i també (i això és essencial per al nostre propòsit) per l'elecció del tipus de plantejament didàctic concret que realitza el docent.

1.4. Hipòtesi i objectius

En apartats anteriors d'aquest capítol hem ofert elements suficients com per considerar que hem apuntat l'aspecte fonamental del nostre plantejament per als processos d'ensenyament i aprenentatge, a l'aula, de la geometria analítica de primer curs de Batxillerat: un entorn didàctic que comenci per activitats d'aplicació, i que només després d'això abordi la formalització i l'abstracció. Això ho justifiquem detalladament, amb arguments de tipus històric, i amb una presa de posició en el marc teòric, al capítol 2. Però ja en aquest primer capítol introductori, manifestem que considerem perfectament possible dissenyar i implementar un entorn d'aquestes característiques.
Aquesta afirmació la presentem de manera més formal com a hipòtesi de treball:

Hipòtesi:

H *Un enfocament de matematització "de baix a dalt" permet dissenyar i implementar activitats d'ensenyament i aprenentatge de la geometria analítica de primer de Batxillerat.*

Són necessaris un treball de disseny, i una posterior implementació, que concretin el nostre propòsit en una acció didàctica real.
Per al disseny i la implementació ens fixem uns objectius que constitueixen un punt de partida operatiu. Des d'aquests objectius, que presentem en aquesta part final del present capítol, desenvolupem la fase de disseny, i explicitem una sèrie de consideracions metodològiques. Aquesta tasca de desenvolupament, planificació i disseny la duem a terme al capítol 3.

Mostrem, doncs, quins són els nostres objectius (O) per al disseny i la implementació. Per al primer objectiu hem desplegat una conseqüència (C) i dos subobjectius (SO) amb la finalitat de concretar-lo i de destacar-ne aspectes que són importants.
Per a cada objectiu, subobjectiu o conseqüència, mostrem un enunciat concís, en lletra cursiva, i també afegim una sèrie d'aclariments i consideracions que estimem necessaris per situar amb claredat quina és la nostra posició. Una posició que, essent volgudament clara des del principi, troba els elements de justificació teòrica, de concreció operativa, d'implementació i d'anàlisi en capítols posteriors.

Objectiu 1:

O1 *Dissenyar i implementar activitats d'ensenyament i aprenentatge de la geometria analítica de primer de Batxillerat amb un enfocament "de baix a dalt".*

Immediatament després d'haver enunciat l'objectiu 1, considerem convenient explicitar que se'n desprèn una conseqüència fonamental per al disseny i la implementació, i que és determinant per establir la seqüència didàctica corresponent:

Conseqüència 1.1:

C1.1 *Integrar la implementació de les activitats dins del currículum i la programació didàctica de matemàtiques de primer de Batxillerat.*

Encara que ja ho hem comentat en apartats anteriors d'aquest capítol introductori, estimem que en aquest apartat dedicat als objectius del treball és necessari subratllar que el nostre plantejament comporta una implementació perfectament integrada dins del currículum i de la programació didàctica, de manera que les activitats i la metodologia permeten que l'alumnat assoleixi allò que estableix aquesta programació, però mitjançant un enfocament didàctic (el nostre) no convencional.
L'encaix dins de la programació didàctica implica que la seqüència d'activitats ha d'estar dissenyada no només per desenvolupar (amb l'enfocament "de baix a dalt") els continguts previstos, sinó que ha de respectar el temps disponible per a la unitat didàctica de la geometria analítica de primer curs de Batxillerat. Sota aquestes condicions elaborem les activitats i preparem la seva implementació per convertir en un conjunt operatiu el nostre plantejament didàctic. Al capítol 3 exposem amb detall la planificació de la seqüència d'activitats, així com l'estructura dels continguts que en formen part.

També dins de l'objectiu 1, distingim dos subobjectius:

Subobjectiu 1.1:

SO1.1 *Crear un entorn d'aprenentatge en el qual l'alumnat desenvolupa les matematitzacions horitzontal i vertical.*

Subobjectiu 1.2:

SO1.2 *Usar les TIC com a recurs fonamental de l'entorn d'aprenentatge perquè l'alumnat matematitzi.*

Ens proposem investigar com l'ús de la tecnologia en situacions contextualitzades proporciona un entorn d'aprenentatge en el qual l'alumnat desenvolupa la matematització horitzontal per resoldre els problemes que se li plantegen (és a dir, passar de les situacions contextualitzades al món dels símbols), i a partir d'aquí és o no capaç d'entrar a la matematització vertical (és a dir, descobrir connexions entre conceptes i estratègies, generalitzar i moure's en el món dels símbols).

Val la pena subratllar, per la rellevància central que té en el nostre treball, el fet que analitzem la matematització dels alumnes en un entorn didàctic no convencional, caracteritzat, per una banda, pel que en la nostra hipòtesi de treball hem anomenat enfocament "de baix a dalt" (és a dir, que comença per les activitats d'aplicació i només després aborda la formalització dels continguts), i per una altra banda per l'absoluta integració de les TIC en el procés d'ensenyament i aprenentatge, concretament mitjançant l'ús del programari interactiu Geogebra. En un primer moviment operatiu dissenyem una sèrie d'activitats i establim la seva seqüència, en base a uns fonaments teòrics que explicitem i comentem al capítol 2. El disseny i la seqüenciació els exposem i justifiquem, com ja hem comentat abans, al capítol 3.
Les nostres anàlisis es realitzen, doncs, sobre el que succeeix en un entorn didàctic en el qual la matematització dels alumnes es desenvolupa en activitats contextualitzades (que plantegen situacions en un marc realista o versemblant). I no tan sols això, sinó que també la pròpia naturalesa del programari interactiu Geogebra proporciona una contextualització. Aquesta idea la justifiquem degudament en el capítol dedicat al marc teòric, però ens sembla oportú esmentar-la també aquí perquè juga un paper capital en la realització del subobjectiu 1.2: "Considerem que visualitzar un problema i poder manipular els elements geomètrics és una manera de proporcionar sentit. És, per tant, en si mateixa, una manera de contextualitzar, és a dir, de facilitar proximitat i familiaritat. No tan sols podem proporcionar una contextualització pel sol fet de plantejar una situació on hi intervenen objectes reals o imaginaris que connecten amb l'experiència dels alumnes. Si el problema admet una representació geomètrica (no excessivament complicada), el sol fet de marcar punts i traçar línies (de visualitzar-lo) i de manipular aquests elements ja construeix un context".
En definitiva, l'ús de les TIC (Geogebra) forma part de l'essència mateixa del nostre plantejament. En aquestes condicions, analitzar els resultats de les activitats que realitzen els alumnes és també analitzar com les TIC emprades incideixen en la matematització. Per dur a terme aquesta tasca comptem, naturalment, amb les dades que genera el procés d'implementació de les pròpies activitats amb Geogebra, però també analitzem comparativament resolucions amb Geogebra i resolucions per procediments escrits convencionals. A més, duem a terme l'anàlisi de les percepcions subjectives dels alumnes sobre l'ús de Geogebra demanant-los que prenguin com a referència comparativa, a l'hora d'efectuar les seves valoracions, l'estil tradicional d'impartir classes de matemàtiques.

L'anàlisi del desenvolupament de la matematització que realitzen els alumnes en un context visual i interactiu és un eix fonamental del nostre treball. Tot i apuntant prèviament que presentem els detalls del disseny de les activitats i de la seva implementació a l'aula en capítols posteriors a aquest capítol 1, volem subratllar que en el nostre plantejament és de la màxima importància organitzar un sistema d'obtenció d'informació sobre el procés de matematització que duen a terme els alumnes mitjançant eines TIC (concretament el programari interactiu Geogebra) en

cada una de les activitats dissenyades, de tal manera que siguem capaços de recollir i analitzar les estratègies de resolució, i de mesurar amb objectivitat els graus d'assoliment de la matematització de cada un dels estudiants.
En primer lloc, a través del disseny de les activitats ja establim quines demandes als estudiants van dirigides a obtenir informació sobre com organitzen i resolen un problema en el context d'una situació realista, mitjançant Geogebra. Per tant, com desenvolupen la matematització horitzontal (MH), és a dir, com, en resum, transfereixen des un problema en contextualització cap a un model matemàtic.
En segon lloc, també establim quines demandes van dirigides a obtenir informació sobre si els alumnes (cada un d'ells) són capaços d'obtenir, en aquest entorn que proporciona el programari interactiu Geogebra, generalitzacions a partir de la resolució d'aquests problemes contextualitzats, és a dir, si són capaços de realitzar abstraccions que els condueixin a resultats de validesa més general (matematització vertical, MV) més enllà de la situació concreta sobre la qual han matematitzat horitzontalment.

Després d'haver presentat i comentat l'objectiu 1, acompanyat dels seus subobjectius i d'una conseqüència, enunciem a continuació els objectius 2 i 3, els quals completen la definició de quina és la nostra posició a l'hora de convertir en operativa la hipòtesi de treball que hem presentat com a punt de partida.
L'objectiu 2 és, de fet, una formulació resumida d'un aspecte sobre el qual ja hem posat èmfasi quan ens hem referit a l'ús de les TIC com a recurs fonamental dins de l'entorn d'aprenentatge: el desenvolupament de la matematització que realitzen els alumnes en l'entorn esmentat. Formulem, doncs, aquest objectiu:

Objectiu 2:

O2 *Analitzar, en la seqüència d'implementació de les activitats dissenyades, el desenvolupament de la matematització (horitzontal i vertical) per part dels alumnes.*

Ens els comentaris explicatius sobre l'objectiu 1 hem esmentat el fet que en el disseny de les activitats establim quines demandes fem als estudiants amb l'objectiu d'obtenir informació sobre el procés de matematització. És evident que, un cop obtinguda la informació, hem de desplegar una sèrie de processos d'anàlisi i, a partir d'aquí, construir les interpretacions corresponents. No cal ara entrar en els detalls sobre les anàlisis i les interpretacions que apareixen als capítols 4 i 5, però sí que considerem oportú apuntar unes quantes característiques rellevants. En primer lloc, que l'anàlisi contempla, individualment, tant les estratègies seguides durant la matematització com els resultats obtinguts en el procés de resolució, i, més concretament, quin és el grau d'assoliment dels resultats. En segon lloc, que no tan sols efectuem anàlisis activitat per activitat, sinó que estudiem la matematització considerant tot el conjunt de la seqüència de les activitats. En tercer lloc, que establim una classificació dels alumnes en diferents categories grupals a partir de l'anàlisi dels resultats en el procés de matematització. En quart lloc, que realitzem una anàlisi comparativa dels processos de

resolució amb Geogebra i els processos de resolució convencional per escrit, per a uns determinats alumnes (estudi de casos).
En tot cas, subratllem novament, per posar encara més èmfasi, un aspecte que ja hem expressat en els comentaris que seguien la formulació de l'objectiu 1 i els seus subobjectius: l'anàlisi de la matematització és absolutament central en el nostre treball. És evident que mitjançant l'anàlisi i les interpretacions corresponents hem de posar a prova la validesa de la nostra hipòtesi de partida, és a dir, que "un enfocament de matematització de baix a dalt permet dissenyar i implementar activitats d'ensenyament i aprenentatge de la geometria analítica de primer de Batxillerat", les quals formin part d'un plantejament operatiu com a mínim tan vàlid com un plantejament de tipus tradicional. Però no es tracta tan sols d'això. També investiguem com es desenvolupa la matematització en l'entorn d'aprenentatge dissenyat, i com, especialment, hi influeix la integració de les TIC, en concret del programari interactiu Geogebra. I disposem d'elements que ens permeten una anàlisi comparativa de les resolucions convencional per escrit per una banda i mitjançant les activitats amb Geogebra per una altra banda.
Pel que fa a la metodologia del treball analític, mostrem en els capítols 4 i 5 com organitzem la informació recollida i a partir d'aquí despleguem l'anàlisi. Es tracta d'una metodologia que, en els seus aspectes fonamentals, hem construït expressament. Per tant, la considerem una aportació pròpia, original en el sentit que no l'hem manllevada de cap altre treball que coneguem. Constitueix una expressió de la nostra manera d'organitzar els fets i de treure'n conclusions. És cert que els fets són els fets, però també té una gran importància la manera com organitzem i focalitzem la mirada sobre aquesta realitat objectiva formada per múltiples peces d'informació.

Però no tan sols obtenim informació sobre els fets objectius que es produeixen en el procés de matematització dels alumnes, sinó que també recollim dades sobre les percepcions subjectives dels alumnes. A això, precisament, fa referència l'objectiu 3:

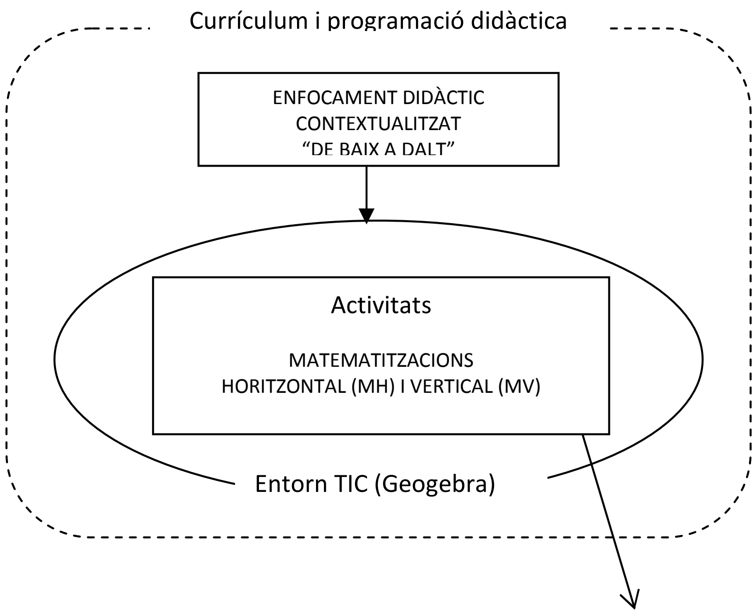
Objectiu 3:

O3 *Analitzar, en la seqüència d'implementació de les activitats dissenyades, les valoracions subjectives dels alumnes sobre l'entorn d'aprenentatge.*

Si per una banda realitzem una anàlisi sobre les dades objectives de la matematització, per una altra banda analitzem també quines són les percepcions subjectives dels alumnes en el procés d'implementació de les activitats, i en particular com perceben determinats aspectes que formen part de la matematització. Recollim i analitzem informació sobre les percepcions que tenen els alumnes en el progrés del procés de matematització (plantejar, avançar, trobar, generalitzar) al llarg de tota la seqüència d'implementació de les activitats. Això ho complementem amb valoracions subjectives finals que contemplen tota la seqüència. Amb aquestes dades, emprenem un treball analític que considera les valoracions individuals però també estableix característiques grupals. A més, confrontem aquesta anàlisi de tipus grupal amb els comportaments també classificats per categories o grups corresponents a la matematització, per cercar

si uns determinats resultats en la matematització es correlacionen amb unes determinades valoracions subjectives sobre aquesta matematització.
No podem oblidar, i no ho fem, que en el nostre plantejament didàctic hi ha sempre associada la comparació amb un plantejament tradicional. Per això demanem contínuament als alumnes que tinguin present aquesta comparació entre un entorn d'aprenentatge que per a ells és nou i un altre entorn (el tradicional) que els resulta molt familiar perquè, de fet, hi han estat immersos durant anys (els del seu pas pel sistema educatiu).
Hi ha qüestions de fons, en l'àmbit de la subjectivitat i l'actitud personal, que ens interessen especialment: la motivació dels alumnes i la seva implicació en el procés d'aprenentatge (un procés que en aquest cas es desplega mitjançant un plantejament de baix a dalt, amb les TIC integrades com a element inseparable). Les analitzem i interpretem a partir de les dades obtingudes.
Pel que fa a la nostra metodologia d'anàlisi, manifestem el mateix que en els comentaris corresponents a l'objectiu 2: es tracta d'una aportació pròpia que forma part de la nostra manera d'observar i organitzar la realitat. La mostrem amb detall al capítol 5.

Finalment, per acabar aquest últim apartat del capítol introductori, presentem una figura que esquematitza el nostre plantejament operatiu. La matematització sobre activitats que plantegen situacions contextualitzades, amb un enfocament "de baix a dalt", realitzades mitjançant eines TIC (el programari interactiu Geogebra), encaixa dins del marc que formen el currículum i la programació didàctica per a la unitat de la geometria analítica a primer curs de Batxillerat. Del procés d'implementació de les activitats dissenyades n'obtenim un conjunt de dades que es divideix en dos grans blocs: els resultats objectius de la matematització, i les valoracions subjectives que realitzen els alumnes sobre el seu procés d'aprenentatge.



resultats de la matematització

Figura 1.1. Esquema del plantejament didàctic ↗

valoracions subjectives de l'alumnat

2. Marc teòric

En aquest capítol presentem els referents teòrics sobre els quals desenvolupem el plantejament didàctic que hem introduït al capítol anterior. Les aportacions teòriques de diferents autors les agrupem en tres blocs: contextualització, matematització i modelització. És a dir, ens basem en autors que enfoquen l'ensenyament de les matemàtiques a través d'activitats contextualitzades, aquells que defineixen la matematització i distingeixen entre diferents tipus de matematització, i aquells que prenen per objecte d'estudi la modelització didàctica. Tot això ho fem des d'un punt de partida que explicitem: el nostre plantejament es proposa un ensenyament de la geometria analítica a primer curs de Batxillerat que per una banda faciliti una millor aprehensió dels continguts que un plantejament tradicional, i que per una altra banda resulti més motivador, també en comparació amb un plantejament de caire tradicional.
No tan sols realitzem un recorregut referencial pel marc teòric, sinó que també expressem de manera inequívoca quina és la nostra posició particular un cop presentats els diversos referents teòrics als quals acudim. Naturalment, és una posició que es basa en aquests referents però que aporta una visió pròpia. Molt sintèticament, afirmem en aquest breu resum inicial que per a nosaltres la contextualització, la matematització i la modelització són diferents facetes d'una única realitat didàctica, la qual implementem a l'aula. Aquesta realitat s'inicia mitjançant una primera fase centrada en activitats contextualitzades que indueixen la matematització en els alumnes i que els porten a construir models matemàtics senzills. L'anàlisi de la matematització (ja ho hem anunciat al capítol 1) que realitzen els alumnes és fonamental en el nostre treball i la desenvolupem en capítols posteriors a aquest. El nostre plantejament continua amb una fase de formalització subministrada pel professor, a partir de la matematització induïda que han desenvolupat els alumnes, amb la qual cosa es completa la seqüència didàctica.
Dediquem un espai d'aquest capítol a la classificació dels mètodes de l'ensenyament de les matemàtiques amb un primer propòsit de situar-hi les coordenades del nostre plantejament, però, sobretot, amb la voluntat de mostrar que el nostre treball mira més enllà de la dicotomia innovador - tradicional o de la dicotomia constructivista - empirista per oferir una síntesi que, essent globalment innovadora, conté elements vàlids i útils dels enfocaments didàctics tradicionals.
Dediquem una part notablement extensa d'aquest capítol a la història de la geometria analítica i la seva didàctica, amb el profund convenciment que el coneixement de la història és imprescindible i previ a un plantejament didàctic. Ho és especialment en el cas de la geometria analítica. La història ens mostra com les matemàtiques neixen i es desenvolupen sobre necessitats humanes, en contextos reals, i ens mostra també que la formalització és un últim estadi. Per això, la història ens serveix de guia per comprendre que els aprenentatges són més significatius si s'adquireixen en contextos reals o versemblants. En tot cas, és convenient que adquireixin una estructura formal només en una fase posterior. Per a la geometria analítica, la història ens subratlla la

importància dels contextos i, especialment, de la possibilitat de visualitzar els elements geomètrics i de manipular-los. Un problema geomètric a l'educació secundària és en primer lloc un problema que ha d'entrar per la vista. L'àlgebra ha d'arribar després. Això ens permet justificar la idoneïtat del programari interactiu Geogebra per realitzar les activitats contextualitzades a l'aula. En aquest capítol afirmem que Geogebra proporciona per si mateix una contextualització, ja que permet la visualització i la interacció. A més, incorpora l'àlgebra, per la qual cosa és també una porta d'entrada a la formalització.

A la part final d'aquest capítol hi figura un resum dels aspectes fonamentals del marc teòric, i també un resum del nostre posicionament. Hem cregut necessari incloure aquesta última part, amb l'objectiu de recapitular i sintetitzar sobre allò que al llarg del capítol hem presentat per extens.

2.1. Punt de partida

Al capítol 1 hem tractat, a manera d'introducció, aspectes que considerem fonamentals per a la nostra proposta: la innovació didàctica (entesa com a alternativa a la metodologia tradicional) i el paper de les TIC. Hem apuntat que prenem com a referent de gran importància la història de la geometria analítica i de la seva didàctica, i hem introduït, també al capítol 1, unes línies que anuncien a grans trets quina elecció hem realitzat pel que fa als elements teòrics de la didàctica de la matemàtica. Pertoca desenvolupar aquests dos aspectes (història i didàctica) en aquest capítol 2.

L'elecció del marc teòric està en necessària consonància amb allò que hem explicitat al capítol 1: ens proposem dissenyar, i implementar, un plantejament didàctic que comenci per activitats concretes d'aplicació i que després entri en la formalització i l'abstracció. Com a punt de partida teòric, seleccionem un autor que presenta una posició epistemològica a la qual ens adherim. Es tracta d'E. Filloy, qui en la seva *Didáctica e historia de la geometria euclidiana* (1998) escriu unes línies que expressen amb claredat l'enfocament que fem també nostre:

"... és possible que per a algun estudiant una presentació formal, lògicament estructurada i altament eficient, en el sentit que ràpidament arriba a certs resultats, sigui no tan sols la presentació adequada, sinó també la necessària; però, francament, un estudiant així serà una «rara avis», en tots els nivells del sistema educatiu, excepte potser als últims anys de carreres universitàries com la de Matemàtiques i Física, poblada per màquines de processar dades lògiques, però incapaces de resoldre problemes senzills d'aritmètica que surtin dels patrons abstractes als quals estan acostumats (excepte, és clar, altres «rara avis» que poden fer ambdues coses)."

Unes quantes línies abans d'aquestes anteriors, Filloy fa referència a uns aspectes que també considerem bàsic: la motivació:

"... sabem que els primers ressorts que hem d'accionar en l'aprenentatge de les Matemàtiques, són els de la motivació, fet que, per una part implica que el material

presentat tingui la virtut de recórrer a tot allò que «estimuli» l'aprenentatge, sense cap coacció (com la d'estar, en ares del rigor, ficats a la camisa de força que comporta una presentació lògica totalment nítida)."

A continuació d'haver adoptat aquest punt de partida, cal concretar dins de quina línia teòrica es desenvolupa el nostre plantejament didàctic en els dos punts que han quedat explicitats a través de les cites anteriors:

- Un entorn didàctic que no comenci per una presentació formal i estructurada, sinó per activitats d'aplicació, i que només després d'això abordi la formalització i l'abstracció.
- Un entorn didàctic motivador que estimuli l'aprenentatge.

El treball de mostrar mitjançant quina elecció del marc teòric considerem que s'han de desenvolupar els aspectes esmentats abans, el realitzem en els apartats que segueixen dins d'aquest capítol 2. Així, ens situem en conceptes com la contextualització, la matematització i la modelització, tal com han estat presentats per diversos autors per, al mateix temps, fixar quins contigus concrets de les referències teòriques considerem especialment rellevants per a la nostra proposta.

2.2. Contextualització, matematització i modelització

2.2.1. Contextualització

Ja hem comentat al capítol anterior que el plantejament didàctic tradicional per a la geometria analítica es basa en una metodologia en la qual les aplicacions, contextualitzades en major o menor grau, apareixen només en la fase final d'un procés que comença per una exposició teòrica i formal dels continguts.
Van Reeuwijk (1997) anomena aquest tipus de pràctica "enfocament de dalt a baix". Primerament, els alumnes aprenen matemàtiques abstractes i formals i només després apliquen els coneixements teòrics adquirits a la resolució de problemes presentats en contextos. Però el mateix Van Reeuwijk proposa un camí diferent que col·loca els contextos en una posició diferent a l'anterior dins el procés d'ensenyament aprenentatge, i que atorga a aquests contextos una importància central:

"... els contextos i la vida quotidiana haurien d'exercir un paper preponderant en totes les fases de l'aprenentatge i l'ensenyament de les matemàtiques, és a dir, no solament a la fase d'aplicació, sinó també a la fase d'exploració i a la de desenvolupament, on els alumnes descobreixen o encara millor reinventen les matemàtiques."

Aquest autor, que ha estudiat i treballat la contextualització a l'aula, dóna una sèrie de raons per les quals considera important utilitzar contextos:

1. Poden motivar els alumnes i ajudar-los a comprendre per què les matemàtiques són útils i necessàries.
2. Els alumnes aprenen a usar les matemàtiques en la societat i a més descobreixen per què són rellevants per a les seves futures educació i professions. Així desenvolupen una actitud crítica i flexible davant de l'ús de les matemàtiques en problemes de la vida real.
3. Els alumnes adquireixen coneixements històrics sobre les matemàtiques i altres disciplines.
4. Quan afronten un problema presentat en context, els alumnes desenvolupen la capacitat d'analitzar-lo i d'organitzar la informació.
5. Un bon context pot actuar com a mitjancer entre el problema concret i les matemàtiques abstractes. En el procés de resolució, el problema en context es transformarà en un model.

D'aquest últim argument es desprèn que un bon context és condició prèvia per a la modelització. Per tant, l'elecció d'aquest context és fonamental en qualsevol proposta que pretengui modelitzar matemàticament una determinada situació. Sobre aquest punt, Van Reeuwijk afirma que per context no s'ha d'entendre necessàriament "situació de la vida real" perquè el més important és que el context tingui sentit per a l'alumne. Per tant, també un context artificial relacionat amb alguna cosa que no procedeix de la vida real pot ser bo si té sentit per a l'alumne:

"No obstant això, no hem de confondre artificial amb forçat. Amb freqüència, els problemes d'enunciat són forçats; són problemes matemàtics abstractes en què les lletres (variables) i les operacions són substituïdes per paraules. Un context artificial pot ser un conte de fades. Un conte de fades no és una situació de la vida real, però té sentit i per tant pot resultat adequat".

A. N. Kolmogórov, qui a part dels seus treballs en matemàtica de primera línia va realitzar una important labor per a la millora de l'ensenyament de les matemàtiques a la Unió Soviètica, participant a l'elaboració de programes i llibres de text i a la formació de professors, incidia sobre la qüestió de "l'enfocament de dalt a baix", encara que no utilitzava explícitament aquesta denominació (com sí que fa Van Reeuwijk), i també assenyalava la necessitat que el fet matemàtic tingui sentit per a l'alumne. L'any 1959 afirmava, citat per Sánchez i Valdés (2003):

"Les matemàtiques es presenten sovint com una cosa avorrida, on és necessari aprendre una gran quantitat de fórmules i teoremes, i es considera que l'objectiu és transmetre a altres aquests resultats acabats. En tot això l'únic que és cert és que els fets matemàtics que s'ensenyen a l'escola mitjana i als primers anys dels estudis de matemàtiques superiors foren obtinguts per la humanitat fa moltíssim temps. Però fins i tot aquests fets matemàtics senzills poden aplicar-se de forma hàbil i amb utilitat tan sols quan s'han assimilat de forma creativa, de manera que l'estudiant els pugui veure com si ell mateix pogués arribar a ells de forma independent".

Gómez Chacón (1998) dóna tres raons per utilitzar contextos variats a la instrucció matemàtica:

1. Es pot facilitar la comprensió de l'estudiant si aquest es troba amb un contingut matemàtic nou en un context familiar.
2. La utilització de contextos variats facilita la implicació i la motivació de l'estudiant en el problema.
3. L'aprenentatge del contingut matemàtic en contextos familiars afavoreix la transferència, l'aplicació o l'ús a altres contextos de l'experiència anticipada o immediata de l'estudiant, i els processos d'abstracció.

I remarca que no n'hi ha prou amb la resolució de problemes concrets o pràctics, sinó que, més enllà d'això, les matemàtiques comporten la representació i la generalització. La reflexió a l'aula és la que portarà als alumnes al pensament o raonament matemàtic.

Treffers (1986), citat per Gómez Urgellés (1998) estableix quins són els punts bàsics per donar una orientació realista i contextualitzada de les matemàtiques:

1. Recrear, reinventar conceptes matemàtics en base a nocions intuïtives.
2. Continuar el procés a través de diversos nivells de concreció i abstracció.
3. Guiar el programa educatiu segons la història de les matemàtiques.
4. Situar en contextos reals.

A partir d'aquí, Gómez Urgellés conclou que són importants el problemes basats en casos reals, és a dir, contextualitzats, i també són importants les produccions i construccions mentals que fan els alumnes en el procés de matematització.

Peralta (1995) afirma que per adquirir la destresa d'utilitzar conceptes matemàtics en situacions concretes, cal que l'aprenentatge d'aquests conceptes s'hagi realitzat dins d'un procés en què hi hagin intervingut l'observació i la formulació d'hipòtesis. La resolució de situacions contextualitzades es pot enfocar des d'un punt de vista tradicional, a base de procediments pautats, o bé es pot abordar com una investigació en què la situació de partida és objecte de reflexió i tractament matemàtic. Chamoso i Rawson (2001) observen en situacions pràctiques a l'aula, en les quals la resolució de problemes està plantejada com a investigació en la qual els alumnes matematitzen, que aquests estudiants resolen mitjançant les estratègies següents:

1. Construint, bé manipulativament o bé numèricament.
2. Experimentant casos particulars.
3. Donant suport, amb exemples, al que s'ha dit prèviament.
4. Discrepant o divergint a base de buscar nous camins.
5. Preguntant, com a part fonamental del procés.
6. Deduint a partir d'experiències particulars.
7. Corregint afirmacions o suposicions, la qual cosa demostra capacitat de raonament.
8. Comprovant per verificar que el procediment és correcte.

9. Explicant experiències passades o presents amb els raonaments que sorgeixen del procés.
10. Dirigint l'acció d'altres alumnes per ensenyar-los l'estratègia utilitzada.
11. Contestant de forma crítica les afirmacions realitzades i afegint altres punts de vista.
12. Suposant i formulant hipòtesis.
13. Generalitzant.

També a partir de l'experiència a l'aula, Chamoso i Rawson destaquen el que consideren circumstàncies interessants:

1. En el procés, els estudiants prenen la iniciativa.
2. Apareix la discussió entre ells i amb el professor sobre parts del procés o dubtes que sorgeixen.
3. El comportament del professor és molt important en el procés. De vegades, és millor no intervenir per deixar que els alumnes afrontin sols el problema.
4. Sovint els alumnes utilitzen materials manipulatius. Per aquest motiu és interessant proporcionar-los instruments concrets per permetre que relacionin el pensament amb l'acció.
5. En el treball en grup, la distribució del material és important ja que sovint qui disposa d'ell és qui es veu obligat a prendre la iniciativa.
6. Els èxits en etapes parcials del procés proporciona confiança i motivació.
7. Els estudiants normalment no escriuen gaire i el que escriuen no sol expressar del tot el que han pensat.

Peralta (1995) dóna una sèrie d'idees en relació amb la metodologia i la didàctica de les matemàtiques dirigides cap a la contextualització de l'aprenentatge de la geometria a l'ensenyament secundari:

1. La geometria ha de plantejar-se de tal manera que serveixi per descobrir propietats i treballar amb figures del món real.
2. No sembla adequada la pretensió de presentar una axiomàtica de la geometria com la dels *Elements* d'Euclides o com la d'*Els fonaments de la geometria* d'Hilbert. Tampoc no és recomanable traspassar la geometria a l'àlgebra, via espais vectorials.
3. Els alumnes han de tenir la sensació que la geometria, com tota la matemàtica, serveix per resoldre problemes no evidents. Les classes de geometria han de tenir fons i substància; mai no han de ser una nova exposició, en forma difícil, del que l'alumne ja veu de manera fàcil.
4. S'ha de fomentar l'ús de la intuïció tot i sabent que té certs perills. El que cal fer és educar-la i cultivar-la perquè serveixi per descobrir. Posteriorment s'hauran de fer les demostracions corresponents. Aquesta recomanació és vàlida per a tot l'ensenyament de la matemàtica i s'expressa en la frase "És la intuïció la que descobreix i la lògica la que demostra".
5. La geometria està vinculada a altres branques de la matemàtica. Encara que s'estudiï per separat, no s'han d'oblidar aquests vincles.

La nostra posició respecte de la contextualització parteix de l'adhesió al plantejament teòric que fan els autors esmentats abans, especialment respecte als beneficis que comporta per al procés d'ensenyament i aprenentatge. Ara bé: a més de les estrictes referències teòriques que hem fet, creiem oportú realitzar una sèrie de consideracions que han de concretar el nostre punt de vista.

No existeix un procés d'ensenyament i aprenentatge totalment rodejat pel buit, és a dir, suspès en un entorn sense cap mena de referència ni context. El que en realitat podem discutir és si aquest entorn o context, que rodeja i penetra tot el procés, resulta més o menys allunyat d'un cert marc format per elements reconeixibles i familiars per als alumnes. Així, quan ens referim a la matematització sobre una situació de la vida quotidiana, ens situem en un context de molt alta familiaritat, tant per als alumnes com per als docents. També ens podem situar en un context que resulti familiar per als alumnes, encara que no pertanyi al que estrictament podem anomenar vida quotidiana: tal com assenyala Van Reeuwijk en una cita que hem recollit abans, hi ha situacions que no pertanyen a la vida real però que tenen sentit; per tant, proporcionen també una contextualització.

La nostra posició en aquest punt consisteix, per començar, en prendre la contextualització en el sentit ampli que ha aparegut al paràgraf anterior: no limitat tan sols al que és quotidià o estrictament real, sinó a allò que té sentit. En altres paraules: allò que és reconeixible per als alumnes, perquè té connexions identificables (en major o menor grau, però les té) amb la seva experiència, real o imaginària, material o simbòlica.

Per altra banda, considerem també que haver-nos de restringir, de partida, a una contextualització centrada només en situacions de la vida quotidiana resulta excessivament limitador. És clar que les situacions de la vida quotidiana són útils per matematitzar, però no només aquestes; també podem usar, si ens convé, contextos no estrictament reals, en els quals els alumnes poden tenir un sentiment de proximitat o de familiaritat igual d'intens; o podem usar una combinació d'elements reals amb altres d'imaginaris o artificials.

Hi ha una altra consideració que ens sembla rellevant (i que desenvolupem en aquest mateix capítol 2): l'algebrització de la geometria és un procés històricament tardà, i la formalització algebraica de l'ensenyament de la geometria és encara ho és més; la visualització, la representació gràfica i la manipulació d'elements geomètrics, sorgeixen ja en les primeres etapes de la geometria, a l'antiguitat. Traçar sobre una superfície elements geomètrics és una pràctica que acompanya la humanitat des de fa milers d'anys. Si la reducció d'un problema geomètric al pur simbolisme algebraic fos una manera més intuïtiva i natural d'abordar-lo, l'algebrització de la geometria hagués aparegut als inicis de la història de la matemàtica, i el plantejament didàctic de l'anomenada "matemàtica moderna" semblaria també més natural, intuïtiu i còmode que les tradicionals representacions geomètriques. Però el fet és que la manipulació d'elements que podem visualitzar (rectes, circumferències, polígons, etc.) ens connecta més ràpidament amb el problema que volem resoldre.

Considerem que visualitzar un problema i poder manipular els elements geomètrics és una manera de proporcionar sentit. És, per tant, en si mateixa, una manera de contextualitzar, és a dir, de facilitar proximitat i familiaritat. No tan sols podem

proporcionar una contextualització pel sol fet de plantejar una situació on hi intervenen objectes reals o imaginaris que connecten amb l'experiència dels alumnes. Si el problema admet una representació geomètrica (no excessivament complicada), el sol fet de marcar punts i traçar línies (de visualitzar-lo) i de manipular aquests elements ja construeix un context.
Si plantegem, doncs, un problema a partir d'elements reals o versemblants, de fàcil representació geomètrica, en un entorn que permeti la també fàcil manipulació dels elements visuals, aconseguim una potent contextualització.

2.2.2. Matematització

Utilitzar la visualització i la intuïció no significa renunciar al rigor ni a les generalitzacions. Com manifesta Sánchez (1997):

"Quan demanem que a l'ensenyament de les matemàtiques, i en particular de la geometria, es busquin motivacions intuïtives i relacions amb allò que és concret, no pretenem quedar-nos a la situació de partida, per molt divertida i suggeridora que sigui. Després s'ha d'arribar a conclusions generals, a la demostració de propietats que ja no són tan evidents i intuïtives. Descobrir-les, amb els nostres alumnes, donarà una visió atractiva del poder lògic i de la força investigadora de les matemàtiques."

En la línia de l'anomenada Educació Matemàtica Realista (*Realistic Mathematics Education,* RME) defensada per autors holandesos, Van den Heuvel-Panhuizen (2000) exposa com Freudenthal ja afirmava el 1968 que:

"... les matemàtiques han d'estar connectades amb la realitat, properes a l'experiència de l'alumnat i rellevants per a l'entorn social, si es pretén que siguin valuoses. En comptes de veure-les com una matèria objecte de transmissió, Freudenthal posava l'èmfasi en la idea de les matemàtiques com a una activitat humana. Les classes de matemàtiques haurien de proporcionar als estudiants el guiatge que els donés l'oportunitat de "reinventar" les matemàtiques fent-les. Això significa que en l'educació matemàtica, el focus no s'ha de col·locar a les matemàtiques com a sistema, sinó a l'activitat, al procés de matematització."

Van den Heuvel-Panhuizen explica com Treffers, entre 1978 i 1987, va distingir explícitament dos tipus de matematització en el context educatiu:

1. La matematització horitzontal, en la qual els estudiants utilitzen eines matemàtiques que els ajuden a organitzar i resoldre un problema en el context d'una situació realista. Implica anar des de les situacions en contextos realistes o versemblants fins al món dels símbols.
2. La matematització vertical, en la qual els estudiants descobreixen connexions entre conceptes i estratègies i apliquen aquests descobriments. Implica moure's en el món dels símbols, amb abstracció i generalització.

Per a una major concreció d'aquests dos tipus de matematització, és important esmentar que Treffers (1986), citat en De Lange (1987), i novament citat per Gómez Urgellés (1998), distingeix entre les *activitats horitzontals* i *activitats verticals*. Les horitzontals són:

1. Identificar les matemàtiques específiques en un context determinat.
2. Esquematitzar.
3. Formular i visualitzar un problema de diferents maneres.
4. Descobrir relacions involucrades.
5. Reconèixer aspectes comuns en diferents situacions.
6. Transferir del món real cap a un problema matemàtic.
7. Transferir un problema del món real cap a un model matemàtic.

(Destaquem que el punt 7 anterior estableix una clara connexió entre matematització i modelització: matematitzar horitzontalment també implica anar cap a un model matemàtic).

I les *activitats verticals*,

1. Representar una relació amb una fórmula.
2. Refinar i ajustar models.
3. Usar diferents models.
4. Combinar i integrar models.
5. Formular un nou concepte matemàtic.
6. Generalitzar.

(Un altre cop apareix l'íntima connexió entre matematització i modelització: matematitzar verticalment inclou l'ús de models matemàtics).

Segons Gómez Urgellés (1998), *"La matematització horitzontal i vertical surt de les accions dels estudiants i de les seves reflexions sobre les accions. La matematització va amb la reflexió i només pot ser eficient si va acompanyada d'una ensenyança interactiva, és a dir, amb l'oportunitat de discutir, consultar i cooperar."*

Van den Heuvel-Panhuizen (2000) també proporciona una llista de principis que reflecteixen les característiques de la RME:

1. Principi d'activitat: els estudiants, en comptes de ser simples receptors d'una matemàtica que ja se'ls dóna feta i acabada, són participants actius en el procés educatiu.
2. Principi de realitat: els estudiants han de ser capaços d'usar les matemàtiques per resoldre problemes que tinguin relació amb la realitat que viuen.
3. Principi de nivell: els estudiants passen per diferents nivells de comprensió, des de l'habilitat per trobar solucions informals en contextos concrets, cap a la sistematització i la generalització, i fins a les relacions abstractes.
4. Principi d'interconnexió: els estudiants han de poder usar eines i estratègies

adquirides en el treball d'una unitat didàctica en altres unitats didàctiques, és a dir, que el currículum no està fet a base de capítols estancs.

5. Principi d'interacció: els estudiants han de tenir l'oportunitat de compartir entre ells idees i estratègies. Amb aquesta interacció, poden assolir nivells més alts de comprensió.
6. Principi de guiatge: els professors han de proporcionar un ambient en el qual puguin emergir els processos de construcció de l'aprenentatge.

Per al nostre posicionament, els conceptes abans comentats de matematització horitzontal i matematització vertical són fonamentals, així com la seva íntima relació amb la modelització. Constitueixen un eix teòric central dins de la nostra proposta. De fet, tal com exposem amb detall als capítols 3, 4 i 5, dissenyem, i implementem, un entorn didàctic on els alumnes matematitzen (horitzontalment i verticalment). I mesurem específicament com, i en quin grau, s'han produït aquestes matematitzacions.

2.2.3. Modelització

Dins d'aquest capítol, a l'apartat corresponent a la contextualització, ja hem citat abans les raons que dóna Van Reeuwijk (1997) per utilitzar contextos. Ara trobem especialment oportú de recordar-ne una:

"Un bon context pot actuar com a mitjancer entre el problema concret i les matemàtiques abstractes. En el procés de resolució, el problema en context es transformarà en un model."

Considerem que aquesta cita anterior resumeix molt bé la progressió conceptual que es produeix des de l'inici del capítol fins aquí: en primer lloc, els contextos; en segon lloc, la transició "entre el problema concret i les matemàtiques abstractes", és a dir, les matematitzacions horitzontal i vertical; i en tercer lloc, els models matemàtics. La cita de Van Reeuwijk mostra un aspecte que ja ha aparegut abans i que ens sembla molt important: la connexió entre matematització i modelització. Efectivament, el procés de matematitzar porta cap a la construcció de models. Aquest sol fet, que se'ns apareix com a revelador, ja ens sembla suficient per endinsar-nos en referències teòriques d'autors que han treballat la modelització matemàtica.
De tota manera, abans de presentar les referències que hem seleccionat, explicitem i subratllem que, en la línia de la cita anterior, des de la nostra posició entenem la construcció de models com una de les conseqüències de matematitzar en situacions contextualitzades. Per a nosaltres, construir models matemàtics no és un objectiu prioritari cap al qual ens dirigim directament. La prioritat la situem a la matematització en contextos. Ja ho hem anunciat a l'apartat anterior, corresponent a la matematització, i ara hi insistim: les matematitzacions horitzontal i vertical constitueixen un eix teòric central dins de la nostra proposta.
Dit això, entenem que les referències teòriques sobre la modelització ens aporten elements molts valuosos perquè per modelitzar cal matematitzar. I perquè en el nostre

plantejament, tal com mostrem al capítol 3 (dedicat a qüestions metodològiques i al disseny d'activitats), la matematització en situacions contextualitzades ha de conduir els alumnes cap a la construcció de models matemàtics senzills (als capítols 4 i 5 mostrem que succeeix així efectivament; és, per exemple, al cas del bloc d'activitats que desemboquen en l'equació vectorial de la recta, que de fet és un mecanisme matemàtic senzill per generar qualsevol punt alineat amb dos punts donats). Destaquem que, a la nostra proposta, un model que sorgeix de la matematització és senzill, en el sentit que no es tracta d'un artefacte matemàtic complex. Fem aquesta puntualització perquè creiem que situa la posició des de la qual observem les referències teòriques sobre la modelització, les quals, naturalment, també poden ser contemplades des d'un altre punt de vista (que no és el nostre): la modelització en situacions complexes, amb utilització d'eines matemàtiques de nivell superior en comparació amb el nivell en el qual treballen els alumnes de Batxillerat que intervenen en el procés d'implementació.

Per a la modelització, el primer autor que citem és Niss (1989), en un text molt breu que connecta molt bé amb el nostre plantejament de matematitzar en situacions contextualitzades:

"El modelatge és l'art d'aplicar les matemàtiques a situacions de la vida real."

I ens atrevim a modificar l'última part de la frase, per encaixar-la encara millor dins del nostre plantejament respecte de la matematització (el qual hem explicitat en l'apartat corresponent d'aquest capítol):

El modelatge és l'art d'aplicar les matemàtiques a situacions que tenen sentit per als alumnes.

A continuació mostrem com alguns autors defineixen un model matemàtic i les característiques del procés de modelització. Comencem per Niss (1989), un autor que ha dedicat una part extensa de la seva producció a l'estudi de la modelització.

"Quan un segment de la realitat és objecte d'algun tipus de tractament matemàtic, això implica necessàriament un model matemàtic. En poques paraules, alguns objectes, relacions entre objectes i estructures que pertanyen a la matèria considerada es tradueixen a objectes matemàtics, relacions i estructures, les quals es diu que representen la realitat original. El concepte de model es pot definir de dues maneres diferents. La primera possibilitat consisteix simplement en identificar un model amb una col·lecció M d'objectes matemàtics, relacions, estructures, etc., sense tenir en compte què es representa, i com, amb el model. La raó d'aquesta possibilitat és que la col·lecció M pot servir per modelitzar diferents casos. La segona opció consisteix a definir un model amb la tripleta (A, M, f) en què A és la porció de realitat considerada i f és el patró que tradueix certes característiques d'A cap a M."

Niss també explicita quins són les característiques mínimes presents en tot procés de modelització:

1. Identificar les característiques de la realitat que ha de ser modelitzada.
2. Seleccionar objectes, relacions i qualsevol altra cosa rellevant per a la finalitat de construir el model.
3. Idealitzar aquests objectes i relacions anteriors de manera que es puguin representar matemàticament.
4. Triar un "univers matemàtic" que serveixi de suport per al model *M*.
5. Realitzar la traducció de la realitat a les matemàtiques.
6. Establir relacions matemàtiques entre els objectes traduïts, acompanyades de suposicions i propietats.
7. Utilitzar mètodes matemàtics per obtenir resultats i conclusions.
8. Interpretar els resultats i les conclusions en el context de la realitat original.

Addicionalment, aquestes característiques mínimes poden anar acompanyades d'aquestes altres:

9. Avaluar el model confrontant-lo amb la realitat (per exemple, per la confrontació de dades observades amb dades pronosticades), comparant-lo amb altres models i situant-lo dins la teoria prèviament establerta.
10. Construint, si és necessari, un model modificat o nou, per tornar a començar el procés des pel primer punt.

Stachowiak (1973) citat per Warzel (1989) també s'ocupa de les propietats fonamentals d'un model:

1. Representació: Un model és una representació o "mapa" d'un cert original, que pot set també un model.
2. Reducció: Un model no conté tots els possibles detalls de l'original. Només es modelitzen les característiques que són importants des del punt de vista donat pels objectius de qui modelitza.
3. Pragmatisme: El model no està necessàriament lligat per mecanismes determinats a l'original. La seva connexió depèn de qui modelitza, i de quins mecanismes mentals utilitza.

Gutiérrez i Jaime (1990) descriuen les característiques generals d'un model en termes similars, encara que no tan detallats, i posen més èmfasi en el caràcter progressiu de la modelització a través del procés de completar un model:

1. Observació de la realitat que es vol modelitzar, per trobar-hi regularitats, tant en l'evolució de l'objecte d'estudi al llarg del temps, com també en diferents objectes sotmesos a condicions iguals o similars. Una de les dificultats majors per a un investigador és diferenciar què és bàsic i què és secundari en el fenomen que observa.
2. Construcció del model matemàtic inicial i aplicació als fets observats per validar-lo, és a dir, comprovar que efectivament funciona com a model.

3. Desenvolupament del model inicial per completar-lo. L'aplicació a la realitat observada sovint planteja noves preguntes i permet trobar noves propietats.
4. Aplicació.

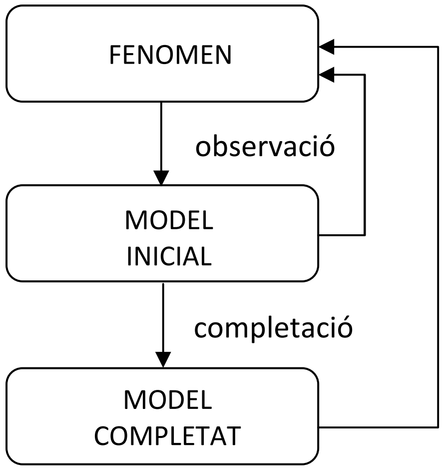


Figura 2.1. Característiques generals de la modelització segons Gutiérrez i Jaime (1990)

Peralta (1995) defineix un model matemàtic com una representació abstracta simplificada d'un cert tipus de fenòmens reals i subratlla que és necessària la participació conjunta de la intuïció i la lògica. En la modelització distingeix tres fases:

1. Abstracció: es parteix de la realitat i es defineixen els conceptes a través d'observació i d'idees intuïtives. Peralta considera que la intuïció és complementària a la lògica i també, fins a cert punt, contraposada. Gràcies a la intuïció, es pot separar el que és fonamental del que és secundari o accessori, i es pot crear, descobrir.
2. Raonament lògic: es construeix la teoria matemàtica. Aquí intervé la lògica per posar ordre al que la intuïció ha seleccionat.
3. Concreció: es projecten els resultats de la teoria a la realitat.

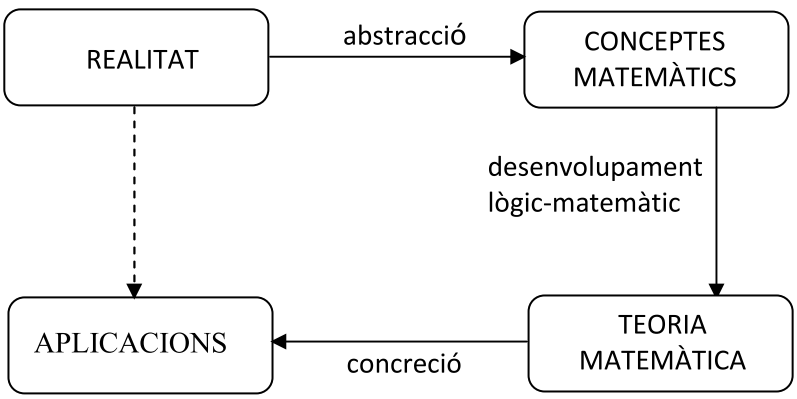


Figura 2.2. Procés de modelització segons Peralta (1995)

Per altra banda, Gómez Urgellés (1998) presenta el següent esquema del procés de modelització:

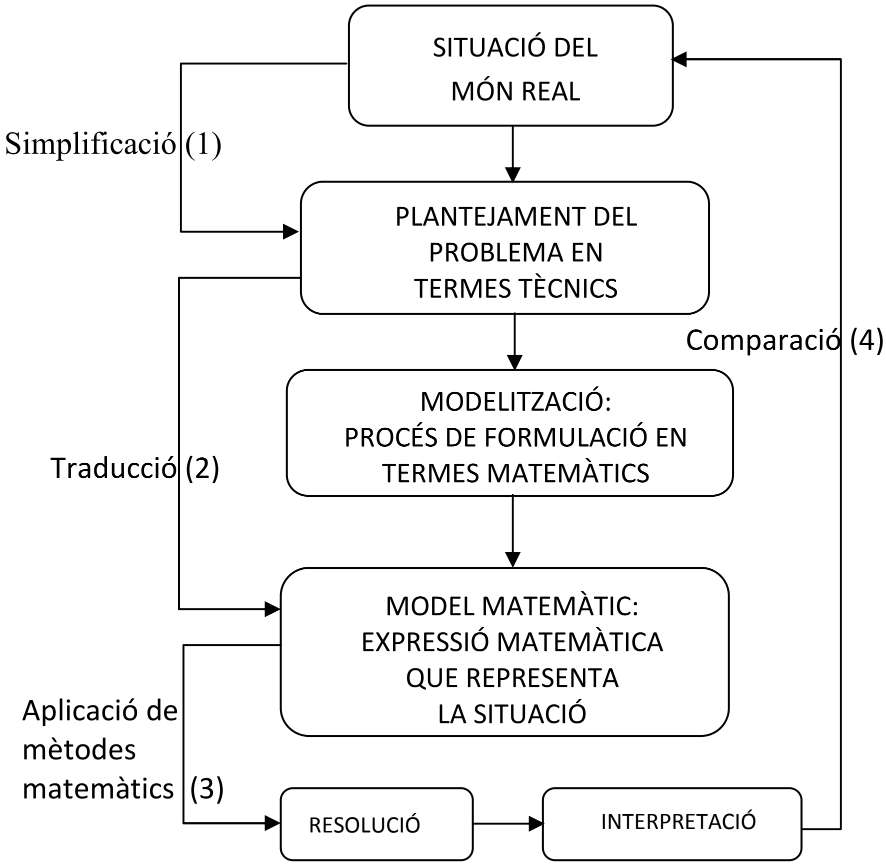


Figura 2.3. Procés de modelització segons Gómez Urgellés (1998)

Segons Gómez Urgellés, en els camins marcats (amb un nombre entre parèntesis) podem trobar aquests problemes:

"*En (1) Simplificació: La situació real pot manipular-se de manera que quan tinguem el model real, hàgim suposat diverses hipòtesis. Per exemple, en situacions de caiguda de cossos no s'obté el mateix model real si considerem la situació amb fregament o bé si el suposem menyspreable. M. Niss (1992) ho anomena matematització.*

En (2) Traducció: No és el mateix donar el model i treballar-hi que construir-lo. De vegades la tasca de construcció és molt laboriosa. En aquest pas el que fem és substituir paraules per símbols i expressions [...].

En (3) Aplicació de mètodes matemàtics: En aquest pas apareixen els algorismes adequats per resoldre el problema que s'ha convertit en una situació real. Cal resoldre el model usant les eines pròpies i adequades Aquí el professor juga un paper important, ja que sovint els estudiants troben un model [...] *que no saben resoldre i aleshores a* *l'aula o en tutories es presenten els mètodes de resolució. Un dels objectius és que l'estudiant s'adoni que per arribar a resoldre un cas usual de l'àmbit de la seva especialitat, necessita aprendre uns conceptes i unes tècniques per tal d'assolir una resposta al seu problema (ho podem anomenar motivació). D'aquesta manera adquireix un interès per l'aprenentatge de les matemàtiques ja que li veu una utilitat. Això ja és un fet diferencial en relació amb l'ensenyament tradicional.*

En (4) Comparació: Es tracta de rescriure els resultats numèrics obtinguts en termes del problema proposat inicialment, interpretar-los i alhora, saber triar, si hi ha diverses solucions, quina és l'adequada al seu problema."

Aquest mateix autor aplica la modelització en unitats didàctiques per al primer curs d'enginyeria tècnica industrial. Les unitats estan dissenyades per aplicar models matemàtics i les activitats segueixen els passos següents:

1. Identificació: Identificar una situació usual.
2. Construcció del model: Traduir la situació en terminologia matemàtica.
3. Descobriment: Per construcció, descobrir i aprendre conceptes matemàtics nous per als estudiants.
4. Interpretació: Treballar sobre el model per interpretar situacions semblants.

Per a Gómez Urgellés, en resum, un bon model és aquell que:

"... reconeix els fets rellevants d'un problema per mitjà d'una adequada elecció d'hipòtesi i té una estructura matemàtica ben definida, de la qual es poden deduir conseqüències d'interès pràctic."

English (1999) proporciona igualment un esquema del procés de modelització amb molts punts en comú amb els anteriors, però amb l'interès afegit que distingeix cada part del procés en funció del marc on s'esdevé: el "món físic", la classe de matemàtiques o l'àmbit més abstracte dels conceptes. De fet, English es preocupa especialment de les aplicacions pràctiques, a l'aula, de la modelització.

"... les matemàtiques escolars no es veuen sovint com a eines metodològiques que la gent pugui usar en problemes de cada dia i, quan s'usen, no se solen reconèixer com a mètode après a l'escola."

"Per fer possible que els alumnes apliquin les matemàtiques [...] *necessiten adonar-se que si les matemàtiques s'han usat per representar una situació, llavors és que s'ha construït algun model matemàtic."*

English suggereix que l'aplicació de les matemàtiques a l'aula ha d'incloure l'aflorament d'aquesta matematització oculta:

"Entre les habilitats que volem que els alumnes aportin a la societat des de la classe de matemàtiques hi podria haver, en primer lloc, la de reconèixer les matemàtiques

invisibles que s'oculten sota les suposicions que es fan i les decisions que es prenen..."

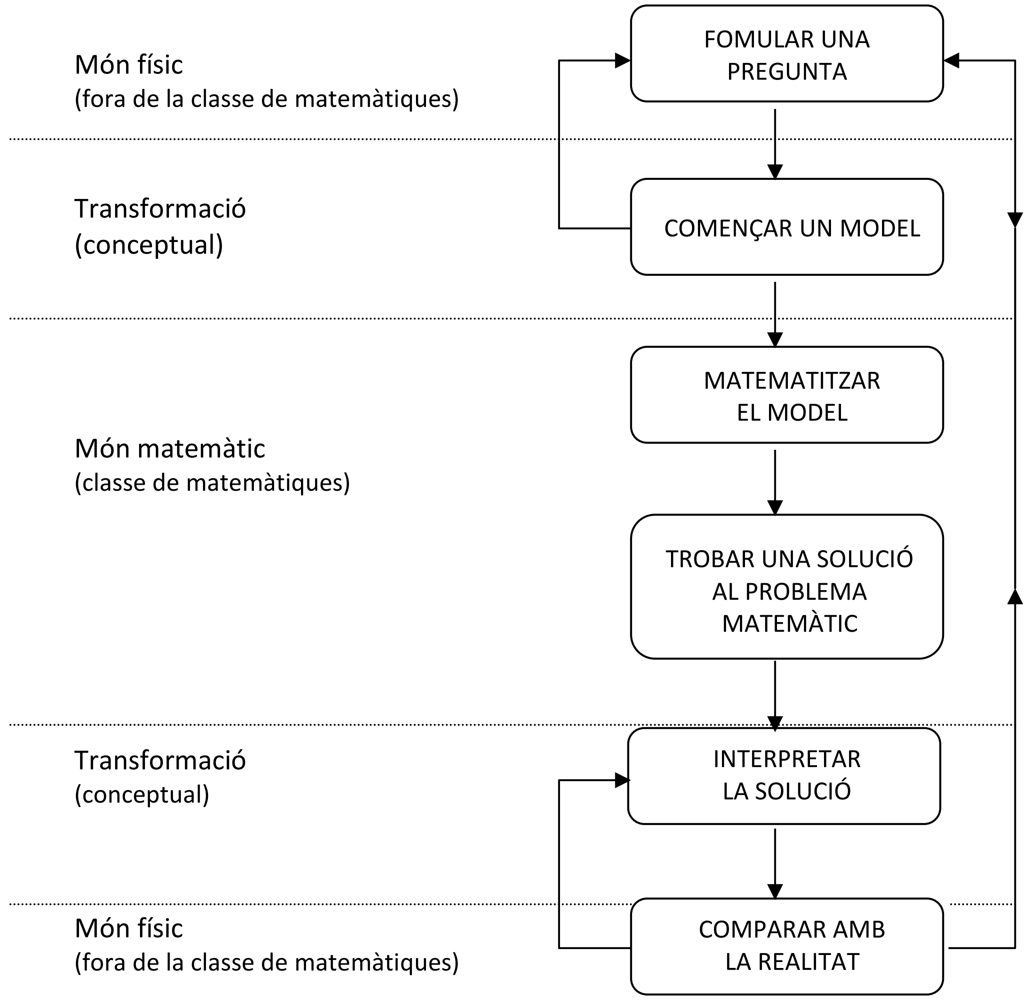


Figura 2.4. Procés de modelització segons English (1999)

La pràctica a l'aula d'aquest procés de modelització, segons English, permet que els alumnes tinguin temps per fer-se una imatge mental de la situació i poden recontextualitzar el problema a través de la descripció i la discussió. Tenen l'oportunitat de fer-se seu el problema que tracten de resoldre. Igualment destacable és que les imatges mentals que construeixen poden ser eines útils per a tasques matemàtiques posteriors. Alguns conceptes difícils d'adquirir, com per exemple raons entre magnituds, taxes de canvi, probabilitat, etc. poden aparèixer de manera natural mitjançant la modelització.

El procés de modelització tal com l'esquematitza English ens sembla especialment adequat. Un dels punts que trobem més destacables és que una de les fases del procés consisteix en "matematitzar el model", amb la qual cosa torna a quedar explícita l'íntima connexió que existeix entre la matematització i la modelització (recordem que

Van Reeuwijk ho expressava escrivint que “en el procés de resolució, el problema en context es transformarà en un model”). De fet, la seqüència que mostra English ja apareix en els altres autors, amb algunes diferències en la forma, que són febles en comparació amb les similituds, molt més fortes i més de fons.

Per resumir: les activitats d’aplicació que dissenyem per implementar a l’aula, encaixen en el procés següent (seguint l’exposició d’English, i d’una forma també similar a les exposicions dels altres autors citats):

1. La situació de partida se situa en un context real o versemblant.
2. Els objectes i/o relacions són “idealitzats”, segons la terminologia que usa Niss (English es refereix a “transformació” i Gómez Urgellés a “plantejament del problema en termes tècnics”). En l’apartat d’aquest capítol dedicat a la contextualització nosaltres hem argumentat que la representació “idealitzada” (en el nostre cas, la visualització geomètrica de la situació) també constitueix una forma de contextualització, és a dir, de proporcionar un sentit reconeixible per als alumnes.
3. Es produeix la matematització.
4. S’arriba a una solució al problema matemàtic.
5. La solució és objecte d’interpretació en el context “idealitzat” i també en el context de la situació de partida.

Per a models senzills, com els que corresponen al nostre plantejament, la “idealització” o “transformació” és molt visual, intuïtiva i ràpida. I la interpretació de les solucions és molt directa. Per als alumnes, la major dificultat del procés resideix a la matematització, que és on, precisament, col·loquem el focus d’atenció com a investigadors i com a docents.

Però, al cap i a la fi, tal com es pregunta Niss (1989): per què modelitzar? I nosaltres versionem la pregunta d’aquesta manera: per què matematitzar? Aquesta pregunta del perquè, més extensament formulada apareix sota l’enunciat següent:

“per a un nivell educatiu donat, les aplicacions i la modelització haurien de formar part del currículum de matemàtiques? Si és així, per què?”

Els arguments de Niss per respondre afirmativament al perquè és útil modelitzar són:

1. La modelització fomenta entre els estudiants actituds creatives i la capacitat de resoldre problemes.
2. Genera i desenvolupa un la capacitat crítica per a l’ús de les matemàtiques en contextos extramatemàtics.
3. Capacita per realitzar aplicacions pràctiques i models en altres matèries acadèmiques, en les futures professions i en la vida diària.
4. Estableix una visió equilibrada i representativa de les matemàtiques, el seu caràcter ei el seu paper en el món.

5. Ajuda a adquirir i comprendre conceptes matemàtics, nocions, mètodes i resultats, els dóna consistència i proporciona motivació per a l'estudi de disciplines matemàtiques.

Niss no tan sols exposa aquestes raons sinó que classifica quines d'elles corresponen a tres nivells diferenciats d'instrucció:

Per a l'*educació matemàtica escolar bàsica*, el debat didàctic se centra, segons l'autor en els arguments (1), (3) i (5), però considera que els realment importants són (2) i (3).

Per a l'*educació dirigida a persones de professions extramatemàtiques que necessiten utilitzar les matemàtiques*, els arguments (3) i (5) són els més debatuts, mentre que segons el punt de vista de Niss els més importants són (2) i (3).

Per a l'*educació dels professionals de les matemàtiques*, el debat pren en consideració sobretot els arguments (3), (4) i (5). Però aquest autor considera que els més importants són (2) i (4).

Per a aquests últims, especialment els professors de matemàtiques, afirma que:

"En la meva opinió, és important que obtinguin una imatge equilibrada i representativa de les matemàtiques en tots els seus aspectes, inclosos les aplicacions i la modelització. Si la seva perspectiva de les matemàtiques és més àmplia que considerar-les només un edifici teòric, no solament esdevindran millors a l'hora d'investigar, aplicar o ensenyar, sinó que la seva funció social com a ciutadans experts guanyarà qualitat."

Però també per a tothom, no tan sols els professionals de la matemàtica, Niss defensa una educació que proporcioni continguts matemàtics substancials, més enllà de la clàssica aritmètica, i fonamenta aquesta opinió en la importància social que adquireix la matemàtica en el món modern:

"Per a mi, la raó última per proporcionar una educació matemàtica sòlida a la població és que l'ús de les a la societat s'estén i s'incrementa, per bé i per mal, d'una manera que influencia cada vegada més el ciutadà individual. El principal propòsit de l'educació matemàtica és ajudar a crear individus competents i independents en tots els aspectes de la vida i no víctimes en la seva relació amb les matemàtiques a la societat."

El mateix autor considera que en els "últims anys" s'han introduït en al currículum diverses aplicacions que inclouen la modelització. S'han escrit nombrosos treballs, s'han elaborat materials didàctics, però *"tot això ha tingut lloc a la frontera de la teoria i la pràctica de l'educació matemàtica més que en el dia a dia de l'ensenyament"*. I opina que l'estudi de la modelització ha arribat a un punt en què es fa necessària una relació concreta amb l'educació matemàtica diària. Respecte això últim, manifestem la nostra total adhesió. De fet, des de la nostra posició no tan sols ens sumem a l'opinió de Niss, sinó que també la portem a la pràctica.

A més, l'experiència personal de Niss li proporciona una sèrie de raons per incloure la modelització en el currículum:

1. Augmenta la motivació dels alumnes, que en matemàtiques és tradicionalment baixa en nombrosos casos individuals
2. Esdevé un nou element formatiu i en aquest sentit augmenta la cultura matemàtica dels estudiants.
3. Pot evitar un aprenentatge incorrecte basat només en fórmules i processos estereotipats. Acostuma al treball amb problemes reals i potencia l'autonomia de l'estudiant.
4. Proporciona una visió més integrada i global de les matemàtiques ja que es necessiten conceptes i eines de diferents àrees d'entre les considerades clàssiques a les matemàtiques: àlgebra, anàlisi, geometria i probabilitat i estadística.
5. És una bona porta d'entrada a les noves tecnologies, especialment a la informàtica. Al mateix temps, la informàtica proporciona potència de càlcul, facilitat d'organitzar i representar i permet estalviar molt de temps.

Amb la qual cosa se supera el primer dels obstacles indicats per Niss i Blum (1989) citats per Gómez Urgellés (1998), que sorgeixen a l'hora d'incloure la modelització en el currículum:

1. Es necessita molt de temps per a les activitats de modelització.
2. Aquests metodologia pot deixar en segon terme el sentit tradicional de puresa de les matemàtiques.
3. Els alumnes poden sentir-se desconcertats si se'ls situa fora de la pràctica rutinària.

Per altra banda, aquests mateixos autors proposen alternatives per incloure eficaçment la modelització:

1. Separar: La modelització es tracta separadament de les matèries obligatòries o comunes. S'inclou en el currículum dins de matèries optatives, de manera que existeix una convivència entre els mètodes tradicionals i el innovadors.
2. Compartir: Impartir un primer nivell de matemàtiques pures tradicionals i posteriorment oferir un segon nivell en què es tracten les aplicacions i la modelització. Aquest esquema reprodueix a nivell curricular el que, dins de la pràctica de l'ensenyament a l'aula, Van Reeuwijk (1997) anomena "enfocament de dalt a baix".
3. Aïllar: Impartir la matèria dividida en unitats didàctiques i en cada una d'elles aplicar un primer nivell teòric seguit d'un segon nivell d'aplicacions. Es reprodueix l'esquema del punt anterior, "de dalt a baix", però a base de compartimentar els continguts.
4. Combinar: Les aplicacions i la modelització són eines auxiliars per introduir certs continguts matemàtics, però el tronc principal de la metodologia és encara tradicional.

5. Integrar en el currículum: Els conceptes es desenvolupen a partir de les aplicacions i la modelització. L'enfocament és no tradicional.
6. Integrar interdisciplinàriament: Més enllà d'integrar aplicacions i modelització a l'estricte currículum de matemàtiques, s'apliquen a altres disciplines.

Els punts (1), (2), (3) i (4) intenten reforçar el currículum tradicional amb aplicacions innovadores mentre que els punts (5) i (6) són completament innovadors i comporten un replantejament integral d'aquest currículum.

Després de tot el que hem manifestat, ja des del capítol 1, creiem que ha quedat ben clar que el nostre posicionament se situa, dins la classificació anterior de Niss, al punt "integrar en el currículum".

En un pla més general, Warzel (1989) també presenta una llista de raons a favor de modelitzar. La coincidència amb alguns arguments bàsics de Niss és notable:

1. Un model es pot usar per desenvolupar el coneixement si una àrea que no compta amb una teoria elaborada rep un model construït a base d'elements teòrics coneguts.
2. Sovint aporta transparència, claredat, simplicitat i una estructura més senzilla de treballar.
3. Pot combinar diferents teories.
4. Pot donar noves oportunitats de confirmar un marc teòric.
5. Pot mostrar el camí cap a les aplicacions tecnològiques.
6. Facilita l'anàlisi de la situació modelitzada.
7. Facilita visualitzar conceptes abstractes i difícils.
8. Pot proporcionar rutines per resoldre problemes.
9. Estimula la creativitat.
10. Proporciona motivació.

Pel que fa als obstacles que poden dificultar el procés de modelització, aquest mateix autor cita:

1. La realitat original no es descriu clarament.
2. Les eines matemàtiques necessàries no estan suficientment treballades amb anterioritat.
3. La reducció de l'original al model no és prou clara.
4. No hi ha prou reflexió i discussió sobre la tria de l'estructura matemàtica utilitzada en funció dels objectius de la modelització i sobre els passos seguits.

Els motius per incloure la modelització matemàtica en el currículum ja havien estat discutits en el cinquè Congrés Internacional d'Educació Matemàtica (ICME 5). Niss, Lesh i Lee (1984) eren els organitzadors del grup 6, dedicat a les aplicacions i la modelització. Les qüestions tractades i els arguments exposats apareixen posteriorment, de forma idèntica o semblant, en diversos autors, i sobretot en Niss. Es donen quatre raons bàsiques per incorporar aplicacions i modelització al currículum que són diferents però no excloents:

1. Les matemàtiques són de gran utilitat en qüestions científiques i pràctiques. Són presents a la societat, però l'experiència indica que les persones que no han tingut experiències d'aplicar les matemàtiques, construir i analitzar models, tenen dificultats a l'hora de desplegar a la pràctica el seu potencial matemàtic. Per tant, és necessari incloure aplicacions i models en el currículum.
2. La importància de les matemàtiques a la societat demana que els estudiants adquireixin habilitats per entendre, utilitzar i avaluar l'ús de les matemàtiques en situacions fora de contextos matemàtics.
3. Les aplicacions i la modelització en matemàtiques ajuden a comprendre idees, conceptes, mètodes i teories, al mateix temps que proporcionen exemples i interpretacions. També permeten practicar tècniques matemàtiques.
4. És corrent que només una minoria d'estudiants se senti atreta i motivada per les matemàtiques. La majoria creu que les matemàtiques tindran ben poca utilitat en la seva vida futura. Les aplicacions i la modelització contribueixen a fer les matemàtiques més atractives i properes a la realitat quotidiana.

A més d'aquestes quatre raons principals, se n'afegeixen altres de més específiques:

5. Ajudar els estudiants a utilitzar activament les matemàtiques en situacions obertes en què cal identificar els problemes, construir models i prendre decisions.
6. Ajudar també els estudiants a aplicar les matemàtiques en aquelles situacions més tancades en què s'ha elegit un model prèviament a l'aplicació.
7. Proporcionar habilitats per analitzar, caracteritzar i avaluar models i aplicacions nous o prèviament establerts, des dels punts de vista pràctic, epistemològic i matemàtic.
8. Ajudar els estudiants a adquirir coneixement i comprensió de les característiques i propietats d'aplicacions i models estàndard en diferents camps.

Dels debats del grup 6 de l'ICME 5 (1984), sorgeixen diferents alternatives per incloure les aplicacions i la modelització en el currículum. Són les mateixes que presenten Niss i Blum (1989) i que ja han estat comentades i numerades en paràgrafs anteriors: separar (1), aïllar (2), combinar (3), integrar en el currículum (4) i integrar interdisciplinàriament (5). A les conclusions del grup de treball es recomana que s'integri plenament la modelització, és a dir, que no s'utilitzi només com a complement d'un programa clàssic.
També s'identifiquen els principals obstacles que dificulten o impedeixen incloure realment les aplicacions i la modelització:

1. Alguns professors creuen que les aplicacions i la modelització restringeixen els continguts del currículum i que es porten a la pràctica amb materials d'inferior qualitat respecte als materials més clàssics. Per altra banda, els professors que volen treballar amb aplicacions i models no troben fàcilment materials que els

ajudin a enfrontar problemes oberts i complexos, per la qual cosa poden tenir la sensació que s'endinsen en un territori desconegut. A aquesta dificultat s'hi afegeix una altra: les aplicacions i la modelització necessiten més temps que les activitats convencionals.

2. Els companys de docència en matemàtiques o en altres disciplines poden mostrar-se reticents a canvis que incloguin aplicacions i models perquè els afectaran de manera més o menys directa.
3. Els exàmens escrits tradicionals no són gaire adequats per avaluar activitats d'aplicació i modelització. Si l'avaluació es basa en aquest tipus d'exàmens, les aplicacions i els models quedaran desplaçats a una posició d'importància secundària.

Sobre les dificultats de temps, que també han aparegut abans en una referència a Niss i Blum (1989) citats per Gómez Urgellés (1998), comentem que la nostra proposta implica una organització operativa ajustada a la temporització que defineix la programació didàctica de la geometria analítica a primer de Batxillerat i al centre on es desenvolupa la implementació. Ni més ni menys temps que el que ocuparia un plantejament didàctic tradicional. Respecte a l'adequació o no de les proves tradicionals, manifestem que es tracta d'un assumpte que ens interessa molt, com suposem que pot interessar a qualsevol docent. Ho tractem detalladament al capítol 5, a partir dels resultats obtinguts a la fase d'implementació.

Dins d'aquesta sèrie de referents anteriors sobre els avantatges que proporciona l'aplicació del modelatge, esmentem també l'aportació realitzada per Biembengut i Hein (2004), els quals afirmen que es propicia, per a l'alumne:

1. La integració de les matemàtiques amb altres àrees del coneixement.
2. L'interès de les matemàtiques per la seva aplicabilitat.
3. La millora de l'aprehensió dels conceptes matemàtics.
4. La capacitat per llegir, interpretar, formular i resoldre situacions-problema.
5. L'estímul de la creativitat en la formulació i resolució de problemes.
6. L'habilitat en l'ús de la tecnologia (calculadora gràfica i ordinadors).
7. La capacitat per actuar en grup
8. L'orientació per a la realització de la investigació.
9. La capacitat per a la realització de la investigació.

Destaquem que els punts 4 i 5 pertanyen a l'àmbit d'allò que nosaltres anomenem la matematització horitzontal. El punt 6 fa referència a un aspecte fonamental de la nostra proposta: l'ús de les TIC. Els punts 1 i 2 tenen, segons el nostre punt de vista, relació amb la de contextualització de l'aprenentatge. I el punt 3 ens sembla de gran importància perquè, al cap a la fi, un dels resultats que esperem trobar amb l'aplicació del nostre plantejament de "baix a dalt" és que els alumnes presentin una millor comprensió dels conceptes matemàtics a partir de la matematització en situacions contextualitzades (millor en comparació amb la metodologia tradicional): és un dels aspectes que mesurem i analitzem en la fase d'implementació de la nostra proposta (mostrem els resultats al capítol 5).

Finalment, després d'haver mostrat una sèrie de referències teòriques sobre la conveniència d'incloure la matematització - modelització en el currículum, ens sembla oportú puntualitzar que estem d'acord amb les bondats de la modelització tal com han estat exposades, encara que volem distingir entre aquelles que són difícilment mesurables a la nostra fase d'implementació i aquelles que sí que poden aparèixer en els resultats. Per exemple: escapa del nostre abast analitzar a partir dels resultats de la implementació si, com afirma Niss, la modelització (nosaltres matisem: la matematització que produeix models) "capacita per realitzar aplicacions pràctiques i models en altres matèries acadèmiques, en les futures professions i en la vida diària", o si "estableix una visió equilibrada i representativa de les matemàtiques, el seu caràcter el seu paper en el món". Però sí que està al nostre abast analitzar si, com afirmen Biembengut i Hein, es produeix la "millora de l'aprehensió dels conceptes matemàtics" o si, com afirma Niss, "augmenta la motivació dels alumnes". De fet, aquest últim exemple és especialment adequat per la seva importància fonamental dins de la nostra proposta. Ja hem mostrat, en començar aquest capítol, que un dels nostres punts de partida és, com afirma Filloy: "els primers ressorts que hem d'accionar en l'aprenentatge de les matemàtiques, són els de la motivació".
Per oferir ara una mostra una mica més concreta, declarem que en el nostre treball analitzem quina és la incidència del nostre plantejament, quan s'implementa (i comparativament amb un plantejament tradicional) en la reflexió que fan els alumnes sobre la matematització que realitzen; la seva comprensió dels continguts matemàtics; la utilitat de les eines TIC (utilitzades) per plantejar, avançar, trobar resultats i generalitzar; i la percepció sobre l'interès i l'amenitat de les classes. En tot cas, aquestes i altres qüestions estan desenvolupades al capítol 5.

2.3. Sistema didàctic i mètodes d'ensenyament de les matemàtiques

La referència teòrica que hem seleccionat per a aquest apartat és rellevant per al nostre posicionament en el sentit que ens aporta una visió global del procés d'ensenyament i aprenentatge. I, dins d'aquesta visió global dels elements que hi interaccionen, ens proporciona un element teòric per a un fet que ens sembla molt important en el nostre plantejament: la selecció, l'organització i la presentació del que s'ensenya condicionen l'entorn d'aprenentatge.
Efectivament: considerem que les nocions de *sistema didàctic* i *transposició didàctica* tenen certament interès per al professor i l'investigador, en especial si operem amb un plantejament didàctic no tradicional, perquè focalitzen l'atenció en el fet que allò que s'ensenya resulta condicionat per les decisions curriculars i organitzatives en un marc institucional (les autoritats educatives, les decisions del centre educatiu) i també l'elecció del tipus de plantejament didàctic concret que realitza el docent.

"A la construcció del currículum s'opera ja una primera etapa del mostreig inevitable que transforma el significat dels objectes matemàtics. La selecció d'uns sabers a ensenyar als diferents nivells i grups d'alumnes, suposa un fraccionament i

seqüenciació del saber que imposa severes restriccions al significat. A més, en proposar certs patrons d'ús, certes connotacions i notacions per als constructes matemàtics, amb l'exclusió d'altres, s'està condicionant l'entorn de significació que s'ofereix a l'alumne" (Godino i Batanero, 1994).

En conseqüència, l'anàlisi del saber organitzat i compendiat per la institució aporta elements indispensables per comprendre els mecanismes de construcció de significat:

"Els currículums i els llibres de text presenten sempre mostres de significat dels coneixements matemàtics, amb freqüència no representatives i de vegades amb biaixos difícils d'eliminar. L'anàlisi de l'entorn de significació que s'ofereix a l'alumne a la classe de matemàtiques es revela essencial per interpretar correctament les respostes d'aquest alumne".

Un fet didàctic no consta de components aïllats. Segons Brousseau (1986), la Didàctica de les Matemàtiques és *"l'estudi de l'evolució de les interaccions entre un saber, un sistema educatiu i els alumnes, amb l'objecte d'optimitzar les maneres d'apropiació d'aquest saber pel subjecte"*. En aquest marc teòric, és fonamental el concepte de *sistema didàctic*, format pels següents subsistemes:

- Alumne
- Saber a ensenyar
- Professor

El sistema didàctic està immers a la *noosfera* (Chevallard, 1991), que comprèn totes les persones que, a la societat, pensen sobre els continguts i mètodes d'ensenyament i influeixen de manera directa o indirecta sobre aquest ensenyament. El *contracte didàctic* "és un conjunt de regles generalment implícites, que organitzen les relacions entre el saber ensenyat els alumnes i el professor" (Brousseau, 1986).
El sistema didàctic (Ruiz,1993) "...actua com un selector; integra o rebutja elements de la història de cada un dels seus components i no reté res més que els aspectes compatibles amb els actes didàctics". Està també "...sotmès a múltiples restriccions exteriors, de caràcter institucional (horaris, cursos, programes, etc.) o bé socials, que tendeixen a adequar el funcionament didàctic a les concepcions educatives dominants a una certa cultura".

El terme *transposició didàctica* designa el conjunt de transformacions que pateix un saber científic amb la finalitat de ser ensenyat. A l'hora d'aplicar la transposició didàctica és determinant la hipòtesi d'aprenentatge (com aprenen els alumnes) amb la qual es treballa. Les moltes hipòtesis que es poden adoptar oscil·len entre els dos extrems següents:

- Hipòtesi constructivista: l'alumne construeix els coneixements a partir de la seva pròpia activitat. La missió principal del professor és buscar recontextualitzacions i repersonalitzacions (procés personal de descobriment de l'alumne).

– Hipòtesi empirista: els coneixements són directament subministrats pel professor. En aquest cas, l'ensenyament ideal es redueix a un curs en què el professor no comet cap error, seguit per unes proves que l'alumne ha de respondre correctament. Es tracta, evidentment, d'una hipòtesi de forta tradició històrica.

El nostre posicionament no se situa en cap d'aquests dos extrems, sinó entre ells. Quan, en apartats anteriors hem explicitat que per desplegar els continguts curriculars de la geometria analítica ens plantegem començar pel treball sobre situacions concretes i contextualitzades, amb la representació geomètrica i la visualització com a elements fonamentals, ens acostem a la hipòtesi constructivista. Efectivament, pretenem que l'alumne experimenti un procés de descobriment personal (nosaltres ens hi referim afirmant que les activitats d'aplicació indueixen l'alumne a matematitzar de manera no forçada). Però quan, a partir de la matematització en aquestes activitats inicials d'aplicació, ens dirigim cap a la formalització teòrica dels continguts, assumim que és el professor qui ha de "subministrar" aquesta formalització, per un motiu ben simple: no podem esperar que els alumnes, tots sols, estructurin i formalitzin els continguts en la manera usual en què es presenta als llibres de text. Entre altres coses, perquè l'organització dels continguts de la geometria analítica en la forma moderna que s'ensenyen, arriba després d'un llarg procés històric. No podem pretendre que en unes poques setmanes els alumnes construeixin això, que ha necessitat molt temps i la intervenció de moltes persones.
Per tant, utilitzem elements de la hipòtesi constructivista sense declarar-nos constructivistes, i elements de la hipòtesi empirista sense declarar-nos empiristes. Més que intentar afinar si som més a prop d'un extrem que d'un altre, el que ens interessa és remarcar que la clau no resideix en una o altra hipòtesi com a referència estàtica, sinó en com organitzem la seqüència i la progressió. Primer les aplicacions en context, i a partir d'elles, la generalització i l'abstracció. Finalment, la formalització teòrica.

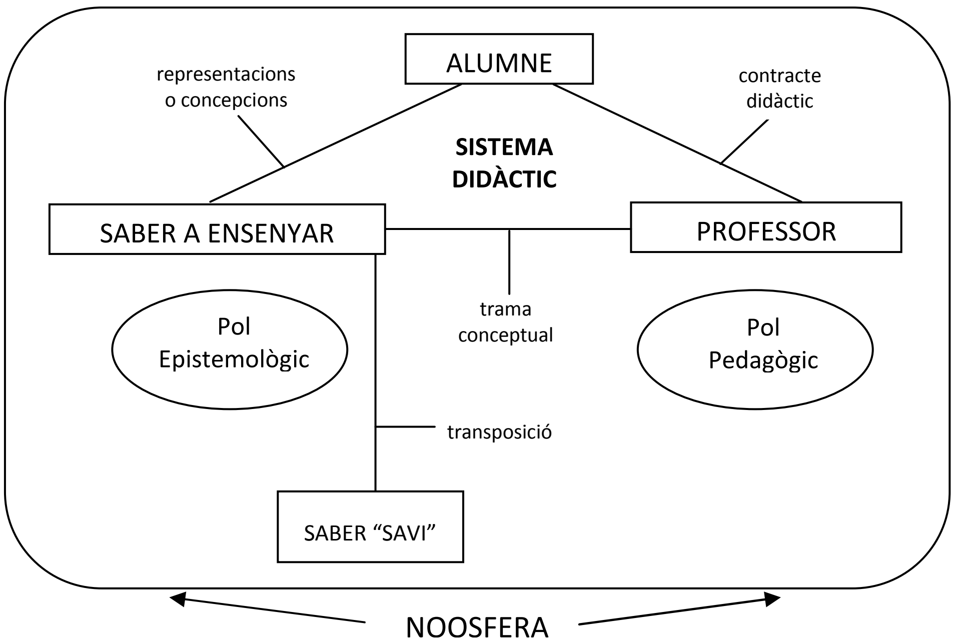


Figura 2.5. Sistema didàctic segons Arsac (1989)

Continuem amb la referència teòrica. La transposició didàctica a la qual ens referíem es desenvolupa en dues fases:

1. Determinació del que s'ha d'ensenyar, organització, seqüenciació i temporització. En aquesta fase el professor no intervé.
2. Intervé el professor a través de la seva acció didàctica. El saber ensenyat es concreta i arriba a l'alumne.

Això expressa una visió tradicional segons la qual el professor es limita aplicar allò que ha estat prèviament determinat. No és aquest el nostre cas. Si bé no determinem el que s'ha d'ensenyar (perquè ens hem de moure dins del que estableix el currículum) sí que organitzem, seqüenciem i temporitzem (tal com mostrem amb detall al capítol 3).

Continuem encara: la transposició comporta una sèries de fenòmens associats amb conseqüències sobre el procés d'aprenentatge:

1. Efecte Topaze: la resposta que ha de donar l'alumne ja està prèviament fixada. L'alumne només necessita regles o algorismes per respondre "correctament", encara que no comprengui què fa.
2. Efecte Jourdain: el professor busca en el comportament de l'alumne qualsevol indici, per trivial que sigui, que li permeti justificar que aquest alumne ha assimilat el saber ensenyat.
3. Lliscament metacognitiu: un mitjà o mètode d'ensenyament es converteix en objecte d'ensenyament.

Respecte això anterior, afirmem que en el nostre plantejament didàctic els alumnes no es limiten aplicar mecànicament receptes, que mesurem amb procediments objectius l'assoliment de la matematització i que la metodologia que apliquem no és un objecte d'ensenyament sinó un mitjà. La validesa d'aquestes afirmacions es pot comprovar mitjançant la lectura dels capítols 3, 4 i 5.

A l'hora d'ensenyar uns determinats continguts als alumnes, el professor utilitza una sèrie d'estratègies, mecanismes i pràctiques. Aquest conjunt pot haver estat explícitament meditat des del punt de vista didàctic, tenint en compte referències teòriques o criteris personals, o bé pot respondre a motivacions no tan explícites, a través de la influència del caràcter individual, el tipus d'ensenyament viscut com a estudiant en etapes anteriors, el conjunt de pràctiques usuals i els condicionaments en el sistema educatiu i en el centre de treball, etc. Tots aquests múltiples factors configuren la pràctica docent a l'aula, des d'aquells que han estat explicitats, i per tant motiu de reflexió conscient, fins als que romanen en un pla més inconscient.

Ruiz (1993) esquematitza de la següent manera el procés de transposició didàctica:

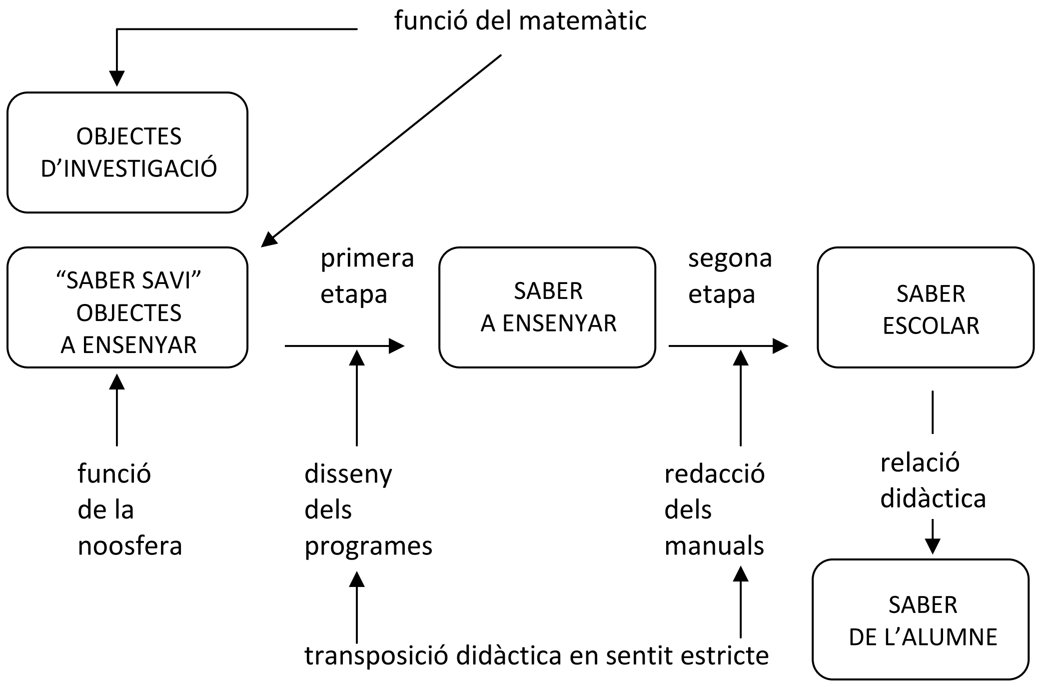


Figura 2.6. Etapes de la transposició didàctica segons Ruiz (1993)

Dins de la varietat de resultats que pot generar el concurs d'aquests nombrosos factors, és possible distingir algunes característiques rellevants que permeten classificar els mètodes d'ensenyament de la matemàtica. Peralta (1995) utilitza el criteri de classificació de Toranzos (1963), en què se subratlla el contrast entre l'enfocament tradicional de la instrucció i les noves metodologies. Precisament, un dels motius més corrents per elaborar i assajar nous mètodes l'ha proporcionat la insatisfacció amb els processos tradicionals. Per tant, en aquesta classificació que contraposa antic amb nou, tradicional amb renovador, rígid amb flexible, i reproductiu amb creatiu, hi ha també, a part de la classificació mateixa, una valoració desfavorable de l'ensenyament tradicional i favorable de nous mètodes. De tota manera, Peralta remarca que no s'ha de seguir necessàriament una única recepta metodològica, sinó que la metodologia és un conjunt de procediments de base teòrica més o menys consagrada, al servei del professor, dels quals se'n pot fer un ús flexible, adaptat a les circumstàncies i obert a la combinació de mètodes diferents.
La classificació de mètodes distingeix quatre punts, en cada un dels quals hi ha dues possibilitats:

1. Respecte a la manera d'escollir, ordenar i presentar a l'alumne els diferents temes.
   a) Tradicional: no es tenen en compte els processos psicològics involucrats en l'aprenentatge de l'alumne. A l'hora de presentar els continguts, el criteri predominant és l'estructura lògica i axiomàtica de les matemàtiques.
   b) Psicològic: adapta la metodologia a l'evolució psicològica dels alumnes a través de les diferents etapes educatives. La intuïció i l'empirisme són eines

per abordar els conceptes matemàtics i només posteriorment, en els últims cursos, s'introdueix el rigor lògic.

2. Respecte al grau d'intervenció de l'alumne.

    a) Expositiu: el professor transmet els coneixements mitjançant classes magistrals i els alumnes actuen de receptors que hauran de reproduir el que els ha estat ensenyat. El saber transmès es presenta com un producte elaborat en una forma acabada.
    b) Actiu: l'alumne construeix l'aprenentatge a través de la seva pròpia activitat participativa i el professor l'orienta en aquest procés.

3. Respecte a la manera d'adquirir els coneixements.

    a) Dogmàtic: l'alumne ha d'aprendre uns coneixements de la mateixa forma fixa i acabada en què se li presenten.
    b) Heurístic: l'alumne s'enfronta a situacions problemàtiques que intenta resoldre amb l'ajuda del professor, i així va construint els coneixements.

4. Respecte al mètode d'estructura.

    a) Deductiu: es parteix d'uns fets admesos com a certs per arribar fins a unes conseqüències conclusions a través del raonament.
    b) Inductiu: es parteix de l'experiència dels casos particulars per arribar a generalitzacions. Per aconseguir rigor, necessita el complement del mètode deductiu, encarregat de provar les hipòtesis a les quals s'ha arribar per inducció.

Com ja s'ha evidenciat des del capítol 1, la nostra proposta també subratlla el contrast entre l'enfocament tradicional de la instrucció i una nova metodologia. I planteja iniciar el procés d'ensenyament i aprenentatge de la unitat didàctica de geometria analítica amb un mètode que, segons la classificació anterior, és psicològic, actiu, heurístic i inductiu (desenvolupat mitjançant activitats d'aplicació contextualitzades en l'entorn del programari interactiu Geogebra). Amb la precisió necessària que l'adjectiu "psicològic" no és aplicable en aquest cas a l'evolució al llarg de diversos cursos o etapes educatives, sinó en un sentit més restringit d'evolució en un període molt més curt de temps (el que dura la unitat didàctica), en el qual també es dona a petita escala el recorregut des de les aplicacions contextualitzades fins al rigor de la formalització.
Però, com també hem tingut l'ocasió d'expressar inequívocament, la nostra proposta no roman només en el terreny de la innovació pura (per contrast amb allò tradicional) sinó que, a partir de la matematització produïda en aquestes condicions, es dirigeix cap a una formalització teòrica dels continguts, la qual ja no pot ésser purament induïda, sinó que ha de ser forçada, és a dir, subministrada pel professor. En aquest sentit, la nostra posició evoluciona cap a un mètode tradicional, expositiu, dogmàtic i deductiu.

Ara bé: aquestes classificacions anteriors no són res més que descripcions parcials, perquè es refereixen a parts de la nostra seqüència didàctica. La qüestió fonamental no és tant si una part és tradicional i una altra no, sinó com s'organitza tota la seqüència. És aquí on insistim que la formalització tradicional dels continguts arriba després de la matematització que induïm als alumnes: es tracta del que hem anomenat enfocament de baix a dalt. Llavors, en conjunt, vist globalment, el nostre posicionament no és tradicional.

Peralta (1995) s'atura especialment en el mètode heurístic. En destaca la característica fonamental: buscar situacions dinàmiques per motivar l'activitat creadora i descobridora dels alumnes. Una de les accepcions de la paraula heurística és "Art de descobrir fets valent-se d'hipòtesis o de principis que permeten l'avaluació dels progressos fets en la resolució dels problemes plantejats". En conseqüència, un mètode heurístic també és un mètode actiu, ja que és l'alumne qui construeix els coneixements a través de la seva activitat. En realitat, es pot dir que reconstrueix els coneixements, tal com afirma Peralta, "...fent passar l'alumne per un procés de formació de conceptes en certa forma semblant a l'experimentat per la humanitat". Ho fa a partir de situacions problemàtiques, de les quals ha de diferenciar al que és rellevant del que és accessori, formular hipòtesis, desenvolupar-les matemàticament i comprovar la validesa de les conclusions. Aquests són també elements de la matematització i de la modelització. En aquest sentit, aplicar el mètode heurístic no implica necessàriament modelitzar, però construir un model demana una sèrie de passos que són presents en el mètode heurístic.
El principal introductor del mètode heurístic aplicat a l'ensenyament a Espanya fou el matemàtic Pere Puig Adam (1900-1960). Entre 1950 i 1960 va publicar una sèrie de textos de caire didàctic en què defensava la participació activa de l'alumne en la resolució de problemes com a motor per construir coneixements matemàtics: *Decálogo de la Didáctica de la Matemática*, *Didáctica de la Matemática Heurística*, *El material didáctico matemático* i *Las Matemáticas y su enseñanza actual*.

Si bé Peralta destaca els avantatges formatius del mètode heurístic, també n'assenyala les limitacions:

"De tota manera, s'ha de tenir en compte que en aquest aprenentatge per descobriment en què les nocions no es donen fetes prèviament, es necessària una etapa de tempteig anterior a la captació del significat, i una fase posterior de comprensió i interiorització de la informació descoberta: fase que òbviament és molt més dulcificada que en el cas de l'ensenyament tradicional, ja que s'ha participat en l'elaboració dels conceptes."

I manifesta que aquest mètode no s'ha d'utilitzar de manera exclusiva, sinó combinat amb altes mètodes, ja que no sempre és aplicable en totes les situacions i contextos, encara que és el "límit" al qual ha de tendir l'ensenyament de la matemàtica. Un límit no exempt d'objeccions. Peralta (1995) n'esmenta les següents:

1. Lentitud del procediment: els conceptes es fixen millor que amb el mètode tradicional, però la despesa de temps és major.
2. Heterogeneïtat i excessiu nombre d'alumnes per classe: el mètode no aconsegueix resoldre el problema dels diferents ritmes d'aprenentatge en grups heterogenis.
3. No transcendència dels conceptes: es procura partir de problemes de la vida real, però això no garanteix que les conclusions se sàpiguen generalitzar de manera que siguin aplicables a altres situacions no idèntiques.

Pel que fa a l'inconvenient de la lentitud, aclarim que el disseny operatiu de la nostra proposta conté una temporització detallada que, com mostrem mitjançant la implementació, és perfectament aplicable. Pel que fa a la heterogeneïtat i a la transcendència dels conceptes, ens remetem a l'anàlisi desplegada al capítol 5, en la qual abordem la classificació dels alumnes en categories segons els seus resultats en la matematització.

2.4. Evolució històrica de la geometria analítica

2.4.1. La relació entre àlgebra i geometria en els inicis de l'àlgebra

Des del seu naixement, l'àlgebra ha estat relacionada amb la geometria. En realitat, fins i tot després que aparegués la geometria analítica (segle XVII), durant molt de temps l'àlgebra no es va concebre com una branca autònoma dins de la matemàtica. La concepció d'una àlgebra que només s'ha de preocupar de la consistència interna en el marc d'unes determinades regles de joc no arriba fins al segle XIX, quan en tota la matemàtica hi ha una especial preocupació pels fonaments d'aquesta ciència. És llavors quan apareix l'àlgebra moderna i quan es desenvolupa una abstracció progressiva que no necessita cap suport de la intuïció, el sentit comú o les experiències del món físic.
Durant el segle XVII comença la resolució sistemàtica de problemes geomètrics mitjançant eines algebraiques i sistemes de coordenades. Però els que històricament han estat considerats els iniciadors de la geometria analítica no són els primers que apliquen l'àlgebra a problemes geomètrics. Des dels inicis de l'àlgebra i fins al segle XIX, és una constant la relació estreta amb la geometria, per il·lustrar i per demostrar els nous resultats que s'obtenen. No és estrany: la tradició de la matemàtica clàssica grega, eminentment geomètrica, té un pes tan gran que qualsevol nou mètode algebraic hi ha de buscar les eines de justificació i demostració. A més, quan encara no s'ha desenvolupat un simbolisme adequat es fa imprescindible recórrer a la geometria com a procediment demostratiu.
El primer algebrista conegut és Mohammed ibn Mose Al-Khwarizmi (c. 780-c. 835), un matemàtic originari de l'actual Uzbekistan que va ser astrònom a Bagdad a l'època del califa de *Les mil i una nits*. És autor del primer tractat d'àlgebra, *Al-jabr wa'l Muqabala*. La paraula *jabr* es pot traduir per "restauració" i s'entén, en una interpretació actual,

com "passar" d'un membre a l'altre en una equació. La paraula *muqabala* significa reducció o simplificació, en el sentit d'eliminar termes iguals que apareixen als dos membres de l'equació. La llatinització de l'àrab *al-jabr* va produir el mot actual "àlgebra", i el nom Al-Khwarizmi és l'origen de la paraula "algorisme".
L'obra d'Al-Khwarizmi es va fer molt popular a Europa a través de les traduccions al llatí, la primera de les quals és de Robert de Chester l'any 1145 (escola de traductors de Toledo). A la introducció, l'autor destaca el caràcter utilitari del seu treball i l'íntima relació amb la geometria i l'aritmètica (en F. Martín, 2000, p. 25):

"Aquest interès per la ciència, amb el qual Al·là ha dotat el califa Al Ma'mun [...] m'ha animat a composar aquests breu obra de càlcul per mitjà d'al-jabr i d'al-muqabala, en què es conté tot el que és més fàcil i útil en aritmètica, com per exemple el que habitualment es necessita per executar herències, llegats, fer repartiments, en els plets, i en el comerç, i en totes les transaccions amb tercers, o allà on hi estiguin implícites l'agrimensura, l'excavació de canals, els càlculs geomètrics, i altres assumptes de diversos tipus i classes."

En el llibre d'Al-Khwarizmi s'hi troben les resolucions sistemàtiques d'equacions de primer i segon grau i sempre hi apareix la resolució geomètrica corresponent. El plantejament i la resolució algebraica s'expressen en l'anomenada àlgebra retòrica, és a dir, fent servir exclusivament paraules del llenguatge comú.
Respecte a les demostracions en què l'argumentació es basa en consideracions geomètriques a partir de les quals s'aplica l'àlgebra, F. Martín (2000, p. 134) subratlla:

"...per demostració d'una regla algebraica s'entenia demostració geomètrica, és a dir, un conjunt de raonaments de caràcter geomètric que donessin una explicació raonada de tal regla, basats en la interpretació geomètrica dels elements de l'equació, en termes de segments, àrees i volums. El més curiós és que aquest tipus d'interpretacions es donava fins i tot quan els problema no tenia cap relació amb la geometria. Per exemple, quan l'enunciat es referia a meres relacions entre nombres, del tipus de: trobar un nombre el cub del qual sumat amb tres vegades al seu quadrat sigui igual al seu quíntuple més set."

De vegades, els algebristes medievals i renaixentistes consideraven que la solució era òbvia només observant la representació geomètrica, i no hi afegien cap altre raonament. Per exemple, Leonardo de Pisa (c. 1170-c. 1240) conegut pel nom Fibonacci, introductor a Occident de les xifres d'origen indi i de l'àlgebra àrab a través de la seva obra cabdal *Liber abaci* (el llibre de l'àbac, 1202), pren una equació de l'àlgebra d'Al-Khwarizmi:

$$x^2+10x=39$$

I considera que la solució és evident mostrant la següent figura:

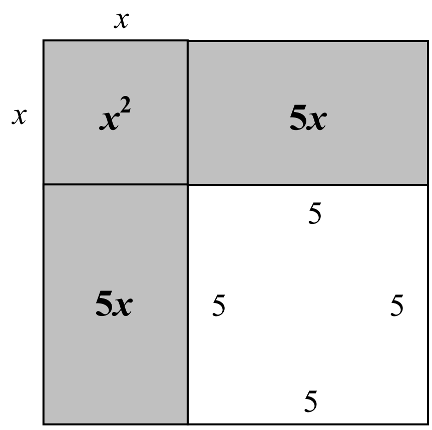


Figura 2.7. La solució de l'equació d'Al-Khwarizmi segons Fibonacci

Fibonacci sobreentén que el lector ja interpretarà que l'àrea ombrejada representa el primer membre de l'equació. Aquesta àrea val 39, i està formada per x^2+10x. Completada amb un quadrat de costat 5, l'àrea del quadrat resultant és 25+39 = 64, per tant, el seu costat val 8. En conseqüència, $x = 3$.

Girolamo Cardano (1501-1576) va publicar el 1545 la resolució de l'equació de tercer grau a la seva gran obra *Ars Magna*, procediment que li havia revelat Niccolò Fontana (1500-1557, anomenat Tartaglia) i també va usar una demostració geomètrica. Evidentment, només considerava solucions positives. A part d'aquesta última limitació, n'hi havia una de més gran: un cub es pot interpretar en termes d'un sòlid a l'espai, però, ¿com interpretar les equacions de grau quart o superior? Cardano afirma que no es por anar més enllà del cub, ja que la naturalesa no ho permet. Es pot apreciar, doncs, que les consideracions geomètriques no tan sols intervenen en les resolucions, sinó que restringeixen l'àmbit de validesa de l'àlgebra.

Quan Rafael Bombelli (1526-1572) va publicar la seva obra *Àlgebra* el mateix any de la seva mort, 1572, va donar un pas significatiu per a la progressiva independència de l'àlgebra respecte de la geometria, un camí ja iniciat quan Ludovico Ferrari (1552-1565) va resoldre l'equació de quart grau, que no podia ser interpretada en termes espacials. Bombelli presenta de manera ordenada i sistemàtica els mètodes des resolució de les equacions fins al quart grau. Per a les de tercer grau necessita utilitzar 19 regles, i per a les de quart, 42, aplicades a través d'una col·lecció de problemes.

Els algebristes renaixentistes encara escrivien els seus treballs en àlgebra retòrica, però lentament s'introduïen símbols especials per a la notació. Molts d'aquests símbols (o abreviatures) no han perdurat. Per exemple, Luca Pacioli (1445-1517), en la seva obra més important, *Summa de aritmetica, geometria, proporcioni e proportionalità*, escrita el 1487 i publicada el 1494, fa servir l'anomenada àlgebra sincopada, dita així perquè encara és de tipus discursiu però utilitza abreviatures:

abreviatura	expressió que s'abreuja	notació actual
co	cosa	x
ce	censo	x^2
cu	cubo	x^3
ae	igual (aequalis)	=
p	més (plus)	+
m	menys (minus)	–
R2	arrel quadrada	$\sqrt{}$
R3	arrel cúbica	$\sqrt[3]{}$

El pas a l'àlgebra simbòlica és obra del matemàtic François Viète (1540-1603), que usava les vocals per a les incògnites i les consonants per a les quantitats conegudes (a l'inrevés de com es fa ara) i els signes + i –. Als seus treballs encara és patent la influència geomètrica, ja que les magnituds estan associades a dimensions: la primera potència s'anomena *latis* (costat), la segona *planum* (àrea) i la tercera *solidum* (cos). El mèrit de Viète consisteix en haver fet una síntesi de l'àlgebra renaixentista no com el conjunt de mètodes de resolució de casos particulars que era fins aquell moment, sinó com a teoria general, establint una sèrie de postulats en els quals s'han de basar les transformacions algebraiques. A la seva obre *In artem analyticen isagoge* (1591) fa un ús sistemàtic de les lletres per simbolitzar quantitats qualssevulla.

2.4.2. Els inicis de la geometria analítica

A partir de les primeres dècades del segle XVII, Occident experimenta una veritable revolució intel·lectual. Sorgeixen noves disciplines científiques. La visió i la interpretació del món canvien. Les concepcions medievals ja han estat molt transformades per l'humanisme renaixentista, però és durant el segle XVII que les idees, en camps com la filosofia o la teoria política, adquireixen les principals característiques que permeten qualificar-les com a modernes.
Aquest segle és també el de la "revolució científica", és a dir, el del naixement de la ciència experimental com a disciplina autònoma d'investigació. El món físic es converteix en objecte d'estudi sistemàtic. Els fets del món real, tangible, esdevenen matèria d'escrutini intel·lectual, contràriament al que succeïa en l'enfocament d'arrel clàssica, i això representa un canvi fonamental en l'actitud de les persones dedicades a aquelles activitats mentals que des d'un punt de vista actual considerem pròpies de la filosofia i de la ciència. A l'antiguitat, els pensadors clàssics es concentraven sobretot en les especulacions i construccions abstractes, corresponents a una esfera ideal contraposada als afers materials. Durant molts segles, a causa de la profunda influència del pensament grec, els afers relacionats amb el món físic no s'havien jutjat dignes de l'atenció dels individus dedicats al cultiu de l'intel·lecte.
L. Geymonat (1980, p. 33) remarca la significació d'aquest canvi profund:

"El naixement de la ciència experimental guarda relació amb el descobriment (gens simple, encara que ens pugui semblar obvi) que existeixen tècniques molt precises per dominar racionalment el decurs de l'experiència, és a dir, per provocar certs fenòmens que es poden repetir a voluntat i mesurar-se amb exactitud matemàtica, en condicions controlades pel nostre intel·lecte. Va ser necessari un profund canvi filosòfic per induir els esperits cultes a estudiar seriosament i ordenadament aquestes tècniques, és a dir, per superar el doble prejudici que tota activitat pràctica resultés massa inferior per ser digna d'investigació racional, o massa recòndita i misteriosa per ser accessible a les forces humanes."

Aquest canvi en el pensament occidental troba les causes en les transformacions socials de l'època. Noves classes socials que deuen la fortuna al treball ascendeixen en importància i en influència. La naixent nova organització política i econòmica del món impulsa la investigació de nous problemes pràctics: construcció de ponts, canalització de rius, excavació de ports, construcció de fortaleses, el tir d'artilleria, etc. Per tant, noves generacions d'estudiosos s'ocupen d'aquestes qüestions. La majoria d'aquestes generacions es nodreixen dels fills de professionals civils, de burgesos i d'humanistes.
En aquest context històric se situa la vida d'un dels personatges cabdals en els inicis del pensament i la ciència moderns: René Descartes (1596-1650). A l'actualitat, Descartes és conegut sobretot per les seves decisives aportacions a la filosofia i a les matemàtiques. En filosofia, se'l considera el fundador del racionalisme, amb el qual s'inaugura el pensament occidental modern, basat en el subjecte, i és de sobres coneguda la seva frase "penso, per tant existeixo". Tots els manuals escolars de filosofia recullen el seu pensament i en subratllen la importància. Per altra banda, la seva presència a les matemàtiques escolars (que al cap i a la fi són responsables de la cultura matemàtica bàsica comuna a pràcticament tota la societat) és força més indirecta. Excepte breus notes biogràfiques que de manera ocasional poden incloure alguns textos, Descartes apareix no tant com a figura històrica sinó a través de la terminologia. És el cas de l'adjectiu "cartesià", utilitzat sovint en la geometria elemental amb coordenades.
De fet, el Descartes filòsof és inseparable del matemàtic. Per a ell, la matemàtica és només una disciplina apta per aplicar les seves regles de pensament i d'investigació (el "mètode") . En aquest sentit, J. Rey Pastor i J. Babini (1985, vol. 2, p. 43) escriuen:

"Una de les característiques del pensament cartesià és el que s'ha anomenat el seu «afany còsmic», és a dir, un anhel de generalització i d'absolut, que li fa perseguir la realització d'una física general, capaç d'explicar completament tot el que conté l'univers, a la terra i al cel..."

"És en virtut d'aquest afany que en Descartes la matemàtica no te un fi en si mateix: la considerarà com a model de la ciència a la qual dictarà els seus preceptes lògics, servirà per això admirablement, a manera de conill d'índies, per assajar el seu mètode, però no serà més que això, un mitjà, un mètode."

A més, expressa una opinió de vegades despectiva envers la matemàtica pura. El caràcter formal d'aquesta ciència li fa dir: "És tan abstracta que no sembla que tingui cap ús". I respecte dels problemes dels quals s'ocupa, manifesta que "s'hi acostumen a entretenir geòmetres i calculadors ociosos" (J. Rey Pastor i J. Babini, 1985, vol. 2, p.44). Per això és remarcable, en comparació amb el món clàssic, el gir que representen les concepcions cartesianes sobre les pròpies matemàtiques.

Descartes és sense dubte una figura cabdal en la història de la matemàtica ja que les seves contribucions, a part del valor intrínsec que tenen, comporten l'inici d'una nova branca, la geometria analítica. Però no adopta el posat d'un matemàtic clàssic, que s'hauria dedicat a les matemàtiques per pur plaer abstracte pensant que practicava la forma més elevada d'activitat intel·lectual, sinó que les utilitza com a camp de pràctiques especialment adequat per al seu "mètode". Com a bon fill de la seva època, les preocupacions que el motiven a reflexionar i actuar estan lligades a la comprensió del món tal com és (no tal com hauria de ser en un aspecte ideal, un plantejament més propi dels matemàtics grecs que beuen de la tradició pitagòrica i platònica).

El treball de caràcter matemàtic més important de Descartes és *La geometria* (1637), un dels tres assaigs que acompanyen l'obra *Discurs del Mètode* (els altres dos són *Els meteors* i *La diòptrica*). *La geometria* es divideix en tres llibres. El primer tracta "dels problemes que es poden construir fent ús exclusiu de les circumferències i de les línies rectes", i conté la base de tota la formulació cartesiana de la geometria, estretament lligada al mètode. El segon tracta "de la naturalesa de les línies corbes". És més complex que el primer, i es divideix en l'estudi de la naturalesa geomètrica de les corbes, el problema (clàssic) de Pappus, la determinació de les normals a una corba geomètrica i els coneguts ovals de Descartes. El tercer s'ocupa "de la construcció dels problemes sòlids, o més que sòlids".

Des d'un punt de vista epistemològic, els llibres segon i tercer sobrepassen els continguts i les necessitats de l'ensenyament secundari. És al llibre primer on es poden trobar els elements nuclears del mètode cartesià, el qual, a partir de la geometria i l'àlgebra, originarà la nova branca anomenada geometria analítica.

De *La geometria* n'existeix una excel·lent traducció al català de J. Pla i P. Viader (anotada i comentada, 1999), que ens ha resultat una molt bona font per a la consulta.

2.4.3. Descartes: el mètode

El llibre primer de *La geometria* comença amb aquesta frase, resum del contingut i al mateix temps declaració d'intencions:

"Tots els problemes de geometria es poden reduir amb facilitat a termes tals que, en endavant, només sigui necessari conèixer la longitud d'algunes línies rectes per tal de poder-los construir." (traducció catalana, 1999, p. 13)

Per abordar aquests problemes, Descartes utilitza el procés que ell anomena mètode:

"Si volem, doncs, resoldre un problema qualsevol, caldrà d'antuvi suposar-lo ja resolt i aleshores donar nom a totes les línies que ens semblin necessàries per a la seva construcció, tant les que són desconegudes com les altres. Aleshores, sense fer cap mena de distinció entre les línies que ens són conegudes i les que no, cal recórrer la

dificultat [del problema] d'acord amb l'ordre que ens mostri de la forma més natural possible les relacions que hi ha entre elles, fins a aconseguir expressar una mateixa quantitat de dues maneres: això és el que s'anomena una equació, atès que els termes d'una de les expressions són iguals als de l'altra. I cal trobar tantes equacions com línies desconegudes s'hagin introduït. Si no se'n troben tantes i no s'ha omès res d'allò que s'especifica en el problema, disposarem d'un testimoni que el problema no està totalment determinat. En aquests casos, podrem elegir arbitràriament línies de longitud coneguda per a cada una de les desconegudes, a les quals no els correspon cap equació. Si després de fer-ho encara en queden diverses [d'equacions], caldrà servir-se ordenadament de les que queden, considerant cada una d'elles aïlladament o comparant les unes amb les altres, a fi d'explicitar cada una de les línies desconegudes." (pp. 17-18)

A partir d'aquesta exposició original de Descartes, J. Pla i P. Viader (1999) distingeixen les parts següents:

1. Suposar el problema resolt. Això, en termes pràctics, significa només suposar una solució o basar-se en una solució concreta, la qual cosa pot restar generalitat al problema. Per altra banda, podria ser que un problema geomètric no tingués solució.
2. Donar nom als segments. El nom representa la longitud que té cada un dels segments, sempre respecte de la unitat elegida d'una vegada per totes. Aquí comença l'algebrització de la geometria.
3. Establir l'equació. S'ha d'aconseguir expressar un mateix segment per mitjà de dues expressions algebraiques diferents, és a dir, mitjançant una equació. Descartes adverteix que el problema només serà determinat si s'han aconseguit tantes equacions com incògnites. Si resulta indeterminat, es pot convertir en determinat fixant valors arbitraris a tantes lletres desconegudes com sigui necessari.
4. La resolució algebraica. Per a Descartes és secundària, encara que en certs casos és l'única de què es disposa o bé dóna una informació que la geometria no pot donar.
5. La resolució geomètrica. Descartes la considera l'objectiu més important. Per a ell, fer geometria demana trobar solucions geomètriques. L'àlgebra és només una eina còmoda per abreujar el camí cap a la solució.

Descartes és conscient de la potència del mètode per resoldre amb facilitat problemes de geometria plana. Així, quan estudia i resol el problema geomètric que es tradueix en termes algebraics per l'equació de segon grau $z^2=az+b^2$, acaba afirmant, a la vista que la solució algebraica l'ha conduït fins a la solució geomètrica:

"Crec que això és un fet que els antics no van observar, ja que, altrament, no s'haurien pres la molèstia d'escriure llibre tan gruixuts, en els quals l'ordre de les proposicions ens permet de concloure que no disposaven del mètode veritable per descobrir-les, sinó que simplement recollien les solucions amb què ensopegaven."(p.23)

La resolució d'aquesta equació quadràtica és el primer exemple que Descartes utilitza per explicar l'aplicació pràctica del mètode. L'equació és la traducció algebraica d'un problema geomètric. La solució, trobada algebraicament, també té una traducció geomètrica. Vegem-ho amb detall.
Descartes es proposa resoldre l'equació de segon grau $z^2=az+b^2$ sense especificar a quin problema geomètric concret correspon. Per tant, se suposa que la formulació algebraica arriba després dels passos previs esmentats abans, és a dir, "considerar el problema resolt" i "donar noms als segments". Per tal de recórrer tot el procés des de l'inici, partirem d'un enunciat simple, plantejat en termes geomètrics, que es pugui traduir al llenguatge geomètric mitjançant l'equació de segon grau proposada.
"Donats dos segments de longituds a i b respectivament, traçar un segment de longitud z tal que el quadrat de costat z tingui la mateixa àrea que la suma de les àrees del quadrat de costat b i el rectangle de costats a i z". La següent representació correspon a la representació geomètrica d'aquesta situació:

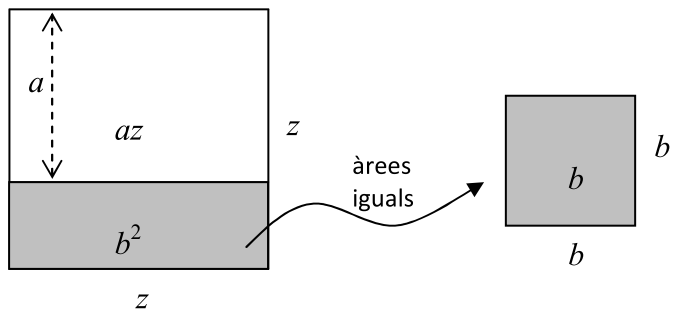


Figura 2.8. Representació geomètrica de l'equació de Descartes

Les àrees ombrejades són iguals ja que $z^2=az+b^2$. Es tracta de trobar z. Un cop feta la traducció algebraica, la solució, també en termes algebraics, és simple:

$$z^2 - az - b^2 = 0 \qquad z = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

Descartes utilitza una escriptura pràcticament idèntica a la notació moderna, excepte que no usa el superíndex 2 per al quadrat, sinó que l'indica duplicant la lletra, és a dir, representa a^2 per aa i b^2 per bb. Així, en l'edició de 1637, la solució anterior apareix escrita com:

$$z = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

De les dues solucions z_1 i z_2 només una és interpretable geomètricament. Es tracta de z_1, corresponent a la suma, ja que $z_1>0$, mentre que $z_2<0$, degut que:

$$\frac{a}{2} < \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

De fet, amb aquesta solució algebraica z_1 el problema ja està resolt, però per a Descartes un problema geomètric demana una solució geomètrica, per tant, cal encara representar la longitud z_1 utilitzant regla i compàs. Per a aquest propòsit, idea la construcció següent (la figura és reproducció fidel de la original que apareix a *La Geometria* de 1637):

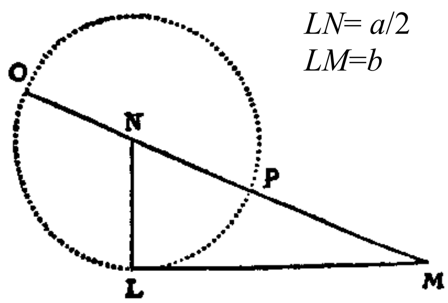


Figura 2.9. Figura original de *La Geometria* de Descartes

Es traça un segment $LM=b$ i per l'extrem L un segment perpendicular $LN=a/2$. A continuació es traça la circumferència amb centre N i radi a/2. Finalment, es prolonga el segment MN fins a tallar la circumferència en el punt O. La longitud buscada z_1 correspon al segment OM, que reprodueix geomètricament la solució algebraica.

Efectivament, $OM=ON+NM$ amb $ON=a/2$. I pel teorema de Pitàgores,

$$NM^2=LN^2+LM^2$$

Per tant,

$$OM = ON + \sqrt{LN^2 + LM^2} = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} = z_1$$

D'aquesta manera, Descartes troba un procediment de solució del problema diferent al camí clàssic dels grecs basat en complicades construccions purament geomètriques amb regla i compàs. Resol algebraicament i al final interpreta la solució algebraica en termes geomètrics. Un geòmetra grec clàssic hagués intentat construir el segment de longitud z_1 amb regla i compàs i només n'hagués conegut la longitud en traçar-lo finalment.

La novetat del procediment resideix en què es val de l'àlgebra per resoldre. La resta és traducció al llenguatge geomètric o a la inversa. La simplicitat amb què resol aquest problema impulsa Descartes a afirmar que:

"...és un fet que els antics no van observar, ja que, altrament, no s'haurien pres la molèstia d'escriure llibre tan gruixuts..." (p. 23)

Hem elaborat l'esquema següent per mostrar les diferències, a l'hora d'abordar i resoldre aquest problema, entre el procediment clàssic i el nou mètode:

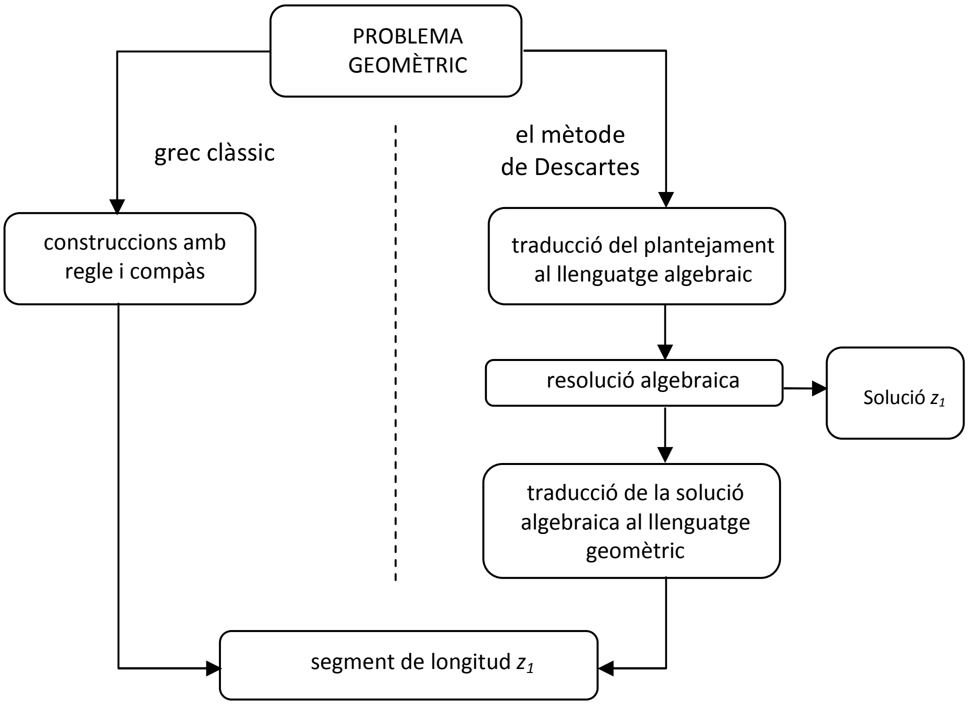


Figura 2.10. Comparació del procediment de Descartes amb el procediment geomètric clàssic

Descartes no es limita a resoldre aquest problema en concret. S'adona que problemes diferents amb una estructura similar es poden abordar amb el mateix mètode. Amb procediments semblants estudia les equacions del tipus $z^2=az-b^2$.

2.4.4. Les coordenades "cartesianes"

El sistema de coordenades "cartesianes" és fonamental en matemàtiques, ja des de nivells elementals d'aprenentatge escolar, per representar posicions en el pla i, a partir d'aquí, vectors, figures geomètriques en determinada posició, llocs geomètrics, funcions d'una variable, etc. Per tant, l'adjectiu "cartesià" apareix amb freqüència en la terminologia utilitzada. Aquest fet podria fàcilment portar fins a la suposició implícita que Descartes va ser el creador d'aquest sistema de coordenades tal com es coneix i s'usa a l'actualitat, però no és així.

J. P. Collette (1985) assenyala que l'expressió "sistema de coordenades cartesianes" és un anacronisme. Descartes no va utilitzar un sistema de coordenades per situar punts en el pla i, per tant, tampoc no va emprar parelles de nombres amb aquesta mateixa

finalitat. El que sí que va fer és usar dues línies formant un cert angle constant, una de elles com a línia de base per col·locar-hi longituds amb valors x, i l'altra per representar-hi les longituds y. En realitat, de manera no declarada, aquest procediment equival a servir-se d'un sistema de coordenades obliqües, però a Descartes no li interessaven els punts definits per (x,y) com a parella numèrica ni els llocs geomètrics que satisfan una determinada relació algebraica, sinó poder construir aquests punts. En altres paraules, usava les línies com instruments auxiliars útils, però no com a sistema de representació amb entitat pròpia.
Aquesta manera de procedir de Descartes s'aprecia en la resolució del problema de Pappus (per al cas de quatre rectes) que apareix al llibre primer de *La geometria*. Descartes enuncia el problema d'aquests manera:

"Siguin AB, AD, EF, GH, etc. un cert nombre de línies rectes donades en posició. Es demana determinar un punt C des del qual tirem rectes CB, CD, CF i CH, que formin amb les rectes donades, els angles CBA, CDA, CFE, CGH, etc. també donats prèviament i tals que el producte d'una part d'elles sigui igual al producte que s'obté multiplicant les altres, o bé que [ambdós productes] *tinguin una raó donada, ja que això no fa que la qüestió sigui gens ni mica més difícil".* (pp. 30-31)

La figura següent és reproducció de la original, amb l'afegit que hi hem marcat les longituds *x* i *y*.

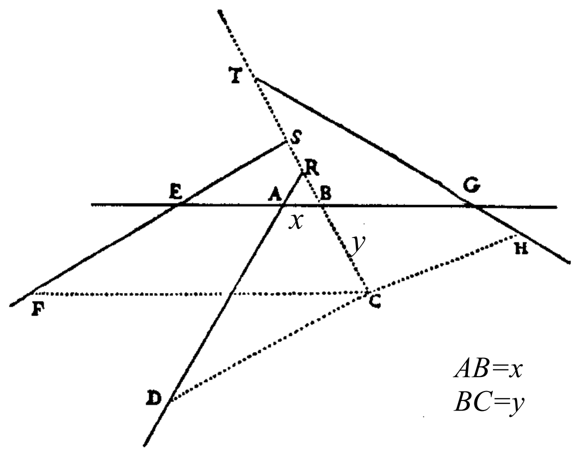


Figura 2.11. Figura original de *La Geometria* de Descartes

En llenguatge modern, direm que es tracta de trobar l'equació del lloc geomètric que formen els punts $C\ (x,y)$ que compleixen les condicions donades. Descartes arriba a la conclusió que per al cas de tres i quatre restes, el lloc geomètric representa una secció cònica.
Per a Descartes, determinar la relació entre x i y comportava poder construir els punts que solucionen el problema. No s'interessava pels llocs geomètrics com a conjunt de punts que satisfan una equació, ni tampoc intentava utilitzar el sistema de

coordenades com a referència fonamental. Prova d'això és que no es va preocupar per establir què succeeix amb les coordenades negatives.
Qui en realitat va difondre i perfeccionar el sistema de coordenades esbossat per Descartes fou Frans Van Schooten. Descartes, francès, després d'una intensa vida de viatges, es va retirar a Holanda el 1629 a la recerca de pau i tranquil·litat. Hi va viure durant vint anys i va publicar, entre altres llibres, El *Discurs del Mètode* que conté l'assaig *La geometria* (1637). Aquesta obra, publicada en francès a Holanda, fou traduïda al llatí per Van Schooten, qui el 1649 va publicar la traducció. Entre els perfeccionaments que hi va realitzar hi figura el mètode de coordenades.
El procés d'introducció i consolidació de les coordenades, com el de la geometria analítica en general, va necessitar temps. No va ser fins al 1731 que, segons l'historiador de la matemàtica K. Ríbnikov (1991), es van començar a utilitzar les coordenades a l'espai de manera sistemàtica, a partir del llibre d'Alexis Claude Clairaut (1713-1765) *Investigacions sobre corbes de doble corbatura* (una forma de referir-se a les corbes a l'espai).

2.4.5. Fermat: els llocs geomètrics

Tot i que la paternitat de la geometria analítica s'atribueix tradicionalment a Descartes, amb anterioritat un altre gran matemàtic francès, Pierre de Fermat (1601-1665), va presentar-ne els principis en una petita obra escrita en llatí i titulada *Ad locos planos et solidos isagoge*, que es pot traduir per *Introducció a la teoria de llocs plans i espacials*, encara que és més coneguda per *Isagoge* simplement. Els historiadors de la matemàtica estableixen que ja estava acabada el 1636, un any abans que Descartes publiqués *La geometria*, però no es va publicar fins el 1679, quan l'autor ja havia mort. Fermat era magistrat a la Cort Suprema de Tolosa i va arribar a conseller reial. No era un matemàtic professional, com tampoc no ho era Descartes, però el fet de disposar d'una posició social acomodada i d'una certa fortuna personal li va permetre dedicar temps a la seva gran passió per les matemàtiques.
En realitat, doncs, fou Fermat qui va donar inici a la geometria analítica en termes moderns. Malgrat que el seu tractament del tema és més proper a l'actual que el de Descartes, la seva contribució ha tingut un reconeixement tardà, ja que no va publicar res en vida.
La motivació inicial de Fermat per elaborar l'*Isagoge* fou, en paraules de C. B. Boyer (1986, p. 437):

"...cap a l'any 1629 va començar a fer descobriments matemàtics d'una gran importància. Aquell mateix any es va incorporar a la pràctica d'un dels esports favorits de l'època, la «restauració» d'obres perdudes de l'antiguitat, a base de la informació continguda als tractats clàssics que s'han conservat. Fermat va abordar la tasca de reconstruir els Llocs plans *d'Apol·loni* [segle II]*, sobre la base de les referències contingudes a la* Col·lecció matemàtica *de Pappus".*

Al començament de l'*Isagoge*, Fermat comenta que l'estudi dels llocs geomètrics fet pels clàssics resulta difícil perquè no conté l'enunciat del problema d'una forma general i que ell es proposa realitzar una anàlisi que condueixi a aquest estudi general. El primer pas cap a aquest objectiu el concreta en una proposició que, segons Boyer (1986, p. 437) és un dels enunciats més significatius de la història de les matemàtiques:

"Sempre que en una equació final apareguin dues quantitats incògnites, tenim un lloc geomètric, en descriure l'extrem d'una d'elles una línia, recta o corba".

Fermat aplica l'àlgebra renaixentista de Viète als problemes de llocs geomètrics mitjançant la introducció de coordenades i es dedica principalment a la representació gràfica de les equacions indeterminades, és a dir, aquelles que contenen dues variables. Amb això, prova que les equacions de les rectes són de primer grau i que les de la circumferència i les seccions còniques són de segon grau.
De tota manera, es limita a les representacions al primer quadrant (coordenades positives) amb eixos que formen un angle donat, que normalment és recte: els eixos són perpendiculars entre ells, la qual cosa constitueix una altre punt que mostra la major proximitat amb la geometria analítica moderna en comparació amb Descartes. Igual que havia fet Viète, utilitza les lletres A i E per representar les incògnites (en notació moderna A és x mentre que E és y). D'aquesta manera, donades dues constants D i B, expressa l'equació de la recta en notació algebraica de Viète: D in A æquatur B in E. Que en notació moderna escriuríem $Dx=By$, és a dir, una recta que passa per l'origen de coordenades. En la forma explícita, l'equació queda:

$$y=\frac{D}{B}x$$

en què el quocient D/B és el pendent de la recta. Per tant, Fermat expressa que el quocient y/x és sempre igual a un quocient fix donat, D/B. Ho representa de la manera següent:

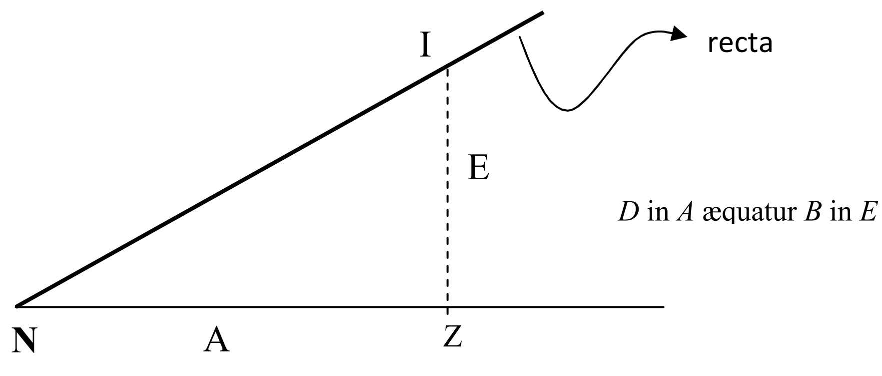


Figura 2.12. El pendent de la recta segons Fermat

A és la longitud (variable) del segment NZ i E és la longitud (variable) del segment ZI.
La lletra I representa un punt genèric de la recta.
La representació moderna d'aquesta recta, amb les lletres que habitualment s'utilitzen és:

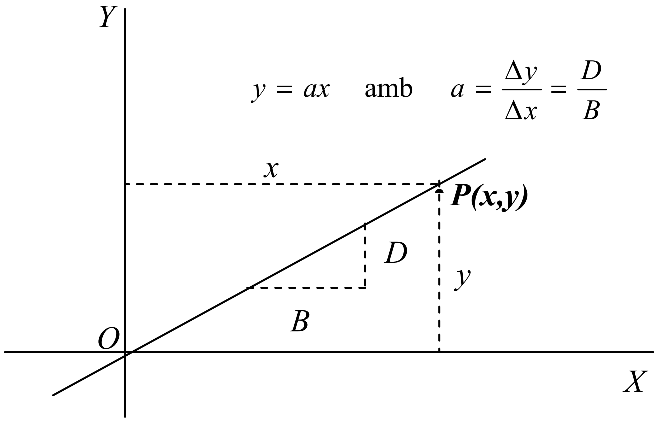


Figura 2.13. Representació convencional actual del pendent de la recta

Fermat també s'ocupa de les equacions dels llocs geomètrics que defineixen les còniques. Així, per exemple,

$$A \text{ in } E \text{ æquatur } Z\,pl$$

en què Z és en aquesta ocasió una constant, correspon a la hipèrbola $xy=k^2$ (amb k constant).

També obté les equacions en coordenades rectangulars de la circumferència amb centre a l'origen de coordenades, de la hipèrbola referida a les asímptotes, de la paràbola respecte del diàmetre i la tangent en el seu extrem, i de l'el·lipse en el cas que els seus eixos siguin diàmetres conjugats. Fins i tot fa referència als llocs geomètrics a l'espai, tot i que no els aborda. A les seves cartes escriu, segons cita de B. Torrecillas (1999, p. 74):

"Hi ha certs problemes en què intervé una única incògnita, els quals podem anomenar determinats per distingir-los dels problemes relatius als llocs geomètrics. N'hi ha uns altres en què intervenen dues incògnites que no es poden reduir mai a una de sola; aquests són els problemes dels llocs geomètrics. En el primer tipus de problemes busquem un únic punt, mentre que en el segon una corba. Però si el problema proposat involucra tres incògnites, llavors s'ha de trobar, per satisfer l'equació, no solament un punt o una corba, sinó una superfície completa D'aquesta manera apareixen els llocs geomètrics que són superfícies, etc."

Aquesta explicació, pel llenguatge i la terminologia usats, es pot considerar moderna. De fet, res no ens faria pensar que correspon a un text de principis del segle XVII si l'haguéssim trobada sense cap referència històrica en un manual recent de geometria analítica. A pesar d'això, Fermat afirma, amb modèstia:

"Així i tot no ens penedim de l'escriptura d'aquesta obra prematura i no completament madura. En realitat, per a la ciència representa un cert interès no ocultar a les futures generacions els fruits, encara no formats, de la raó; i gràcies als nous descobriments de

les ciències, les idees, inicialment tosques i simples, es reforcen i es multipliquen. I en interès dels mateixos que estudien es fa una representació completa tant dels camins simplificats de l'enteniment com de l'art desenvolupat espontàniament." (B. Torrecillas, 1999, pp.74-75)

Els treballs de Fermat van aconseguir difusió gràcies al que fou el seu amic i també conseller reial, Pierre de Carcavi, qui el 1636 es va traslladar a París com a bibliotecari reial i va ser membre fundador de la Académie des Sciences.

2.4.6. Les contribucions independents de Descartes i Fermat

Descartes ha estat durant molts anys considerat l'iniciador de la geometria analítica, per data de publicació (*La geometria*, 1637) i perquè també ha contribuït a aquesta consideració la seva gran influència no tan sols sobre la matemàtics, sinó sobre tot el pensament occidental. Per altra banda, Fermat, que no va publicar res en vida, havia elaborat com mínim un any abans de la publicació de *La geometria* una obra que establia amb claredat i llenguatge pràcticament modern principis fonamentals de la geometria analítica: *Isagoge*, publicada el 1679. Aquesta situació, tot i l'avantatge de Descartes, atribuïble a la tradició, sembla que planteja un problema de paternitat, encara que no de vàlua intel·lectual, ja que tant Descartes com Fermat són dues figures de gran talla dins de la història de la matemàtica. Però, en realitat, tal problema no existeix si se situen els inicis de la geometria analítica en el context històric del moment, tenint en compte els treballs anteriors dels geòmetres i els algebristes del Renaixement i l'Edat Mitjana.
Descartes i Fermat realitzen, com diu Collette (1985, vol. 2, p. 27), contribucions independents, que es fonamenten en:

"...el reconeixement que una equació donada amb dues incògnites pot considerar-se com la determinació d'una corba plana, amb respecte d'un sistema de coordenades."

Collette remarca igualment que cap dels dos matemàtics no va inventar l'ús de les coordenades o dels mètodes analítics, ni tampoc l'aplicació de l'àlgebra a la geometria o la representació gràfica de variables. I conclou:

"...si s'afegeix a això [que una equació correspon a una corba] *els mètodes algorísmics desenvolupats per cada un d'ells per unir estretament l'equació i la corba corresponent, tot plegat serà suficient per atribuir-los el mèrit de ser els fundadors de la geometria analítica."*

Ara bé, els enfocaments que adopten són diferents. Per una banda, Descartes:

1. S'interessa sobretot per resoldre problemes plantejats geomètricament la solució dels quals és un lloc geomètric (el cas del problema de Pappus).
2. Utilitza l'àlgebra per resoldre i obté per tant una solució algebraica, però segueix creient que un problema geomètric demana una solució geomètrica

representable gràficament. L'àlgebra és, doncs, una eina útil, però l'objectiu encara és la geometria traçada sobre el paper.

3. No considera interessants els llocs geomètrics per si mateixos, com a relació algebraica. El que li interessa és poder traçar els punts que són solució del problema, i les equacions algebraiques són útils per a aquesta finalitat.

I per l'altra banda, Fermat:

1. S'interessa sobretot per les equacions: com la relació entre les variables es pot traslladar a una representació geomètrica.
2. Estableix d'una manera moderna la idea d'equació d'una corba.
3. A partir de l'equació, busca deduir les propietats de la corba.

Hem elaborat, per sintetitzar-ho, la figura següent:

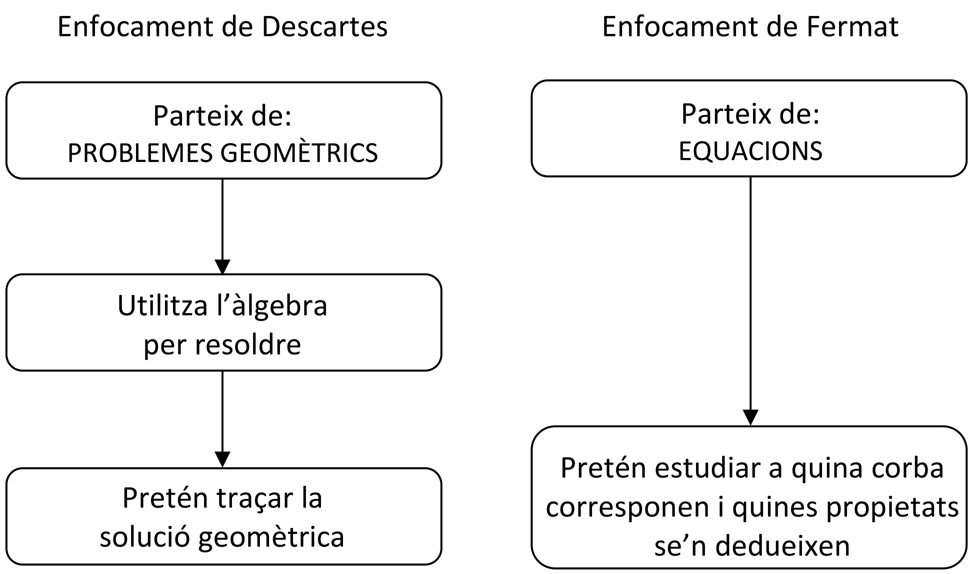


Figura 2.14. Comparació entre els enfocaments de Descartes i de Fermat

2.4.7. Els propagadors i continuadors de l'obra de Descartes

La geometria de Descartes conté la base de la geometria analítica, és a dir, utilitzar equacions algebraiques per a representar i estudiar corbes. Aquest plantejament encara és més evident en l'*Isagoge* de Fermat, però ja sabem que aquesta última obra es va publicar anys després que fos elaborada. En canvi, els treballs de Descartes van trobar de seguida qui els estudiés, interpretés i propagués. Això no significa que la nova geometria analítica, encara lluny de la forma que pren actualment, trobés una ràpida acollida en els ambients matemàtics de l'època. L'assimilació d'aquesta nova branca va ser lenta i va necessitar de les contribucions de nombrosos matemàtics que la van perfeccionar fins organitzar-la i presentar-la en la seva forma actual. A part de la resistència d'alguns matemàtics a utilitzar l'àlgebra en la geometria, el text original de Descartes no facilita la ràpida comprensió dels continguts. Hi té molt a veure la seva concepció de les matemàtiques, les quals, com ja s'ha dit abans, no considera un fi en si mateix, i l'actitud de no explicitar massa i no desenvolupar una gran casuística. Al final de *La geometria*, Descartes escriu:

"Però no pretenc pas elaborar un gran tractat, sinó tractar, amb poques paraules, una multitud de qüestions." (p. 146)

"Confio que els nostres néts em reconeixeran no només les coses que explícitament he posat aquí, sinó també totes les que he omès voluntàriament per tal de deixar-los el plaer d'inventar-les." (p. 147)

Descartes va publicar *La geometria* a Holanda, i fou en aquest país on aquesta obra va trobar els principals seguidors i difusors, els quals van contribuir a perfeccionar-la amb contribucions pròpies. El primer d'ells és Frans Van Schooten (1615-1660), professor de matemàtiques a la ciutat de Leyden i traductor de *La geometria* al llatí amb el títol de *Geometria a Renato Des Cartes* (1649). Avui en dia ens pot semblar curiós que un llibre escrit en francès s'hagués traduït a una llengua morta, però cal tenir present que el llatí era la llengua de comunicació, en totes les matèries, dels estudiosos d'aquella època; per tant, una traducció en aquesta llengua posava l'obra de Descartes a l'abast de tots els matemàtics. Van Schooten hi va afegir comentaris propis i les *Notae breves* de Florimond de Beaune (1601-1652), que són una sèrie de notes aprovades per Descartes. La traducció llatina va reeditar-se vàries vegades, en edicions augmentades. La segona edició llatina és de 1659-1651. En aquestes edicions, Van Schooten afegeix nous problemes de construcció i noves demostracions, introdueix les transformacions de coordenades i l'equació de la circumferència centrada a l'origen. Uns dos anys abans havia publicat la seva obra *Exercitationes mathematicae*, en què aplica l'àlgebra a la geometria en la línia de Descartes.

En les *Exercitationes* s'incorpora una part redactada pel també holandès Johann Hudde (1629-1704), burgmestre d'Amsterdam durant mots anys. Hudde obté corbes de grau superior a partir d'altres de grau inferior i està molt a prop de formular la geometria analítica en tres dimensions.

Un dels alumnes de Van Schooten, Erasmus Bartholin (1625-1698), va recopilar i publicar sota el nom de *Principia mathesos* lliçons dels seu mestre sobre l'àlgebra amb la finalitat que servissin d'introducció a *La geometria* de Descartes. Però la contribució original més important a la geometria analítica de l'època immediatament posterior a Descartes és obra d'un altre deixeble de Van Schooten, Jan de Witt (1625-1672), "gran pensionari" (equivalent a primer ministre) d'Holanda durant 20 anys i autor del tractat *Elementa curvarum linearum*, que consta de dos llibres. El primer està dedicar a les còniques, i és en el segon on s'ofereix una exposició sistemàtica de la geometria analítica de rectes i còniques mitjançant sistemes de coordenades. De Witt intenta reduir totes les equacions de segon grau a una forma canònica a base de translacions i rotacions d'eixos. Collette (1985, vol 2, p. 73) afirma:

"En el segon llibre, l'ús sistemàtic de les coordenades en el tractament de la geometria analítica de la recta i de les còniques justificaria d'alguna manera l'afirmació que aquest és el primer tractat de geometria analítica."

L'equació de la recta apareix en forma explícita, com a constant $y=c$ o bé amb el pendent en forma de fracció, passi o no per l'origen:

$$y = \frac{bx}{a} \qquad y = \frac{bx}{a} - c$$

Però De Witt no utilitza encara les coordenades negatives, sinó que es limita a representacions al primer quadrant.
Un altre matemàtic dels Països Baixos, René-François de Sluse (1622-1685), canonge de la catedral de Lieja, va publicar *Mesolabum*, un llibre lloat a la seva època com la millor contribució a la resolució geomètrica d'equacions des de Descartes.
Els matemàtics holandesos de l'època van contribuir decisivament a la difusió i la millora de l'obra de Descartes. Però va ser un francès, deixeble del matemàtic Gérard Désargues (1591-1661), Philippe de la Hire (1640-1718), arquitecte, qui en opinió de Collette es va convertir en el "primer especialista modern en geometria analítica i sintètica" a pesar que els seus contemporanis no li van reconèixer suficientment els mèrits. Va publicar tres tractats sobre les còniques: *Nou mètode en geometria per a les seccions de les superfícies còniques i cilíndriques que tenen per base circumferències, o paràboles el·lipses i hipèrboles* (1673); *Nous elements de les seccions còniques* (1679), en què defineix l'el·lipse en termes de la suma dels radis focals, la hipèrbola en termes de la diferència i la paràbola en termes de la igualtat de distàncies al focus i la directriu (és a dir, les mateixes definicions que trobem als manuals escolars actuals); i finalment *Sectiones conicae* (1685).

2.4.8. El segle XVIII: consolidació de la geometria analítica

A finals del segle XVII es produeix un fet amb profundes repercussions a la història de les matemàtiques i de tota la ciència: apareix el càlcul infinitesimal, a partir dels treballs independents d'Isaac Newton (1642-1727) i Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). A més, aquest primer, Newton, va formular les lleis bàsiques de la mecànica, amb la qual cosa la física es convertia en un camp privilegiat d'aplicació dels nous mètodes matemàtics analítics, és a dir, del càlcul diferencial i integral. Fins a tal punt aquests esdeveniments van revolucionar la ciència de l'època, que J. Rey Pastor i J. Babini (1985, vol. 2, p. 97) escriuen:

"Per les seves característiques culturals el segle XVIII ha estat qualificat de «segle de les llums», de la «Il·lustració», de l'«Il·luminisme»; va ser el «segle de la raó». Però des del punt de vista de la història de la ciència i en especial de la ciència exacta, va ser en veritat un segle newtonià; gairebé podria afirmar-se que des de tal punt de vista el segle XVIII neix el 1687, data d'aparició dels Principia *de Newton, llibre promotor de*

l'auge de la mecànica, de l'astronomia i del càlcul infinitesimal, característic d'aquell segle."

Tant és així, que els mètodes analítics centraran una part molt majoritària de l'atenció dels matemàtics. Gairebé tots els contemporanis, per època i disciplina científica, del més gran matemàtic de l'època i un dels més grans de tota la història, Leonhard Euler (1707-1783), es van ocupar preferentment d'anàlisi i no de geometria. Amédée François Frézier, un dels pocs autors que es van ocupar de la geometria durant la primera meitat del segle XVIII, citat per J. Rey Pastor i J. Babini (1985, vol. 2, p. 132) diu:

"...Avui la geometria no està de moda, i per passar per científic s'ha de fer ostentació de l'anàlisi."

El predomini de l'anàlisi és en certa manera natural, donada la potencia dels nous mètodes i l'aplicació que tenen per resoldre problemes físics. No és d'estranyar, doncs, que els matemàtics dediquessin molts esforços a desenvolupar, perfeccionar i aplicar el càlcul infinitesimal. No obstant això, durant el segle XVIII, especialment a les dècades finals, la geometria va renéixer i va donar lloc a noves branques de gran fecunditat: la geometria descriptiva, la geometria projectiva i la geometria diferencial. Pel que fa a la geometria analítica, també a finals de segle és sistematitzada en una forma molt semblant a la que té a l'actualitat i, a més, apareixen els primers llibres de text d'aquesta matèria especialment pensats per a l'ensenyament.

2.4.9. Euler: la construcció sistemàtica de la geometria analítica

Les contribucions d'Euler a les matemàtiques formen un conjunt immens de treballs, ja que és un dels matemàtics més prolífics que hi ha hagut mai i un dels més importants per la qualitat i profunditat dels seus escrits. A part de la seva obra específicament matemàtica, també va realitzar aportacions fonamentals en altres camps, sobretot en física. Al recull de tota la seva producció que ha estat possible reunir, les *Opera Omnia*, hi figuren més d'un miler de memòries sobre càlcul infinitesimal, àlgebra, probabilitat, teoria dels nombres i geometria. Es pot dir que no hi ha cap camp de la matemàtica del segle XVIII en què Euler no hagi realitzat contribucions decisives.
Nascut prop de Basilea (Suïssa), fill d'un pastor protestant, de nen ja va demostrar que posseïa uns dots intel·lectuals extraordinaris. Va tenir per professor, a la universitat de Basilea, al cèlebre matemàtic Johann Bernoulli (1667-1748). El 1727 va viatjar a l'Acadèmia de Sant Petersburg, convidat per aquests institució, on romandre fins el 1741, any en què es va traslladar a l'Acadèmia de Berlín cridat per Frederic el Gran, rei de Prússia. Va tornar a Sant Petersburg el 1766 i s'hi va quedar. Mai no va deixar de produir matemàtiques d'alt nivell, ni tan sols quan es va quedar cec. Les seves *Opera Omnia* ocupen 86 volums.
L'obra d'Euler en què la geometria analítica se sistematitza i adquireix una forma pràcticament moderna és el conjunt de monografies *Introductio in analysis infinitorum* (*Introducció a l'anàlisi infinitesimal*, 1748). Tal com el títol suggereix, s'ocupa de la

construcció sistemàtica de l'anàlisi matemàtic segons els coneixements del segle XVIII. De nou, l'anàlisi té el protagonisme, i en relació amb ell es desenvolupa també la geometria analítica, que té reservat un volum d'aquesta obra fonamental en la història de les matemàtiques. En els primers capítols, s'introdueixen les coordenades rectilínies, rectangulars i obliqües, es donen les fórmules de les transformacions dels sistemes de coordenades sota girs i translacions i es relaciona el concepte de continuïtat d'una corba amb l'existència d'una expressió analítica única que la defineix. L'equació del tipus més simple de corba, la recta, apareix d'aquesta manera:

$$\alpha x+\beta y=0$$

És a dir, una recta que passa per l'origen de coordenades, en la forma que actualment anomenem implícita o cartesiana. En capítols següents, Euler classifica les corbes segons el grau de les seves equacions, tracta les propietats de les seccions còniques i s'ocupa, entre altres qüestions, de les tangents, les interseccions de corbes i la resolució geomètrica d'equacions trigonomètriques. L'esforç sistemàtic de l'obra, la quantitat i la importància dels continguts que tracta, fan que per Ríbnikov (1991, p. 299) manifesti que gràcies a Euler, la geometria analítica en el pla es converteix en una ciència independent, els objectius i els mètodes de la qual queden determinats en sentit i volum propers als actuals.

Però també, com diu Argüelles (1989, p. 120) la *Introductio* és el primer text de geometria analítica tridimensional que s'aproxima als textos moderns d'aquests matèria. Hi apareixen les coordenades cartesianes rectangulars a l'espai i les fórmules de transformació, en què hi figuren els angles de precessió i nutació.

Euler no tan sols empra la geometria analítica de manera elegant i pràcticament moderna (l'única diferència amb la mena de demostracions que es prefereixen actualment és que no apareixen els vectors) sinó que també intervé en la controvèrsia sobre si la geometria analítica està al nivell de la clàssica i pren partit: considera que treballar amb àlgebra i coordenades és un camí del tot vàlid per fer geometria. En canvi, altres matemàtics de l'època consideraven que els treballs en què s'usaven aquests nous mètodes eren inferiors als treballs clàssics. Es tracta d'una controvèrsia estètica, influïda pel pes de d'una tradició secular sota la influència de la qual molts matemàtics es manifestaven partidaris del treball amb regla i compàs com a essència de la veritable i pura geometria, mentre que bescantaven la utilització de l'àlgebra. En aquest sentit, W. Dunham (2000, p. 230) escriu:

"Hi va haver un temps que el desdeny cap a la geometria analítica era gran, i va portar a matemàtics com Michel Chasles (1793-1880), Gaspard Monge (1746-1818) i Jakob Steiner (1796-1863) a rebutjar aquests mètodes perquè no resultaven bells ni elegants. Igual que rebutjaríem un alpinista que arribés al cim de l'Everest havent-se llançat en paracaigudes des d'un avió, també els puristes menyspreaven les demostracions geomètriques que eren tan algebraiques com la demostració de la recta d'Euler. Alguns fins i tot lamentaven la invenció de la geometria analítica i, en paraules de l'historiador Morris Kline, buscaven venjar-se de Descartes."

Aquestes opinions es van mantenir mentre no va ser evident que utilitzar l'àlgebra i les coordenades en els problemes geomètrics permetia anar més enllà d'on havien arribat els geòmetres clàssics. Segons Ríbnikov (1991, p. 286):

"Les obres de Descartes i Fermat van obrir les possibilitats per al desenvolupament de la geometria analítica ja en els anys 30 del segle XVII. No obstant això, per posar en pràctica els avantatges evidents (per a nosaltres) de la geometria analítica, fins i tot en el cas de problemes plans, va fer falta molt de temps. Van passar prop de cent anys abans que amb els recursos de la geometria analítica s'aconseguissin resultats que superaven els guanys dels antics, en particular d'Apol·loni. Al segle XVIII la geometria analítica encara sofria el procés d'establiment, acumulació i investigació de nous fets."

Poc a poc, les opinions contràries van minvar per la força de l'evidència: la geometria analítica potser establia relacions de significat poc clar per qui estava acostumat a usar regla i compàs, però aportava una validesa i un poder de generalització indiscutibles. I encara més important, no feia dependre les demostracions de la inspiració del moment, a diferència dels procediments clàssics, que necessitaven sovint d'un punt d'intuïció. El matemàtic Jean-Victor Poncelet (1788-1867), tot i que no era un gran admirador de la geometria cartesiana, admetia:

"*Mentre que la geometria analítica ofereix el seu característic mètode general i uniforme com a forma de procedir en la resolució de problemes..., l'altra* [la geometria clàssica] *actua a l'atzar i depèn completament de la seguretat dels que la utilitzen."* (W. Dunham, 2000, p. 230)

Quatre volums de les *Opera Omnia* (gairebé 1600 pàgines) estan dedicats a les investigacions en geometria. Dels treballs que inclouen, la majoria pertanyen a la geometria analítica, és a dir, aquella que utilitza eixos de coordenades i àlgebra. D'entre aquests treballs, W. Dunham (2000, pp. 209-238) s'atura en dos:

1. La demostració, amb mètodes de la geometria analítica, de la fórmula clàssica d'Heró d'Alexandria (segle I), segons la qual l'àrea d'un triangle amb costats de longituds a, b i c ve donada per:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

   on *s* és el semiperímetre del triangle.
2. La demostració, també mitjançant la geometria analítica, que tres dels punts notables del triangle, l'ortocentre, el baricentre i el circumcentre estan alineats sobre una recta anomenada "recta d'Euler".

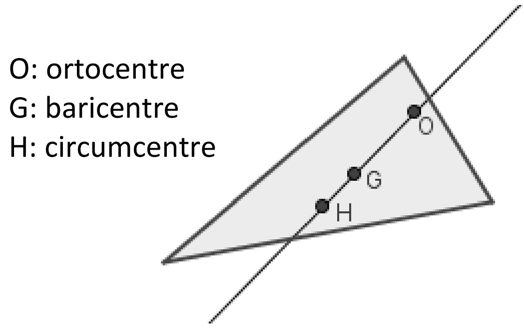


Figura 2.15. La recta d'Euler

Novament, com ja passava amb els treballs de Descartes i Fermat, iniciadors de la geometria analítica, la geometria clàssica proporciona motivació i camp per aplicar mètodes algebraics en un sistema de coordenades. Descartes, al llibre primer de *La geometria* exercitava la potència del seu "mètode" resolent el problema també clàssic de Pappus. La intenció inicial de Fermat era reconstruir els *Llocs plans* d'Apol·loni. A partir d'aquí, aquests pioners aconsegueixen crear una nova branca de la geometria. Euler, en els seus treballs sobre la fórmula d'Heró i sobre els punts notables del triangle, aplica amb mà de mestre la geometria analítica i a més aconsegueix, en el cas del descobriment de la recta que porta el seu nom, noves contribucions.
Quan Euler demostra la fórmula d'Heró mitjançant l'àlgebra aplicada a la geometria, no obté cap resultat nou sinó que en prova un de conegut des del segle I. Però el seu interès resideix en què s'apliquen nous mètodes, en aquest cas de naturalesa algebraica, i es fa precisament sobre un conegut teorema de la geometria clàssica, per tant, la comparació entre clàssic i modern (modern considerat en el context del segle XVIII) es fa inevitable. El fet que Euler dediqui un article a aquesta qüestió i a d'altres semblants mostra que l'aplicació de l'àlgebra a la geometria es consolida entre els matemàtics de l'època, començant pel més destacat d'entre tots ells.
Per provar la validesa de la fórmula d'Heró, Euler parteix d'una construcció geomètrica amb elements clàssics (bisectrius, circumferència inscrita) i desenvolupa l'argumentació sobre la també clàssica semblança de triangles, però per lligar el conjunt i arribar al resultat desitjat ha utilitza l'àlgebra. La dificultat dels conceptes que hi intervenen és mínima. Per seguir el fil de la demostració només calen, a part de comptar amb alguns resultats previs, conceptes de la geometria elemental que actualment corresponen a un nivell d'educació secundària obligatòria. A més, la manera de procedir d'Euler en aquesta demostració publicada el 1747 ens resultarà familiar si hem seguit altres demostracions en un ambient acadèmic de nivell no necessàriament més alt que el Batxillerat actual.
Ara bé, també és cert que Euler no utilitza cap sistema de coordenades per obtenir la fórmula d'Heró. Fa servir l'àlgebra, però encara no ha entrat del tot en el terreny de la geometria analítica. Sí que hi entra quan s'ocupa novament dels triangles en un article del 1767, dedicat a demostrar que tres punts notables del triangle estan alineats: ortocentre, baricentre i circumcentre. La demostració, llarga i treballosa, comença situant un triangle genèric en un sistema de coordenades, amb un dels vèrtexs a

l'origen. A continuació Euler troba les coordenades dels tres punts notables i finalment no tan sols demostra que estan alineats, sinó que el baricentre està a distància doble de l'ortocentre que del circumcentre. Dunham (2000) recull la demostració completa.
Euler, figura plenament representativa de les matemàtiques del segle XVIII, utilitza la geometria analítica en el sentit que aplica l'àlgebra a la resolució de problemes geomètrics, mitjançant uns procediments i un llenguatge matemàtic moderns, però, és clar, no utilitza àlgebra de vectors. Ara bé, en les programacions actuals de l'ensenyament, l'ús dels vectors és el que caracteritza els continguts que s'imparteixen sota el nom de "geometria analítica". Així, per exemple, no es declara que s'està fent geometria analítica quan es dóna la demostració elemental del teorema de l'altura per a triangles rectangles, tot i que l'àlgebra hi sol aparèixer de forma evident (la geometria escolar està molt algebritzada). Quan s'escriu el títol "geometria analítica", tot seguit venen les definicions de vector i les operacions amb vectors, abans de considerar qualsevol problema geomètric.

2.4.10 Noves institucions acadèmiques i nous textos per a l'ensenyament

La geometria analítica, entesa com a aplicació de l'àlgebra a la geometria i utilització de coordenades, té els inicis en el segle XVII, temps en què Europa experimenta una revolució científica de profundes repercussions intel·lectuals i socials. De naturalesa intel·lectual i social són també les causes que la provoquen, ja que resulta absurd pensar en unes transformacions de tan gran abast sorgides espontàniament i amb independència del context històric.
Durant el segle XVIII, la geometria analítica es desenvolupa i consolida poc a poc, no sense resistències, com hem vist. En inevitable interrelació amb el progrés científic, les circumstàncies econòmiques, polítiques i socials també evolucionen fins a desembocar en el fet històric que se sol considerar com a indicador del final de l'anomenat Antic Règim, és a dir, l'ordre basat en institucions i concepcions hereves de l'època medieval. Aquest fet és la Revolució Francesa, amb el resultat de grans convulsions a tota Europa, d'inevitable influència sobre el món intel·lectual i acadèmic.
És possible adonar-se, ni que sigui mínimament, de l'abast de les transformacions involucrades observant les diferències existents entre el temps en què la geometria analítica dóna els primers passos i els últims anys del segle XVIII, en dos aspectes complementaris: per una banda, la procedència i ocupacions dels protagonistes d'aquesta branca de les matemàtiques i, per una altra banda, els ambients acadèmics on realitzen la seva activitat matemàtica. Els dos iniciadors reconeguts de la geometria analítica, Descartes i Fermat, procedien de l'alta burgesia i per tant van rebre una bona educació gràcies a la posició acomodada de les seves respectives famílies. El pare del primer era conseller del Parlament de Bretanya, i ell mateix va estudiar dret i va disposar de recursos suficients per dedicar-se a les tasques intel·lectuals; el pare del segon era un ric comerciant de pells que va ocupar diferents càrrecs al govern de la seva ciutat natal, i ell mateix va estudiar lleis, va ocupar un lloc de magistrat a la Cort Suprema de Tolosa i va arribar al càrrec de conseller reial.
Els principals difusors i continuadors de la geometria de Descartes pertanyien igualment a les capes socials acomodades. Van Schooten, professor a Leyden com ja

ho havia estat el seu pare; Hudde, burgmestre d'Amsterdam, De Witt, gran pensionari d'Holanda; De Sluse, canonge de la catedral de Lieja; La Hire, arquitecte. Cap d'ells no era professional de les matemàtiques, excepte en casos comptats com el de Van Schooten. Formaven part de l'élite intel·lectual europea no per ocupar altes posicions acadèmiques en les matèries que cultivaven, sinó perquè estimaven l'estudi i estaven recolzats per fortunes personals que els permetien dedicar part del seu temps, el que no ocupaven en les seves obligacions professionals, al que ara anomenaríem un *hobby*. Per a ells, aquesta afecció eren les matemàtiques.

Al llarg del segle XVIII, els avenços científics i tècnics evidencien que, a més de l'interès intrínsec que tenen, són causa de progrés econòmic i un factor essencial per mantenir i augmentar el poder polític dels estats enfront d'altres estats. D'aquesta manera, tal com mostra K. Ríbnikov (1991, p. 207), la solució de problemes científico-tècnics esdevé un assumpte d'importància estatal:

"Les taules de posició de la lluna, el Sol, les estrelles, el problema de la invenció del cronòmetre d'alta precisió, les indicacions del qual no depenguin del balanceig del vaixell, la recerca de mètodes de transformació de l'esfera en el pla, com a part importantíssima de la cartografia, i altres, adquireixen actualitat i urgència excepcionals. Al mateix temps, el domini dels recursos de la nova anàlisi [matemàtica] *crea un ambient de possibilitat de resolució d'aquests problemes, de la seva accessibilitat als esforços dels científics."*

En resposta a aquestes necessitats, el poder polític de l'Antic Règim, que pren la forma de despotisme il·lustrat en alguns dels estats europeus més poderosos, estimula i finança la creació d'institucions científiques per a les quals s'atrauen les ments més destacades de l'època amb l'oferta de dedicar-se a la investigació, l'ensenyament, o les dues coses alhora, de manera regular i retribuïda. K. Ríbnikov, que en la seva *Història de les matemàtiques* concedeix una atenció especial als contextos socials i polítics (com a bon representant soviètic de la concepció materialista de la història), assenyala el que, interpretacions polítiques a part, és una evidència: sorgeix una nova classe de científics professionals, que són investigadors i professors dependents de l'estat. Així, per pertànyer a l'élite intel·lectual ja no és necessari disposar d'una considerable fortuna familiar i personal, sinó sobretot destacar en ambients acadèmics. S'obren vies de promoció social fins aleshores inexistents per a sectors socials modestos. Els exemples són abundants. Euler era fill d'un pastor protestant, Laplace procedia d'una família modesta, Lagrange era fill d'un oficial, Monge era fill d'un comerciant, d'Alembert va ser abandonat de petit i criat per un vidrier, Fourier era fill d'un sastre, etc.

A més, no tan sols calia dotar d'investigadors i professors les noves institucions científiques, sinó que també era imprescindible formar quadres que servissin en la cada vegada més complexa i especialitzada administració de l'estat, al mateix temps que la incipient Revolució Industrial, iniciada a Anglaterra el segle XVIII, reclamava tècnics de sòlida formació. En conseqüència, encara dins l'estructura de l'Antic Règim es van crear institucions acadèmiques encarregades de la formació d'aquests quadres. Monge, per exemple, va estudiar a l'escola del cos d'enginyers militars de Mezières, i ell mateix, en els agitats anys de la Revolució Francesa, va participar en la creació de

les prestigioses Escola Normal i Escola Politècnica.
Els ideals revolucionaris van contribuir de manera decisiva a crear aquest tipus d'institucions que, sota diferents formes, es van consolidar durant l'època napoleònica i van ser imitades arreu d'Europa, quan es formaven les estructures estatals centralitzades, precursores immediates de l'organització dels estats decimonònics. La concepció de l'educació com a font de progrés individual i social neix durant la Il·lustració, i es portarà en part a la pràctica, amb limitacions, després de la Revolució Francesa. Per realitzar aquesta tasca faran falta, a part de recursos materials, recursos humans i organització. Crear una escola per formar quadres implica distribuir l'ensenyament en cursos, crear programacions i escriure textos específicament pensats per a la docència. Ja hem esmentat abans que dues institucions d'ensenyament paradigmàtiques són l'Escola Politècnica (*École Politechnique*) i l'Escola Normal (*École Normale*). La primera constituïa, a partir de l'època del Consolat a França, pocs anys després de l'esclat de la Revolució Francesa, l'exponent més alt de l'ensenyament de les ciències i havia de formar els científics i els enginyers que necessitava l'estat. De fet, alguns dels seus alumnes es convertirien en destacats homes de ciència: Ampère, Sadi-Carnot, Fresnel, Malus... Entre els professors hi havia alguns matemàtics de primera línia que també van impartir classes a l'Escola Normal, la qual va néixer el 1795 amb l'objectiu de formar professors que ensenyarien a les escoles primàries i secundàries franceses. Sota la influència de l'esperit enciclopedista, es pretenia, tal com expressa Bergasa (2003, p. 123) "*...una formació científica integral assentada sobre l'ús de la investigació com a mètode i motor per a l'ensenyament*". El fet que Lagrange, Laplace o Monge, matemàtics de prestigi sobradament reconegut entre els seus contemporanis, es comprometessin en aquest projecte indica fins a quin punt els canvis polítics i socials conduïen a un avenç qualitatiu en les institucions d'ensenyament dependents de l'estat.
En paraules de Bergasa (p. 126):

"...aquesta experiència va tenir una influència decisiva en la difusió dels sabers científics, ja que per una part va determinar els continguts de les matèries a impartir als centres de secundària i, per una altra part, nombroses obres dirigides a l'educació i a la divulgació, especialment en el camp de les matemàtiques, van trobar en els cursos de Monge, Lagrange i Laplace un model per a la seva estructuració i un marc per a l'elecció de temes".

És, doncs, a finals del segle XVIII quan, arran de la creació de les noves institucions acadèmiques, apareixen els primers llibres de text en un sentit modern. Són llibres que recullen i adapten les lliçons impartides per alguns dels matemàtics més importants de l'època. No són informes o memòries escrits per especialistes que comuniquen els seus treballs, sinó tractats pensats per ensenyar partint dels continguts elementals. Aquests llibres tenen una importància extraordinària, ja que a través de les seves pàgines es formaran els futurs científics encarregats de produir nous treballs, que al seu torn generaran nous textos que hauran d'estudiar futurs alumnes, alguns dels quals seran investigadors i professors...
A finals del segle XVIII, apareixen els primers reculls sistemàtics de geometria analítica que segueixen les programacions de centres d'ensenyament superior. Alguns

d'aquests textos, com el de Lacroix, es van reeditar moltes vegades. Contenien una exposició de la matèria amb poques diferències substancials respecte als llibres d'un segle més endavant, i no molt distant dels textos actuals. Això significa que els aspectes bàsics de la geometria analítica com a matèria acadèmica queden fixats en l'època esmentada. J. B. Boyer (1986, p. 603) és molt explícit:

"Potser poden sentir-se satisfets els professors d'avui en pensar que la geometria analítica tal com la van presentar Fermat i Descartes, un advocat i un filòsof respectivament, va resultar poc eficaç, i que solament quan veritables pedagogs li van donar una forma nova, tal com van fer Monge i aquells dels seus deixebles que van ser al seu torn professors de l'Escola Politècnica, va ser quan va mostrar la seva vitalitat i eficàcia."

2.4.11. Monge, inspirador dels tractats moderns de geometria analítica

Amb una vida entre la fi de l'Antic Règim, la Revolució Francesa i l'Imperi napoleònic, Gaspard Monge (1746-1818) és una de les principals figures d'una generació de grans matemàtics francesos. En primera instància sovint se'l situa dins de la història de les matemàtiques per haver estat el creador de la geometria descriptiva, una tècnica de representació en el pla d'objectes de tres dimensions, basada en les conegudes projeccions en planta, alçat i perfil, que a la seva època va revolucionar els projectes d'enginyeria,. També se'l considera un dels iniciadors de la geometria diferencial, és a dir, de l'aplicació del càlcul diferencial a la geometria. I se'l reconeix com el creador de les teories més importants de la geometria analítica en tres dimensions.
Monge va ser un matemàtic brillant que va realitzar contribucions molt importants a la geometria, però, a diferència d'altres matemàtics anteriors o contemporanis seus, va destacar també com a professor d'institucions acadèmiques que servirien de model a molts altres centre d'Europa i de la resta del món en aspectes organitzatius, continguts i programacions. Per tant, la repercussió dels treballs de Monge no es redueix als ambients dels especialistes, sinó que es manifesta també a l'ensenyament, i contribueix en gran mesura a consolidar la geometria analítica a l'àmbit acadèmic, de tal manera que els seus textos o els dels seus deixebles s'utilitzen a les escoles superiors de molts països durant un pràcticament un segle. C. B. Boyer (1986, p. 598) assenyala:

"Els inventors de la geometria analítica, Descartes i Fermat, s'havien adonat clarament del principi fonamental de la geometria analítica de l'espai, el que tota equació amb tres incògnites representa una superfície, i recíprocament, però no van donar els passos necessaris per desenvolupar-lo. [...] *Euler* [...] *va establir, en cert sentit, les bases de la geometria analítica de l'espai. Ara bé, Euler no es dedicava a fer proselitisme, i degut a això el tema no va ocupar un lloc en els programes educatius de l'època. Una de les raons que expliquen aquest fet és que Euler, de la mateixa manera que Descartes, no començava tractant els casos rectilinis més senzills.* [...] *Monge era un veritable especialista en geometria (gairebé podríem dir que el primer des d'Apol·loni), així com un excel·lent professor i creador de programes.* [...] *Així doncs, el desenvolupament de*

*la geometria de l'espai es va deure en bona part a l'activitat matemàtica i revolucionària de Gaspard Monge. De no ser per la seva activitat política podria no haver-se creat mai l'*École Polytechnique*, i de no haver estat un mestre amb tan gran capacitat per transmetre entusiasme, el renaixement de la geometria tridimensional podria no haver-se produït."*

Respecte del caràcter i les qualitats de Monge, J. P. Collette (1985, vol. 2, p. 246) escriu:

"Imbuït d'una fe una mica ingènua en les qualitats i en el futur del gènere humà, àvid de cultura i progrés social, Monge estava més fet per arrossegar amb el seu exemple que per manar i administrar. El seu amor per la joventut i el seu entusiasme per la ciència s'unien a les seves eminents qualitats pedagògiques per fer la seva ensenyança particularment viva i eficaç."

Monge havia seguit la carrera militar i era examinador de la marina francesa quan va esclatar la Revolució Francesa el 1789. De seguida es va afegir als revolucionaris i va ser nomenat ministre de marina, però, incapaç de posar ordre a una marina francesa molt desorganitzada, va demanar ser substituït (serveix d'exemple que les personalitats brillants en determinats camps no se'n surten en altres terrenys). Va participar en la creació de l'Escola Normal, on va ensenyar geometria descriptiva, i en la fundació de l'Escola Politècnica. En aquest centre va exercir de professor i administrador i per a les seves classes va escriure un llibre que serveix d'introducció a la geometria analítica, *Feuilles d'analyse* (fulls d'anàlisi, 1795), que, en paraules de C. B. Boyer (1986, p. 599) és el prototipus dels programes actuals de geometria analítica de l'espai.

Aquest llibre passava ràpidament per les qüestions elementals i apuntava de seguida cap a les aplicacions del càlcul a l'estudi de corbes i superfícies, per la qual cosa resultava difícil de seguir per a la majoria dels estudiants. Monge era un professor que aconseguia transmetre entusiasme per l'aprenentatge, però no sobresortia com a redactor de textos escolars. Va ser gràcies als seus deixebles i col·laboradors que les seves lliçons es van reunir i escriure de forma més pedagògica: el 1802 es va publicar la memòria *Application de l'algèbre à la géométrie* (aplicació de l'àlgebra a la geometria), signada per Monge i Jean Nicolas Pierre Hachette (1769-1834).

A la memòria, les rectes i els plans queden determinats de la mateixa manera que actualment és comú a partir del Batxillerat. Un pla es defineix per l'equació amb tres variables que ara coneixem per equació implícita o cartesiana,

$$ax+by+cz+d=0$$

en què a, b, c i d són els coeficients que determinen el pla. Una recta es dóna com a intersecció de dos plans, és a dir, mitjançant dues equacions implícites,

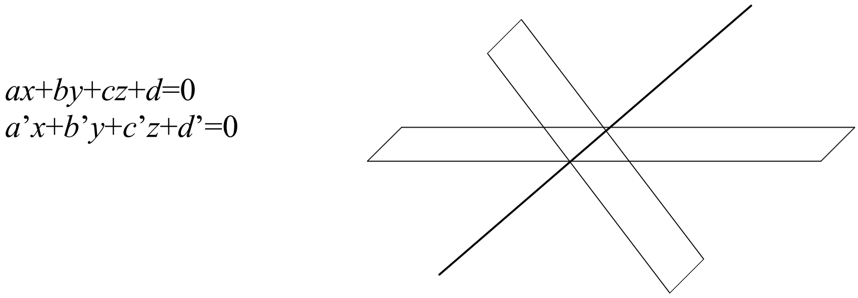


Figura 2.16. Recta definida per dos plans

Ja en un treball anterior, elaborat el 1771 i publicat el 1785, *Memòria sobre les evolutes, els radis de corbatura i els diferents gèneres d'inflexió de les corbes de doble corbatura,* Monge presentava una sèries de problemes elementals de la geometria analítica en tres dimensions, més tard incorporats al *Fulls d'anàlisi* i a l'*Aplicació de l'àlgebra a la geometria*.
A tall de mostra, el primer d'aquests problemes consisteix en trobar l'equació del pla que passa per un punt donat (x_1, y_1, z_1) i és perpendicular a una recta definida per dues equacions de plans, $ax+by+cz+d=0$ i $a'x+b'y+c'z+d'=0$.

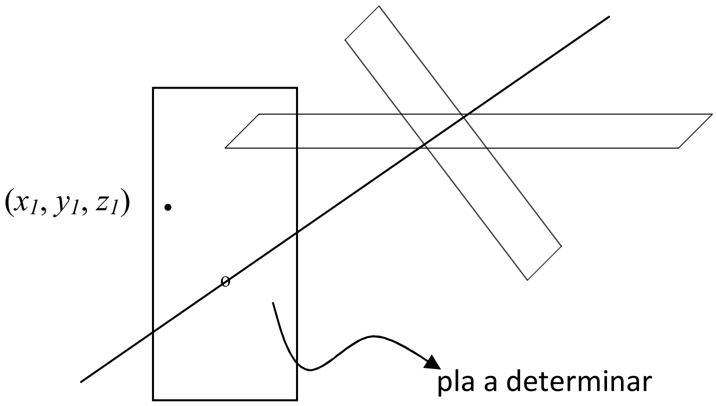


Figura 2.17. Pla que passa per un punt donat i és perpendicular a una recta definida per dos plans

La primera part de la resolució d'aquest problema consisteix en escriure la forma general de l'equació de tots aquells plans que passen pel punt donat,

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

Es tracta de l'equació d'un pla, ja que té termes en x, en y, en z i un terme independent,

$$Ax + By + Cz + (-Ax_1 - By_1 - Cz_1) = 0$$

A, B, C encara s'han de determinar, però resulta evident que la igualtat es compleix per al punt (x_1, y_1, z_1). Falta imposar la perpendicularitat a la recta. Monge dóna com a solució els coeficients següents:

$$A = b'c - bc' , \quad B = a'c - ac' , \quad C = ab' - a'b$$

Són expressions que probablement resultaran familiars a un estudiant de Batxillerat, encara que no estan presentades d'una manera massa usual avui dia. Això és degut que en les programacions actuals de la geometria analítica, tant al pla com a l'espai, predomina el llenguatge vectorial. De fet, els vectors no només condicionen l'escriptura matemàtica i per tant l'aspecte extern del problema, sinó que intervenen en el plantejament, la visualització i els raonaments que condueixen a la solució.
Resoldre aquest problema de la manera com actualment se sol fer és senzill per a un nivell de Batxillerat. Però abans d'efectuar la resolució cal dominar les operacions amb vectors i algunes eines bàsiques de l'àlgebra lineal com ara els determinants. Evidentment, Monge no utilitza ni vectors ni determinants perquè apareixen més tard a la història de les matemàtiques (durant el segle XIX). Aquí és on trobem una de les diferències més rellevants entre un text de Monge o dels seus col·laboradors i un text actual per a l'ensenyament de la geometria analítica en tres dimensions. De tota manera, C. B. Boyer (1986, p. 601) remarca:

"Una cosa que es pot trobar a faltar [a la memòria de 1802 de Monge i Hachette] *és l'ús explícit de determinants, però aquesta tasca correspondria ja al segle XIX. No obstant això, podem considerar la utilització de notacions simètriques per part de Monge, igual que en el cas de Lagrange, una veritable anticipació dels determinants, però sense la distribució en files i columnes que avui és la usual i que es deu a Cayley."*

Actualment, una manera usual de trobar l'equació del pla demanat comença per considerar com a resultat conegut que el vector $\vec{v} = (a, b, c)$ és perpendicular (normal) al pla $ax+by+cz+d=0$ i que anàlogament el vector $\vec{v}' = (a', b', c')$ és perpendicular al pla $a'x+b'y+c'z+d'=0$. El vector format pels coeficients que cal determinar, $\vec{V} = (A, B, C)$ ha de ser perpendicular al pla buscat i per tant perpendicular als dos vectors normals alhora.

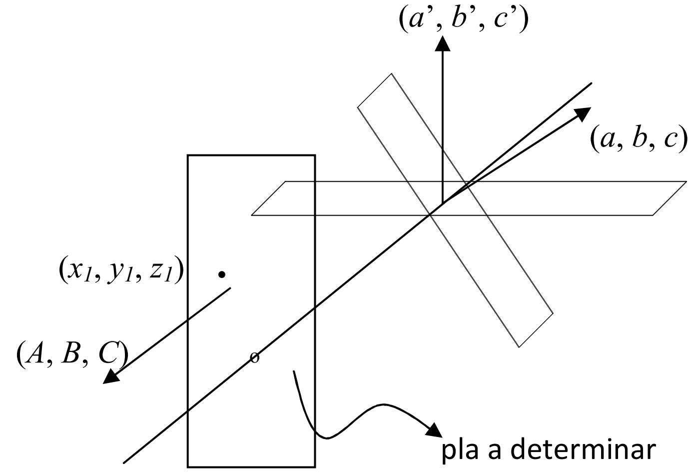


Figura 2.18. Ús modern dels vectors normals i el producte vectorial per trobar l'equació que passa per un punt donat i és perpendicular a una recta definida per dos plans

Hi ha infinits vectors (A, B, C) que compleixen aquestes condicions i tots ells serviran per determinar l'equació del pla buscat. Un d'aquests vectors és el resultat del producte vectorial $\vec{v} \times \vec{v}'$, ja que, per una de les propietats del producte vectorial, aquest resultat és perpendicular als dos vectors que s'operen. Llavors,

$$\vec{V} = \vec{v} \times \vec{v}' = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right) = \left(bc' - b'c \, , \, a'c - ac' \, , \, ab' - a'b \right)$$

La primera fila del determinant correspon a la base canònica de l'espai. Del vector resultat del producte s'obtenen els coeficients buscats i, com es veu, s'arriba a les mateixes expressions que dóna Monge.

A part de l'ús de vectors, una altra de les diferències significatives dels textos de Monge respecte als textos actuals és l'absència total de figures o diagrames geomètrics. Sense il·lustracions, els llibres de geometria analítica adquireixen un aspecte molt algebraic, molt "formalitzant", i renuncien a l'ajut que proporciona la visualització. El perquè d'aquesta renúncia l'explica l'any 1797 un dels deixebles i col·legues de Monge, Sylvestre François Lacroix (1765-1843), citat per J. P. Collette (1985, vol. 2, pp. 24-250):

"En descartar deliberadament totes les construccions geomètriques, he volgut que el lector s'adoni que existeix una manera de considerar la geometria, que es podria anomenar la geometria analítica, i que consisteix en deduir les propietats del que és extens a partir del menor nombre de principis, per mètodes purament analítics, com ho ha fet Lagrange amb la seva mecànica respecte a les propietats de l'equilibri i del moviment."

La geometria analítica considerada així, revoluciona completament els plantejaments clàssics provinents dels grecs. L'any 1637, quan publica *La geometria*, Descartes creu que la solució algebraica d'un problema geomètric és secundària i no dóna el problema per acabat fins que no ha traçat la solució sobre el paper. A mitjan segle XVIII, Euler defensa, en contra de l'opinió d'un bon nombre d'altres matemàtics, que treballar amb àlgebra i coordenades és un camí del tot vàlid per fer geometria. El 1797, Lacroix escriu que les construccions geomètriques no són necessàries. L'evolució del punt de vista és, doncs, completa, i obre el camí per a l'aparició de les geometries no euclidianes del segle XIX, les quals desafien la intuïció quan treballen en espais de més de tres dimensions i prescindeixen del famós axioma de les paral·leles (aquest axioma, formulat per Euclides, afirma que per un punt que no pertany a una recta donada només hi pot passar una sola paral·lela a aquesta recta). Per fer geometria n'hi haurà prou amb les eines de l'àlgebra i l'anàlisi.
Els llibres de geometria analítica inspirats per les lliçons de Monge a l'Escola Politècnica i elaborats pels seus deixebles i col·legues seran textos de referència bàsica per a l'ensenyament durant un segle. El llibre de Lacroix va tenir vint-i-cinc edicions en 99 anys, sense comptar les nombroses edicions en altres idiomes. La geometria analítica de Jean Baptiste Biot (1774-1862) va editar-se cinc vegades en menys de 12 anys.

2.4.12. El segle XIX

El segle XVIII havia vist néixer nombroses institucions dedicades a la investigació i l'ensenyament i, amb elles, una classe professional de científics. Això va contribuir al fet que durant el segle XIX augmentés molt el nombre de treballs científics en totes les disciplines. Tal com assenyalen J. Rey Pastor i J. Babini (1985, vol. 2, p. 141):

"... la matemàtica, com les altres ciències, mostra una fecunditat astoradora que es revela en el gran increment del nombre de científics i treballs, en la creació de societats i revistes especialitzades, en la celebració de reunions nacionals i internacionals. La segona meitat del segle assisteix a la iniciació de les reunions internacionals en gairebé tots els camps del saber científic: els matemàtics no van ser els primers en reunir-se; amb tot el primer congrés internacional dels matemàtics pertany al segle: Zuric, 1897."

La ciència es va dotar de canals regulars de producció i difusió dels coneixements. Els científics, entre ells els matemàtics, cada vegada menys eren persones que dedicaven una part del seu temps lliure a una disciplina i cada vegada més estaven integrats dins de l'àmbit acadèmic universitari, des d'on investigaven, rebien regularment notícies dels treballs dels seus col·legues i també impartien docència. Les investigacions produïen nous resultats a una velocitat impensable fins aleshores i els continguts de les diferents disciplines esdevenien més variats i complexos. Es necessitava cada vegada més temps per dominar una parcel·la concreta: va aparèixer l'especialització. Es van consolidar els mecanismes que regulaven la carrera acadèmica d'aquells estudiants que volien convertir-se en professors d'ensenyament secundari o universitari.

Un exemple europeu d'aquests mecanismes és el món acadèmic alemany, un dels més productius en matemàtiques durant el segle XIX. Era necessari passar un examen d'estat per poder accedir a una plaça de professor de secundària en un *gymnasium* alemany. Si s'aspirava a un lloc a la universitat, s'havia de superar una prova anomenada *habilitation*, que consistia en un treball d'investigació i una tesi (diferenciada de la tesi doctoral), per obtenir el títol de *privatdozent*, és a dir, professor sense salari fix que vivia del que li pagaven els estudiants. Per tant, un *privatdozent* obtenia ingressos en funció del nombre d'estudiants que s'inscrivien als cursos que programava. A continuació, venia el grau de professor *extraordinarius* i, finalment, el de professor *ordinarius*. Completar aquesta escala podia requerir molts anys.
Simultàniament, en sentit contrari a la diversitat i l'especialització, va sorgir també la necessitat d'estructurar i donar unitat a les diferents àrees científiques. En matemàtiques, aquests necessitat va provocar que un bon nombre d'esforços s'orientessin cap a buscar uns fonaments rigorosos per a una sèrie de resultats que en última instància semblaven dependre més de la intuïció que no d'una axiomàtica clara. Ríbnikov (1991, pp. 340-341), escriu:

"L'atenció creixent a les qüestions dels fonaments, les quals van canviar el caràcter de les corresponents investigacions, el reforçament de les exigències de rigor matemàtic, tenen causes completament reals i determinades. Aquestes causes preferentment radiquen en l'enorme volum de fets i en la gran quantitat de noves teories matemàtiques. A més de la complicació de l'estructura de les pròpies matemàtiques, les relacions d'aquesta amb la pràctica es van convertir en molt complexes..."

Durant gairebé tot el segle XIX, la geometria analítica s'ensenyava en centres acadèmics superiors a partir dels textos canònics elaborats pels matemàtics francesos deixebles de Gaspard Monge i, com ell, professors de l'Escola Politècnica. És el cas ja citat del llibre de Lacroix. La geometria elemental seguia encara els models dels textos clàssics, d'entre els quals sobresortia *Els elements* d'Euclides. Però en l'àmbit de la investigació apareixen nous resultats que de cara al segle XX van provocar canvis de gran abast en les matemàtiques, en els mètodes matemàtics emprats pels científics i en l'ensenyament. Per una banda, l'àlgebra va iniciar des dels treballs d'Evariste Galois (1811-1832) un camí ascendent d'abstracció, amb estructures i resultats que desafiaven la intuïció i el sentit comú. Per altra banda, van sorgir les geometries no euclidianes, les quals, com diuen J. Rey Pastor i J. Babini (1985, vol. 2, pp. 144-145), representen *"...el crit inicial d'independència de la matemàtica i de la proclamació de la seva autonomia enfront del món exterior."*
La geometria prenia un caràcter cada vegada més algebraic i es feia cada vegada més abstracta, però, si en aquest sentit semblava allunyar-se de l'àmbit de les experiències reals, en sentit contrari existia una creixent preocupació per aconseguir nous mètodes matemàtics capaços de resoldre problemes físics molt complexos. En geometria analítica, aquest doble procés es va concretar en la invenció de l'àlgebra dels quaternions, amb unes regles que desafiaven el sentit comú, a partir de la qual es va crear el càlcul vectorial tal com el coneixem actualment. Aquest càlcul vectorial va resultar una eina d'extraordinària utilitat per a la física, i d'ell deriva l'ús dels vectors en la geometria analítica que s'imparteix avui dia.

2.4.13. Dels quaternions als vectors

La geometria analítica que actualment es comença a ensenyar a l'etapa educativa del Batxillerat està basada en l'ús de vectors. Abans d'entrar en l'estudi de corbes i figures en el pla, s'introdueixen els vectors i algunes operacions: suma de vectors, producte d'un vector per un nombre real i producte escalar de dos vectors. En tres dimensions, s'afegeix el producte vectorial de dos vectors i s'utilitzen coneixements d'àlgebra lineal. En realitat, la geometria a l'espai adquireix l'aspecte d'un camp d'aplicació de l'àlgebra lineal de vectors, matrius i determinants.

Els vectors, i per extensió l'àlgebra lineal, són productes de la matemàtica del segle XIX. A través de les eines que proporcionen, es construeix la geometria analítica i, al nivell elemental que correspon a l'etapa educativa del Batxillerat, s'arriba a resultats ben coneguts, obtinguts amb la geometria analítica dels segles XVII i XVIII, alguns dels quals ja eren reconstruccions de la geometria clàssica, com, per exemple, l'estudi de les seccions còniques.

El matemàtic que amb els seus treballs va introduir el concepte de vector va ser William Rowan Hamilton (1805-1865). En vida va ser reconegut com un dels científics més brillants de la seva època, i alguns dels seus contemporanis el van comparar amb Newton, considerat llavors el més gran matemàtic britànic de tots els temps (Hamilton era irlandès i, en l'època en què va viure, súbdit britànic). Va ser un nen prodigi que, segons els seus biògrafs, als quatre anys i cinc mesos llegia llatí, grec i hebreu i als deu anys ja era un expert en llengües orientals. Quan anava a l'escola, va llegir l'*Àlgebra* de Clairaut i la *Mecànica celest* de Laplace. En aquest últim llibre hi va descobrir un error, relacionat amb el paral·lelogram de forces. Ara, per a nosaltres, el paral·lelogram s'utilitza per interpretar gràficament la suma de vectors més que com a mètode habitual per calcular aquesta suma, però en aquell temps no existia encara el concepte de vector.

El paral·lelogram de forces es coneixia des del segle XVII i també s'aplicava a magnituds representables per segments orientats, no tan sols forces. Per altra banda, Caspar Wessel va adonar-se que un nombre complex es podia identificar amb un punt del pla cartesià i el 1797 ho va explicar en una conferència. Carl Friedrich Gauss (1777-1885) va fer aquesta mateixa proposta independentment. De fet, la suma de nombres complexos i la seva representació en el pla funcionen de manera anàloga a la suma algebraica de vectors i la suma gràfica mitjançant el paral·lelogram, i això ja ho sabia Hamilton.

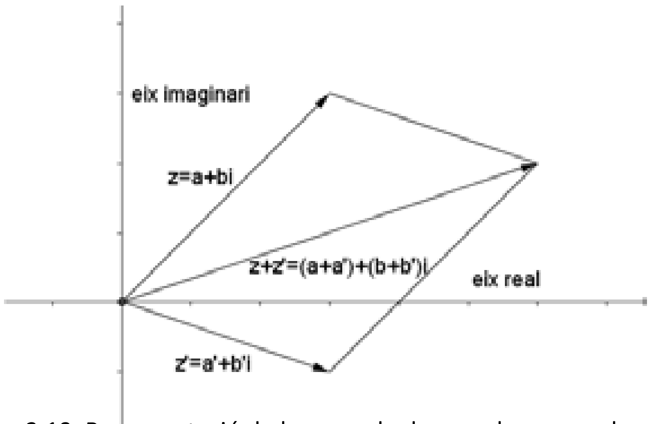


Figura 2.19. Representació de la suma de dos nombres complexos

El producte de complexos és una mica més complicat:

$$(a+bi)(a'+b'i)=aa'+ab'i+ba'i+bb'i^2$$

I, donat que la unitat imaginària compleix que $i^2=-1$,

$$(a+bi)(a'+b'i)=aa'-bb'+(ab'+a'b)i$$

Hamilton es preguntava si, així com els punts del pla es poden fer correspondre a parelles de nombres reals (o a un nombre complex), seria possible comptar amb ternes de nombres per fer geometria en tres dimensions, o en altres paraules, crear nombres complexos "tridimensionals". Ho va intentar amb nous nombres del tipus $a+bi+cj$, fent una extensió natural a base d'introduir una nova quantitat j de tal manera que complís la mateixa propietat coneguda $i^2=-1$, és a dir, $j^2=-1$. La suma es feia com en el cas dels complexos, però el problema estava en el producte dels nous nombres, ja que apareixien els productes creuats ij, ji. L'àlgebra d'aquests nombres no li funcionava bé. Primer va arribar a la conclusió que per als productes ij, ji no es podia complir la propietat commutativa, i va establir que $ij=-ji$, la qual cosa suposava una extraordinària novetat en matemàtiques. Després, va decidir que en comptes de ternes el que necessitava eren quaternes i va introduir una nova quantitat k, tal que $k^2=-1$. Els nous nombres, que va anomenar quaternions, tenien aquesta forma:

$$a+bi+cj+dk$$

amb a, b, c, d nombres reals. Mentre reflexionava sobre les propietats que havien de complir els productes de i, j, k, el 16 d'octubre de 1843 va experimentar, segons la seva pròpia descripció (en F. G. Ashurst, 1985, p. 42):

"Va semblar com si es tanqués un circuit elèctric; i va saltar una espurna..."

Hamilton va escriure ràpidament el que se li havia acudit:

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$$

Tenint en compte que el producte no és commutatiu i que per tant no és el mateix operar per la dreta que per l'esquerra, aquestes igualtats anteriors determinaven les regles d'operació. Per exemple, partint de $ijk=-1$ i operant per k per la dreta:

$$\begin{aligned} ijk^2&=-k\\ ij(-1)&=-k\\ ij&=k \end{aligned}$$

De manera semblant es poden obtenir tots els productes per parelles:

$$\begin{aligned} ij = k \quad &, \quad ji = -k \\ jk = i \quad &, \quad kj = -i \\ ki = j \quad &, \quad ik = -j \end{aligned}$$

Amb aquestes regles, el producte de dos quaternions queda de la següent manera:

$$(a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k) = aa' - bb' - cc' - dd' + (ab' + a'b + cd' - c'd)i +$$
$$+ (ac' + a'c + b'd - bd')j + (ad' + a'd + bc' - b'c)k$$

La no commutativitat del producte de quaternions era com un desafiament al sentit comú, acostumat al fet que la multiplicació entre nombres reals (i fins i tot entre complexos) compleix la propietat commutativa. F. G. Ashurst (1985, p. 44) destaca la importància d'aquesta nova àlgebra:

"La importància dels quaternions per a les matemàtiques i el desenvolupament de l'àlgebra va consistir en què una llei sagrada, com la de la commutativitat, era rebutjada i no obstant això l'àlgebra no solament se sostenia sinó que a més era encara més útil. Els matemàtics, amb empenta creixent, van experimentar d'allà en endavant amb noves idees i construccions que rebutjaven les lleis de l'àlgebra."

El 1853, es va publicar *Lectures on Quaternions* (lliçons sobre quaternions). Aquest llibre no va tenir l'èxit que Hamilton esperava, i per això va dedicar els últims anys de la seva vida a preparar-ne un altre de més extens, en què volia mostrar les aplicacions dels nous nombres. El 1866, un any després de la seva mort, apareixia *The Elements of Quaternions* (elements de quaternions). En la primera d'aquestes dues obres, Hamilton ja feia una distinció entre la part real dels quaternions, que va anomenar escalar, i la part en *i*, *j*, *k*, que va anomenar vectorial. I escrivia (en F. G. Ashurst, 1985, p. 45):

"Un vector té quantitat, en el sentit que es pot multiplicar per dos, per tres, etc.... també el podem concebre com si tingués algun tipus de qualitat anàloga a la direcció..."

L'alemany Hermann Günther Grassmann (1809-1877) va publicar el 1862 el llibre *Die Ausdehnungslehre* (completant un treball de 1844), del qual n'existeix traducció al castellà del destacat matemàtic Julio Rey Pastor (1888-1969), amb el títol de *Teoría de la extensión*. Aquesta obra defineix els productes "interior", normalment anomenat producte escalar, i "exterior", dit també producte vectorial, de dos o més segments, i elabora una àlgebra en què el producte no és commutatiu ni associatiu. Les idees de Hamilton i Grassmann les va recollir el nord-americà Josiah Willard Gibbs (1839-1903, el primer doctor en enginyeria de la història dels Estats Units). Gibbs és qui va fixar el càlcul vectorial que usem en l'actualitat: el 1881 i després el 1884 va imprimir privadament per a ús dels seus estudiants de Yale l'obra *Elements of Vector Analysis*, que també va enviar a alguns científics importants. Però la mala acollida entre els defensors dels quaternions va retardar-ne la publicació definitiva fins al 1901, amb el títol de *Vector Analysis*.

Gibbs tracta separadament les parts escalar i vectorial dels quaternions. Els vectors se situen en l'espai tridimensional, en eixos ortogonals. La base canònica de l'espai vectorial està formada pels vectors unitaris $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, una notació habitual en física però no tant en matemàtiques, on es prefereix escriure aquesta base com $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. La suma de vectors és simple, igual que en els nombres complexos i en els quaternions. Pel que fa al producte, es produeix una separació en dos productes diferents respecte a l'àlgebra de quaternions: per veure-ho, considerarem dos quaternions, en els quals distingim les parts escalar i vectorial:

$$\begin{array}{lll} a+bi+cj+dk & \text{amb part vectorial} & \vec{v}=bi+cj+dk \\ a'+b'i+c'j+d'k & \text{amb part vectorial} & \vec{w}=b'i+c'j+d'k \end{array}$$

El producte d'aquests dos quaternions, que ja s'ha mostrat abans, es pot escriure amb les agrupacions següents:

$$\begin{aligned} &(a+bi+cj+dk)(a'+b'i+c'j+d'k)= \\ &=\underbrace{aa'}_{(1)}+\underbrace{a(b'i+c'j+d'k)}_{(2)}+\underbrace{a'(bi+cj+dk)}_{(3)}-\underbrace{(bb'+cc'+dd')}_{(4)}+ \\ &+\underbrace{(cd'-c'd)i+(b'd-bd')j+(bc'-b'c)k}_{(5)} \end{aligned}$$

La part (1) és el producte de les dues parts escalars dels quaternions. Les parts (2) i (3) són productes d'un escalar per un vector, $a\vec{w}$ i $a'\vec{v}$ respectivament . La part (4) és el que nosaltres coneixem com a producte escalar $\vec{v}\cdot\vec{w}$. La part (5) té la mateixa forma que el producte vectorial $\vec{v}\times\vec{w}$. Per tant,

$$(a+bi+cj+dk)(a'+b'i+c'j+d'k)=aa'+a\vec{w}+a'\vec{w}-\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w}$$

Si considerem només el producte dels vectors, prescindint de la part escalar dels quaternions, quedarà $(-\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w})$. Actualment tractem per separat el producte escalar i el producte vectorial, però podem veure que formen part d'un únic producte, el de quaternions.

El producte vectorial té com a resultat un vector i reflecteix la no commutativitat dels quaternions, ja que $\vec{v}\times\vec{w}=-\vec{w}\times\vec{v}$. Als estudiants se'ls ensenya que el vector resultant té direcció perpendicular als dos vectors que s'operen i que el sentit es determina per la regla del cargol, és a dir, pel desplaçament que seguiria un cargol que girés en el sentit necessari per portar el primer vector que sobre el segon vector (pel camí més curt). Això no és res més que la regla del producte de les quantitats i, j, k dels quaternions, traduïda a vectors. Per exemple, prenent els productes ij, ji:

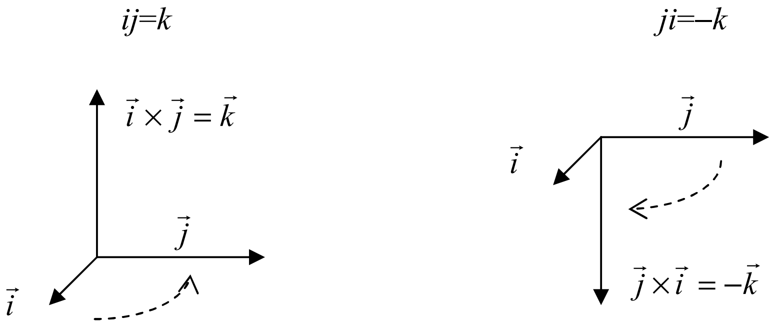


Figura 2.20. Productes ij, ji

L'anàlisi vectorial va aconseguir una àmplia acceptació gràcies en gran part a l'exitosa aplicació a la física. El 1873, James Clerk Maxwell (1831-1879) publicava *Treatise on Electricity and Magnetism* (tractat d'electricitat i magnetisme), en què formulava un sistema d'equacions de les quals es deduïa que les ones de força elèctriques i magnètiques es propaguen per l'espai a la velocitat de la llum. Aquestes equacions escrites en el llenguatge de l'anàlisi vectorial adquirien un aspecte compacte i expressaven amb simplicitat els fenòmens electromagnètics. L'obra de Maxwell va obtenir un gran ressò entre la comunitat científica.

Conceptes ben coneguts i molt usats de la teoria de camps (no tan sols elèctric i magnètic, sinó també gravitatori) com el rotacional o la divergència són aplicacions de l'anàlisi vectorial, i deriven dels treballs de Hamilton. En efecte, fou Hamilton qui va inventar el símbol ∇ (nabla) per a l'operador següent:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

que ell escrivia sense les fletxes de vector. La divergència d'un vector $\vec{W}$ és el producte escalar de nabla per aquest vector, $\vec{\nabla} \cdot \vec{W}$, i el rotacional és el producte vectorial $\vec{\nabla} \times \vec{W}$.

Els vectors són una part fonamental de la geometria analítica des que es comença a ensenyar. En problemes al pla ja s'introdueix el producte escalar i en la geometria a l'espai apareix el producte vectorial. A més, a l'espai s'utilitza el llenguatge de matrius i determinants, que també és una creació de les matemàtiques del segle XIX, en concret obra d'Arthur Cayley (1821-1895). En un treball de 1858, *A Memoir on the Theory of Matrices* (una memòria sobre la teoria de matrius) introdueix la notació que encara usem actualment.

2.4.14. Sota la influència de la "matemàtica moderna"

Per matemàtica moderna s'entén convencionalment aquelles parts de la matemàtica que tenen l'origen en treballs del segle XIX i que durant la segona meitat d'aquest segle i al llarg del segle XX prenen posicions principals, arribant fins als programes escolars de primària, secundària i als cursos universitaris. A l'ensenyament, han ocupat moltes hores d'estudi dels alumnes. Per altra banda, durant part del segle XX, l'aprenentatge de les matemàtiques ha adoptat una particular manera, abstracta i formalista, de construir i fonamentar els coneixements, que s'ha apropiat el nom de "matemàtica moderna", però no s'ha de confondre el terme modern referit als continguts amb el mateix adjectiu aplicat a una determinada concepció pedagògica que va tenir el moment més alt durant les dècades immediatament posteriors a la Segona Guerra Mundial.

A finals del segle XIX i principis del segle XX, la geometria analítica va incorporar el llenguatge dels vectors, amb la qual cosa va adoptar l'aspecte que té actualment. Els vectors i les operacions amb vectors formen la part introductòria indispensable de la geometria analítica que s'imparteix al Batxillerat, amb la incorporació, a mesura que s'avança, del llenguatge de les matrius i els determinants. A l'educació secundària, el nivell més alt d'aquesta geometria correspon a les geometries afins i mètriques a l'espai, que es presenten com una aplicació de l'àlgebra lineal per a problemes a l'espai euclidià tridimensional. Recentment, les programacions de continguts a secundària han reduït la presència d'algunes de les parts més abstractes, com és el cas de l'estudi de les estructures algebraiques, entre elles els espais vectorials, però aquestes estructures encara formen part dels programes en els primers cursos universitaris de carreres científiques i tècniques.

Els axiomes d'espai vectorial són obra del matemàtic Giuseppe Peano (1862-1932), que els va enunciar el 1888 de manera molt semblant a com s'ensenyen ara. L'estructura resultant, formada per combinacions de vectors i nombres reals, la va anomenar "sistema lineal". Peano va defensar l'ús dels mètodes vectorials quan encara un bon nombre de matemàtics no els donava massa importància, i va ser un dels fundadors de l'Associació per a la Promoció de l'Estudi dels Quaternions i els Sistemes Afins a les Matemàtiques. També es va preocupar per l'ensenyament mitjà i arran d'aquest interès va fer abundants indicacions per aconseguir millores. Una part considerable dels seus estudiants universitaris (era professor a la universitat de Torí) es convertien en professors de secundària. Aquest destí professional era també comú entre estudiants de matemàtiques (o ciències) d'altres països europeus. Avui dia encara ho és.

Els treballs de Felix Klein (1849-1925) constitueixen una aportació fonamental a la geometria moderna. Klein, a través del seu famós *Programa d'Erlangen* (1873) va unificar moltes de les geometries conegudes aleshores mitjançant la teoria de grups. Bàsicament, va definir una geometria a partir de les propietats que conserven les figures geomètriques sotmeses a un grup de transformacions. Per exemple, si el grup de transformacions conserva la longitud, l'àrea i la semblança, la geometria és euclidiana; si només conserva el paral·lelisme, es tracta d'una geometria afí. Amb això, Klein va ordenar de manera coherent la majoria dels coneixements de l'espai i va obtenir una síntesi d'estructures geomètriques i algebraiques. Va donar nom a les geometries hiperbòlica, parabòlica i el·líptica i va arribar a la conclusió que la més general de totes les geometries és la topologia. La classificació que va establir és la següent (en F. G. Ashurst, 1985, p. 129):

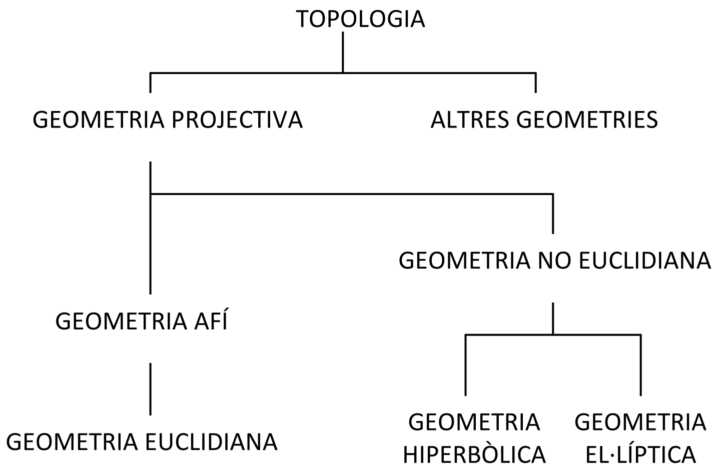


Figura 2.21. Classificació de la geometria segons Klein

Klein, des del seu lloc de professor i administrador a la universitat de Gotinga, va exercir una gran influència en el món acadèmic alemany i va manifestar, com Peano, un viu interès envers l'educació matemàtica a l'ensenyament mitjà. Va intervenir en diversos plans estatals per millorar el currículum. El 1908, durant el Congrés Internacional de Matemàtics, a Roma, va ser elegit president de la Comissió Internacional sobre l'Ensenyament de les Matemàtiques, la qual va crear diferents comitès nacionals. El comitè alemany va presentar un extens informe sobre les matemàtiques a tots els nivells d'ensenyament, des de primària fins a la universitat. A Anglaterra, la Junta d'Educació va publicar també, el 1812, un extens informe. Klein va redactar el llibre *Matemàtiques elementals des d'un punt de vista avançat* que va aparèixer el 1908, basat en una sèrie de conferències a professors de l'ensenyament secundari alemany i que va tenir una notable influència sobre el sistema educatiu del país. Sempre es va mostrar partidari de potenciar les matemàtiques aplicades i va intervenir en la redacció i traducció de textos sobre hidrodinàmica, aerodinàmica i mecànica. Cap al final de la seva vida, el va decebre el menyspreu cap a les aplicacions que percebia en una investigació matemàtica cada vegada més ocupada en les estructures abstractes.

Un altre dels grans matemàtics de la universitat de Gotinga, David Hilbert (1862-1943), va publicar el 1899 *Els fonaments de la geometria*, un llibre expressament escrit de manera senzilla que va exercir una influència considerable en les matemàtiques escolars. Hilbert pensava que el més important de la geometria són les interrelacions entre els elements geomètrics, no els mateixos elements. Els objectes de partida són rectes i punts i les relacions entre ells es manifesten a través d'axiomes o regles, a partir dels quals s'estudia tota la geometria euclidiana. Aquest punt de vista va ser adoptat per molts textos escolars del segle XX i la seva influència encara perdura. *Els fonaments de la geometria* dóna una descripció rigorosa de la geometria euclidiana mitjançant 21 axiomes. Parteix de tres nocions primitives, punt, recta i pla, i de sis relacions indefinides, estar sobre, estar en, estar entre, ser congruent, ser paral·lel i ser continu. Hilbert també va investigar en geometria analítica, i va demostrar que si existís alguna contradicció en geometria, hi hauria una contradicció en l'aritmètica dels nombres reals.

És significatiu que, a partir del segle XIX, un bon nombre de matemàtics dedicats a la investigació i a la docència universitària de continguts avançats es preocupessin de l'ensenyament de les matemàtiques a primària i secundària. Ja s'han citat els casos destacats de Peano, Klein i Hilbert, que no solament van proposar maneres d'ensenyar temes elementals, sinó que van aconseguir exercir una influència real sobre les autoritats educatives, la matèria a ensenyar i la manera d'ensenyar-la.

Els nous resultats de les matemàtiques del segle XIX, juntament amb la preocupació pels fonaments i la lògica, van contribuir que durant el segle XX l'abstracció no tan sols dominés els aspectes avançats de la investigació teòrica, sinó que també arribés fins als nivells elementals de l'ensenyament. Un dels màxims representants d'aquesta tendència fou el col·lectiu de matemàtics, la majoria francesos, agrupats sota el nom de Nicolas Bourbaki. Aquest grup es va crear després de la Primera Guerra Mundial amb l'objectiu de simplificar i unificar les matemàtiques. El resultat més evident d'aquest propòsit va ser el *Élements de Mathématiques* (comença a aparèixer el 1935), que ha tingut diverses actualitzacions paral·leles a la renovació generacional de Bourbaki. L'obra està centrada sobretot en les estructures algebraiques i, dins d'elles, en les regles de composició. Les estructures estan fetes d'elements, relacions entre els elements i axiomes. Una mateixa estructura es pot aplicar a diferents parts de la matemàtica. Dues o més estructures es poden combinar i formar-ne una de nova. El resultat són unes matemàtiques d'aspecte molt abstracte i reduïdes a un esquelet mínim.

A partir de la Segona Guerra Mundial, la influència de les idees de Bourbaki té una traducció pedagògica. L'anomenada "matemàtica moderna" arriba als ensenyaments primari i secundari. Des de nivells elementals, s'introdueix la teoria de conjunts i el llenguatge lògic associat, i fins i tot s'ensenyen estructures algebraiques a alumnes que tot just comencen l'adolescència: subgrup, grup, anell, cos. Els conjunts, les correspondències entre conjunts, els diagrames de Venn, les relacions d'equivalència i d'ordre, els entorns, etc. formen part del vocabulari habitual. La geometria elemental resulta molt influïda per la tendència general algebritzant i perd pes relatiu dins del currículum. La geometria analítica reforça encara més el seu aspecte algebraic i també l'estudi les estructures (espais vectorials) ocupa una part important del temps total dedicat. En fer-se molt algebraica la geometria, es concedeix menys importància a la visualització, les representacions gràfiques i la intuïció geomètrica. En tot cas, les il·lustracions tendeixen a esquematitzar relacions més que a representar problemes geomètrics de manera tradicional i abunden els diagrames. De fet, s'aprofundeix en un plantejament pedagògic que ja havíem trobat a finals del segle XVIII i que es manifestava explícitament en les paraules de Lacroix, professor de l'Escola Politècnica de París i autor d'un text de geometria analítica vigent durant tot el segle XIX:

"En descartar deliberadament totes les construccions geomètriques, he volgut que el lector s'adoni que existeix una manera de considerar la geometria, que es podria anomenar la geometria analítica, i que consisteix en deduir les propietats del que és extens a partir del menor nombre de principis, per mètodes purament analítics..."

2.4.15. Quadre Sinòptic: desenvolupament històric de la geometria analítica

Etapa	**Geometria analítica**	**Matemàtiques i context cultural i acadèmic**	**Context polític, econòmic i social**
Segles IX-XVI	Primer text d'àlgebra: *Al-jabr wa'l Muqabala*, del matemàtic Al-Khwarizmi (principis del s. IX). Primera traducció llatina de Robert de Chester (1145). *Liber Abaci* (1202) de Leonardo de Pisa (Fibonacci). Comença l'ús generalitzat de les xifres hindús. *Summa de aritmetica, geometria, proportioni e proportionalità* (1494) de Luca Pacioli. Àlgebra sincopada. *Ars Magna* (1545) de Girolamo Cardano. Inclou la resolució de l'equació de tercer grau, revelada a Cardano per Nicolò Fontana (Tartaglia). *Algebra* (1572) de Rafael Bombelli. Regles per resoldre equacions fins a quart grau. François Viète (finals del s. XVI) inicia l'àlgebra simbòlica i estableix una sèrie de postulats generals per a les transformacions algebraiques.	La península ibèrica és lloc de contacte cultural entre orient i occident. Escola de traductors de Toledo. Amb el renaixement i l'humanisme s'inicia la recuperació sistemàtica de les obres dels clàssics. Àlgebra retòrica, de tipus discursiu. La interpretació de les equacions fins a tercer grau es fa en termes geomètrics: les magnituds s'associen a dimensions. Les solucions es demostren geomètricament.	Feudalisme a Europa. Contactes amb el món àrab intensificats per la creuades. Creixement de les ciutats a la baixa edat mitjana. Ressorgiment del comerç a llarga distància. Apareix la burgesia comercial. Formació de la monarquia autoritària. Grans viatges oceànics de portuguesos i espanyols. Descobriment d'Amèrica (1492). Reforma protestant i contrareforma.
Segle XVII	Pierre de Fermat escriu *Ad locos planos et solidos isagoge* abans de 1637, però aquesta obra no es publica fins al 1679. Estudi dels llocs geomètrics a partir d'equacions. *La Géométrie* (1637) de René Descartes. Inici de la geometria analítica. Frans van Schooten publica successives edicions llatines de *La Géométrie* (1649-1651). Difusió de l'obra de Descartes. Perfeccionament de l'ús de coordenades.	Revolució científica. Naixement de la ciència experimental. La reconstrucció de les obres de la geometria clàssica és una important motivació en les primeres obres de geometria analítica, especialment les seccions còniques d'Apol·loni. Els iniciadors i propagadors de la geometria analítica pertanyen majoritàriament a l'alta burgesia i no són professionals de les matemàtiques. A finals de segle apareix el càlcul infinitesimal.	Progressiva formació dels estats moderns. La burgesia augmenta la seva influència social. Les guerres de religió s'estenen per Europa.

Aquesta taula continua a la pàgina següent

Segle XVIII	*Introductio in analysis infinitorum* (1748) de Leonhard Euler. Fórmules de canvis de coordenades. Classificació de les corbes segons el grau de l'equació. Primer text de geometria analítica en tres dimensions que s'aproxima als textos actuals. *Feuilles d'analyse* (1795) de Gaspard Monge. Prototipus dels programes actuals per a l'ensenyament de la geometria analítica. *Application de l'algèbre à la géométrie* (publicat el 1802) de Gaspard Monge i Jean Nicolas Pierre Hachette. Recull de les lliçons de Monge sobre geometria analítica a l'Escola Politècnica de París.	Segle de la Il·lustració. Ideal racionalista i confiança en el progrés humà. La resolució de problemes científico-tècnics es converteix en una qüestió cabdal i afer d'estat. En matemàtiques, predomini de l'anàlisi. La geometria analítica es desenvolupa lentament i tarda en obtenir acceptació general. Euler defensa que és una manera tan vàlida de fer geometria com els procediments clàssics. Els estats creen i financen institucions científiques per a les quals atrauen investigadors i professors brillants. Es va consolidant la figura del científic professional. Possibilitats de promoció acadèmica per a les capes socials relativament modestes. L'estat necessita quadres amb bona formació acadèmica. Creació de l'Escola Politècnica de París durant els anys republicans de França. Alguns textos de geometria analítica dels seus professors es reeditaran durant gairebé cent anys.	Despotisme il·lustrat com a forma de govern en alguns dels estats més poderosos d'Europa. Prússia i Rússia, noves potències europees. Declaració d'independència dels Estats Units (1776). França, protagonista de grans canvis: Revolució Francesa (1789), república i imperi napoleònic.
Segle XIX	El 1843 William Rowan Hamilton crea els quaternions, el producte dels quals no és commutatiu. A partir dels quaternions sorgeixen els vectors. *Die Ausdehnunglehre* (1844) de Hermann Günther Grassmann. *A Memoir on the Theory of Matrices* (1858) d'Arthur Cayley. Les matrius i els determinants són eines bàsiques en el càlcul vectorial.	Augmenta els nombre d'investigadors científics i també augmenta el nombre de treballs publicats. Es consoliden les estructures de la universitat moderna i s'estableixen els camins de la carrera acadèmica. L'estat intervé cada vegada més en l'educació dels ciutadans. Es regulen els ensenyaments primari i secundari.	Revolució industrial basada en la màquina de vapor. Espectacular augment de la producció. Desenvolupament del capitalisme financer. Es formen les ciutats industrials i apareixen els moviments obrers. Invenció del ferrocarril. Les línies ferroviàries s'estenen per Europa. Invenció del telègraf.

Aquesta taula continua a la pàgina següent

Segle XIX (continuació)	*The Elements of Quaternions* (1866) de Hamilton. *Programa d'Erlangen* (1873) de Felix Klein. Classificació de les geometries a partir de la teoria de grups. Josiah Willard Gibbs publica per a ús dels seus estudiants *Elements of Vector Analysis* (1881-1884). La publicació definitiva es produeix el 1901, amb el títol *Vector Analysis*. Queda fixat l'anàlisi vectorial que s'utilitza actualment. El 1888 Giuseppe Peano formula els axiomes d'espai vectorial. *Els fonaments de la geometria* (1899) de David Hilbert. Descripció rigorosa de la geometria euclidiana mitjançant 21 axiomes.	Es desenvolupa l'àlgebra moderna d'operacions, propietats i estructures. Sorgeixen les geometries no euclidianes. Preocupació pels fonaments de la matemàtica i per la consistència i el rigor interns. Les ciències experimentals, especialment la física, són un camp molt fèrtil d'aplicació dels mètodes matemàtics avançats. El càlcul vectorial es revela de gran utilitat en l'estudi de fenòmens físics com l'electromagnetisme. Matemàtics de primera línia intervenen en intents de millora dels ensenyaments primari i secundari.	Unificacions d'Alemanya i d'Itàlia (1871). Època colonial. Repartiment d'Àfrica. Consolidació dels estats-nació moderns. Carrera armamentística de les grans potències. Espectacular acceleració del progrés tecnològic.

Taula 2.1. Desenvolupament històric de la geometria analítica

2.5. El desenvolupament històric de la didàctica de la geometria analítica

La manera com la geometria analítica es presenta habitualment als alumnes (com les editorials desenvolupen les programacions) és hereva d'un procés històric, des del naixement d'aquesta branca de la geometria fins a la transposició didàctica en els llibres de text moderns. Aquest procés aporta informació molt valuosa per entendre la presentació actual dels continguts a les aules, però en termes generals és força desconegut i no se'n treu partit didàctic.

Fins arribar a la situació actual del sistema educatiu espanyol, la presència de la geometria al currículum i l'enfocament didàctic que se li ha donat han experimentat una evolució més o menys integrada dins de les tendències dominants en els sistemes educatius europeus (sobretot a partir de la dècada de 1960). Han passat d'una situació subordinada respecte d'altres continguts a guanyar importància en les programacions, però encara resta obert el debat sobre algunes qüestions de gran importància didàctica: trobar l'equilibri entre la intuïció i el formalisme i, per altra banda, aconseguir una efectiva contextualització de l'aprenentatge.

2.5.1. De l'antiguitat fins al segle XX

Durant molts segles, el text bàsic per a l'ensenyament de la geometria va ser els *Elements* d'Euclides (segle III a. C.), el segon llibre amb més edicions de tota la història (el primer és la Bíblia). La tradició educativa es va basar, al llarg de centúries, en el mètode axiomàtic d'una compilació dels coneixements matemàtics de l'època hel·lenística, feta des d'una concepció intel·lectual situada en el món de les idees pures i amb el característic menyspreu que tenia el pensament filosòfic grec envers la realitat física. Molts resultats elementals amb què treballaven els matemàtics grecs ja eren coneguts segles abans per babilonis i egipcis a partir de l'experiència, els casos particulars i l'aplicació a problemes de l'agrimensura o la construcció, però van ser els grecs els que van inventar la demostració i van construir un edifici matemàtic amb axiomes i teoremes. Aquesta elaboració, que comporta un gegantí salt qualitatiu gràcies a la potència del raonament deductiu, suposa també un cert allunyament de la geometria entesa com disciplina que sorgeix de l'experiència amb objectes físics. Sobre aquesta escissió entre ideal i realitat, Peralta (1995) aclareix:

"D'aquesta manera va néixer la confusió, que ha durat segles, entre la geometria com a disciplina per a matemàtics (amb els seus models abstractes i els seus raonaments lògics, apartada de la realitat), i la geometria per a l'home comú, que únicament tracta de raonar sobre figures concretes de la vida real."

L'educació matemàtica, i en general l'educació en qualsevol altra disciplina intel·lectual, al llarg de la història ha estat reservada a una part molt minoritària de la societat. No és fins al segle XIX que l'alfabetització s'estén de manera significativa en alguns països gràcies a l'ensenyament obligatori. Fins i tot en aquestes condicions, els ensenyaments secundari i superior estan a l'abast de molt poques persones. Quan aquestes persones estudien geometria segueixen els mètodes tradicionals i aprenen de memòria l'obra d'Euclides. El més important no és si es comprenen o no el que memoritzen o reprodueixen, sinó el fet que aconsegueixin memoritzar i reproduir. Però, amb la progressiva extensió del sistema educatiu, l'organització escolar i els currículums evolucionen. També progressivament, creix el debat, a nivell institucional, sobre què ensenyar i com ensenyar.

2.5.2. El segle XX

Al final del segle XIX i al principi del segle XX, en aquest marc en què l'estat organitza i regula l'ensenyament pensat per a una població escolar extensa, matemàtics il·lustres a l'avantguarda de la investigació superior també es preocupen per les matemàtiques als ensenyaments primari i secundari. És el cas, per exemple, de Felix Klein, que durant la segona meitat del segle realitza contribucions de gran importància a la geometria de nivell superior, i que exerceix una influència activa en l'organització del sistema educatiu alemany, participant en diversos plans estatals per millorar el currículum i presidint la Comissió Internacional sobre l'Ensenyament de les Matemàtiques (CIEM,

actualment designat per ICMI), càrrec per al qual és elegit el 1908. També és el cas de David Hilbert, que publica *Els fonaments de la geometria* (1899), un text que servirà de model per a textos escolars de secundària. Al llarg del segle XX, la preocupació per l'ensenyament, tant a nivell de primària com de secundària, és constant dins de sectors importants de matemàtics (investigadors i professors universitaris), dins de l'administració educativa i dins de l'emergent disciplina de la pedagogia. Es pot dir que, al mateix temps que el sistema educatiu arriba a tota la població infantil i adolescent, les preocupacions didàctiques també s'universalitzen. Ja no serà la tradició la que estableixi què ensenyar i com, sinó que nous mecanismes regularan i transformaran el sistema educatiu, de manera que en un sol segle, el segle XX, els debats, les reformes i els canvis faran que, per comparació, tota l'educació anterior, i en especial l'ensenyament de la geometria, des de l'època clàssica sembli haver romàs en una quietud gairebé perfecta a penes afectada per lleugeres i superficials modificacions.
En realitat, la tendència a qüestionar l'ensenyament tradicional de la geometria ja es percebia en el decurs del segle XIX. Filloy (1998) dóna una cita de Lardner del 1846:

"...una vegada que s'hagi substituït Euclides, cada professor creurà que la seva pròpia obra és la millor, i cada escola tindrà el seu propi llibre. Tot el rigor i l'exactitud, que durant tant de temps han suscitat l'admiració dels homes dedicats a la ciència, s'acabarà [...] *Tota escola tindrà un nivell diferent: el que en una serà hipòtesi, per a una altra serà tesi que ha de provar-se a partir d'altres hipòtesis; fins que per fi, la Geometria, en el sentit antic, serà partida en petites arts disconnexes o serà considerada únicament com una aplicació de l'aritmètica i de l'àlgebra."*

Les paraules de Lardner pronosticaven un negre futur per a la geometria a l'àmbit educatiu. L'última afirmació, *"serà considerada únicament com una aplicació de l'aritmètica i de l'àlgebra"* és sorprenentment premonitòria. Però, ja al segle XX, abans que l'àlgebra efectivament se subordinés a la geometria, en els sistemes educatius occidentals es va arribar a la conclusió, com diu Peralta (1995), que la decisió important consistia en establir en quina relació han de coexistir la geometria axiomàtica i la geometria intuïtiva. En les etapes educatives inicials, es començava amb un ensenyament de caire intuïtiu i a mesura que els alumnes maduraven s'introduïen l'abstracció i l'axiomàtica. Aquest plantejament atorgava una importància destacada a la visualització i a l'experiència amb objectes reals.
Això va durar fins a l'aparició a l'escola de l'anomenada matemàtica moderna. La seva línia didàctica obté acceptació en els congressos de l'ICMI durant la dècada de 1950. A la dècada de 1960, el matemàtic Jean Dieudonné, un dels fundadors del col·lectiu Nicolas Bourbaki, fa la famosa exclamació "A baix Euclides!" A partir d'aleshores, l'ensenyament a nivell elemental s'impregna d'abstracció i de rigor. Es concedeix una importància fonamental a les estructures algebraiques que es poden aplicar a diferents branques de la matemàtica i aquest fet provoca que s'abandonin la visualització i la intuïció a favor de les construccions axiomàtiques. Si això ja succeeix als nivells més elementals, en estadis més avançats (com la geometria analítica) el predomini de les estructures algebraiques és encara més patent. Són il·lustratives d'aquesta manera de concebre l'ensenyament de les matemàtiques la següents cites:

"...un professor afirmava, en una reunió de matemàtics espanyols celebrada a Sevilla el 1964, que no era possible ensenyar a calcular la diagonal d'un quadrat a nens de dotze anys, perquè no era possible introduir a aquesta edat amb suficient claredat el concepte de nombre real." (Sánchez, 1997)

"L'elaboració de la definició de políedre topa amb serioses dificultats si es vol fer de manera rigorosa, com posa de manifest la topologia algebraica. Com que a nivell elemental és impossible obviar-les, es va optar per una solució dràstica: la supressió dels políedres i de pràcticament tota la geometria a l'espai. [...] *Això ha obligat, per exemple a la desaparició del teorema d'Euler, sens dubte un dels més importants de la matemàtica..."* (Peralta, 1995)

El corrent de la matemàtica moderna es preocupa sobretot per la consistència i el rigor. Intenta construir una estructura impecable a base d'axiomes, definicions i teoremes, i ho fa no tan sols com a exercici de matemàtica superior, sinó també com a procés d'aprenentatge de matemàtica. De fet, és un intent de traslladar a l'escola una preocupació dominant al final del segle XIX i al principi del segle XX entre els matemàtics: aconseguir la unitat i el rigor per a tota la disciplina. Després dels nombrosos avenços aconseguits durant el segle XVIII i de l'enorme increment de coneixements a partir de treballs del segle XIX, les matemàtiques es dividien en moltes branques, cada una d'elles amb molts resultats especialitzats. Els matemàtics s'havien preocupat sobretot d'obtenir nous coneixements i ho havien aconseguit, però la multiplicitat de resultats reclamava una feina d'unificació a partir d'uns fonaments sòlids. El desenvolupament de branques com l'àlgebra, la lògica i la teoria de conjunts permetran realitzar aquest propòsit de manera que a principis del segle XX la major part de la matemàtica es fonamenta en un marc estrictament axiomàtic. Aquest afany per l'axiomatització arriba fins a la matemàtica escolar.
Com a mostra d'aquest plantejament pedagògic, es reprodueixen a continuació els axiomes i les definicions sobre els quals es construeixen els primers elements de geometria en un llibre de text de la dècada de 1960, escrit per un matemàtic que va ser director del Centre Belga de Pedagogia de la Matemàtica (G. Papy, 1968). En el prefaci del llibre llegim:

"Aquesta obra és el resultat de l'ensenyament efectuat al llarg dels cinc últims anys en cursos de programa experimental. El seu text ha estat íntegrament ensenyat a alumnes de 12 a 13 anys.
L'elecció dels temes i mètodes d'ensenyament està d'acord amb la Sinopsi de Dubrovnik (Organització de Cooperació Econòmica i Desenvolupament, 1960) i amb les recomanacions del Simposi de la Unesco (Budapest, 1962).
[...]
Els capítols XXI a XXIII es proposen l'edificació de la geometria afí del pla, orientada cap a les estructures vectorials, que dominen tota la matemàtica actual. A fi d'evitar confusions de llenguatge hem reservat la paraula «vector» per als vectors lliures o translacions. El «vector aplicat» s'ha anomenat simplement «parell ordenat». Després de la introducció de l'equipol·lència, que és ocasió de nombrosos exercicis de construcció i de càlcul, s'aborden les primeres demostracions geomètriques dignes

d'aquest nom."

I els axiomes i les definicions que ens serveixen d'exemple, tal com apareixen al llibre, són aquests:

Axioma Π1 – El pla Π és un conjunt infinit de punts.
Axioma Π2 – Les rectes són parts pròpies infinites de Π. El conjunt de les rectes es designa per D.
Axioma Π3 – Tot parell de punts està inclòs en una, i solament una, recta.

Definició – Dues rectes s'anomenen secants si (i només si) la seva intersecció és un conjunt unitari. Dues rectes no secants s'anomenen paral·leles.
Definició – S'anomena direcció d'una recta al conjunt de les paral·leles a la recta esmentada.

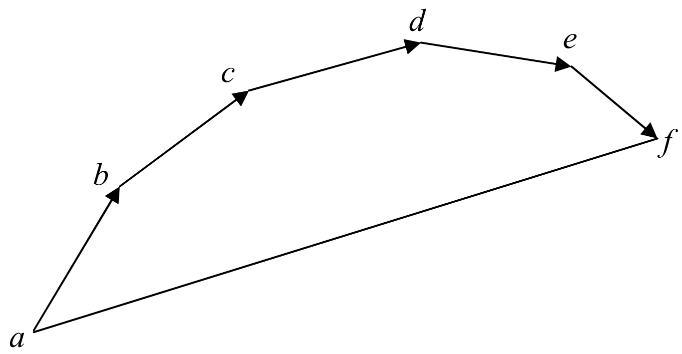
Axioma Π4 – Tota direcció és una partició del pla.
Axioma Π5 – A tota direcció a correspon una, i solament una, direcció a' perpendicular a a. S'assenyala aquest fet escrivint $a \perp a'$ (o escrivint $a' \perp a$). Tota recta $A \in a$ és perpendicular a tota recta $A' \in a'$. S'assenyala aquest fet escrivint $A \perp A'$ (o $A' \perp A$). Dues rectes perpendiculars són secants.

Immediatament després d'haver introduït la suma de vectors i haver enunciat les propietats que asseguren que es tracta d'un grup commutatiu, es presenta el següent teorema, que aquí es reprodueix de forma idèntica:

Teorema – Si cada una de les lletres a, b, c... designa un punt de Π

$$\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}$$
$$\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{cd} + \ldots + \vec{hk} = \vec{ak}$$
$$\vec{aa} = 0$$
$$-\vec{ab} = \vec{ba}$$
$$\vec{bc} = \vec{ac} - \vec{ab}$$

Aquest enunciat s'il·lustra amb aquesta figura:



$$\vec{ab}+\vec{bc}+\vec{cd}+\vec{de}+\vec{ef}=\vec{af}$$

Figura 2.22. Il·lustració de l'enunciat d'un teorema sobre la suma de vectors en un text de "matemàtica moderna"

Es pot percebre clarament com per a alumnes molt joves ja s'utilitza un llenguatge molt condensat i abstracte. El text és una progressiva construcció sobre axiomes, definicions i teoremes. Tot aquest edifici descansa sobre els fonaments que proporciona la teoria de conjunts.

Actualment, aquest plantejament pedagògic s'ha substituït per un retorn a unes matemàtiques elementals menys abstractes i més intuïtives, en què es dóna més importància a la visualització geomètrica. A l'ensenyament secundari, també s'ha prescindit de bona part de l'aparell formal associat a les estructures algebraiques, tot i que, sobretot al Batxillerat, encara hi ha una pretensió de rigor.

Persisteix, en tot cas, de manera encara majoritària, l'enfocament didàctic tradicional segons el qual primer es presenten els continguts perfectament formalitzats i després es va cap a les aplicacions més o menys contextualitzades.

2.5.3. A Espanya i a Catalunya

A Espanya, el sistema educatiu públic estava poc desenvolupat al principi del segle XX, a gran distància de països com França o Alemanya. Els estudiants de secundària eren una part minúscula de la població a la franja d'edats corresponent i la immensa majoria d'ells provenien de famílies ben situades econòmicament, des de la classe alta fins a la classe mitjana. Els intents de reforma i extensió de l'ensenyament empresos durant la dècada de 1930 van quedar estroncats per la Guerra Civil, després de la qual el sistema educatiu va tornar a plantejaments anteriors.

No obstant això, es van produir contribucions destacades per part d'algunes personalitats rellevants. En matemàtiques, és el cas de Pere Puig Adam (1900-1960) que va adaptar per al batxillerat les obres de Julio Rey Pastor (1888-1969; autor del famós discurs, llegit amb motiu de l'obertura del curs acadèmic 1913-1914, *Historia de la Matemática en España*, en el qual afirmava que Espanya no havia tingut mai una cultura matemàtica moderna. Aquest discurs va causar molta irritació entre certs sectors que van qüestionar el patriotisme de Rey Pastor). Aquest treball d'adaptació va produir textos tan importants com *Elementos de Aritmética intuitiva*, *Elementos de Geometría intuitiva*, *Lecciones de Aritmética y Geometría*, *Elementos de Geometría racional* i *Álgebra y Trigonometría*. Puig Adam, a més de ser autor de nombrosos treballs d'investigació en matemàtica superior i de textos per a l'ensenyament, es va preocupar per la didàctica. Fou catedràtic de matemàtiques del prestigiós institut San Isidro de Madrid, encarregat de la càtedra de Metodologia i Didàctica de la Facultat de Ciències i assessor per a l'ensenyament de les matemàtiques al professorat dels instituts laborals. El 1955 va dirigir una secció d'estudi dirigida a la millora de l'ensenyament al batxillerat. Va mantenir contactes amb els corrents didàctics de l'estranger i es va convertir en el principal defensor a Espanya del mètode heurístic. A l'etapa final de la seva vida, va publicar diverses obres sobre didàctica que tindrien gran influència: *Decálogo de la Didáctica de la Matemática Media* (1955), *Didáctica de la Matemática Heurística* (1956), *El material didáctico matemático actual* (1958) i *Las matemáticas y su enseñanza actual* (1960). A l'ensenyament superior, va ocupar la càtedra de càlcul a l'Escola d'Enginyers Industrials de Madrid i va elaborar textos molt utilitzats per professors i alumnes: *Curso de Geometría analítica*, *Curso teórico-práctico de Cálculo Integral* i *Curso teórico-práctico de Ecuaciones Diferenciales*.

A partir de la dècada de 1960, la xarxa educativa pública va anar creixent i va haver d'atendre una població escolar en ràpid augment a causa de l'alta natalitat. És en aquest període quan la matemàtica moderna fa sentir la seva influència, que també es percep en els currículums derivats de la reforma educativa de 1970, quan s'estableix l'etapa d'ensenyament obligatori entre 6 i 14 anys (Educació General Bàsica, EGB). Els ensenyaments postobligatoris es divideixen en Formació Professional (FP), preparatòria per al món laboral, i els estudis orientats cap a l'ensenyament superior: Batxillerat Unificat Polivalent (BUP) i Curs d'Orientació Universitària (COU).

Durant els anys de la dècada de 1970 i al principi de la dècada de 1980, es constitueixen nombrosos grups que treballen aspectes de l'educació matemàtica, així com diverses societats de professors: educadors matemàtics de Rosa Sensat de Barcelona, Grup Zero de Barcelona, Grupo Cero de València, Equipo Granada-Mats, Grupo Beta de Badajoz, Grupo Gauss de Salamanca, Grupo Azarquiel de Madrid, Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton, Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas Pedro Ciruelo, Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas Thales. El 1989 es crea la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. En aquestes condicions, augmenten els debats i els treballs sobre la didàctica de la matemàtica.

Sánchez (1997, reimpressió d'una ponència de 1983) explica que, sota la influència de la matemàtica moderna:

"A l'educació general bàsica, pràcticament es van suprimir les qüestions geomètriques, tant les referents a les propietats de les figures i les seves relacions de posició al pla i a l'espai com a les transformacions geomètriques i a la mesura d'àrees i volums."

Això per força havia de repercutir sobre la geometria de l'ensenyament secundari. Sánchez ho exemplifica:

"Els alumnes que arriben a tercer de BUP i COU desconeixen, en la seva immensa majoria, les propietats que relacionen els elements d'un triangle, quan se'ls exigeixen exercicis i demostracions algebraiques. A penes distingeixen una mediatriu d'una mitjana, ignoren la propietat fonamental dels punts de les bisectrius dels angles de dues rectes o de la mediatriu d'un segment, els manca la noció de lloc geomètric i desconeixen les fórmules de les àrees i volums de figures fonamentals. Quan aquest curs vam haver d'explicar a COU la interpretació geomètrica del producte mixt de tres vectors, la majoria dels nostres alumnes no sabien definir el que era un paral·lepípede i, encara menys, trobar el seu volum. A força d'haver estat educats en l'ús exclusiu de mètodes analítics, els nostres estudiants se senten incapaços de fer un croquis dels elements en qüestió i intenten a tota costa resoldre els problemes geomètrics d'una manera algebraica, negant, per errors de càlcul, la possibilitat de solucions quan són evidents gràficament, o a l'inrevés."

Peralta (1995) també proporciona exemples trets de la seva experiència docent:

"Com a conseqüència és suficientment contrastat el fet de la mala preparació en geometria dels alumnes de BUP. [...] *Hi ha nombroses experiències que confirmen aquest fet. Com a botó de mostra, direm que en proves de nivell realitzades per l'autor a alumnes de primer de BUP quan arribaven a diferents instituts de batxillerat, no era estrany trobar que molts d'ells no sabien diferenciar circumferència de cercle, no eren capaços de definir un paral·lelogram, o confonien mitjana d'un triangle amb altura, per citar tan sols algunes carències."*

A l'ensenyament primari, els intents de seguir la línia de la matemàtica moderna per a la geometria van quedar progressivament suavitzats i es va produir un cert retorn a mètodes més intuïtius i visuals. De tota manera, tal com assenyala Peralta (1995), a la pràctica els temes de geometria estaven gairebé sempre situats al final dels llibres de text i això afavoria que no s'estudiessin quan apareixien problemes de temps. Al batxillerat, considera que la geometria estava *"pràcticament relegada dels programes oficials"*. I també afegeix:

"Aquest ensenyament escàs de la geometria ha estat a més amb freqüència mal plantejat i s'ha limitat no poques vegades a un estudi memorístic de propietats i fórmules totalment descontextualitzades. La geometria és no obstant això procliu a despertar un gran interès en els alumnes, ja que permet que l'abordin amb un caràcter informal i lúdic, degut a la facilitat de manipular els objectes geomètrics i a la seva aparició en totes les situacions de la vida real. I a més de la possibilitat d'interrelació amb altres conceptes matemàtics, de la constant presència en el món físic, sembla que es deriven també eventuals connexions amb elements d'altres àrees."

2.6. Resum de referents teòrics i posicionament

En aquest capítol hem mostrat les aportacions teòriques de diferents autors: són la base sobre la qual es despleguem el nostre plantejament didàctic, el disseny de les activitats i la metodologia per a la implementació. Hem explicitat també, al llarg de l'exposició dels referents teòrics, quin és el nostre posicionament en cada un d'ells.
En general, tot el contingut teòric d'aquest capítol 2 funciona com a referència i com a inspiració. Ara bé, és evident que, com succeeix en qualsevol enfocament didàctic que prengui com a referència un conjunt d'autors, hi ha aspectes concrets, fragments i cites que prenen una rellevància especial. Es produeix doncs, una selecció de determinats autors i, en aquests, de determinades parts dels seus discursos teòrics, en el sentit que adquireixen un pes específic més destacat a l'hora de dissenyar i d'implementar. És clar que, per una banda, no poden ser fragments marginals dins del discurs d'un autor, sinó que han de ser centrals. I, per una altra banda, en aplicar-los a un determinat plantejament didàctic i a una investigació, cal conservar l'essència del sentit original del text citat, la qual cosa no impedeix que es produeixi, si és necessari, una adaptació del sentit general a les circumstàncies concretes del procés pràctic.
En aquest apartat mostrem quins són els elements teòrics, i de quins autors, que juguen un paper inspirador destacat en el disseny i la implementació del nostre plantejament didàctic, el qual esdevé operatiu a través d'una sèrie d'activitats d'aplicació contextualitzades en l'entorn del programari interactiu Geogebra, pensades per induir la matematització en els alumnes. La metodologia que utilitzem per anar des de la base teòrica fins al disseny operatiu de les activitats a l'aula és la matèria que desenvolupem en el capítol 3.

Però, centrem-nos ara en la nostra base teòrica. En primer lloc, considerem quina és la naturalesa de les diferents aportacions teòriques, i quins autors les realitzen, per elaborar un resum. Subratllem que es tracta d'un resum, és a dir, que en aquest tram final del present capítol mostrem d'una manera compacta i sintètica allò que hem exposat en extens al llarg dels apartats anteriors corresponents al les referències teòriques.

Filloy, en la seva obra *Didáctica e historia de la geometria euclidiana* (1998) ens dóna dos elements que situem al punt de partida del nostre posicionament: en primer lloc, la idea que una presentació formal i tradicional dels continguts matemàtics (en el nostre cas de la geometria analítica del primer curs de Batxillerat) no és la més adequada per a la immensa majoria dels estudiants; i en segon lloc, que el nostre enfocament didàctic, diferent del tradicional, ha d'estimular l'aprenentatge "sense coacció" (accionant els "ressorts de la motivació"). Nosaltres preferim referir-nos a aquest últim aspecte, que és fonamental, afirmant que hem d'induir en els alumnes una matematització no forçada. I ens plantegem fer-ho sobre la base que ens proporciona el segon gran bloc de referències teòriques que utilitzem: la contextualització. Bevem dels textos de Treffers (1986), Peralta (1995), Van Reeuwijk (1997), Gómez Urgellés (1998) i Chamoso i Rawson (2001) per justificar la importància de les activitats matemàtiques contextualitzades. Especialment de Van Reeuwijk

prenem la idea del plantejament didàctic "de baix a dalt", aquell que comença per les activitats contextualitzades i que després de desplegar-les, no abans, aborda la formalització dels continguts.
Hem esmentat que les activitats contextualitzades indueixen la matematització. És en el referent teòric present en els textos de Freudenthal (1968), Treffers (1986) i Van den Heuvel-Panhuizen (2000) (tots pertanyents a una mateixa línia teòrica) on hi trobem la base d'un aspecte que és absolutament central en el nostre plantejament: els alumnes matematitzen (horitzontalment i verticalment) mitjançant la realització d'activitats contextualitzades (en l'entorn TIC del programari Geogebra). La distinció entre la matematització horitzontal i la matematització vertical, així com l'anàlisi d'aquestes matematitzacions realitzades pels alumnes en les activitats contextualitzades, tenen una posició nuclear en el nostre treball, tal com hem comentat per extens a la part final del capítol 1.
Si abans afirmàvem que les activitats contextualitzades indueixen la matematització, un tercer bloc de referències teòriques, la modelització, ens porta a afirmar que quan els alumnes realitzen una activitat (contextualitzada) en la qual se'ls demana, explícitament o implícitament, que modelitzin una situació, llavors aquests alumnes matematitzen. La modelització inclou la matematització. La relació entre matematització i modelització apareix d'una forma nítida en un dels referents teòrics que utilitzem: English (1999). I apareix no tal sols en el sentit que modelitzar implica matematitzar, sinó fins i tot a l'inrevés, quan English afirma que "...si les matemàtiques s'han usat per representar una situació, llavors és que s'ha construït algun model matemàtic"; és a dir, si s'ha matematitzat, s'ha modelitzat. Aquesta és una raó fonamental per la qual hem pres com a referents teòrics una sèrie d'autors que han treballat la modelització. A més de les aportacions d'English (1999) a qui ja hem citat, ens basem en aportacions teòriques Niss, Lesh i Lee (ICME 5, 1984), Niss (1989), Gómez Urgellés (1998) i Biembengut i Hein (2004).
Hi afegim, encara, la connexió entre contextualització i modelització, a través de les paraules de Van Reeuwijk (1997): "En el procés de resolució, el problema en context es transformarà en un model." D'aquesta manera, i a través dels referents teòrics que hem utilitzat, completem l'encaix dels tres blocs fonamentals del marc teòric del nostre treball: contextualització, matematització i modelització. Dit d'una altra manera: existeix una justificació teòrica sòlida per al nostre plantejament didàctic, que s'inicia amb un enfocament "de baix a dalt", a partir d'activitats contextualitzades en les quals els alumnes despleguen la matematització per elaborar models matemàtics senzills. Contextualització, matematització i modelització constitueixen diferents facetes d'una única realitat didàctica a l'aula.
Un cop establerta la connexió entre els referents teòrics de la contextualització, la matematització i la modelització, trobem ens els textos dels autors de la modelització uns elements que encaixen perfectament en el nostre punt de partida teòric, segons els dos aspectes que extrèiem del text de Filloy (1998) al qual ens hem referit abans: en primer lloc, que la presentació tradicional i formal dels continguts no és la més adequada, i en segon lloc, que cal accionar els "ressorts" de la motivació. En els referents teòrics de la modelització trobem que quan els alumnes modelitzen (i per tant matematitzen), realitzen una activitat evidentment no convencional que "pot evitar un aprenentatge incorrecte basat només en fórmules i processos estereotipats"

(Niss, 1989) i que, a més "augmenta la motivació dels alumnes, que en matemàtiques és tradicionalment baixa en nombrosos casos individuals" (el mateix autor). És a dir, que podem aconseguir que els alumnes comprenguin millor el que fan i estiguin més motivats quan ho fan. La primera part d'això (la millora de la comprensió) queda molt ben il·lustrada per un fragment de text de Niss, Lesh i Lee (1984): "Les aplicacions i la modelització en matemàtiques ajuden a comprendre idees, conceptes, mètodes i teories, al mateix temps que proporcionen exemples i interpretacions." I també, per exemple, apareix nítidament en Biembengut i Hein (2004), quan expressen que el modelatge propicia "la millora de l'aprehensió dels conceptes matemàtics".

A més de considerar les aportacions teòriques referents a la contextualització, la matematització i la modelització, en aquest capítol hem pres també en consideració les aportacions de Peralta (1995) que fan referència a la classificació dels mètodes d'ensenyament de les matemàtiques. Hem de tenir en compte que en primer lloc hem explicitat en quines coordenades teòriques se situa el nucli del nostre treball (les activitats contextualitzades que indueixen la matematització) a partir d'aquests tres eixos esmentats, contextualització, matematització i modelització, els quals hem vist que en el nostre plantejament són facetes d'una única realitat didàctica. Però, a més, hem volgut caracteritzar també el nostre treball en termes comparatius, és a dir, com es posiciona dins del panorama dels diferents mètodes d'ensenyament de les matemàtiques. Per a aquesta finalitat, la classificació de Peralta ens ha estat útil.
Tal com ja hem explicat (per extens; ara ho resumim) en aquest mateix capítol, el nucli del nostre plantejament didàctic (recordem-ho: les activitats contextualitzades que indueixen la matematització) se situa com a mètode psicològic, actiu, heurístic i inductiu (classificació de Peralta, 1995). Per tant, se situa a les antípodes de la metodologia tradicional. Ara bé, hem fet referència també en aquest mateix capítol al fet que no ens quedem només en l'estadi de la matematització induïda en els alumnes per les activitats contextualitzades, sinó que hem de completar aquest primer moviment amb una posterior formalització dels continguts. Una formalització que ja no és induïda a partir d'unes determinades activitats, sinó forçada (és a dir, subministrada directament pel professor a l'aula). Aquesta segona part de la seqüència didàctica se situa dins de la classificació de Peralta com a mètode tradicional, expositiu, dogmàtic i deductiu.
En resum, la seqüència didàctica que implementem a l'aula parteix d'una primera fase (la matematització induïda mitjançant activitats contextualitzades) que és fonamental per al nostre plantejament i continua amb una segona fase de caire tradicional. Però el conjunt de tota la seqüència no és tradicional, ja que la fase final de formalització es construeix a partir del treball de matematització que fan els alumnes a la primera fase. Si ens preguntessin si el conjunt del nostre plantejament és tradicional o innovador, hauríem de respondre que globalment és innovador però que conserva elements tradicionals que considerem necessaris par aconseguir que els alumnes puguin complir els objectius marcats per la programació didàctica corresponent a la geometria analítica del primer curs de Batxillerat.
En el nostre plantejament, no acceptem la dicotomia entre constructivisme (procés de descobriment personal de l'alumne) i empirisme (coneixements subministrats pel professor), és a dir, considerem que no existeix cap obligació o necessitat d'alinear-se

amb una o altra posició. De fet, proposem una conciliació de les dues posicions, mitjançant una seqüència didàctica amb una primera fase que podria considerar-se, separadament, afí al constructivisme i una segona fase que, separadament, es podria considerar empirista. Però afirmem que tals consideracions per separat no són estrictament necessàries i que en el conjunt del nostre plantejament proposem una síntesi (la nostra síntesi) entre constructivisme i empirisme. Il·lustrant-ho amb una terminologia extreta de la filosofia (la dialèctica hegeliana), afirmem que amb el nostre treball volem fondre la tesi i l'antítesi en una síntesi.

En la taula que apareix a continuació il·lustrem breument quins són els principals elements del marc teòric, als quals ens hem referit al llarg d'aquest capítol (i subratllat en el resum que ha ocupat les línies anteriors), que funcionen com a referents del nostre plantejament, i quins autors hi intervenen.

Referents teòrics	**Autors**
Punt de partida epistemològic	Filloy (1998)
Contextualització	Treffers (1986) Peralta (1995) Van Reeuwijk (1997) Gómez Urgellés (1998) Chamoso i Rawson (2001)
Matematització	Freudenthal (1968) Treffers (1986) Van den Heuvel-Panhuizen (2000)
Modelització	ICME 5: Niss, Lesh i Lee (1984) Niss (1989) Gómez Urgellés (1998) English (1999) Biembengut i Hein (2004)
Mètodes d'ensenyament	Peralta (1995)

Taula 2.2. Referents teòrics per al disseny de la fase experimental

Més en concret, presentem, seguint l'ordre alfabètic dels autors, quines cites rellevants hem seleccionat, a manera de resum, com a referència i guia a l'hora de dissenyar i d'implementar les activitats de matematització.

Autors (ordre alfabètic)	**Selecció de cites especialment rellevants per al disseny i la metodologia**
Biembengut i Hein (2004)	*L'aplicació del modelatge propicia, per a l'alumne:* – *La integració de les matemàtiques amb altres àrees del coneixement.* – *L'interès de les matemàtiques per la seva aplicabilitat.* – *La millora de l'aprehensió dels conceptes matemàtics.* – *La capacitat per llegir, interpretar, formular i resoldre situacions-problema.* – *Estimular la creativitat en la formulació i resolució de problemes.* – *L'habilitat en l'ús de la tecnologia (calculadora gràfica i ordinadors).*
Chamoso i Rawson (2001)	*La resolució de situacions contextualitzades es pot abordar com una investigació en què la situació de partida és objecte de reflexió i tractament matemàtic.*
English (1999)	*Per fer possible que els alumnes apliquin les matemàtiques* [...] *necessiten adonar-se que si les matemàtiques s'han usat per representar una situació, llavors és que s'ha construït algun model matemàtic.*
Filloy (1998)	*"...és possible que per a algun estudiant una presentació formal, lògicament estructurada i altament eficient, en el sentit que ràpidament arriba a certs resultats, sigui no tan sols la presentació adequada, sinó també la necessària; però, francament, un estudiant així serà una «rara avis»..."* *"...sabem que els primers ressorts que hem d'accionar en l'aprenentatge de les Matemàtiques, són els de la motivació, fet que, per una part implica que el material presentat tingui la virtut de recórrer a tot allò que «estimuli» l'aprenentatge, sense cap coacció (com la d'estar, en ares del rigor, ficats a la camisa de força que comporta una presentació lògica totalment nítida)."*
Freudenthal (1968) citat per Van den Heuvel-Panhuizen (2000)	*El focus no s'ha de col·locar en les matemàtiques com a sistema, sinó en l'activitat, en el procés de matematització.*
ICME 5 Niss, Lesh i Lee (1984)	*Les aplicacions i la modelització en matemàtiques ajuden a comprendre idees, conceptes, mètodes i teories, al mateix temps que proporcionen exemples i interpretacions.*
Niss (1989)	*Quan un segment de la realitat és objecte d'algun tipus de tractament matemàtic, això implica necessàriament un model matemàtic. En poques paraules, alguns objectes, relacions entre objectes i estructures que pertanyen a la matèria considerada es tradueixen a objectes matemàtics, relacions i estructures, les quals es diu que representen la realitat original.* *Incloure la modelització en el currículum:* – *Augmenta la motivació dels alumnes, que en matemàtiques és tradicionalment baixa en nombrosos casos individuals* – *Esdevé un nou element formatiu i en aquest sentit augmenta la cultura matemàtica dels estudiants.* – *Pot evitar un aprenentatge incorrecte basat només en fórmules i processos estereotipats. Acostuma al treball amb problemes reals i potencia l'autonomia de l'estudiant.*

Aquesta taula continua a la pàgina següent

Niss (1989) (continuació)	– *Proporciona una visió més integrada i global de les matemàtiques ja que es necessiten conceptes i eines de diferents àrees d'entre les considerades clàssiques a les matemàtiques: àlgebra, anàlisi, geometria i probabilitat i estadística.* – *És una bona porta d'entrada a les noves tecnologies, especialment a la informàtica.*
Niss i Blum (1989) citats per Gómez Urgellés (1998)	*Una de les alternatives per incloure eficaçment la modelització en el currículum és integrar: els conceptes es desenvolupen a partir de les aplicacions i la modelització. L'enfocament és no tradicional.*
Peralta (1995)	*Idees en relació amb la metodologia i la didàctica de les matemàtiques dirigides cap a la contextualització de l'aprenentatge de la geometria a l'ensenyament secundari:* – *La geometria ha de plantejar-se de tal manera que serveixi per descobrir propietats i treballar amb figures del món real.* – *No sembla adequada la pretensió de presentar una axiomàtica de la geometria com la dels* Elements *d'Euclides o com la d'*Els fonaments de la geometria *de Hilbert. Tampoc no és recomanable traspassar la geometria a l'àlgebra, via espais vectorials.* – *Els alumnes han de tenir la sensació que la geometria, com tota la matemàtica, serveix per resoldre problemes no evidents. Les classes de geometria han de tenir fons i substància; mai no han de ser una nova exposició, en forma difícil, del que l'alumne ja veu de manera fàcil.* – *S'ha de fomentar l'ús de la intuïció tot i sabent que té certs perills. El que cal fer és educar-la i cultivar-la perquè serveixi per descobrir. Posteriorment s'hauran de fer les demostracions corresponents. Aquesta recomanació és vàlida per a tot l'ensenyament de la matemàtica i s'expressa en la frase "És la intuïció la que descobreix i la lògica la que demostra".* – *La geometria està vinculada a altres branques de la matemàtica. Encara que s'estudiï per separat, no s'han d'oblidar aquests vincles.* *Punts de la classificació dels mètodes d'ensenyament de la matemàtica que corresponen a un mètode no tradicional:* – *Respecte al grau d'intervenció de l'alumne. Actiu: l'alumne construeix l'aprenentatge a través de la seva pròpia activitat participativa i el professor l'orienta en aquest procés.* – *Respecte a la manera d'adquirir els coneixements. Heurístic: l'alumne s'enfronta a situacions problemàtiques que intenta resoldre amb l'ajuda del professor, i així va construint els coneixements.* – *Respecte al mètode d'estructura. Inductiu: es parteix de l'experiència dels casos particulars per arribar a generalitzacions. Per aconseguir rigor, necessita el complement del mètode deductiu, encarregat de provar les hipòtesis a les quals s'ha arribar per inducció.*
Treffers (1986) citat per Gómez Urgellés (1998)	*Punts bàsics per donar una orientació realista i contextualitzada de les matemàtiques:* – *Recrear, reinventar conceptes matemàtics en base a nocions intuïtives.* – *Continuar el procés a través de diversos nivells de concreció i abstracció.* – *Situar en contextos reals.*

Aquesta taula continua a la pàgina següent

Treffers (1978-1987) citat per Van den Heuvel-Panhuizen (2000)	*Es distingeixen dos tipus de matematització en el context educatiu:* – *La matematització horitzontal, en la qual es estudiants utilitzen eines matemàtiques que els ajuden a organitzar i resoldre un problema en el context d'una situació realista. Implica anar des de les situacions en contextos realistes o versemblants fins al món dels símbols.* – *La matematització vertical, en la qual els estudiants descobreixen connexions entre conceptes i estratègies i apliquen aquests descobriments. Implica moure's en el món dels símbols, amb abstracció i generalització.*
Van den Heuvel-Panhuizen (2000)	*Principis que reflecteixen les característiques de la Realistic Mathematics Education (RME):* – *Principi d'activitat: els estudiants, en comptes de ser simples receptors d'una matemàtica que ja se'ls dóna feta i acabada, són participants actius en el procés educatiu.* – *Principi de realitat: els estudiants han de ser capaços d'usar les matemàtiques per resoldre problemes que tinguin relació amb la realitat que viuen.* – *Principi de nivell: els estudiants passen per diferents nivells de comprensió, des de l'habilitat per trobar solucions informals en contextos concrets, cap a la sistematització i la generalització, i fins a les relacions abstractes.* – *Principi d'interconnexió: els estudiants han de poder usar eines i estratègies adquirides en el treball d'una unitat didàctica en altres unitats didàctiques, és a dir, que el currículum no està fet a base de capítols estancs.* – *Principi d'interacció: els estudiants han de tenir l'oportunitat de compartir entre ells idees i estratègies. Amb aquesta interacció, poden assolir nivells més alts de comprensió.* – *Principi de guiatge: els professors han de proporcionar un ambient en el qual puguin emergir els processos de construcció de l'aprenentatge.*
Van Reeuwijk (1997)	*Un bon context pot actuar com a mitjancer entre el problema concret i les matemàtiques abstractes. En el procés de resolució, el problema en context es transformarà en un model.*

Taula 2.3. Selecció de cites dels referents teòrics

Per altra banda, de la part del marc teòric que fa referència a la història de la geometria analítica podem extreure una sèrie de conclusions rellevants.
El recorregut que hem realitzat per la història de la geometria analítica i la seva didàctica ens mostra clarament que l'algebrització de la geometria és un procés tardà. Quan s'introdueix l'àlgebra per abordar i resoldre problemes geomètrics, començant pels primers intents dels matemàtics medievals i continuant per Descartes, sempre hi ha present el problema considerat des d'un punt de vista clàssic; l'àlgebra és un element nou i potent, però no desplaça la necessitat de la visualització geomètrica dels problemes i la seva comprensió també en termes purament geomètrics.
No és fins pràcticament el segle XIX que les solucions algebraiques passen a tenir un paper central, i la geometria es veu progressivament allunyada d'aquesta centralitat. Recordem la cita que ja ha aparegut abans de François Lacroix (1797):

"En descartar deliberadament totes les construccions geomètriques, he volgut que el

lector s'adoni que existeix una manera de considerar la geometria, que es podria anomenar la geometria analítica..."

L'ús generalitzat dels vectors no s'introdueix fins a finals del segle XIX i és sobretot perquè la genial formalització teòrica de l'electromagnetisme que Maxwell va realitzar necessitava un nou llenguatge. Per tant, succeeix gràcies a la modelització matemàtica d'un fenomen físic.

Pel que fa a la didàctica, recordem també la cita de Sánchez en una ponència de 1983:

"A l'educació general bàsica, pràcticament es van suprimir les qüestions geomètriques..."

És a dir, que ja des de l'educació elemental la geometria passava a un segon pla. La visualització, la representació gràfica, i la manipulació d'elements geomètrics se sacrificaven a l'altar de l'anomenada "matemàtica moderna".
La història havia passat per unes etapes que amb l'algebrització i la formalització quedaven esborrades: primer, els problemes concrets considerats des d'un punt de vista geomètric; després, la incorporació de l'àlgebra, però sense perdre de vista la geometria; finalment, l'abstracció purament algebraica.
La didàctica desembocava en una pràctica a l'aula que seguia un camí més o menys invers al camí històric: primer, la presentació formal de la teoria en termes algebraics, amb la incorporació d'algunes representacions gràfiques com a elements il·lustratius o auxiliars de les definicions i les fórmules; i al final, les aplicacions de la teoria a la resolució de situacions concretes.

Considerem, no obstant aquesta evolució de la didàctica, que és possible i didàcticament productiu aplicar un plantejament a l'aula, per desplegar els continguts curriculars, que comenci pel treball sobre situacions concretes, amb la representació geomètrica i la visualització com a elements centrals, que continuï amb la incorporació de l'àlgebra al procés de resolució, encara en el terreny de les situacions concretes, i que només al final s'elevi cap a la generalització i l'abstracció.

Considerem que allò que l'evolució històrica de la geometria analítica i de la seva didàctica havia descontextualitzat (i substituït per una presentació molt formalitzada dels continguts) s'ha de recontextualitzar. La perspectiva històrica reforça extraordinàriament la necessitat de treballar les situacions contextualitzades a l'aula i matematitzar a partir d'elles, una necessitat que, com hem mostrat, ja defensen determinats autors sense acudir a arguments històrics. Nosaltres hi afegim aquests arguments històrics.
Insistim en l'afirmació que hem realitzat en aquest capítol, segons la qual l'ús del programari Geogebra permet als alumnes la representació, visualització i "manipulació" interactiva dels elements geomètrics d'una situació a partir de la qual matematitzen. També hem afirmat, i ho subratllem, que l'entorn de treball de Geogebra proporciona per si mateix una contextualització, perquè la possibilitat de visualitzar i manipular és una manera de proporcionar sentit per als estudiants. A més,

Geogebra no tan sols permet que una situació o problema entri per la vista i sigui manipulable, sinó que disposa d'eines algebraiques i per tant és també una porta d'entrada a la representació del problema en llenguatge algebraic.

3. Metodologia i disseny

Dediquem aquest capítol al disseny operatiu que permet traslladar el nostre plantejament des del seu estadi inicial teòric fins a la implementació a l'aula, dins de la realitat d'un institut d'educació secundària públic de Catalunya.
Descrivim i comentem quin tipus de dades enregistrem durant el procés d'implementació, i amb quins mitjans ho fem. Mostrem com reestructurem els continguts de la programació didàctica per adaptar-los al nostre plantejament didàctic, i com planifiquem la seqüència operativa de la implementació.
Presentem el disseny final de les activitats contextualitzades en l'entorn del programari interactiu Geogebra, les quals són essencials en el nostre treball. En aquest disseny és especialment important la previsió de com els alumnes ens han de proporcionar la informació que sotmetem a anàlisi, tant de la matematització que realitzen com de les seves valoracions subjectives sobre les activitats.
Després d'haver presentat en el capítol anterior els fonaments teòrics i en aquest la planificació operativa i el disseny de les activitats, i abans d'entrar en l'anàlisi concreta dels resultats que correspon als capítols següents, dediquem un apartat, al final d'aquest capítol, a retrobar una perspectiva general del nostre treball.

3.1. Marc general per a la implementació

3.1.1. Centre educatiu, alumnat i programació didàctica

Hem dut a terme la fase d'implementació del nostre plantejament didàctic en un institut d'educació secundària (IES) de Catalunya, en un grup de primer de Batxillerat del qual érem responsables en la docència de la matèria de matemàtiques (dins de la modalitat del Batxillerat científic i tecnològic) durant el curs acadèmic 2007-2008.
En el curs acadèmic en què es va dur a terme la fase d'implementació, l'IES tenia dues línies de Batxillerat. D'aquí en sortia un grup que estudiava matèries de modalitat científica i tecnològica, entre les quals hi havia les matemàtiques. Aquest grup resultava més o menys nombrós en funció de la major o menor preferència per la modalitat, que podia variar d'un curs a un altre. Concretament, al principi del curs 2007-2008 es van matricular al Batxillerat científic i tecnològic 23 alumnes. A les poques setmanes d'haver iniciat les classes, 4 van causar baixa per abandonament voluntari. Per tant, ens restava un grup de 19 alumnes per al moment de l'inici de la fase d'implementació.

La programació didàctica (responsabilitat del departament de matemàtiques de l'IES) estava estructurada en els següents grans blocs de continguts: aritmètica i àlgebra, trigonometria, anàlisi, geometria analítica al pla. És sobre l'últim bloc que hem desplegat les activitats per a la implementació.
Hem projectat les actuacions de la fase d'implementació per integrar-les dins del currículum, atenent les exigències d'objectius, de continguts i de temps. Dit d'una altra manera: no han suposat cap interferència en el ritme previst de desplegament de la programació didàctica; en tot cas han constituït unes estratègies didàctiques dins del tercer nivell de concreció acadèmic (la unitat didàctica) coherents amb la programació i amb el projecte curricular del centre.
La unitat de geometria analítica al pla s'ha desenvolupat al final del tercer trimestre del curs 2007-2008, tal com preveia la programació didàctica, en un temps que ha abastat aproximadament cinc setmanes, és a dir, unes quinze hores de classe.

A l'hora de fer referència als coneixements previs a la fase d'implementació, cal esmentar que l'alumnat ja havia treballat, a l'Educació Secundària Obligatòria (a nivell introductori i molt elemental), amb sistemes de coordenades al pla; sabia què és un vector, què és el producte d'un vector per un escalar i la suma de vectors. Naturalment, també coneixia les nocions de paral·lelisme i perpendicularitat.
Com que vam dur a terme la fase d'implementació al final del curs acadèmic (la unitat didàctica de geometria analítica va ser l'última), els alumnes havien treballat prèviament unitats d'aritmètica, àlgebra, trigonometria, funcions, límits i derivades. Destaquem que és indiscutible que havien tingut l'oportunitat de familiaritzar-se amb la relació entre el llenguatge algebraic i les representacions visuals, concretament en el cas de l'estudi de funcions. Aquest comentari és rellevant, ja que les activitats implementades a la unitat de geometria analítica segueixen l'enfocament "de baix a dalt" que hem presentat en capítols anteriors i, per tant, parteixen de la resolució de situacions contextualitzades en un entorn visual i manipulatiu i des d'aquí aborden l'escriptura algebraica de les solucions concretes, i la generalització.
Prèviament a la fase d'implementació de les activitats, l'alumnat havia realitzat una sessió introductòria de l'ús del programari interactiu Geogebra (el qual és una eina fonamental per procés d'implementació) sobre exemples de la trigonometria, les funcions i els vectors. Les activitats amb Geogebra van tenir lloc en una aula TIC del centre educatiu.
També cal destacar que abans de començar la primera activitat de resolució de situacions contextualitzades, vam realitzar una sessió dedicada a recordar els continguts elementals i introductoris sobre punts i vectors, ja vistos al quart curs de l'Educació Secundària Obligatòria: punt; coordenades; vector amb origen a un punt i extrem a un altre; components d'un vector; mòdul d'un vector i angle que forma amb l'eix d'abscisses; producte d'un escalar per un vector; suma de vectors. Amb aquest bagatge elemental, els alumnes van iniciar la unitat didàctica de geometria analítica.

3.1.2. Recursos: espais, equipaments i organització

Com que un dels aspectes fonamentals del nostre plantejament didàctic és l'ús de les TIC, resulta necessari comentar quins espais i recursos tecnològics han estat disponibles al centre educatiu, adients per a la fase d'implementació, i com han estat organitzats.

En el període de la implementació, l'IES disposava de dues aules anomenades habitualment "aules d'informàtica" o també "aules TIC". Totes dues podien acollir en bones condicions un grup de vint alumnes, i una d'elles fins i tot permetia treballar amb un grup de vint-i-cinc, cada alumne amb un ordinador. Eren aules prou noves, tant per les instal·lacions com pels equips. L'edifici de l'IES es va inaugurar poc menys de cinc anys abans de la fase d'implementació. Disposava d'una xarxa elèctrica correctament dimensionada i una xarxa interna de comunicacions que funcionava bé.

Als equips informàtics que van arribar com a dotació inicial s'hi havien afegit adquisicions progressives que havien permès, en gairebé cinc anys, disposar de dues aules suficients per treballar no tan sols amb grups desdoblats de l'Educació Secundària Obligatòria (ESO), sinó també amb grups que estaven a la ràtio màxima del que abans eren els crèdits variables de l'ESO i ara s'anomenen matèries optatives. També permetien que hi treballessin bé els grups de modalitat del Batxillerat, com era al cas del nostre grup de matemàtiques de primer curs.

Tots els ordinadors estaven connectats a la xarxa interna de comunicació i tenien accés a Internet, tot això amb les mesures de control habituals per evitar alteracions en la configuració, descàrregues inadequades, etc. Convé destacar que l'IES disposava d'un espai virtual intern de comunicació, que els professorat i l'alumnat del centre anomenaven "intranet", encara que és més correcte dir-ne "intraweb", ja que es tractava d'un espai web allotjat en un servidor extern al centre, amb accés restringit per al professorat i l'alumnat mitjançant usuari i contrasenya. Els visitants que no pertanyien a aquests col·lectius no podien entrar a l'entorn de treball virtual.

Per tant, amb alumnat i professorat que disposava d'usuari i contrasenya individual, era possible transmetre instruccions, donar respostes, enviar fitxers i, en general, fer circular tota mena d'informació útil per a l'ensenyament i l'aprenentatge. No calia que els resultats d'una activitat es desessin a discos durs o a llapis de memòria, sinó que es podien allotjar en una carpeta de la intraweb. Això és especialment útil quan es treballa, com és el cas de la nostra fase d'implementació, amb activitats que tenen com a resultat no tan sols respostes escrites, sinó també fitxers generats per programari educatiu. Naturalment, com a docents teníem accés a les carpetes de continguts que podíem gestionar des de qualsevol ordinador connectat a Internet.

Considerem rellevant explicar que la gestió dels espais i els equipaments també es realitzava des de la intraweb. Així, per exemple, per reservar una de les aules TIC, un docent ho havia de fer a través d'una aplicació de la intraweb (el sistema de reserves valia per a tots els espais i equips d'ús comú, des d'una aula fins a un carro amb televisor i DVD). De fet, les aules TIC tenien una prou alta disponibilitat per als docents que volien fer una reserva i preveien de realitzar-la amb temps suficient, tenint en compte que s'havien d'excloure aquelles hores que eren prioritàries perquè pertanyien a alguna part del currículum en la qual era preceptiu el treball amb ordinadors (per exemple, la informàtica de l'ESO o del Batxillerat, o el dibuix tècnic del Batxillerat).

3.2. Enregistrament i tipus de dades

En aquest apartat presentem un breu panorama de quin tipus de dades són les que enregistrem durant el procés d'implementació, a l'aula, del nostre plantejament didàctic, en el benentès que entrem amb més detall en el tractament i la interpretació de les dades al llarg dels capítols 4 i 5. Ara es tracta d'avançar una breu, però prou completa, visió de quin tipus d'informació és objecte d'anàlisi en el nostre treball.
Com en qualsevol investigació, és de la màxima importància no tan sols quin és el seu objectiu, sinó també de quina manera es recull la informació que ha de ser sotmesa a l'anàlisi, i de quina naturalesa són les dades que formen el conjunt d'aquesta informació.

La fase d'implementació genera un gran volum d'informació, la qual queda enregistrada en:

1. Respostes escrites dels alumnes (de cada un d'ells) en cada una de les activitats de matematització amb el programari Geogebra.
Aquestes respostes escrites (a mà sobre paper) recullen informació de dos aspectes clau en el nostre treball. Per una part, informació sobre el procés de matematització dels alumnes en la realització de les activitats. Per una altra part, informació referent a les valoracions subjectives dels alumnes sobre la realització de les activitats amb Geogebra. Les dades sobre les valoracions subjectives en cada una de les activitats les obtenim mitjançant respostes tancades, en multiopció (escollir una de vàries opcions de valoració). Les dades sobre el procés de matematització les obtenim combinant les respostes tancades en multiopció amb les respostes de tipus obert, però hem d'aclarir que quan permetem una resposta oberta en realitat demanem un fragment breu d'informació: unes coordenades, un càlcul, una fórmula, una equació. Sobre aquestes dades de matematització i de valoració subjectiva realitzem una traducció a valors numèrics i apliquem una anàlisi de tipus quantitatiu que té una importància central en el nostre treball (sense desmerèixer la importància de les altres dades que utilitzem, i de la seva anàlisi). Al capítol 5 desenvolupem els detalls de la conversió numèrica i tabulació de les dades, i de la metodologia d'anàlisi.

2. Un fitxer de Geogebra per a cada alumne i cada activitat.
En cada fitxer podem observar no tan sols si l'alumne ha resolt satisfactòriament la situació que li hem plantejat, sinó que també podem seguir quins han estat els passos que ha realitzat, ja que aquesta és una utilitat que ens ofereix el programari interactiu Geogebra. És imprescindible acudir a la informació dels fitxers de Geogebra per comprovar si les respostes escrites dels alumnes sobre de procés de matematització corresponen a la realitat del que han fet. Demanar una resposta escrita a un alumne és una manera d'indicar-li el que ha de fer, però quedar-se només amb aquesta resposta

sobre el paper sense comprovar si correspon al que ha realitzat amb Geogebra és arriscar-se a perdre l'objectivitat en l'anàlisi de la matematització. És a dir, que el professor no es pot refiar solament del que els alumnes diuen o creuen que han fet, sinó que ha de comprovar que realment ho han fet. Cal tenir en compte que l'anàlisi de la matematització s'ha de basar en informació totalment objectiva, mentre que en l'anàlisi de les valoracions subjectives dels alumnes sí que només importa el que ells declaren.

3. Respostes totalment obertes del alumnes explicatives sobre quines estratègies de resolució ha utilitzat per a les activitats 1, 2, 3 i 4 amb Geogebra.
Durant el procés d'implementació, hem pres la decisió de demanar per escrit a tots els alumnes que expliquin quines estratègies han utilitzat per resoldre les activitats 1, 2, 3 i 4, i per què. Ho hem fet després d'haver observat una notable varietat d'estratègies en l'activitat 1, i uns progressiva convergència d'estratègies fins a l'activitat 4. Aquest és un aspecte interessant per a l'anàlisi de la matematització, que hem cregut necessari de complementar amb informació escrita que hem demanat als alumnes. Cal aclarir que, com expliquem més endavant en aquest mateix capítol, les quatre primers activitats amb Geogebra formen un bloc de continguts dins del conjunt de la unitat didàctica de la geometria analítica (el bloc de continguts que desemboca en l'equació vectorial de la recta).

4. Un qüestionari final de valoració subjectiva del conjunt d'activitats amb Geogebra.
Passem aquest qüestionari després d'haver completat totes les sessions de desplegament de la programació didàctica de la geometria analítica. Les respostes d'aquest qüestionari són tancades en multiopció, com les respostes de valoració en cada activitat amb Geogebra, però es dirigeixen a recollir informació quan els alumnes ja poden tenir una visió global de tot el procés, mentre que en les respostes de cada activitat no poden encara tenir aquesta visió general. També demanen, a part de les respostes tancades, una valoració final global totalment oberta, que recollim literalment tal com la redacta cada alumne.

5. Un complet registre escrit del professor sobre la seqüència de continguts i de fets ocorreguts durant cada sessió de la fase d'implementació.
El registre també inclou les observacions i comentaris del professor sobre el desenvolupament de cada sessió, així com anotacions realitzades després d'haver revisat les respostes escrites i els fitxers dels alumnes durant les activitats amb Geogebra. Es tracta d'un registre escrit que cobreix el dia a dia de tota la implementació, és a dir, no tan sols de les sessions dedicades a les activitats amb Geogebra a l'aula TIC, sinó també les sessions realitzades a l'aula ordinària.

6. Una prova escrita convencional.
Al final de la unitat didàctica de geometria analítica, els alumnes realitzen una prova escrita convencional, és a dir, una prova del mateix estil que haurien realitzat si haguessin treballat la unitat didàctica sota una metodologia didàctica exclusivament tradicional. Aquesta prova proporciona una molt interessant informació per comparar amb la informació obtinguda durant el procés de matematització dels alumnes en les

activitats amb Geogebra. En particular, permet la comparació entre els processos de resolució que els alumnes segueixen en situacions semblants que han abordat anteriorment en les activitats amb Geogebra, però que en la prova escrita adquireixen un aspecte convencional i que demanen una resolució per escrit també convencional. Tal com exposem amb detall al capítol 5, analitzem amb abundància de detalls aquesta comparació per a quatre caos concrets: un estudi de casos sobre quatre alumnes representatius del grup en el sentit que han estat triats a partir de l'anàlisi i la categorització dels resultats de la matematització en les activitats amb Geogebra.

Mostrem en els propers capítols els detalls de la combinació de metodologia d'anàlisi quantitativa amb altra d'anàlisi qualitativa que utilitzem en el nostre treball. En els apartats següents del present capítol despleguem els aspectes relacionats amb la planificació operativa de la seqüència didàctica a l'aula i el disseny concret de les activitats amb Geogebra.

3.3. Disseny de les activitats

3.3.1. Enfocament "de baix a dalt"

Tal com hem mostrat als capítols 1 i 2, en una metodologia tradicional de les classes, primerament els alumnes aprenen matemàtiques abstractes i formals i només després apliquen els coneixements teòrics per a la resolució de problemes presentats en contextos: és l'enfocament "de dalt a baix". En canvi, la metodologia didàctica que nosaltres utilitzem per al disseny i la implementació parteix d'un enfocament "de baix a dalt": a partir d'activitats concretes, de situacions que l'alumne ha d'abordar i resoldre en l'entorn del programari interactiu Geogebra, introduïm els coneixements teòrics i la formalització. Per tant, les activitats proporcionen als alumnes un entorn d'aprenentatge dissenyat perquè en primer lloc es produeixi la matematització horitzontal, a partir de la qual, després, es passa a la matematització vertical i finalment a la formalització teòrica. En altres paraules: el disseny i la implementació converteixen en un conjunt operatiu allò que hem plantejat a partir de la nostra presa de posició sobre els referents del marc teòric i a partir dels arguments que hem derivat de la història de la geometria analítica (capítol 2).
Esperar que els alumnes, a partir d'unes determinades activitats i d'un determinat enfocament, siguin capaços d'arribar tots sols als coneixements teòrics presentats amb el grau de formalització amb què apareixen als llibres de text i, a més, en el temps assignat dins de la programació didàctica, representaria tenir unes expectatives desmesurades. Però sí que és possible i raonable plantejar-se que amb un enfocament "de baix a dalt", contextualitzat, i a partir també de les estratègies de resolució que poden utilitzar els alumnes (matematització horitzontal), es produeixi d'una manera força natural un trànsit cap a la generalització i la formalització teòrica. Amb l'orientació del professor, és clar. "Natural" significa, en aquest cas, que no partim d'uns coneixements teòrics que semblen sorgir del no-res, com per art de màgia, ja

perfectes i elaborats, sinó que és a partir de les activitats en situacions contextualitzades que arribem fins a ells.

3.3.2. Reestructuració de la unitat didàctica

Des del nostre punt de vista, a la geometria analítica plana de primer de Batxillerat hi ha dos grups de continguts sobre els quals podem elaborar un enfocament contextualitzat "de baix a dalt", és a dir, crear un àmbit d'activitats (amb eines tecnològiques de programari educatiu) on l'alumnat pugui desplegar la matematització horitzontal. Són dues claus que obren dues portes a través de les quals podem abordar la formalització dels coneixements. Per veure quines són, primer cal repassar quina és l'estructura dels continguts que estableix la programació del departament didàctic. La llista que ve a continuació està extreta de la programació didàctica per a la matèria de matemàtiques de primer de Batxillerat científic i tecnològic a l'IES on s'ha dut a terme la fase d'implementació, en la part que correspon a la geometria analítica:

Vectors i punts.

Operacions amb vectors.
- Suma i resta.
- Producte per un nombre.
- Combinació lineal i dependència.
- Producte escalar de vectors.

Angle entre dos vectors.

Perpendicularitat.

Equacions de la recta.
- Vectorial.
- Paramètriques.
- Contínua.
- Implícita.
- Explícita.

Posicions relatives de punts i rectes.

Distància.
- De punt a punt.
- De punt a recta.
- De recta a recta.

En comptes d'aquesta llista de caire tradicional, el nostre plantejament per a la fase experimental estableix les dues agrupacions de continguts següents:

1. Activitats que, gradualment, porten fins a l'equació vectorial de la recta. En primer lloc, es planteja una situació en què cal trobar el punt mitjà entre dos punts que són els extrems d'un segment. Després, les coordenades dels dos punts que marquen la divisió del segment en tres parts iguals, en quatre parts, etc. Aquí hi ha implicats els conceptes de suma de vectors, producte d'un vector per un escalar (i per tant de paràmetre), punts alineats i dependència lineal.
2. Activitats que, també gradualment, porten a la projecció d'un vector sobre un altre i per tant al producte escalar. D'aquí, a l'angle entre dos vectors. També aquí és on més fàcilment podem utilitzar una contextualització situada en altres continguts del currículum de Batxillerat, concretament de la física: el treball fet per una força que provoca un desplaçament s'obté mitjançant el càlcul d'un producte escalar. Només la component "útil" de la força aplicada és la que fa treball, és a dir, aquella que es projecta sobre el vector desplaçament.

Amb les eines que sorgeixen dels dos punts anteriors podem construir la major part de l'estructura formal de la unitat didàctica. D'aquesta manera, ens és possible reorganitzar la llista de continguts que apareix a la programació didàctica convencional en un nou esquema mitjançant el qual mostrem com, a partir de les activitats, es despleguen tots aquests continguts:

Bloc I d'activitats: les equacions de la recta

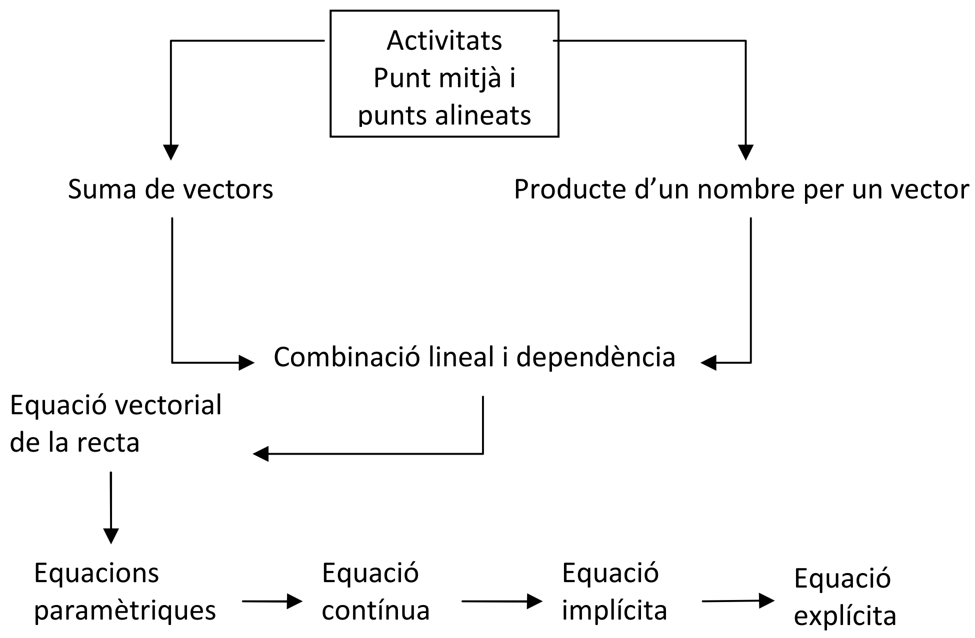


Figura 3.1. Esquema del bloc I d'activitats

Bloc II d'activitats: el producte escalar

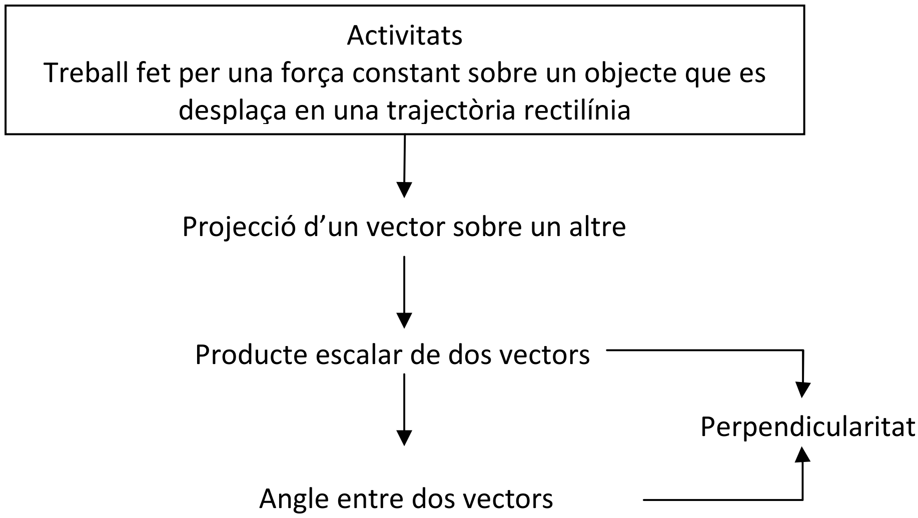


Figura 3.2. Esquema del bloc II d'activitats

Queda una última part (de la programació didàctica) a la qual encara no hem fet esment, perquè no forma part dels blocs I i II d'activitats. Es tracta de les posicions relatives entre punts i rectes i de les distàncies de punt a punt, de punt a recta i de recta a recta. De fet, les posicions relatives en el pla són molt intuïtives. L'alumnat pot comprendre ràpidament què significa que un punt pertanyi o no a una recta, i passar d'aquí a una traducció algebraica (les coordenades del punt compleixen o no l'equació) resulta senzill. També pot comprendre ràpidament com poden estar situades dues rectes al pla. Passar a considerar això com un sistema d'equacions no té dificultat, perquè l'alumnat ja ho ha fet a l'ESO. Per altra banda, calcular la distància entre dos punts no és difícil, ni conceptualment ni tècnicament. El que resulta tècnicament més complex és com arribar a la fórmula de càlcul de la distància d'un punt a una recta en el pla. En aquest cas concret, hem optat per una presentació tradicional d'aquest contingut a la part final de la unitat didàctica.

3.3.3. Activitats amb Geogebra

Ja hem assenyalat que en el nostre plantejament didàctic contextualitzat i enfocat "de baix a dalt" són primordials les activitats de matematització en l'entorn del programari interactiu Geogebra. De fet, constitueixen un conjunt nuclear per al procés d'implementació, i les dades que proporcionen tenen una importància fonamental per al procés d'anàlisi i d'interpretació que duem a terme.
Les característiques generals més importants de les activitats amb Geogebra són, en resum, les següents:

1. Plantegem una situació, en un determinat context. Per exemple, trobar uns quants punts alineats amb dos punts donats. Els punts representen la posició d'objectes físics. Amb això, creem un àmbit de treball per al desenvolupament de la matematització horitzontal. L'estructura i la seqüència de les preguntes que han de respondre els alumnes estan dissenyades per induir els processos de matematització.
2. Enregistrem què ha fet l'alumne per resoldre el que li hem plantejat (mitjançant el fitxer de Geogebra corresponent i mitjançant les explicacions per escrit que se li han demanat). Això ens permet l'anàlisi del procés de matematització. Per exemple, enregistrem si en el procés l'alumne construeix el vector que té per origen i extrem els dos punts donats inicialment, si formula hipòtesis, si generalitza, etc. El registre de dades ens permet conèixer si l'alumne ha entrar també en processos de matematització vertical.
3. A partir del treball de matematització realitzat a les activitats amb Geogebra, iniciem el procés de formalització dels continguts. El guiatge del professor permet formalitzar d'acord amb el que estableix el currículum i la programació didàctica. De fet, hi pot haver alumnes que ja hagin començat, amb més o menys intensitat, aquest trànsit mitjançant l'assoliment de la matematització vertical a les activitats amb Geogebra. En tot cas, és el guiatge del professor el que clarifica, unifica i situa el grup en situació de complir els objectius de la programació didàctica dins de la temporització prevista.

Pel que fa a la presentació de les activitats a l'aula davant dels alumnes, hem decidit prèviament que cada activitat ha d'ocupar com a màxim dues pàgines: un full imprès per les dues cares, en el qual els alumnes no tan sols hi llegeixen els plantejaments de les situacions que cal resoldre i les preguntes corresponents, sinó que també hi escriuen, en els espais especialment dissenyats per a les respostes.
Pel que fa al contingut imprès en cada un d'aquests fulls, hi ha un breu text introductori que situa l'alumnat, però que evita l'abundància de detalls o de pistes, perquè no pretenem conduir, sinó induir, la matematització.
Les preguntes (amb els espais corresponents per a les respostes) es divideixen en dos blocs a totes les activitats (excepte a la 7 i la 8, on només n'hi ha un):

1. El primer bloc planteja preguntes sobre el procés de resolució. El format de la resposta és de dues menes. Per una banda, hi ha les respostes del tipus multiopció, que a la majoria d'activitats es redueixen a dues (sí/no),tot i que a les activitats 5 i 6 hi ha preguntes que ofereixen més de dues opcions de resposta. Per una altra banda, hi ha les preguntes que demanen una resposta en forma de coordenades, càlcul, fórmula o equació. La intenció de la sèrie de preguntes d'aquest bloc no és tan sols que l'alumnat hagi de respondre determinades qüestions sobre els continguts o els procediments, sinó també que el disseny constitueixi una seqüència que serveixi d'incentiu i de guia pel procés de resolució, des de la més immediata matematització horitzontal en què l'alumne ha de resoldre una situació concreta, fins a la matematització vertical, en què ha de generalitzar. Dit d'una altra manera, la seqüència de vol orientar l'alumne sense donar instruccions explícites: a través de les preguntes,

ha de ser l'alumne qui trobi elements que li permetin traçar el seu propi camí per resoldre i per reflexionar sobre el que fa.

2. El segon bloc planteja preguntes amb l'objectiu que l'alumne respongui sobre la seva percepció personal de com ha contribuït l'ús de Geogebra a la resolució de l'activitat i a la matematització. En aquest bloc, per a totes les activitats, s'ofereixen quatre opcions de resposta: gens, poc, bastant, molt. El fet que siguin quatre respostes possibles no és casual. Hem evitat que hi hagi un nombre imparell d'opcions perquè en aquest cas hi apareixeria una opció central. És comuna la tendència a buscar per comoditat la posició central (a l'hora de respondre) si no hi ha gaire ganes de pensar una valoració. Una sèrie de quatre opcions com "gens, poc, bastant, molt" obliga l'alumne a posicionar-se en una banda baixa (gens, poc; és dir, nul·la o escassa influència) o en una banda alta (bastant, molt; és a dir, una apreciable o gran influència).

Finalment, quan s'ha acabat el procés d'implementació de la seqüència d'activitats, els alumnes han hagut de respondre un qüestionari amb 15 preguntes sobre l'entorn didàctic i l'ús del programari interactiu Geogebra, amb les quatre opcions "gens, poc, bastant, molt" per a cada pregunta, i han hagut d'escriure una valoració personal lliure (resposta oberta).

Amb la intenció que la lectura d'aquest apartat no resulti excessivament feixuga, no incloem aquí tot el conjunt dels enunciats i les preguntes de les activitats amb Geogebra. La sèrie completa sí que apareix a l'annex 1 del nostre treball. Considerem que aquí és suficient mostrar una de les activitats com a exemple i, en tot cas, indicar que les altres estan disponibles, en un annex, per a la consulta. Per altra banda, al capítol 4, dedicat a un primer nivell d'anàlisi del dia a dia de la implementació de les activitats a l'aula, presentem resums il·lustratius de la situació que planteja cada activitat (amb la finalitat de facilitar la lectura i evitar que el lector necessàriament hagi de girar fulls per consultar l'annex 1 si vol assabentar-se de la situació que planteja cada activitat).
L'activitat que hem triat per mostrar aquí és la número 1, no per cap motiu especial: qualsevol altra, fins a la número 6, inclosa, podria complir la mateixa funció d'exemple que permet distingir els blocs de preguntes sobre el procés de resolució i el bloc de preguntes sobre l'ús de Geogebra.

Activitat 1: *a mig camí*

La situació

En un camp pla, utilitzem un sistema d'eixos cartesians, el qual fa possible la localització exacta de cada element d'aquest camp. L'origen de coordenades el situem en una masia, i orientem els eixos de manera que coincideixin amb els punts cardinals. Naturalment, podem representar la masia per un punt perquè les distàncies que considerarem són força més grans que les dimensions de la casa. Comptarem les distàncies en centenars de metres.

Un arbre, *A*, està en la posició (2,3), és a dir, a 200 m est i 300 m nord. Un altre arbre *B* està en la posició (5,-1), és a dir, 500 m est i 100 m sud.
Volem plantar un altre arbre, *M*, exactament a mig camí del segment que uneix *A* i *B*.

Amb Geogebra

Quina serà la posició d'aquest nou arbre? El que se't demana és: la posició de *M* respecte la masia.

La informació inicial amb què comptes és: posicions de *A* i *B*.

Les eines de treball que tens són: els vectors i les operacions que saps fer amb ells.

El fitxer resultant s'ha de guardar de la següent manera: si, per exemple, et dius Anna Pujol, el nom que li donaràs és annap1 (el nom, la inicial del cognom i el número d'activitat).

Per escrit

Sobre la resolució de la situació plantejada		
a	Has trobat el punt *M*? Si l'has trobat, les seves coordenades són: (preferiblement, escriu les coordenades en forma de nombres racionals)	☐ Sí ☐ No Coordenades: (,)
b	Has utilitzat el botó "Punt mitjà o centre" del programa?	☐ Sí ☐ No
c	Has sumat vectors?	☐ Sí ☐ No
d	Has multiplicat escalars per vectors?	☐ Sí ☐ No
e	Has construït un paral·lelogram?	☐ Sí ☐ No
f	Contesta només si has trobat el punt *M*: és possible escriure un càlcul amb les coordenades dels punts *A* i *B* que tingui com a resultat les coordenades del punt *M*? Si has respost que sí, escriu el càlcul.	☐ Sí ☐ No Càlcul:
g	Si et donen dues posicions, *A* i *B*, pots escriure una fórmula general que mostri com calcular el punt mitjà *M*? Si has respost que sí, escriu la fórmula.	☐ Sí ☐ No Fórmula:

Aquesta taula continua a la pàgina següent

h	Contesta només si has escrit la fórmula: has mogut el punt *A* o *B* per comprovar que el teu sistema per calcular el punt mitjà serveix també per a altres posicions de *A* i *B*?	☐ Sí ☐ No

Sobre l'ús de Geogebra		
i	Usar Geogebra t'ha ajudat per representar i veure clar el plantejament de l'activitat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
j	Usar Geogebra t'ha ajudat per trobar les coordenades dels punts?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
k	Usar Geogebra t'ha ajudat per poder entendre el que vas fent i avançar en el procés de resoldre?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
l	Usar Geogebra t'ha ajudat per resoldre no tan sols el problema concret sinó per trobar fórmules generals?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
m	Comparat amb el tipus de treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt

Taula 3.1. Activitat 1

També hem considerat oportú mostrar aquí el qüestionari que han de respondre els alumnes al final del procés d'implementació, per l'especial rellevància que té com a valoració subjectiva global de tota la seqüència d'activitats. La taula de respostes de multiopció va seguida de la demanda d'una valoració final (i global) de resposta oberta.

Qüestionari final Llegeix les afirmacions i marca fins a quin punt hi estàs d'acord: gens, poc, bastant o molt.		
a	Realitzar activitats amb Geogebra ha fet les classes més amenes?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
b	Realitzar activitats amb Geogebra ha fet les classes més interessants?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
c	Realitzar activitats amb Geogebra t'ha fet sentir que tenies més participació i iniciativa en el procés d'aprenentatge?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt

Aquesta taula continua a la pàgina següent

d	Començar primer per activitats concretes amb Geogebra i aprofitar-ho per fer després la teoria t'ha ajudat a comprendre millor els continguts matemàtics?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
e	Començar primer per activitats concretes amb Geogebra i aprofitar-ho per fer després la teoria ha facilitat la teva implicació i la teva motivació?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
f	Comparades amb les classes de prendre apunts, les activitats amb Geogebra t'han fet pensar més sobre el que estaves fent?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
g	Les activitats amb Geogebra t'han semblat difícils?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
h	Has trobat un salt important de dificultat entre les classes amb Geogebra i les classes en què havies de prendre apunts i fer exercicis a la llibreta?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
i	Les activitats amb Geogebra sobre col·locar punts en una línia t'han ajudat a entendre millor la teoria de les equacions de la recta?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
j	Les activitats amb Geogebra sobre estirar i arrossegar un objecte t'han ajudat a entendre millor la teoria del producte escalar?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
k	Les activitats amb Geogebra t'han ajudat a entendre millor la teoria sobre vectors que són perpendiculars?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
l	Usar Geogebra t'ha ajudat a representar i plantejar les activitats dels fulls que repartia el professor?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
m	Usar Geogebra t'ha ajudat per poder entendre el que vas fent i avançar en el procés de resoldre les activitats fetes a l'aula d'informàtica?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
n	Les activitats amb Geogebra t'han ajudat a passar del casos concrets cap a les fórmules generals?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
o	En general, comparat amb el tipus de treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt

Taula 3.2. Qüestionari final

Valoració personal escrita
A continuació tens espai per escriure els comentaris que vulguis sobre el que penses del treball que hem fet al tema de geometria analítica. Pots escriure sobre el que t'ha

agradat i el que no, el que has trobat útil i el que creus que no t'ha servit, el que t'ha semblat fàcil o has trobat difícil, etc.

3.4. Desplegament dels objectius per al disseny i la implementació

En aquest apartat mostrem les actuacions que hem realitzat per desplegar operativament cada un dels objectius enunciats al capítol 1, així com els recursos associats a cada actuació (recursos materials, organitzatius i humans), i també la seva temporització.
Per tant, presentem les accions fonamentals i la seqüència d'actuació mitjançant les quals el nostre plantejament entra en la fase de disseny d'activitats contextualitzades, amb un enfocament "de baix a dalt" en un entorn TIC, i finalment s'executa. Reservem per a l'apartat següent d'aquest capítol els detalls de la planificació executiva, que determina en quins moments i amb quina seqüència es porten a la pràctica les actuacions a l'aula amb alumnes, en condicions estrictament reals dins del marc que estableix la programació didàctica per a la unitat de geometria analítica del primer curs de Batxillerat.
Ara, en aquest apartat, il·lustrem (i concretem) els comentaris sobre el desplegament pràctic dels objectius amb una sèrie de taules en les quals apareixen, de forma compacta i per a cada objectiu o subobjectiu, uns breus descriptors de cada una de les actuacions realitzades, acompanyats dels recursos que han estat necessaris per realitzar aquestes actuacions, i també acompanyats de la indicació del període de temps en què s'han dut a terme.

3.4.1. Objectiu 1

Recordem els enunciats de l'objectiu 1 i de la conseqüència que se'n desprèn, així com dels dos subobjectius associats, que hem exposat abans, per primera vegada, al final del capítol 1.

Objectiu 1: *Dissenyar i implementar activitats d'ensenyament i aprenentatge de la geometria analítica de primer de Batxillerat amb un enfocament "de baix a dalt".*

Conseqüència 1.1: *Integrar la implementació de les activitats dins del currículum i la programació didàctica de matemàtiques de primer de Batxillerat.*

Subobjectiu 1.1: *Crear un entorn d'aprenentatge en el qual l'alumnat desenvolupa les matematitzacions horitzontal i vertical.*

Subobjectiu 1.2: *Usar les TIC com a recurs fonamental de l'entorn d'aprenentatge perquè l'alumnat matematitzi.*

A l'hora d'emprendre els primers passos que ens han de conduir al disseny de les activitats per als alumnes, tenim presents dos grans àmbits de referència. El primer i més obvi és la programació didàctica per a la geometria analítica del primer curs de Batxillerat en el centre educatiu on es realitza la implementació de les activitats. Els continguts que s'aborden a partir de les activitats, amb un enfocament "de baix a dalt", i la seva temporització, respecten el marc que constitueix la programació didàctica. S'hi integren. Subratllem que això significa que la implementació del nostre plantejament no comporta actuacions que puguin ser considerades com una aportació extra a un desenvolupament convencional de la unitat didàctica, o com un aparell superposat, sinó que es tracta d'una manera no convencional de desenvolupar una programació, amb una estructura interna planificada i consistent. Naturalment, informem el departament didàctic de matemàtiques de l'IES del fet que implementarem durant el tram final del curs 2007-2008 un plantejament didàctic que té unes característiques bàsiques: l'ús d'activitats contextualitzades en l'entorn TIC del programari Geogebra i un enfocament "de baix a dalt" a l'hora d'introduir els continguts i formalitzar-los. I també abans de la fase d'implementació informem el professor de física de primer de Batxillerat que una de les activitats contextualitzades (concretament és la número 5) usa un exemple físic a partir del qual els alumnes han de matematitzar i arribar a un model matemàtic senzill de la situació.
El segon àmbit de referència que hem de tenir en compte és la fonamentació teòrica del nostre plantejament, que hem exposat al capítol 2. Les activitats que dissenyem estan referenciades en el que hem anomenat enfocament "de baix a dalt", en la contextualització (sobre situacions realistes o versemblants i en l'entorn visual i interactiu de Geogebra), i en el desenvolupament de les matematitzacions horitzontal i vertical, les quals condueixen a la construcció de models matemàtics simples (per exemple, l'equació vectorial de la recta en el bloc de les activitats 1-4).
A partit d'aquests àmbits de referència que hem esmentat, elaborem una primera versió de les activitats i comencem a planificar la seqüència d'implementació. El procés de seqüenciació ha d'adaptar-se a les possibilitats organitzatives reals del centre educatiu on es duu a terme la implementació: disponibilitat d'espais, de recursos TIC i d'hores d'ús d'aquests recursos. Un cop encaixades aquestes peces estem en disposició d'implementar les activitats que, a partir de la primera versió, arriben al seu disseny definitiu.
Un aspecte que no podem descuidar és que els alumnes han d'iniciar les activitats en la fase d'implementació havent tingut abans l'oportunitat d'usar el programari interactiu Geogebra i de començar a familiaritzar-s'hi. Si no fos així, la realització de les primeres activitats de la seqüència podria quedar dificultada per la inexperiència dels alumnes en l'ús del programari, i els resultats es veurien afectats per un factor de caire instrumental. Els alumnes no han usat mai abans Geogebra, ni a l'Educació Secundària Obligatòria ni en les unitats didàctiques del primer curs de Batxillerat anteriors a la unitat de geometria analítica. Per això, abans de començar la unitat de geometria analítica realitzem una sessió introductòria de l'ús de Geogebra, om presentem les característiques i eines bàsiques del programa, amb el suport d'exemples senzills de continguts que els alumnes coneixen (del primer curs de Batxillerat o de l'etapa anterior de l'ESO): trigonometria, funcions i vectors.

La taula que mostrem a continuació conté de forma resumida els descriptors de les actuacions (associades a l'objectiu 1) que hem exposat en els paràgrafs anteriors, així com els recursos associats i la temporització.

<table>
<tr><th>Actuacions</th><th>Recursos
Organitzatius (RO)
Materials (RM)
Humans (RH)</th><th>Temporització</th></tr>
<tr><td>Informar els departaments didàctics de matemàtiques i ciències de l'IES sobre les característiques bàsiques de la nostra investigació, terminis i recursos previstos per de la fase d'implementació</td><td>RM
- Caps dels departaments didàctics de matemàtiques i ciències
- Professor de física de primer de Batxillerat (una de les activitats, la núm. 5, està contextualitzada amb un exemple de la física)
- Docent/investigador</td><td>novembre 2007</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Elaborar l'estructura de l'encaix dels continguts segons la programació didàctica del departament de l'IES.</td><td>RO
- Programació didàctica del departament
- Programació de la unitat didàctica del professor</td><td rowspan="3">novembre - desembre 2007</td></tr>
<tr><td>RM
- Llibre de text de Batxillerat</td></tr>
<tr><td>RH
- Docent/investigador</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Assegurar la disponibilitat dels recursos TIC per al període d'implementació.</td><td>RO
- Taula d'ocupació de les dues aules TIC
- Calendari del curs
- Horari del grup-classe</td><td rowspan="3">novembre - desembre 2007</td></tr>
<tr><td>RM
- Programari Geogebra (d'obtenció gratuïta)</td></tr>
<tr><td>RH
- Coordinador TIC de l'IES
- Cap d'estudis
- Docent/investigador</td></tr>
<tr><td>Elaborar una primera versió de les activitats d'ensenyament i aprenentatge coherent amb els fonaments teòrics del plantejament didàctic.</td><td>RH
- Docent/investigador</td><td>desembre 2007 - febrer 2008</td></tr>
</table>

Aquesta taula continua a la pàgina següent

<table>
<tr><td rowspan="2">Planificar una primera versió del procés d’implementació que indueixi la matematització.</td><td>RO
- Programació didàctica
- Calendari del curs
- Horari del grup-classe
- Reserva d’una aula TIC</td><td rowspan="2">desembre 2007 - febrer 2008</td></tr>
<tr><td>RH
- Coordinador TIC de l’IES
- Docent/investigador</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Realitzar una sessió introductòria sobre característiques i ús de Geogebra a l’aula TIC amb el grup-classe, amb exemples de continguts vistos a la programació i a cursos anteriors (d’ESO): trigonometria, funcions i vectors.</td><td>RM
- Programa Geogebra
- Aula TIC</td><td rowspan="2">març 2008</td></tr>
<tr><td>RH
- Grup-classe
- Docent/investigador</td></tr>
<tr><td>Revisar i donar el disseny definitiu a les activitats.</td><td>RH
- Docent/investigador</td><td rowspan="3">març - abril 2008</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Revisar i planificar definitivament la seqüència d’aplicació de les activitats a l’aula.</td><td>RO
- Calendari del curs
- Horari del grup-classe
- Reserva (ja feta) d’una aula TIC</td></tr>
<tr><td>RH
- Docent/investigador</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Implementar les activitats, en un entorn TIC.</td><td>RO
- Planificació anterior</td><td rowspan="3">abril (últims dies del mes) - maig - juny (primers dies del mes) 2008</td></tr>
<tr><td>RM
- Aula TIC/intraweb
- Activitats dissenyades
- Programa Geogebra</td></tr>
<tr><td>RH
- Grup-classe
- Docent/investigador</td></tr>
</table>

Taula 3.3. Desplegament de l’objectiu 1

3.4.2. Objectius 2 i 3

Recordem els enunciats dels objectius 2 i 3:

Objectiu 2: *Analitzar, en la seqüència d’implementació de les activitats dissenyades, el desenvolupament de la matematització (horitzontal i vertical) per part dels alumnes.*

Objectiu 3: *Analitzar, en la seqüència d’implementació de les activitats dissenyades, les valoracions subjectives dels alumnes sobre l’entorn d’aprenentatge.*

Els presentem junts en aquest apartat perquè tots dos es despleguen sobre el material enregistrat i recopilat durant el procés d'implementació. Tant l'anàlisi de la matematització com l'anàlisi de les valoracions subjectives dels alumnes es realitzen, en un primer nivell, a partir dels registres i les observacions fets en el mateix moment de la implementació, amb la frescor que representa el dia a dia, activitat per activitat. Proporcionen una visió propera del procés: els fets observats a l'aula, els comentaris sobre aquests fets observats, l'examen immediat de les respostes que els alumnes lliuren per escrit i dels fitxers de Geogebra que també lliuren, i els comentaris sobre els mètodes de resolució i les estratègies que han seguit. Però, després d'aquesta visió tan propera al desenvolupament diari dels esdeveniments, emprenem una anàlisi més distanciada, posterior al procés d'implementació. A diferència de l'anàlisi que hem anomenat de "primer nivell", aquesta, que anomenem de "segon nivell", considera conjunts de dades, sobre la matematització i sobre les valoracions subjectives, que s'estenen al llarg de tota la seqüència d'activitats. Utilitzem una metodologia pròpia que ens permet tabular quantitativament els resultats de la matematització i les respostes sobre la valoració subjectiva de l'és de Geogebra i, a partir d'aquí, amb una sèrie de càlculs senzills, entrar en l'anàlisi de comportaments individuals i grupals. En tot cas, això anterior és un molt breu avanç, adient per comentar els desplegament operatiu dels objectius 2 i 3. Expliquem amb detall al capítol 5 com tabulem els resultats i les respostes, i també mostrem els càlculs que ens permeten caracteritzar comportaments. Des d'aquí, passem a una sèrie d'interpretacions que exposem i argumentem dins del mateix capítol 5.
Mentre que l'anàlisi de primer nivell es realitza durant el període d'implementació del nostre plantejament didàctic a l'aula, l'anàlisi de segon nivell, per la seva extensió i complexitat, demana més temps. De fet, si comptem també les interpretacions que derivem de l'anàlisi dels resultats, les quals ens condueixen a unes conclusions, el treball sobre el segon nivell es prolonga durant els nou mesos posteriors a la implementació, compaginat amb l'elaboració d'altres parts del conjunt que forma el nostre treball.
Volem posar novament èmfasi en un aspecte que ja hem esmentat al final del capítol 1. No repetirem les consideracions que hi fem, perquè ja hi són escrites, però sí que subratllarem que l'anàlisi de la matematització (objectiu 2) és una part absolutament central del nostre treball, mitjançant la qual posem a prova la validesa de la nostra hipòtesi de partida, és a dir, que "un enfocament de matematització de baix a dalt permet dissenyar i implementar activitats d'ensenyament i aprenentatge de la geometria analítica de primer de Batxillerat" (i afegim el fet fonamental que les activitats estan contextualititzades en l'entorn TIC del programari interactiu Geogebra).

La taula que mostrem a continuació conté de forma resumida els descriptors de les actuacions (associades als objectius 2 i 3) que hem exposat en els paràgrafs anteriors, així com els recursos associats i la temporització.

Actuacions	**Recursos** Organitzatius (RO) Materials (RM) Humans (RH)	Temporització
Seguir el procés d'implementació a l'aula i realitzar un primer nivell d'anàlisi.	RO - Diari del docent/ investigador - Grup-classe RH - Docent/investigador	abril (últims dies del mes) - maig - juny (primers dies del mes) 2008
Realitzar un segon nivell d'anàlisi del material obtingut en el procés d'implementació a l'aula, i elaborar interpretacions i conclusions.	RM - Respostes escrites de les activitats - Fitxers Geogebra de les activitats RH - Grup-classe - Docent/investigador	juliol 2008 - juny 2009

Taula 3.4. Desplegament dels objectius 2 i 3

3.4.3. Planificació operativa de les sessions a l'aula

Després d'haver presentat les actuacions que corresponen a cada objectiu, amb la temporització associada, arriba el torn de mostrar quina ha estat la seqüència concreta de les sessions del procés d'implementació. És a dir, com se succeeixen en el temps les hores de treball amb l'alumnat a l'aula.

Convé recordar que la fase d'implementació s'ha dut a terme durant el tram final de les activitats lectives del curs: els últims dies del mes d'abril, el mes de maig i el principi del mes de juny. Això ens ha ocupat 5 setmanes, amb 3 sessions d'una hora de durada per cada setmana, és a dir, un total de 15 sessions durant les quals hem treballat la geometria analítica amb un plantejament innovador però complint els objectius de la programació didàctica.

Per planificar la seqüència de les activitats hem utilitzat uns criteris de progressivitat:

1. Les activitats 1, 2, 3 i 4 despleguen el primer bloc de continguts: combinació lineal de vectors i equacions de la recta.
2. L'activitat 5 és la porta d'entrada al segon bloc de continguts: el producte escalar.
3. L'activitat 6 reprèn el fil de les activitats 1-4 per incorporar-hi la perpendicularitat.
4. Les activitats 7 i 8 són de síntesi: plantegen situacions on s'han d'utilitzar i consolidar les habilitats i les coneixements que han aparegut al primer i el segon bloc.

La seqüència de les sessions combina les activitats amb Geogebra a l'aula TIC amb activitats convencionals "de pissarra. Destaquem dos aspectes:

1. Les activitats a l'aula TIC amb Geogebra són el motor del plantejament didàctic, perquè des d'elles s'aborden els continguts de la programació, en un enfocament "de baix a dalt": a partir del treball sobre situacions concretes (les activitats) induïm la matematització. A l'hora de concretar disseny de cada activitat, procurem que l'alumnat disposi de prou temps per poder matematitzar, encara que no podem saber del cert si serà així fins al moment de la implementació a l'aula.
2. Les sessions "de pissarra" són imprescindibles per ordenar, integrar, completar i sistematitzar els coneixements i les habilitats que han aparegut durant les activitats a l'aula TIC. Tenim molt present que cal complir una programació en un temps raonable. És necessari arribar a uns estàndards, però no ho fem mitjançant un plantejament didàctic tradicional, sinó amb un enfocament "de baix a dalt", amb situacions contextualitzades, modelització i aprenentatge per fases.

A continuació d'aquest paràgraf, mostrem la taula que hem dissenyat i utilitzat per a la planificació operativa de la seqüència d'activitats, és a dir, la que a la pràctica els ha servit per saber què tocava fer a cada sessió. En aquesta taula, per a cada hora a l'aula amb alumnes, concretem quins continguts estan previstos, tant si són activitats amb Geogebra com si tenen un caire més convencional. Cada activitat amb Geogebra té un títol que apareix en lletra cursiva. L'última columna fa referència a quina mena de material hem enregistrat. Utilitzem aquest material per a l'avaluació de l'alumnat (de la mateixa manera que en una classe tradicional el docent anota com han actuat els alumnes a l'hora de treballar els exercicis i els problemes) i per a l'anàlisi que comporta la investigació.

Sessió	**Continguts i metodologia**	**Lloc**	**Material enregistrat**
1	Sessió introductòria amb el suport de Geogebra sobre punts i vectors (per refrescar continguts treballats a 4t d'ESO): – punt – vector posició – origen i extrem – components – mòdul – angle amb l'eix *OX* – suma de vectors – producte d'un escalar per un vector	Aula TIC	Diari del professor

Aquesta taula continua a la pàgina següent

2	Activitat 1: *a mig camí*	Aula TIC	Fitxers Geogebra Respostes escrites Diari del professor
3	Activitat 2: *en fila* Activitat 3: *també en fila*	Aula TIC	Fitxers Geogebra Respostes escrites Diari del professor
4	Activitat 4: *allargant la fila*	Aula TIC	Fitxers Geogebra Respostes escrites Diari del professor
5	Classe convencional "de pissarra" en què el professor integra els continguts i procediments i els desplega: – combinació lineal de vectors – vector director – les equacions de la recta (vectorial, paramètriques, contínua, implícita i explícita)	Aula	Diari del professor
6	Activitat 5: e*l treball d'arrossegar un objecte pesant*	Aula TIC	Fitxers Geogebra Respostes escrites Diari del professor
7	Classe convencional "de pissarra" en què el professor integra els continguts i procediments i els desplega: – producte escalar de dos vectors – angle entre dos vectors – producte escalar i perpendicularitat	Aula	Diari del professor
8	Classe convencional "de pissarra" d'activitats i problemes del llibre de text: equacions de la recta i producte escalar	Aula	Respostes escrites Diari del professor
9	Activitat 6: *en perpendicular*	Aula TIC	Fitxers Geogebra Respostes escrites Diari del professor
10	Activitat 7: *quadrat*	Aula TIC	Fitxers Geogebra Respostes escrites Diari del professor
11	Activitat 8: *a la mateixa distància de tres punts*	Aula TIC	Fitxers Geogebra Respostes escrites Diari del professor
12	Classe convencional en què el professor presenta: – Posicions relatives de punts i rectes – Distàncies: punt a punt, punt a recta i recta a recta	Aula	Diari del professor

Aquesta taula continua a la pàgina següent

13	Classe convencional d'activitats i problemes del llibre de text: posicions relatives i distàncies	Aula	Respostes escrites Diari del professor
14	Sessió per resoldre dubtes i repassar abans de la prova escrita	Aula	Diari del professor
15	Prova escrita	Aula	Respostes escrites

Taula 3.5. Seqüència de sessions didàctiques

3.5. Avaluació de l'alumnat

3.5.1. Avaluació dins de la programació didàctica

Ja hem explicitat que la implementació de les activitats s'ha d'integrar dins del currículum i de la programació del departament didàctic. Per tant, el procés d'avaluació de l'alumnat ha de ser coherent amb allò que conté la programació sobre aquest assumpte. I, en aquest sentit, la programació didàctica expressa que hi ha bàsicament dos aspectes que determinen la qualificació: el treball i l'actitud de l'alumne en les activitats d'ensenyament i aprenentatge, que demana un seguiment i enregistrament continuat, i les proves escrites, que són elements puntuals d'avaluació.
Pel que fa al seguiment del treball i l'actitud de cada alumne, el mecanisme no difereix del procés convencional. Efectivament, en un plantejament didàctic tradicional, es fan observacions de l'aula i es prenen registres sobre l'actitud, la realització de la feina estipulada, les respostes a les activitats plantejades, etc. En el nostre cas, el que varia respecte d'un plantejament convencional és que les activitats, la seva seqüència i ell seu plantejament global (enfocament "de baix a dalt") són diferents, però, com en el procés convencional, els alumnes realitzen treball a classe i mostren determinades actituds que són avaluables. Resulten, per tant, perfectament vàlids els recursos ja coneguts: anotacions diverses sobre el desenvolupament de les sessions, quadern del professor, anotacions sobre el material lliurat pels alumnes, etc.
Pel que fa a les proves escrites, la programació del departament de matemàtiques de l'IES especifica que n'hi ha d'haver dues per trimestre (més una prova escrita de recuperació global a final de curs). Just abans de començar la geometria analítica, l'alumnat ja va realitzar la prova escrita que corresponia a la primera part del tercer trimestre. La segona prova del tercer trimestre (i l'última de la sèrie de proves escrites ordinàries del curs) va ser, doncs, la de la unitat de geometria analítica.

Després d'haver comentat aquests aspectes anteriors, i per mostrar de manera clara i compacta què s'avalua i amb quins recursos, hem elaborat la taula següent:

Què s'avalua	Amb quins recursos
Seguiment continuat del treball i l'actitud	Quadern de notes del professor Anotacions del registre diari del professor Fitxers Geogebra de les activitats Respostes escrites de les activitats
Mesura puntual del grau d'assoliment dels objectius de la programació didàctica	Prova escrita

Taula 3.6. Avaluació

3.5.2. Preguntes referents al procés de matematització

Ja hem comentat en apartats anteriors que les activitats amb el programari interactiu Geogebra contenen preguntes que incideixen sobre el procés de matematització. Els alumnes les han de respondre. Les respostes formen una part molt important del conjunt de dades que utilitzem per a l'avaluació del procés, l'anàlisi i les interpretacions que puguin sorgir.

El primer que cal assenyalar és que no totes les preguntes (i les respostes) tenen el mateix nivell de rellevància per a una anàlisi.

Hi ha preguntes que estan pensades sobretot per guiar l'alumne, per donar-li pistes i orientacions (no instruccions concretes) o simplement per fer-lo reflexionar. Es a dir, que sota l'aspecte de preguntes en realitat funcionen com a elements d'orientació i com a generadors de reflexió. Són preguntes com, per exemple:

Has sumat vectors?

Has mogut el punt A o B per comprovar que el teu sistema per calcular els punts [...] *serveix també per a altres posicions de A i B?*

Per altra banda, les respostes que tenen més pes per al tractament de les dades i les posteriors anàlisis són aquelles que corresponen a preguntes dissenyades amb l'objectiu d'obtenir informació sobre la matematització, ja sigui l'horitzontal o la vertical. Dins d'aquest grup de preguntes, distingim tres tipus:

1. Preguntes dissenyades per recollir informació sobre el procés de matematització horitzontal amb Geogebra, concretament sobre si (mitjançant Geogebra) s'ha resolt la situació plantejada. Per exemple: *Has trobat el punt M1? Si l'has trobat, les seves coordenades són:* O també: *Has calculat el mòdul de la component útil de la força?*
2. Preguntes dissenyades per recollir informació sobre si l'alumne és capaç d'expressar per escrit les operacions concretes, amb nombres, que condueixen a un determinat resultat. Per exemple: *Contesta només si has trobat el punt M1: és possible escriure un càlcul amb les coordenades dels punts A i B que tingui com a resultat les coordenades del punt M1?*

3. Preguntes dissenyades per recollir informació sobre si l'alumne és capaç, a partir de l'activitat, d'escriure una expressió algebraica general. Per exemple: *Pots escriure una fórmula general per al càlcul de M1 on apareguin els símbols A, B i M1?*

Les respostes als dos primers tipus de preguntes ens donen informació sobre si s'ha produït, o no, una matematització horitzontal que hagi aconseguit el resultat demanat. Al primer tipus l'anomenem MHG per indicar que la matematització horitzontal s'ha realitzat amb Geogebra. Al segon tipus l'anomenem MHE per indicar que la resposta ha de ser el producte de la matematització horitzontal, però no en una forma que es pot llegir directament sobre la pantalla de Geogebra, sinó que l'alumne ha d'organitzar i escriure sobre el paper una expressió de valor particular (per a la situació concreta plantejada).
Pel que fa al tercer tipus de preguntes, les respostes donen informació sobre s' s'ha produït, o no, una generalització a partir de la situació concreta de l'activitat, la qual desemboca en una expressió algebraica de validesa general. Les etiquetem amb les lletres MV.

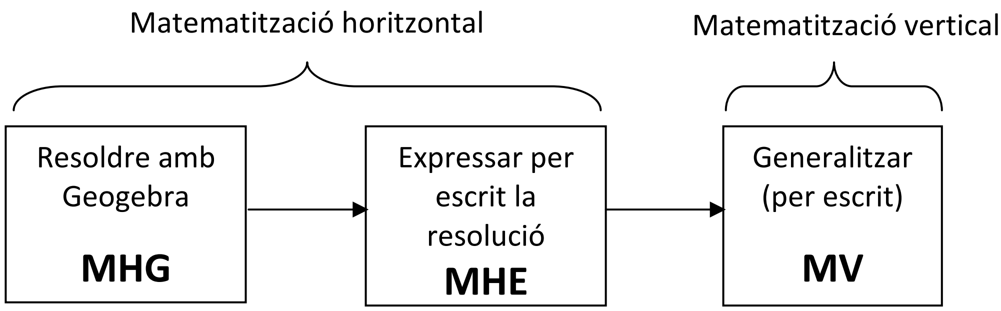


Figura 3.3. Els tres tipus de matematització presents a les activitats dissenyades

Els qüestionaris per als alumnes contenen aquestes preguntes MHG, MHE i MV:

MHG:
- Activitat 1: pregunta *a*
- Activitat 2: *a, b, c*
- Activitat 3: *a, b*
- Activitat 4: *a, b*
- Activitat 5 primera part : *a, b, c, d*
- Activitat 5 segona part: *a*
- Activitat 6: *a, b, c, d*

MHE:

- Activitat 1: *f*
- Activitat 2: *h, j, l*
- Activitat 3: *f, h*
- Activitat 4: *f, h*
- Activitat 6: *f* (demana dues respostes), *g* (demana dues respostes)

MV:

- Activitat 1: *g*
- Activitat 2: *i, k, m*
- Activitat 3: *g, i*
- Activitat 4: *g, i, k*
- Activitat 5 segona part: *b, c, e, f*
- Activitat 6: *h*

Les respostes escrites que corresponen a les activitats 7 i 8 són totalment obertes, és a dir, que a diferència de les activitats anteriors els alumnes no han de marcar un quadre d'una col·lecció d'opcions ni tampoc se'ls demana que escriguin una fórmula o una equació. Han de presentar, a més dels fitxers de Geogebra, una resolució completa per escrit. Per tant, els resultats no es poden tabular directament a partir de la mateixa estructura del qüestionari, com a les activitats anteriors, perquè aquest qüestionari no existeix per a les activitats 7 i 8.
Per a aquestes activitats 7 i 8, distingim entre la resolució amb Geogebra i la resolució escrita tradicional a l'hora de recollir les respostes:

- A l'activitat 7, demanem als alumnes que completin un quadrat i que en trobin el centre. Aquestes són dues entrades MHG de la taula de resultats per a la resolució amb Geogebra (completar quadrat i trobar punt mitjà) i dues entrades més per a la resolució escrita tradicional MHE.
- A l'activitat 8, demanem trobar el circumcentre d'un triangle. Això ja forma una columna de la taula de respostes pel que fa a la resolució amb Geogebra. Per a la resolució escrita tradicional, que és més laboriosa i demana un cert domini dels procediments algebraics, convé distingir un parell de passos que s'enregistren en dues columnes MHE: la construcció de com a mínim dues mediatrius del triangle per una banda, i la resolució del sistema d'equacions per trobar les coordenades del circumcentre per una altra banda. Aquestes dues fases, mediatrius i intersecció, són ràpides amb Geogebra i es poden incloure dins d'una sola columna MHG que mesura si s'ha trobat o no el circumcentre. Però separar-les permet una anàlisi més afinada per a les respostes escrites. Si l'alumne construeix les mediatrius per escrit, ha hagut de trobar els punts mitjans i els vectors directors, és a dir, ha hagut d'aplicar els coneixements sobre rectes i perpendicularitat corresponents a les sessions anteriors. Si resol el sistema, aplica un coneixement i un procediment que ja hauria d'haver

adquirit a l'Educació Secundària Obligatòria i que a més ha treballat al primer curs de Batxillerat específicament a la unitat didàctica de resolució d'equacions.

En resum, s'afegeix a la llista anterior de dades per a l'anàlisi de la matematització:

MHG:
Activitat 7: completar quadrat; trobar el centre
Activitat 8: trobar el circumcentre

MHE:
Activitat 7: completar quadrat; trobar el centre
Activitat 8: trobar les equacions de les mediatrius (dues com a mínim); resoldre el sistema per trobar el circumcentre

Per tant, en tota la seqüència d'implementació de les activitats amb Geogebra, des de l'activitat 1 fins a la 8, hem de considerar, segons el disseny, 50 columnes de dades sobre la matematització, de les quals 20 corresponen a la MHG, 16 a la MHE i 14 a la MV.
Suposant que els 19 alumnes presents a l'inici del procés d'implementació responguessin totes aquestes preguntes considerades, hi hauria un total de 950 respostes tabulades, de les quals 380 correspondrien a la MHG, 304 a la MHE i 266 a la MV.

3.5.3. Preguntes referents a la valoració subjectiva

Per altra banda, cada activitat amb Geogebra inclou un qüestionari amb preguntes sobre si el programari interactiu ha ajudat per plantejar l'activitat, per resoldre-la, per generalitzar i sobre si la comparació amb una classe convencional és favorable. A més, el qüestionari final insisteix encara més sobre aquests aspectes.
Les respostes són tancades: gens, poc, bastant, molt. Que hi hagi quatre opcions per respondre obliga l'alumne a situar-se en la banda del gens-poc o en la banda del bastant-molt, com ja hem comentat anteriorment.

Per a cada activitat del procés d'implementació, els alumnes responen un qüestionari de valoració subjectiva sobre l'ús de Geogebra. Tota la sèrie de preguntes és en realitat una repetició de 5 qüestions fonamentals per a l'anàlisi de la valoració que fan els alumnes. Els enunciats de les preguntes de cada tipus de vegades varien molt lleugerament per adaptar-se a cada activitat, però és perfectament possible presentar uns enunciats estandaritzats:

- Pregunta 1: *Usar Geogebra t'ha ajudat per representar i veure clar el plantejament de l'activitat?*
- Pregunta 2: *Usar Geogebra t'ha ajudat per trobar el que se't demana?*

- Pregunta 3: *Usar Geogebra t'ha ajudat per poder entendre el que vas fent i avançar en el procés de resoldre?*
- Pregunta 4: *Usar Geogebra t'ha ajudat per resoldre no tan sols el problema concret sinó per trobar fórmules generals?*
- Pregunta 5: *Comparat amb el treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?*

Més breument, les podem distingir amb les etiquetes següents:

- P1: plantejar
- P2: trobar
- P3: avançar
- P4: generalitzar
- P5: millor que la classe tradicional

Aquestes preguntes són presents en una activitat sempre i quan es refereixin a processos que realment hi intervenen. També les formulem en el qüestionari final que passem als alumnes al final de la seqüència de sessions (entre altres preguntes que es refereixen a altres aspectes generals de valoració). En concret, són les preguntes etiquetades amb les lletres *l*(P1), *m*(P3), *n*(P4) i *o*(P5). La pregunta 2 no apareix al qüestionari final perquè, quan apareix, sempre va referida a trobar resultats concrets d'una determinada activitat.

Aquesta és la llista que conté els tipus de preguntes formulades a cada activitat i al qüestionari final:

Pregunta	**Activitats (A) i qüestionari final (Q)**
P1 (plantejar)	A1, A2, A3, A4, A5(1a part), A5(2a part), A6, A7, A8, Q
P2 (trobar)	A1, A2, A3, A4, A5(2a part), A6, A7, A8
P3 (entendre i avançar)	A1, A2, A3, A4, A5(2a part), A6, A7, A8, Q
P4 (generalitzar)	A1, A2, A3, A4, A5(2a part), A6, Q
P5 (millor que la classe tradicional)	A1, A2, A3, A4, A5(1a part)), A5(2a part), A6, A7, A8, Q

Taula 3.7. Distribució a les activitats de les preguntes sobre la valoració subjectiva

Per tant, hi ha un total de 34 preguntes d'algun dels cinc tipus per a cada alumne al llarg del procés d'implementació de les activitats, incloent-hi el qüestionari final. D'aquestes 34, en corresponen 10 a P1, 8 a P2, 9 a P3, 7 a P4 i 10 a P5.
Suposant que els 19 alumnes presents a l'inici del procés d'implementació les responguessin totes, hi hauria un total de 836 respostes enregistrades, 190 de P1, 152 de P2, 171 de P3, 133 de P4 i 190 de P5.

3.6. Resum de les fases de la investigació

Ens sembla oportú tancar aquest capítol 3, en el qual hem detallat com el nostre plantejament inicial esdevé realment operatiu, amb un resum de les grans fases en què es desenvolupa el nostre treball. És cert que ja hem explicitat, de forma extensa, quins són els fonaments teòrics de partida i quina és l'estructura operativa pràctica de la nostra proposta. Però trobem convenient presentar de forma esquemàtica i resumida quines són les fases principals que constitueixen el conjunt, per fer una ràpida recapitulació d'allò que hem exposat fins ara, i per proporcionar també una idea general de les fases posteriors al disseny operatiu: la implementació a l'aula, les anàlisis, les interpretacions i les conclusions. Creiem que aquesta visió del que hem presentat fins ara i del que ve a continuació és una bona manera de tancar els primers tres capítols i d'obrir la porta que condueix als capítols 4, 5 i 6.

1. Fonaments teòrics i justificació del nostre plantejament.
Fonamentem el nostre plantejament en les referències teòriques d'autors que tracten la contextualització, la matematització i la modelització, i també en els arguments que ens proporciona un exhaustiu recorregut per la història de la geometria analítica. Des d'aquesta base, ens dirigim cap a la construcció d'activitats contextualitzades per a la geometria analítica del primer curs de Batxillerat, en l'entorn TIC visual i interactiu del programari Geogebra, en què els alumnes matematitzen horitzontalment i verticalment, i construeixen models matemàtics senzills. Només després d'aquestes activitats dissenyades per induir la matematització, introduïm la formalització dels continguts, seguint una seqüència que anomenem enfocament "de baix a dalt".

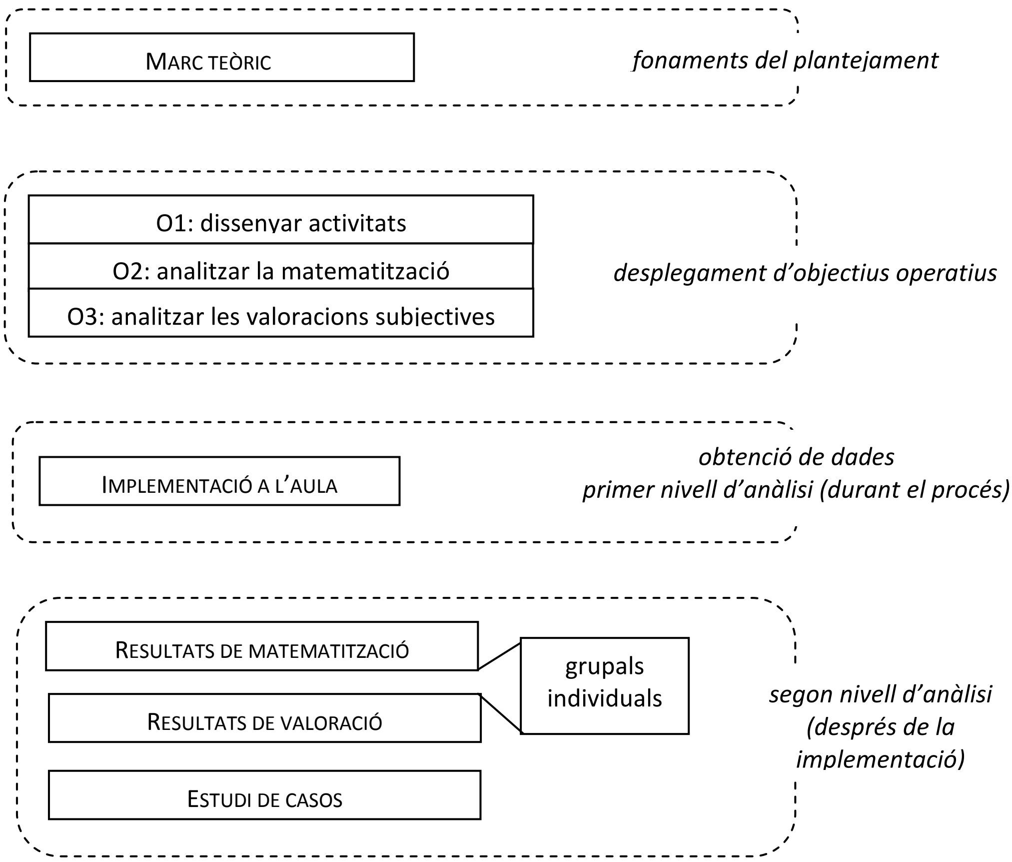
2. Disseny i planificació operativa.
Concretem el nostre plantejament a través del disseny de les activitats de matematització i de la seva seqüència d'implementació a l'aula, en l'entorn TIC del programari interactiu Geogebra. El disseny contempla la integració del nostre plantejament innovador en el marc de la programació didàctica de la geometria analítica de primer curs de Batxillerat en el centre on duem a terme la implementació, en condicions estrictament reals dins del desenvolupament ordinari del curs acadèmic. També contempla mitjançant quins elements obtenim informació per a l'anàlisi de la matematització que realitzen els alumnes, i per quins elements obtenim informació per a l'anàlisi de les percepcions i valoracions subjectives dels alumnes sobre el seu procés d'aprenentatge.

3. Implementació a l'aula i primers elements d'anàlisi.
Implementem el nostre plantejament segons el disseny i la planificació operativa que hem realitzat. En dia a dia de la implementació, observem el desenvolupament del procés i realitzem una anàlisi, molt propera al que succeeix a l'aula, de les estratègies que utilitzen els alumnes i els resultats que obtenen. L'anomenem "primer nivell d'anàlisi".

4. Anàlisi posterior al procés d'implementació.
Anomenem "segon nivell d'anàlisi" a l'anàlisi dels resultats de la matematització i de les valoracions subjectives dels alumnes realitzada sobre el conjunt de la seqüència de les activitats, després de la seva implementació. Considerem tant la dimensió individual com la grupal. Establim categories subgrupals a partir dels resultats obtinguts i detectem una sèrie de fets rellevants tant sobre la matematització com sobre les percepcions dels alumnes. Despleguem també una anàlisi comparativa, sobre uns quants alumnes (estudi de casos) de les resolucions en l'entorn interactiu Geogebra i les resolucions convencionals per escrit.

5. Interpretació i conclusions.
A partir de l'anàlisi dels resultats, construïm i justifiquem una sèrie d'interpretacions, i arribem a una sèrie de conclusions sobre l'aplicació en condicions reals del nostre plantejament didàctic "de baix a dalt" amb activitats contextualitzades en l'entorn TIC del programari interactiu Geogebra, per a la geometria analítica del primer curs de Batxillerat. Projectem les interpretacions i les conclusions cap a una perspectiva d'innovació didàctica.

La figura que mostrem a continuació és un resum esquemàtic i visual de les fases del nostre treball.



Aquesta figura continua a la pàgina següent

Figura 3.4. Esquema - resum de les fases de la investigació (continuació de la pàgina anterior)

4. Implementació i primer nivell d'anàlisi

En aquest capítol mostrem els aspectes més rellevants sorgits del seguiment diari de la implementació a l'aula de les activitats amb Geogebra. Comentem, activitat per activitat, l'actuació dels alumnes, tant dels resultats que obtenen com de les estratègies que segueixen. És el que anomenem "primer nivell d'anàlisi". Ens proporciona una visió molt propera del procés de treball diari a l'aula i ens permet extreure algunes primeres interpretacions sobre com el disseny de les activitats i la seva seqüència d'implementació indueixen la matematització en els alumnes. Aquestes primeres interpretacions ens situen en gran mesura en els aspectes que són objecte d'una anàlisi molt més extensa i detallada en el proper capítol.

4.1. Característiques del registre de la implementació a l'aula

Després d'haver completat la fase de disseny de la unitat didàctica de geometria analítica per al primer curs de Batxillerat, arriba el moment en què s'ha de produir la implementació real a l'aula. El procés s'ha desplegat al llarg de les 15 sessions que han estat programades tal com hem mostrat al capítol 3, a les quals n'hi hem afegit tres més, una de prèvia i introductòria, i dues de posteriors que tanquen el procés un cop que ja s'ha realitzat la implementació pròpiament dita. Així, la sèrie completa de sessions està formada per:

- Una introducció al l'ús de Geogebra, que s'ha realitzat un mes i mig (aproximadament) abans de començar el procés d'implementació.
- Les 15 sessions programades al capítol 3.
- Una sessió immediatament posterior a la prova escrita, dedicada a comentar la correcció de la prova.
- Una última sessió en què l'alumnat respon un qüestionari final.

El procés d'implementació a l'aula ha seguit la temporització prevista. Però el que cal subratllar especialment d'aquesta fase és el fet que tota la seqüència ha estat enregistrada per a l'anàlisi. Són els instruments i mètodes d'enregistrament els que mereixen una atenció específica en aquest capítol, així com la els continguts enregistrats en la mesura que han estat objecte d'una primera anàlisi (posteriorment hem abordat un segon nivell d'anàlisi al capítol 5).
Hem enregistrat de diverses maneres, tres de les quals reuneixen la major part de la informació i també la més rellevant per a l'anàlisi:

Els fitxers que els alumnes han generat a partir de les activitats amb el programari interactiu Geogebra (les 8 activitats dissenyades).
Són fitxers que tenen extensió ".ggb" i el nom dels quals permet identificar l'alumne i l'activitat. Així, per exemple, el fitxer creat per l'alumna Marta en la realització de l'activitat 3 és fàcilment identificable sota el nom "Marta3.ggb".

Les respostes escrites dels alumnes.
El gruix de la informació obtinguda per escrit dels alumnes està formada per les respostes a les activitats realitzades amb Geogebra, des de l'activitat 1 fins a la 8, i pel qüestionari final. Tal com hem mostrat en el capítol que tracta del plantejament metodològic i el disseny, a les activitats hi distingim en primer lloc un bloc de preguntes (i respostes) sobre el procés de matematització, és a dir, sobre la resolució de la situació concreta plantejada i l'obtenció de resultats de validesa general (MH i MV), i en segon lloc un altre bloc de preguntes sobre la valoració subjectiva que té l'alumne sobre l'ús del programari Geogebra en l'activitat. Les preguntes ocupen poc espai físic. Moltes es responen marcant una creu en un de diversos quadres (multiopció), i altres es responen escrivint un breu càlcul o una fórmula. En el cas del qüestionari final, totes les preguntes són de multiopció, segons el mateix tipus de disseny que hem utilitzat en el bloc de valoració sobre l'ús de Geogebra a cada activitat.
Però també hi ha informació escrita pels alumnes que hem recollit per a l'anàlisi i que té un altre format. Es tracta, en primer lloc, de les respostes obertes que els alumnes han escrit, a petició del professor, per explicar quines estratègies han utilitzat per resoldre les activitats 1, 2, 3 i 4. Cal recordar que aquestes activitats formen un primer bloc dissenyat per desembocar, a través d'un plantejament de baix a dalt, en l'equació vectorial de la recta. La informació obtinguda d'aquestes respostes obertes és rellevant per analitzar les reflexions dels alumnes sobre el procés que han seguit, així com per observar si hi ha hagut evolució en les estratègies utilitzades i, en cas afirmatiu, quina ha estat aquesta evolució.
També hem recollit les respostes obertes corresponents a la valoració final que hem demanat, just després de les preguntes de multiopció del qüestionari final. Hem comentat als alumnes que han de considerar el conjunt de les activitats realitzades dins de la unitat didàctica i que sobre això, amb aquesta perspectiva global, poden escriure els comentaris que vulguin.

El registre diari, sessió per sessió, escrit pel professor i alhora investigador.
Per a totes les sessions de la seqüència d'implementació, tant les que corresponen a activitats amb Geogebra com les que tenen un plantejament més tradicional, escrivim el que es pot considerar un diari de sessions. Amb l'objectiu de seguir una pauta ordenada i uniforme per enregistrar aquesta informació escrita, hem creat un model o, expressat d'una altra manera, una plantilla, que no és altra cosa que una taula per a cada sessió, amb diferents cel·les on hem enregistrat una sèrie de dades. Per començar, aquelles dades que situen la sessió en el temps i l'espai, que compten qui hi ha participat i que resumeixen els objectius pràctics de treball a l'aula:

- Data
- Hora
- Lloc
- Alumnat assistent
- Número de sessió i/o títol
- Objectius

A continuació, les cel·les que recullen com ha transcorregut cada sessió, i que contenen textos d'una certa extensió :

- Desenvolupament: com s'ha esdevingut la seqüència de fets.
- Observacions durant la sessió: les nostres impressions, allò que ens cridat l'atenció, i alguna primera anàlisi.

I completem el relat amb un últim apartat que apareix només en aquelles sessions en les quals els alumnes han lliurat activitats:

- Observacions després d'examinar les respostes: una primera categorització i anàlisi de les respostes, amb una sèrie de comentaris, si s'escauen.

Una característica fonamental del registre escrit realitzat pel professor és la proximitat amb el que succeeix a l'aula. És, per tant, un registre i un relat proper, tant en l'espai (l'alumnat i el professor són a l'aula, cadascú fent la seva feina) com en el temps (hem escrit les observacions i els comentaris el mateix dia que s'ha realitzat una sessió, i la primera anàlisi dels resultats ha tardat com a molt un dia més). Aquestes proximitat i immediatesa signifiquen treballar amb impressions i amb registres frescos, i reflexionar sobre ells en plena immersió dins de l'entorn didàctic, amb la memòria dels fets encara molt viva. S'hi produeix, en conseqüència, un primer nivell d'anàlisi que, després, s'ha de completar amb una reflexió més distanciada, ja fora del procés d'implementació (es tracta del segon nivell d'anàlisi que ocupa el capítol 5).
Es tracta d'un registre en primera persona, perquè és el professor i l'investigador qui s'expressa, com a individu situat dins del procés d'implementació i responsable del seu desenvolupament. Conté, per tant, elements subjectius (el to, el relat de les impressions) però no arbitraris, evidentment, sinó connectats a l'experiència a l'aula. I també conté, és clar, elements objectius, fets que resulten evidents, i resultats clarament distingibles a partir de les observacions del que succeeix durant la sessió i del registre de les respostes.

Incloem en aquest capítol un d'aquests registres diaris del professor. Correspon a la tercera sessió de la seqüència d'implementació, que està dedicada a la resolució amb el programari interactiu Geogebra de les activitats 2 i 3. Serveix d'exemple il·lustratiu del que hem exposat en els paràgrafs anteriors. Hem col·locat el conjunt complet de registres a l'annex 2 del nostre treball. No hem inclòs en el present capítol tota la seqüència de registres perquè hem considerat que apareixeria un seguit de pàgines amb taules i més taules, de lectura probablement massa àrdua com per formar part del cos de text d'un dels capítols, no perquè contingui informació de poc interès, sinó pel detall i l'extensió. Hem preferit mostrar, com hem comentat, una de les sessions i en tot cas després passar a extreure del conjunt, i presentar, els aspectes més rellevants per al primer nivell d'anàlisi.

Aquest és, doncs, el registre de la sessió a l'aula TIC corresponent a les activitats 2 i 3 amb Geogebra:

Dilluns, 5 de maig de 2008

Sessió 3: activitats 2 i 3

Hora: 10:30 a 11:30	**Lloc:** aula d'informàtica 1

Assistents

Manel	Juan	Dídac
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	Alba	Alberto
Toni	Federico	José
Raquel	Neus	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	

Objectius:

Lliurar, en paper, les activitats 2 i 3 als alumnes perquè les realitzin.
Recollir els fulls escrits pels alumnes i els fitxers Geogebra.

Desenvolupament:

Activitat 2: *en fila*. Activitat 3: *també en fila*.
Lliuro als alumnes els fulls de l'activitat 2 i els comento que és una continuació de l'activitat 1, de tal manera que han de tenir present la feina que van fer durant la sessió anterior. Els demano que omplin el formulari i que no deixin en blanc cap resposta del tipus sí/no o multiopció.
Mentre dono les explicacions introductòries, la professora Gemma Vilarrubias les grava amb la càmera. Gemma actuarà com a professora de suport per atendre incidències, preguntes i dubtes. Després, durant la sessió, enregistro un vídeo que recorre els llocs o són els alumnes i faig algunes fotos.
Al cap de mitja hora aproximadament d'haver iniciat la sessió, m'adono que hi ha dos alumnes que ja han trobat els punts que demanen les dues activitats i que pràcticament han acabat d'escriure les respostes sobre els papers. Són Alberto i Manel. Altres alumnes van més a poc a poc. És el cas de Federico i Erik, que rumien durant força estona com poden escriure fórmules generals per al que han fet.
Ara que els alumnes ja han adquirit l'experiència de l'activitat 1 i comencen a estar familiaritzats amb l'entorn de treball, es fan més evidents les diferències dels temps que necessiten per representar les activitats i escriure les respostes.
Quan falten vint minuts per acabar, alguns alumnes ja m'envien els fitxers a través de la intraweb i enllesteixen les respostes escrites (Alberto, Manel, Angelo), d'altres els segueixen de prop (Raquel, M. Carmen, Alba) i alguns altres encara no han començat l'activitat 3 (Federico, Erik, Ivan, Jesús). Aquests últims acaben ràpidament l'activitat 3, i envien els fitxers un parell de minuts després que hagi tocat el timbre que marca el final de la sessió.

Aquesta taula continua a la pàgina següent

Observacions durant la sessió: Hi ha una bona actitud de treball per part de tot l'alumnat. Cal destacar que hi ha dos alumnes que no eren presents a la sessió anterior (absències per motius justificats): Jesús i Dídac. Es nota que el sistema de treball els ve de nou. Fan esforços per adaptar-se. No els he donat cap explicació especial que compensi l'absència a la sessió anterior. Serà interessant veure com han abordat les activitats. Quan recorro l'aula tinc la impressió que la majoria d'alumnes tendeix a enfocar les activitats 2 i 3 de la mateixa manera que ho van fer a l'activitat 1. És a dir, que qui va usar una estratègia tipus punt-vector director la continua usant, i el mateix passa amb qui va usar la semisuma de coordenades.
Observacions després d'examinar les respostes: <u>Activitat 2</u> Tots els alumnes troben les coordenades correctes dels punts demanats, les quals apareixen als fitxers Geogebra i a les respostes escrites. Jesús no lliura les respostes escrites ni el fitxer, encara que ha treballat sobre l'activitat, però no se n'ha sortit. Cal tenir en compte que aquest alumnes no va assistir a la sessió anterior. En canvi, Dídac, que tampoc no hi va ser, se'n surt bé. Els alumnes han utilitzat quatre estratègies diferents de resolució, tres de les quals ja havien aparegut a l'activitat anterior. Hi ha 2 alumnes sobre 18 (Juan i Soslan) que utilitzen el botó "punt mitjà" del programa. Però, curiosament, a les respostes escrites presenten les fórmules de càlcul corresponents a la semisuma de les coordenades dels punts extrems. És a dir, que no usen l'àlgebra al programa Geogebra però sí que la presenten per escrit. Això ja ho feien a l'activitat anterior, amb la diferència que havien usat l'estratègia del punt mòbil que ajustaven manualment. Hi ha 2 alumnes sobre 18 (Neus i Youssef) que, com en l'activitat anterior, usen punts mòbils que ajusten manualment a la posició buscada. Però, també curiosament, a les respostes escrites presenten les fórmules on sumen les coordenades d'un dels extrems al vector director multiplicat pel nombre adequat. Hi ha 8 alumnes sobre 18 (Dídac, Raquel, Angelo, Ivan, Erik, Federico, Tanya i Marta) que apliquen successivament l'estratègia de la semisuma dels punts extrems, primer amb *A* i *B* per trobar *M2*, i després amb *A* i *M2* per trobar *M1* i amb *M2* i *B* per trobar *M3*. Ivan, Angelo, Federico i Erik ja havien usat l'estratègia de la semisuma a l'activitat 1. Tanya i Marta havien usat l'estratègia del punt mòbil a l'activitat 1 però ara usen l'àlgebra tant a Geogebra com per escrit. Raquel és un cas curiós, ja que va usar l'estratègia del vector multiplicat per un nombre i sumat a un dels extrems a l'activitat 1 i ara utilitza la semisuma. Dídac no va estar present a l'activitat anterior. Hi ha 6 alumnes sobre 18 (Alberto, Manel, M. Carmen, Alba, José i Toni) que usen l'estratègia tipus "equació vectorial de la recta", és a dir, sumar les coordenades d'un extrem, amb el vector director multiplicat pel nombre adequat. Ja ho havien fet a l'activitat 1, excepte José i Toni, que havien usat l'estratègia del "paral·lelogram", és a dir, sumar els vectors *OA* i *OB* i fer la meitat del vector resultant.

Aquesta taula continua a la pàgina següent

<u>Activitat 3</u> Tots els alumnes que lliuren els fitxers i les respostes escrites troben les coordenades correctes dels punts demanats. N'hi ha dos, Juan i Soslan, que no lliuren fitxers ni respostes escrites. La raó és que han consumit pràcticament tot els temps de la sessió per a l'activitat 2 i no han tingut temps d'abordar l'activitat 3. Són, però, l'excepció. El cas de Jesús ja l'he comentat a l'activitat 2: no va assistir a la sessió anterior. Però, a pesar que no lliura la resposta escrita per falta de temps, sí que lliura el fitxer de Geogebra en el qual s'aprecia que ha sumat el vector director *AB* multiplicat per un nombre a un dels extrems del segment. Pel que fa a les estratègies de resolució dels 16 alumnes que han lliurat els fitxers i les respostes escrites: Hi ha 15 alumnes que usen l'estratègia tipus "equació vectorial de la recta", és a dir, sumar les coordenades d'un extrem, amb el vector director multiplicat pel nombre adequat, tant si havien fet servir aquesta estratègia a l'activitat anterior com si no. Per tant, el tipus d'activitat i l'experiència adquirida ha portat a la gran majoria d'alumnes cap a aquest camí, que prefigura l'equació vectorial de la recta. Hi ha un sol alumne (Ivan) que usa punts mòbils que ajusta manualment a la posició buscada. No presenta càlculs concrets. Fa un intent de presentar una fórmula general, però és incorrecta. A l'activitat 2 havia usat l'estratègia de la semisuma. En aquesta activitat 3 no ha pogut aplicar-la i no ha sabut trobar-li una alternativa algebraica.

Taula 4.1. Exemple de registre d'una sessió: sessió 3 (activitats 2 i 3)

El procés concret pel qual s'ha elaborat aquest registre, i com aquest tot el conjunt, mereix unes quantes línies explicatives.

El professor i investigador porta, com a docent, el control de la sessió a l'aula i al mateix temps està atent a tot el que hi succeeix: l'actitud de l'alumnat, el temps que ela alumnes utilitzen per resoldre les activitats, els dubtes que manifesten explícitament o les inseguretats que s'endevinen, etc. El recorregut per l'aula mentre l'alumnat resol les activitats permet també l'observació, si no total sí que d'alguns casos significatius, de com els alumnes aborden, desenvolupen i completen les solucions amb Geogebra (amb ullades a les pantalles dels ordinadors) i com traslladen respostes als papers (amb ullades als fulls). Evidentment, un professor experimentat sap que, per la seva part, una presència molt propera i persistent, silenciosa i inquisitiva, pot provocar nerviosisme i bloqueig, però també sap que en un recorregut per l'aula és possible observar fets rellevants de manera discreta i mantenir una presència que, sense ofegar, doni a entendre que l'alumnat disposa de la figura del docent per orientar i donar suport si cal. Per altra banda, una intervenció verbal excessiva per corregir, retopar, i donar receptes de solucions, desvirtua el valor que té la iniciativa de l'alumne i la seva capacitat de vèncer les dificultats, mentre que l'altre extrem, el silenci absolut i la negativa a respondre qualsevol pregunta al·legant que és

l'alumnat qui s'ha d'espavilar, resulta frustrant i tampoc no és pedagògic. Com deia Aristòtil, en el terme mitjà hi ha la virtut. Això implica un sentit de la mesura que s'adquireix amb l'experiència docent.
Si considerem que és necessari, prenem algunes notes breus durant la classe sobre algun aspecte o alguna observació. Ara bé, és després de la sessió escrivim el registre segons el model que hem comentat abans. Fins a la cel·la de la taula corresponent a "observacions durant la sessió" és segur que en tots els casos el text s'ha redactat el mateix dia en què s'ha desenvolupat la sessió a l'aula, pel motiu ben simple que és molt convenient anotar quan la memòria encara és ben fresca. En la majoria de les sessions, el contingut de la cel·la "observacions després d'examinar les respostes" també l'hem redactat el mateix dia de la sessió, encara que en alguns pocs casos l'hem completat el dia següent, per una qüestió de temps. Examinar les respostes significa traslladar a una taula de resultats el que han escrit els alumnes i comparar-ho amb els continguts dels fitxers de les activitats per veure si la resposta és coherent amb la resolució mitjançant Geogebra. A partir d'aquí, comparar les respostes dels diferents alumnes i, si és possible, comptar i classificar en grups segons les estratègies seguides, els resultats obtinguts, etc. Això, naturalment, demana temps. Però, per altra banda, hem considerat que era necessari portar al dia el buidatge de les respostes no tan sols per una qüestió pràctica d'evitar l'acumulació de feina pendent, sinó també perquè realitzar sense retard el primer nivell d'anàlisi significa comptar amb una informació molt valuosa sobre el desenvolupament de la implementació, de manera que quan implementem una sessió, ja hem examinat els resultats de les sessions anteriors.
La metodologia utilitzada per a la tabulació dels resultats té per si mateixa prou rellevància com per dedicar-li, més endavant dins d'aquest capítol, un apartat. A més, cal dir que la manera com enregistrem els resultats té una influència determinant per configurar la naturalesa metodològica de les anàlisis posteriors.

Per bé que el material enregistrat més nombrós i important es reparteix entre el diari del professor, les respostes escrites dels alumnes i els fitxers Geogebra de les activitats, també hem realitzat diverses fotografies i enregistraments d'imatges en moviment al llarg de les sessions, tant aquelles que s'han desenvolupat a l'aula TIC com les que han transcorregut a l'aula ordinària. El resultat no és material per a l'anàlisi del procés de matematització o de les valoracions de l'alumnat, sinó que exerceix una funció modesta però no exempta d'interès com és constituir un testimoni gràfic d'alguns moments del procés d'implementació. Obtenir-les ha estat ben senzill, mitjançant una càmera fotogràfica digital que, com la majoria de les càmeres actuals, compta amb l'opció d'enregistrament de vídeo.
Per enregistrar les imatges i per realitzar tasques puntuals de suport durant la implementació a l'aula, hem comptat amb la col·laboració d'una professora del departament de matemàtiques de l'IES. Encara que un sol docent pot realitzar perfectament la implementació de la unitat didàctica amb el plantejament "de baix a dalt", és útil comptar amb un cert suport si tenim en compte que els processos a l'aula són objecte d'una sistemàtica i acurada recollida de dades per a la investigació.

4.2. Metodologia de tabulació de respostes

Tal com hem comentat en línies anteriors, durant el procés d'implementació hem anat enregistrant els resultats de les activitats, sessió per sessió, a partir de les respostes que els alumnes han escrit als qüestionaris i a partir també de l'observació dels fitxers de Geogebra. Abans d'iniciar una sessió corresponent a una activitat ja havíem confegit un registre dels resultats de la sessió anterior, en forma de taula. D'aquesta manera hem elaborat 8 taules, una per a cada activitat amb Geogebra, a les quals s'hi afegeix una altra taula corresponent al qüestionari final que han respost els alumnes.
La metodologia de tabulació de les respostes a preguntes sobre el procés de matematització es basa en una idea simple: cada pregunta (en una activitat qualsevulla) fa referència a un aspecte o fragment prou elemental (prou petit) de la realització de l'activitat com per poder ser respost mitjançant una creu en una multiopció o a través d'una resposta escrita molt breu (un càlcul o una fórmula). Això permet que cada resposta es pugui traduir en un nombre i, encara més en concret, que només hi hagi dos valors numèrics, 0 i 1. Efectivament, si el fragment que és objecte de la pregunta és prou petit, es pot comptabilitzar amb zero (resposta negativa; no assolit) o amb 1 (resposta positiva; assolit). No és el cas que ens ocupa, però si l'aspecte o fragment de la matematització objecte de la mesura fos més complex, caldria utilitzar un sistema que matisés el grau d'assoliment en una escala numèrica o bé que prescindís de la traducció numèrica i usés algun altre tipus de valoració del resultat.
Però en el sistema de comptabilitzar les respostes de l'alumnat sobre la valoració subjectiva de l'ús de Geogebra en cada activitat, treballar només amb dues opcions, 0 i 1 (tot o res, blanc o negre), resulta una manera massa maniquea de contemplar la realitat. Cal tenir en compte que en pocs casos una valoració subjectiva es pot plantejar només en termes extrems. És molt més raonable permetre uns certs matisos. En concret, permetem escollir una de quatre opcions: gens, poc, bastant, molt.
Cada taula de dades que comptabilitza les respostes dels alumnes en una determinada activitat amb Geogebra està organitzada de tal manera que les columnes corresponen a les preguntes i les files als alumnes,. Així, en vertical llegim la comptabilització de les respostes de tots els alumnes a una determinada pregunta i en horitzontal llegim totes les respostes d'un alumne al llarg de l'activitat.
El fet que en el primer nivell d'anàlisi cada activitat tingui una taula, és un condicionant en el sentit que obtenim una visió de cada activitat, en un format compacte, però no tenim agrupats, sinó dispersos, aspectes molt rellevants que són presents en totes o quasi totes les activitats i que mereixen una anàlisi que només es pot fer quan s'ha completat tota la seqüència. Això correspon al segon nivell d'anàlisi, que ocupa el capítol 5.
En resum, podem dir que aquest primer nivell d'anàlisi està marcat per la comptabilització dels resultats sessió per sessió, dia a dia, mentre que el segon nivell parteix de tot el conjunt acabat de les activitats per extreure'n i agrupar informació.

A continuació presentem una explicació encara més detallada del procés de comptabilització i tabulació de les respostes de cada activitat:

1. Les respostes tipus sí/no es comptabilitzen amb sí:1, no:0
2. Per a les preguntes que demanen coordenades, càlculs o fórmules, en un primer moment anotem un 1 si hi ha resposta (independentment que sigui correcta o no) i 0 si no hi ha resposta. Després la nostra correcció establirà si la resposta és o no correcta.
3. Un nombre vermell indica que la nostra correcció contradiu l'alumne. Per exemple, si l'alumne respon a una pregunta del tipus sí/no amb un sí (que compta com a 1) però descobrim a través de la correcció que l'alumne no ha fet el que declara i que per tant la resposta hauria de ser no (un 0), a la taula apareix un nombre 0 de color vermell, la qual cosa significa que l'alumne creu que és un sí però nosaltres ens adonem que és un no. Anotem el valor corregit. Un altre exemple: si un alumne presenta unes coordenades, un càlcul o una fórmula, però la nostra correcció revela que la resposta és incorrecta, apareix un 0 de color vermell.
4. Les cel·les de la taula pintades amb fons gris indiquen que no hi ha resposta escrita de l'alumne. Això es pot produir per vàries causes. Una és que l'alumne estigui absent de la sessió; en aquest cas tota la seva fila, amb el seu nom inclòs, apareixerà sobre fons gris. Una altra causa pot ser que l'alumne no hagi lliurat el fitxer de Geogebra i el full de respostes de l'activitat perquè s'ha produït algun incident com ara la pèrdua accidental del fitxer, que s'hagi extraviat el full o qualsevol altre motiu que impedeixi tenir el material per a l'anàlisi; llavors, apareix tota la fila de color gris excepte el nom. Una tercera causa pot ser que l'alumne no hagi donat cap resposta escrita a una pregunta concreta encara que sí que hagi respost altres preguntes i hagi lliurat el fitxer i el full. En aquest cas és la nostra correcció la que decideix quin valor ha de contenir la cel·la, que apareixerà de color gris amb un valor dins. Per exemple, si la pregunta demana una resposta en forma de càlcul, fórmula o equació i l'alumne no ha escrit res (ni tan sols s'ha pronunciat sobre si li és o no possible donar el càlcul, la fórmula o l'equació perquè no ha marcat el quadre de sí o el de no), considerem que el valor que cal assignar és un zero: si l'alumne tingués clar que ha de respondre, hauria respost; no ho ha fet, per tant no n'ha estat capaç. Un altre exemple: si no hi ha resposta i la pregunta es refereix a algun aspecte de la realització que es pugui valorar a partir de l'anàlisi del fitxer Geogebra, anotem el valor que resulti d'aquesta anàlisi, un 0 o un 1.
5. Les preguntes sobre l'ús de Geogebra a cada activitat permeten que l'alumne esculli un opció entre quatre: gens, poc, bastant, molt. Són respostes qualitatives que a l'hora de tabular els resultats es tradueixen en nombres. A gens li correspon el nombre 0, a poc el nombre 1/3, a bastant el nombre 2/3 i a molt el nombre 1. També hagués estat possible usar, per exemple, la traducció gens:0, poc:1; bastant:2; molt:3, però hem preferit una escala normalitzada.

Tot i que ja ha hem indicat que les activitats les corregim abans de tabular les respostes, considerem que és important insistir en el fet que, d'aquesta manera, les taules de resultats reflecteixen el grau d'assoliment objectiu de la matematització. És a dir: no tabulem allò que els alumnes creuen que han aconseguit i declaren a les respostes, sinó el que realment han aconseguit.
Una altra cosa són les respostes a les preguntes sobre la valoració subjectiva de l'ús de Geogebra per resoldre les activitats. Tabulem estrictament allò que declaren els alumnes, ja que en aquest cas el que pretenem és obtenir informació de les seves percepcions.
Aquest binomi objectivitat-subjectivitat respon als objectius que hem explicitat al capítol 3, és a dir, per una banda (objectivitat) a l'objectiu 2, *Analitzar, en la seqüència d'implementació de les activitats dissenyades, el desenvolupament de la matematització (horitzontal i vertical) per part dels alumnes* i per una altra banda (subjectivitat) a l'objectiu 3, *Analitzar, en la seqüència d'implementació de les activitats dissenyades, les valoracions subjectives dels alumnes sobre l'entorn d'aprenentatge.*

Totes les respostes queden tabulades amb valors entre 0 i 1, és a dir, normalitzades. Això també ens permet calcular valors mitjans de les respostes a una pregunta. Així, per exemple, si una resposta només admet els valors 0 i 1, una mitjana de 0,87 indica clarament que una majoria llarga de les respostes són 1. En el cas de les respostes a les preguntes sobre la valoració subjectiva de l'ús de Geogebra, una mitjana de 0,71 indica que el grup d'alumnes en conjunt se situa per sobre del valor 2/3, és a dir, entre el bastant i el molt però amb més proximitat al bastant.
A les taules apareix el valor mitjà corresponent a totes les respostes d'una pregunta determinada. Es tracta d'una mitjana calculada després que haguem corregit les respostes.

Subratllem que hem completat cada taula el mateix dia de la realització de l'activitat, o com a molt un dia després, a partir de la revisió que hem fet del material que han lliurat els alumnes (respostes escrites i fitxers). Amb aquesta informació, reunida i tabulada, hem pogut anotar resultats i observacions rellevants al registre de la sessió, concretament a la cel·la on apareix el títol "observacions després d'analitzar les respostes".

Mostrem a continuació una de les taules, en la qual es poden apreciar els diferents aspectes que hem comentat en línies anteriors. Correspon a la primera activitat amb Geogebra. El conjunt complet de les 9 taules (una per a cada una de les 8 activitats i una per al qüestionari final) figura a l'annex 3. No l'hem inclòs en aquest capítol perquè dificultaria una lectura fluida. En tot cas, sí que resulta pertinent presentar una taula que serveixi d'exemple. Hem escollit la que correspon a la primera activitat amb Geogebra. El fet d'haver-la triat obeeix sobretot a una qüestió d'espai, ja que en la majoria de les altres activitats les taules ocupen un full apaïsat, mentre que aquesta taula de la primera activitat cap en un full d'orientació vertical (i com a exemple és tan bona com les altres).

Activitat 1

	RESPOSTES DE L'ALUMNAT SOBRE LA RESOLUCIÓ												RESPOSTES SOBRE GEOGEBRA				
	a		b	c	d	e	f		g		h		i	j	k	l	m
	sí / no	coordenades	sí / no	sí / no	sí / no	sí / no	sí / no	càlcul	sí / no	fórmula	sí / no		g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m
Manel	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0		2/3	1	2/3	1/3	2/3
Youssef	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1		2/3	1/3	1/3	2/3	2/3
M. Carmen	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1		2/3	2/3	2/3	1	
Toni	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0		2/3	1	2/3	1/3	2/3
Raquel	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1		2/3	2/3	2/3	2/3	1
Angelo	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0		1	1	1	2/3	2/3
Marta	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		2/3	1	2/3	1/3	2/3
Juan	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0		2/3	1	1/3	2/3	2/3
Jesús																	
Alba	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1		2/3	1/3	2/3	2/3	1/3
Federico	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1		2/3	1	2/3	1/3	1/3
Neus	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1		2/3	2/3	2/3	1/3	2/3
Ivan	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0		2/3	1/3	0	2/3	1/3
Tanya	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		2/3	1	2/3	1/3	2/3
Dídac																	
Soslan	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0		2/3	2/3	2/3	1/3	2/3
Alberto	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1		2/3	2/3	1	1/3	2/3
José	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0		2/3	1	1/3	1/3	2/3
Erik	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1		2/3	2/3	2/3	1/3	2/3
MITJANA	1,00	0,71	0,29	0,24	0,29	0,12	0,82	0,71	0,59	0,47	0,47		0,69	0,76	0,61	0,49	0,63

Taula 4.2. Exemple de taula de resultats d'una activitat (activitat 1)

4.3. Fets rellevants de l'observació a l'aula i l'examen de les respostes

Com hem comentat abans, no mostrem en aquest capítol el conjunt complet del registre escrit de les sessions, però sí que presentem fets i primeres anàlisis del seguiment diari de les vuit activitats amb Geogebra implementades. Molt bona part dels textos que formen part d'aquest primer nivell d'anàlisi són, de fet, fragments extrets del registre escrit, pràcticament amb la mateixa forma que han estat redactats durant el seguiment diari del procés d'implementació. Pertanyen a les entrades "observacions durant la sessió" i "observacions després d'examinar les respostes". En tot cas, hi hem realitzat algunes modificacions. Per exemple, en l'estil, que en el registre original està en primera persona i aquí no, o en l'ordre d'alguns paràgrafs, o en l'ordenació per apartats, que aquí és més estructurada que en el text original redactat per al registre.

Però també hi hem afegit fragments nous amb el propòsit d'aprofundir en l'anàlisi i de presentar observacions, fets i conclusions de manera clara i explícita, quan hem considerat que calia reforçar el text original del registre diari.

Per facilitar la lectura d'aquest primer nivell d'anàlisi, incloem una breu descripció de cada activitat. Les activitats completes figuren a l'annex 1, però considerem que presentar abans de l'anàlisi de cada activitat una descripció bàsica del que demanem als alumnes, simplifica la lectura en el sentit que permet comprendre ràpidament què signifiquen, per exemple, *A*, *B*, *N1*, *Q*, etc. sense haver d'anar contínuament de l'annex per consultar.

4.3.1. Activitat 1

Breu descripció: els alumnes han de trobar les coordenades del punt mitjà del segment que uneix dos punts donats, *A* i *B*.

Observem un fet curiós amb una ullada ràpida a les respostes escrites d'alguns alumnes: marquen "no" a la pregunta "Has multiplicat escalars per vectors?" però per calcular el punt mitjà *M* multipliquen un escalar per un vector. És a dir, que d'alguna manera saben quines operacions han de fer però declaren el contrari del que en realitat han fet.

L'examen de les respostes escrites i, sobretot, dels fitxers Geogebra revela que els alumnes han usat 4 diferents estratègies de resolució. Són les següents.

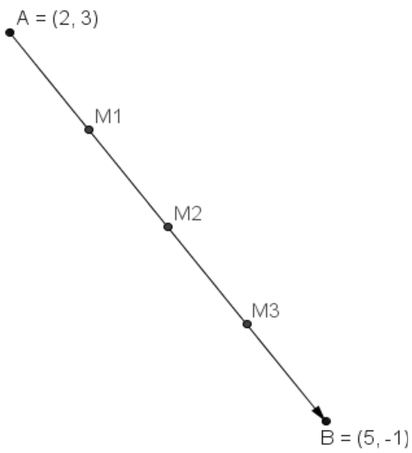
- *Punt mòbil.* Hi ha 5 alumnes sobre 17 (Marta, Tanya, Neus, Juan i Soslan) que han marcat un punt mòbil en el segment *AB* de manera que "manualment" ajusten la posició fins que el col·loquen al mig. Amb això, són capaços de trobar el punt mitjà. Dos d'ells, Marta i Tanya, no presenten cap càlcul per trobar les coordenades ni cap fórmula general, però Juan i Soslan sí que ho fan. Juan, fins i tot, dóna la fórmula de la semisuma de coordenades dels punts *A* i *B*. És un fet curiós que escrigui una fórmula general correcta després sense haver usat la barra d'entrada algebraica de Geogebra i ni tan sols haver representat un punt mitjà que ho segueixi essent després de moure els punts *A* i *B*.
- *Paral·lelogram.* Hi ha 2 alumnes sobre 17 (Toni i José) que dibuixen els vectors *OA* i *OB* i els sumen (apareix el paral·lelogram corresponent), però no escriuen cap càlcul concret ni cap fórmula general.
- *Semisuma de coordenades.* Hi ha 5 alumnes sobre 17 (Ivan, Youssef, Angelo, Federico i Erik) que sumen les coordenades de *A* i *B* i divideixen per 2. Presenten el càlcul concret i donen la fórmula general.
- *Escalar per vector.* Hi ha 5 alumnes sobre 17 (Alberto, Manel, Raquel, M. Carmen i Alba) que construeixen el vector *AB*, el multipliquen per 1/2 i sumen això a les coordenades de *A* (o fan servir la variant de restar-ho a les coordenades de *B*). Presenten el càlcul concret i donen la fórmula general.

Si tenim en compte la utilització per part dels alumnes d'expressions algebraiques (d'escriptura algebraica, en definitiva) ens adonem que:

- A les estratègies *escalar per vector*, *semisuma* i *paral·lelogram*, els alumnes han utilitzat la barra d'entrada algebraica del programa Geogebra, és a dir, han introduït des del teclat expressions algebraiques.
- A l'estratègia *punt mòbil*, els alumnes no han utilitzat la barra d'entrada algebraica (no han escrit), sinó que han treballat amb els botons de construccions geomètriques.

Imatge 4.1. Vista parcial de l'aula TIC durant la realització de l'activitat 1

4.3.2. Activitat 2



Breu descripció: cal trobar *M1*, *M2* i *M3*, que divideixen el segment AB en quatre trams d'igual longitud.
El dibuix que acompanya aquest text és el mateix que apareix al full de l'activitat que reben els alumnes.

← Figura 4.1. Punts que cal trobar a l'activitat 2

Imatge 4.2. Instantània del procés de resolució d'un alumne per a l'activitat 2

Tots els alumnes troben les coordenades correctes dels punts demanats, les quals apareixen als fitxers Geogebra i a les respostes escrites. Jesús no lliura les respostes escrites ni el fitxer, encara que ha treballat sobre l'activitat, però no se n'ha sortit. Cal tenir en compte que aquest alumne no va assistir a la sessió anterior. En canvi, Dídac, que tampoc no hi va ser, se'n surt bé.

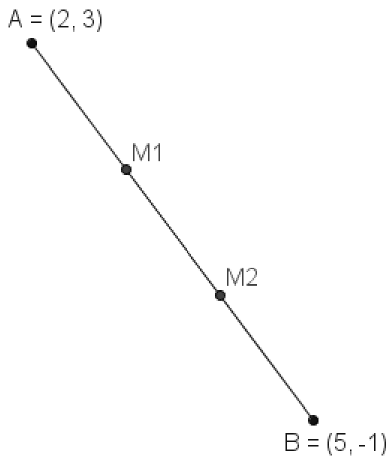
Els alumnes han utilitzat quatre estratègies diferents de resolució, tres de les quals ja havien aparegut a l'activitat anterior.

- *Botó punt mitjà.* Hi ha 2 alumnes sobre 18 (Juan i Soslan) que utilitzen el botó "punt mitjà" del programa. Però, curiosament, a les respostes escrites presenten les fórmules de càlcul corresponents a la semisuma de les coordenades dels punts extrems. És a dir, que no usen l'àlgebra al programa Geogebra però sí que la presenten per escrit. Això ja ho feien a l'activitat anterior, amb la diferència que havien usat l'estratègia del punt mòbil que ajustaven manualment.
- *Punts mòbils.* Hi ha 2 alumnes sobre 18 (Neus i Youssef) que, com en l'activitat anterior, usen punts mòbils que ajusten manualment a la posició buscada. Però, també curiosament, a les respostes escrites presenten les fórmules on sumen les coordenades d'un dels extrems al vector director multiplicat pel nombre adequat.
- *Semisumes successives.* Hi ha 8 alumnes sobre 18 (Dídac, Raquel, Angelo, Ivan, Erik, Federico, Tanya i Marta) que apliquen successivament l'estratègia de la semisuma dels punts extrems, primer amb *A* i *B* per trobar *M2*, i després amb *A*

i *M2* per trobar *M1* i amb *M2* i *B* per trobar *M3*. Ivan, Angelo, Federico i Erik ja havien usat l'estratègia de la semisuma a l'activitat 1. Tanya i Marta havien usat l'estratègia del punt mòbil a l'activitat 1 però ara usen l'àlgebra tant a Geogebra com per escrit. Raquel és un cas singular, ja que va usar l'estratègia del vector multiplicat per un nombre i sumat a un dels extrems a l'activitat 1 i ara utilitza la semisuma. Dídac no va estar present a l'activitat anterior.

- *Escalar per vector.* Hi ha 6 alumnes sobre 18 (Alberto, Manel, M. Carmen, Alba, José i Toni) que usen l'estratègia tipus "equació vectorial de la recta", és a dir, sumar les coordenades d'un extrem, amb el vector director multiplicat pel nombre adequat. Ja ho havien fet a l'activitat 1, excepte José i Toni, que havien usat l'estratègia del "paral·lelogram" (és a dir, sumar els vectors *OA* i *OB* i fer la meitat del vector resultant).

4.3.3. Activitat 3



Breu descripció: cal trobar *M1* i M2, que divideixen el segment AB en tres trams d'igual longitud.
El dibuix que acompanya aquest text és el mateix que apareix al full de l'activitat que reben els alumnes.

← Figura 4.2. Punts que cal trobar a l'activitat 3

Pel que fa a les estratègies de resolució dels 16 alumnes que han lliurat els fitxers i les respostes escrites:

- *Punts mòbils.* Hi ha un sol alumne (Ivan) que usa punts mòbils que ajusta manualment a la posició buscada. No presenta càlculs concrets. Fa un intent de presentar una fórmula general, però és incorrecta. A l'activitat 2 havia usat l'estratègia de la semisuma. En aquesta activitat 3 no ha pogut aplicar-la i no ha sabut trobar-li un alternativa algebraica.
- *Escalar per vector.* Hi ha 15 alumnes que usen l'estratègia tipus "equació vectorial de la recta", és a dir, sumar les coordenades d'un extrem, amb el vector director multiplicat pel nombre adequat, tant si havien fet servir aquesta estratègia a l'activitat anterior com si no. Per tant, el tipus d'activitat i l'experiència adquirida ha portat a la gran majoria d'alumnes cap a aquest camí, que prefigura l'equació vectorial de la recta.

4.3.4. Activitat 4

Breu descripció: els alumnes han de col·locar un parell de punts *P1* i *P2* amb la condició que estiguin alineats amb *A* i *B*, però que no estiguin situats entre *A* i *B*.

Tots els alumnes que lliuren els fitxers i les respostes escrites donen les coordenades de dos punts que estan efectivament alineats amb *A* i *B*. Tots utilitzen la barra d'entrada algebraica de Geogebra per sumar un punt (*A* o *B*) amb el vector *AB* multiplicat per un nombre. Per tant, després de passar per les activitats 1, 2 i 3, en aquesta activitat 4 només hi ha una sola estratègia per a tothom, la que prefigura l'equació vectorial de la recta. Només Ivan no lliura les respostes escrites perquè ha estat donant voltes a com resoldre amb Geogebra durant tota la sessió, però finalment lliura el fitxer en el qual es pot veure com ha resolt amb la mateixa estratègia que la resta dels alumnes.
Hi ha 8 dels 16 alumnes que lliuren respostes escrites amb una fórmula general per a la recta que és, de fet, l'equació vectorial, encara que ells encara no saben que s'anomena així. Deixen en blanc la pregunta 2 alumnes (no responen si és possible o no donar una fórmula general) i 5 contesten que no poden donar-la. Hi ha 1 alumna que dóna una fórmula però és incorrecta.

4.3.5. Estratègies de resolució de les activitats 1, 2, 3 i 4

Tot i que no estava inicialment previst al disseny de les activitats i a la planificació de les sessions, després que els alumnes hagin acabat l'activitat 4, els hem demanat que, en un full en blanc, escriguin quines estratègies han utilitzat per resoldre les activitats 1, 2, 3 i 4, i per què han pres aquestes decisions. Ho hem cregut convenient perquè a l'activitat 1 hem observat una interessant varietat en les estratègies usades. A partir d'aquí, hem constatat que aquesta varietat es redueix, i que convergeix, tal com estava previst en el disseny de les activitats, cap a l'equació vectorial de la recta.
Mitjançant les respostes obertes dels alumnes sobre les estratègies de resolució, pretenem obtenir informació que complementi les observacions del professor, anotades al registre, amb les explicacions des del punt de vista de cada alumne. Aquest és el resultat:

Les respostes escrites sobre les estratègies de resolució van des d'unes poques línies fins al que vol ser una reproducció força extensa i fidel dels passos seguits amb Geogebra. Totes les respostes (excepte una, la d'Angelo) contenen el que es pot considerar la fórmula de l'equació vectorial de la recta, que encara no ha estat introduïda formalment com a contingut teòric, però que a la pràctica ha aparegut en el procés de resolució les activitats. Hem escrit "es pot considerar" perquè en alguns casos està escrita pràcticament com ho faria el professor a la pissarra, i en altres casos apareix amb uns símbols que s'entenen de seguida però que no són els convencionals Per exemple, *P*=*A*+(*x*·*u*), escrit així, on *A* simbolitza les coordenades del punt *A* de les

activitats, *x* simbolitza un paràmetre, i la lletra u, sense fletxa, indica les components del vector director.
Cal destacar que no hem indicat als alumnes que hagin d'escriure fórmules matemàtiques, sinó que els hem demanat només una explicació sobre l'estratègia seguida, sense donar instruccions més concretes. I resulta que apareix la fórmula en totes les respostes menys en una (Angelo), encara que no és estrictament una excepció, ja que ofereix una explicació equivalent en llenguatge ordinari: "*vaig sumar al punt A una petita part del vector u*". Per tant, tots han incorporat al seu bagatge l'equació vectorial de la recta com a estratègia principal. Com ja s'ha explicat en els comentaris a les respostes d'aquesta sessió i de les anteriors, alguns alumnes ho han fet des del principi i altres s'hi han afegit després.
En algunes respostes, l'alumne s'esforça per reproduir gràficament les situacions de les activitats 1, 2, 3 i 4, i en altres respostes en té prou amb l'escriptura i alguna fórmula. Però el que realment ens interessa és si els alumnes expliquen o no els motius que els han dut a emprendre una determinada estratègia. A continuació mostrarem què responen sobre això. Les respostes no difereixen gaire en les idees principals, però sí que en tot cas podem establir una distinció entre aquelles (la minoria) que fan referència al fet que s'ha pensat o s'han provat altres estratègies alternatives, i aquelles (la majoria) que només fan referència a l'estratègia utilitzada, sense indicar que n'hi ha d'altres de possibles. Iniciem cada grup de respostes amb una frase que serveix de caracterització del tipus que representa.

1. "Aquesta és la millor manera d'entre les que he pensat" (8 alumnes).
L'alumne decideix una determinada estratègia després d'haver-ne provat i descartat algunes altres, pel seu compte. Alguns alumnes comenten explícitament l'existència d'altres estratègies, i altres alumnes ho deixen implícit perquè es refereixen a l'estratègia utilitzada com la millor o la més fàcil, per tant, donen a entendre que n'hi ha d'altres.

Manel: "*He escollit fer-ho amb la fórmula* [escriu la fórmula] *perquè em resulta més fàcil i ràpid per resoldre els problemes... En les quatre activitats he utilitzat la mateixa fórmula per demostrar que no importa el punt".*

M. Carmen: Ha utilitzat la fórmula vectorial en totes les activitats. "*He utilitzat aquest mètode perquè era la manera més clara i ràpida que vaig trobar*".

Angelo: Excepte a l'activitat 1, que calcula el punt mitjà com a semisuma, a la resta d'activitats usa la fórmula vectorial. "*Vaig utilitzar aquest mètode perquè sumar vectors va ser la forma més fàcil de representar punts*".

Marta: Per a l'activitat 1 declara que va usar la fórmula de la semisuma per trobar el punt mitjà, però es tracta d'un error de memòria, ja que va col·locar un punt mòbil entre *A* i *B* i va ajustar manualment les distàncies. Sí que recorda bé que va usar la semisuma consecutivament per resoldre l'activitat 2. "*Hi ha diferents maneres però jo vaig trobar que aquest mètode era bastant fàcil*". No diu res de l'activitat 3 i sobre l'activitat 4 declara que va usar la fórmula vectorial, encara que no justifica el perquè.

Alba: Presenta una resposta escrita pràcticament igual a la de M. Carmen. Per a l'activitat 1 també comenta: *"Ho he fet d'aquesta manera perquè va ser la més clara que vaig veure"*.

Neus: És força explícita en comentaris sobre el perquè de l'estratègia utilitzada. Sobre l'activitat 1, en què havia fet servir un punt mòbil que ajustava manualment, escriu: "*Ho vaig decidir perquè no ho sabia fer d'una altra forma, i vaig estar mirant a veure si es podia fer d'una altra forma, i vaig trobar la distància i vaig estar rumiant, i vaig pensar en agafar els punts i que tots tinguin la mateixa distància, i a la finestra esquerra em posava les coordenades. Però era molt pesat per buscar-ho"*. Fa el mateix a l'activitat 2, però a la 3 ja hi ha un canvi: *"Aquí ja ho sabia fer de la fórmula* [escriu la fórmula vectorial *M1=A+¼u*] *i vaig trobar que era més senzill i vaig decidir fer-ho així, ja que és més senzill i ràpid de fer"*.

Alberto: "*He escollit la fórmula P=A+(x·u) perquè crec que és la manera més ràpida i eficaç de resoldre aquest tipus d'exercicis. Amb aquest mètode es pot situar qualsevol punt en la línia entre A i B respectivament* [?]. *Encara que es moguin ens punts A i B es pot fer servir el mateix mètode ja que serveix per a qualsevol posició. He fet el mateix mètode per a les 4 activitats per demostrar que no importa la posició entre A i B, que sempre sortirà el punt indicat"*.

José: Per a l'activitat 1 escriu que *"Primer vaig pensar en fer una equació per trobar el punt a partir del vector AB però no sabia pas com fer-ho, per això em va semblar més fàcil fer una suma de vectors, em sembla que era la fórmula més senzilla"*. A partir de l'activitat 2 usa la fórmula vectorial i a l'activitat 3 comenta: *"Ja que a l'última vegada aquella fórmula va ser tan efectiva, vaig decidir utilitzar-la una altra vegada canviant el nombre variant"* [es refereix al paràmetre].

2. "Se m'ha acudit aquesta o he après per altres persones que és la millor" (8 alumnes). L'alumne va decidir una determinada estratègia perquè en aquell moment va ser la que va pensar, se li va acudir o li va sortir bé. No hi ha referències a altres possibles estratègies, ni directament, ni tampoc indirectament. També, en molts d'aquests casos, una explicació consisteix en apuntar que aquesta idea que ha sorgit és acceptada pel fet d'aparèixer fàcil i clara, o que resulta fàcil a partir de l'experiència posada en comú a la classe en activitats anteriors. Com es pot apreciar, són explicacions que si posen algun èmfasi, ho fan en la sensació que produeix la idea (sorgeix, apareix fàcil, es percep que funciona).

Youssef: Per a l'activitat 1 declara que ha utilitzat la fórmula del punt mitjà (encara que no l'escriu correctament) *"perquè em va sortir bé el resultat"*. Per a l'activitat 2 "*vaig utilitzar el botó de distància per veure quan els 3 punts estaven a la mateixa distància perquè no sabia la fórmula"* [es refereix a col·locar punts mòbils i ajustar manualment les distàncies]. Per a les activitats 3 i 4 vaig utilitzar la fórmula [escriu la fórmula vectorial] *"perquè era més fàcil i ràpid de fer quan la coneixes"*.

Toni: Per a l'activitat 1 usa el paral·lelogram. "*La suma de vectors crea un paral·lelogram que em proporciona el punt mig del vector AB. Era l'única que vaig pensar*". Però a partir de l'activitat 2 ja utilitza la fórmula vectorial: "*La vaig fer perquè era més senzilla i ràpida que l'utilitzada a l'activitat 1".*

Raquel: Per a l'activitat 1 utilitza lla fórmula vectorial amb el vector director *AB*. "*Ho vaig fer així perquè en tenir només dos punts si resto la meitat* [del vector *AB*] *a A o B em surt el punt mitjà".* Curiosament, per a l'activitat 2 utilitza el càlcul del punt mitjà com a semisuma de les coordenades dels extrems. Però a partir de l'activitat 3 torna a la fórmula vectorial: "*no es podia aplicar la fórmula de l'exercici anterior*" [ja no valia el càlcul de punts mitjans].

Juan: Escriu que ha calculat els punts mitjans de les activitats 1 i 2 amb la semisuma de coordenades "*perquè era un càlcul que recordava del curs passat i era fàcil de fer-ho*". De fet, a la resolució de les activitats va escriure la fórmula correcta però amb Geogebra va utilitzar un punt mòbil a l'activitat 1 i el botó punt mitjà a l'activitat 2, tal com hem reflectit als comentaris sobre les activitats corresponents. Sobre l'activitat 3 diu que "*no vaig saber com resoldre l'exercici*". Per a l'activitat 4 escriu la fórmula vectorial.

Jesús: No va assistir a l'activitat 1. Les activitats 2 i 3 li van venir de nou, li va faltar temps i no va lliurar les respostes escrites. Però per a l'activitat 3 sí que va lliurar el fitxer, on es comprova que tal com declara va utilitzar la fórmula vectorial: "*aquest sistema em semblava l'única manera de resoldre* [l'activitat 3] *dins de les meves capacitats*". Per a l'activitat 4 segueix la mateixa estratègia vectorial.
A continuació mostrem les seves respostes manuscrites originals (no mostrarem les explicacions manuscrites originals de tots els alumnes; de fet, ja presentem amb lletra d'impremta un resum dels aspectes rellevants de totes les respostes).

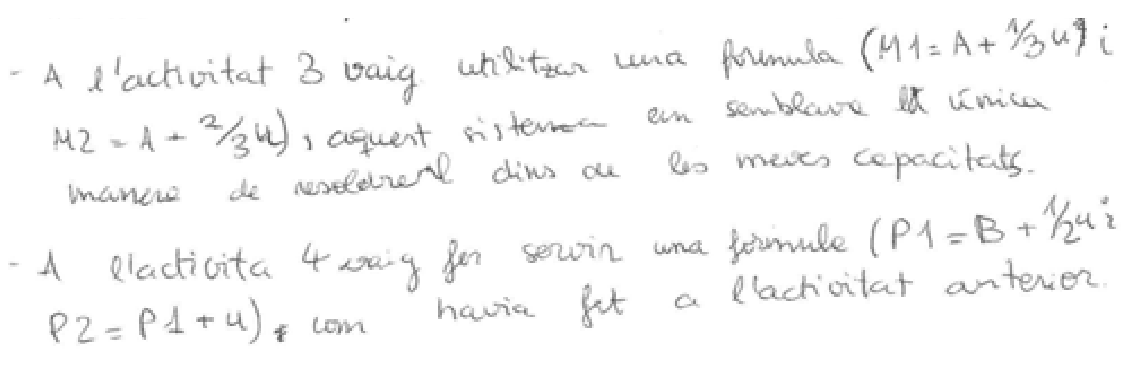

- A l'activitat 3 vaig utilitzar una formula (M1 = A + 1/3 u) i M2 = A + 2/3 u), aquest sistema em semblava la única manera de resoldre'l dins de les meves capacitats.
- A l'activita 4 vaig fer servir una formule (P1 = B + 1/2 u i P2 = P1 + u) com havia fet a l'activitat anterior.

Figura 4.3. Explicacions de l'alumne Jesús sobre les estratègies de resolució de les activitats 3 i 4

Soslan: Comenta bàsicament el mateix que el seu company Juan, però és més breu i no explica els motius. També declara obertament per a l'activitat 3 que "*No ho vaig saber resoldre*".

Federico: Explica el procediment concret que ha fer servir a cada activitat, sense entrar en opinions o valoracions: semisuma a la 1 i fórmula vectorial a partir de la 2. A l'activitat 4, on s'havien de marcar punts alineats amb *A* i *B* però no pertanyents al segment *AB*, escriu una frase final: *"O sigui que li he sumat una mesura més gran que el propi vector"*.

Erik: Explica que a les activitats 1 i 2 ha usat la semisuma. A partir de la 3 fa servir la fórmula vectorial. Escriu en castellà: *"La utilicé porque todas las actividades anteriores sirvieron para deducir esta fórmula"*.

Els alumnes Tanya i Ivan no han lliurat les respostes escrites. Dídac era absent.

Arribats en aquest punt, advertim que les activitats 1, 2, 3 i 4 (que formen una progressió cap a l'equació vectorial de la recta) constitueixen un conjunt en el qual s'evidencien una sèrie de fets rellevants per a aquest nivell d'anàlisi, i que tenen relació amb l'enfocament didàctic de baix a dalt i amb la matematització.

1. La pràctica totalitat dels alumnes (amb alguna excepció esporàdica) escriu correctament les coordenades dels punts buscats i efectivament els fitxers de Geogebra ho corroboren. És a dir, que els alumnes han resolt amb Geogebra la situació plantejada. Han matematitzat horitzontalment. No tots ho han fet amb les mateixes estratègies.
2. Una majoria àmplia d'alumnes escriu correctament el càlcul concret i/o la fórmula general (si una mitjana 1 representaria que tots ho han fet, les mitjanes obtingudes estan gairebé totes per sobre del 0,7 i moltes per sobre del 0,8).
3. La varietat d'estratègies que observem sobretot a la primera activitat es va reduint fins que a l'activitat 4 tothom utilitza l'equació vectorial de la recta, encara que sense saber que s'anomena així. Quan els alumnes expliquen quines estratègies han utilitzat en les primeres quatre activitats, aquells no havien utilitzat l'equació vectorial en un principi però que l'han usada després, escriuen frases com: "*perquè era més fàcil i ràpid de fer quan la coneixes*"; "*perquè era més senzilla i ràpida que l'utilitzada a l'activitat 1*"; "*perquè sumar vectors va ser la forma més fàcil de representar punts*"; "*vaig trobar que era més senzill*"; "*ja que a l'última vegada aquella fórmula va ser tan efectiva, vaig decidir utilitzar-la una altra vegada*"... Hi ha un alumne que reflexiona sobre el procés i explica molt bé què ha succeït: "*La utilicé porque todas las actividades anteriores sirvieron para deducir esta fórmula*".

4.3.6. Activitat 5, primera part

Breu descripció: els alumnes han de representar amb Geogebra una situació en què, tibant d'una corda, s'arrossega objecte pesant per una superfície horitzontal, en línia recta. La corda, quan tiba, forma un cert angle amb l'horitzontal.

Predominen les estratègies que utilitzen vectors per representar la força i el desplaçament i un punt per representar l'objecte. Però cal fer distincions:

- Hi ha 13 alumnes sobre 17 que utilitzen un vector col·locat en horitzontal per representar el desplaçament.
- Tres alumnes (José, Ivan i Soslan) tracen una recta per representar el desplaçament.
- Un alumne (Juan) usa un segment.

Tots els alumnes utilitzen un vector per representar la força. De fet, tots cursen l'assignatura de física a primer de Batxillerat. És natural que associïn automàticament els conceptes de força i vector perquè habitualment representen les forces mitjançant vectors. Però tot i que a la física han usat algunes vegades vectors per representar desplaçaments, hi ha quatre alumnes que a la primer part de l'activitat no representen el desplaçament mitjançant un vector. Això suggereix que l'associació dels conceptes vector i desplaçament no és tan forta com l'associació vector i força.

- Hi ha 11 alumnes sobre 17 que usen un punt per representar l'objecte.
- 5 alumnes (Dídac, M. Carmen, Raquel, Tanya i Marta) el representen mitjançant un rectangle de dimensions considerables i un alumne (Jesús) fa servir un cercle, també força gran.

Per tant, la majoria dels alumnes treballen amb un objecte puntual, la qual cosa és una notable abstracció, però una part significativa de l'alumnat representa un objecte extens, mitjançant una figura geomètrica simple.
Tots els alumnes marquen correctament l'angle que formen els vectors força i desplaçament, l'origen dels quals situen a l'objecte.
Com a fet curiós, ens adonem que 11 alumnes sobre 17 (Toni, Erik, Ivan, Angelo, Dídac, Youssef, Jesús, M. Carmen, Raquel, Tanya i Marta) han traçat la força i el desplaçament de tal manera que la longitud del desplaçament coincideix amb la projecció de la força sobre la horitzontal. Dit d'una altra manera, el desplaçament i la força formen part d'un triangle rectangle; el desplaçament és el catet horitzontal i la força la hipotenusa.

4.3.7. Activitat 5, segona part

Breu descripció: a partir de la situació de la primera part de l'activitat 5, els alumnes han de realitzar una construcció en la qual es pugui visualitzar la força F i el seu valor en Newtons, el desplaçament d i el seu valor en metres, l'angle α que formen la força i el desplaçament, així com la representació gràfica i el valor de la component útil de la força. També han de calcular i visualitzar el valor del treball realitzat per la força F en un desplaçament d.
El dibuix que acompanya aquest text és el mateix que apareix al full de l'activitat que reben els alumnes.

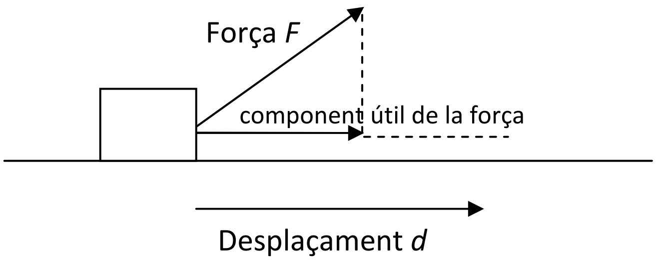


Figura 4.4. Força, desplaçament i component útil

El que més ens crida l'atenció després d'haver analitzar les respostes escrites i els fitxers és el notable contrast que existeix en molts casos entre unes respostes escrites correctes per al càlcul de la força útil i el treball (amb les fórmules generals perfectament escrites $F_{útil}= F{\cdot}\cos\alpha$; $W= F{\cdot}d{\cdot}\cos\alpha$) i no haver calculat amb Geogebra el mòdul de la força útil i el treball. Sí que la majoria dels alumnes representa bé la situació amb Geogebra, però molts passen directament a la resposta escrita sense realitzar els càlculs amb el programari.

- Aquest fet es produeix (com a mínim amb la força útil o amb el treball, o amb tots dos) en 12 alumnes sobre 17 (Jesús, Federico, Dídac, Alberto, Manel, Soslan, Juan, Ivan, M. Carmen, Toni, José i Erik).
- Hi ha 4 alumnes sobre 17 (Angelo, Youssef, Marta i Tanya) que no calculen amb Geogebra ni donen per escrit la força útil i el treball.
- Hi ha una alumna (Raquel) que ho fa tot, tant amb Geogebra com per escrit.

De fet, cap alumne, excepte Raquel, calcula el treball amb Geogebra, encara que 13 alumnes (inclosa Raquel) escriuen la fórmula correcta.
Més en concret, comptant que la mitjana 1 significaria que tots els alumnes ho han fet i que 0 significaria que no ho ha fet ningú, la presentació correcta de la fórmula de la component útil obté un 0,53 i la fórmula del treball obté un 0,76. Cal tenir en compte que la fórmula del treball conté implícitament la component útil.
Mitjançant la representació amb Geogebra, la majoria dels alumnes s'ha adonat de la relació que existeix entre el treball, la força i el desplaçament, i ho ha traduït a una fórmula matemàtica escrita sobre el paper, prescindint dels càlculs amb Geogebra, és a dir, d'introduir a la barra algebraica del programari el producte de la força pel desplaçament i pel cosinus de l'angle que formen.

També ens adonem que la valoració sobre l'ús de Geogebra és en general més baixa que en les activitats anteriors, inclosa la primera part d'aquesta. Abunden força més les respostes "poc". Això encaixa amb el fet que a molts alumnes no els ha calgut calcular la força útil i el treball amb Geogebra com a pas previ per obtenir raonadament les fórmules.
Igualment trobem remarcable que 10 alumnes sobre 17 responguin correctament que per a un angle de zero graus el treball serà màxim, i que 9 sobre 17 escriguin que la força mínima necessària es produeix per a un angle de zero graus, tot això malgrat que

la gran majoria d'alumnes no han calculat la força útil ni el treball amb Geogebra, encara que sí que han escrit les fórmules correctes. En 7 casos apareix erròniament la resposta 45°, en un cas la resposta 90°, i en un cas la resposta "sempre valdrà el mateix". En sis casos no hi ha resposta.

4.3.8. Activitat 6

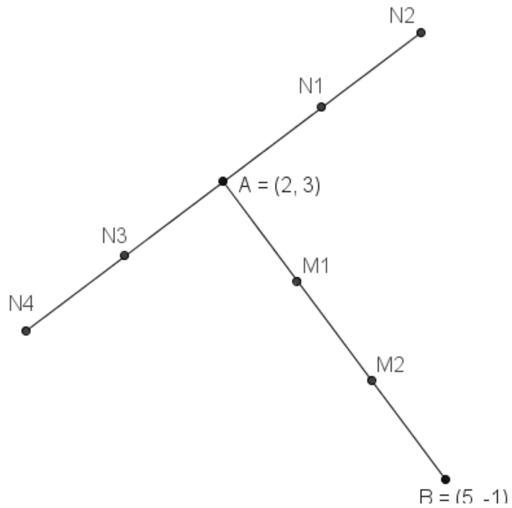


Figura 4.5. Punts que cal trobar a l'activitat 6

Breu descripció: A partir de *A* i *B*, cal situar *M1* i *M2* com a l'activitat 3, i també *N1*, *N2*, *N3* i *N4*, de tal manera que els segments *AB* i *N2N4* siguin perpendiculars i que aquest últim segment quedi dividit en quatre trams d'igual longitud, la mateixa que la dels tres trams del segment *AB*.
El dibuix que acompanya aquest text és el mateix que apareix al full de l'activitat que reben els alumnes.

Diversos alumnes ens manifesten que no veuen del tot clar com col·locar els punts de tal manera que compleixin alhora les condicions d'estar en la direcció perpendicular i a les distàncies demanades entre ells. Els diem que recordin el que han fet en activitats anteriors per trobar *M1* i *M2*, i que pensin en com obtenir la perpendicularitat.
També hi ha alguns alumnes que queden desconcertats quan construeixen correctament un vector perpendicular al vector *AB* i s'adonen que, quan l'introdueixen a la barra d'entrada, el programa el situa amb origen al punt (0,0). Imaginaven que hauria de tenir el mateix origen que el vector de partida.
Ens adonem de la raó per la qual creuen que el vector perpendicular a *AB* ha de tenir el mateix origen. En construir *AB*, evidentment apareix una fletxa que va de *A* a *B*. Si es permuten les coordenades i es canvia un dels signes, el que es fa és una entrada algebraica d'un vector (no es marca a l'àrea gràfica) i per tant el programa automàticament, per defecte, col·loca l'origen al (0,0). Això, com hem comentat, els desconcerta, encara que finalment ho resolen.
Que defineixin un vector perpendicular a partir de les coordenades de *AB* té l'inconvenient que només val per als punts *A* i *B* de l'activitat. Si es canvien les seves coordenades, es desmunta la figura. Però també té l'avantatge que apliquen un recurs que vam veure a la sessió 7. Han de raonar i aplicar. L'altre camí possible, que manté la perpendicularitat encara que es moguin els punts de partida, consisteix en anar a la barra de "comanda" i usar "vector perpendicular" (al vector donat). No tan sols es manté la perpendicularitat, sinó que el vector que apareix té el mateix mòdul i el

mateix origen. No obstant això, d'aquesta manera els alumnes no poden veure quin algorisme intern ha usat el programa. No han de pensar en la relació que tenen les coordenades d'un i altre vector, simplement usar un recurs que és com prémer un botó i prou. De tota manera, cap al final de la sessió, quan veiem que la majoria ha resolt bé el cas particular, els expliquem com funciona la comanda "vector perpendicular".

Tots els alumnes excepte dos (Juan i Soslan) troben correctament les coordenades dels punts demanats: l'assoliment de la matematització horitzontal és alt.
També tots els alumnes excepte dos (els mateixos Juan i Soslan) usen un vector perpendicular multiplicat pels nombre adequats per trobar els punts *N1*, *N2*, *N3* i *N4*. Curiosament, hi ha 6 alumnes que malgrat haver usat clarament el vector perpendicular a la construcció amb Geogebra, declaren a la resposta de l'apartat *e* que han usat una recta perpendicular (Raquel, Neus, José, Toni, Alberto i Manel). Pel que fa a Juan i Soslan, col·loquen *N2* i *N4* en posicions incorrectes però que a simple vista dibuixen una figura força semblant a la demanada, i calculen *N1* i *N3* com a punts mitjans.

Tots els alumnes excepte dos (Juan i Soslan) donen com a mínim una de les equacions de les quatre demanades (l'equació vectorial i l'equació implícita de la recta que conté els punts *A* i *B, i* l'equació vectorial i l'equació implícita de la recta perpendicular al segment *AB*), i les troben sobre el paper, és a dir, que no utilitzen el recurs fàcil de construir la recta amb Geogebra, mirar la finestra algebraica, clicar sobre l'equació (per defecte implícita) i sol·licitar que aparegui la forma vectorial. Suposem que és perquè els alumnes desconeixen aquest recurs. Quan recorrem l'aula ens adonem que bona part dels alumnes intenta construir l'equació implícita per escrit, tal com ho vam fer a la pissarra a la sessió 5 [vegeu el registre de la sessió 5 a l'annex 2], a partir de l'equació contínua, o bé tenint en compte la relació entre el vector director i els coeficients de *x* i *y*, que també vam explicar.
Hi ha 11 alumnes que responen que sí que observen una relació entre els coeficients de les dues equacions implícites (fins i tot els que no les han traçades, per tant s'han de refiar només de les equacions que han trobat per escrit). Però d'aquests, només un alumne (Dídac) dóna una explicació correcta. Dels altres, 6 alumnes no escriuen cap explicació, i 4 en donen una d'incorrecta o incomprensible.
Hi ha 4 alumnes que deixen en blanc la pregunta sobre la relació entre els coeficients de les rectes.
Els 2 únics alumnes que no han calculat correctament els punts demanats són els que responen que no existeix cap relació entre els coeficients.

Una activitat que podien haver resolt i escrit en mitja hora els ha consumit pràcticament una hora. Aparentment, amb l'experiència de les activitats 1,2 3 i 4, aquesta activitat 6 hauria de ser ràpida i fàcil per als alumnes. Però el sol fet d'haver introduït un element nou, la perpendicularitat, ha constituït un entrebanc que els ha demanat temps. Això ha succeït malgrat que en una sessió anterior (la sessió 7, de tipus convencional) ha aparegut amb molta claredat el concepte de vector perpendicular. Si el procediment s'ha treballat a la classe convencional i els alumnes han pogut adquirir una mecànica, apareix a les activitats amb Geogebra en la forma original (és a dir, tal com s'ha fet a classe encara que el programa ofereix camins més còmodes per arribar-hi). És el cas de la construcció de les equacions de la recta. Però si només s'ha explicat el concepte, encara que sigui amb precisió i claredat, i no s'ha adquirit la mecànica, resulta difícil per als alumnes establir una connexió.

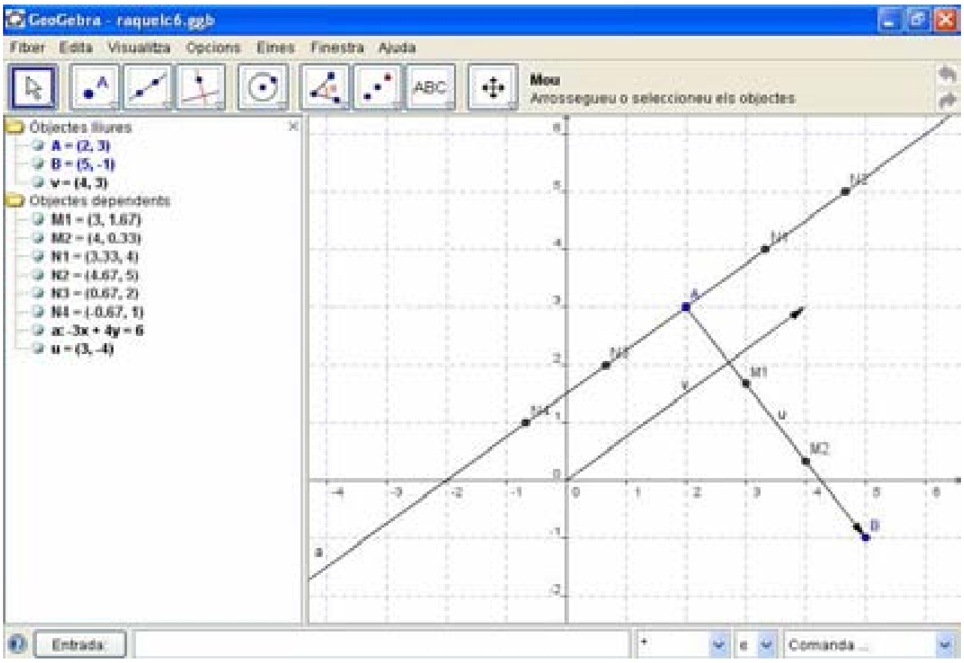
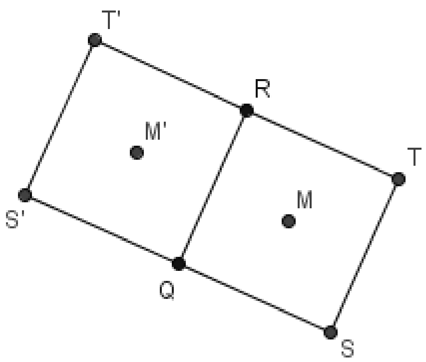


Figura 4.6. Exemple de l'aspecte d'un fitxer Geogebra de l'activitat 6 (alumna Raquel).

Aquesta activitat és la que tanca la seqüència d'introducció de continguts de baix a dalt mitjançant activitats contextualitzades en l'entorn del programari interactiu Geogebra (les activitats 7 i 8 són de síntesi).

4.3.9. Activitat 7



Breu descripció: donats dos vèrtexs d'un quadrat, *Q* i *R*, que defineixen un dels costats del quadrat, cal trobar els dos vèrtexs que falten, *S* i *T*, i el centre *M*. [hi ha dues solucions].

El dibuix que acompanya aquest text no figura al full d'activitat que reben els alumnes. Aquí el mostrem amb la finalitat d'il·lustrar la breu descripció de l'activitat.

Figura 4.7. Quadrats construïts a partir de Q i R (activitat 7)

Malgrat que a la sessió immediatament anterior els alumnes van fer l'activitat 6, en la qual hi intervenen vectors perpendiculars a un vector donat, hi ha una colla d'alumnes que tarden uns quants minuts per adonar-se que poden resoldre el problema fàcilment si comencen per construir un vector perpendicular al vector *QR*. Aquesta és la clau de la solució, però els costa trobar-la (Marta, Tanya, Federico, Erik, Ivan, Jesús i Youssef). En canvi, altres alumnes, com M. Carmen, Raquel, Alberto i Manel són prou ràpids.

La majoria dels alumnes tarda més temps del que havíem previst per construir els dos quadrats. Aparentment, un cop els alumnes han traçat el primer vector perpendicular, el procés ha de ser molt ràpid i mecànic, però observem que per adonar-se de quin és el camí a seguir i seguir-lo pas a pas, necessiten temps. Els costa situar-se i avançar. Per tant, no els queda prou temps per abordar una resposta escrita completa.
Per altra banda, quan recorrem l'aula cap al final de la sessió, ens adonem que alguns alumnes que treballen en la resposta escrita en realitat no resolen l'activitat per escrit (a pesar que al principi hem deixat clar allò que els demanàvem), sinó que redacten una explicació dels passos que han seguit per resoldre amb Geogebra (Jesús, Alberto i Manel). Altres sí que comencen a escriure el que hem demanat: M. Carmen, Alba, Erik i Dídac.

- Dels 15 alumnes que lliuren fitxers revisables, 11 construeixen correctament els dos quadrats que són solució (Youssef, M. Carmen, Toni, Marta, Jesús, Alba, Federico, Ivan, Tanya, José, Erik). D'aquests, 8 presenten també els dos punts mitjans correctes (M. Carmen, Toni, Jesús, Alba, Federico, Ivan, José, Erik), 1 col·loca només un dels dos punts mitjans (Youssef), i els 2 casos restants (Marta, Tanya) presenten un sol punt col·locat manualment, a ull, que visualment està prou centrat però que no correspon al punt demanat.
- Tots els 10 alumnes que construeixen correctament els quadrats utilitzen un vector perpendicular definit a partir del vector *QR* (o *RQ*) a base de permutar les coordenades i canviar un dels signes.
- Hi ha 4 alumnes (Raquel, Juan, Dídac, Soslan que construeixen figures que a simple vista semblen quadrats però que no tenen els vèrtexs en les posicions correctes. Els vèrtexs dels quadrilàters que es veuen són punts propers als vèrtexs autèntics.

A causa de la falta de temps (per realitzar les respostes escrites) que han patit alguns alumnes, hi ha 6 fulls en blanc (Youssef, Marta, Juan, Ivan, Tanya, Soslan). En altres 5 casos hi ha un inici de resposta, amb bona aparença, que queda tallat (Toni, Raquel, Angelo, Dídac, José) i per tant no podem saber si acabaria o no en una resposta completa correcta.
Hi ha 3 alumnes que no inicien exactament una solució escrita, sinó que intenten explicar quin és el procediment que han seguit amb Geogebra (Manel, Jesús, Alberto).
Hi ha 4 alumnes que escriuen una solució correcta usant un vector perpendicular a *QR* (o *RQ*) per trobar els vèrtexs que falten. D'aquests alumnes, 2 comencen una resposta

escrita per trobar els punts mitjans però no és correcta (M. Carmen, Alba) i els altres 2 no escriuen res sobre el càlcul dels punts mitjans, se suposa que per falta de temps.

4.3.10. Activitat 8

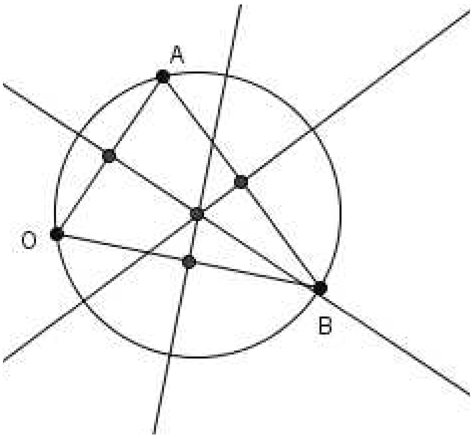


Figura 4.8. Circumcentre (activitat 8)

Breu descripció: donats tres punts *A*, *B* i *O*, els alumnes han de trobar el punt que equidista de tots tres. Es dóna la orientació que el punt que compleix això és el circumcentre (intersecció de les mediatrius) del triangle de vèrtexs *A*, *B* i *O*.
El dibuix que acompanya aquest text no figura al full d'activitat que reben els alumnes. Aquí el mostrem amb la finalitat d'il·lustrar la breu descripció de l'activitat.

Ens adonem que a les respostes escrites els alumnes troben els punts mitjans ràpidament i sense dificultats, però que bastants vacil·len a l'hora de construir les mediatrius. Per trobar la direcció perpendicular a un costat han d'obtenir un vector a partir dels vèrtexs, i després permutar les coordenades i canviar un signe. Fins que no s'adonen d'això, hi donen unes quantes voltes. Després, dubten sobre quina forma de l'equació de la recta han d'usar.

- Tots els 18 alumnes que han realitzat l'activitat han trobat les coordenades del circumcentre construint com a mínim dues mediatrius (la majoria han construït les tres; només Maria Carmen i Alba n'han traçat només dos) i marcant la seva intersecció. Tots han construït la circumferència que passa pels tres vèrtexs del triangle. Les diferències més importants que hi ha entre els diferents fitxers resideixen en la validesa de la construcció general si es mou algun dels vèrtexs del triangle.
- Hi ha 10 alumnes (Manel, Youssef, M. Carmen, Angelo, Marta, Alba, Federico, Tanya, Alberto, Erik) que construeixen una figura que conserva les propietats independentment de la situació dels vèrtexs del triangle: la circumferència passa pels tres vèrtexs i el punt del circumcentre correspon a la intersecció de les mediatrius.
- Hi ha 1 alumne (Raquel) que construeix bé la circumferència però col·loca manualment el punt del circumcentre sobre la intersecció de les mediatrius.
- Hi ha 1 alumne (Ivan) que escriu les equacions de les mediatrius a la barra d'entrada algebraica (és a dir que es basa en la resolució per escrit), per la qual cosa només valen per al triangle de l'activitat.

- Hi ha 4 alumnes (Juan, Dídac, Soslan) que tracen una circumferència amb centre mòbil sobre una de les mediatrius, i que passa per un dels vèrtexs del triangle. Quan la circumferència s'ajusta manualment de tal manera que passa pels tres vèrtexs i té el centre a la intersecció de les mediatrius, apareixen les coordenades correctes del circumcentre. Però si es mou un vèrtex, la figura es desmunta.
- Hi ha 2 alumnes (Toni, José) que col·loquen el centre de la circumferència sobre una mediatriu però no la fan passar per cap vèrtex del triangle, sinó que l'ajusten manualment.

Dels 18 alumnes presents a l'activitat:

- N'hi ha 5 (Toni, Raquel, Jesús, Alberto, José) que resolen correctament per escrit: troben algebraicament com a mínim dues equacions de mediatrius i resolen el sistema d'equacions. Les diferències entre aquestes resolucions resideixen en quina forma de l'equació de la recta han utilitzat per trobar les equacions de les mediatrius. Jesús utilitza la forma implícita $A\mathrm{x}+B\mathrm{y}+C=0$, en què la parella (A,B) és el vector que té origen i extrem als vèrtexs del costat corresponent i per tant és perpendicular al vector director de la mediatriu. El nombre C el troba substituint les coordenades (x,y) del punt mitjà del costat per on passa la mediatriu. Raquel i Alberto usen la forma contínua per col·locar punts i vectors directors, i després fan uns pocs càlculs per convertir-la a forma implícita. Toni i José usen la forma explícita, en què el pendent ve donat pel vector director de la mediatriu (vector perpendicular al costat corresponent), que donat segons els coeficients de la forma implícita és $-A/B$. Troben l'ordenada a l'origen substituint les coordenades del punt mitjà per on passa la mediatriu.
- Hi ha 2 alumnes, Federico i Dídac que fan els passos de resolució del sistema format per dues mediatrius però cometen errors de càlcul i per tant les coordenades resultants no són correctes. Tots dos usen la forma implícita per construir les mediatrius.
- Hi ha 3 alumnes que troben les equacions de com a mínim dues mediatrius però no aborden o no acaben la resolució del sistema. Usen la forma implícita per construir les mediatrius.
- Els 8 alumnes restants no arriben a construir l'equació de cap mediatriu, tot i que aborden els càlculs per trobar punts mitjans i/o vectors perpendiculars als costats, excepte Manel, que lliura el full en blanc.

4.4. Consideracions sobre el desenvolupament de les activitats

En aquest capítol hem mostrat de prop el dia a dia de la implementació de les activitats amb Geogebra. En el capítol següent desenvolupem en profunditat i detall l'anàlisi de les dades obtingudes en aquesta implementació, no des del punt de vista del dia a dia, sinó contemplant el conjunt de les activitats i estudiant, en aquest conjunt, quins són els resultats grupals i individuals de la matematització, i quins són els resultats de les valoracions subjectives que realitzen els alumnes sobre aquestes activitats.

Abans, però, de passar a aquesta anàlisi que com hem comentat correspon al capítol següent, creiem necessari explicitar una sèrie de consideracions fetes a partir del seguiment diari que hem presentat en aquest capítol 4. Tot i que toquen aspectes que són objecte d'anàlisi en el proper capítol, ja emergeixen en el seguiment diari del procés d'implementació i, encara que només amb les dades del seguiment diari no podem tractar-les amb la profunditat necessària, sí que podem mostrar-les ara amb el propòsit de fer-les evidents i situar-les, abans de convertir-les en objecte d'un tractament més aprofundit.

Són aspectes que, a més, tenen una relació directa amb els objectius que hem declarat al final del capítol 1, amb els referents teòrics que hem presentat al capítol 2 i amb el nostre plantejament metodològic.

1. Les activitats contextualitzades en l'entorn del programari interactiu Geogebra efectivament han induït la matematització.

En el seguiment diari de les activitats, i tal com queda reflectit en el relat que hem realitzat en aquest capítol, hem constatat que la gran majoria dels alumnes han "transferit" les situacions que els hem plantejat cap a una representació matemàtica, amb visualització i "manipulació" dels elements que constitueixen aquesta representació matemàtica, i que les han resoltes correctament. La matematització ha estat induïda per les pròpies activitats, és a dir, no ha estat subministrada pel professor.

És clar que no n'hi ha prou, només, amb afirmar que s'ha produït la matematització induïda, per molt que l'observació a l'aula, recollida en el registre diari del professor, així ho indiqui. Cal comptabilitzar i analitzar en quina mesura s'ha produït, distingint entre la matematització horitzontal i la matematització vertical. Aquesta és una tasca que duem a terme en el proper capítol. Ja hem subratllat en el capítol 1 que l'anàlisi de la matematització és un element absolutament central en el nostre treball. Constitueix, de fet, el nucli de l'objectiu número 2 del nostre treball, formulat al capítol 1.

2. Els alumnes han treballat les activitats amb Geogebra en un clima d'aula marcat per la implicació i la motivació.

Hem pogut observar com totes els alumnes s'han adaptat ràpidament al tipus de treball que comporta la realització d'activitats en el programari interactiu Geogebra, i com han mantingut una bona actitud de treball durant totes les sessions a l'aula TIC. La impressió que hem tingut és que ha existit un ambient positiu de motivació, i que les activitats han contribuït a una millor aprehensió dels continguts, en comparació amb una metodologia tradicional.

Naturalment, hem de realitzar una puntualització anàloga a la que hem fet per a la matematització: no ens podem quedar només amb aquesta percepció, per molt evident que ens resulti a partir de l'observació a l'aula. Hem d'analitzar detalladament les valoracions subjectives dels alumnes que hem recollit a través dels qüestionaris de les activitats. Aquesta és una tasca que duem a terme al proper capítol. Recordem que l'anàlisi de les valoracions subjectives dels alumnes és un dels objectius que ens hem marcat de partida (concretament, l'objectiu número 3, formulat en el capítol 1). També és oportú recordar que en la nostra exposició dels referents teòrics al capítol 2, hem pres a com a un dels punts de partida la reflexió de Filloy (1998) segons la qual "els primers ressorts que hem d'accionar en l'aprenentatge de les Matemàtiques, són els de la motivació". A l'aula hem tingut la impressió evident que aquests ressorts s'han accionat, tal com preteníem, i ara ens resta mostrar, a través de l'anàlisi de les dades, que efectivament ha estat així.

3. La seqüència de les sessions del procés d'implementació ha induït una convergència de les estratègies de resolució dels alumnes.
Ho hem mostrat en aquest capítol 4 a través del relat dels fets rellevants de l'observació a l'aula i l'examen de les respostes, especialment en les activitats 1, 2, 3 i 4: al principi, en la primera activitat, hem detectat una notable diversitat d'estratègies de resolució. A mesura que els alumnes anaven realitzant les activitats següents, aquesta diversitat es reduïa i al final dominava absolutament una sola estratègia. Hem demanat als alumnes que expliquin quines estratègies han utilitzat, i per què, en la resolució del bloc d'activitats 1-4, i han contestat que els semblava la millor entre vàries que han triat, o bé que n'han tingut una percepció tan clara que han decidit adoptar-la. Per tant, és la pròpia seqüència de les activitats la que indueix una convergència d'estratègies. Amb la qual cosa deduïm que no tan sols es produeix una matematització induïda, sinó que presenta una determinada direcció.
Tal com hem dissenyat les activitats (capítol 3) ja hem previst que les activitats 1-4 formessin un bloc que conduís els alumnes cap a l'equació vectorial de la recta mitjançant la matematització induïda. I efectivament succeeix això, perquè en aquest bloc els processos de resolució dels alumnes van convergint sobre una estratègia, que és, en essència, la de generar un punt alineat amb uns altres dos punts donats *A* i *B* utilitzant sumant a un d'aquests punts donats, *A* o *B*, el vector *AB* (o *BA*) multiplicat per un nombre. Per tant, l'actuació real dels alumnes valida el nostre disseny perquè els alumnes arriben allà on pretenem, i ho fan com a subjectes actius a través del seu procés de matematització, induïda per les activitats.

Finalment, per resumir:

- En el nostre plantejament formulat al capítol 1 i referenciat en un marc teòric al capítol 2, hem defensat que un plantejament "de baix a dalt", iniciat amb activitats contextualitzades en l'entorn interactiu del programari Geogebra, havia d'induir en els alumnes la matematització (i per tant millorar l'aprehensió dels continguts matemàtics per després poder passar a la seva formalització), i havia d'augmentar la motivació en comparació amb un plantejament didàctic tradicional.
- En l'observació diària del procés d'implementació de les activitats, i a la llum de les primeres dades, sense haver entrat encara en una anàlisi detallada, hem percebut amb claredat que efectivament les activitats han induït la matematització i han augmentat la motivació i la implicació de l'alumnat. Per

tant, en aquest punt ja no tan sols ens movem en el terreny teòric, sinó que comptem amb unes primeres evidències sorgides del procés d'implementació.

– En el capítol 5 sotmetem a anàlisi la matematització realitzada pels alumnes i la seva valoració subjectiva, sabent a partir de l'experiència a l'aula durant el procés d'implementació, que trobarem amb seguretat uns alts resultats en la matematització i previsiblement unes valoracions subjectives positives. En quins graus, i amb quins matisos, i amb quines interpretacions associades, són qüestions que desenvolupem al capítol 5.

5. Segon nivell d'anàlisi i interpretació

Aquest capítol conté la part més extensa i profunda de l'anàlisi de la matematització dels alumnes en les activitats contextualitzades en l'entorn del programari interactiu Geogebra. Les qüestions que hi tractem tenen una importància central en el nostre treball.

Si en el capítol anterior adoptàvem una visió marcada pel dia a dia de la implementació, en aquest capítol adoptem una visió més global, distanciada i a posteriori del procés d'implementació. Sobre el conjunt de la seqüència de les activitats apliquem una metodologia pròpia (nostra) per a l'anàlisi de les dades, que expliquem amb detall. Analitzem, amb instruments quantitatius i també qualitatius, el resultats grupals i els resultats individuals dels alumnes en el procés de matematització, i realitzem una classificació dels alumnes en diferents categories. Tot això ens permet afirmar que les activitats efectivament indueixen la matematització en els alumnes. Detallem com es produeix aquesta matematització i amb quines diferències apareix dins de cada categoria.

Per aprofundir en l'estudi qualitatiu de la matematització, duem a terme un estudi de casos sobre quatre alumnes representatius, en el qual analitzem com matematitzen en les activitats amb Geogebra i ho comparem amb com realitzen una prova escrita convencional.

També analitzem les valoracions subjectives dels alumnes sobre la realització de les activitats amb Geogebra, tant des la perspectiva grupal com des de la perspectiva individual. Aquesta anàlisi ens permet constatar que les activitats tenen un efecte clarament positiu sobre la motivació i la implicació de l'alumnat en el procés d'aprenentatge, i que milloren l'autoconsciència de l'aprenentatge. També mereixen una millor valoració subjectiva dels alumnes pel que fa de la comprensió dels continguts, en comparació amb una metodologia tradicional.

A la part final del capítol, a partir de l'anàlisi detallat de la matematització i les valoracions subjectives de l'alumnat, realitzem una sèrie de consideracions de les quals emergeix una síntesi interpretativa. És la sistematització del nostre plantejament didàctic, sota la denominació de "plataforma de matematització". Això comporta transitar des del nostre plantejament concret fins a una proposta didàctica de caire més general però fonamentada en els resultats del nostre treball d'implementació.

5.1. Intervals de valoració qualitativa

Les respostes a les preguntes sobre la matematització per a la resolució de les activitats tenen, com ja hem indicat al capítol 4, dos valors possibles: 0 (no assolit) i 1 (assolit). Les respostes de valoració subjectiva sobre l'ús de Geogebra en tenen quatre: 0 ("gens"), 1/3 ("poc"), 2/3 ("bastant") i 1 ("molt"). En tots dos casos, matematització i valoració, les mitjanes calculades a partir de les respostes estan situades a l'interval [0, 1].
Dividim [0, 1] en 6 subintervals amb l'objectiu d'establir bandes per a la valoració qualitativa de les mitjanes, és a dir, per atorgar als nombres resultants dels càlculs un significat interpretable qualitativament. Són: [0, 1/6]; (1/6, 1/3]; (1/3, 1/2); (1/2, 2/3); [2/3, 5/6); [5/6, 1]. El valor 1/2, no està inclòs a cap subinterval perquè rep una consideració especial, tal com expliquem uns pocs paràgrafs més endavant. També argumentem el perquè de considerar intervals tancats, oberts o semioberts.

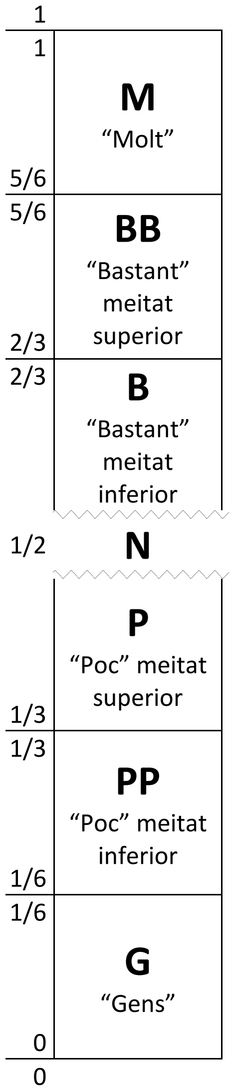


Figura 5.1. Intervals de valoració

Banda de valoració M ("Molt") [5/6, 1].
Per als resultats de les preguntes sobre la matematització a les activitats, una mitjana dins d'aquest interval indica que existeix un fort domini dels valors 1 sobre els valors 0, per sobre del 83% del total de valors. Per tant, es produeix una matematització amb resultats correctes en un percentatge molt alt. Per a les preguntes sobre la valoració subjectiva de l'ús de Geogebra (quatre opcions de resposta per a cada pregunta), una mitjana dins d'aquest interval indica que un nombre molt important de respostes són "molt", amb valor 1. Prenguem un exemple: suposem que en el conjunt de respostes només apareixen dos valors, 2/3 i 1, amb la mateixa freqüència. La mitjana serà exactament 5/6. Hem considerat que aquest resultat ha de formar part de l'interval M per la raó següent: les respostes "molt" són una presa de posició rotunda, mentre que en les respostes "bastant" hi pot haver més matisos. En una situació en què, per exemple, hi hagi el mateix nombre de "bastant" que de "molt", la rotunditat de la resposta "molt" decanta la valoració qualitativa cap a dins de l'interval M. Per això el valor 5/6 hi pertany.

Banda de valoració BB ("Bastant, meitat superior) [2/3, 5/6).
Per als resultats de les preguntes sobre la matematització, una mitjana dins d'aquest interval indica que les respostes amb valor 1 estan, aproximadament, entre el 67% i el 83% del total. Això indica un notable assoliment de la matematització amb resultats correctes. A les preguntes sobre la valoració de l'ús de Geogebra, hi ha d'haver un

nombre important de respostes "bastant" i/o "molt" per decantar la balança cap a l'interval BB. Prenguem un exemple: suposem que totes les respostes tenen el valor 2/3. Hem considerat que aquesta unanimitat en la valoració "bastant" ha de fer entrar la valoració qualitativa de la mitjana dins de l'interval BB. Per això el valor 2/3 hi pertany.

Banda de valoració B ("Bastant", meitat inferior) (1/2, 2/3).
Per als resultats de les preguntes sobre la matematització, una mitjana dins d'aquest interval indica que les respostes amb valor 1 són més de la meitat del total però no arriben a un nombre realment notable. A les preguntes sobre la valoració de Geogebra, hi ha d'haver un nombre important des respostes "bastant" i/o "molt" però també un nombre apreciable, encara que no dominant, de respostes "poc" i/o "gens".

El valor 1/2 és especial. Li assignem la lletra N ("Neutre").
Prenguem un parell d'exemples. Suposem que les respostes a les preguntes sobre la matematització tenen la mateixa freqüència de 0 que de 1. Hem considerat que no és clara la decisió d'incloure això a l'interval B ni tampoc a l'interval P. Suposem també que a les respostes de valoració de Geogebra només hi ha dos valors diferents, 1/3 i 2/3, i que tenen la mateixa freqüència. La mitjana és exactament 1/2, però tampoc és clara la decisió de donar més importància al "poc" i d'aquesta manera incloure el resultat a l'interval P, o a l'inrevés, donar més importància al "bastant" i incloure el resultat a l'interval B.

Banda de valoració P ("Poc", meitat superior) (1/3, 1/2).
Per als resultats de les preguntes sobre la matematització, una mitjana dins d'aquest interval indica que les respostes amb valor 0 són més de la meitat del total però no arriben a un nombre realment notable. L'assoliment de la matematització amb resultats correctes no arriba a la meitat però tampoc és notablement insuficient. A les preguntes sobre la valoració subjectiva de Geogebra, hi ha d'haver un nombre important de respostes "poc" i/o "gens" però també un nombre apreciable, encara que no dominant, de respostes "bastant" i/o "molt".

Banda de valoració PP ("Poc", meitat inferior) (1/6, 1/3].
Per als resultats de les preguntes sobre la matematització, una mitjana dins d'aquest interval indica que les respostes amb valor 1 estan, aproximadament, entre el 17% i el 33% del total. Això indica un molt pobre assoliment de la matematització amb resultats correctes. A les preguntes sobre la valoració de l'ús de Geogebra, hi ha d'haver un nombre important de respostes "poc" i/o "gens" per decantar la balança cap a l'interval PP. Prenguem un exemple: suposem que totes les respostes tenen el valor 1/3. Hem considerat que aquesta unanimitat en la valoració "poc" ha de fer entrar la valoració qualitativa de la mitjana dins de l'interval PP. Per això el valor 1/3 hi pertany.

Banda de valoració G ("Gens") [0, 1/6].
Per als resultats de les preguntes sobre la matematització, una mitjana dins d'aquest interval indica que existeix un fort domini dels valors 0 sobre els valors 1, per sobre del

83% del total de valors. Per tant, es dóna una matematització amb resultats correctes molt escassa, de pes pràcticament irrellevant. Per a les preguntes sobre la valoració de l'ús de Geogebra, una mitjana dins d'aquest interval indica que un nombre molt important de respostes són 0. Prenguem un exemple: suposem que en el conjunt de respostes només apareixen dos valors diferents, 1/3 i 0, amb la mateixa freqüència. La mitjana serà exactament 1/6. Per un raonament anàleg al que hem utilitzat per considerar que el valor 5/6 ha de pertànyer a l'interval M, considerem que el valor 1/3 ha de pertànyer a l'interval G.

5.2. L'enfocament de baix a dalt i la matematització

5.2.1. Resultats grupals

Recordem que, tal com hem remarcat al capítol 3, en tota la seqüència d'implementació de les activitats amb Geogebra, des de l'activitat 1 fins a la 8, s'han de considerar, segons el disseny, 50 columnes de dades sobre la matematització, de les quals 20 corresponen a la MHG, 16 a la MHE i 14 a la MV.
No obstant això, a l'activitat 7, tal com ha quedat reflectit al registre del desenvolupament de la sessió, la gran majoria dels alumnes no va tenir temps per abordar la resolució per escrit, ja que es va aturar a la resolució amb Geogebra més temps del que havíem previst. La conseqüència és que no hi ha dades suficients per incloure la MHE de l'activitat 7 dins de l'anàlisi (això suposa que comptem amb dues columnes menys de dades).
Per tant, disponibles per a l'anàlisi existeixen 48 columnes de dades sobre la matematització, de les quals 20 corresponen a la MHG, 14 a la MHE i 14 a la MV. Si tots els 19 alumnes que van iniciar la seqüència haguessin aportat dades durant tot el procés, això suposaria un total de 912 valors (zeros o uns), dels quals 380 correspondrien a la MHG, 266 a la MHE i 266 a la MV. Els valors 1 indiquen que s'ha assolit la matematització que condueix a un resultat correcte, i els valors zero indiquen que no s'ha assolit.

A la pràctica, les absències d'alguns alumnes en algunes sessions, i el fet que es produïssin alguns pocs incidents que ja s'han comentat al registre de la implementació, fan que sobre els 912 possibles valors en realitat comptem amb 831 valors per a l'anàlisi, 346 corresponents a la MHG, 245 a la MHE i 240 a la MV. De fet, són més que suficients.

Un primer recompte global de totes aquestes dades, sense distingir a quin tipus de matematització pertanyen, en tota la seqüència d'activitats amb Geogebra i per al conjunt de tots els alumnes, dóna el resultat següent:

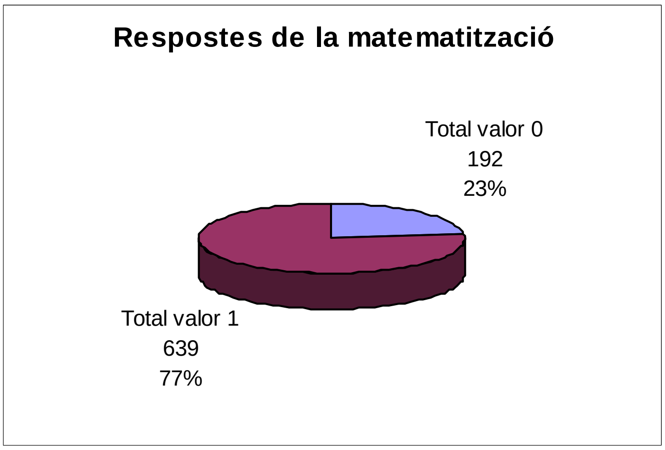


Figura 5.2. Gràfic dels valors del conjunt de respostes de la matematització

La mitjana d'aquest conjunt de valors és 0,77. Se situa a la banda de valoració BB. És a dir: en aquesta primera aproximació observem un alt grau global d'assoliment de la matematització que condueix a resultats correctes. Aproximadament les 3/4 parts dels valors enregistrats són 1.

El segon pas consisteix en comptar els resultats dels alumnes (en tota la seqüència d'activitats) distingint cada un dels tres tipus de matematització: MHG, MHE i MV. Això significa que dels resultats originalment recollits i tabulats activitat per activitat immediatament després de la realització de cada una d'elles durant la fase d'implementació [resultats mostrats a l'annex 3 d'aquest treball], prenem les dades que corresponen a la MHG en totes les activitats i les reagrupem en una sola taula. Fem el mateix amb les dades que corresponen a la MHE i la MV. Recordem que a la part final del capítol 3 hem mostrat quines són les preguntes que corresponen a cada un dels tres tipus de matematització. Són les que reagrupem en tres taules, una per a cada tipus de matematització. No es tracta, doncs, d'informació nova, però sí reordenada per a l'anàlisi.

Presentem a continuació, com a exemple, la taula corresponent a les dades de la MHG. Les altres dues taules (per a la MHE i la MV) tenen un aspecte similar. Podríem presentar-les també aquí, però per evitar omplir pàgines amb taules plenes de dades numèriques que segurament dificultarien una lectura fluida del capítol, hem preferit presentar una sola de les taules a tall d'exemple i en tot cas assenyalar que la sèrie completa de les tres taules figura a l'annex 4 d'aquest treball, disponible per a la consulta.

Assenyalem que, igual que succeeix amb les taules de cada activitat (taules a les quals hem fet especial referència al capítol 4) les cel·les de color gris, buides, indiquen que no existeix resposta escrita de l'alumne ni tampoc hem pogut assignar valors a partir de l'observació dels fitxers de Geogebra que han construït els alumnes.

MH GEOGEBRA	Activitat 1	Activitat 2			Activitat 3		Activitat 4		Activitat 5					Activitat 6				Activitat 7		Activitat 8	Mitjana	Banda
	a	a	b	c	a	b	a	b	a	b	c	d	a	a	b	c	d					
Manel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0,85	M
Youssef	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0,95	M
M. Carmen	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0,95	M
Toni	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,95	M
Raquel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0,85	M
Angelo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0,85	M
Marta	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0					1	0	1	0,75	BB
Juan	0	1	1	1			1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0,50	N
Jesús							1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0,93	M
Alba	1	1	1	1	1	1	1	1						1	1	1	1	1	1	1	1,00	M
Federico	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	M
Neus	1	1	1	1	1	1	1	1						1	1	1	1				1,00	M
Ivan	1	1	1	1	1	1			0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,94	M
Tanya	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0,85	M
Dídac		1	1	1	1	1			1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0,76	BB
Soslan	0	1	1	1			1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0			1	0,56	B
Alberto	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0,85	M
José	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0,90	M
Erik	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	M

Taula 5.1. Resultats de la MHG

A partir de les taules de dades agrupades segons el tipus de matematització (com l'anterior), realitzem un senzill recompte de totes les dades de cada taula, la qual cosa ens condueix als resultats grupals (de tots els alumnes en tota la seqüència d'activitats) per a la MHG, la MHE i la MV. Presentem a continuació els tres gràfics de sectors que obtenim:

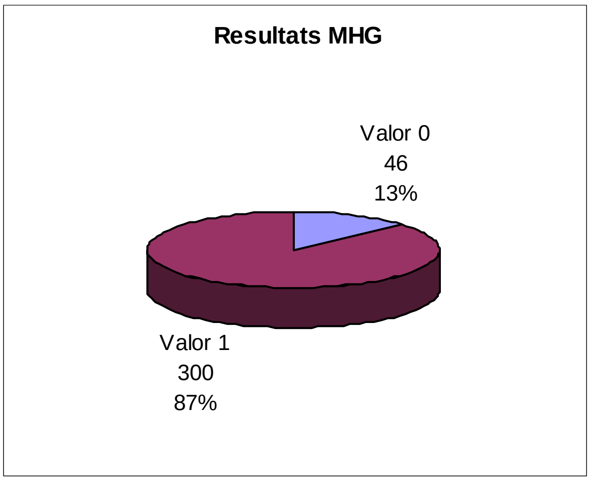


Figura 5.3. Gràfic dels valors de les respostes de la MHG

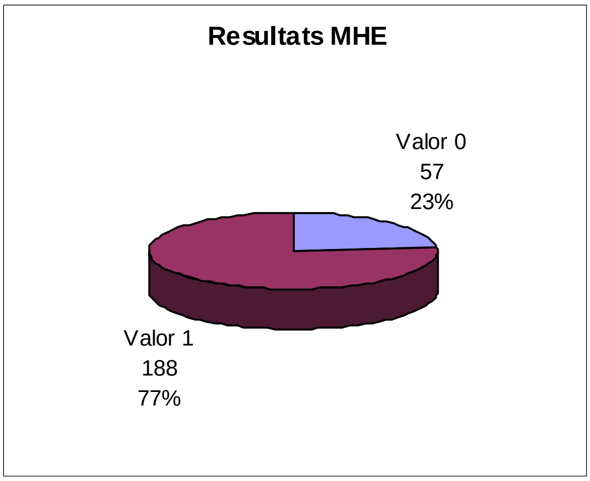


Figura 5.4. Gràfic dels valors de les respostes de la MHE

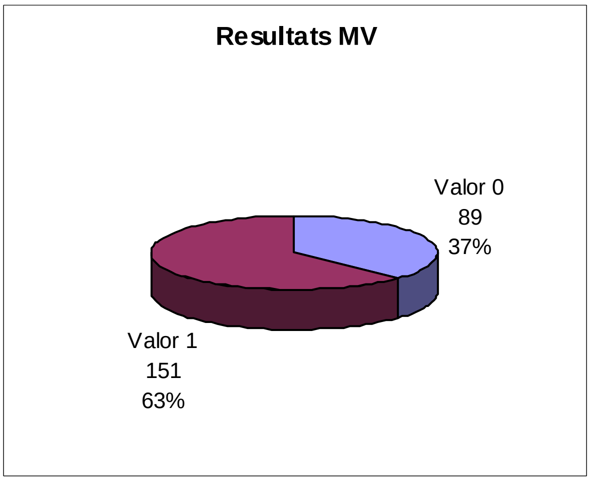


Figura 5.5. Gràfic dels valors de les respostes de la MV

A partir d'aquest recompte, observem que el grup d'alumnes, vist com un conjunt, presenta un molt alt grau d'assoliment de la MHG, superior a les 5/6 parts de les respostes, que correspon a la banda de valoració M.
La MHE té un grau d'assoliment alt, a la banda de valoració BB. Aproximadament les 3/4 parts de les respostes tenen valor 1.
La MV té un grau d'assoliment notable, però inferior a la MHE i encara més a la MHG. Se situa a la banda de valoració B. Una mica menys de les 3/4 parts de les respostes tenen valor 1.

Tipus de matematització	Banda de valoració grupal
MHG	M
MHE	BB
MV	B

Taula 5.2. Bandes de valoració grupal per als tres tipus de matematització

Per aconseguir una representació comparativa més visual d'aquests resultats dels tres tipus de matematització considerats, incloem un gràfic on hi ha representats els valors de les mitjanes grupals de la MHG, la MHE i la MV per al conjunt de les activitats amb Geogebra:

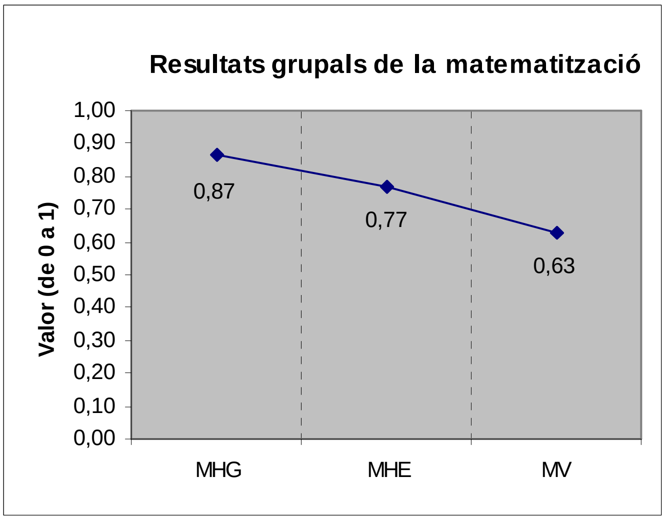


Figura 5.6. Representació comparativa dels resultats grupals de les tres matematitzacions

Observem que, llegint d'esquerra a dreta, es produeix una clara davallada. D'un resultat grupal realment alt per a la MHG (0,87) passem a un resultat inferior per a la MHE (0,77), que interpretat en termes percentuals (en una escala de 0 a 100) significa un descens de 10 punts. El descens entre la MHE i la MV és encara més pronunciat, de 14 punts percentuals. Entre la resolució amb Geogebra (MHG) i la generalització dels resultats (MV) hi ha, doncs, una diferència de 24 punts percentuals, que és significativa. No es pot atribuir a una incertesa pròpia de la mesura, sinó que afirmem que hem detectat un fet clarament reflectit en els resultats. Al grup, com a conjunt, dins d'uns resultats globals alts, li resulta més difícil expressar per escrit els càlculs que resoldre amb Geogebra, i encara més difícil obtenir expressions generals.

Aprofundim sobre aquest aspecte, que considerem molt rellevant, en els apartats que venen a continuació.

5.2.2. Resultats individuals

Després d'haver considerat una primera aproximació analítica mitjançant els resultats grupals, centrem l'atenció en els resultats individuals. Prenem les mitjanes de cada un dels alumnes, individualment, del conjunt de valors (zeros i uns) corresponents a les MHG, MHE i MV de tot el procés d'implementació de les activitats. I traduïm aquestes mitjanes individuals de cada tipus de matematització a la banda de valoració corresponent. Hi afegim també la mitjana individual de tot el procés, és a dir, la que es calcula amb totes les dades individuals dels tres tipus de matematització junts.
Presentem les bandes de valoració resultants d'aquests càlculs a la taula següent:

	MHG	MHE	MV	TOT
Manel	M	B	P	BB
Youssef	M	BB	N	BB
M. Carmen	M	M	B	M
Toni	M	M	B	M
Raquel	M	M	BB	M
Angelo	M	M	BB	BB
Marta	BB	BB	B	BB
Juan	N	N	B	B
Jesús	M	B	BB	BB
Alba	M	M	BB	M
Federico	M	M	B	M
Neus	M	BB	BB	BB
Ivan	M	B	B	BB
Tanya	M	B	N	BB
Dídac	BB	M	M	M
Soslan	B	N	N	B
Alberto	M	M	N	BB
José	M	M	B	BB
Erik	M	BB	M	M

Taula 5.3. Intervals de valoració per als resultats individuals de la matematització

A partir de l'observació d'aquesta taula distingim quatre categories de comportament individual per que fa a la matematització:

– *Categoria 1:* alumnes que se situen en les dues bandes de valoració més altes, M i BB, en els tres tipus de matematització. Això significa que la mitjana del valor de les respostes és igual o superior a 2/3 tant en la MHG com en la MHE i la MV.

- *Categoria 2:* alumnes que se situen en les dues bandes de valoració més altes en els dos tipus de matematització horitzontal, MHG i MHE, però que estan en bandes inferiors a la MV.
- *Categoria 3:* Alumnes que se situen a una de les dues bandes més altes, BB o M, només a la MHG. A la MHE i a la MV estan per sota del valor 2/3.
- *Categoria 4:* Alumnes que estan per sota de les dues bandes de valoració més altes en tots els tipus de matematització. Si superen el valor mitjà 1/2 en la MHG, la MHE o la MV, ho fan per poc.

Segons aquesta classificació, els alumnes queden distribuïts de la manera que apareix a la taula següent:

Categoria 1 7 alumnes	Raquel Angelo Jesús (*) Alba Neus Dídac Erik
Categoria 2 7 alumnes	Youssef M. Carmen Toni Marta Federico Alberto José
Categoria 3 3 alumnes	Manel Ivan Tanya
Categoria 4 2 alumnes	Juan Soslan

Taula 5.4. Classificació dels alumnes segons els resultats individuals de la matematització

(*) Hem inclòs l'alumne Jesús dins de la categoria 1 a pesar que està en la banda de valoració B a la MHE. Cal tenir en compte que és un alumne que va estar absent a les activitats 1 i 2, i que a l'activitat 3 tot just es va començar a situar i no va ser capaç de lliurar les respostes. Però a partir d'aquí es va adaptar bé a la seqüència de treball. De fet, amb les dades disponibles per al seu cas, està a la banda de valoració BB a la MV, és a dir, que és capaç de generalitzar sense gaires dificultats.
Pel que fa a altres alumnes que van estar absents en alguna o algunes activitats, compten amb menys dades analitzables que la resta del grup, però el seu registre és suficient i prou regular com per incloure'ls a les categories on apareixen situats.

Els resultats individuals reflecteixen un fet que ja ha aparegut a l'anàlisi dels resultats grupals: la davallada en els resultats, quan es produeix, ho fa des d'uns resultats més alts en la MHG, inferiors en la MHE i encara menors en la MV. És cert que els alumnes de la categoria 1 aconsegueixen resultats alts en els tres tipus de matematització, però els que no estan en aquest cas, quan presenten resultats sensiblement diferents, sempre ho fan en el sentit descendent de la MHG a la MHE i a la MV. A la categoria 2 el descens només es dóna clarament de la MHE a la MV. A la categoria 3, s'aprecia bé el descens de la MHG a la MHE i de la MHE a la MV.

Adoptarem ara un punt de vista que complementa l'anàlisi anterior, i que consisteix en comptar, i sobretot mostrar gràficament, quants alumnes (dels 19 totals) assoleixen resultats alts (bandes BB i M) en la matematització dels tipus següents:

- En la MHG (suma dels alumnes que pertanyen a les categories 1, 2 i 3)
- En la MHG i també en la MHE (suma dels alumnes que pertanyen a les categories 2 i 3)
- En tots els tres tipus de matematització, MHG, MHE i MV (els alumnes que pertanyen a la categoria 3)

Presentem aquests resultats al gràfic de columnes que segueix aquest paràgraf. A la part superior de cada barra hi apareix el nombre d'alumnes i també el tant per cent que representen sobre el total de l'alumnat. Hi hem afegit (primera columna del gràfic) els alumnes que no obtenen resultats alts en cap tipus de matematització.

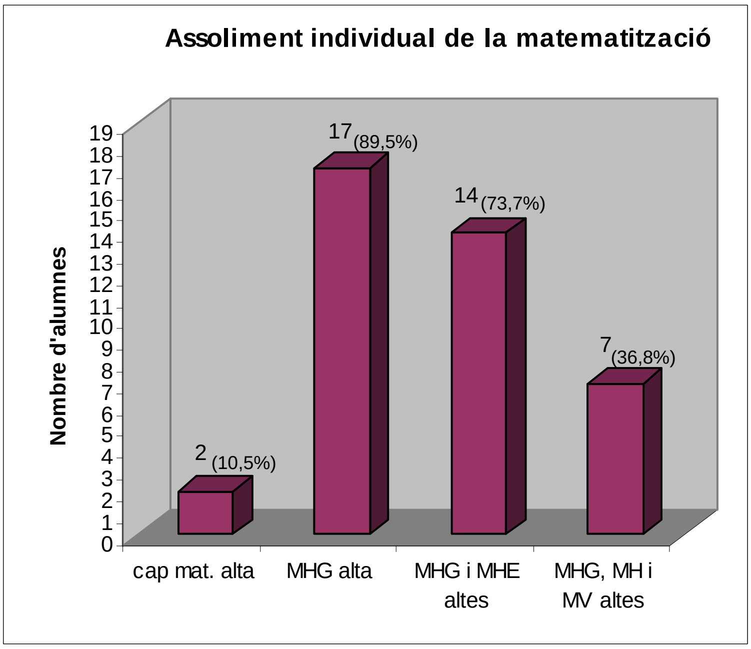


Figura 5.7. Representació gràfica de l'assoliment de la matematització

Es pot observar amb molta claredat que la immensa majoria dels alumnes assoleixen correctament amb bons resultats la matematització horitzontal amb Geogebra (MHG; segona columna del gràfic) de les situacions plantejades. Prop de les tres quartes parts de l'alumnat és, a més, capaç de donar compte matemàticament, per escrit, de la matematització (tercera columna del gràfic). Ara bé, els alumnes que també arriben a uns resultats alts en la generalització dels resultats ja no són majoria: se situen una mica per sobre de la tercera part del total (molt a prop dels 3/8 del total d'alumnes; quarta columna del gràfic). Pel que fa als alumnes que no aconsegueixen ni tan sols assolir còmodament la MHG, representen una fracció petita (pràcticament una desena part).

5.2.3. Interpretació dels resultats de la matematització

En apartats anteriors hem mostrat els resultats grupals mitjans per als tres tipus de matematització, MHG, MHE i MV, i hem classificat els alumnes en quatre categories segons els seus resultats individuals en aquests mateixos tipus de matematització. En aquest apartat aprofundim l'anàlisi mitjançant un enfocament que no és ni exactament grupal ni tampoc individual, sinó que conté elements de tots dos punts de vista. Consisteix en calcular els resultats mitjans a cada un dels quatre subgrups formats per les quatre categories.

Ja hem assenyalat abans que en els resultats grupals advertim una davallada de l'assoliment de la matematització segons aquest ordre: MHG, MHE, MV. Hem presentat les dades corresponents de forma gràfica i hem realitzat una sèrie de comentaris que no cal repetir. Tenint en compte la referència que ens proporcionen aquests resultats grupals coneguts, ara ens preguntem: l'ordre decreixent dels resultats de les tres matematitzacions es manté si en comptes de considerar tot el grup prenem cada un dels subgrups formats per les quatre categories? I si es manté, quina forma concreta presenta?
Per respondre això, el primer que fem és distribuir els resultats dels tres tipus de matematització segons els subgrups formats per les quatre categories, i calcular les mitjanes dins de cada un d'aquests subgrups. I, seguidament, realitzem una representació gràfica de les mitjanes obtingudes per a cada categoria, amb el mateix format de presentació que hem utilitzat per presentar les mitjanes grupals.

Comencem per la categoria 1. El gràfic corresponent (a la pàgina següent) ens permet visualitzar que els alumnes de la categoria 1 efectivament presenten un assoliment dels tres tipus de matematització per sobre del valor 2/3.
Això ja ho sabíem després d'haver construït la taula on mostràvem en quins intervals de valoració se situen els alumnes (a l'apartat immediatament anterior aquest). Però ara, en observar els valors de les mitjanes corresponents a la categoria, ens adonem que els alumnes que hi pertanyen assoleixen resultats correctes de la matematització amb valors clarament per sobre de 2/3. En el cas de la MHG, la mitjana és molt alta (0,91), la qual cosa ens indica que mitjançant l'ús de Geogebra aquests alumnes han matematitzat les situacions que se'ls presentaven i les han resolt satisfactòriament. Dit d'una altra manera: les activitats contextualitzades en l'entorn del programari interactiu Geogebra han induït la matematització. Quan utilitzem el verb induir, volem expressar inequívocament que la matematització no ha estat forçada, és a dir, que no

ha estat dirigida ni proporcionada des d'agents externs (per exemple el professor). Aquesta conclusió és rotunda. Els alumnes han representat, visualitzat i manipulat interactivament la situació que se'ls ha plantejat, i ho han fet amb un grau d'èxit molt alt.

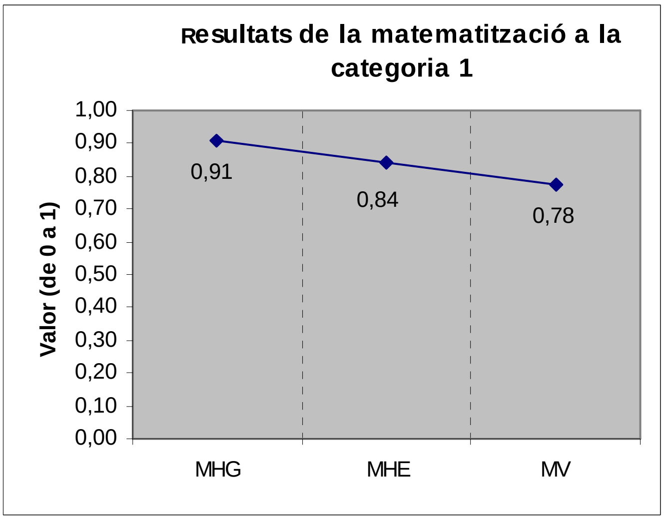


Figura 5.8. Representació gràfica dels resultats de la matematització a la categoria 1

Ara bé, quan demanem als alumnes de la categoria 1 que donin una expressió escrita a aspectes clau del procés de resolució (coordenades, càlculs concrets, equacions concretes...) observem que el rendiment descendeix 7 punts percentuals (0,84 per a la MHE), la qual cosa no significa que la seva efectivitat per resoldre les situacions plantejades hagi baixat. Les situacions les han resoltes amb Geogebra; en tot cas, el que ha descendit és el rendiment a l'hora d'expressar per escrit, de manera convencional, allò que han realitzat còmodament amb Geogebra.
També observem que el resultat més baix, a 13 punts percentuals del més alt, correspon a l'habilitat de presentar per escrit un resultat de validesa general (MV) a partir de la situació concreta que se'ls ha plantejat.

Presentem ara els resultats mitjans dins del subgrup format per la categoria 2. En el gràfic corresponent (a la pàgina següent) observem que el comportament dels alumnes de la categoria 2 és idèntic als de la categoria 1 en la MHG i la MHE: les mitjanes en les dues categories són iguals. On els alumnes de la categoria 2 es diferencien molt clarament dels alumnes de la categoria 1 és en l'assoliment de la MV. Els alumnes de la categoria 2 estan 19 punts percentuals per sota dels de la categoria 1 en els resultats de la MV, i la seva distància entre la MHG i la MV és acusada: 32 punts percentuals (enfront de la diferència de 13 punts percentuals que presenta la categoria 1, és a dir, aproximadament 2,5 vegades més gran).

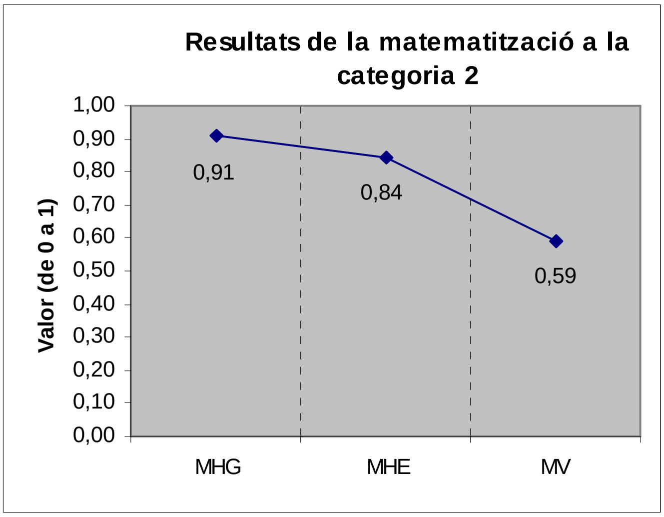


Figura 5.9. Representació gràfica dels resultats de la matematització a la categoria 2

Els alumnes d'aquesta categoria 2, com els de la categoria 1, resolen amb gran èxit, mitjançant el programari interactiu Geogebra, les situacions que se'ls plantegen. Experimenten la matematització induïda sense cap mena de dubte. Ara bé, a l'hora de generalitzar a partir de les situacions concretes que plantegen les activitats, el seu rendiment cau per sota del valor 2/3 (encara que es manté per sobre del valor 1/2). Per tant, les activitats contextualitzades han tingut la força per induir una alta matematització horitzontal en els alumnes de la categoria 2, però han estat molt menys exitoses a l'hora d'induir la generalització.

Presentem el gràfic per a la a la categoria 3:

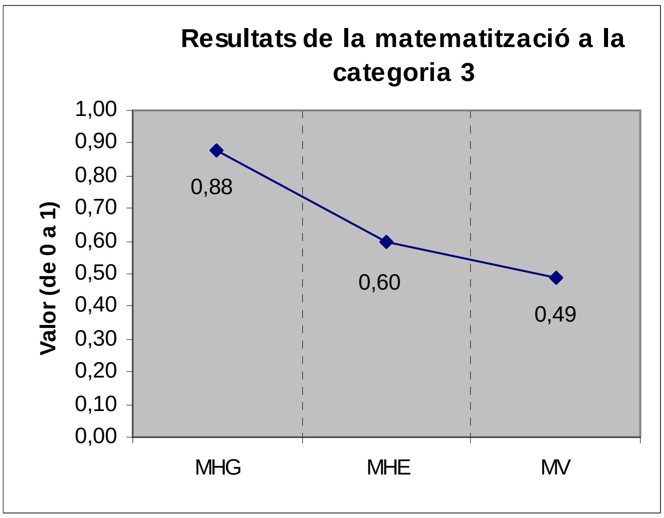


Figura 5.10. Representació gràfica dels resultats de la matematització a la categoria 3

En aquest gràfic anterior corresponent a la categoria 3 observem que el grau d'assoliment de la MHG és molt elevat i molt similar al que trobem en les categories 1 i 2. Per tant, també aquests alumnes són capaços, amb gran èxit, de representar, visualitzar i manipulat interactivament la situació que se'ls ha plantejat. La inducció de la matematització és clara. Ara bé, en aquesta categoria, la capacitat dels alumnes per expressar per escrit la matematització horitzontal és sensiblement inferior a les de les dues categories anteriors. Cau per sota del valor 2/3. I els resultats en la MV encara són més baixos, 39 punts percentuals per sota de la MHG. Per tant, aquests alumnes sí que han experimentat la matematització induïda, com els seus companys de les categories 1 i 2, però només han demostrat resultats alts en l'entorn interactiu Geogebra i sobre situacions concretes.

Per a la categoria 4:

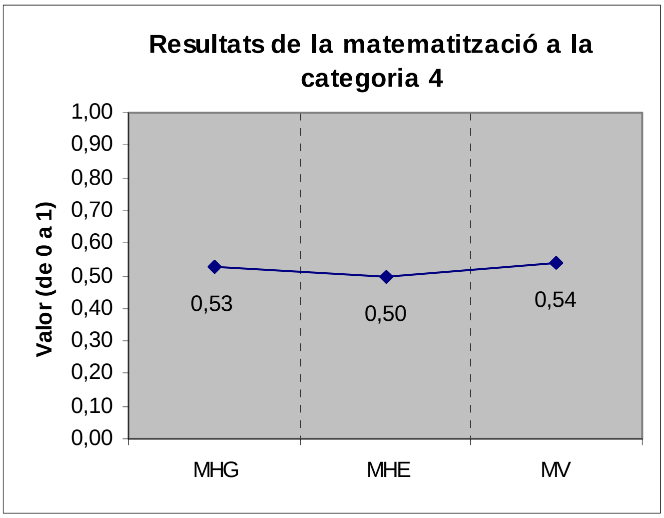


Figura 5.11. Representació gràfica dels resultats de la matematització a la categoria 4

A la vista d'aquests resultats, concloem que per als alumnes d'aquesta categoria (que representen aproximadament el 10% del total d'alumnes) les activitats contextualitzades dins de l'entorn interactiu Geogebra no han estat capaces d'induir una matematització horitzontal potent. És evident que hi ha hagut matematització, però s'ha produït amb un assoliment molt per sota del que han obtinguts les tres primeres categories.

Aquesta categoria 4 té un comportament aparentment estrany en comparació amb les altres. Els dos alumnes que la formen obtenen assoliments pobres en els tres tipus de matematització, amb la particularitat que, si bé la mitjana de la MHE és inferior (encara que molt poc) a la de la MHG com a les altres categories, es produeix un fet comparativament "anòmal": la mitjana de la MV és major (encara que també molt poc) a la de la MHE, i molt lleugerament major (pràcticament igual) que la de la MHG. Amb el nombre de valors numèrics que comptabilitzem per a cada un dels tipus de matematització, veiem que en un cas com aquest es pot produir una molt lleu diferència com la que hem trobat, que no segueix la tendència de línia descendent de

les altres categories, però considerem que es tracta d'una anècdota numèrica que no constitueix un fet significatiu.
En definitiva: no és rellevant la diferència entre les tres mitjanes per a la categoria 4. A la pràctica podem considerar que aquesta categoria presenta un perfil "pla": assoliment pobre d'aproximadament el 50% en les tres matematitzacions.

Del que observem a les representacions gràfiques anteriors, destaquem:

- A les categories 1, 2 i 3, el valor de les mitjanes d'assoliment, de major a menor, segueix el mateix ordre que apreciàvem als resultats grupals: MHG, MHE i MV. La categoria 4 constitueix un cas especial que comentem a part més endavant.
- Com ja hem remarcat quan hem distribuït els alumnes en les quatre categories, les tres primeres tenen un molt alt assoliment de la MHG. I les dues primeres un també molt alt (encara que no tant) assoliment de la MHE.
- Es dóna la circumstància que a les categories 1 i 2 les mitjanes són iguals per a la MHG i la MHE. És a dir, que en la matematització vertical (que engloba la MHG i la MHE), els subgrups formats per les categories 1 i 2 es comporten igual. En aquest aspecte, com a subgrups, són indistingibles. La diferència percentual entre les mitjanes de la MHG i la MHE és lleugera, de 7 punts percentuals.
- Seguint l'ordre de progressivitat MHG, MHE i MV, els descensos més clarament accentuats d'un tipus de matematització al següent, es produeixen a la categoria 2 (entre la MHE i la MV, 25 punts percentuals) i a la categoria 3 (entre la MHG i la MHE, 28 punts percentuals). Són dos descensos de magnitud molt semblant que, segons la nostra interpretació, tenen una importància de primer ordre a l'hora de caracteritzar aquestes categories.

Amb la presentació dels resultats de la matematització per categories, completem les anàlisis que hem realitzat abans i ens trobem en la situació de refermar, precisament, la validesa de la classificació efectuada. No tan sols això, sinó que també estem en disposició de donar nom a cada una de les categories en funció de les propietats que les caracteritzen.

Categoria 1: matematitzadors complets.
Els alumnes que en formen part obtenen resultats alts en els tres tipus de matematització (recordem que, per a nosaltres, els resultats alts signifiquen tenir, com a mínim, els 2/3 de les respostes correctes; en el cas dels matematitzadors complets, els resultats estan per sobre dels 3/4 en totes les matematitzacions). Són alumnes que, amb un alt assoliment:

- Resolen mitjançant Geogebra les situacions concretes que plantegen les activitats.
- Expressen correctament per escrit els càlculs que els han conduït a les solucions.
- A partir de situacions concretes que han resolt, escriuen expressions algebraiques generals (fórmules) i, per tant, vàlides no tan sols per als casos concrets de partida.

Són alumnes que demostren una "mobilitat vertical cognoscitiva": poden contemplar les situacions en els seus aspectes matemàtics concrets i també poden elevar-se fins a la generalització. El "moviment" que realitzen és en primer lloc ascendent (d'allò concret a allò general), seguint el procés induït per les activitats.

Categoria 2: matematitzadors horitzontals.
Hi pertanyen els alumnes que (sempre referint-nos a un alt assoliment) resolen amb Geogebra i ho expressen per escrit, però obtenen un assoliment molt més discret en la generalització. La seva "mobilitat cognoscitiva" és sobretot horitzontal. Es mouen amb comoditat dins de situacions concretes, però els costa el moviment vertical cap a les generalitzacions.

Categoria 3: matematitzadors tecnològics.
Són alumnes que resolen amb alt assoliment mitjançant les TIC (Geogebra, en el nostre cas) les situacions plantejades però presenten un rendiment significativament més baix a l'hora d'expressar per escrit, algebraicament, els resultats. I encara tenen majors dificultats per generalitzar. Es mouen amb comoditat en un entorn visual, manipulatiu i interactiu, però no són capaços de reflectir-ho amb desimboltura per escrit, algebraicament, sobre el paper.

Categoria 4: matematitzadors febles.
Es tracta d'una categoria on s'hi situen els alumnes que obtenen resultats baixos o discrets en tots els tipus de matematització. Ni tan sols en un entorn TIC visual, manipulatiu i interactiu matematitzen amb certa desimboltura.

A més de permetre'ns establir quines propietats són pròpies de les quatre categories, els resultats obtinguts ens permeten expressar una evidència experimental, que és forta i concloent. Ja ho hem comentat: l'assoliment de la matematització és decreixent en l'ordre MHG, MHE i MV per a la immensa majoria dels alumnes (categories 1, 2 i 3; 17 alumnes dels 19 totals), excepte per a la petita minoria que hem anomenat "matematitzadors febles", els quals presenten un perfil pla de matematització. Això ho podem redactar d'una manera més formal:

Rendiments decreixents: els alumnes matematitzadors (no febles) obtenen un assoliment decreixent en aquests aspectes i en aquest ordre:

- *Resolució amb el programari interactiu Geogebra.*
- *Expressió escrita algebraica de les operacions que condueixen a les solucions.*
- *Generalització.*

Definim:

Tram 1 de decreixement del rendiment: diferència entre el valor mitjà de l'assoliment de la matematització horitzontal amb Geogebra (MHG) i el valor mitjà de l'assoliment de l'expressió escrita algebraica de les resolucions (MHE).

Tram 2 de decreixement del rendiment: diferència entre el valor mitjà de l'assoliment de l'expressió escrita algebraica de les resolucions (MHE) i el valor mitjà de l'assoliment de la generalització (MV).

També establim, a partir de les evidències experimentals, que per als matematitzadors horitzontals i els matematitzadors tecnològics, un dels trams presenta un decreixement intens en comparació amb l'altre, és a dir, que la caiguda important del rendiment es produeix en un dels dos trams.

Matematitzadors horitzontals: tram 1 de descens lleu; tram 2 de descens intens.

Matematitzadors tecnològics: tram 1 de descens intens; tram 2 de descens lleu.

Si, per una banda, els rendiments decreixents ja ens resulten evidents a partir de les dades experimentals, per una altra banda ens preguntem si aquests fets observats tenen algun encaix dins del marc format pels continguts del capítol 2, és a dir, dins del que ens mostra la història i dins del que ens refereixen els autors teòrics. La nostra resposta és afirmativa. Expressat d'una altra manera: per a nosaltres existeix una interpretació plausible segons la qual els resultats obtinguts no constitueixen una circumstància casual o accidental.
En primer lloc, ens adonem que existeix una significativa correspondència entre els rendiments decreixents dels alumnes en el procés de matematització i el desenvolupament històric de la geometria analítica. Ens expliquem.
Tal com hem comentat al capítol 2, la incorporació de l'àlgebra a la geometria és un fet històricament tardà. Des de l'antiguitat, la resolució de problemes geomètrics estava íntimament lligada a la visualització i fins i tot a la manipulació. La geometria no es podia entendre deslligada de la representació i la visualització dels elements geomètrics i, en aplicacions pràctiques, necessitava d'elements materials manipulables com, per exemple, cordes, pals i estaques. Van ser els geòmetres grecs els que van sublimar aquesta matematització primigènia (natural en la humanitat, perquè apareix en totes les societats humanes) fins a convertir-la en un art de resoldre complicats problemes amb regle i compàs. Allò que havia nascut de les necessitats pràctiques es convertia en una disciplina intel·lectual pura, però encara profundament arrelada en un fet sensitiu: la visualització.
Hem mostrat també que fins i tot qui és considerat el fundador de la geometria analítica, René Descartes, considerava que la solució geomètrica és l'objectiu més important, i que la resolució algebraica és secundària (encara que en certs casos és l'única de què es disposa o bé dóna una informació que la geometria no pot donar). De fet, la plena incorporació de l'àlgebra a la geometria va trobar fortes resistències. Val la pena recordar (abreujada) una cita de Dunham (2000) que ja ha aparegut al capítol 2:

"Hi va haver un temps que el desdeny cap a la geometria analítica era gran... alguns fins i tot lamentaven la invenció de la geometria analítica i, en paraules de l'historiador Morris Kline, buscaven venjar-se de Descartes."

L'algebrització plena de la geometria comença, com hem mostrat també al capítol 2, a partir de l'enorme desenvolupament que experimenta l'àlgebra durant el segle XIX. Des d'aquí s'arriba fins al punt que l'àlgebra relega els elements visuals fins a un segon terme (com a recursos il·lustratius auxiliars). En didàctica, aquesta tendència es porta a l'extrem amb l'anomenada "matemàtica moderna".
Fixem-nos, mitjançant un senzill exemple, quina és la profunda transformació que s'ha operat: als alumnes del primer curs de Batxillerat se'ls diu "això és una recta" quan se'ls mostra una equació algebraica (en qualsevol de les cinc formes en què es presenta: vectorial, paramètrica, contínua, implícita i explícita).

En resum, la història de la geometria analítica ens assenyala que el procés evolutiu:

- Comença per allò visual, manipulatiu i pràctic.
- Se sublima en una disciplina "pura" però inseparable de la visualització dels elements geomètrics.
- Segueix per la incorporació de l'àlgebra amb l'única justificació que és útil per resoldre problemes concrets.
- Acaba en un aparell algebraic, abstracte i formalitzat, que permet resoldre problemes "geomètrics" sense necessitat de traçar elements geomètrics.

Aquesta evolució no es pot entendre sense considerar que al darrere hi ha raons epistemològiques. El primer pas evolutiu parteix dels elements visuals, i no dels simbolismes algebraics, perquè els primers són bàsics en el procés de l'aprehensió humana (en el sentit que atorga el diccionari al verb aprehendre: copsar mentalment; conèixer simplement i immediatament un objecte, una situació o un comportament) i els segons no.
Així, entenem el perquè dels rendiments decreixents que hem observat clarament en els processos de matematització. I ens trobem en condicions de reformular-los mitjançant un redactat més complet:

En activitats de matematització induïda (no forçada) sobre situacions contextualitzades on, per resoldre, hi intervenen la visualització geomètrica, la manipulació en entorn TIC i l'àlgebra, els rendiments dels alumnes matematitzadors (no febles) són decreixents en aquests aspectes i en aquest ordre:

- *Manipulació visual-tecnològica: resolució de situacions concretes amb instruments TIC (en el nostre cas, Geogebra).*
- *Anotació algebraica: expressió algebraica escrita de les resolucions concretes.*
- *Generalització mitjançant expressions algebraiques, a partir de la resolució de situacions concretes.*

Remarquem que, tal com ens indiquen els resultats experimentals, els alumnes que aconsegueixen resultats alts en com a mínim una de les parts en què hem separat la matematització horitzontal (MHG i MHE) són la immensa majoria (tots excepte els matematitzadors febles), i que la suma dels matematitzadors complets i els matematitzadors horitzontals conforma també una àmplia majoria. Això ens indica que el conjunt d'activitats constitueix un entorn on es desenvolupa amb èxit la matematització horitzontal (entenent per èxit que la gran majoria obtingui resultats alts en aquesta matematització). Aquest fet ens dóna peu per desenvolupar, al final d'aquest capítol, la idea que les activitats implementades constitueixen una plataforma de matematització horitzontal a partir de la qual apareix la generalització i s'emprèn la formalització dels continguts.

Ens sembla també molt remarcable que, fins i tot per al alumnes que obtenen resultats alts en els dos tipus de matematització horitzontal (els matematitzadors complets i els horitzontals), l'assoliment de la MHE queda per sota de l'assoliment de la MHG, tal com hem expressat quan hem formulat els rendiments decreixents. Els resultats són alts tant a la MHG com a la MHE, però el decreixement del rendiment és perceptible i significatiu perquè apareix en un nombre molt important d'alumnes, (molt important respecte del total), és a dir, que no es tracta d'un fet que puguem qualificar d'accidental perquè es presenti només en un o dos alumnes.
Això ens fa recordar un aspecte concret que apareix al capítol 2, dedicat al marc teòric. Es tracta d'una de les circumstàncies que Chamoso i Rawson (2001) consideren interessants a partir de la seva observació de situacions pràctiques a l'aula en les quals els alumnes matematitzen. Tal com hem reflectit al capítol 2, aquests autors afirmen que "Els estudiants normalment no escriuen gaire i el que escriuen no sol expressar del tot el que han pensat". El que nosaltres hem observat és que als alumnes, quan matematitzen, els costa més expressar les solucions per escrit que trobar-les amb eines TIC visuals i manipulatives. Podria semblar que no hauria de passar tal cosa, ja que, aparentment, l'expressió escrita de les solucions és una simple i mecànica "traducció" algebraica, enregistrada sobre un paper, del que ja s'ha realitzat mitjançant les eines TIC. No obstant això, aquesta "dificultat" existeix. És lleu (però detectable) per a una majoria d'alumnes: els matematitzadors complets i els matematitzadors horitzontals. I és acusada per a uns quants: els matematitzadors tecnològics.
No és possible adduir que tal cosa succeeix perquè els alumnes estan poc familiaritzats amb l'ús de l'àlgebra. Ja hem explicat al capítol 3, quan hem fet referència als coneixements previs de l'alumnat, que han utilitzat l'àlgebra per resoldre i per expressar solucions des de l'Educació Secundària Obligatòria, i que en anteriors unitats didàctiques del primer curs de Batxillerat l'àlgebra ha estat poc menys que omnipresent, tal com és corrent en aquest nivell educatiu. No tan sols en continguts que podríem qualificar de "purament" algebraics, sinó també associada a la resolució de problemes geomètrics (la trigonometria), i a relacions funcionals amb les seves corresponents representacions gràfiques.

En vista d'aquestes consideracions anteriors, i prenent com a referència la frase de Chamoso i Rawson que hem citat abans, escrivim:

Per als alumnes, la traducció algebraica, per escrit, de la matematització realitzada amb mitjans tecnològics manipulatius i visuals, no és un simple automatisme. En aquest pas, existeix una bretxa [ens agrada també la paraula anglesa "gap", que denota la mateixa idea de discontinuïtat, buit, espai en blanc]. *Per a la majoria dels alumnes, aquest bretxa és lleu, però per a uns quants és més profunda.*

Pel que fa a la matematització vertical, ja hem explicitat abans que, segons els resultats experimentals, observem un alt assoliment en un grup important (per nombre) d'alumnes, però no majoritari: els matematitzadors complets. Aquí creiem oportú tornar a referències del marc teòric que hem desenvolupat al capítol 2, concretament a Peralta (1995), quan esmenta la seva objecció número 3 al mètode d'ensenyament heurístic: "No transcendència dels conceptes: es procura partir de problemes de la vida real, però això no garanteix que les conclusions se sàpiguen generalitzar de manera que siguin aplicables a altres situacions no idèntiques." Efectivament, a partir dels nostres resultats, afirmem que no existeix la garantia de la generalització per a la majoria dels alumnes. El que sí que existeix, com ja hem comentat abans, és la pràctica garantia (quasi garantia) d'un alt assoliment de la matematització horitzontal. I, dins de la matematització horitzontal, existeix en particular una també pràctica garantia d'alt assoliment de la matematització amb eines TIC que permeten la visualització i la manipulació (tots els alumnes excepte els pocs matematitzadors febles).
Ja hem interpretat abans aquest fet des del punt de vista històric i epistemològic. Ens queda afegir una consideració que no sorgeix dels resultats experimentals de la nostra investigació concreta, però que és substanciosa perquè forma part de l'experiència de molts docents. La majoria dels alumnes utilitza amb naturalitat i habilitat diferents mitjans tecnològics que proporcionen entorns audiovisuals manipulatius i interactius (telèfons mòbils, consoles, variats programaris per a ordinador incloent les aplicacions en línia a Internet...). Per tant, realitzar activitats amb eines TIC suposa situar els alumnes en entorns de matematització on ràpidament poden mostrar desimboltura. És més: no són infreqüents els casos d'alumnes que demostren grans habilitats en la manipulació d'aplicacions tecnològiques però que, en canvi, obtenen resultats discrets o pobres en activitats acadèmiques tradicionals.

Fins aquí, hem mostrat que les activitats contextualitzades, en entorns visuals i manipulatius, indueixen amb èxit la matematització horitzontal. Hem arribat també a la conclusió que no hi ha una traducció automàtica entre matematització amb eines TIC i l'escriptura algebraica sobre el paper, sinó que existeix una bretxa que provoca un rendiment decreixent en aquest pas. I que, en termes grupals, la caiguda del rendiment des de la matematització horitzontal fins a la vertical és notable. Tot això ens permet afirmar que el fet d'haver d'anotar els resultats de les activitats amb escriptura algebraica afegeix una dificultat que incideix en el grau d'assoliment, i que la generalització presenta una dificultat encara major. Tenint en compte aquestes últimes consideracions, és a dir, a la llum dels resultats i de la interpretació que en fem, estem en condicions d'expressar, des del punt de vista de la matematització, les característiques que ha de tenir un enfocament didàctic com el que expressàvem a la nostra hipòtesi (capítol 1). Recordem aquesta hipòtesi: "Un enfocament de matematització de baix a dalt permet dissenyar i implementar activitats d'ensenyament i aprenentatge de la geometria analítica de primer de Batxillerat".

Ara, tenint presents els resultats obtinguts a la fase d'implementació, diferenciem les dues fases en què es desenvolupa el nostre plantejament:

Fase induïda: mitjançant les activitats contextualitzades i desenvolupades amb eines TIC, implementem un entorn d'aprenentatge en el qual la matematització horitzontal presenta un alt i molt majoritari assoliment, i la matematització vertical presenta un alt assoliment entre un sector important però no majoritari de l'alumnat.

Fase forçada: a partir de la fase induïda, el professor mostra la generalització per a aquells que no l'han assolida, i desenvolupa la formalització dels continguts matemàtics.

El que hem presentat de manera resumida en aquests paràgrafs anteriors, ho tractem més extensament al final d'aquest capítol 5, on desenvolupem la idea de plataforma de matematització.

5.3. La implicació de l'alumnat i la seva percepció sobre l'entorn d'aprenentatge

5.3.1. Resultats grupals

Després d'haver analitzat i interpretat els resultats de la matematització, emprenem ara l'anàlisi de les valoracions subjectives de l'alumnat.

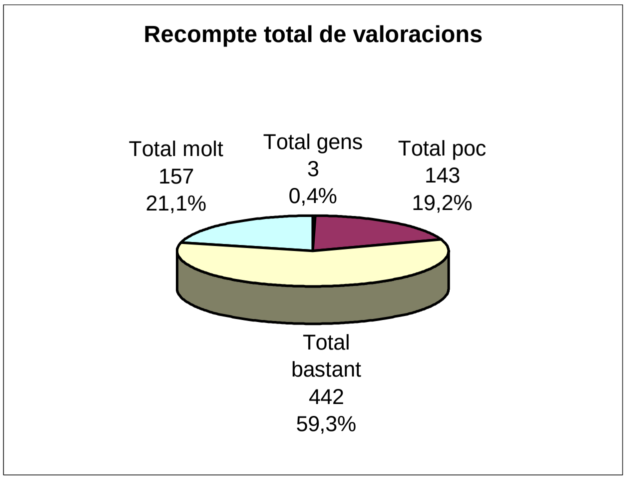
Recordem que, com hem assenyalat al capítol 3, tota la sèrie de preguntes sobre la valoració subjectiva de l'ús de Geogebra per part dels alumnes a l'hora de resoldre les activitats plantejades és en realitat una repetició periòdica de 5 qüestions fonamentals (P1, P2, P3, P4 i P5) :

- P1 (plantejar): *Usar Geogebra t'ha ajudat per representar i veure clar el plantejament de l'activitat?*
- P2 (trobar): *Usar Geogebra t'ha ajudat per trobar el que se't demana?*
- P3 (avançar): *Usar Geogebra t'ha ajudat per poder entendre el que vas fent i avançar en el procés de resoldre?*
- P4 (generalitzar): *Usar Geogebra t'ha ajudat per resoldre no tan sols el problema concret sinó per trobar fórmules generals?*
- P5 (millor que la classe tradicional): *Comparat amb el treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?*

Hi ha per a cada alumne un total de 34 preguntes d'algun dels cinc tipus al llarg del procés d'implementació de les activitats, incloent-hi el qüestionari final. D'aquestes 34, en corresponen 10 a P1, 8 a P2, 9 a P3, 7 a P4 i 10 a P5.

Suposant que els 19 alumnes presents a l'inici del procés d'implementació les responguessin totes, hi hauria un total de 836 respostes enregistrades, 190 a P1, 152 a P2, 171 a P3, 133 a P4 i 190 a P5.
A la pràctica, alguns alumnes han estat absents en algunes sessions. També s'han donat uns pocs casos en què algun alumne no ha marcat cap resposta en alguna pregunta. En aquesta circumstància no és possible, com sí que ho és en l'anàlisi de la matematització, que el professor assigni un valor a partir de la revisió del material recollit (fitxers de Geogebra) o que consideri que l'absència de resposta es tradueix en un valor concret (un zero). La valoració subjectiva només la pot fer l'alumne. Per tant, si en una pregunta no marca cap resposta, a la taula de respostes la cel·la corresponent apareix sense cap valor.
Amb això, hem comptabilitzat un total de 745 respostes, repartides així: 170 a P1, 135 a P2, 153 a P3, 118 a P4 i 169 a P5. Aquesta abundància de valors permet obtenir unes mitjanes fiables de la valoració grupal, així com de les valoracions individuals dels alumnes, sobre cada una de les preguntes formulades.

Un primer recompte global de totes aquestes dades, en tota la seqüència d'activitats amb Geogebra (més el qüestionari final) i per al conjunt de tots els alumnes, dóna el resultat següent:



Mitjana: 0,67
Banda de valoració: BB

Figura 5.12. Gràfic del conjunt de respostes de valoració

De fet, la mitjana és pràcticament el valor 2/3, que correspon a la resposta "bastant" dels alumnes. Per tant, globalment, l'alumnat dóna una valoració "bastant" positiva al fet d'haver usat Geogebra, és a dir, que el grup considera que l'ús de Geogebra ha tingut una contribució positiva apreciable.

Després d'aquesta primera aproximació, el segon pas consisteix en comptar separadament les valoracions grupals per a cada una de les preguntes. Construïm una taula per a cada pregunta (P1, P2, P3, P4 i P5), agrupant les dades de manera anàloga a com ho hem fet per a les taules corresponents als tres tipus de matematització, és a dir, prenem les dades que corresponen a la pregunta 1 (P1) en totes les activitats i les reagrupem en una sola taula, i fem el mateix per a les altres preguntes.

De la mateixa manera que per als tres tipus de matematització no hem presentat en aquest capítol totes les taules, tampoc presentem totes les taules corresponents a les cinc preguntes de valoració subjectiva: pretenem evitar omplir pàgines amb taules de dades numèriques que segurament dificultarien una lectura fluida. Assenyalem que la seqüència completa de les cinc taules figura a l'annex 5 d'aquest treball, disponible per a la consulta sempre que calgui.

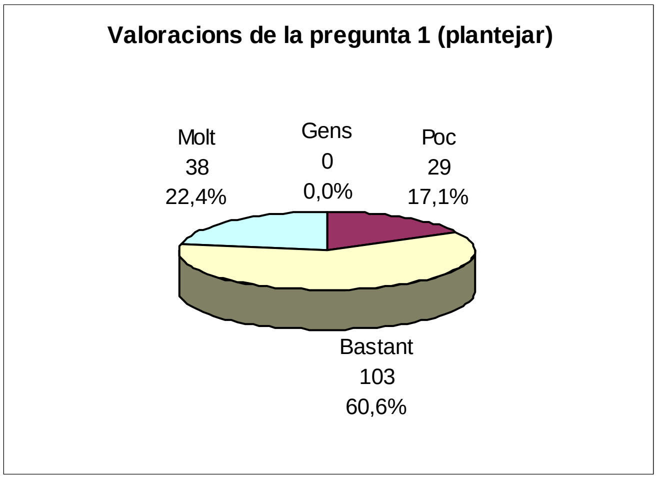
Sí que mostrem, com a exemple, la taula corresponent a la pregunta 1:

Pregunta 1

	Usar Geogebra t'ha ajudat per representar i veure clar el plantejament de l'activitat?										
	Activitat 1	Activitat 2	Activitat 3	Activitat 4	Activitat 51	Activitat 52	Activitat 6	Activitat 7	Activitat 8	Qüestionari final	Mitjana	Banda de valoració
Manel	2/3	1	1	1	2/3	2/3	1	1	1	2/3	0,87	M
Youssef	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3	0,60	B
M. Carmen	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	1	2/3	0,67	BB
Toni	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3	1/3	1	0,63	B
Raquel	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	0,67	BB
Angelo	1	1	1	1	2/3	1/3	1	2/3	2/3	2/3	0,80	BB
Marta	2/3		1	2/3	2/3	1/3		1	2/3	1	0,75	BB
Juan	2/3	2/3		2/3	1	1/3	1/3	2/3	2/3	1/3	0,59	B
Jesús				2/3	1	2/3	1/3	2/3	1	1/3	0,67	BB
Alba	2/3	2/3	2/3	2/3			2/3	2/3	1	1	0,75	BB
Federico	2/3	2/3		1	1/3	2/3	2/3	1	2/3	2/3	0,70	BB
Neus	2/3	2/3	1	2/3			2/3				0,73	BB
Ivan	2/3	2/3	2/3		1/3	1/3	1/3	1/3	2/3	1/3	0,48	P
Tanya	2/3	1	1	2/3	2/3	1/3	1	1	1	1	0,83	M
Dídac		1/3	1/3		1/3	1/3	2/3	1	1	2/3	0,58	B
Soslan	2/3	1/3		2/3	1/3	1/3	2/3		1	2/3	0,58	B
Alberto	2/3	1	1	2/3	1/3	1/3	2/3	1	1	2/3	0,73	BB
José	2/3	2/3	2/3	1	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	0,67	BB
Erik	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3		2/3	2/3	2/3	0,67	BB
Mitjana	0,69	0,71	0,78	0,75	0,57	0,49	0,65	0,75	0,80	0,69		
Banda	BB	BB	BB	BB	B	P	B	BB	BB	BB		

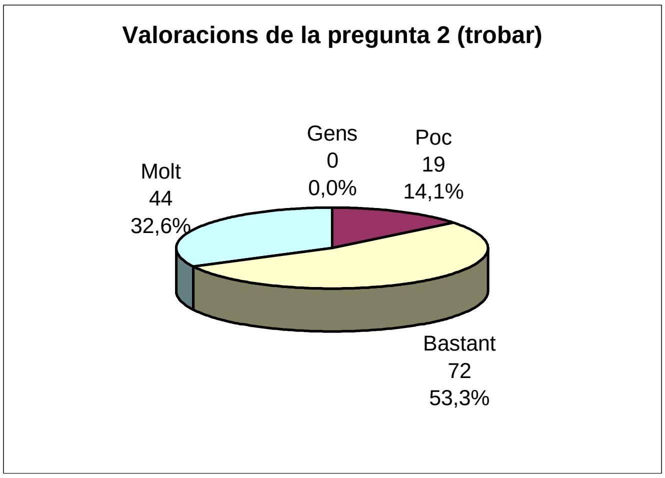
Taula 5.5. Resultats de la pregunta 1

Amb els resultats de valoració subjectiva reagrupats d'aquesta manera (pregunta per pregunta), elaborem els gràfics que mostren els resultats grupals de les respostes de valoració a les diferents preguntes, és a dir, la freqüència (per a les dades de tot el grup d'alumnes) de cada una de les quatre opcions de resposta. Presentem un darrere l'altre els gràfics de sectors que hem elaborat, un per a cada pregunta, i després comentem els resultats que reflecteixen.



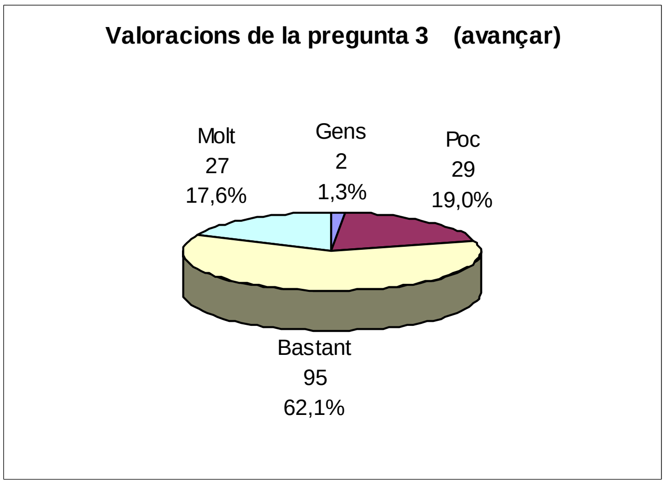
Mitjana: 0,68
Banda de valoració: BB

←Figura 5.13. Gràfic de les respostes a la pregunta 1



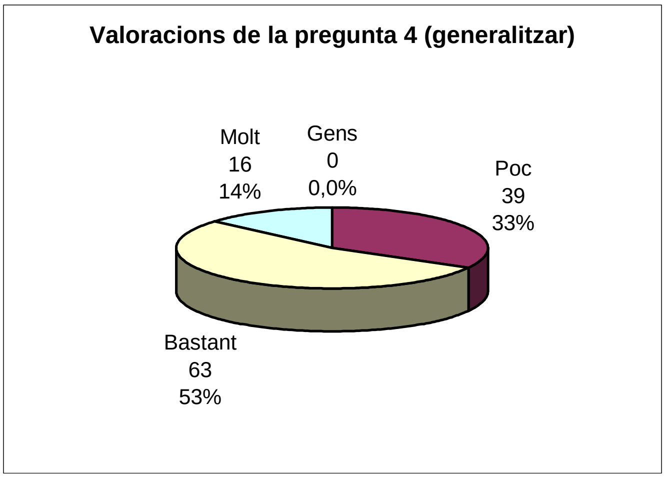
Mitjana: 0,73
Banda de valoració: BB

←Figura 5.14. Gràfic de les respostes a la pregunta 2



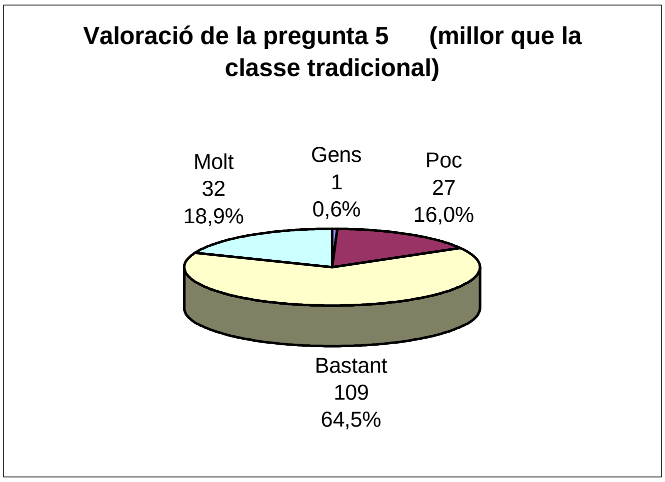
Mitjana: 0,65
Banda de valoració: B

←Figura 5.15. Gràfic de les respostes a la pregunta 3



Mitjana: 0,60
Banda de valoració: B

←Figura 5.16. Gràfic de les respostes a la pregunta 4



Mitjana: 0,67
Banda de valoració: BB

←Figura 5.17. Gràfic de les respostes a la pregunta 5

De manera anàloga a com ho hem fet per als resultats grupals de la matematització, incloem un gràfic en el qual es poden visualitzar i comparar els resultats per a cada una de les cinc preguntes (a la pàgina següent).
El primer que observem és que els cinc valors representats difereixen poc de la mitjana total (per a tot el conjunt de dades de tots els alumnes) que ja hem calculat abans i que té el valor 0,67. De fet, aquesta mitjana, que és pràcticament el valor 2/3, és també el valor amb què es tradueix numèricament la resposta "bastant". Podem afirmar, doncs, que les valoracions grupals són molt pròximes al "bastant" en les cinc preguntes, encara que en algunes (P1 i P2) es veuen lleugerament arrossegades cap amunt per un cert predomini de les valoracions individuals més altes que "bastant", mentre que en altres casos (P3 i P4) són lleugerament estirades cap avall. Les diferències majors amb la mitjana es produeixen en P2 i P4. En el cas de la pregunta 2, el resultat grupal és 6 punts percentuals superior, mentre que per a la pregunta 4, és 7 punts percentuals inferior (la diferència de l'una a l'altra és, doncs, de 13 punts percentuals). Aquestes dues separacions de la mitjana, les més altes, són gairebé

iguals. És significatiu que es produeixin per a preguntes que es refereixen a la utilitat de Geogebra per trobar els resultats demanats (P2) i a la utilitat per generalitzar (P4).

L'anàlisi de la matematització ja ens ha revelat que el resultat grupal de la MHG és força més alt que el resultat de la MV, concretament 24 punts percentuals. Per tant, no és estrany, sinó coherent, trobar ara que la valoració grupal més alta apareix a P2 (que es refereix a trobar resultats concrets) i la més baixa a P4 (que es refereix a reflexionar a partir dels resultats concrets per arribar a la generalització). Respecte als resultats de la matematització, la diferència queda atenuada, però hi és. Usant els arguments i els càlculs anteriors, ens adonem que la diferència, comptada així, passa a pràcticament la meitat, des de 24 punts a la matematització fins a 13 punts a la valoració subjectiva de l'alumnat.

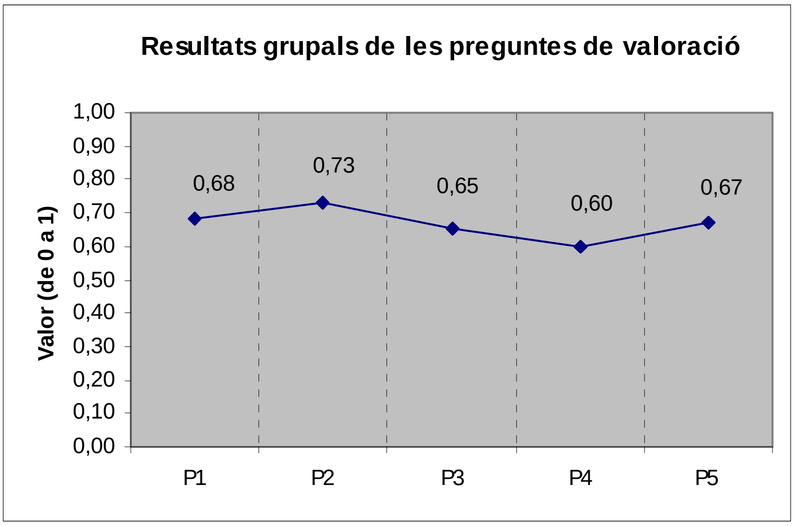


Figura 5.18. Gràfic comparatiu dels resultats grupals de les respostes a les cinc preguntes

La percepció subjectiva sobre l'ús de Geogebra exerceix un efecte moderador sobre la realitat de matematització observada a partir del recompte del l'assoliment objectiu de la MHG, la MHE i la MV. Això és una manera de dir que els alumnes que obtenen resultats alts en la matematització i els que els obtenen més baixos s'aproximen a l'hora de realitzar una valoració subjectiva. Per això hem comentat abans que la diferència s'atenua.

És destacable que a les activitats 7 i 8, que són activitats de síntesi, on l'alumnat està en condicions d'aplicar les estratègies adquirides en sessions anteriors, les valoracions globals no baixen del 0,7 en cap pregunta. Això significa que l'ús de Geogebra és clarament valorat de manera positiva per abordar unes activitats que, de fet, podrien haver-se presentat perfectament de la manera convencional per resoldre amb llapis i paper, però que s'han realitzat amb Geogebra.

5.3.2. Qüestionari final

El qüestionari final planteja a l'alumnat 15 preguntes de valoració sobre l'ús de Geogebra i la motivació personal. D'aquestes 15, les 4 últimes són preguntes dels tipus que apareixen als qüestionaris de les activitats. S'han passat una última vegada per completar una sèrie de dades de valoració que ja ha estat objecte d'anàlisi. En aquest apartat ens interessen les 11 primeres preguntes, etiquetades de la *a* a la *k*.

a) Realitzar activitats amb Geogebra ha fet les classes més amenes?
b) Realitzar activitats amb Geogebra ha fet les classes més interessants?
c) Realitzar activitats amb Geogebra t'ha fet sentir que tenies més participació i iniciativa en el procés d'aprenentatge?
d) Començar primer per activitats concretes amb Geogebra i aprofitar-ho per fer després la teoria t'ha ajudat a comprendre millor els continguts matemàtics?
e) Començar primer per activitats concretes amb Geogebra i aprofitar-ho per fer després la teoria ha facilitat la teva implicació i la teva motivació?
f) Comparades amb les classes de prendre apunts, les activitats amb Geogebra t'han fet pensar més sobre el que estaves fent?
g) Les activitats amb Geogebra t'han semblat difícils?
h) Has trobat un salt important de dificultat entre les classes amb Geogebra i les classes en què havies de prendre apunts i fer exercicis a la llibreta?
i) Les activitats amb Geogebra sobre col·locar punts en una línia t'han ajudat a entendre millor la teoria de les equacions de la recta?
j) Les activitats amb Geogebra sobre estirar i arrossegar un objecte t'han ajudat a entendre millor la teoria del producte escalar?
k) Les activitats amb Geogebra t'han ajudat a entendre millor la teoria sobre vectors que són perpendiculars?

Segons la naturalesa dels aspectes als quals fan referència, les preguntes es poden classificar en els grups temàtics següents:

– Percepció sobre l'atractiu del plantejament didàctic. Hi pertanyen les dues primers preguntes (*a* i *b*).
– Actitud personal. Hi pertanyen les preguntes *c* i *e*.
– Consciència sobre el procés d'aprenentatge. Hi pertanyen les preguntes *d* i *f*.
– Percepció sobre la dificultat. Hi pertanyen les preguntes *g* i *h*.
– Utilitat del plantejament didàctic en diferents parts de la unitat didàctica. Hi pertanyen les preguntes *i*, *j*, *k*.

Els valors mitjans de les respostes del grup queden reflectits en un gràfic de columnes (a la pàgina següent).
Les columnes apareixen en el mateix ordre, d'esquerra a dreta, que les preguntes del qüestionari, de la lletra *a* a la lletra *k*. Sota cada columna hi ha una breu etiqueta que destaca la paraula o la idea més important de la pregunta. Així, per exemple, l'etiqueta

de la primera columna és "amenes" perquè fa referència a la pregunta *Realitzar activitats amb Geogebra ha fet les classes més amenes?*

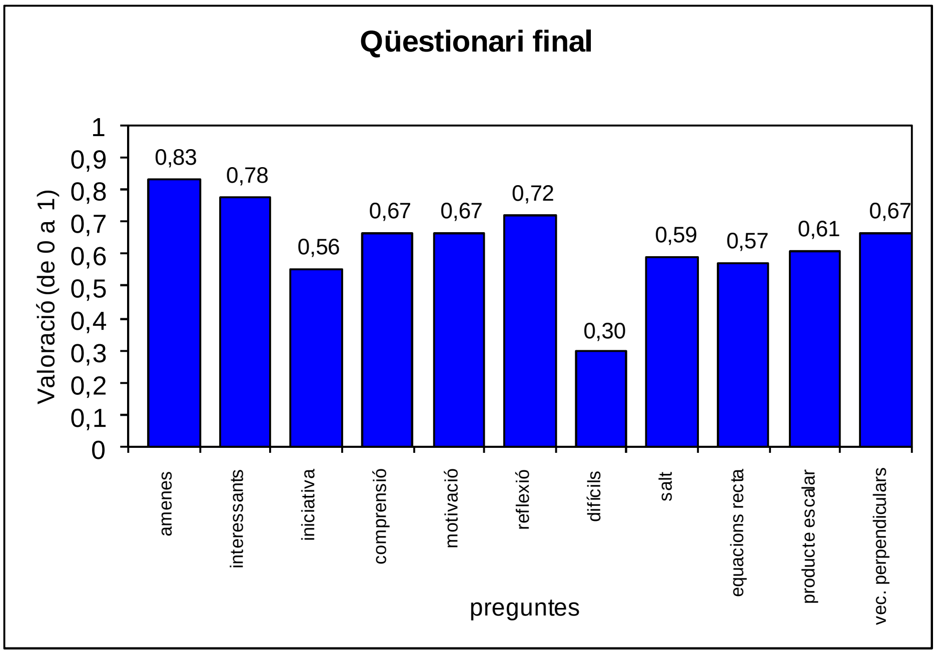


Figura 5.19. Resultats grupals de les respostes a les preguntes del qüestionari final

Segons els valors mitjans obtinguts per a cada resposta, i segons els 6 intervals de valoració que s'han establert (i usat en anteriors anàlisis), establim la següent classificació:

A la banda M ("Molt") s'hi situa la mitjana de les respostes a la pregunta a. Per tant, la posició grupal és rotunda respecte al fet que el plantejament didàctic amb Geogebra:

1. Ha fet les classes mes amenes.

A la banda BB ("Bastant", meitat superior) s'hi situen les preguntes *b*, *d*, *e*, *f*, *k*. Totes, excepte la *k*, fan referència a l'ús de Geogebra en aspectes que no pertanyen a continguts concrets de la programació didàctica, sinó que representen actituds i procediments. Podem concloure que, des del punt de vista de l'alumnat, haver treballat amb Geogebra a les activitats dissenyades, clarament:

2. Ha fet les classes més interessants (*b*).
3. Ha incrementat la reflexió sobre el que es fa (*f*).
4. Ha ajudat a comprendre millor els continguts matemàtics (*d*).
5. Ha facilitat la implicació i la motivació (*e*).

La resposta mitjana a la pregunta *k* també se situa a la banda BB, però fa referència a un contingut concret de la programació. L'ús de Geogebra:

6. Ha permès entendre millor la teoria sobre vectors perpendiculars.

A la banda B ("bastant, meitat inferior) s'hi situen les mitjanes a les respostes *c*, *h*, *i*, *j*. Segons l'alumnat, l'ús de Geogebra ha tingut una influència entre neutra i bastant apreciable en aquests aspectes:

7. Ha permès entendre millor la teoria del producte escalar (*j*).
8. Ha permès entendre millor la teoria de les equacions de la recta (i).
9. Ha fet sentir que es té més participació i iniciativa (*c*).

Mereixen una consideració a part les preguntes *g* i *h* perquè fan referència a la percepció de la dificultat. La pregunta *g* demana si les activitats amb Geogebra semblen difícils i la resposta se situa a la banda PP. Per tant, semblen entre gens i poc difícils. La pregunta *h* demana si s'ha percebut un salt important de dificultat entre les activitats amb Geogebra i les classes convencionals, i la resposta se situa a la banda B, és a dir, que sí que s'ha percebut un salt, però no molt gran.

En cap cas l'ús de Geogebra a les activitats ha merescut una valoració negativa.

5.3.3. Resum de les valoracions grupals

Hem analitzat abans els resultats grupals de les respostes sobre l'ús de Geogebra (dins del plantejament didàctic de baix a dalt) tant pel que fa als 5 tipus de preguntes que apareixen al llarg de tot el procés com pel que fa a les 11 preguntes del qüestionari final, que demanen una valoració global un cop acabada la seqüència de sessions didàctiques. Ara, per tenir una visió general i compacta dels resultats, presentem una taula resum on apareixen les bandes de valoració dels resultats grupals de les respostes a les preguntes.
A la primera columna de la taula hi despleguem les bandes de valoració. A la segona columna col·loquem les respostes a les 5 preguntes que hem formulat al llarg del procés d'implementació (les preguntes P1, P2, P3, P4 i P5) a l'altura de la banda de valoració on se situen. A la tercera columna hi situem, també a la banda de valoració que els pertoca, les respostes a les 11 primeres preguntes que hem formulat als alumnes mitjançant el qüestionari final.
Dins de cada banda de valoració, l'ordre en què estan col·locades les preguntes correspon també a l'ordre segons la valoració mitjana que han tingut: més amunt les que han rebut una valoració mitjana més alta.

Banda de valoració		Respostes al llarg de la seqüència d'implementació	Respostes del qüestionari final
M	"Molt"		Classes més amenes
BB	"Bastant" meitat superior	Útil per trobar resultats Útil per plantejar Més útil que les classes tradicionals	Classes més interessants Més reflexió sobre el que es fa Millor comprensió dels continguts matemàtics Més implicació i motivació Millor comprensió dels vectors perpendiculars
B	"Bastant" meitat inferior	Útil per avançar en la resolució Útil per generalitzar	Millor comprensió del producte escalar Salt de dificultat de les activitats a la teoria Millor comprensió de les equacions de la recta Més participació i iniciativa
P	"Poc" meitat superior		
PP	"Poc" meitat inferior		Activitats difícils
G	"Gens"		

Taula 5.6. Resum de les valoracions grupals durant la implementació i al qüestionari final

Aquesta representació compacta dels resultats grupals evidencia que:

1. El major nombre de valoracions grupals notablement altes o molt altes (sis a les bandes BB i M) es donen a les respostes a les preguntes del qüestionari, és a dir, a preguntes que els alumnes responen una sola vegada, quan ja ha finalitzat el procés d'implementació. Totes les preguntes del qüestionari final situades en aquestes valoracions BB i M, excepte en una, no involucren directament els continguts concrets de la unitat didàctica sinó que tenen relació amb la percepció, l'actitud personal i la consciència sobre el conjunt del procés

d'aprenentatge. Només una pregunta d'aquests tres tipus (percepció, actitud i consciència), la que es refereix a la participació i la iniciativa, està situada a la banda de valoració B.

2. De les valoracions grupals que s'obtenen de les mitjanes obtingudes a partir de preguntes que els alumnes han respost vàries vegades al llarg del procés d'implementació, tres se situen a la banda BB i dues a la banda B. Cal tenir en compte que aquestes preguntes es refereixen a l'ús de Geogebra en la matematització sobre activitats concretes durant tota una seqüència d'implementació. Les valoracions més altes (banda BB) corresponen a l'inici i el final del procés de matematització horitzontal, és a dir, plantejar i trobar, i també s'hi afegeix la comparació (favorable) amb les classes d'estil tradicional. Una mica per sota, la a la banda B, se situa la valoració sobre la utilitat per avançar en el procés, i més per sota encara, també a la banda B, la utilitat a l'hora de generalitzar, que és el que més costa, en general, a l'alumnat.
3. A partir de constatar aquests dos punts anteriors es desprèn que la valoració grupal és remarcablement positiva quan es refereix a la comprensió dels continguts concrets dins del procés d'implementació i a la utilitat per generalitzar, i que encara és més positiva a l'hora de valorar la contribució al plantejament i a l'obtenció dels resultats, i sobretot quan al final es demana una reflexió global sobre tot el procés. En el qüestionari final, ja no hi és present la feina concreta de resoldre les activitats, amb l'esforç que això pot representar i les dificultats que poden haver sorgit, sinó que s'hi reflecteix la impressió global del conjunt o, dit d'una altra manera, el record i l'empremta subjectiva que ha causat tot el procés didàctic. I aquesta impressió és intensament positiva.

Resumim aquesta posició relativa de les valoracions dels alumnes, unes respecte de les altres, en la figura que presentem a continuació:

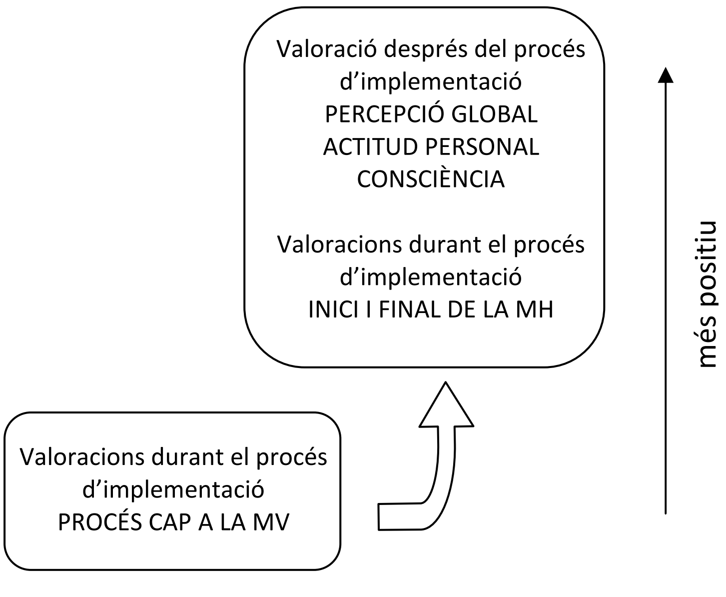


Figura 5.20. Posició relativa de les valoracions dels alumnes

L'afirmació que el conjunt és encara més ben valorat que les parts o, formulant-ho d'una manera alternativa, que la impressió final és encara més positiva que les impressions recollides dins de la seqüència d'implementació, es veu confirmada per la lectura de les valoracions globals obertes escrites per l'alumnat després d'haver respost el qüestionari final de respostes tancades. Tot i que en aquest cas no es demanaven respostes dins d'una escala de valoració prefixada, resulta evident que el plantejament didàctic utilitzat per a la unitat didàctica és valorat molt positivament en la immensa majoria dels casos (presentem a continuació una detallada anàlisi de les respostes obertes del qüestionari final).

5.3.4. Valoracions globals obertes fetes per l'alumnat

A continuació de les valoracions que els alumnes havien de concretar entre quatre opcions per a cada pregunta (gens, poc, bastant, molt) al qüestionari final, deixàvem un espai generós, pràcticament tot un full A4, perquè escrivissin una valoració totalment oberta sobre la opinió que tenien del plantejament didàctic de la unitat de geometria analítica. Per donar-los peu perquè comencessin a redactar, llegien aquest text breu: *A continuació tens espai per escriure els comentaris que vulguis sobre el que penses del treball que hem fet al tema de geometria analítica. Pots escriure sobre el que t'ha agradat i el que no, el que has trobat útil i el que creus que no t'ha servit, el que t'ha semblat fàcil o has trobat difícil, etc.*

Les respostes dels 18 alumnes presents a la sessió són totes breus. Destaquem que el to general indica una valoració francament positiva envers el plantejament didàctic que comença per la resolució d'activitats contextualitzades en l'entorn del programari interactiu Geogebra.
Les respostes ja han quedat reflectides al registre diari del procés d'implementació. Ara procedim a classificar-les segons el que expressen. Realitzem les agrupacions següents:

Grup 1: atractiu – comparació – MHE (4 alumnes).
Respostes que fan referència a tres aspectes: manifesten una percepció positiva de l'atractiu del plantejament didàctic; estableixen algun tipus de comparació entre aquest plantejament i les classes tradicionals (favorable al primer); i es refereixen al pas que hi ha des d'usar Geogebra (MHG) fins a realitzar activitats per escrit (MHE). Dels 4 alumnes d'aquest grup, 3 remarquen que han trobat dificultat a l'hora de passar a la resolució per escrit.

- Toni: *Les activitats fetes amb el Geogebra m'han ajudat per veure després al fer els exercicis a la llibreta el sistema de com solucionar-los. També ha estat una activitat amena comparant-la amb les classes fetes a les aules.*
- Raquel: *Utilitzar el Geogebra m'ha agradat molt, perquè així es té un altre punt de vista sobre la geometria. Crec que ha estat útil utilitzar aquest programa m'ha ajudat a veure les activitats més clares, encara que a l'hora de fer-ho a mà*

m'ha costat una mica. Però crec que ha valgut la pena utilitzar aquest programa.

- Alberto: *Les activitats amb Geogebra són una altra manera de veure les matemàtiques, per tant crec que són una bona manera d'aprendre, ja que les classes sempre es fan més divertides, encara que el que crec que s'havia de fer després de cada activitat amb Geogebra és fer una altra a la pissarra per entendre-ho de les dues maneres. El que he trobat més difícil ha sigut passar els meus coneixements amb Geogebra a paper.*
- José: *Ha estat una experiència molt bona ja que ho havíem fet* [?]. *Els exercicis que fèiem han resultat força fàcils però quan es posaven a la pràctica escrita la seva dificultat augmentava.*

Valoració personal escrita

A continuació tens espai per escriure els comentaris que vulguis sobre el que penses del treball que hem fet al tema de geometria analítica. Pots escriure sobre el que t'ha agradat i el que no, el que has trobat útil i el que creus que no t'ha servit, el que t'ha semblat fàcil o has trobat difícil, etc.

Les activats fetes amb el geogebra m'ha ajudat per veure després al fer els exercicis a la llibreta el sistema de com solucionar-los. També ha estat una activitat amena comparant-la amb les classes fetes a les aules.

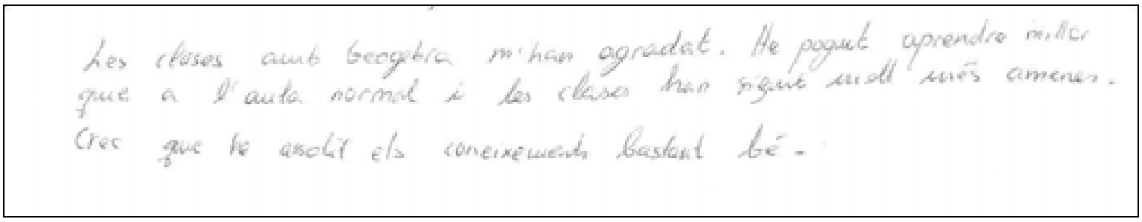
Figura 5.21. Exemple de valoració global (alumne Toni).

Grup 2: atractiu – comparació (6 alumnes).

Respostes que fan referència a dos aspectes: manifesten una percepció positiva de l'atractiu del plantejament didàctic; i estableixen algun tipus de comparació entre aquest plantejament i les classes tradicionals (favorable al primer).

- M. Carmen: *Les classes amb Geogebra m'han agradat. He pogut aprendre millor que a l'aula normal i les classes han sigut molt més amenes. Crec que he assolit els coneixements bastant bé.*
- Alba: *M'ha agradat treballar amb Geogebra perquè he après coses gairebé sense assabentar-me. Era una optativa* [opció] *molt interessant per canviar la manera de fer classe.*
- Ivan: *Gràcies amb geometria analítica* [Geogebra] *podem calcular moltes coses més ràpid, també geometria analítica ajuda entendre els problemes. M'agrada molt aquest tema perquè jo tinc un 6 d'aquest trimestre.*
- Tanya: *M'ha agradat molt fer els exercicis amb ordinador, perquè tot es fa més ràpid i no és tan avorrit.*
- Dídac: *El Geogebra m'ha semblat un programa molt bo per poder comprendre millor la teoria i et motiva més a entendre-ho.*

– Soslan: *A veure, les classes a informàtica m'han agradat més que les classes normals, perquè ho entenia bastant, hi havia coses que no entenia però més o menys ho entenia. No era tan complicat com jo pensava que seria. En conclusió que prefereixo fer geometria que classe normal.*



Les classes amb Geogebra m'han agradat. He pogut aprendre millor que a l'aula normal i les classes han sigut molt més amenes. Crec que he assolit els coneixements bastant bé.

Figura 5.22. Exemple de valoració global (alumna M. Carmen).

Grup 3: comparació (4 alumnes).
Respostes que només fan referència a la comparació entre el plantejament didàctic innovador i el tradicional. La valoració és positiva pel al primer, excepte en el cas d'una resposta que remarca la diferència però que no manifesta si la valora positivament o negativament.

– Manel: *Utilitzar el Geogebra m'ha ajudat a veure més clar les equacions de la recta i la teoria sobre els vectors.*
– Youssef: *M'han semblat més fàcils els exercicis amb Geogebra.*
– Angelo: *Ha estat bastant interessant a l'hora de comprendre millor les activitats fetes a classe.*
– Jesús: *Trobo que les classes amb Geogebra han estat radicalment diferents.*

Grup 4: atractiu. (2 alumnes).
Respostes que només fan referència a la percepció sobre l'atractiu del plantejament didàctic. La valoració en aquest aspecte és positiva.

– Marta: *M'ha semblat un bon mètode treballar a l'aula d'informàtica i he trobat les classes més interessants.*
– Juan: *Geogebra m'ha agradat bastant, les classes havien sigut molt divertides.*

Grup 5: interdisciplinarietat (2 alumnes).
Respostes que subratllen la utilitat del plantejament didàctic per a l'aprenentatge d'altres matèries del currículum. En una de les dues respostes també hi apareix una clara valoració positiva de l'atractiu del plantejament didàctic.

– Federico: *M'ha semblat un tema que havíem d'haver fet abans i no al final de curs, ja que ens hauria pogut ajudar en altres matèries.*

– Erik (respon en castellà): *A mi me gustó mucho porque no sólo me sirvió para mates sino para física y tecno, además se me aclararon muchas dudas, espero que el año que viene se vuelva a realizar.*

5.3.5. Resultats individuals

Després d'haver analitzat des d'un punt de vista grupal les valoracions de l'alumnat sobre l'ús de Geogebra al llarg del procés d'implementació de les activitats, ara és el torn d'una anàlisi que prengui en consideració les individualitats. El primer pas per entrar-hi consisteix en presentar les bandes de valoració de cada un dels cinc tipus de preguntes que abans ja s'han etiquetat breument amb:

- P1: plantejar
- P2: trobar
- P3: avançar
- P4: generalitzar
- P5: millor que la classe tradicional (comparar)

I també presentar la valoració global individual (segons a quina banda de valoració se situa la mitjana global individual). El resultat, en forma de taula, és el següent:

	Plantejar	Trobar	avançar	generalitzar	comparar	total
Manel	M	M	BB	B	BB	BB
Youssef	B	B	P	B	BB	B
M. Carmen	BB	BB	BB	BB	M	BB
Toni	B	BB	BB	P	B	B
Raquel	BB	BB	BB	B	M	BB
Angelo	BB	M	BB	BB	B	BB
Marta	BB	BB	BB	B	BB	BB
Juan	B	BB	P	B	B	B
Jesús	BB	BB	B	N	B	B
Alba	BB	BB	BB	B	BB	BB
Federico	BB	BB	BB	B	B	BB
Neus	BB	B	BB	B	B	B
Ivan	P	B	N	B	B	B
Tanya	M	M	BB	B	M	BB
Dídac	B	BB	BB	B	B	B
Soslan	B	B	P	B	BB	B
Alberto	BB	BB	BB	BB	B	BB
José	BB	BB	B	BB	B	B
Erik	BB	BB	BB	BB	BB	BB

Taula 5.7. Intervals de valoració individuals a les 5 preguntes sobre l'ús de Geogebra

El primer que observem en els resultats totals individuals (la columna de la dreta) és que totes les valoracions són positives i se situen a les bandes BB i B gairebé a meitat i meitat, ja que hi ha 10 valoracions individual globals d'etiqueta BB i 9 de B (recordem que la mitjana total grupal és 0,67, és a dir, pràcticament el valor 2/3).
Observant la resta de columnes, que corresponen a les cinc preguntes, queda clar que les valoracions positives són molt majoritàries. Més enllà d'això, sorgeix una qüestió pertinent a l'hora d'inspeccionar amb més detall la distribució de les bandes de valoració dins de la taula: ¿és possible agrupar els alumnes en categories segons una determinada progressió en les respostes, de manera anàloga a com s'ha procedit en l'anàlisi de les respostes del procés de matematització? Recordem que en el procés de matematització hem distingit entre MHG, MHE i MV, i que l'alumnat s'ha distribuït en quatre categories segons l'assoliment (en les dues bandes més altes) que ha demostrat en totes tres, dues, una o cap d'aquestes matematitzacions.
I a partir d'aquesta qüestió anterior també en sorgeix una altra: ¿existeix una relació suficientment clara entre els resultats individuals de la matematització i els resultats de les valoracions amb Geogebra? O, formulat d'una altra manera: ¿els alumnes de les categories de la matematització coincideixen totalment o en gran part dins d'unes categories que es puguin extreure de l'anàlisi de les valoracions individuals sobre l'ús de Geogebra?
Per respondre això cal primer observar com es distribueixen les valoracions individuals corresponents a la pregunta etiquetada amb "generalitzar". Si unes categories establertes a partir de la taula anterior coincidissin pràcticament amb les categories de la matematització, esperaríem trobar que els alumnes que assoleixen millors resultats en la MV (categoria 1) presentessin, dins de les respostes de valoració de la pregunta 4 (generalitzar), valoracions iguals o molt semblants, i presumiblement altes. També, que els alumnes que no assoleixen tant la MV (categoria 2) presentessin valoracions molt semblants entre ells però molt o bastant diferents a les de la categoria anterior.
Una taula que contingui els alumnes agrupats per categories i que al mateix temps mostri la valoració sobre la pregunta 4 (generalitzar) serà aclaridora. De fet, incloem totes les preguntes que tenen a veure amb el procés de matematització: P1, P2, P3 i P4, però marquem especialment la columna corresponent a P4, amb un fons gris.

		P1	**P2**	**P3**	**P4**
Categoria 1 7 alumnes	Raquel	BB	BB	BB	B
	Angelo	BB	M	BB	BB
	Jesús	BB	BB	B	N
	Alba	BB	BB	BB	B
	Neus	BB	B	BB	B
	Dídac	B	BB	BB	B
	Erik	BB	BB	BB	BB

Aquesta taula continua a la pàgina següent

Categoria 2 7 alumnes	Youssef	B	B	P	B
	M. Carmen	BB	BB	BB	BB
	Toni	B	BB	BB	P
	Marta	BB	BB	BB	B
	Federico	BB	BB	BB	B
	Alberto	BB	BB	BB	BB
	José	BB	BB	B	BB

Categoria 3 3 alumnes	Manel	M	M	BB	B
	Ivan	P	B	N	B
	Tanya	M	M	BB	B

Categoria 4 2 alumnes	Juan	B	BB	P	B
	Soslan	B	B	P	B

Taula 5.8. Valoracions individuals sobre l'ús de Geogebra agrupades segons les categories dels resultats de la matematització

Observem que a la columna corresponent a la pregunta 4 (generalització) no es poden establir diferències entre les valoracions de les categories 1 i 2, on es concentren la majoria dels alumnes (14 alumnes de 19, quasi les tres quartes parts de l'alumnat). Hi ha una distribució molt semblant de respostes dins de cada una d'aquestes dues primeres categories. Pel que fa a les categories 3 i 4, totes les valoracions corresponen a la banda de valoració B, però això tampoc marca una diferència significativa amb les altres dues categories, on també hi és present la valoració B, així com valoracions per sobre i per sota de B.

Arribem a la conclusió que no es detecta correlació entre els resultats de la MV avaluats objectivament a partir de la realització de les activitats, i la valoració subjectiva que l'alumnat fa sobre la utilitat de Geogebra per ajudar a obtenir resultats generals. Això ho podem concretar i afinar més si tenim en compte els punts següents:

1. Els resultats per a la MV a la categoria 1 se situen a les franges de valoració BB i M, és a dir, en un assoliment alt. En canvi, la valoració subjectiva dels alumnes d'aquesta categoria es reparteix entre les franges B i BB, amb l'excepció d'un valor N (neutre, exactament 0,50).
2. Els resultats per a la MV a les categories 2, 3 i 4 se situen a la banda B o a bandes inferiors, i la valoració subjectiva que l'alumnat de la categoria 2 fa sobre la pregunta 4 (generalitzar) presenta una distribució molt semblant a la dels alumnes de la categoria 1, és a dir, es reparteix entre les franges B i BB, amb l'excepció d'un valor P. La dels alumnes de les categories 3 i 4 se situa a la franja B.

3. Per tant, en general, els alumnes que obtenen un alt assoliment de la MV tenen una percepció molt semblant de la utilitat de Geogebra per generalitzar que els alumnes que obtenen un assoliment de la MV apreciablement més baix. En la immensa majoria dels casos, la valoració subjectiva és positiva i no es correspon amb les diferències de resultats a l'hora de realitzar la matematització vertical.

Expressat en uns termes resumits i simples, podem afirmar que la immensa majoria dels alumnes valoren positivament, i de manera semblant, l'ús de Geogebra per generalitzar, però quan s'enregistren els resultats de la MV, aquests alumnes distribueixen o bé en el grup assoliment alt (categoria 1) o bé en els grups d'assoliment més baix (categories 2, 3 i 4).
De fet, si ens fixem les columnes corresponents a les altres preguntes sobre la valoració de Geogebra en el procés de matematització (P1, P2 i P3) trobem igualment que no hi ha diferències significatives entre els grups d'alumnes pertanyents a les diferents categories. Les valoracions són també positives en la immensa majoria dels casos.

En conclusió: l'alumnat fa, molt majoritàriament, una valoració positiva de l'ús de Geogebra durant el procés de matematització (MH i MV), i aquells alumnes que obtenen millors resultats en la matematització no realitzen, en general, valoracions subjectives ni més altes ni més baixes que aquells alumnes que obtenen resultats més discrets. És a dir, que l'ús de Geogebra és tan ben valorat pels uns com pels altres.

Si despleguem una visió que contempli no tan sols les valoracions individuals que hem mostrat a l'apartat anterior, sinó que també tingui en compte, com a elements molt rellevants, les valoracions globals obertes fetes pels alumnes després de completar el qüestionari final tancat, observem un panorama en el qual les valoracions subjectives apareixen altament positives en tot el grup d'alumnes.

5.3.6. Interpretació de les valoracions subjectives de l'alumnat

Després d'haver realitzat l'anàlisi dels resultats de les valoracions subjectives dels alumnes, i tenint en compte els resultats de la matematització que hem analitzat en apartats anteriors, afirmem que:

En activitats de matematització induïda (no forçada) sobre situacions contextualitzades on, per resoldre, hi intervenen la visualització geomètrica, la manipulació en entorn TIC i l'àlgebra, les valoracions globals subjectives no guarden cap correlació amb la classificació dels alumnes per categories de matematització.

Podem també afirmar amb fonament que les activitats amb Geogebra han aconseguit motivar els alumnes, tant en un sentit absolut, com en comparació amb la metodologia tradicional d'impartir classes. Hem accionat amb èxit els "ressorts" de la motivació. Aquesta última frase no tan sols l'hem escrita pel seu propi significat, sinó també perquè ens retorna als fonaments teòrics del nostre plantejament. A l'inici del capítol 2, quan hem presentat el nostre punt de partida teòric, hem citat Filloy (1998). Ara ho recordem:

"...sabem que els primers ressorts que hem d'accionar en l'aprenentatge de les Matemàtiques, són els de la motivació, fet que, per una part implica que el material presentat tingui la virtut de recórrer a tot allò que «estimuli» l'aprenentatge, sense cap coacció (com la d'estar, en ares del rigor, ficats a la camisa de força que comporta una presentació lògica totalment nítida)."

Després d'haver fonamentat el nostre plantejament sobre aquest punt de partida pel que fa a la motivació, i després d'haver dissenyat i implementat el nostre plantejament didàctic, som nosaltres els que, inspirant-nos en la cita de Filloy, afirmem (entre claudàtors les referències que enllacen amb la cita de Filloy):

Les activitats sobre situacions contextualitzades [el material presentat] *on, per resoldre, hi intervenen la visualització geomètrica, la manipulació en entorn TIC i l'àlgebra, indueixen la matematització* [estimulen l'aprenentatge sense cap coacció] *i aconsegueixen motivar els alumnes* [accionen els ressorts de la motivació].

En vista d'això, assenyalem que coincidim totalment amb una apreciació de Niss (1989), que hem citat al capítol 2, i que fa referència a una de les raons que dóna aquest autor per incloure activitats de modelització en el currículum. Nosaltres matisem que ho fem extensible també a la matematització (ja que, com hem mostrat també al capítol 2, per modelitzar cal matematitzar): "Augmenta la motivació dels alumnes, que en matemàtiques és tradicionalment baixa en nombrosos casos individuals".

Ja hem assenyalat en un apartat anterior els matisos que apareixen a l'anàlisi grupal de les valoracions sobre l'ús de Geogebra per matematitzar (preguntes P1, P2, P3 i P4). Hem destacat que la mitjana de les valoracions en cada una de les preguntes és extraordinàriament pròxima al valor 2/3 (que correspon a la resposta "bastant" de les quatre opcions entre les quals podien triar els alumnes) i que en tot cas s'hi separa una mica a les preguntes P2 ("trobar"; valoració una mica superior a 2/3) i P4 ("generalitzar"; valoració una mica inferior a 2/3). Això encaixa amb els resultats de la matematització:

- Tots els alumnes, excepte els pocs matematitzadors febles, obtenen resultats alts a la MHG, és a dir, "troben" amb Geogebra les solucions a les situacions plantejades.
- Només els matematitzadors complets obtenen resultats alts a la MV, és a dir, generalitzen a partir de les situacions plantejades.

I resulta coherent amb la interpretació que hem realitzat dels resultats de la matematització: en un entorn de matematització induïda, és més fàcil per als alumnes l'aprehensió mitjançant la manipulació visual-tecnològica, és a dir, la resolució de situacions concretes amb instruments TIC, que la generalització mitjançant expressions algebraiques a partir de la resolució de situacions concretes.

Que aquesta diferència aparegui als resultats de les valoracions subjectives significa que els alumnes d'alguna manera ho perceben. Però remarquem que el salt de dificultat que queda reflectit als resultats objectius de la matematització (entre MHG i MV) és quantitativament molt més pronunciat que el salt que es detecta a les valoracions subjectives (entre P2 i P4). Per tant, matisem que ho perceben de forma atenuada. Dit d'una altra manera: si els resultats de les valoracions subjectives reflectissin directament la intensitat de la diferència que es detecta als resultats objectius de la matematització, la valoració de P2 ("trobar") hauria de ser força més alta i la de P4 ("generalitzar") força més baixa.
Cal tenir present que els alumnes responen preguntes que els demanen la valoració sobre l'ús de Geogebra per matematitzar, i que comencen així: "Usar Geogebra t'ha ajudat per...? Els resultats grupals (valors mitjans), ja ho hem mostrat, són pròxims al valor que correspon a la resposta "bastant". Els alumnes que obtenen resultats alts en tots els tipus de matematització responen (fem una aproximació) que usar Geogebra els ha ajudat "bastant" i els alumnes que obtenen resultats sensiblement més baixos en algun tipus de matematització també responen (continuem en l'aproximació) que Geogebra els ha ajudat "bastant", tant en els tipus de matematització on han obtingut resultats alts com en els tipus on han obtingut resultats més baixos.
És cert que els resultats grupals són més alts, sense allunyar-se gaire del valor 2/3, a les respostes a la pregunta P2 (la que mesura si Geogebra ha ajudat a trobar les solucions i que per tant correspon a la MHG) i més baixos, igualment sense allunyar-se gaire de 2/3, a la pregunta P4 (la que mesura si Geogebra ha ajudat a generalitzar i que per tant correspon a la MV). I és també cert que això resulta coherent amb els resultats alts de la MHG i els resultats més baixos de la MV. Però concloem que percepcions expressades de manera idèntica no es corresponen amb realitats idèntiques. Ens trobem amb diferents alumnes que expressen aproximadament per igual que Geogebra els ha ajudat "bastant", però els seus resultats objectius en la matematització són sensiblement diferents. Això ens indica que, per a la gran majoria dels alumnes, Geogebra és percebut com una eina útil per matematitzar, amb pràctica independència dels resultats objectius de la matematització. El grau d'utilitat percebut és molt més homogeni que els resultats de la matematització. De fet, no hem pogut classificar els alumnes en categories segons el grau de percepció subjectiva, i en canvi sí que hem agrupat els alumnes en categories clares segons els resultats objectius de la matematització.

Formulem, de manera resumida, (partint del mateix inici de paràgraf que hem utilitzat per formular els rendiments decreixents de la matematització):

Percepció atenuada: En activitats de matematització induïda (no forçada) sobre situacions contextualitzades on, per resoldre, hi intervenen la visualització geomètrica, la manipulació en entorn TIC i l'àlgebra, i on els alumnes manifesten una alta motivació, la percepció subjectiva (dels alumnes) respecte la utilitat de Geogebra per matematitzar és coherent amb les diferències que s'observen en els resultats objectius, però apareix molt atenuada.

I, donat que aquesta atenuació és molt accentuada, afegim:

Les activitats sobre situacions contextualitzades, en un entorn de matematització induïda i amb mitjans tecnològics visuals i manipulatius, pel fet de ser així, proporcionen als alumnes una percepció positiva bastant pròxima a l'homogeneïtat en els diferents tipus de matematització.

Si recollim els elements fonamentals de l'anàlisi de la matematització i de l'anàlisi de les percepcions subjectives, en un entorn de matematització d'aquestes característiques, ens trobem amb:

- Un molt majoritari assoliment de la matematització horitzontal amb resultats alts.
- Un assoliment important però no majoritari de la matematització vertical amb resultats alts.
- Una molt alta i pràcticament unànime valoració global positiva del plantejament didàctic.
- Unes percepcions de la utilitat de Geogebra positives, i força pròximes, per realitzar la matematització horitzontal i per realitzar la matematització vertical.

Observem, doncs, que si bé el nostre entorn d'aprenentatge no indueix la generalització amb la mateixa intensitat i extensió amb la qual efectivament indueix la matematització horitzontal, sí que situa els alumnes, globalment, en uns resultats de matematització i de valoració positiva que ens proporcionen una important posició d'avantatge per completar de manera "forçada" (proporcionada pel professor) la generalització a partir de treball fet a les activitats amb Geogebra.
En tot cas, l'avantatge és clar respecte de la metodologia tradicional, i això ho valorem no tan sols nosaltres a partir de l'anàlisi dels resultats de la matematització i de les percepcions subjectives, sinó també, com hem mostrat, els alumnes quan responen la pregunta: "Comparat amb el treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?".

5.4. Prova escrita i estudi de casos

5.4.1. Qualificacions obtingudes pels alumnes

El batxillerat ha estat tradicionalment i és, de fet, una etapa educativa amb un fort component propedèutic. Un els objectius més importants és que els alumnes estiguin en condicions de superar unes proves (externes als centres educatius de secundària) d'accés a la universitat. Fins ara, aquestes proves han tingut un plantejament tradicional. Això significa que els alumnes han de demostrar per escrit que saben resoldre determinats problemes d'una manera convencional. Per tant, tot i que és possible, i creiem que desitjable, introduir plantejaments innovadors, no podem oblidar que existeix un imperatiu de preparació, en dos anys de Batxillerat, per poder afrontar en bones condicions aquestes proves escrites externes.
Per altra banda, també és cert que la normativa catalana de l'any 2007 sobre el desplegament del currículum introdueix aspectes nous (concepte de competència, destreses en la resolució de problemes, etc.) tal com hem comentat al capítol 1. És igualment cert que per al final del curs 2009-2010 està previst que s'apliqui una nova estructura de les proves d'accés a la universitat en consonància amb els plantejaments de la nova normativa. Però, mentre les noves orientacions no hagin pres encara una forma concreta, és imperatiu seguir preparant l'alumnat per afrontar les proves escrites tradicionals. De fet, el nostre plantejament didàctic és innovador pel que fa a la primera fase de matematització induïda amb activitats contextualitzades en l'entorn del programari Geogebra, però té una segona fase de formalització, subministrada pel professor, que porta els alumnes fins als continguts en la seva forma convencional.

Al final de la unitat de geometria analítica a primer de Batxillerat en la qual hem desenvolupat la implementació del plantejament didàctic que és objecte d'aquest treball, els alumnes han realitzat una prova escrita convencional, és a dir, una prova del mateix estil que haurien realitzat si haguessin seguit un plantejament didàctic totalment convencional (la prova està disponible per a la consulta a l'annex 2: sessió 15 de la seqüència d'implementació). Per a la nostra investigació, això té l'avantatge que ens permet obtenir resultats de la prova escrita i comparar-los amb els resultats de la matematització en el procés d'implementació de les activitats amb Geogebra.
Pel que fa als resultats d'aquesta prova, el primer que cal assenyalar és que s'ha produït una polarització en les qualificacions. Hi ha un primer grup d'alumnes que més o menys s'ha preocupat de preparar-se específicament. Els resultats, expressats en una qualificació numèrica tradicional de l'1 al 10, han estat per sobre del 5 per a tots aquests alumnes excepte per a dos, que han obtingut un 4,9 i un 4,5 (i que, després d'una valoració més global, superen el trimestre). Hi ha un altre grup d'alumnes que no s'ha preparat per a la prova i ha fet acte de presència a l'examen, però res més. Els seus exàmens són en blanc o bé tenen alguna cosa escrita que no val ni una dècima. Es tracta d'alumnes que en veure que arriba el final del curs i que no podran superar un nombre important de matèries, llencen la tovallola, perquè pensen en la repetició o perquè volen abandonar. Així és: tots els alumnes que han obtingut la puntuació zero

en la prova convencional, han repetit tot el primer del Batxillerat el curs acadèmic següent, o bé han abandonat.
Hi ha un cas que és l'excepció a la situació polaritzada; amb un 2,7 de qualificació a la prova escrita, no tenim prou elements contextuals per esbrinar si no s'ha preparat o si s'ha preparat però la prova li ha anat malament.

A continuació presentem una taula on es pot apreciar la comparació entre el resultat numèric de la prova escrita i la categoria on l'alumne se situa en el procés de matematització amb activitats contextualitzades en l'entorn del programari Geogebra. Al costat de les puntuacions "zero" indiquem si l'alumne en qüestió repeteix primer de Batxillerat el curs següent (R), o si abandona el Batxillerat (A).

		Qualificació prova escrita
Categoria 1 MHG+MHE+MV	Raquel	5,2
	Angelo	2,7
	Jesús	4,9
	Alba	0 (R)
	Neus	0 (A)
	Dídac	5,5
	Erik	6
Categoria 2 MHG+MHE	Youssef	0 (A)
	M. Carmen	7
	Toni	9,2
	Marta	0 (R)
	Federico	8
	Alberto	9,7
	José	4,5
Categoria 3 MHG	Manel	0 (A)
	Ivan	6,3
	Tanya	0 (R)
Categoria 4	Juan	0 (R)
	Soslan	0 (R)
(R): repeteix primer de Batxillerat durant el curs següent (A): abandona el Batxillerat		

Taula 5.9. Comparació entre la classificació segons les categories de la matematització i els resultats de la prova escrita convencional

Observem que no podem establir una correlació entre resultats a la prova escrita i resultats a la matematització (classificació en categories). Ens adonem, per exemple, que les tres qualificacions més altes (9,2; 9,7; 7) són d'alumnes que pertanyen a la categoria 2, mentre que els millors resultats dins de la categoria 1 són discrets. Recordem que els alumnes de la categoria 1 són aquells que han obtingut resultats alts a totes les matematitzacions (MHG, MHE i MV). Però entre ells no hi ha les millors qualificacions a la prova escrita, com resulta evident a partir de la taula anterior.

Tant a la categoria 1 com a la categoria 2, on hi ha els alumnes que obtenen resultats alts a la MHE, hi trobem alumnes que no han preparat la prova escrita i han obtingut resultats molt baixos. De fet, a totes les categories hi trobem alumnes que han descuidat totalment la preparació de la prova escrita i han llençat la tovallola. Com hem comentat abans, són alumnes que quan afrontaven aquesta prova, l'última del curs de la matèria matemàtiques, ja tenien informació suficient del conjunt de matèries per saber que els resultaria impossible o molt difícil superar el primer curs de Batxillerat. Aquesta és una circumstància no gens desitjable, ni per a l'alumne que la viu ni per al centre educatiu, però en aquest cas, i sense que ho haguem pretès, ens proporciona una informació interessant. Ens adonem que una prova escrita necessita una preparació específica, la qual cosa és tan òbvia com dir que per superar una prova escrita cal exercitar-se en el tipus d'exercicis i problemes que solen aparèixer a les proves escrites. Això explica el fet que apareguin alumnes amb resultats alts en els tres tipus de matematització, però que no els han servit per obtenir una qualificació com a mínim discreta a la prova escrita.

Per tant, observem que hi ha alumnes que matematitzen amb resultats alts, que ho fan molt motivats (les valoracions sobre les activitats amb Geogebra són altes independentment dels resultats de la matematització, com hem vist abans) però que, sense haver-se preparat específicament per a la prova escrita, obtenen puntuacions baixes.

Vist això anterior, és oportú tornar a citar Niss, Lesh i Lee (capítol 2), organitzadors del grup 6 de l'ICME 5 (1984), quan identifiquen un dels principals obstacles que dificulten o impedeixen incloure realment les aplicacions i la modelització:

"Els exàmens escrits tradicionals no són gaire adequats per avaluar activitats d'aplicació i modelització. Si l'avaluació es basa en aquest tipus d'exàmens, les aplicacions i els models quedaran desplaçats a una posició d'importància secundària."

Hem observat que una prova escrita tradicional no reflecteix els assoliments dels alumnes en el procés de matematització induïda, que sí que són mesurables amb un sistema concebut per detectar-los i analitzar-los, com el que efectivament hem desenvolupat en el procés d'implementació. Els bons resultats en el procés de matematització induïda no permeten assegurar que es produiran resultats proporcionalment bons a la prova escrita. És més: hem constatat que els alumnes que obtenen millors resultats a la prova escrita no són els que obtenen millors resultats a la matematització, sinó que són els que millor han preparat específicament la prova escrita.

Encara és possible expressar-ho d'una forma més breu i, si es vol, crua: superar una prova escrita no significa necessàriament res més que s'ha invertit l'esforç necessari i s'ha adquirit l'habilitat per superar una prova escrita.

5.4.2. Problema 5 de la prova escrita i activitat 7 amb Geogebra

La prova escrita (o examen) que han realitzat els alumnes és de caràcter convencional, però és necessari remarcar que a l'hora de dissenyar-la hi hem volgut incloure un

problema que plantegés una situació similar a una altra que hagués aparegut en alguna de les activitats realitzades amb Geogebra. D'aquesta manera, podem abordar una anàlisi que permeti elements de comparació entre el procés de matematització induïda amb Geogebra i el procés de resolució en una situació tan habitual i convencional per als alumnes com és una prova escrita.
Concretament, dels cinc problemes que conté la prova escrita, l'últim planteja una situació molt similar a la de l'activitat 7 realitzada amb Geogebra. L'enunciat del problema és el següent:

5) Els punts *A*(0, –4); *B*(–2,0); *C*(4,3) són tres vèrtexs d'un rectangle.
a) Comprova (amb càlculs) que efectivament els costats *AB* i *BC* són perpendiculars.
b) Troba les coordenades del quart vèrtex del rectangle, *D*.
c) Calcula el perímetre del rectangle.
d) Troba les coordenades del centre *M* del rectangle (on es tallen les dues diagonals).

Aquest problema 5 compta 3 punts sobre els 10 totals de la prova escrita.

Fixem-nos ara en el text que correspon al plantejament de l'activitat 7 amb Geogebra:

Es vol delimitar una superfície, un camp de conreu, amb forma quadrada. Dos dels vèrtexs del quadrat seran unes fites naturals: un arbre *Q* que està a 370 m oest i 150 m sud (-3,7 , -1,5) i una roca *R* que està a 200 m oest i 230 m nord (-2,0 , 2,3). Els vèrtexs *Q* i *R* defineixen un dels costats del quadrat.
a) Troba la posició dels dos vèrtexs que falten, *S* i *T*.
b) Al centre d'aquest camp quadrat s'hi vol construir una caseta per guardar-hi estris. Troba la posició d'aquest centre *M*.

Les similituds resulten evidents. A l'activitat 7 amb Geogebra els alumnes han de completar un quadrat (apartat *a*; en realitat hi ha dues solucions, és a dir, dos quadrats que comparteixen el costat *QR*) i al problema 5 de la prova escrita han de completar un rectangle (apartat *b*). Tant a l'activitat 7 com al problema 5 han de trobar les coordenades del centre de la figura, és a dir, el punt on es tallen les dues diagonals (apartats *b* i *d* respectivament).

En cap dels dos enunciats presentem cap representació gràfica per acompanyar el text, ni esquemàtica ni detallada. Ara bé: existeix una gran diferència entre la resolució amb Geogebra, per una banda, i la resolució exclusivament per escrit que demana la prova escrita, per una altra banda. La resolució amb Geogebra permet una representació molt intuïtiva, visual i manipulativa, mentre que a l'examen els alumnes han de confiar en la seva major o menor destresa per representar gràficament sobre el paper els punts donats i veure com es completa la figura, d'una manera que no és tan precisa com la representació amb Geogebra (no disposen de paper quadriculat; escriuen sobre paper blanc) i que evidentment no és manipulativa.

És important subratllar un fet que ja hem comentat al capítol 4, a l'apartat dedicat a l'activitat 7 amb Geogebra. Els alumnes van dedicar gairebé tot el temps de la sessió a la resolució amb Geogebra, de tal manera que no van tenir temps per escriure la resolució en llenguatge algebraic sobre un paper. Això, que en aquell moment va ser una circumstància imprevista que ens va impedir obtenir una determinada sèrie de dades, es converteix en un element interessant a l'hora de comparar les resolucions de l'activitat 7 amb Geogebra i del problema 5 de l'examen. Al problema 5, els alumnes han de resoldre exclusivament per escrit una situació molt similar a la que van resoldre amb Geogebra a l'activitat 7, amb el detall que en aquell moment no van realitzar la resolució per escrit. De fet, podem afirmar que el problema 5 suposa per als alumnes una espècie de "resolució per escrit diferida" de l'activitat 7, en el sentit que l'han de realitzar unes quantes sessions després d'haver-la abordat amb Geogebra. A més, cal tenir present que en el moment de realitzar la prova escrita els alumnes han treballat tots els continguts de la unitat didàctica i que han completat el trànsit pel plantejament didàctic "de baix a dalt", és a dir, que han matematitzat sobre situacions contextualitzades i després, a partir d'aquesta matematització, han passat a la formalització dels continguts matemàtics.

En aquesta situació, podríem pensar que els alumnes que van completar correctament la figura a l'activitat 7 (11 de 15) i van obtenir correctament el punt mitjà (9 de 15) han de fer el mateix amb molta facilitat al problema 5 de l'examen. Però no hem de córrer tant. Hem de tenir en compte que els dos processos de resolució es desenvolupen en contextos ben diferents. No és el mateix una activitat en un entorn TIC que una prova escrita convencional. El primer i més evident senyal que la correcta resolució amb Geogebra no implica automàticament una fàcil resolució d'una situació anàloga en una prova escrita, és el fet que dels 11 alumnes que van completar correctament la figura a l'activitat 7, n'hi ha 4 (Alba, Youssef, Marta, Tanya) que lliuren l'examen en blanc o quasi en blanc (ja hem explicat abans quines circumstàncies hi ha darrere d'això). Si els resultés tan senzilla la resolució escrita després d'haver realitzat correctament la resolució amb Geogebra, l'haurien intentada, encara que no haguessin realitzat cap treball individual de preparació per a una prova convencional.

Per abordar l'anàlisi de les respostes dels alumnes al problema 5 de la prova escrita, hem de tenir en compte que dirigim la nostra atenció cap a un material de característiques notablement diferents de les que presenta un altre material que ja ha estat analitzat. Ens referim a les respostes dels alumnes als qüestionaris associats a les activitats amb Geogebra. Ja hem exposat al capítol 3, quan hem detallat el disseny dels qüestionaris, que les preguntes formulades ens permeten obtenir una informació en fragments prou concrets i petits com per emprendre després el tipus d'anàlisi que hem mostrat en apartats anteriors d'aquest capítol 5, és a dir, la tabulació numèrica i els càlculs subsegüents.
En canvi, les respostes dels alumnes al problema 5 de la prova escrita són més extenses i obertes a l'aparició de moltes variants. Per aquest motiu, hem considerat que el més adequat per a la seva anàlisi és l'estudi de casos. Amb aquesta elecció pretenem un enfocament que entri en el detall qualitatiu de les respostes. En apropar-nos als detalls de les resolucions individuals, considerem, com és habitual en les

anàlisis qualitatives, la conveniència d'elegir una mostra representativa en comptes de realitzar les anàlisis de tots els individus, ja que aquesta última tasca suposaria que tot el procés adquirís una excessiva extensió.
El primer que hem valorat a l'hora de triar una mostra he estat que hi aparegués com a mínim un alumne de cada categoria de matematització, segons la classificació que hem establert a l'anàlisi de la matematització que hem realitzat en un apartat anterior d'aquest mateix capítol. Això ens ha estat possible per a les categories 1 (matematitzadors complets), 2 (matematitzadors horitzontals) i 3 (matematitzadors tecnològics). No ha ens ha estat possible per a la categoria 4 (matematitzadors febles) ja que els dos alumnes que en formen part van lliurar la prova escrita en blanc o quasi en blanc (fet que ja hem comentat abans i que hem reflectit en la tabulació dels resultats de la prova escrita).
Els alumnes que hem seleccionat per a l'estudi de casos són aquests quatre: Jesús i Erik (categoria 1), M. Carmen (categoria 2) i Ivan (categoria 3). Com podem observar en la taula que hem presentat abans sobre els resultats de la prova escrita, les seves qualificacions van des del 4,9 la més baixa fins al 7 la més alta. No hem elegit cap dels dos alumnes amb millors resultats (per sobre de la qualificació 9) perquè hem preferit una mostra situada en una banda mitjana de qualificacions, la qual cosa significa que es tracta d'alumnes que no ho fan tot o quasi tot bé a la prova escrita, sinó que cometen errors, al problema 5 o en qualsevol dels altres problemes.

5.4.3. Detalls de les resolucions amb Geogebra per a l'activitat 7

Ja que realitzem un estudi de casos centrat en les resolucions dels alumnes per al problema 5 de la prova escrita, i que, com hem assenyalat abans, aquest problema té grans similituds amb l'activitat 7 feta amb Geogebra, és perfectament raonable completar per als quatre alumnes triats la informació referent a la resolució de l'activitat 7 que apareix al capítol 4. Així, abans d'entrar en una anàlisi de les respostes escrites corresponents al problema 5, mostrem amb detall els passos rellevants de les resolucions de l'activitat 7 fetes pels mateixos quatre alumnes seleccionats. Per passos rellevants entenem aquells que condueixen a la construcció d'un quadrat a partir de les posicions de dos punts Q i R que determinen un dels seus costats, i posteriorment a la determinació de les coordenades del centre (punt on es tallen les dues diagonals).
Hem comentat al capítol 4 que per a l'activitat 7 existeixen dues solucions, és a dir, dos quadrats que comparteixen el costat QR. Els quatre alumnes seleccionats construeixen amb Geogebra aquests dos quadrats i determinen els dos centres. Però, de fet, ara només cal que ens fixem en els passos per a la construcció d'un dels quadrats (el primer que construeixen els alumnes a partir dels punts Q i R), ja que la construcció del segon quadrat la realitzen aplicant els mateixos tipus d'accions, i per tant no ens aporta informació diferent.
Per a cada alumne, mostrem la pantalla on s'observen els dos quadrats que són les solucions a la situació plantejada. Les pantalles corresponen al fitxer de Geogebra tal com l'han lliurat els alumnes a l'acabament de la sessió en què han realitzat l'activitat 7. Ens hem permès la llicència de realitzar-hi, quan ha convingut, alguns retocs que no afecten el contingut sinó que només modifiquen la presentació en pantalla (per

millorar-la): hem mogut i ampliat o reduït la construcció geomètrica perquè aparegui sencera i el més gran possible a l'àrea gràfica de la pantalla, i hem mogut lleugerament algunes etiquetes de punts, segments o vectors per fer-les més visibles (per evitar que quedin confoses amb altes elements gràfics i sigui possible identificar ràpidament a quin element corresponen).

També per a cada alumne, presentem en una taula la seqüència dels passos per a la construcció del quadrat i la determinació del centre. En cada pas, diferenciem amb l'ús de dues etiquetes si l'alumne ha realitzat l'acció sobre la finestra gràfica o sobre la barra d'entrada algebraica. Amb l'etiqueta FG indiquem que l'alumne ha realitzat l'acció mitjançant l'ús del ratolí sobre la barra de botons i la finestra gràfica de la pantalla. Amb l'etiqueta EA indiquem que l'alumne ha realitzat l'acció a la barra l'entrada algebraica mitjançant el teclat.

Hem decidit mostrar seguides, una darrere l'altra, les construccions realitzades pels quatre alumnes, en comptes de presentar-les adherides a cada una de les resolucions escrites del problema 5. El motiu principal que ens ha impulsat a fer-ho així és que els processos de construcció del quadrat amb Geogebra són molt similars (es diferencien en detalls d'importància secundària), mentre que les resolucions per escrit del problema 5 revelen importants diferències. Hem considerat que és més adequat presentar primer les quatre construccions amb Geogebra, molt similars, i prendre això com a referència per abordar després l'anàlisi de cada una de les resolucions per escrit.

Comencem per l'activitat 7 realitzada per l'alumne Jesús. Aquesta és la seva pantalla final:

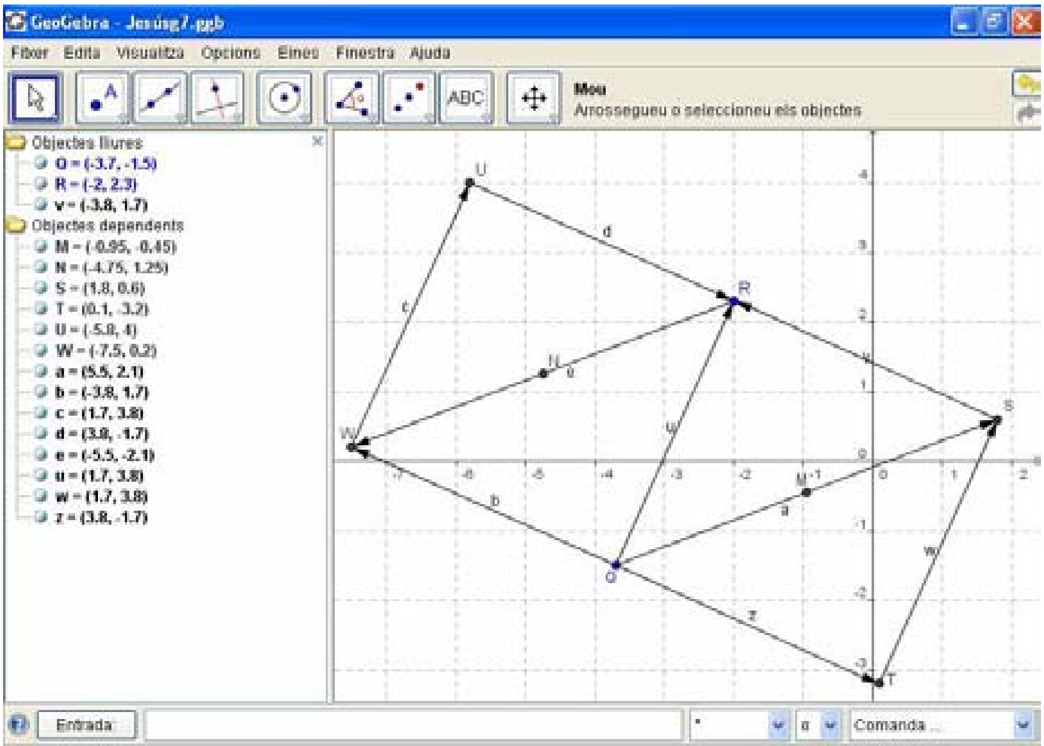


Figura 5.23. Pantalla de Geogebra amb la resolució de l'alumne Jesús per al l'activitat 7.

El fitxer corresponent de Geogebra, un cop examinat, mostra que el procés comença per la col·locació dels punts *Q* i *R* i la construcció del vector *QR*. L'alumne realitza fàcilment aquests passos a la finestra gràfica, mitjançant el ratolí. A continuació construeix un vector *v* a través del teclat a la barra d'entrada algebraica. Les seves components són el resultat de permutar les components del vector *QR* i canviar el signe d'una d'elles.

Fem un parèntesi, abans de continuar amb la construcció de l'alumne Jesús, per explicar com aquest alumne (i els altres) han arribat a conèixer que aquest procediment de permutar i canviar de signe és una manera senzilla de construir un vector perpendicular a un vector donat, amb la particularitat que té el mateix mòdul. És una tècnica que vam comentar a l'aula després de l'experiència que els alumnes havien obtingut amb la realització de l'activitat 5 amb Geogebra, la qual conduïa a l'expressió del producte escalar de dos vectors com a producte dels seus mòduls pel cosinus de l'angle que formen.
Vam completar aquesta manera d'expressar el producte escalar amb la seva expressió com a suma dels productes de les primeres components i de les segones components, és a dir, per a dos vectors *u* i *v*, $u \cdot v = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$ Aquesta fórmula la vam deduir utilitzant per una banda l'expressió dels vectors segons la base canònica del pla $\{e_1, e_2\}$, és a dir, $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$ i $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$ Per una altra banda teníem en compte, en l'explicació corresponent a l'aula, l'expressió, coneguda pels alumnes a partir de l'activitat 5, del producte escalar com a producte de mòduls pel cosinus de l'angle. Amb això, desenvolupàvem el producte $u \cdot v = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2)$ i raonàvem que els termes on apareix $e_1 \cdot e_2$ s'anul·len, ja que es tracta del productes escalar de dos vectors que formen un angle conegut de 90^o, el cosinus del qual és zero. Afegíem que els productes $e_1 . e_1$ *i* $e_2 . e_2$ valen 1, ja que els mòduls són 1 i l'angle és de 0^o, amb cosinus igual a 1. Llavors, obteníem que $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$ Considerem que això constitueix un exemple de combinació d'un resultat induït per la matematització a través d'activitats amb Geogebra (el producte escalar com a producte de mòduls pel cosinus de l'angle) amb una formalització algebraica introduïda pel professor (el desenvolupament del producte a partir de l'expressió dels vectors segons la base del pla). És, de fet, una mostra de plantejament "de baix a dalt" on s'adverteix la seqüència que comença per la matematització induïda amb activitats contextualitzades i acaba amb la formalització forçada dels continguts, sempre sobre la base de la matematització induïda.
Aquesta explicació anterior té interès perquè mostra com arribem a un resultat partir de la feina feta anteriorment amb activitats contextualitzades, i perquè aquest resultat (la fórmula $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$) ens serveix d'element de referència per plantejar una pregunta als alumnes, a l'aula: *"Donat un vector, en puc trobar ràpidament un altre que sigui perpendicular?"*. Això succeïa a la sessió immediatament posterior a la realització de l'activitat 5 amb Geogebra. A la pregunta, llançada a l'aire, un dels alumnes (Alberto) va respondre que sí, perquè el producte escalar serà zero si les components del segon vector són com les del primer, però canviades d'ordre. A la qual cosa vam afegir que cal canviar un dels signes. I d'aquesta manera els alumnes

s'adonaven que ja teníem, doncs, un procediment per trobar un vector perpendicular a un vector donat (i del mateix mòdul).

Com hem mostrat a l'inici del comentari sobre la resolució amb Geogebra de Jesús, aquest alumne utilitza el procediment de permutar les components del vector *QR* i canviar el signe d'una d'elles per obtenir un vector *v* perpendicular i del mateix mòdul.
Ho interpretem com una acció resultant del procés induït per la seqüència didàctica, és a dir, pel treball de matematització que comença, en aquest cas, a l'activitat 5 amb Geogebra realitzada a l'aula TIC (orientada induir de manera no forçada la comprensió del producte escalar de dos vectors), que segueix amb l'activitat 6 amb Geogebra i que s'arrodoneix amb la posterior formalització forçada, a càrrec del professor, realitzada a l'aula ordinària en la sessió immediatament posterior (fet que hem explicat en les línies anteriors a aquest paràgraf). L'alumne, per resoldre l'activitat 7 amb Geogebra, utilitza aquest procediment i no cap altre (veurem que els altres tres alumnes de l'estudi de casos també ho fan; i de fet 11 dels 15 alumnes que lliuren els fitxers de Geogebra fan servir aquest procediment). Per tant, estem en condicions d'afirmar que la seqüència didàctica anterior a l'activitat 7 ha marcat el camí que els alumnes han seguit per resoldre-la. Per això utilitzem la frase "procés induït per la seqüència didàctica". I volem posar especial èmfasi en una qüestió que ja hem indicat abans però que ens sembla oportú esmentar una altra vegada: aquesta seqüència didàctica a la qual ens referim respon a un plantejament "de baix a dalt".

Continuem amb la resolució concreta de l'alumne Jesús. Un cop ha introduït, a la barra d'entrada algebraica de Geogebra, les components del vector *v* perpendicular al vector *QR*, troba les posicions dels vèrtexs *S* i *T* mitjançant unes senzilles operacions que també introdueix a la barra d'entrada algebraica: $S=R-v$; $T=Q-v$. Finalment, li queda trobar la posició del centre *M* del quadrat. Primer construeix el vector *QS* sobre una de les diagonals i a continuació determina la posició de *M* usant un càlcul en què també hi intervenen un punt i un vector: $M=Q+(1/2)QS$.

Hem pogut observar que la resolució de Jesús està enterament basada en les operacions amb punts i vectors. Fins i tot quan ja ha obtingut els vèrtexs *S* i *T*, tanca la figura utilitzant vectors que van d'un vèrtex a un altre. L'enfocament que utilitza està claríssimament basat en el treball anterior, tant en les activitats 1-4 (equació vectorial de la recta: "punt més paràmetre per vector") com en les activitats 5-6 (construcció d'un vector perpendicular). Queda palesa la influència absoluta que ha tingut aquesta seqüència didàctica en el procediment de resolució que usa l'alumne.

La taula que presentem a continuació resumeix els passos que realitza l'alumne Jesús per a la construcció d'un dels dos quadrats de l'activitat 7. Ja hem comentat abans que només mostrem amb detall el procés per a un dels quadrats perquè per al segon quadrat l'alumne (ell i les altres tres de l'estudi de casos) segueix la mateixa seqüència amb les mateixes eines. A la taula apareixen els punts i els vectors amb les mateixes lletres que Jesús utilitza a la seva pantalla.

Jesús	
Acció(ns) amb Geogebra Lloc de l'acció [FG]: finestra gràfica [EA]: barra d'entrada algebraica	**Conseqüències i significat de l'acció(ns)**
u=*QR* [FG]	Construeix el vector *u* amb origen a *Q* i extrem a *R*.
v=(-3.8, 1.7) [EA]	Construeix el vector *v* a partir de la observació de les components del vector *u* presents a la finestra algebraica. Escriu per teclat, a la barra d'entrada algebraica, les components del vector *u* permutades i la segona canviada de signe (que passa a ser la primera component de *v*). Per tant, *v* és un vector perpendicular a *u* i de mòdul igual. Geogebra el dibuixa automàticament amb extrem al punt *R*, per la qual cosa el seu origen correspon a un dels vèrtexs buscats de quadrat.
S=*R*-*v* [EA] *T*=*Q*-*v* [EA]	Amb aquestes operacions a la barra d'entrada, dóna nom i situa els vèrtexs (*S* i *T*) que falten per completar el quadrat.
w=*TS* [FG] *z*=*QT* [FG]	Construeix els vectors *w* i *z* que visualment tanquen el quadrat.
a=*QS* [FG]	Construeix el vector *a* sobre la diagonal *QS* (origen a *Q* i extrem a *S*).
M=*Q*+(1/2)*a* [EA]	Construeix el centre *M* del quadrat partint del vèrtex *Q*, al qual suma la meitat del vector *a*.

Taula 5.10. Passos de la resolució de l'alumne Jesús per a l'activitat 7 amb Geogebra.

Centrem ara l'atenció a la resolució amb Geogebra que realitza l'alumne Erik per a l'activitat 7. Com en el cas de Jesús, mostrem la pantalla del fitxer Geogebra que ha lliurat en acabar l'activitat (a la pàgina següent).
La construcció del quadrat *QRST* és pràcticament idèntica a la que utilitza l'alumne Jesús, el cas del qual hem examinat abans. Erik comença per construir el vector *QR* sobre la finestra gràfica, amb el ratolí. A continuació observa les components d'aquest vector, *QR*=(1,7; 3,8). Les permuta i canvia un dels signes per obtenir un vector perpendicular a *QR* i del mateix mòdul. No defineix expressament un vector que tingui aquestes components (com sí que feia Jesús) però sense donar-li nom l'utilitza per calcular les posicions dels vèrtexs *S* i *T*, mitjançant el procediment de sumar-lo a *R* i també a *Q*. Ho introdueix a la barra d'entrada algebraica: *S*=*R*+(-3,8; 1,7) ; *T*=*Q*+(-3;8; 1,7).

De nou ens trobem amb un fet que hem comentat extensament per al cas de Jesús: la influència determinant de la seqüència didàctica anterior a aquesta activitat sobre l'enfocament que realitza l'alumne per resoldre-la. No repetirem el que ja hem exposat abans per a Jesús i que té igual validesa per al cas d'Erik, però sí que subratllarem que, com Jesús (i com, de fet, 11 dels 15 alumnes que lliuren el fitxer Geogebra d'aquesta activitat) l'alumne fa ús del procediment de permutar components i canviar un dels signes per al cas estrictament concret del vector *QR*=(1,7; 3,8). Això significa que, per exemple, si sobre la pantalla de Geogebra desplacem el punt *Q* o el punt *R*, el vector perpendicular deixa de ser-ho i els punts *Q*, *R*, *S* i *T* deixen de formar un quadrat. Podríem haver esperat que algun alumne busqués un procediment pel qual fos possible definir un vector perpendicular a *Q* i *R* independentment que desplacéssim les posicions d'aquests punts, però no ha estat així. Cap ho ha fet (no és difícil fer-ho: Geogebra disposa de la instrucció "vector perpendicular" a la barra de comandes, a la part inferior dreta de la pantalla). La realitat, doncs, és que Erik (com Jesús i com 13 alumnes més) ha realitzat una construcció que només serveix per al cas concret que planteja l'enunciat del problema, és a dir, per a les posicions concretes de *Q* i *R* tal com apareixen en aquest enunciat. És cert que la seqüència del procediment és vàlida per altres posicions de *Q* i *R*, però s'hauria de repetir per a cada variant o, com a mínim, en moure el punt *Q* o el punt *R* caldria corregir manualment cada vegada les components del vector perpendicular a *QR*.

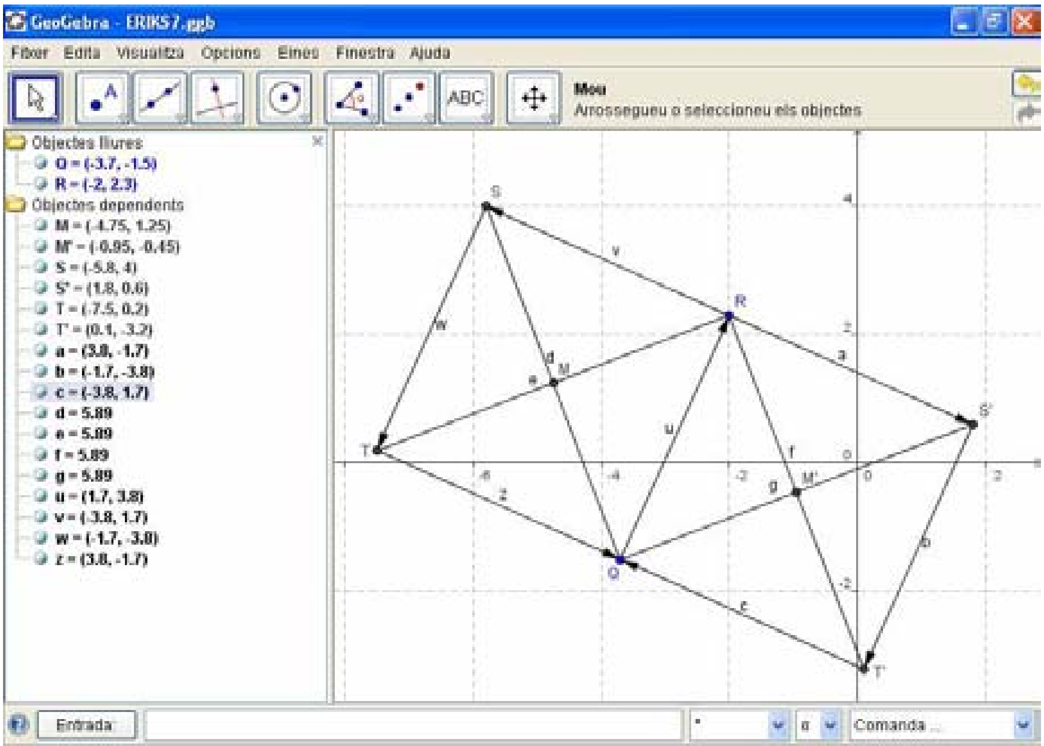


Figura 5.24. Pantalla de Geogebra amb la resolució de l'alumne Erik per al l'activitat 7.

Un cop que ha obtingut les posicions dels vèrtexs *Q* i *R*, Erik tanca la figura del quadrat a base de construir vectors entre dos vèrtexs consecutius. Com Jesús, té en ment els vectors com a elements bàsics que li permeten construir la figura. Tornem a advertir en aquest cas la influència de la seqüència didàctica anterior a aquesta activitat: després d'haver treballat activitats que condueixen a l'equació vectorial de la recta (1-4) i el producte escalar i la perpendicularitat de vectors (5-6) els alumnes adopten un enfocament vectorial a l'hora de resoldre.

Si bé en Jesús l'enfocament vectorial era absolut en tot el procés de resolució tant per trobar els vèrtexs *S* i *T* com per trobar el punt central *M* del quadrat, en el cas d'Erik no succeeix el mateix. Sí que usa vectors per trobar *S* i *T*, però per trobar *M* adopta un altre punt de vista. Traça els segments corresponents a les dues diagonals del quadrat i determina *M* en la seva intersecció.

La taula que presentem a continuació resumeix els passos que realitza l'alumne Erik per a la resolució amb Geogebra de l'activitat 7:

Erik		
Acció(ns) amb Geogebra Lloc de l'acció [FG]: finestra gràfica [EA]: barra d'entrada algebraica		**Conseqüències i significat de l'acció(ns)**
u=*QR*	[FG]	Construeix el vector *u* amb origen a *Q* i extrem a *R*.
S=*R*+(-3.8, 1.7) *T*=*Q*+(-3.8, 1.7)	[EA] [EA]	Calcula a la barra d'entrada algebraica la posició del punt *S* (un dels vèrtexs del quadrat) sumant al punt *R* un vector al qual no posa nom, construït amb les components del vector *u* permutades i la segona canviada de signe. Per tant, és un vector perpendicular a *u* i de mòdul igual. Procedeix anàlogament per calcular la posició del vèrtex *T* del quadrat a partir de *Q*.
v=*RS* *w*=*ST* *z*=*TQ*	[FG] [FG] [FG]	Construeix els vectors v, *w* i *z* que visualment tanquen el quadrat.
RT *SQ*	[FG] [FG]	Construeix els segments *RT* i *SQ*, que són les dues diagonals del quadrat
M	[FG]	Construeix el centre *M* del quadrat com a intersecció dels dos segments que són les diagonals del quadrat.

Taula 5.11. Passos de la resolució de l'alumne Erik per a l'activitat 7 amb Geogebra.

Pel que fa a l'alumna Mari Carmen, resseguim també quina és la seva seqüència de resolució. Construeix el vector *QR* a la finestra gràfica de Geogebra, mitjançant l'ús del ratolí. A continuació observa les seves components. Les permuta i canvia un dels signes per construir, a la barra d'entrada algebraica, un vector perpendicular d'igual mòdul, que anomena *v*. Obté les posicions dels vèrtexs *S* i *T* operant a la barra d'entrada algebraica: suma *v* a *Q* i també a *R*. Tanca visualment el quadrat a base de construir vectors entre dos vèrtexs consecutius.
Per determinar la posició del punt central *M* del quadrat, construeix el vector *QS* sobre una de les diagonals del quadrat i tot seguit suma a *Q* la meitat d'aquest vector, *M*=*Q*+(1/2)*QS*.
La resolució de Mari Carmen és pràcticament idèntica a la de Jesús. Està basada exclusivament en l'ús de vectors i punts. No repetirem els comentaris i les

interpretacions que ja hem realitzat per al cas de Jesús i que són igualment vàlids per al cas de Mari Carmen. En tot cas, ens hi remetem.

Tot seguit mostrem la pantalla final de la resolució amb Geogebra que realitza l'alumna Mari Carmen per a l'activitat 7:

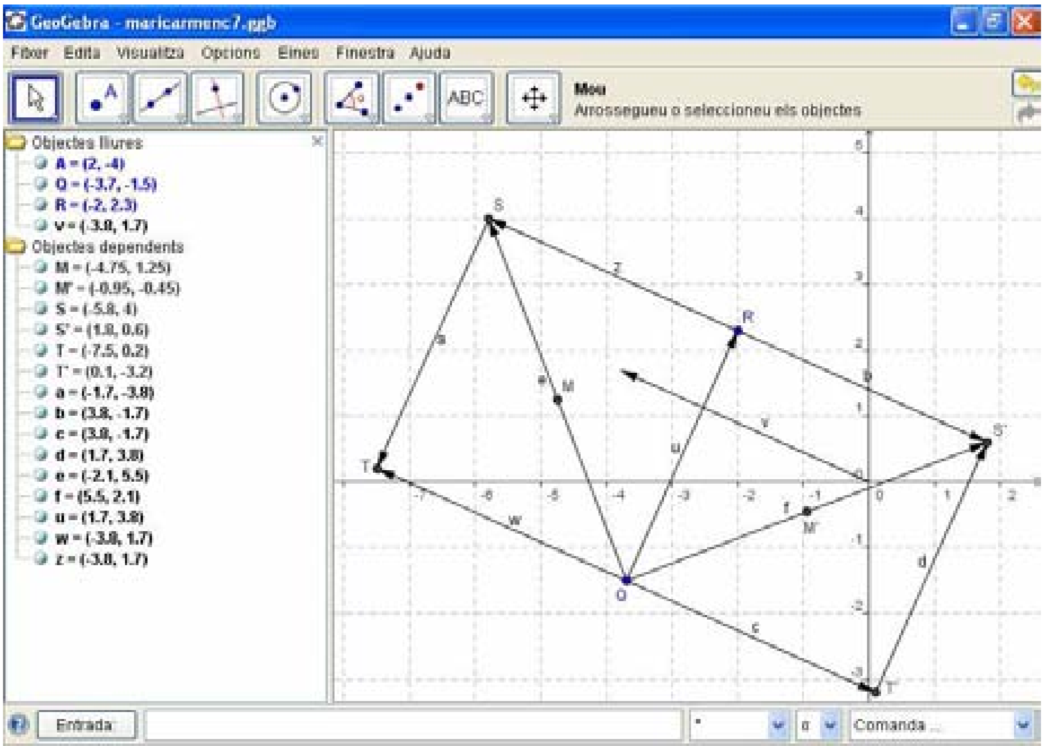


Figura 5.25. Pantalla de Geogebra amb la resolució de l'alumna M. Carmen per al l'activitat 7.

Presentem a continuació la taula que resumeix els passos que realitza l'alumna Mari Carmen per a la resolució amb Geogebra de l'activitat 7:

<table>
<tr><th colspan="2">M. Carmen</th></tr>
<tr><td>Acció(ns) amb Geogebra
Lloc de l'acció
[FG]: finestra gràfica
[EA]: barra d'entrada algebraica</td><td>Conseqüències i significat de l'acció(ns)</td></tr>
<tr><td>u=QR [FG]</td><td>Construeix el vector u amb origen a Q i extrem a R.</td></tr>
<tr><td>v=(-3.8, 1.7) [EA]</td><td>Construeix el vector v a partir de la observació de les components del vector u presents a la finestra algebraica. Escriu per teclat, a la barra d'entrada algebraica, les components de u permutades i la segona canviada de signe (que passa a ser la primera component de v). Per tant, v és un vector perpendicular a u i de mòdul igual. Geogebra el dibuixa automàticament amb extrem a l'origen de coordenades.</td></tr>
</table>

Aquesta taula continua a la pàgina següent

S=R+v *T=Q+v*	[EA] [EA]	Amb aquestes operacions a la barra d'entrada, dóna nom i situa els vèrtexs (*S* i *T*) que falten per completar el quadrat.
w=QT *z=RS* *a=ST*	[FG] [FG] [FG]	Construeix els vectors *w*, *z, a* que visualment tanquen el quadrat.
E=QS	[FG]	Construeix el vector *e* sobre la diagonal *QS* (origen a *Q* i extrem a *S*).
M=Q+e/2	[EA]	Construeix el centre *M* del quadrat partint del vèrtex *Q*, al qual suma la meitat del vector *e*.

Taula 5.12. Passos de la resolució de l'alumna M. Carmen per a l'activitat 7 amb Geogebra.

Per acabar de mostrar les resolucions amb Geogebra corresponents a l'estudi de casos que ens ocupa, incloem tot seguit el cas de l'alumne Ivan per a l'activitat 7.

Ivan construeix amb el ratolí el vector *QR* a la finestra gràfica de Geogebra. A continuació observa les seves components, *QR*=(1,7;3,8). Les permuta i canvia un dels signes. No defineix el vector resultant d'aquest procediment, és a dir, no li dóna nom. En aquest pas concret, procedeix de la mateixa manera que ho fa l'alumne Erik: determina les posicions de *S* i *T* mitjançant les operacions a la barra algebraica *S*=*R*+(-3,8; 1,7) ; *T*=*Q*+(-3;8; 1,7). Tanca visualment el quadrat a base de construir vectors entre dos vèrtexs consecutius.
Per trobar les coordenades del punt central del quadrat, que no indica per la lletra *M* sinó per la lletra *A*, utilitza un procediment que s'assembla inicialment al que també usa Erik: traça els vectors *SQ* i *TR* sobre les dues diagonals del quadrat. Però no marca, com seria d'esperar, el centre del quadrat com a intersecció de les diagonals (com sí que fa Erik), per un detall tècnic de l'ús de Geogebra: el programa no li permet marcar la intersecció de dos vectors. És evident (per la construcció) que ho intenta, però s'adona que no ho pot fer. Geogebra li permet marcar el punt intersecció de segments i de rectes, però no de vectors. Llavors, Ivan canvia d'enfocament i es decideix per usar el càlcul amb punts i vectors, de la mateixa manera que l'han emprat Jesús i Mari Carmen. Pren un dels vectors que ha situat sobre una diagonal, *SQ*, i realitza l'operació *S*+(1/2)*SQ* per determinar el centre del quadrat. Fixem-nos que podria haver optat per esborrar els vectors sobre les diagonals i traçar-hi segments per a continuació trobar el punt intersecció, però no ho fa. Com que marcar la intersecció de dos vectors no li funciona, el primer que se li acut és realitzar operacions amb punts i vectors del mateix estil que havia fet en activitats anteriors. Aquí ens torna a aparèixer un procediment induït per la seqüència didàctica anterior; encara que en aquest cas apareix en segona instància, després que l'alumne ha provat un altre camí que no li ha funcionat per raons tècniques del programari Geogebra.

Aquesta és la pantalla final de la construcció de l'alumne Ivan per a l'activitat 7:

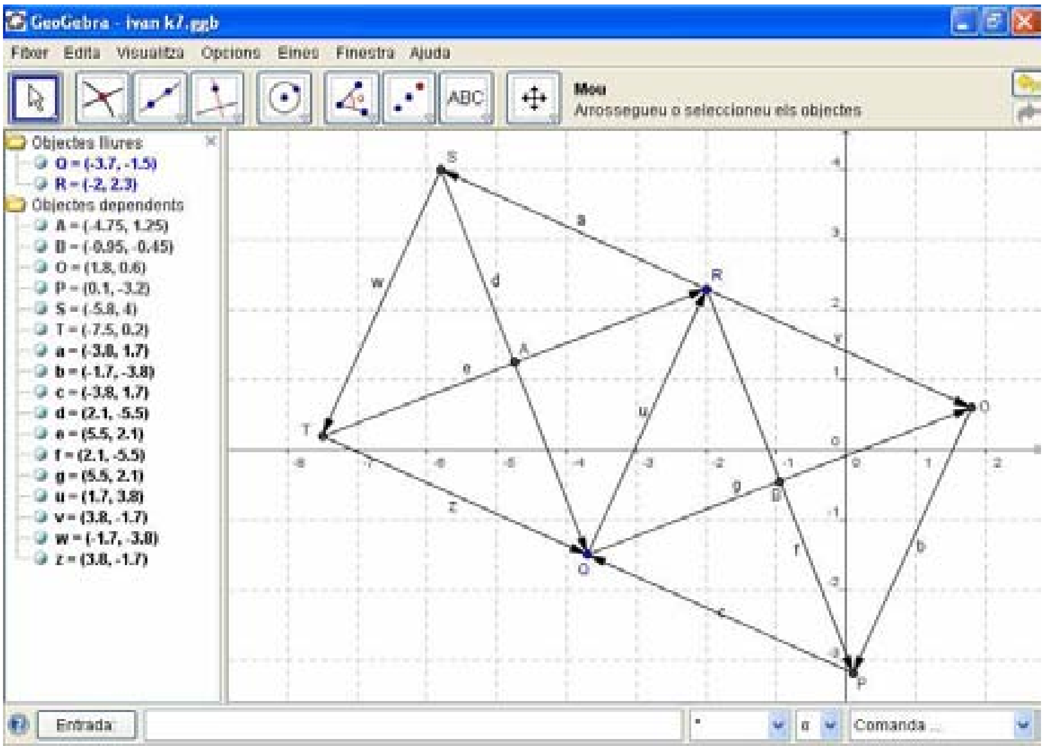


Figura 5.26. Pantalla de Geogebra amb la resolució de l'alumne Ivan per al l'activitat 7.

Com ja hem assenyalat per al cas de l'alumna Mari Carmen, no repetirem les consideracions i les interpretacions que hem desenvolupat sobretot quan ens ocupàvem del cas de l'alumne Jesús, i que hem completat en l'anàlisi del cas de l'alumne Erik. Aquestes consideracions i observacions sobre la influència de la seqüència didàctica anterior, des de l'activitat 1 amb Geogebra fins a la 6, en condicions de matematització induïda en activitats contextualitzades, i la posterior formalització forçada que realitza el professor sobre el producte vectorial de dos vectors i la perpendicularitat, són vàlides també per al cas de l'alumne Ivan. Ens hi remetem.

Finalment, presentem la taula que resumeix els passos que realitza Ivan per a la resolució de l'activitat 7 amb Geogebra:

Ivan	
Acció(ns) amb Geogebra Lloc de l'acció [FG]: finestra gràfica [EA]: barra d'entrada algebraica	**Conseqüències i significat de l'acció(ns)**
u=*QR* [FG]	Construeix el vector *u* amb origen a *Q* i extrem a *R*.

Aquesta taula continua a la pàgina següent

S=*R*+(-3.8, 1.7) [EA] *T*=*Q*+(-3.8, 1.7) [EA]	Calcula a la barra d'entrada algebraica la posició del punt *S* (un dels vèrtexs del quadrat) sumant al punt *R* un vector al qual no posa nom, construït amb les components del vector *u* permutades i la segona canviada de signe. Per tant, és un vector perpendicular a *u* i de mòdul igual. Procedeix anàlogament per calcular la posició del vèrtex *T* del quadrat a partir de *Q*.
w=*ST* [FG] *z*=*TQ* [FG] *a*=*RS* [FG]	Construeix els vectors *w*, *z, a* que visualment tanquen el quadrat.
d=*SQ* [FG] *E*= *TR* [FG]	Construeix els vectors *d* i *e*, que corresponen a les dues diagonals del quadrat
A=*S*+0.5*d* [FG]	Construeix el centre del quadrat, que anomena *A* (en comptes de *M*) partint del vèrtex S, al qual suma la meitat del vector *d*.. En realitat, per fer aquesta operació no necessitava situar els dos vectors que corresponen a les diagonals; amb un en tenia prou.

Taula 5.13. Passos de la resolució de l'alumne Ivan per a l'activitat 7 amb Geogebra.

5.4.4. Convergència induïda per la seqüència didàctica

Ja hem comentat fins i tot abans de mostrar les construccions amb Geogebra dels quatre alumnes de l'estudi de casos que els processos seguits són molt semblants. Les diferències són lleugeres i secundàries en comparació amb el patró comú que podem identificar fàcilment. Aquest patró el podem resumir en aquests punts:

1. Donats els dos punts que determinen dos vèrtexs consecutius del quadrat, *Q* i *R*, construcció del vector *u*= *QR*.
2. Construcció dels dos vèrtexs que falten sumant (o restant), a cada un dels vèrtexs coneguts, el vector formar mitjançant la permutació de les components del vector *u* i el canvi de signe en una d'elles. Aquest vector és perpendicular a *u* i té el seu mateix mòdul.
3. Traçat visual del quadrat amb la construcció de vectors amb origen i extrem a dos vèrtexs consecutius.
4. Construcció del centre del quadrat. Aquí hem de matisar que tres dels quatre alumnes sumen a un dels vèrtexs la meitat del vector traçat sobre la diagonal que correspon al vèrtex, i que un alumne determina la posició com a intersecció de les dues diagonals.

El procés de resolució que han realitzat els quatre alumnes està clarament influït pel treball amb activitats anteriors a la 7, en especial les activitats 5 i 6 a l'aula TIC, i també per la sessió realitzada a l'aula ordinària, següent a l'activitat 5. Aquesta sessió partia de l'activitat 5 per arribar fins a la definició del producte escalar de dos vectors. Un dels aspectes que tocava era la utilització del producte escalar com a test de perpendicularitat i, en particular, com a partir del producte escalar expressat $(u_1, u_2)\cdot(v_1, v_2) = u_1v_1+u_2v_2$ podem pensar un procediment simple i ràpid per obtenir un vector perpendicular a un vector donat permutant components i canviant el signe d'una d'elles, ja que és fàcil veure que $(u_1, u_2)\cdot(u_2, -u_1) = u_1u_2-u_2u_1 = 0$. De fet, la idea de la permutació i canvi de signe va ser la resposta d'un alumne a una pregunta que el professor va llançar: *"Donat un vector, en puc trobar ràpidament un altre que sigui perpendicular?"*.

Aquesta tècnica de permutar i canviar de signe, nascuda dels coneixements induïts per l'activitat 5 i la seva subsegüent formalització, l'apliquen la majoria dels alumnes per a la realització de l'activitat 6 i l'activitat 7.

Usar un vector perpendicular a base de permutar components i canviar un signe no és l'única manera possible de resoldre amb Geogebra. Podem pensar, i els alumnes també podrien haver-ho fet a l'activitat 7, per exemple en una resolució amb un aire geomètric més clàssic en el sentit que recordés una resolució amb regle i compàs (instruments per excel·lència de la geometria clàssica). Així doncs, no resultaria complicat, i molt menys fora de l'abast dels nostres alumnes, traçar dues rectes perpendiculars al segment *QR*, una pel punt *Q* i l'altra pel punt *R*, i amb el compàs obert amb la longitud de *QR* traçar les circumferències amb centre a *Q* i a *R*, per obtenir els altres vèrtexs del quadrat (il·lustrem aquesta explicació amb una construcció amb Geogebra que mostrem a continuació d'aquest paràgraf).

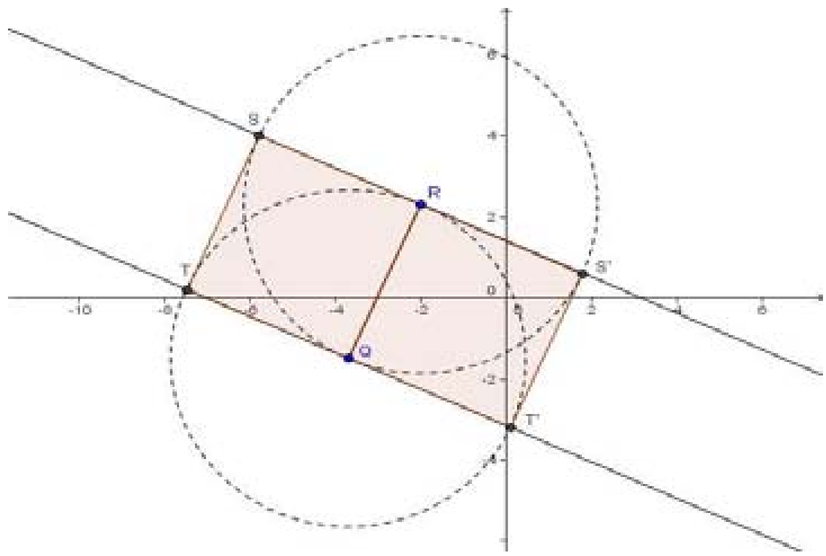


Figura 5.27. Exemple de construcció dels quadrats de l'activitat 7 amb una tècnica de "regle i compàs"

Però cap alumne present a l'activitat 7 ha fet tal cosa. Tant els 11 alumnes que construeixen correctament els quadrats com els 4 que construeixen figures que semblen quadrats però que no situen exactament els vèrtexs on han de ser, tots utilitzen vectors per al procés de resolució. Resolen amb una tècnica pròpia de la geometria analítica perquè la seqüència didàctica anterior els ha induït a abordar així el problema.

També podem veure la influència del conjunt format per les activitats 1, 2, 3 i 4, les quals condueixen progressivament els alumnes cap a l'equació vectorial de la recta, escrita $X=P+tv$, on X és un punt genèric, P és un punt donat de la recta, t és un paràmetre i v un vector director. Tres dels quatre alumnes de l'estudi de casos utilitzen aquest tipus de procediment de càlcul per determinar les coordenades del centre del quadrat.

Concloem, doncs, que el treball realitzat a les activitats amb Geogebra anteriors a l'activitat 7, i la formalització dels continguts que aquestes activitats han induït durant el procés de matematització que comporten, és la causa que les resolucions dels alumnes per a l'activitat 7 convergeixin (molt majoritàriament) en un mateix patró. Això succeeix per a alumnes (els quatre de l'estudi de casos) que pertanyen a categories diferents segons els resultats de la matematització en el conjunt de les activitats. Aquesta convergència, que anomenem *convergència induïda per la seqüència didàctica*, l'observem no tan sols per als quatre alumnes de l'estudi de casos, sinó també per al conjunt de l'alumnat, ja que, per exemple 11 dels 15 alumnes que lliuren els fitxers de l'activitat 7 utilitzen el recurs de permutar components i canviar un dels signes per obtenir un vector perpendicular.

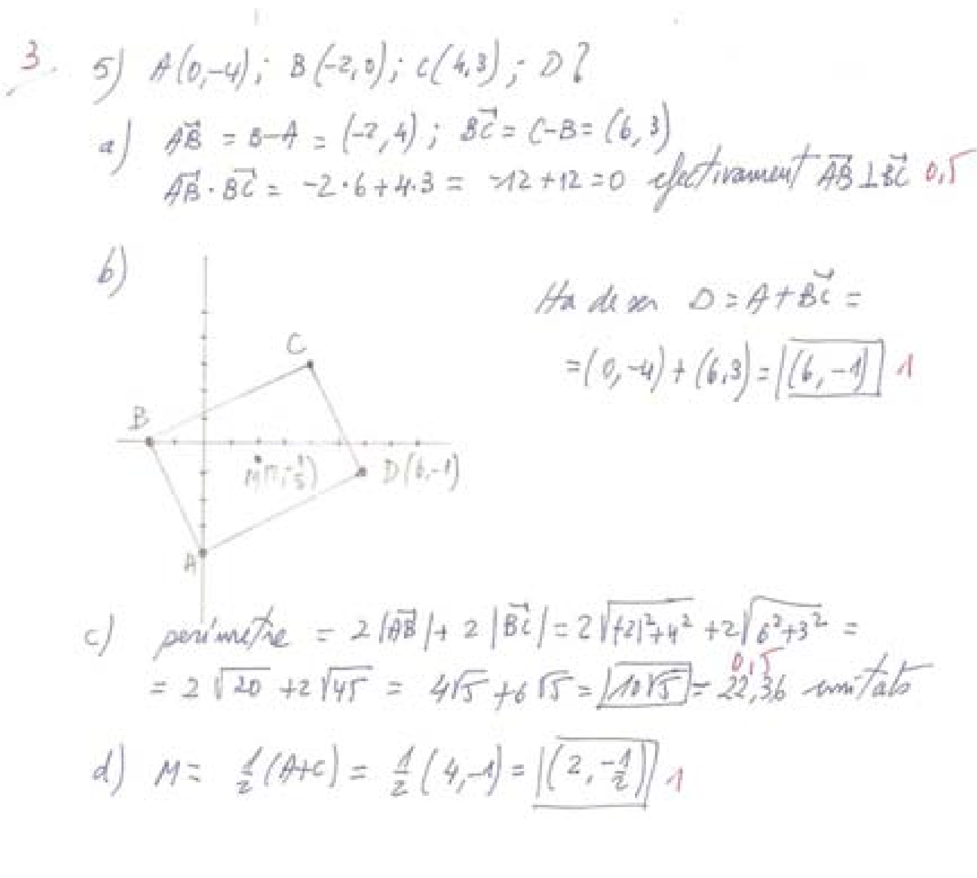
5.4.5. Consideracions sobre el problema 5 de la prova escrita

Un primer element de referència per emprendre l'anàlisi dels resultats dels quatre alumnes de l'estudi de casos per al problema 5 de la prova escrita és mostrar com el professor el resol d'una manera convencional. De fet, presentem la resolució manuscrita del professor que ens ha servit per efectuar la correcció i qualificació de les proves escrites dels alumnes. Això no significa, com sap qualsevol professor, que els alumnes hagin de resoldre exactament com ho fa el docent, però serveix de guia útil per al procés de correcció. Els nombres escrits en color vermell són orientatius per qualificar numèricament les diferents parts de la resolució, fins a una suma màxima de tres punts, que és el pres relatiu del problema en el conjunt dels 10 punts que com a màxim pot obtenir un alumne a la prova escrita.

A continuació de la resolució del professor, presentem les resolucions escrites dels quatre alumnes que hem seleccionat. A més del que han escrit aquests alumnes, s'hi poden observar breus anotacions manuscrites en color vermell, realitzades pel professor durant el procés de correcció de la prova. No pretenen marcar una pauta explícita i exhaustiva de correcció, sinó només destacar alguns aspectes que el professor ha trobat mereixedors d'alguna anotació. Cal aclarir que vam realitzar la resolució completa i comentada davant dels alumnes (cada un dels quals tenia la seva prova escrita, ja corregida, que podia comparar amb la resolució a la pissarra de l'aula) durant la sessió immediatament següent a la que els alumnes van dedicar a la realització de la prova.

Posteriorment a les anotacions del professor, hem afegit a cada una de les resolucions dels alumnes unes marques en color vermell i numeració romana. Serveixen de guies visuals, sobre les resolucions manuscrites, per facilitar el seguiment i comprensió dels comentaris que hem escrit sobre cada una d'elles. Aquests comentaris guiats per aquestes marques en xifres romanes són sobretot descriptius del procés de resolució que realitza cada un dels quatre alumnes seleccionats, encara que també contenen algunes frases de caire interpretatiu.
A continuació d'aquests comentaris principalment descriptius, realitzem una valoració interpretativa del procés que ha seguit cada alumne. A la informació descriptiva hi afegim altres elements: informació extreta del coneixement que té el professor sobre el caràcter, els hàbits i les habilitats o aptituds generals de l'alumne (pel fet d'haver-lo observat i conegut durant tot un curs acadèmic); relació dels fets observats a la resolució del problema 5 amb la resolució que el mateix alumne va realitzar per a l'activitat 7 amb Geogebra; i relació dels fets observats a la resolució del problema 5 amb les interpretacions que hem elaborat a partir de l'anàlisi de la matematització en el conjunt d'activitats amb Geogebra (interpretacions que hem exposat en un apartat anterior d'aquest capítol).

Aquesta és la resolució del professor:



3. 5) $A(0,-4)$; $B(-2,0)$; $C(4,3)$; D?

a) $\vec{AB} = B-A = (-2,4)$; $\vec{BC} = C-B = (6,3)$

$\vec{AB}\cdot\vec{BC} = -2\cdot 6+4\cdot 3 = -12+12=0$ efectivament $\vec{AB}\perp\vec{BC}$ 0,5

b) Ha de ser $D = A+\vec{BC} = (0,-4)+(6,3) = \boxed{(6,-1)}$ 1

c) perímetre $= 2|\vec{AB}| + 2|\vec{BC}| = 2\sqrt{(-2)^2+4^2}+2\sqrt{6^2+3^2} = 2\sqrt{20}+2\sqrt{45} = 4\sqrt{5}+6\sqrt{5} = \boxed{10\sqrt{5}} = 22,36$ unitats 0,5

d) $M = \frac{1}{2}(A+C) = \frac{1}{2}(4,-1) = \boxed{(2,-\frac{1}{2})}$ 1

Figura 5.28. Resolució manuscrita del professor per al problema 5 de la prova escrita.

5.4.6. Cas 1: alumne Jesús

Aquesta és la resolució manuscrita de l'alumne Jesús:

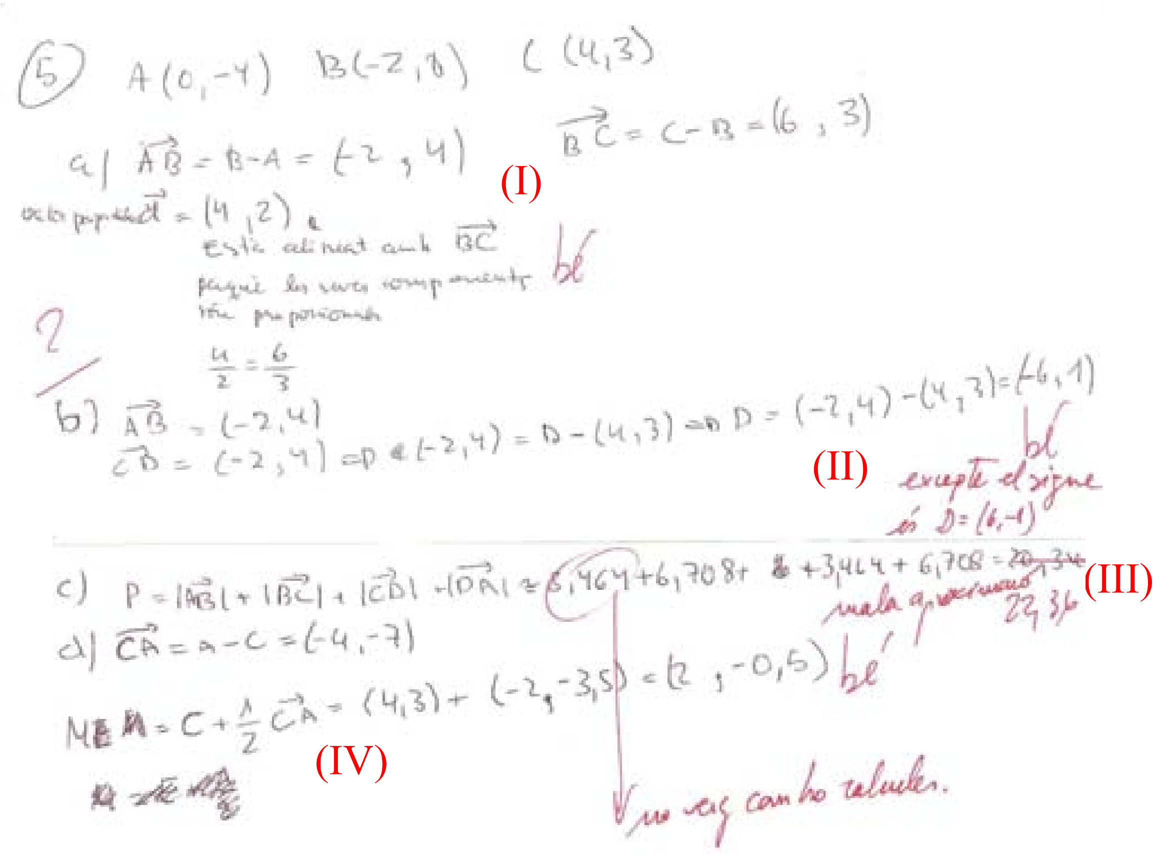


Figura 5.29. Resolució manuscrita de l'alumne Jesús per al problema 5.

I) Jesús calcula correctament els vectors *AB* i *BC* que indica l'enunciat, fent "extrem menys origen", *AB=B-A*, *BC=C-B*. Determina que són perpendiculars, però no ho fa pel procediment més corrent, que consisteix en calcular el producte escalar *AB·BC* i comprovar que és zero, sinó que utilitza una estratègia original: construeix un vector perpendicular a *AB* mitjançant la tècnica de permutar les coordenades i canviar el signe d'una d'elles. És una tècnica que ell i molts altres alumnes ja van utilitzar per primera vegada a l'activitat 6 amb Geogebra. Després, comprova que aquest vector, que és perpendicular a *AB*, és paral·lel a *BC*, perquè les seves components són proporcionals a les de *BC*. Per tant *AB* i *BC* són perpendiculars. No escriu exactament que el vector que ha construït perpendicular a *AB* és paral·lel a *BC*, sinó que usa la frase inexacta però entenedora "està alineat".

II) Determina erròniament que *AB* i *CD* són iguals si formen costats paral·lels d'un rectangle. La igualtat certa és *AB=DC*. En fer equivocadament *AB* i *CD* iguals, comet un error en un signe, ja que en realitat *AB=-CD*. Quan, a partir d'aquest error, calcula *D=AB-C*, està fent una operació que és algebraicament correcta a partir de l'afirmació falsa que ha fet abans (és a dir, l'afirmació *AB=CD*). Amb això, obté unes coordenades de *D* amb el signe canviat respecte les coordenades correctes. En realitat, és *AB=C-D* i per tant *D=C-AB*.

III) Escriu correctament que el perímetre es pot calcular com la suma dels mòduls dels vectors *AB*, *BC*, *CD* i *DA*. Dóna els valors aproximats d'aquests mòduls però no indica com els calcula, és a dir, no escriu que el mòdul es calcula com l'arrel quadrada de la suma de les components al quadrat. S'equivoca en el resultat del càlcul dels mòduls de *AB* i *CD*, que presenta com a 3,464, quan en realitat és (si mantenim l'aproximació amb tres xifres decimals) 4,472. Amb això, el resultat que obté per al perímetre difereix en aproximadament dues unitats del resultat correcte.

IV) Per al càlcul del centre del rectangle, utilitza el mateix recurs que ell i altres alumnes van utilitzar per determinar les coordenades dels punts demanats a les activitats 1, 2, 3 i 4 amb Geogebra, i especialment les activitats 3 i 4. Consisteix en calcular un punt a partir de les coordenades d'un punt donat al qual se suma un vector director multiplicat per un escalar (és el mateix procediment que permet escriure, com a cas general, l'equació vectorial de la recta). En concret, Jesús pren un dels vèrtexs coneguts del rectangle, el punt *C*, calcula les components del vector *CA* (tot i que no explicita per escrit el càlcul) que correspon a una de les diagonals, i determina correctament que el centre del triangle és *M=C*+(1/2)*CA*. Prefereix aquest procediment a l'alternativa del càlcul del punt mitjà del segment amb extrems *A* i *B*.

Jesús és un alumne amb bones condicions per a la matematització, ràpid en la comprensió i amb una notable retentiva, però, per altra banda, no és un alumne que dugui a terme un treball disciplinat i constant a casa. Es refia de les seves qualitats naturals.
A partir de l'anàlisi dels resultats de les activitats amb Geogebra, ha quedat inclòs a la categoria dels matematitzadors complets. A la prova escrita, ha obtingut un resultat pobre (4,9) per a les seves possibilitats. Una part molt considerable de la puntuació total que ha obtingut en aquesta prova correspon al problema 5 (2 punts dels 4,9 totals). Aquest fet és coherent amb el seu perfil personal. Obté resultats pobres (2,9 de 7 punts possibles) en el conjunt dels quatre primers problemes, per als quals és especialment adequada una preparació convencional, consistent en la realització disciplinada de sèries de problemes i exercicis estandarditzats. En canvi obté un resultat força millor (2 de 3 punts possibles) al problema 5, que s'assembla molt a l'activitat 7 amb Geogebra i que es pot resoldre gràcies a l'experiència i la pràctica obtingudes durant el procés d'implementació de les activitats.
Crida l'atenció que Jesús no realitza cap representació gràfica per al problema 5, ni apareix cap intent o cap esborrany en cap lloc dels fulls que lliura. Es refia de la imatge mental que es fa del problema, la qual cosa indica fins a quin punt confia en les seves habilitats, i també fins a quin punt prescindeix del treball mínimament disciplinat i organitzat que suposa primer prendre's la molèstia de representar la situació per després abordar els passos de la resolució algebraica. El fet de refiar-se d'una imatge mental en comptes de dibuixar, provoca que un simple error de signe (II) el porti a unes coordenades errònies per al vèrtex *D*.

Té clars els passos que ha de dur a terme per resoldre el problema i els apunta, però amb una tan gran economia d'escriptura que, per exemple, provoca que presenti els resultats per al perímetre sense mostrar com els obté.
En la resolució hi ha presents dos elements que ens indiquen que està fortament influïda pel procés de matematització induïda durant la realització de les activitats amb Geogebra: l'ús de la permutació de components i el canvi de signe (activitats 6 i 7) per comprovar la perpendicularitat (en comptes de la més convencional de calcular un producte escalar) i l'ús d'un càlcul anàleg al que conté l'equació vectorial de la recta (activitats 1-4) per calcular les coordenades del centre del quadrat.

5.4.7. Cas 2: alumne Erik

I) Erik fa una representació gràfica aproximada. És molt explícit en escriure com es calculen els costats *BC* i *BA* (fa servir *BA* en comptes del vector *AB* que indica l'enunciat del problema) i obté correctament les components. A continuació, utilitza la fórmula de càlcul del cosinus de l'angle que formen dos vectors, que escriu en la forma general i aplica per al cas concret dels vectors que ha calculat, *BC* i *BA*. No parteix del càlcul del producte escalar dels dos vectors per comprovar que és zero, però amb la fórmula del cosinus de l'angle, ha de calcular el producte al numerador i conclou que el cosinus és zero, i que per tant l'angle és de 90º.

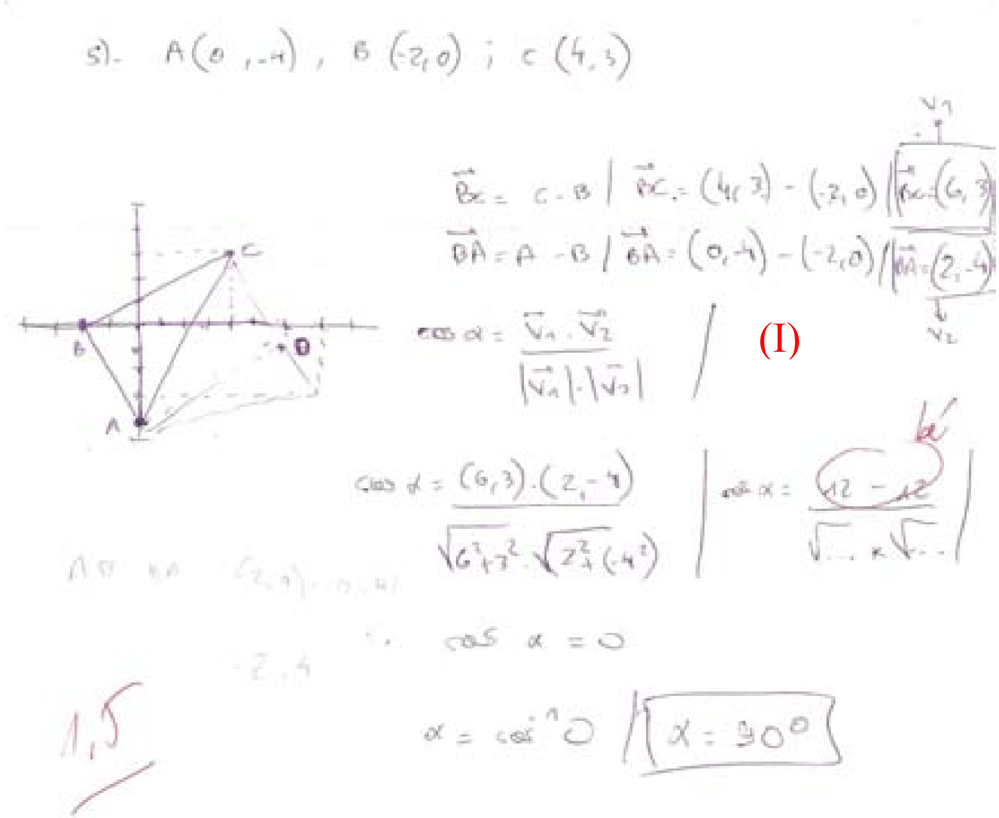


Figura 5.30. Resolució manuscrita de l'alumne Erik per al problema 5 (primera part).

II) Amb la pretensió de calcular el vèrtex *D* que falta, construeix primer un vector perpendicular a *BC*, que anomena V_D, per la tècnica de permutar components i canviar el signe d'una d'elles. Llavors, escriu, erròniament, que $D=C+V_D$. Això no és cert perquè el mòdul de CD ha de ser igual al mòdul de BA, i diferent del mòdul de V_D. Evidentment, si volia calcular D a partir de la posició de C, havia d'haver fet $D=C+BA$. El fet de pensar en la perpendicularitat de CD respecte del vector BC li fa perdre de vista que el més senzill és considerar el paral·lelisme entre CD i BA. En definitiva, obté unes coordenades errònies per a D.

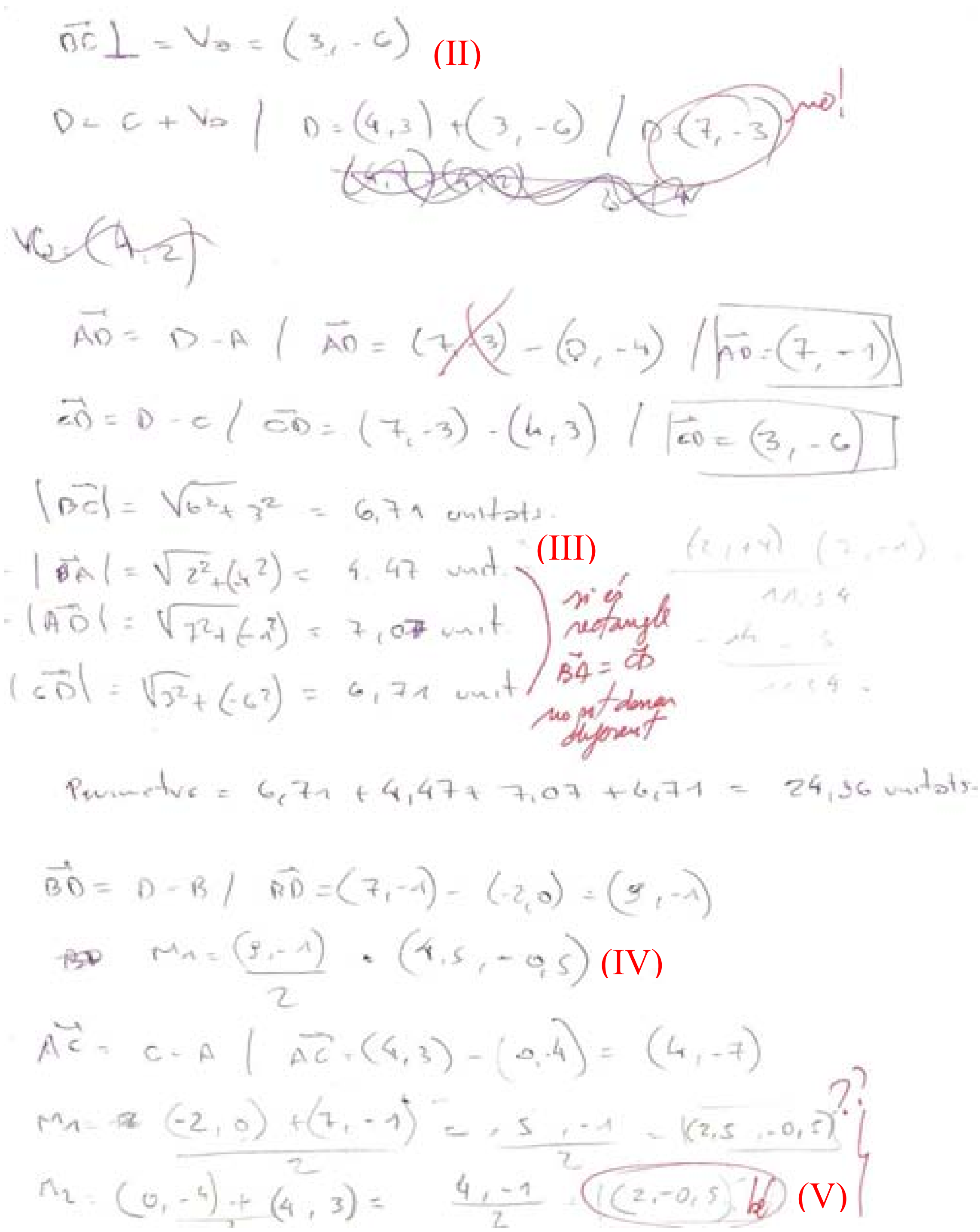


Figura 5.31. Resolució manuscrita de l'alumne Erik per al problema 5 (segona part).

III) Quan considera que ja coneix les coordenades dels quatre vèrtexs del rectangle, procedeix a calcular els mòduls de *BC*, *BA*, *AD* i *CD* per posteriorment sumar-los i obtenir el perímetre. No s'adona que no és necessari calcular els quatre mòduls, ja que els costats d'un rectangle tenen el mateix mòdul dos a dos. Com que les coordenades que ha obtingut per a *D* són errònies, obté mòduls diferents per a *BA* i per a *CD*, i no detecta que això no pot ser, ja que haurien de ser iguals. Suma i obté un perímetre incorrecte. S'ha produït un cas força corrent de resolució en què se segueixen procediments algebraics correctes però amb alguna dada defectuosa, i per tant apareixen resultats incorrectes, fàcilment detectables amb una simple inspecció, que no obstant això passen inadvertits. Això mostra que la concentració en la mecànica del procediment és tan forta que impedeix preguntar-se "és possible una solució com aquesta?".

IV) Amb el propòsit de calcular el centre del rectangle, Erik comença per calcular el vector *BD* (que correspon a una de les diagonals) i a continuació divideix les seves components per 2 i afirma que això dóna un punt M_1 que no especifica quin és (se suposa que es tracta del centre). Evidentment, confon els conceptes de punt i de vector, i aquest M_1 que obté no és el centre.

V) El fet que continuï calculant indica que no es dóna per satisfet amb el suposat resultat M_1 que ha obtingut, i intenta arribar-hi per una altre camí. Ara ho prova calculant el punt mitjà del segment d'extrems *B* i *D*. El resultat també l'anomena M_1, i és erroni perquè les coordenades que ha obtingut abans per a *D* no són correctes. Aquests càlculs els realitza amb més pressa, nervis o inseguretat que els anteriors, ja que abandona el seu costum d'indicar l'operació amb lletres i després substituït per les coordenades que toquen, i per una altra banda escriu amb llapis i no amb bolígraf com feia abans. Ho intenta també fent la semisuma dels vèrtexs *A* i *C*, i aquest cop sí que obté les coordenades correctes del centre i l'anomena M_2). Però no realitza cap anotació que indiqui quin dels resultats que ha obtingut dóna per bo i quin no, ni intenta explicar per què els punts mitjans dels segments *BD* i *AC* li surten diferents quan és evident que han de ser iguals, ni hi ha cap signe que això li faci revisar càlculs anteriors per intentar trobar un error.

Erik és un alumne que ha quedat inclòs a la categoria dels matematitzadors complets a partir de l'anàlisi dels resultats de les activitats amb Geogebra. Ha tingut prou disciplina com per realitzar una preparació convencional per a la prova escrita. Ja hem esmentat abans que per preparació convencional entenem l'entrenament a base de sèries d'exercicis i problemes estandarditzats. Ha obtingut una qualificació de 6 sobre 10 punts possibles. D'aquests 6 punts, 4,5 sobre 7 possibles els obté als quatre primers problemes, per als quals és especialment adequada un preparació convencional, i 1,5 sobre 3 al problema 5, per al qual no és tan necessari aquest tipus de preparació si es compta amb el bagatge de la feina feta a les activitats amb Geogebra.
Erik realitza una representació gràfica, però després emprèn una resolució algebraica en la qual no té en compte aquesta representació. Hauria evitat fàcilment l'error que comet en (II) si hagués observat el seu propi dibuix i hagués conclòs que *D=C+BA*, en comptes d'utilitzar un vector perpendicular a *BC* que no necessitava per calcular *D*.

Aquí hi detectem la influència de la tècnica apresa a les activitats 6 i 7 amb Geogebra (permutar components i canviar un signe per obtenir un vector perpendicular) però mal aplicada per un fenomen de descontextualització: a la resolució escrita l'alumne no comprova immediatament la validesa de les seves accions a la pantalla, sinó que aplica unes tècniques "a cegues", sense ni tan sols usar el dibuix que ha fet sobre el paper per reflexionar sobre la validesa del resultat que obté. Aquesta "ceguesa" es fa encara més evident quan calcula el perímetre i no s'adona que les longituds dels costats han de ser iguals dos a dos. No és que no ho sàpiga. Sap perfectament que han de ser iguals dos a dos, però confia tan cegament en l'àlgebra i els resultats numèrics, que no s'adona que allò que obté no pot ser.

5.4.8. Cas 3: alumna M. Carmen

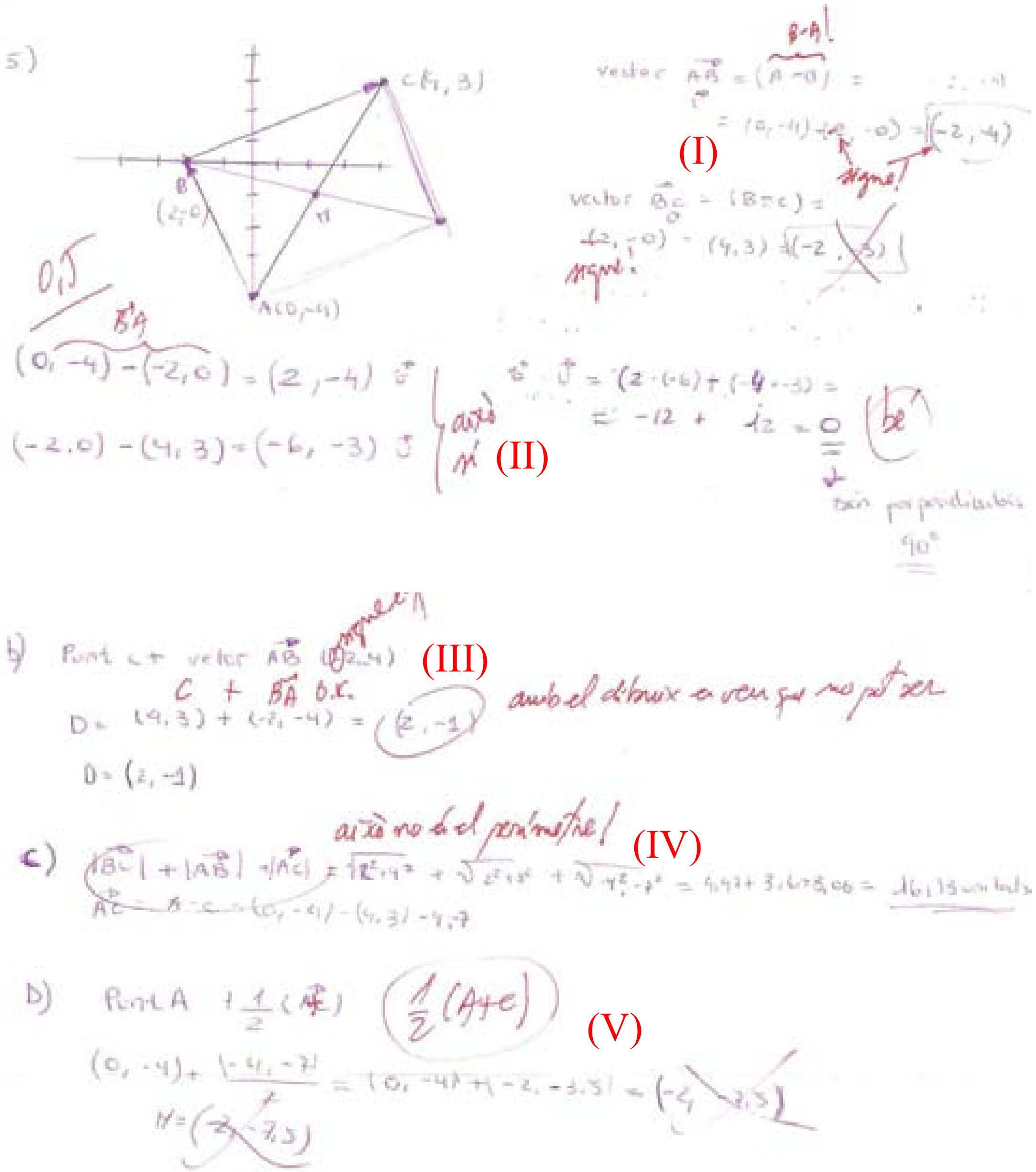


Figura 5.32. Resolució manuscrita de l'alumna M. Carmen per al problema 5.

I) M. Carmen fa una representació gràfica aproximada. Vol calcular els vectors *AB* i *BC* però comet errors d'ordre d'operacions en fer la diferència entre extrem i origen (*A-B* en comptes de *B-A*) i errors de signes (es deixa un signe en el càlcul *A-B* i per tant obté un resultat amb una component errònia). Es torna a deixar el mateix signe en el càlcul *B-C*. En comptes de les coordenades correctes de l'enunciat *B*=(-2, 0), copia equivocadament *B*=(2, -0). Aquest signe negatiu davant del zero és molt sorprenent.

II) Independentment del que ha fet malament abans, (amb errors de signe incomprensibles excepte que es tracti dels efectes del nerviosisme), calcula correctament *BA* i *CB*, encara que no ho indica amb aquestes lletres, sinó amb *v* i *u* respectivament. Fa el producte escalar d'aquests vectors i comprova bé la perpendicularitat. De fet ha comprovat la perpendicularitat de *BA* i *CB* en comptes d'usar *AB* i *BC* com indica l'enunciat. Evidentment, si uns són perpendiculars, els altres també. A l'alumna M. Carmen ja li ha passat en (I) que en comptes de calcular extrem menys origen canvia l'ordre. Es tracta d'una confusió que no perjudica per comprovar la perpendicularitat, però no deixa de ser una confusió que en altres càlculs pot tenir efectes molt negatius.

III) Per calcular el punt *D* pren el resultat erroni que ha calculat per a AB en (I), en comptes d'elegir el resultat correcte per a *BA* que ha calculat en (II). La idea que té, *D*=*C*+*BA*, és bona, però els càlculs no, perquè arrossega un error de signe. No s'adona que el resultat obtingut per a *D* es pot veure amb molta claredat que és erroni pel simple procediment de marcar el punt sobre la representació que ha fet l'alumna. És a dir, que dona per bo un resultat pel sol fet de pensar que ha realitzat càlculs correctes, sense recórrer a una molt fàcil prova de coherència amb la representació.

IV) Calcula erròniament el perímetre. Només usa 3 costats del rectangle. M. Carmen és una alumna que sap perfectament que un rectangle té quatre costats i que el perímetre és la suma de les longituds de tots quatre, però procedeix com encegada per un procediment algebraic que realitza en total desconnexió amb el sentit comú.

V) Per calcular el punt centre del rectangle, comença per la fórmula (*A*+*C*)/2, però mal escrita perquè es deixa el signe +. Que es tracta d'un oblit queda clar perquè en els càlculs amb les coordenades dels punts el signe + apareix, encara que sorgeix un important error de càlcul: M. Carmen no fa la meitat de la suma *A*+*C*, sinó que calcula la meitat de *C* i la suma a *A*. El resultat són unes coordenades que, com hem dit ja per a (IV), no resisteixen una elemental comprovació sobre la representació gràfica, però que l'alumna dona per bones confiant que, si els càlculs indiquen això, ha de ser cert.

M. Carmen és una alumna que ha quedat inclosa a la categoria dels matematitzadors horitzontals a partir de l'anàlisi dels resultats de les activitats amb Geogebra. És treballadora, constant i patidora. Representa en certa manera qualitats oposades a les de l'alumne Jesús: per una banda, no té la facilitat natural que sí que demostra Jesús per a les matemàtiques però compensa aquest fet amb disciplina de treball (cosa que Jesús no exercita), i per una altra banda té poca confiança en ella mateixa, al contrari que Jesús. El seu alt sentit de la responsabilitat i la seva inseguretat provoquen que cometi alguns errors que no tindria si aconseguís augmentar la confiança en ella mateixa.

Obté un resultat força bo a la prova escrita (7 de 10 punts possibles) gràcies al fet que s'ha preparat disciplinadament per a una prova convencional. De fet, aconsegueix 6,5 de 7 punts possibles als quatre primers problemes, per als quals és especialment adequada un preparació convencional, i només 0,5 sobre 3 al problema 5. L'estudi i la pràctica repetida d'exercicis i problemes li permeten resoldre amb comoditat els quatre primers problemes de la prova escrita, però quan aborda el problema 5, es troba sense la referència segura del treball convencional de repetició. De fet, l'escassa puntuació que obté al problema 5 prové de l'aplicació d'una tècnica molt convencional per comprovar la perpendicularitat de dos vectors: calcular el seu producte escalar i veure que és zero.

Les seves idees per resoldre el problema 5 són bones, però no arriben a bon port a causa de la seva inseguretat a l'hora d'aplicar-les. Comet nombrosos errors de signe i cau en confusions en llegir i copiar nombres. També és víctima, com altres alumnes, del fenomen de descontextualització que consisteix en confiar cegament en la mecànica algebraica encara que, per a un observador extern, pugui resultat molt evident que els resultats obtinguts no resisteixen la simple prova de situar-los al dibuix que fa la pròpia alumna quan comença al problema 5.

5.4.9. Cas 4: alumne Ivan

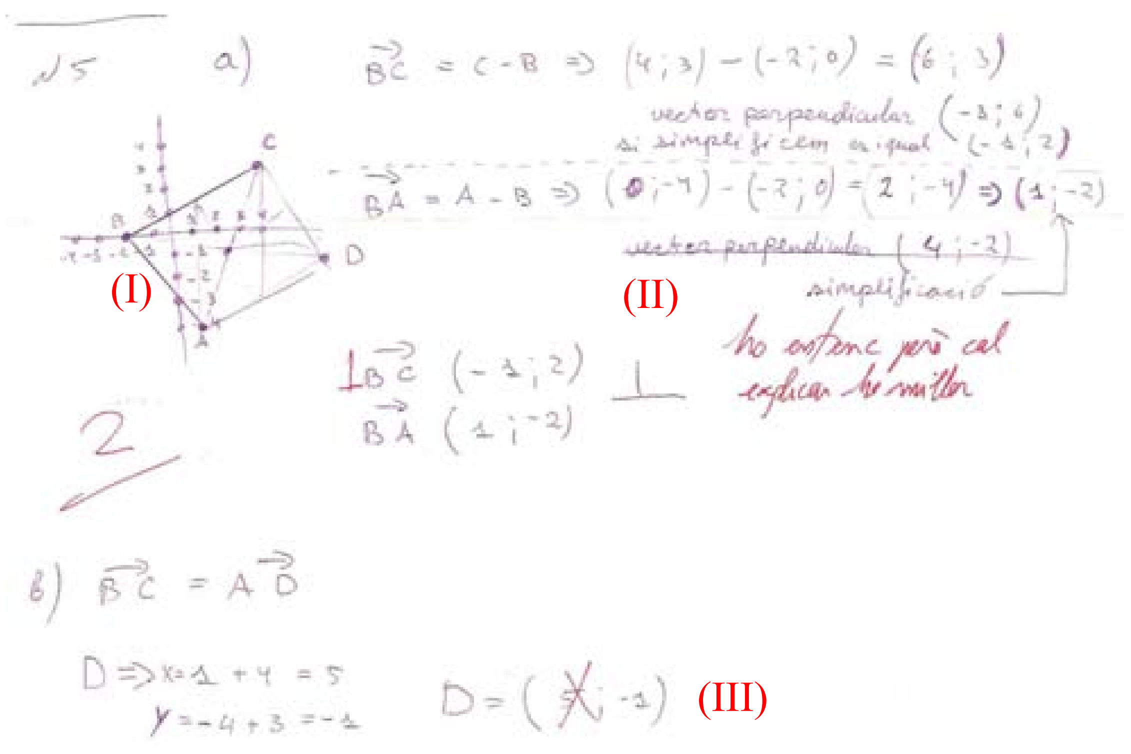
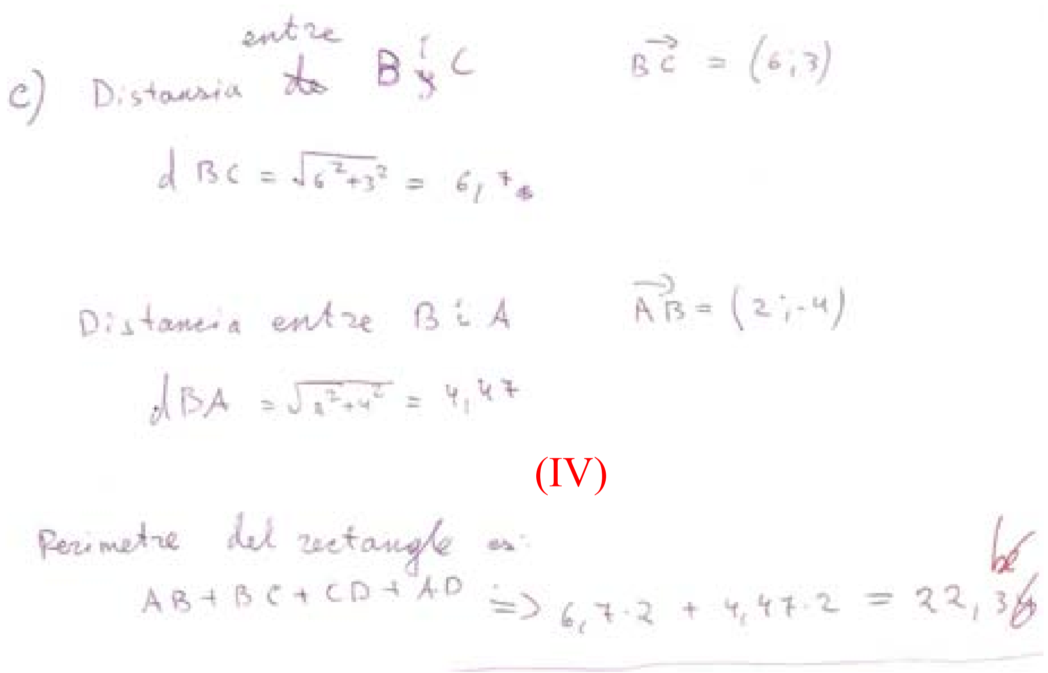


Figura 5.33. Resolució manuscrita de l'alumne Ivan per al problema 5 (primera part).

I) Ivan fa un esquema gràfic de la situació. S'equivoca quan situa el punt A, ja que el col·loca erròniament a les coordenades (1, -4) en comptes de les correctes (0, -4). Aquest error tindrà conseqüències negatives a (III).

II) Per comprovar que els vectors *AB* (en realitat usa *BA*) i *BC* són perpendiculars, Ivan desplega un raonament que surt del camí convencional de calcular el producte escalar. Calcula correctament les components de *BA* i *BC* i, a continuació divideix les components pel seu màxim comú divisor (utilitza la paraula "simplificació"), de manera que li queden els vectors (-1, 2) i (1, -2). Llavors, recorre a la propietat que si a un vector li permutem les components i canviem el signe d'una d'elles, el vector resultant és perpendicular al vector original. Si, per aquesta propietat, aquests vectors (-1, 2) i (1, -2) són perpendiculars, és evident que *BA* i *BC* també ho han de ser. El seu raonament se segueix perfectament, encara que no va acompanyat de cap text explicatiu.

III) Parteix de la igualtat *BC=AD* (que és certa) i utilitza la representació gràfica per partir del punt *A* i sumar-li el vector *BC* "comptant quadrets", és a dir: coordenada *x* de *A* més component x de *BC*, i el mateix per a la vertical. És evident que es basa en la representació gràfica perquè parteix del punt *A* mal situat, i això provoca que la coordenada *x* de *D* estigui equivocada (la coordenada *y* és correcta). Si hagués utilitzat les coordenades del punt *A* que ha copiat correctament de l'enunciat i ha escrit a (I), aquest error no s'hauria produït. El seu raonament per a la resolució té, doncs, una base gràfica, que justifica amb els càlculs que presenta, separant les components. No usa l'escriptura de la suma de coordenades i components entre parèntesis, la qual cosa reforça la interpretació que fa un raonament basant-se en el dibuix que ha fet i en els moviments en horitzontal i en vertical sobre aquest dibuix.


c) Distancia ~~de~~ entre B i C $\vec{BC} = (6,3)$

$d\,BC = \sqrt{6^2+3^2} = 6,7$

Distancia entre B i A $\vec{AB} = (2;-4)$

$d\,BA = \sqrt{2^2+4^2} = 4,47$

(IV)

Perimetre del rectangle es:

AB + BC + CD + AD => 6,7·2 + 4,47·2 = 22,36

Aquesta figura continua a la pàgina següent

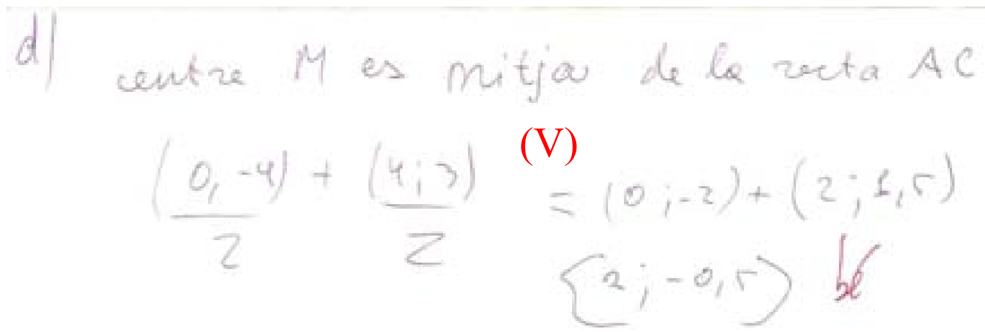


Figura 5.34. Resolució manuscrita de l'alumne Ivan per al problema 5 (segona part).

IV) Calcula correctament la distància (usa precisament la paraula "distància") entre *B* i *C* i entre *B* i *A* com els mòduls dels vectors *BC* i *BA*. Llavors, escriu que el perímetre és la suma de les longituds dels quatre costats, explicitant que són iguals dos a dos i que per tant en té prou amb les longituds dels costats *BC* i *BA*. El raonament és impecable.

V) Explica i calcula correctament, amb concisió, que el centre del rectangle és el punt mitjà del segment *AC.*

Ivan és un alumne que ha quedat inclòs a la categoria dels matematitzadors tecnològics a partir de l'anàlisi dels resultats de les activitats amb Geogebra. Es va incorporar al sistema educatiu a l'etapa de l'Educació Secundària Obligatòria, provinent de l'estranger. És un alumne que obté resultats prou bons a les matèries científiques i tecnològiques però que té dificultats amb les llengües: la seva expressió, tant oral com escrita, dista de ser satisfactòria tant en català com en castellà.
A la prova escrita obté 6,3 punts de 10 possibles. D'aquests 6,3 punts, 4,3 sobre 7 possibles els obté als quatre primers problemes, per als quals és especialment adequada un preparació convencional, i 2 sobre 3 al problema 5, per al qual no és tan necessari aquest tipus de preparació perquè es pot suplir amb el bagatge de la feina feta a les activitats amb Geogebra.
Com hem mostrat en el relat de la seva resolució escrita per al problema 5, realitza els seus raonaments sobre la base de la representació gràfica que ha realitzat. La referència visual és molt important per a ell, i això l'ajuda a no extraviar-se per camins exclusivament algebraics. És interessant comparar-lo amb Erik i M. Carmen, en el sentit que aquests dos alumnes obtenen millors resultats globalment a les activitats amb Geogebra (Erik és un matematitzador complet, M. Carmen és una matematitzadora horitzontal), però pitjor puntuació que Ivan al problema 5 de la prova escrita, principalment perquè perden la referència geomètrica i visual i cometen errors algebraics que els condueixen a resultats equivocats, els quals podrien haver detectat fàcilment si els haguessin intentat situar a la representació gràfica que ells mateixos han traçat en iniciar la resolució.
Ivan ha estat disciplinat per realitzar una preparació convencional, a base d'exercicis i problemes estàndard, per a la prova escrita, i ha obtingut una puntuació prou bona al conjunt dels quatre primers problemes. I al problema 5 ha pogut convertir en virtut la

seva necessitat de visualitzar i de resoldre a partir de la visualització, sense perdre mai la referència gràfica.

5.4.10. Interpretació a partir de l'estudi de casos

Després d'haver mostrat les resolucions manuscrites dels quatre alumnes per al problema 5, d'haver-les descrit i d'haver aportat elements interpretatius sobre cada una d'elles, emprenem una interpretació des d'una perspectiva més àmplia que contempla el conjunt format pels quatre casos.
Tenim en compte també, com no pot ser d'altra manera, la referència que ens proporcionen les anàlisis i les interpretacions que hem realitzat en aquest capítol abans d'iniciar l'estudi dels quatre casos, especialment aquelles referències que ens ha proporcionat l'estudi de la matematització dels alumnes a les activitats amb Geogebra.

De l'anàlisi i la interpretació del conjunt dels quatre casos, considerem que podem extreure unes conclusions que exposem a continuació. Cada una apareix encapçalada per una frase que resumeix el seu contingut.

1. Convergència induïda per la seqüència didàctica a l'activitat 7 enfront de la divergència a la resolució escrita per al problema 5.
Els quatre alumnes realitzen processos de resolució molt semblants de l'activitat 7 amb Geogebra. Difereixen només en aspectes d'importància secundària. La seqüència didàctica de les activitats anteriors (de la 1 a la 6) i les possibilitats de visualització i manipulació que ofereix Geogebra (i per tant de contextualització, tal com hem argumentat al capítol 2) condueixen a una convergència en els processos de resolució. Els quatre alumnes resolen correctament.
A les resolucions per escrit al problema 5 de la prova escrita, detectem elements que revelen la influència de les activitats amb Geogebra (la construcció d'un vector perpendicular a un altre; l'equació vectorial de la recta) però fora del context que proporcionen la seqüència didàctica de les activitats i l'entorn Geogebra, els alumnes realitzen resolucions que presenten importants diferències entre elles.

2. Bones idees però mala realització.
A l'estudi de casos observem com en tres dels quatre alumnes (Jesús, Erik, M. Carmen) resulta molt evident que van ben orientats pel que fa als passos que han de realitzar per a la resolució escrita del problema 5, però que cometen errors en el procediment de resolució i no són capaços de detectar-los a pesar que els hagués resultat molt fàcil advertir-los a partir de simples comprovacions dels resultats.

3. Resolució per escrit amb mecànica cega i amb suspensió de judici.
Tres dels quatre alumnes inicien el procés de resolució del problema 5 de la prova escrita realitzant una representació gràfica de la situació, i un d'ells emprèn la resolució sense fer ni tan sols un esbós. En tres dels quatre casos és molt evident que els alumnes obtenen resultats per procediments algebraics que no resisteixen una

simple comprovació sobre la representació gràfica. En un d'aquests tres casos, no hi pot haver comprovació ja que l'alumne (Jesús) no ha dibuixat res, però en els altres dos (Erik i M. Carmen) crida l'atenció que es donen per bons resultats erronis per sol fet que són el producte d'una mecànica algebraica (amb errors, és clar) i que no es comproven aquests resultats sobre el dibuixos fets pels propis alumnes. Ens referim a aquests fets amb les expressions *mecànica cega* i *suspensió de judici*, ja que la confiança cega en la mecànica algebraica provoca una tal descontextualització que arriba a l'extrem de prescindir de les referències visuals per al problema, i bloqueja el recurs de sentit comú consistent en preguntar-se "¿Aquest resultat és possible?".
En els fenòmens que hem anomenat *mecànica cega* i *suspensió de judici* hi advertim la ressonància d'una referència que hem mostrat al capítol 2, concretament a l'apartat dedicat a l'evolució històrica de la didàctica de la geometria analítica. Sánchez (1997, reimpressió d'una ponència de 1983) es referia d'aquesta manera als alumnes de batxillerat:

"A força d'haver estat educats en l'ús exclusiu de mètodes analítics, els nostres estudiants se senten incapaços de fer un croquis dels elements en qüestió i intenten a tota costa resoldre els problemes geomètrics d'una manera algebraica, negant, per errors de càlcul, la possibilitat de solucions quan són evidents gràficament, o a l'inrevés."

A les resolucions per al problema 5 analitzades hi hem trobat casos en què els alumnes "intenten a tota costa resoldre els problemes geomètrics d'una manera algebraica" i també hi ha aparegut la negació de "per errors de càlcul, la possibilitat de solucions quan són evidents gràficament" a què es refereix Sánchez. No podem afirmar, en canvi, que "els nostres estudiants se senten incapaços de fer un croquis dels elements en qüestió", perquè dels quatre casos analitzats, en tres hi apareixen representacions gràfiques de la situació. Però sí que podem afirmar que malgrat l'existència d'aquestes representacions, hi ha alumnes que volen resoldre de manera algebraica "a tota costa" i que neguen "la possibilitats de solucions que són evidents gràficament". La qual cosa ens permet concloure que fins i tot si prèviament els alumnes han resolt situacions semblants dins de la contextualització geomètrica que proporciona Geogebra, i malgrat que vulguin iniciar amb un croquis una resolució per escrit, en alguns alumnes es produeix la desconnexió entre la mecànica algebraica i l'evidència gràfica en el sentit que assenyala Sánchez. Això pot ser certament atribuïble, com apunta el mateix autor, al fet que els alumnes han estat educats sobretot en l'ús de mètodes analítics, però considerem que és cert només en part. Nosaltres ens hem trobat amb casos d'alumnes que han resolt correctament problemes en un context altament visual i manipulatiu (les activitats amb Geogebra) i que quan han abordat situacions semblants en un context convencional (una prova escrita) han estat arrossegats per la força de la mecànica cega i de la suspensió de judici. Per aquest motiu, creiem que aquesta desconnexió entre àlgebra i geometria (nosaltres utilitzem la paraula *bretxa*, que ja ha aparegut abans en aquest capítol i que torna aparèixer en una de les conclusions posterior a aquesta) no solament es deu al fet que els alumnes han estat educats preferentment en mètodes analítics, sinó que té una naturalesa epistemològica més profunda.

4. Caiguda del rendiment a causa de la mecànica cega i la suspensió del judici.
Els quatre alumnes de l'estudi de casos resolen perfectament l'activitat 7 amb Geogebra. En canvi, en una situació molt semblant com és el problema 5 de la prova escrita, els resultats cauen, no perquè els alumnes no "sàpiguen" què fer (en el sentit que no estan desorientats; tenen idees prou clares sobre els passos fonamentals que han de seguir) sinó perquè perden les referències visuals i gràfiques i donen cegament per bo el resultat de la mecànica algebraica que segueixen.

5. La contextualització és una aliada de la matematització i del rendiment.
Cal aclarir que en aquest punt, com en els anteriors, considerem la paraula contextualització en el sentit que hem definit al capítol dedicat al marc teòric:

"Considerem que visualitzar un problema i poder manipular els elements geomètrics és una manera de proporcionar sentit. És, per tant, en si mateixa, una manera de contextualitzar, és a dir, de facilitar proximitat i familiaritat. No tan sols podem proporcionar una contextualització pel sol fet de plantejar una situació on hi intervenen objectes reals o imaginaris que connecten amb l'experiència dels alumnes. Si el problema admet una representació geomètrica (no excessivament complicada), el sol fet de marcar punts i traçar línies (de visualitzar-lo) i de manipular aquests elements ja construeix un context."

La comparació, a l'estudi de casos, entre les resolucions per a l'activitat 7 amb Geogebra i el problema 5 de la prova escrita evidencia que en una situació contextualitzada els alumnes resolen bé, mentre que quan el context visual i manipulatiu no hi és, el rendiment cau fins i tot per a una situació que ja ha estat assajada anteriorment, amb èxit, en activitats contextualitzades.

6. Bretxa bidireccional.
En aquest mateix capítol 5, dins de la interpretació que hem realitzat a partir dels resultats de la matematització, hem afirmat que "Per als alumnes, la traducció algebraica, per escrit, de la matematització realitzada amb mitjans tecnològics manipulatius i visuals, no és un simple automatisme; en aquest pas, existeix una bretxa". Ara, a partir de l'estudi de casos, descobrim que també existeix una bretxa que funciona en sentit contrari: quan els alumnes resolen algebraicament per escrit, fàcilment poden perdre de vista la referència gràfica. Això confirma l'existència d'una bretxa entre la visualització geomètrica i l'àlgebra, que per a alguns alumnes es manifesta de forma més profunda que per a alguns altres. Els docents, a base d'experiència i pràctica, s'han construït mentalment un sòlid pont que els uneix perfectament les visions geomètrica i algebraica d'una mateixa situació, de manera que la connexió els sembla sòlida i natural, com si no pogués ser d'altra manera i no existís cap bretxa per salvar. Però per als alumnes la bretxa existeix. La passarel·la que els pot permetre el pas d'una banda a l'altra és precària i corre el risc de trencar-se en qualsevol moment.

Després d'haver presentat els punts mitjançant els quals hem estructurat la interpretació de l'estudi de casos, volem retornar a un d'ells, el punt 5, que hem encapçalat amb la frase "la contextualització és una aliada de la matematització i del rendiment". En efecte, i ens sembla especialment oportú subratllar-ho, en l'estudi de casos hem apreciat amb més proximitat els detalls d'un fet que ja ens apareixia en l'estudi de la matematització a partir dels resultats comptabilitzats per a tot el grup d'alumnes (l'anàlisi de les taules numèriques de la matematització en el conjunt de les 8 activitats amb Geogebra, una anàlisi que hem desenvolupat en aquest mateix capítol). El fet al qual ens referim és que la gran majoria dels alumnes (17 de 19, i d'aquests 17 en particular els 4 que han format part de l'estudi de casos) assoleixen resultats realment alts en la matematització horitzontal, és a dir, en la "transferència" de les situacions que plantegen les activitats cap a una representació matemàtica, en la visualització i "manipulació" dels elements que constitueixen aquesta representació matemàtica i, finalment, en la resolució.

Per als alumnes que formen part de l'estudi de casos, hem descrit amb detall el procés de matematització que han seguit en l'entorn interactiu Geogebra i per a una activitat concreta, la número 7. D'aquesta manera, no tan sols hem presentat una anàlisi de la matematització basada en taules numèriques on hi apareixen tots els alumnes (una anàlisi que, no ho oblidem, té una importància central en el nostre treball) sinó que també ens hem apropat més al detalls qualitatius en un estudi de casos sobre quatre alumnes representatius.

L'alt rendiment dels alumnes en la matematització horitzontal és un resultat que prenem i col·loquem davant del nostre plantejament de partida i davant dels nostres objectius operatius per al disseny de les activitats (formulats al capítol 1). Això ens permet afirmar que les activitats contextualitzades dins de l'entorn interactiu Geogebra que hem dissenyat i implementat han induït amb èxit la matematització (sobretot la matematització horitzontal de manera indiscutible, i en una bona mesura, encara que en un menor grau, també la matematització vertical).

L'estudi de casos que hem dut a terme ens ha confirmat, amb resultats concrets, un aspecte que hem formulat en el nostre plantejament teòric (recollit al capítol 2): la visualització i la manipulació interactiva dels elements geomètrics d'una situació contextualitzada són avantatjoses per als alumnes. En situacions molt semblants (l'activitat 7 i el problema 5 recollits en l'estudi de casos) el rendiment dels alumnes, en el sentit de resoldre correctament les situacions, és major en l'entorn interactiu Geogebra que en una resolució convencional per escrit. No tan sols això, sinó que en una resolució convencional per escrit, alumnes que resolen bé amb Geogebra, perden de vista el context visual del problema i cauen en el que hem anomenat "mecànica cega" i "suspensió de judici". Avancen entre els símbols algebraics, impulsats per la rutina d'una mecànica operacional, havent perdut de vista, en sentit figurat i també literal, la situació que volen resoldre, i per això equivoquen el rumb. L'estudi de casos ens ha mostrat que això succeeix fins i tot quan els alumnes han resolt abans satisfactòriament una situació semblant en el context del programari interactiu Geogebra. Si aquesta contextualització visual i manipulativa no hi és, el rendiment cau i apareixen els fenòmens esmentats de mecànica cega i suspensió de judici. No es tracta que els alumnes no sàpiguen què fer, sinó que l'absència del context facilita que cometin errors en la seqüència de resolució i no siguin capaços de detectar-los, encara que els seria fàcil d'advertir-los només que situessin en la representació geomètrica els resultats obtinguts per procediments algebraics (ens hi hem referit en el punt 2 sota l'encapçalament "bones idees però mala realització").

L'estudi de casos ens ha permès subratllar la importància de la contextualització i mostrar com efectivament es produeix la inducció de la matematització (especialment la horitzontal) en les activitats contextualitzades dins de l'entorn interactiu Geogebra. I ens hem referit al fet que aquests resultats encaixen en els nostres objectius i el nostre plantejament teòric (i metodològic). Abans de passar a l'apartat següent, que tracta de la síntesi interpretativa emergent a partir dels resultats del nostre treball, volem apuntar que hem de tenir també present un aspecte que no han aparegut a l'estudi de casos (centrat en la matematització i en els contextos on es produeix) però que hem desenvolupat en apartats anteriors: la valoració subjectiva dels alumnes sobre les activitats amb Geogebra indica molt clarament que proporcionen una major motivació que les activitats convencionals i que milloren l'autoconsciència de l'aprenentatge. Havent afegit això, ja estem en condicions d'abordar la síntesi interpretativa que hem anunciat.

5.5. Síntesi emergent

En apartats anteriors, dins d'aquest capítol 5, hem analitzat detalladament, i interpretat, els resultats obtinguts a la fase d'implementació, grupals i també individuals, tant pel que fa a la matematització com pel que fa a les valoracions subjectives dels alumnes. També hem realitzat un estudi de quatre casos per analitzar (i comparar) amb detall resolucions per a activitats amb Geogebra i per a una prova escrita convencional. Un cop que hem arribat fins aquí, estem en condicions d'emprendre, a la llum d'aquesta feina realitzada, la tasca de sintetitzar i d'integrar els diferents elements en un marc estructurat i coherent. No podem oblidar, per altra banda, que els resultats no apareixen en el buit sinó que es deuen a un disseny que al seu torn respon a un marc teòric que hem exposat al capítol 2. Així, doncs, si fins ara, en aquest capítol 5, ens hem dedicat a l'anàlisi, és a dir, a "l'examen de les parts constituents d'un tot" (segons la definició del diccionari), i a la interpretació dels resultats obtinguts, a continuació abordarem la síntesi: la "combinació dels elements d'un tot després d'haver-los separats per mitjà de l'anàlisi".
El primer que farem és allunyar la mirada, que en l'anàlisi ha de ser propera i detallada, però que per a la síntesi ha de ser prou distanciada per abastar la totalitat. Ens preguntem: després de la implementació segons un disseny basat en un marc teòric, i després de l'anàlisi i la interpretació dels resultats obtinguts, quina és la visió que obtenim del nostre sistema didàctic? Recordem que, tal com hem exposat al capítol 2, el sistema didàctic està format pels subsistemes "alumne", "saber a ensenyar" i "professor".

- L'actuació dels alumnes i els seus resultats han estat exposats i analitzats amb detall als capítols 4 i 5.
- El saber a ensenyar l'hem tractat al capítol 3, tant des de la perspectiva més general de la programació didàctica com des del punt de vista més concret de la transposició didàctica, l'organització, el disseny i la planificació de les sessions per a la fase d'implementació.
- El paper del professor ha estat recollit especialment al capítol 4, quan hem exposat les característiques del registre del procés d'implementació.

Llavors, tornem a plantejar la pregunta anterior: si tenim en compte tots aquests elements que han estat analitzats, quina síntesi emergeix? És obvi que la síntesi emergent no és un producte independent de la nostra posició investigadora. És, al seu torn, també una interpretació, i per tant suposa prendre una posició, de la mateixa manera que ha estat una presa de posició l'enfocament històric que hem realitzat, l'elecció del marc teòric i el disseny de l'entorn d'aprenentatge implementat.
Hi ha un factor diferencial entre la posició hem adoptat per al plantejament didàctic i la que adoptem per a la síntesi posterior a l'anàlisi: comptem amb els resultats i la seva interpretació, cosa que no succeïa abans de la implementació. El posicionament que sorgeixi d'aquesta síntesi final ha de ser necessàriament coherent amb el posicionament previ a la implementació, i més complet.

5.5.1. La plataforma MATH

Entrem ja de ple en la síntesi emergent: el primer fet que destaquem és que dins del conjunt del nostre sistema didàctic existeix un subconjunt format per les activitats d'aplicació realitzades amb Geogebra (en aquest subconjunt hi intervenen, és clar, els tres subsistemes; alumnes, saber a ensenyar i professor). No repetirem el detall del que ja ha estat exposat en apartats anteriors, però subratllem que:

- Es tracta d'activitats d'aplicació prèvies a la presentació formal dels continguts. Els alumnes, en cada activitat, llegeixen els breus enunciats de cada situació que planteja cada activitat i comencen a resoldre amb Geogebra sense cap direcció externa durant el procés de resolució. Representen, visualitzen i manipulen interactivament, mitjançant Geogebra. En canvi, en un plantejament didàctic tradicional, es presenten els continguts perfectament formalitzats, sense intervenció dels alumnes, i es passa a les aplicacions com a fase final (per tant, la matematització és forçada en el sentit que ja es presenta com un producte acabat i donat externament).
- Els resultats de la matematització horitzontal mitjançant el programari interactiu Geogebra són alts per a una molt àmplia majoria dels alumnes. Si considerem la resolució de les vuit activitats amb Geogebra que constitueixen un element central en la implementació del nostre enfocament didàctic, i ho fem des del punt de vista de considerar si els alumnes han resolt correctament amb Geogebra, és a dir, si visualitzant i manipulant elements geomètrics que

apareixen a la pantalla han construït un fitxer que dona resposta concreta a la situació plantejada, trobem un molt alt grau d'assoliment per a la immensa majoria dels alumnes igual o superior al 88% (la mitjana d'assoliment de la matematització amb Geogebra és igual o superior al 88% en les categories de matematització 1, 2 i 3, que inclouen 17 dels 19 alumnes totals).

– Es donen una alta motivació i una alta autoconsciència del procés d'aprenentatge, molt homogènies en el grup d'alumnes, i independents dels resultats individuals en la matematització. Durant el procés d'implementació de les activitats, hem constatat els alumnes han mantingut una bona actitud de treball a l'aula. En les respostes al qüestionari final de valoració del conjunt de les activitats amb Geogebra, aquests mateixos alumnes han valorat positivament els aspectes relacionats amb l'atractiu del plantejament didàctic, amb la seva implicació personal en el procés i amb la seva autoconsciència d'aprenentatge. Les mitjanes grupals, en una escala de 0 a 1, indiquen que respecte d'un plantejament didàctic tradicional els alumnes han trobat les classes més amenes (0,83), més interessants (0,78), que s'hi han trobat més implicats i motivats (0,67), que reflexionen més sobre el que fan (0,72), comprenen millor els continguts matemàtics (0,67) i estan més implicats i motivats (0,67).

Tenint en compte això anterior, prenem les lletres M (matematització, motivació), A (activitats, aplicació) T (TIC) i H (horitzontal), i construïm l'acrònim MATH. Definim el subconjunt (del sistema didàctic) format per les activitats amb Geogebra com una *plataforma MATH*.
Afegim un apunt: l'elecció de l'acrònim MATH té, segons la nostra opinió, un atractiu semàntic molt important. Efectivament, en anglès la paraula "math" és una forma abreujada de "mathematics", és a dir, matemàtiques (al cap i a la fi, l'anglès és la llengua franca internacional per a la comunicació científica). Hem trobat que l'oportunitat de combinar les lletres per formar aquest acrònim és pràcticament irresistible.

El nostre subconjunt d'activitats reuneix una sèrie de característiques per les quals li donem el nom de *plataforma MATH*; però poden existir altres conjunts d'activitats de les mateixes característiques bàsiques, aplicats a altres unitats didàctiques (pensem sobretot en l'ensenyament de la geometria, però no creien que aquesta sigui una limitació absoluta) i fins i tot a altres nivells educatius. Aquestes altres propostes, si es basen en un plantejament "de baix a dalt" amb activitats contextualitzades en un entorn interactiu TIC, si aconsegueixen que els alumnes manipulin interactivament els elements d'aquestes situacions concretes, les organitzin i les resolguin amb un alt percentatge d'èxit, i si proporcionen una alta motivació i una alta autoconsciència de l'aprenentatge (superiors a les d'un plantejament tradicional), llavors també són plataformes MATH.
En definitiva, prenem les característiques que considerem essencials del nostre plantejament i en fem una generalització. Considerem que aquestes característiques no tenen per què ser exclusives del nostre plantejament concret, sinó que poden estar presents en altres propostes didàctiques. De la mateixa manera que nosaltres hem

implementat una proposta concreta, altres persones poden implementar propostes també concretes que comparteixin la mateixa estructura fonamental (i que, naturalment, difereixin en els detalls). El que diem és que totes aquestes propostes, la nostra que és real i ha estat implementada i altres possibles propostes, són plataformes MATH.
Podem il·lustrar aquesta idea fent una analogia amb el procés de matematització dels alumnes en el procés d'implementació del nostre plantejament. Han matematitzat sobre situacions concretes (matematització horitzontal) però també han obtingut generalitzacions (matematització vertical), és a dir, han abstret, a partir de situacions concretes, elements essencials i s'han adonat que són elements compartits per altres situacions no idèntiques. De la mateixa manera, nosaltres diem que hem assolit la nostra particular matematització vertical: altres propostes didàctiques no idèntiques a la nostra poden compartir amb la nostra les característiques essencials que permetin definir-les també com a plataformes MATH.

Després d'aquestes consideracions anteriors, estem en condicions de donar una definició més compacta de *plataforma MATH*, vàlida per al nostre subconjunt del sistema didàctic, i també per a un altre conjunt o subconjunt didàctic que contingui les mateixes característiques. És a dir:

Una plataforma MATH és un conjunt organitzat d'activitats d'aplicació contextualitzades en un entorn TIC, previ a la formalització dels continguts matemàtics, que, pel seu propi disseny, indueix de forma no forçada la matematització horitzontal amb resultats alts per a una gran majoria d'alumnes, i que aconsegueix per als alumnes una alta motivació i una alta autoconsciència de l'aprenentatge respecte d'un plantejament tradicional.

Si bé hem justificat el perquè de la formació de l'acrònim *MATH*, considerem essencial aclarir per què hem utilitzat la paraula *plataforma*. Ho hem fet amb la voluntat que la paraula expressi rigorosament allò que trobem al diccionari, en l'accepció "superfície plana i horitzontal més elevada que el sòl circumdant" i també en l'accepció "allò que hom fa servir de base per a fer un raonament".

- L'accepció "superfície plana i horitzontal més elevada que el sòl circumdant" és una metàfora per significar que es produeix la matematització horitzontal, és a dir, que com exposa Treffers (1978,1987) "els estudiants utilitzen eines matemàtiques que els ajuden a organitzar i resoldre un problema en el context d'una situació realista". La "superfície horitzontal" simbolitza òbviament la matematització horitzontal, i el fet que sigui "més elevada que el sòl circumdant" significa que es produeix una organització del problema mitjançant eines matemàtiques, la qual cosa suposa un grau d'estructuració i complexitat més alt que el que tenen els elements sense organitzar. Assenyalem també que segons els resultats obtinguts, una important minoria d'alumnes assoleix resultats alts en la matematització vertical. Però la justificació plena d'utilitzar la paraula *plataforma* deriva del fet que la gran majoria dels alumnes obté resultats alts a la matematització horitzontal. Per tant, l'assoliment de la matematització horitzontal és una conseqüència estructural pròpia del disseny de les activitats.

– L'accepció "allò que hom fa servir de base per a fer un raonament" apunta al fet que les activitats de la *plataforma* són la base a partir de la qual s'aborda posteriorment la formalització dels continguts matemàtics. La referència al que, ja en els capítols 1 i 2 hem subratllat: l'aposta per un plantejament didàctic que comença per les aplicacions i només després s'eleva cap a la generalització i l'abstracció.

Diem, doncs, que la *plataforma MATH*:

S'anomena plataforma perquè indueix la matematització horitzontal i perquè és la base a partir de la qual s'aborda l'abstracció i la formalització dels continguts matemàtics.

Tot i que hem definit la plataforma MATH per allò que és, com naturalment correspon a una definició, creiem que resulta també important subratllar allò que no és. La raó és simple: el fet que en la construcció de l'acrònim MATH hi intervinguin les paraules matematització i aplicació, i un altre acrònim, TIC (tecnologies de la informació i la comunicació), pot provocar la confusió de fer creure que dir "plataforma MATH" és una manera rebuscada de referir-se a qualsevol mena d'utilització de les TIC aplicada a l'ensenyament i aprenentatge d'uns certs continguts matemàtics. I no es tracta d'això.
Usar les TIC per desenvolupar exercicis d'aplicació de continguts prèviament subministrats pel professor no constitueix una plataforma MATH. Usar un programa o un aplicatiu TIC perquè els alumnes comprovin els coneixements adquirits en una unitat didàctica o en una part d'ella, no constitueix una plataforma MATH. Usar les TIC per il·lustrar una explicació teòrica, o fins i tot com a element bàsic per exposar-la, tampoc constitueix una plataforma MATH. Com tampoc no ho és usar les TIC com a font de consulta, banc d'exercicis, recerca d'aplicacions relacionades amb un tema determinat, etc.
Tot això anterior són usos de les TIC que certament poden resultar, ben dirigits, molt útils per als processos d'ensenyament i aprenentatge. Però el que distingeix fonamentalment una plataforma MATH d'aquests exemples anteriors és el fet que les activitats d'aplicació (realitzades mitjançant TIC) indueixen una matematització que és la porta d'entrada a la generalització i la posterior formalització d'uns continguts. Per tant, les TIC no s'usen per aplicar uns continguts prèviament subministrats pel professor, sinó que s'usen amb l'objectiu d'anar cap a uns continguts.
Per posar un exemple concret extret del nostre treball: els alumnes matematitzen amb Geogebra en la realització de les activitats amb Geogebra 1, 2, 3 i 4 . Les estratègies que utilitzen els diferents alumnes són diverses en l'activitat 1, però acaben convergint en una sola estratègia de resolució per a l'activitat 4 (tal com hem mostrat al capítol 4). Es tracta de generar un punt alineat amb uns altres dos punts donats *A* i *B* utilitzant sumant a un d'aquests punts donats, *A* o *B*, el vector *AB* (o *BA*) multiplicat per un nombre. Els alumnes han arribat a un procediment (que també podem anomenar model matemàtic) que permet construir els infinits punts que formen una recta. De fet, han arribat fins a l'equació vectorial de la recta. A partir d'aquí, correspon al

professor presentar aquest resultat formalment, amb una escriptura matemàtica estàndard: "aquesta és l'equació vectorial de la recta, que permet generar els seus infinits punts i aquests són els elements que en formen part: un punt conegut de la recta, un vector director, un paràmetre..." I a partir d'aquí, desplegar també formalment, una altra sèrie de continguts: equacions paramètriques, contínua, implícita, explícita... Es podria adduir que és molt més simple que el professor subministri directament l'equació vectorial de la recta i que després faci treballar els alumnes sobre exercicis d'aplicació. Però els avantatges d'usar un plantejament com el nostre ja els hem resumit: els alumnes visualitzen i manipulen en context, assoleixen un alt rendiment en la matematització horitzontal, estan més motivats i tenen més autoconsciència del seu aprenentatge que en un plantejament tradicional. Són subjectes actius en el procés de matematització, i tenen consciència de ser-ho.

5.5.2. La matematització i la formalització

El nostre plantejament didàctic, portat a la pràctica durant la fase d'implementació, està totalment integrat dins de la programació didàctica de les matemàtiques del primer curs de Batxillerat. Aquest és un aspecte que ja hem explicitat en més d'una ocasió abans, però ara convé recordar-lo, tot i acceptant el risc de la reiteració. És important tenir present que no hem perdut mai de vista que havíem de complir uns objectius marcats per la programació, amb independència que realitzéssim un plantejament no tradicional. Per tant, hem hagut d'arribar fins a una formalització dels continguts, a la unitat didàctica de geometria analítica, dins dels estàndards del sistema educatiu actual: definicions dels conceptes, notació, etc. La diferència amb un sistema tradicional és que hi hem arribat partint de les activitats d'aplicació. Més concretament, a partir del que hem anomenat una plataforma MATH.

Ja hem mostrat en aquest mateix capítol, justificant-ho amb els resultats obtinguts, que el conjunt d'activitats que formen la plataforma MATH indueix la matematització en un entorn contextualitzat, en qual els alumnes visualitzen i manipulen les situacions que se'ls plantegen, assoleixen un alt rendiment en la matematització horitzontal, estan més motivats i tenen més autoconsciència del seu aprenentatge que en un plantejament tradicional.

Però és necessari aclarir que fins i tot aquells alumnes que obtenen resultats alts en els tres tipus de matematització (MHG, MHE i MV), i que per tant han anat més enllà de les situacions concretes per assolir la generalització, no han arribat sols a la formalització dels continguts. És més: raonablement no podem esperar que hi arribin sols, ni amb la plataforma ni sense ella. Una cosa és obtenir generalitzacions a partir d'activitats i una altra cosa molt diferent és adquirir el coneixement organitzat i formal de la unitat didàctica. Això últim, els alumnes no ho poden fer sols. Els cal una intervenció docent externa que completi, organitzi, estructuri i, en definitiva, formalitzi (és a dir, que "doni forma").

Això ens porta a una crucial distinció entre matematització i formalització. És crucial en el nostre sistema didàctic perquè permet diferenciar entre el que passa primer gràcies a la plataforma MATH i el que passa després. En primer lloc es produeix una matematització no forçada, és a dir, que no és el professor qui proporciona, ja elaborats, els elements i les receptes que relacionen i organitzen, sinó que són els alumnes els que matematitzen pel seu propi esforç.

Matematització induïda (no forçada):
La plataforma MATH indueix la matematització de manera no forçada, amb resultats alts a la matematització horitzontal per a la gran majoria dels alumnes. La matematització vertical obté resultats globals més discrets, encara que una important minoria d'alumnes assoleixen resultats alts.

A partir d'uns coneixements que han adquirit anteriorment dins del sistema educatiu, els usen eines matemàtiques, raonen, proven i resolen. Aquest procés és induït per les activitats. No és forçat perquè el camí no està traçat per una força externa (el professor), com sí que succeeix en un plantejament tradicional, en el qual s'explica la teoria i alguns exemples, i a partir d'aquí l'alumne ha d'aplicar les receptes a la resolució d'exercicis i problemes.

Però des d'aquí fins a la construcció formal del conjunt de la unitat didàctica hi ha una distància que els alumnes no poden salvar sols.

Formalització forçada:
Ha de ser el professor qui, a partir del que han assolit els alumnes mitjançant la plataforma MATH, defineixi conceptes, descrigui propietats, estructuri continguts i, en definitiva, formalitzi la unitat didàctica.

Llavors, si és el professor qui finalment formalitza, ens podem preguntar quin és el sentit de la plataforma MATH. No és més senzill un mètode tradicional, en el qual es comença ja per una presentació formalitzada de la teoria? Quins avantatge reals té un plantejament que comença per activitats d'aplicació i deixa per després la formalització? La resposta ja ha anat apareixent en apartats anteriors, però ara la podrem presentar de manera compacta.
Havent arribat a aquest punt, recordem una de les raons que Niss (1989), autor citat al capítol 2, dóna per incloure la modelització al currículum. Nosaltres ho fem extensiu a la matematització, ja que per modelitzar cal matematitzar (tal com hem mostrat al capítol 2): "Pot evitar un aprenentatge incorrecte basat només en fórmules i processos estereotipats. Acostuma al treball amb problemes reals i potencia l'autonomia de l'estudiant". Afegim que la plataforma MATH és la que assumeix aquesta funció amb èxit. Amb la qual cosa, efectivament, els alumnes no es queden "només en fórmules i processos estereotipats" sinó que realitzen un treball autònom de matematització. De fet, si volem ser encara més precisos, primer matematitzen i després, amb el bagatge de la matematització, entren en contacte amb les "fórmules i processos estereotipats" a la fase forçada de formalització dels continguts.

En definitiva: considerem que existeixen una sèrie motius de pes pels quals concloem que un sistema que compti amb un subconjunt plataforma MATH és didàcticament avantatjós per als alumnes (en comparació amb un plantejament tradicional). Els podem resumir en cinc:

1. Motivació.
Els alumnes mostren una alta motivació a les activitats. En un plantejament tradicional, la motivació sol ser un problema.
La implicació i la motivació dels alumnes l'hem percebuda al llarg del procés d'implementació de les activitats, quan observàvem com treballaven amb el programari interactiu Geogebra durant tota l'hora que durava cada una de les sessions a l'aula TIC. Ens resultava evident que tots mostraven interès i estaven per la feina, cosa que no sempre succeeix en un plantejament didàctic tradicional (aquesta percepció la pot compartir qualsevol docent amb una mínima experiència a l'educació secundària). Però, és clar, no en tenim prou amb la nostra percepció subjectiva, per molt clara que sigui. Hem recollit i tabulat, amb valors numèrics (tal com hem explicat en aquest capítol), les valoracions dels alumnes sobre les activitats amb Geogebra, activitat per activitat i també en un qüestionari final de valoració.
En les respostes al qüestionari final de valoració del conjunt de les activitats amb Geogebra, les valoracions són altes i poc disperses. Les mitjanes grupals, en una escala de 0 a 1, indiquen que respecte d'un plantejament didàctic tradicional els alumnes han trobat les classes més amenes (0,83), més interessants (0,78) i que s'hi han trobat més implicats i motivats (0,67).

2.Implicació activa.
Els alumnes matematitzen, reflexionen i comprenen activament. En un plantejament tradicional, sovint es limiten a ser receptors passius: els casos d'alumnes actius i participatius solen ser minoritaris.
En el capítol 4 hem relatat que els alumnes, per pròpia iniciativa a partir dels enunciats de les activitats amb Geogebra, han representat les situacions i han provat diverses estratègies de resolució. Alguns han realitzat diversos intents fins que han trobat una estratègia que han considerat satisfactòria i altres han trobat de seguida el camí, però tots s'han dedicat al treball que havien de fer. No hi ha hagut cap alumne apàtic ni ha calgut que el professor fes cap crida a l'ordre durant les sessions en què s'han desenvolupat les activitats amb Geogebra.
Les mitjanes calculades sobre tot el grup, activitat per activitat a partir de les respostes de valoració mostren que la percepció dels alumnes sobre la utilitat del programari interactiu Geogebra com a eina per matematitzar presenta, en una escala de 0 a 1, valoracions altes en els quatre aspectes preguntats: plantejar (0,68), avançar (0,65), trobar (0,73) i generalitzar (0,60). Destaca, de la comparació entre els quatre aspectes, que la valoració més alta correspon a trobar i la més baixa a generalitzar.
En les respostes al qüestionari final, és a dir, en les valoracions sobre el conjunt d'activitats, les valoracions dels alumnes són igualment altes i amb poca dispersió. Les mitjanes grupals, en una escala de 0 a 1, indiquen que respecte d'un plantejament didàctic tradicional els alumnes valoren que reflexionen més sobre el que fan (0,72), comprenen millor els continguts matemàtics (0,67) i estan més implicats i motivats (0,67).

3. Matematització assolida.
La gran majoria d'alumnes assoleix amb resultats alts la matematització horitzontal a les activitats d'aplicació, i una bona part la matematització vertical. En un plantejament tradicional, alguns alumnes (en condicions favorables, la majoria, però de vegades una minoria) aprenen a resoldre exercicis i problemes estandarditzats, però no hi ha cap garantia que realitzin un treball autònom de reflexió i comprensió.
Els resultats de la matematització els hem comentat extensament i amb profunditat en aquest capítol. Només cal rellegir-los per veure que avalen l'afirmació que la immensa majoria dels alumnes tenen resultats alts a la matematització horitzontal, i que més d'una tercera part els tenen alts en la matematització vertical.
També hem comentat en el punt anterior a aquest que els alumnes són subjectes actius del procés d'aprenentatge, que declaren estar implicats i motivats, i que comprenen millor els continguts matemàtics que en un plantejament tradicional.
En un plantejament tradicional, els alumnes són subjectes passius quan reben la instrucció matemàtica que els proporciona al professor. En una classe tradicional podem esperar que existeixin bones condicions d'ordre i atenció i que, per exemple, els alumnes prenguin apunts disciplinadament, però no tenim cap garantia que realitzin un treball autònom de reflexió sobre la informació rebuda i anotada.

4. Millor rendiment en contextualització.
La comparació realitzada entre els processos de resolució en una contextualització visual i manipulativa per una banda, i una situació convencional per una altra banda, assenyala que per a problemes o activitats molt semblants, el rendiment mesurat segons els resultats correctes obtinguts és clarament més alt en contextualització. En una resolució escrita convencional es produeixen uns fenòmens (mecànica cega i suspensió de judici) que interfereixen el procés de matematització i que provoquen una apreciable caiguda del rendiment.
En aquest capítol de conclusions, en paràgrafs anteriors, ens hem referit amb detall als rendiments en la matematització en activitats contextualitzades i hem mostrat com l'assoliment de la matematització horitzontal és alt per a la immensa majoria dels alumnes. Per altra banda, a l'estudi de casos per a alumnes representatius (també recollit en aquest capítol) hem observat que en situacions mot semblants, el rendiment per a la resolució en el context visual i interactiu del programari interactiu Geogebra és major que el rendiment per a la resolució convencional, en la qual no existeix tal contextualització visual i interactiva.

5. *Millor valoració per part dels alumnes que un plantejament tradicional.*
En cada activitat hem demanat als alumnes una valoració sobre si consideraven que usar Geogebra és més útil que treballar amb un plantejament didàctic tradicional. Activitat rere activitat, les valoracions han estat majoritàriament positives. La mitjana grupal, en una escala de 0 a 1, per a les respostes a la pregunta esmentada, en el conjunt de totes les activitats, és 0,67.
Per altra banda, les valoracions globals fetes pels alumnes en respostes obertes al final del procés ofereixen una contundent imatge positiva en què destaca la comparació en

termes favorables respecte d'un plantejament tradicional (hem presentat en aquest capítol les valoracions literals, la seva classificació i els comentaris associats).

Tant els alumnes que segueixen un plantejament tradicional com els alumnes que treballen en una plataforma MATH, han d'arribar a una formalització dels continguts, que és un mecanisme forçat en el sentit que els ve donat mitjançant la intervenció del professor. Del total d'alumnes, alguns aconseguiran una preparació que els permeti superar una prova escrita de caire convencional: exercicis i problemes estandarditzats, gairebé idèntics als treballats sota el guiatge del professor o variants no molts distintes. Però afirmem que tots els alumnes que treballen en una plataforma MATH compten amb un avantatge important: han realitzat un treball de matematització (amb un alt assoliment de la matematització horitzontal la majoria d'ells) en condicions d'implicació activa i alta motivació.
Aquells alumnes que també hagin realitzat una bona preparació per superar una prova convencional comptaran, doncs, amb dos assoliments:

- La certificació de certs coneixements matemàtics segons un criteri tradicional (la que dóna el fet d'haver superat una prova escrita).
- L'augment de la competència matemàtica pel fet d'haver treballat en un entorn de matematització, sota condicions d'implicació activa.

5.5.3. El sistema MATHFORM

A partir del que hem expressat en els apartats anteriors, sintetitzem: el sistema didàctic que hem implementat parteix d'una plataforma MATH a partir de la qual abordem la formalització final dels continguts matemàtics.
En atenció a això anterior, etiquetem el nostre sistema com a *sistema MATHFORM*. La justificació per anomenar-lo així és aquesta: *MATH* per la plataforma, i *FORM* per la formalització. Aquesta denominació té, a més, i segons el nostre parer, interessants ressonàncies semàntiques si la llegim en llengua anglesa. Com hem esmentat en un apartat anterior, en anglès, "math" és una manera abreujada d'escriure "mathematics", és a dir, matemàtiques. "Form" significa forma. Això ens dóna "forma matemàtica". També ho podem entendre, i això encara ens agrada més, com la contracció i addició de "MATHematization" i "FORMalization", és a dir, matematització i formalització o, també, formalització de la matematització. De fet, el que en essència es produeix en el nostre sistema didàctic és una formalització a partir d'una prèvia matematització. Ho formulem així:

Un sistema MATHFORM és aquell que parteix d'una plataforma MATH per arribar després a la formalització dels continguts matemàtics.

La figura que acompanya aquest text (a la pàgina següent) és una representació visual del sistema MATHFORM, en la seva dimensió de trànsit des de la matematització induïda fins a la formalització forçada . S'hi pot veure el procés, representat en vertical

ascendent, des de la matematització horitzontal corresponent a la plataforma MATH, fins a la formalització dels continguts.
Hi observem la diferenciació entre matematització i formalització, i entre els processos induïts i els processos forçats (aquests dos tipus de diferenciació ja els hem comentat anteriorment). Com que, segons els resultats que hem obtingut a la fase experimental, la matematització horitzontal (tant MHG com MHE) és assolida amb resultats alts per la gran majoria dels alumnes de manera induïda, però no succeeix el mateix amb la matematització vertical, hem representat el nivell de la MV amb dos colors, per indicar que una part important, però no majoritària, dels alumnes assoleixen resultats alts a la MV de manera no forçada. Per altra banda, a la mateixa figura hi observem també que a la MH i la MV, el nivell corresponent està representat per una superfície sense una forma regular, mentre que el nivell final de la formalització el simbolitzem mitjançant un hexàgon regular; això indica el trànsit que s'ha produït des d'uns nivells de treballs previs a l'estructuració formal dels continguts matemàtics, fins a aquesta estructuració final.

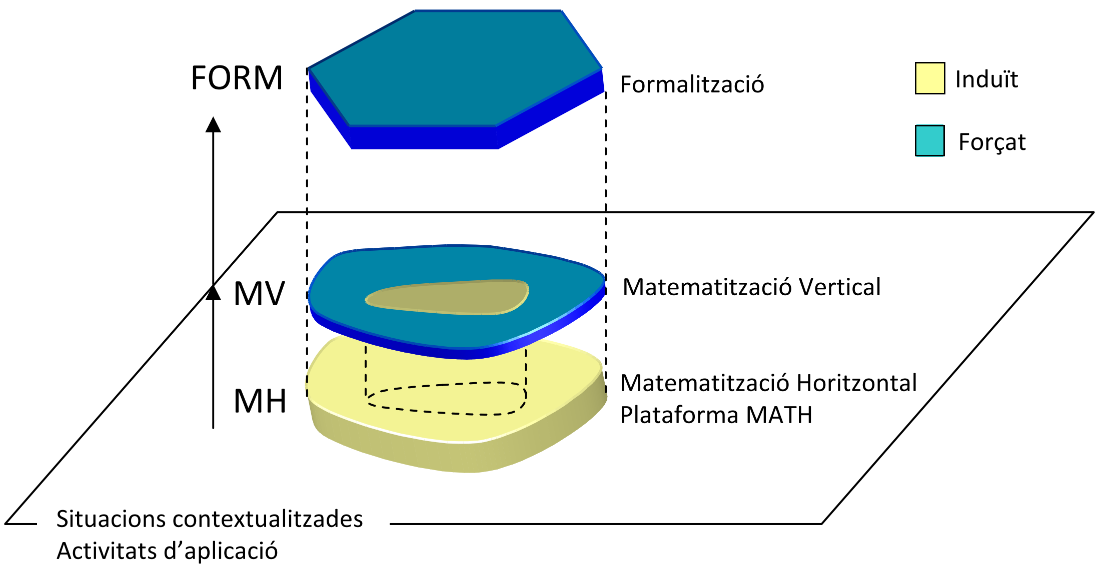


Figura 5.35. El sistema MATHFORM: de la matematització induïda a la formalització forçada

Ara bé: el nostre plantejament per a una unitat didàctica, abstret aquí en el que hem qualificat de "síntesi emergent" com a sistema MATHFORM, no s'ha limitat a un simple ascens, en una sola etapa, des de la plataforma de matematització fins a la formalització dels continguts. Resulta evident a partir de la lectura del capítol 3, que hem intercalat el treball amb activitats pròpies d'una plataforma de matematització, amb altres sessions de caire més convencional. Per tant, el trànsit d'allò induït fins a allò forçat no s'ha produït una sola vegada, és a dir, els alumnes no han treballat en una fase inicial només amb activitats pròpies d'una plataforma per passar a una fase final exclusivament dedicada a una formalització forçada, sinó que aquest moviment s'ha produït més d'una vegada dins de la unitat didàctica

Per tant, ens trobem davant d'una cadena de progressió dins la qual l'alumnat realitza activitats en una plataforma de matematització (amb el bagatge inicial d'uns coneixements previs bàsics) que indueixen l'aparició de conceptes matemàtics, objecte d'una posterior formalització forçada, a la qual segueix una exercitació convencional (exercicis i problemes estàndard).

D'aquesta manera, podem completar la definició que hem donat abans per a un sistema MATHFORM:

Un sistema MATHFORM és aquell que parteix d'una plataforma MATH per arribar després a la formalització dels continguts matemàtics. Aquest procés es pot produir una sola vegada o diverses vegades consecutives.

El pas de la matematització induïda a la formalització forçada és el fet nuclear del sistema, però hi ha altres elements que considerem que convé destacar dins de la cadena d'ensenyament i aprenentatge, de manera que no quedin simplement implícits, sinó que apareguin explícitament. Alguns ja els hem apuntat abans: els alumnes accedeixen a la plataforma de matematització amb uns certs coneixements previs, i després de la fase de formalització forçada s'exerciten amb activitats convencionals (exercicis i problemes); amb això completen l'adquisició d'uns coneixements que estan en disposició de funcionar com a nous coneixements previs per abordar una altra possible plataforma de matematització (també és possible que per a una plataforma de matematització que en segueixi una altra dins de la mateixa unitat didàctica no calguin els coneixements formalitzats en la primera, sinó que parteixi d'uns coneixements previs independents).

La cadena resultant es pot visualitzar mitjançant la figura següent:

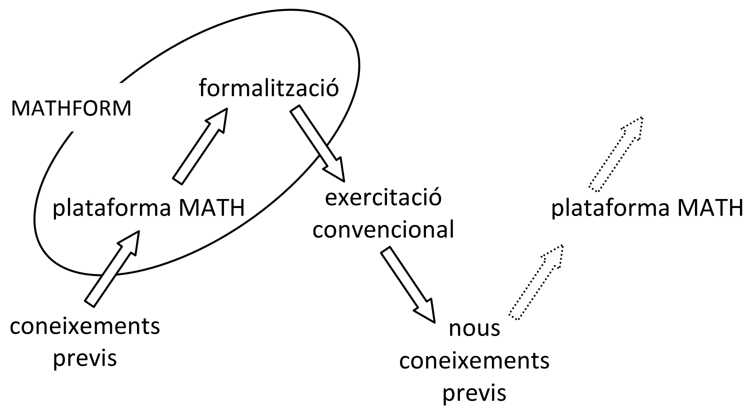


Figura 5.36. Cadena MATHFORM

Com hem apuntat abans, en el procés d'implementació del nostre plantejament didàctic hem intercalat les sessions dedicades a les activitats pròpies d'una plataforma de matematització amb altres sessions de caire més convencional. Al capítol 3 hem presentat la seqüència de les activitats, sessió per sessió, conforme a la nostra planificació operativa. Hem portat rigorosament a la pràctica aquesta planificació.
Només cal que resseguim la seqüència de sessions per obtenir un exemple de sistema MATHFORM.

Els alumnes han iniciat la unitat didàctica de geometria analítica realitzant, seguides, les quatre primeres activitats contextualitzades en l'entorn del programari interactiu Geogebra. Aquestes quatre primeres activitats constitueixen, de fet, una plataforma de matematització que ha induït la matematització en els alumnes, els quals han anat convergint sobre una estratègia, l'equació vectorial vectorial de la recta, tot i que quan ho han fet, el professor encara no ha definit aquesta equació, ni cap altra.
En el capítol 4 hem relatat quina és, en essència, l'estratègia sobre la qual els alumnes convergeixen: generar un punt alineat amb uns altres dos punts donats *A* i *B* sumant a un d'aquests punts donats, *A* o *B*, el vector *AB* (o *BA*) multiplicat per un nombre. Però el que ara ens interessa no és repetir el relat, sinó subratllar que tots els alumnes que han realitzat l'activitat 4 han resolt correctament utilitzant l'estratègia tipus "equació vectorial" sense que el professor els hagi parlat encara de les equacions de la recta.
La plataforma de matematització formada per les quatre primeres activitats amb Geogebra ha portat, doncs, els alumnes fins a l'equació vectorial de la recta. A partir d'aquí, el professor els ha dit que l'estratègia que han utilitzat per general els punts d'una recta s'anomena "equació vectorial". És a dir, que el professor ha formalitzat uns continguts que de fet ja havien emergit durant la matematització induïda per les activitats amb Geogebra. Llavors, ha subministrat les altres formes de l'equació de la recta, derivant-les unes de les altres consecutivament: de la vectorial ha tret les paramètriques, de les paramètriques la contínua, de la contínua la implícita i de la implícita l'explícita.
A continuació, a l'activitat 5 amb Geogebra, el procés ha tornat novament a una plataforma de matematització. Els alumnes han representat la situació que correspon al càlcul del treball que realitza una força que desplaça una massa al llarg d'una trajectòria rectilínia (per tant, hem utilitzat un exemple de la física per induir la matematització). Dels 17 alumnes presents, tots han representat correctament amb Geogebra l'angle que formen els vectors força i desplaçament, que és imprescindible per al càlcul del treball, i 13 d'aquests alumnes han escrit correctament la fórmula que permet calcular el treball com a producte del mòdul del vector força pel mòdul del vector desplaçament i pel cosinus de l'angle que formen. Aquests alumnes, sense saber-ho, han calculat el producte escalar de dos vectors.
La seqüència ha seguit amb una nova fase de formalització subministrada pel professor. El professor ha explicat als alumnes que el treball que han calculat per a una força constant que desplaça una massa al llarg d'una trajectòria rectilínia és el producte escalar de dos vectors. I ha definit el producte escalar amb una expressió que ja és familiar per als alumnes gràcies a l'activitat 5 amb Geogebra. Tot seguit, ha introduït el producte escalar de dos vectors expressats en components i, mitjançant la

fórmula coneguda del producte escalar com a producte de mòduls pel cosinus de l'angle, més una mica d'àlgebra, ha arribat a l'expressió del producte escalar com a $u{\cdot}v=u_1v_1+u_2v_2$. I d'aquí, a la fórmula per al càlcul de l'angle entre dos vectors, i a la utilització del producte escalar per determinar si dos vectors són perpendiculars.

Fins aquí, hem mostrat que en la nostra seqüència didàctica hem desenvolupat un sistema MATHFORM amb dos cicles: plataforma-formalització i novament plataforma-formalització. Recordem la definició: "Un sistema MATHFORM és aquell que parteix d'una plataforma MATH per arribar després a la formalització dels continguts matemàtics. Aquest procés es pot produir una sola vegada o diverses vegades consecutives".
Pel que fa a les activitats 6, 7 i 8 amb Geogebra, no formen part d'una plataforma que pretengui fer emergir nous conceptes, sinó que estan pensades per matematitzar utilitzant conceptes ja treballats anteriorment. De tota manera són, igualment que les altres, activitats contextualitzades en l'entorn interactiu de Geogebra, mitjançant les quals els alumnes matematitzen (amb un alt assoliment de la matematització horitzontal, tal com hem mostrat en l'anàlisi de la matematització efectuada en aquest mateix capítol 5).

6. Conclusions

Dediquem aquest capítol a presentar les conclusions del nostre treball. Hi mostrem que la nostra hipòtesi de partida ha estat validada i els objectius operatius complerts. Exposem de quina manera el nostre plantejament "de baix a dalt" ha induït la matematització a través d'activitats contextualitzades en l'entorn del programari interactiu Geogebra (inducció a partir de la qual abordem la formalització final dels continguts), i de quina manera ha aconseguit la implicació dels alumnes en el seu procés d'aprenentatge i una bona motivació a l'aula.
Els resultats i les interpretacions, extrets de l'anàlisi de la matematització dels alumnes i de l'anàlisi de les seves valoracions subjectives, ens permeten presentar els motius pels quals afirmem que el nostre plantejament "de baix a dalt", implementat en condicions reals (en un centre de secundària i en un grup d'alumnes de primer curs de Batxillerat) resulta avantatjós en comparació amb una metodologia tradicional.
Realitzem també una sèrie de consideracions sobre la naturalesa del nostre plantejament innovador i sobre les seves implicacions i perspectives. Aquestes consideracions finals són un complement, de caire més personal, a les nostres aportacions científiques.

6.1. Validació de la hipòtesi

Recordem la nostra hipòtesi de treball, formulada al capítol 1:

Un enfocament de matematització "de baix a dalt" permet dissenyar i implementar activitats d'ensenyament i aprenentatge de la geometria analítica de primer de Batxillerat.

Subratllem el que ja hem expressat al capítol introductori d'aquest treball: plantejament "de baix a dalt" significa que, a diferència de la metodologia tradicional, no comença per la presentació formal i perfectament estructurada dels continguts per passar a continuació als exercicis d'aplicació, sinó que la formalització arriba només després que la matematització induïda en activitats contextualitzades hagi preparat el terreny per a la fixació formal dels continguts.

Al capítol 3 (disseny) i als capítols 4 i 5 (implementació) hem desenvolupat el treball que ens permet afirmar que la nostra hipòtesi de treball ha estat validada. Efectivament, hem desenvolupat i portat a la pràctica tots els objectius que ens han permès convertir en operatiu el nostre plantejament.

Pel que fa a l'objectiu 1:

Hem dissenyat i implementat (a l'aula) activitats d'ensenyament i aprenentatge de la geometria analítica de primer de Batxillerat amb un enfocament "de baix a dalt" (per tant, hem complert l'objectiu 1 formulat al primer capítol). Més en concret:

- Hem creat un entorn d'aprenentatge en el qual, a partir d'activitats que plantegen situacions contextualitzades en el programari interactiu Geogebra, hem induït la matematització dels alumnes de primer de Batxillerat, ja que aquests alumnes han representat, visualitzat i manipulat interactivament, mitjançant Geogebra, les situacions que els hem plantejat, i les han resoltes amb un alt grau d'èxit. Subratllem que aquesta matematització dels alumnes en les activitats de geometria analítica amb Geogebra no ha estat dirigida ni proporcionada des d'agents externs, és a dir, que no ha estat forçada, sinó induïda. Els alumnes, en cada activitat, han llegit els breus enunciats de cada situació i han començat a resoldre amb Geogebra sense cap direcció externa durant el procés de resolució.
- Després de la matematització induïda per les activitats amb Geogebra, sobre la base dels conceptes que han sorgit en la fase d'inducció, hem proporcionat als alumnes una formalització dels continguts matemàtics. D'aquesta manera, hem completat la implementació del nostre plantejament "de baix a dalt". Hem seguit estrictament la planificació operativa de la seqüència de sessions que hem mostrat al capítol 3. En aquesta seqüència, hem combinat les sessions dedicades a la matematització induïda en l'entorn interactiu del programari Geogebra, a l'aula TIC, amb sessions de caire més convencional a l'aula ordinària, en les quals hem proporcionat la formalització dels continguts.
- Hem integrat totalment (no superposat) la implementació de les activitats dins del currículum i de la programació didàctica de matemàtiques de primer de Batxillerat de l'IES on hem portat a la pràctica el nostre plantejament didàctic. Les activitats amb Geogebra són part constituent i inseparable de la planificació operativa, i per tant també de l'execució, del nostre plantejament.

Pel que fa als objectius 2 i 3, hem procedit a l'anàlisi de la informació obtinguda:

Hem analitzat, en la seqüència d'implementació de les activitats dissenyades, el desenvolupament de la matematització (horitzontal i vertical) per part dels alumnes (per tant, hem complert l'objectiu 2 formulat al capítol 1).
Hem presentat extensament aquesta anàlisi en el capítol 4 i sobretot en el capítol 5. Tal com hem indicat amb èmfasi des del capítol 1, l'anàlisi de la matematització dels alumnes en les activitats amb Geogebra ocupa una posició central en el nostre treball. Hem completat la nostra anàlisi de la matematització de tots els alumnes en totes les activitats amb un estudi de quatre casos (quatre alumnes representatius) que ens ha permès aprofundir en aspectes qualitatius.

Hem analitzat, en la seqüència d'implementació de les activitats dissenyades, les valoracions subjectives dels alumnes sobre l'entorn d'aprenentatge (per tant, hem complert l'objectiu 3; hem presentat extensament aquesta anàlisi al capítol 5).

Dins d'aquesta anàlisi, hem prestat atenció a la percepció i la valoració que tenen els alumnes sobre el procés de matematització (plantejar, avançar, trobar, generalitzar) i també sobre la seva implicació i la seva motivació.

L'anàlisi i la interpretació dels resultats obtinguts durant el procés d'implementació del nostre plantejament ens han permès arribar a una sèrie de conclusions que presentem en els apartats que segueixen. Aquestes conclusions les acompanyem d'un resum de les proves i les argumentacions que ens permeten formular-les. De fet, no exposem res de nou que no hagi estat exposat, analitzat i interpretat al llarg dels capítols 4 i 5 (especialment al capítol 5). En tot cas, ho presentem en un format compacte, tal com correspon fer-ho en aquest capítol final de conclusions.

6.2. Conclusions referents a la matematització, les percepcions subjectives dels alumnes i l'avaluació

Hem comentat al capítol 2, dedicat al marc teòric, que Van den Heuvel-Panhuizen (2000) explica com Treffers, entre 1978 i 1987, va distingir explícitament dos tipus de matematització en el context educatiu: la matematització horitzontal (MH; els estudiants utilitzen eines matemàtiques que els ajuden a organitzar i resoldre un problema en un context) i la matematització vertical (MV; implica moure's en el món dels símbols, amb abstracció i generalització).

En la nostra investigació hem cregut convenient diferenciar dos tipus de matematització horitzontal: la matematització horitzontal amb el programari Geogebra (MHG; que en un sentit més ampli es pot entendre també com la matematització horitzontal amb eines TIC) i la matematització horitzontal per escrit (MHE; quan els alumnes han d'expressar els processos horitzontals per escrit, sobre un paper). Aquesta distinció parteix d'una observació basada en l'experiència de la pràctica docent, que reflecteixen Chamoso i Rawson (2001), tal com hem recollit al capítol 2: "Els estudiants normalment no escriuen gaire i el que escriuen no sol expressar del tot el que han pensat". Podem concretar més això, afirmant que els alumnes solen demostrar una major facilitat per manejar eines TIC que per anotar per escrit com organitzen una situació i quines eines matemàtiques utilitzen, encara que es tracti simplement d'anotar una expressió algebraica senzilla.

Tornarem sobre aquest aspecte (la relació entre la matematització amb Geogebra i com els alumnes la reflecteixen per escrit) més endavant. El que ara ens interessa assenyalar és que els resultats experimentals (analitzats i interpretats amb detall al capítol 5) han mostrat no tan sols l'encert de la distinció entre MHG i MHE, sinó que també permeten, clarament, establir relacions rellevants entre els tres tipus de matematització considerats (MHG, MHE i MV). Dit d'una altra manera: l'anàlisi dels resultats mostra que els graus d'assoliment dels alumnes en els tres tipus de matematització són distingibles i que responen a un ordre.

Remarquem que, quan ens referim a graus d'assoliment dels tres tipus de matematització, estem utilitzant els resultats (i la seva interpretació) sorgits de l'anàlisi que hem desplegat al capítol 5, a partir de les taules on comptabilitzem la

matematització de cada alumne en cada activitat amb Geogebra. Hem sotmès les dades d'aquestes taules a un tractament quantitatiu per obtenir una mesura de l'assoliment de cada tipus de matematització, en una escala de 0 a 1, tant per al conjunt del grup d'alumnes com per a cada una de les categories en què els hem classificat.
Si considerem els resultats obtinguts pels alumnes en la MHG (matematització mitjançant l'ús del programari interactiu Geogebra, és a dir, resolució que es reflecteix en fitxers de Geogebra) observem que mostren per al conjunt del grup i també en les diferents categories en què ham classificat els estudiants, un grau d'assoliment distingible del grau d'assoliment de la MHE (expressió escrita sobre el paper de la matematització horitzontal). I, per altra banda, l'assoliment de la MV (generalització a partir de situacions concretes) presenta uns resultats clarament distingibles dels altres dos tipus de matematització que hem considerat. Si la nostra distinció prèvia dels tres tipus de matematització no respongués a una realitat mesurable, no hauríem trobat diferències rellevants entre els graus d'assoliment de cada una d'elles, ni un ordre en les diferents intensitats d'aquests assoliments.
Però, concretem el perquè d'aquestes afirmacions anteriors sobre la distinció entre els tres tipus de matematització. Ho fem resumint l'anàlisi que hem desplegat al capítol 5 per als tres tipus de matematització:

Els tres tipus de matematització són acumulatius i progressius: primer la MHG, després la MHE i finalment la MV.

- Els alumnes que obtenen resultats alts a la MV també els tenen alts a la MHE i la MHG (entenem per resultat "alt" un assoliment igual o superior a 2/3 en una escala de 0 a 1, en el conjunt de les activitats realitzades amb Geogebra).
- Els alumnes que no tenen resultats alts a la MV però sí a la MHE, els tenen alts a la MHG.
- Els alumnes que no tenen resultats alts ni a la MV ni a la MHE, els poden tenir alts a la MHG.
- Els alumnes que no tenen resultats alts a la MHG, tampoc els tenen alts ni a la MHE ni a la MV.

Les matematitzacions són com un edifici amb planta baixa i tres pisos. La planta baixa correspon al nivell en què l'alumne no obté resultats alts en cap tipus de matematització. La primera planta correspon al nivell dels resultats alts a la MHG. La segona planta correspon a resultats alts a la MHE. La tercera planta correspon a resultats alts a la MV. Per arribar a un determinat nivell, l'alumne ha d'haver passat pels nivells inferiors.

Relacionat amb això anterior, tenim que:

Els resultats grupals (comptant les dades de tots els alumnes en cada tipus de matematització) són decreixents en aquest ordre: MHG, MHE, MV.

I afegim:

- La immensa majoria dels alumnes obté resultats alts a la MHG (en els resultats analitzats, pràcticament 9 de cada 10).
- Una àmplia majoria dels alumnes obté resultats alts a la MHE (pràcticament les tres quartes parts de l'alumnat segons els resultats analitzats).
- Una minoria d'alumnes obté resultats alts a la MV (una mica més de la tercera part segons els resultats analitzats).
- Una petita minoria d'alumnes no obté resultats alts a cap tipus de matematització (aproximadament 1 de cada 10 segons els resultats analitzats).

Els resultats ens els diferents tipus de matematització ens han permès classificar els alumnes en quatre categories:

Categoria 1: matematitzadors complets.
Els alumnes que en formen part obtenen resultats alts en els tres tipus de matematització. Són alumnes que demostren una "mobilitat vertical cognoscitiva": poden contemplar les situacions en els seus aspectes matemàtics concrets i també poden elevar-se fins a la generalització. El "moviment" que realitzen és en primer lloc ascendent (d'allò concret a allò general), seguint el procés induït per les activitats. Amb un alt assoliment:

- Resolen mitjançant Geogebra les situacions concretes que plantegen les activitats.
- Expressen correctament per escrit els càlculs que els han conduït a les solucions.
- A partir de situacions concretes que han resolt, escriuen expressions algebraiques generals (fórmules vàlides no tan sols per als casos concrets que han treballat).

Categoria 2: matematitzadors horitzontals.
Hi pertanyen els alumnes que resolen amb Geogebra i ho expressen per escrit, però obtenen un assoliment molt més discret en la generalització. La seva "mobilitat cognoscitiva" és sobretot horitzontal. Es mouen amb comoditat dins de situacions concretes, però els costa el moviment vertical cap a les generalitzacions.

Categoria 3: matematitzadors tecnològics.
Són alumnes que resolen amb alt assoliment mitjançant Geogebra les situacions plantejades però presenten un rendiment significativament més baix a l'hora d'expressar per escrit, algebraicament, els resultats. I encara tenen majors dificultats per generalitzar. Es mouen amb comoditat en un entorn visual, manipulatiu i interactiu, però no són capaços de reflectir-ho amb igual desimboltura per escrit, algebraicament, sobre el paper.

Categoria 4: matematitzadors febles.
Es tracta d'una categoria on s'hi situen els alumnes que obtenen resultats baixos o discrets en tots els tipus de matematització. Ni tan sols en un entorn TIC visual, manipulatiu i interactiu matematitzen amb certa desimboltura.

A partir dels resultats dels alumnes en la matematització i de la seva classificació en categories, hem formulat el que hem anomenat *rendiments decreixents* (capítol 5) i que ara resumim. Hem utilitzat aquesta expressió per indicar que, com hem assenyalat unes quantes línies abans, el grau d'assoliment de resultats correctes (expressat en una escala de 0 a 1 tal com hem mostrat al capítol 5) en la resolució de les activitats de matematització contextualitzades en l'entorn del programari interactiu Geogebra presenta un ordre decreixent, de major a menor: MHG, MHE i MV. Aquest ordre es manté no tan sols per als resultats mitjans de tot el grup d'alumnes, sinó que apareix clarament també en els resultats de les diferents categories de matematització, excepte per als matematitzadors febles (2 alumnes sobre 19) que presenten resultats baixos i molt similars en els tres tipus de matematització.
Si considerem la resolució de les vuit activitats amb Geogebra que constitueixen un element absolutament central en la implementació del nostre enfocament didàctic, i ho fem només des del punt de vista de considerar si els alumnes han resolt correctament amb Geogebra, és a dir, si han construït un fitxer que doni resposta concreta a la situació plantejada, trobem un molt alt grau d'assoliment per a la immensa majoria dels alumnes (17 de 19; els alumnes que formen les categories de matematització 1, 2 i 3), igual o superior al 88%. Per tant, quan els alumnes treballen en l'entorn interactiu Geogebra i resolen les activitats amb el ratolí i el teclat, visualitzant i manipulant elements geomètrics que apareixen a la pantalla, els seus resultats són molt alts.
Però quan han de reflectir per escrit aspectes de la resolució que han estat treballant amb Geogebra, l'assoliment de resultats correctes cau 7 punts percentuals per a les categories 1 i 2 d'alumnes, i 18 punts percentuals per a la categoria 3 (la categoria 4 presenta resultats baixos i molt semblants en els tres tipus de matematització).
I quan aquests alumnes han de formular una generalització a partir de les situacions concretes que plantegen les activitats, l'èxit en aconseguir-ho cau, respecte dels resultats de la resolució amb ratolí, teclat i pantalla, 13 punts percentuals per a la categoria 1, 32 punts per a la categoria 2, i 39 punts per a la categoria 3.
Els alumnes saben resoldre les situacions que plantegen les activitats? Si ens basem en la resolució amb Geogebra, hem de respondre que sí, donat l'alt grau d'èxit que molt majoritàriament assoleixen. Matematitzen? Sens dubte que sí: els alumnes transfereixen situacions presentades en context cap a un problema matemàtic; visualitzen i manipulen interactivament aquestes situacions. Com matematitzen? La resposta a aquesta pregunta ja l'hem donada en gran part abans, quan hem presentat els graus d'assoliment dels tres tipus de matematització, MHG, MHE i MV, tot i que queden encara alguns aspectes rellevants de l'anàlisi i la interpretació de la matematització que encara ens ocuparan unes quantes línies més.
El fet que els resultats en la MHE (expressió per escrit de la matematització horitzontal) i en la MV (generalització a partir de resolucions per a casos concrets)

siguin menors que per a la MHG (matematització amb Geogebra), no significa que els alumnes no *sàpiguen resoldre*. De fet, el grau d'èxit de la gran majoria dels alumnes (17 dels 19 totals) a l'hora de resoldre les activitats mitjançant l'ús de Geogebra és molt alt. Significa, en primer lloc, que l'expressió escrita, algebraica, els resulta més difícil que la manipulació visual i interactiva dels elements geomètrics mitjançant el ratolí, el teclat i la pantalla. I, en segon lloc, que la generalització a partir de les resolucions concretes encara els resulta més difícil. Això ens porta a afirmar que:

En activitats de matematització induïda (no forçada) sobre situacions contextualitzades on, per resoldre, hi intervenen la visualització geomètrica, la manipulació en l'entorn TIC del programari interactiu Geogebra, i l'àlgebra, els rendiments dels alumnes matematitzadors (no febles) són decreixents en aquests aspectes i en aquest ordre:

- *Manipulació visual-tecnològica: resolució de situacions concretes amb instruments TIC. En el nostre cas, Geogebra: els alumnes matematitzen en l'entorn del programari interactiu Geogebra, on visualitzen a la pantalla les construccions geomètriques que realitzen i modifiquen a través del ratolí i el teclat.*
- *Anotació algebraica: expressió algebraica escrita de les resolucions concretes.*
- *Generalització mitjançant expressions algebraiques, a partir de la resolució de situacions concretes.*

En l'actuació dels alumnes no hi ha una traducció automàtica entre matematització amb el programari interactiu Geogebra i l'escriptura algebraica sobre el paper, sinó que existeix una caiguda del rendiment, una bretxa (al capítol 5 hem formulat i explicat aquesta expressió, "bretxa", que ara tornem a presentar resumidament):

Per als alumnes, la traducció algebraica, per escrit, de la matematització realitzada amb mitjans tecnològics manipulatius i visuals, no és un simple automatisme. En aquest pas, existeix una bretxa. Per a la majoria dels alumnes, aquest bretxa és lleu, però per a uns quants és més profunda.

Quan escrivim bretxa "lleu", ens referim a la caiguda del rendiment de 7 punts percentuals entre la MHG i la MHE en les categories 1 i 2 (matematitzadors complets i matematitzadors horitzontals que reuneixen 14 alumnes dels 19 totals), i quan escrivim bretxa "més profunda" ens referim a la caiguda de 18 punts percentuals entre els mateixos tipus de matematització per a la categoria 3 (matematitzadors tecnològics; 3 alumnes dels 19 totals).

De fet, la història de la geometria analítica (que hem tractat amb abundància de detalls al capítol 2) ens indica que en primer lloc apareixen els enfocaments pràctics, visuals i "manipulatius" dels problemes geomètrics, i que es produeix una posterior evolució cap a una formalització teòrica que, no obstant la seva elevada abstracció, segueix essent molt visual (la geometria clàssica). No és fins molt més tard que l'àlgebra s'incorpora a la geometria, i ho fa amb l'única justificació que és útil per resoldre problemes concrets. Finalment, ja en una època molt moderna en termes històrics (el

segle XIX) es desenvolupa un aparell algebraic, abstracte i formalitzat, que permet resoldre problemes “geomètrics” sense necessitat, curiosament, de traçar (visualitzar) elements geomètrics. Ja ho hem expressat al capítol 5 i ho subratllem ara: aquesta evolució no es pot entendre sense considerar que al darrere hi ha raons epistemològiques. El primer pas evolutiu (l’enfocament utilitari visual i manipulatiu) parteix dels elements visuals, i no dels simbolismes algebraics, perquè els elements visuals i la seva manipulació són bàsics en el procés de l’aprehensió humana (en el sentit que atorga el diccionari al verb aprehendre: copsar mentalment; conèixer simplement i immediatament un objecte, una situació o un comportament), mentre que els simbolismes algebraics són un producte més elaborat (i per tant més tardà) del coneixement humà.
Chamoso i Rawson (2001) afirmen que “Els estudiants normalment no escriuen gaire i el que escriuen no sol expressar del tot el que han pensat”. El que nosaltres hem observat és que als alumnes, quan matematitzen, els costa més expressar les solucions per escrit que trobar-les amb el programari interactiu Geogebra operant amb el ratolí i el teclat. Podria semblar que no hauria de passar tal cosa, ja que, aparentment, l’expressió escrita de les solucions és una simple i mecànica “traducció” algebraica, enregistrada sobre un paper, del que ja s’ha realitzat mitjançant les eines TIC. No obstant això, aquesta dificultat existeix. És lleu (però detectable) per a una majoria d’alumnes: els matematitzadors complets i els matematitzadors horitzontals. I és acusada per a uns quants: els matematitzadors tecnològics.

Pel que fa a l’expressió escrita no tan sols de resultats concrets, sinó de resultats generals, és a dir, pel que fa al grau d’assoliment que obtenen els alumnes en la generalització a partir de les situacions concretes que els plantegem, observem (a partir de l’anàlisi dels resultats) que en l’entorn d’aprenentatge que hem dissenyat els resultats alts (per sobre del valor 2/3 en una escala de 0 a 1) en l’assoliment de la generalització apareixen en 7 alumnes dels 19 totals (els que formen la categoria dels matematitzadors complets). Recordem el que afirma Peralta (1995), quan esmenta la seva objecció número 3 al mètode d’ensenyament heurístic: “No transcendència dels conceptes: es procura partir de problemes de la vida real, però això no garanteix que les conclusions se sàpiguen generalitzar de manera que siguin aplicables a altres situacions no idèntiques” (cita que apareix per primera vegada en aquest treball al capítol 2). Els resultats que hem obtingut de la matematització dels alumnes corroboren l’afirmació de Peralta, en el sentit que els alumnes que obtenen resultats alts en la generalització no són ni tan sols majoria, encara que representen una fracció considerable del total (més d’una tercera part del grup).

En paràgrafs anteriors d’aquest apartat hem mostrat que les activitats contextualitzades que hem dissenyat i implementat, en l’entorn interactiu Geogebra, han induït la matematització dels alumnes. També hem tractat l’assoliment dels tres tipus de matematització que hem distingit, la classificació dels alumnes en quatre categories segons els seus resultats en la matematització, i el que hem anomenat “rendiments decreixents”. Ara incidim sobre un aspecte també referent a la matematització, el qual ja hem tractat al final del capítol 4 i que incorporem a aquest capítol de conclusions: *La seqüència de les sessions del procés d'implementació ha induït una convergència de les estratègies de resolució dels alumnes.*

Amb una expressió més breu, anomenem aquest fenomen *convergència induïda per la seqüència didàctica*. Recordem que al llarg del capítol 4 hem descrit i comentat les estratègies de resolució usades pels diferents alumnes en cada activitat amb Geogebra. Al principi, en la primera activitat, hem detectat una notable diversitat d'estratègies. A mesura que els alumnes anaven realitzant les activitats següents, aquesta diversitat es reduïa i al final dominava absolutament una sola estratègia. Hem demanat als alumnes que expliquin quines estratègies han utilitzat, i per què, en la resolució del bloc d'activitats 1-4, i han contestat que els semblava la millor entre vàries que han triat, o bé que n'han tingut una percepció tan clara que han decidit adoptar-la (capítol 4).

Per tant, no tan sols es produeix una matematització induïda, sinó que també hi observem una determinada orientació, que no és externa, sinó generada per les pròpies activitats i per la seva estructura seqüencial. Això és clar en la seqüència que formen les activitats 1-4. Alguns alumnes més aviat i altres més tard, alguns després de provar diverses opcions i altres perquè ho han vist clar, es decideixen per una estratègia que a partir d'aquí dominarà la manera com enfoquen les situacions. I resulta aquesta estratègia és la mateixa per als diferents alumnes.

De fet, tal com hem dissenyat les activitats (capítol 3) ja hem previst que les activitats 1-4 formessin un bloc que conduís els alumnes cap a l'equació vectorial de la recta mitjançant la matematització induïda. I efectivament succeeix això, perquè en aquest bloc els processos de resolució dels alumnes van convergint sobre una estratègia, que és, en essència, la de generar un punt alineat amb uns altres dos punts donats A i B utilitzant sumant a un d'aquests punts donats, A o B, el vector AB (o BA) multiplicat per un nombre. Per tant, l'actuació real dels alumnes valida el nostre disseny perquè els alumnes arriben allà on pretenem, i ho fan com a subjectes actius a través del seu procés de matematització, induïda per les activitats. En una metodologia tradicional, en canvi, el procediment hagués consistit en què el professor escrivís a la pissarra la forma general de l'equació vectorial de la recta i la il·lustrés amb algun exemple. En aquest cas els alumnes assumirien el rol de subjectes passius.

Dins de l'estudi de la matematització no tan sols hem utilitzat les dades provinents de la tabulació (numèrica) dels resultats del treball que realitzen els alumnes en cada una de les activitats, sinó que hem volgut aprofundir per una banda en aspectes qualitatius de les resolucions amb Geogebra i per una altra banda en aspectes també qualitatius de les resolucions convencionals per escrit. Hem realitzat, per a quatre alumnes representatius, un estudi de casos consistent en una anàlisi qualitativa detallada, pas per pas, de la resolució d'un dels problemes de la prova escrita corresponent a la unitat didàctica de geometria analítica i també de la resolució d'una activitat amb Geogebra que planteja una situació molt similar. Hem comparat les dues resolucions. Hem presentat amb detall al capítol 5 els resultats de l'anàlisi i les interpretacions que en fem.

Aquest estudi de casos ens ha revelat, en els processos de resolució que realitzen els alumnes estudiats, una sèrie de fenòmens que no apareixen quan el problema està altament contextualitzat (ens referim a la contextualització en l'entorn del programari interactiu Geogebra) però que afloren quan està desproveït d'una tal contextualització (ens referim a la resolució convencional per escrit). Però abans de presentar aquests fenòmens, considerem important recordar el que per a nosaltres significa la paraula contextualització, tal com hem argumentat i expressat al capítol 2, dedicat al marc teòric:

Considerem que visualitzar un problema i poder manipular els elements geomètrics és una manera de proporcionar sentit. És, per tant, en si mateixa, una manera de contextualitzar, és a dir, de facilitar proximitat i familiaritat. No tan sols podem proporcionar una contextualització pel sol fet de plantejar una situació on hi intervenen objectes reals o imaginaris que connecten amb l'experiència dels alumnes. Si el problema admet una representació geomètrica (no excessivament complicada), el sol fet de marcar punts i traçar línies (de visualitzar-lo) i de manipular aquests elements ja construeix un context.

A continuació resumim els fenòmens que afloren quan la contextualització és absent:

- Augment qualitativament molt important de les diferències entre les resolucions fetes pels alumnes de l'estudi de casos (en una prova convencional per escrit), que no es dóna en una situació contextualitzada pertanyent a una seqüència de matematització induïda (les activitats amb Geogebra). En les activitats amb Geogebra actua el que hem anomenat "convergència induïda per la seqüència didàctica", és a dir, que els diferents alumnes convergeixen sobre unes mateixes estratègies de resolució a mesura que les activitats es van implementant. En les resolucions amb Geogebra dels quatre alumnes per a l'activitat que hem analitzat en l'estudi de casos (activitat 7) advertim que efectivament les resolucions dels alumnes estudiats són quasi iguals. En canvi, en la prova convencional per escrit (problema 5 de la prova escrita) apareixen unes diferències entre les resolucions dels alumnes que contrasten amb la molt notable uniformitat que existeix en les resolucions dels mateixos alumnes mitjançant Geogebra per a una situació molt semblant.
- Mecàniques de resolució per escrit dels alumnes desconnectades de la representació gràfica del problema. Si en aquestes mecàniques els alumnes cometen errors que condueixen a resultats incorrectes, no solen ser capaços de detectar-los ni per una simple comprovació sobre una representació gràfica que ells mateixos han realitzat. Ens referim a aquests fenòmens amb les expressions *mecànica cega* i *suspensió de judici.* No es tracta que els alumnes no *sàpiguen què fer* (en el sentit que no estan desorientats; tenen idees prou clares sobre els passos fonamentals que han de seguir) sinó que perden les referències visuals i gràfiques i donen cegament per bo el resultat de la mecànica algebraica que segueixen. Això, per exemple, ho detectem amb claredat en tres dels quatre alumnes estudiats (Jesús, Erik i M. Carmen).
- Caiguda del rendiment en l'obtenció dels resultats correctes, causada per la mecànica cega i per la suspensió de judici, respecte de la resolució del mateix problema en una situació contextualitzada. És a dir, que en l'estudi de casos trobem que en situacions mot semblants, el rendiment de la resolució

mitjançant Geogebra (en el sentit de resoldre correctament) és major que el rendiment en la resolució convencional per escrit, fins i tot en el cas que la resolució amb Geogebra s'hagi realitzat abans que la resolució convencional per escrit (no en el mateix moment, sinó dies abans, tal com succeeix amb l'activitat 7 amb Geogebra i el problema 5 de la prova escrita que hem analitzat en l'estudi de casos). Per tant, la resolució contextualitzada en l'entorn del programari interactiu Geogebra és una poderosa aliada del rendiment en la matematització.

- Abans ja hem expressat que en un procés de resolució contextualitzat la traducció algebraica, per escrit, de la matematització realitzada amb mitjans tecnològics manipulatius i visuals, no és un simple automatisme (hem utilitzat la paraula *bretxa*). Afegim que en un procés de resolució convencional per escrit, existeix una bretxa que funciona en sentit contrari: quan els alumnes resolen algebraicament per escrit, fàcilment poden perdre de vista la referència gràfica. Ens referim a aquest fenomen amb l'expressió *bretxa bidireccional*.

Insistim en el fet que la resolució en l'entorn visual i interactiu del programari Geogebra (a través de teclat, ratolí i pantalla) per una banda, i l'expressió escrita (algebraica) de la resolució no presenten els mateixos graus d'assoliment. No es tracta que els alumnes no sàpiguen resoldre, perquè resolen bé amb Geogebra, sinó que tenen més dificultats en expressar per escrit allò que han realitzat mitjançant el programari interactiu.
Són alumnes que al llarg de l'etapa de l'Educació Secundària Obligatòria (ESO), la qual han superat, han utilitzat mètodes algebraics per resoldre problemes geomètrics. De fet, i ja ho hem comentat al capítol 2 dedicat al marc teòric, la geometria escolar està molt algebritzada. Els alumnes no estan habituats a resoldre problemes geomètrics amb regla i compàs, com feien els antics. A la matèria escolar de matemàtiques, és sistemàticament habitual resoldre els problemes geomètrics amb mètodes algebraics, és a dir, amb fórmules i equacions.
Aquests mateixos alumnes que a l'ESO han calculat la longitud d'un costat d'un triangle rectangle mitjançant el Teorema de Pitàgores o que han trobat el punt d'intersecció de dues restes a través de la resolució d'un sistema d'equacions, han experimentat com l'ús dels mètodes algebraics s'intensifica al primer curs de Batxillerat. La unitat didàctica de geometria analítica ha estat l'última del curs. Abans, els alumnes han treballat els blocs temàtics d'aritmètica i àlgebra, trigonometria, funcions, límits i derivades. Els mètodes algebraics han estat omnipresents. Però, malgrat aquesta omnipresència, en la resolució de les activitats de geometria analítica amb Geogebra hem trobat que el rendiment en l'expressió algebraica per escrit de la resolució de les activitats és menor que el rendiment mesurat directament sobre els fitxers de Geogebra.

La nostra interpretació sobre aquests fets relatats, i especialment sobre la diferència que hi ha entre la presència o absència de contextos visuals i interactius, és que en activitats dissenyades per induir (no per proporcionar externament, dirigir o forçar) la matematització en els alumnes, el rendiment és més alt en un entorn on resulta possible la visualització i la manipulació dels elements geomètrics que no en un entorn

on es demana que la resolució sigui estrictament convencional, és a dir, expressada per escrit mitjançant mètodes algebraics. Això succeeix per una raó semblant per la qual en la història de les matemàtiques apareixen primer els enfocaments visuals i manipulatius dels problemes geomètrics i no és fins molt més tard que es desenvolupen els mètodes algebraics aplicats a la geometria: perquè la visualització i la manipulació dels elements geomètrics és un camí molt natural per a l'aprehensió i la resolució dels problemes geomètrics, mentre que els mètodes algebraics són un producte més sofisticat, que sens dubte és potentíssim, però que no connecta de forma tan immediata amb els mecanismes mentals dels alumnes com sí que ho fa un enfocament contextualitzat en un entorn visual i interactiu.
Amb això anterior no pretenem, ni molt menys, expressar que els mètodes algebraics siguin inadequats per a les activitats d'ensenyament i aprenentatge a l'educació obligatòria o al Batxillerat. Aquests mètodes són molt potents i els alumnes de Batxillerat els han d'utilitzar si volen obtenir una formació matemàtica completa. El que concretament expressem és que si pretenem induir la matematització en els alumnes a través d'activitats per a la geometria analítica, on obtindran un rendiment més alt és en activitats contextualitzades en un entorn visual i interactiu. És a dir, que les activitats contextualitzades en un entorn visual i interactiu són les més adequades per induir la matematització. La resolució convencional per escrit mitjançant l'àlgebra pot aparèixer en aquesta fase induïda, però haurem d'esperar a una posterior fase de formalització (proporcionada pel professor) dels continguts sorgits en la fase d'inducció per desplegar tota la potència de l'àlgebra. L'èmfasi en els mètodes algebraics és adequat en la fase de formalització i considerem que necessita la direcció del professor.
Podem resumir encara més el que hem escrit el paràgraf anterior recuperant la distinció que hem realitzat al capítol 2 entre el mètodes d'ensenyament de les matemàtiques que s'anomenen constructivistes (procés personal de descobriment de l'alumne) i els que s'anomenen empiristes (coneixements directament subministrats pel professor). En un plantejament "de baix a dalt" per a la geometria analítica (com és el nostre) la fase d'inducció de la matematització té un enfocament constructivista i és adequat estructurar-la sobre activitats contextualitzades en un entorn visual i interactiu. La posterior fase de formalització té un enfocament empirista i és adequat estructurar-la sobre una metodologia tradicional amb èmfasi en els mètodes algebraics.
El conjunt de les dues fases que constitueixen el nostre plantejament "de baix a dalt" supera la dicotomia entre constructivisme i empirisme: en fa una síntesi.

Ara bé: per què considerem que és preferible un enfocament didàctic "de baix a dalt" a un enfocament tradicional? Existeixen una sèrie motius pels quals un plantejament (com és el nostre) "de baix a dalt" que es basa en activitats de matematització contextualitzades en un entorn visual interactiu resulta didàcticament avantatjós per als alumnes en comparació amb un plantejament tradicional. Ja els hem exposat i justificat al capítol 5 però donada la seva importància han de formar part també del capítol de conclusions. Són cinc:

1. Motivació.
Els alumnes mostren una alta motivació a les activitats. En un plantejament tradicional, la motivació sol ser un problema.
Al capítol 2, dedicat al marc teòric, es pot advertir com diversos autors fan referència al fet que utilitzar plantejaments didàctics contextualitzats, o que permetin que els alumnes matematitzin o modelitzin, augmenta la motivació dels alumnes. Per exemple, Niss (1989), afirma que: "Incloure la modelització en el currículum augmenta la motivació dels alumnes, que en matemàtiques és tradicionalment baixa en nombrosos casos individuals".
La implicació i la motivació dels alumnes l'hem percebuda al llarg del procés d'implementació de les activitats, quan els observàvem com treballaven amb el programari interactiu Geogebra durant tota l'hora que durava cada una de les sessions a l'aula TIC. Ens resultava evident que tots mostraven interès i estaven per la feina, cosa que no sempre succeeix en un plantejament didàctic tradicional (aquesta última observació la pot compartir qualsevol docent amb una mínima experiència a l'educació secundària). Però no en tenim prou amb la nostra percepció subjectiva, per molt clara que sigui. Necessitem evidències objectives mesurables. Hem recollit i tabulat, amb valors numèrics (tal com hem explicat als capítol 5), les valoracions dels alumnes sobre les activitats amb Geogebra, activitat per activitat i també en un qüestionari final de valoració.
En les respostes al qüestionari final de valoració del conjunt de les activitats amb Geogebra, les valoracions són altes i poc disperses. Les mitjanes grupals, en una escala de 0 a 1, indiquen que respecte d'un plantejament didàctic tradicional els alumnes han trobat les classes més amenes (0,83), més interessants (0,78) i que s'hi han trobat més implicats i motivats (0,67).

2.Implicació activa.
Els alumnes matematitzen, reflexionen i comprenen activament. En un plantejament tradicional, sovint es limiten a ser receptors passius: els casos d'alumnes actius i participatius solen ser minoritaris.
En el capítol 4 hem relatat que els alumnes, per pròpia iniciativa a partir dels enunciats de les activitats amb Geogebra, han representat les situacions i han provat diverses estratègies de resolució. Alguns han realitzat diversos intents fins que han trobat una estratègia que han considerat satisfactòria i altres han trobat de seguida el camí, però tots s'han dedicat al treball que havien de fer. No hi ha hagut cap alumne apàtic ni ha calgut que el professor fes cap crida a l'ordre durant les sessions en què s'han desenvolupat les activitats amb Geogebra.
Les mitjanes calculades sobre tot el grup, activitat per activitat a partir de les respostes de valoració (capítol 5) mostren que la percepció dels alumnes sobre la utilitat del programari interactiu Geogebra com a eina per matematitzar presenta, en una escala de 0 a 1, valoracions positives en els quatre aspectes preguntats: plantejar (0,68), avançar (0,65), trobar (0,73) i generalitzar (0,60). Destaca, de la comparació entre els quatre aspectes, que la valoració més alta correspon a trobar i la més baixa a generalitzar.

En les respostes al qüestionari final, és a dir, en les valoracions sobre el conjunt d'activitats, les valoracions dels alumnes són igualment positives i amb poca dispersió. Les mitjanes grupals, en una escala de 0 a 1, indiquen que respecte d'un plantejament didàctic tradicional els alumnes valoren que reflexionen més sobre el que fan (0,72), comprenen millor els continguts matemàtics (0,67) i estan més implicats i motivats (0,67).

3. Matematització assolida.

La gran majoria d'alumnes assoleix amb resultats alts la matematització horitzontal a les activitats d'aplicació, i una bona part la matematització vertical. En un plantejament tradicional, alguns alumnes (en condicions favorables, la majoria, però de vegades una minoria) aprenen a resoldre exercicis i problemes estandarditzats, però no hi ha cap garantia que realitzin un treball autònom de reflexió i comprensió.

Els resultats de la matematització els hem comentat extensament i amb profunditat al capítol 5, i també en aquest capítol de conclusions en paràgrafs anteriors. Només cal rellegir-los per veure que avalen l'afirmació que la immensa majoria dels alumnes tenen resultats alts a la matematització horitzontal, i que més d'una tercera part els tenen alts en la matematització vertical.

També hem comentat, en el punt anterior a aquest, que els alumnes són subjectes actius del procés d'aprenentatge, que declaren estar implicats i motivats, i que comprenen millor els continguts matemàtics que en un plantejament tradicional.

En un plantejament tradicional, els alumnes són subjectes passius quan reben la instrucció matemàtica que els proporciona el professor. En una classe tradicional podem esperar que existeixin bones condicions d'ordre i atenció i que, per exemple, els alumnes prenguin apunts disciplinadament, però no tenim cap garantia que realitzin un treball autònom de reflexió sobre la informació rebuda i anotada.

4. Millor rendiment en contextualització.

La comparació realitzada entre processos de resolució en una contextualització visual i manipulativa per una banda, i una situació convencional per una altra banda, assenyala que per a problemes o activitats molt semblants, el rendiment mesurat segons els resultats correctes obtinguts és clarament més alt en contextualització. En una resolució escrita convencional es produeixen uns fenòmens (mecànica cega i suspensió de judici) que interfereixen el procés de matematització i que provoquen una apreciable caiguda del rendiment.

Al capítol 5 i en aquest capítol de conclusions, en paràgrafs anteriors, ens hem referit amb detall als rendiments en la matematització en activitats contextualitzades i hem mostrat com l'assoliment de la matematització horitzontal és alt per a la immensa majoria dels alumnes. Per altra banda, a l'estudi de casos per a alumnes representatius (també relatat al capítol 5 i recollit en aquest capítol de conclusions en paràgrafs anteriors) hem observat que en situacions mot semblants, el rendiment per a la resolució en el context visual i interactiu del programari interactiu Geogebra és major que el rendiment per a la resolució convencional, en la qual no existeix tal contextualització visual i interactiva.

5. *Millor valoració per part dels alumnes que un plantejament tradicional.*
En cada activitat hem demanat als alumnes una valoració sobre si consideraven que usar Geogebra és més útil que treballar amb un plantejament didàctic tradicional. Activitat rere activitat, les valoracions han estat majoritàriament positives. La mitjana grupal, en una escala de 0 a 1, per a les respostes a la pregunta esmentada, en el conjunt de totes les activitats, és 0,67.
Per altra banda, les valoracions globals fetes pels alumnes en respostes obertes al final del procés ofereixen una contundent imatge positiva en què destaca la comparació en termes favorables respecte d'un plantejament tradicional (les valoracions literals, la seva classificació i els comentaris associats apareixen al capítol 5).

Després d'haver tractat la matematització i les valoracions subjectives dels alumnes, ens resta mostrar si existeix algun tipus de relació entre elles, és a dir, si la classificació dels alumnes segons com realitzen la matematització té un reflex (alguna correlació) en la classificació que puguem fer a partir de les seves valoracions subjectives.
El primer que destaquem és que les valoracions subjectives dels alumnes sobre l'ús de Geogebra com a eina per matematitzar són coherents amb els resultats objectius de la matematització, en el sentit que:

- L'aspecte subjectiu més ben valorat pels alumnes és la utilitat per trobar resultats, i el rendiment més alt en la matematització correspon a la matematització horitzontal amb Geogebra, que precisament mesura si amb l'ús de Geogebra els alumnes han obtingut allò que demanen les activitats.
- L'aspecte subjectiu menys ben valorat és la utilitat per generalitzar, i el rendiment més baix en la matematització correspon a la matematització vertical, que mesura si gràcies a l'ús de Geogebra els alumnes han estat capaços de generalitzar a partir de les situacions concretes plantejades.

Ara bé: les valoracions subjectives, tot i que presenten aquesta coherència amb els resultats de la matematització, presenten també una característica rellevant. L'anomenem *percepció atenuada*:

En activitats de matematització induïda (no forçada) sobre situacions contextualitzades on, per resoldre, hi intervenen la visualització geomètrica, la manipulació en entorn TIC i l'àlgebra, i on els alumnes manifesten una alta motivació, la percepció subjectiva (dels alumnes) respecte la utilitat de Geogebra per matematitzar és coherent amb les diferències que s'observen en els resultats objectius, però apareix molt atenuada.

I, donat que aquesta atenuació és molt accentuada, afegim:

Les activitats sobre situacions contextualitzades, en un entorn de matematització induïda i amb mitjans tecnològics visuals i manipulatius, pel fet de ser així, proporcionen als alumnes una percepció positiva bastant pròxima a l'homogeneïtat en els diferents tipus de matematització.

Aquests fenòmens d'atenuació i homogeneïtzació expliquen un fet que hem observat a partir dels resultats i que hem formulat així:

En activitats de matematització induïda (no forçada) sobre situacions contextualitzades on, per resoldre, hi intervenen la visualització geomètrica, la manipulació en entorn TIC i l'àlgebra, les valoracions globals subjectives no guarden cap correlació amb la classificació dels alumnes per categories de matematització.

Les valoracions que fan els alumnes sobre l'ús de Geogebra a les activitats plantejades (comptant tots els aspectes preguntats durant aquestes activitats) són positives, amb poca dispersió, i no depenen dels resultats que obtenen a la matematització. Això significa, per exemple, que un alumne que hagi obtingut resultats alts a tots els tipus de matematització no valorarà, pel fet d'haver obtingut aquests resultats alts, l'ús de Geogebra millor que un alumne que només hagi obtingut resultats alts en només un tipus de matematització. Per tant, l'ús de Geogebra en un plantejament didàctic de baix a dalt és subjectivament tan bo per a l'alumne que té facilitat per obtenir resultats alts com per a un alumne que no en té tanta.
Subratllem que per fer aquestes afirmacions ens basem en l'anàlisi de la informació de les valoracions subjectives que ens han proporcionat els alumnes en cada una de les activitats amb Geogebra i en el qüestionari final. Aquesta anàlisi, les seves xifres i les interpretacions corresponents les hem relatades al capítol 5 i també les hem recollides en aquest capítol de conclusions en paràgrafs anteriors.
En tot cas, és necessari remarcar que els resultats obtinguts en la implementació evidencien una molt alta i pràcticament unànime valoració global positiva del plantejament didàctic per part dels alumnes.

Pel que fa a un altre aspecte de gran importància en un plantejament didàctic tradicional, les proves escrites, recordem una afirmació que ja hem citat abans al capítol 2, de Niss, Lesh i Lee, organitzadors del grup 6 de l'ICME 5 (1984): "Els exàmens escrits tradicionals no són gaire adequats per avaluar activitats d'aplicació i modelització".
Després d'haver analitzat els resultats individuals de la matematització a les activitats amb Geogebra en el nostre plantejament didàctic, i haver-los comparat amb els resultats individuals en la prova escrita convencional corresponent als continguts de la unitat didàctica, podem parafrasejar Niss, Lesh i Lee:

Un examen tradicional no és adequat per avaluar les activitats d'aplicació i matematització.

Com ja hem exposat al capítol 5, els resultats que els alumnes obtenen a la prova escrita convencional que hem col·locat al final de la unitat didàctica de geometria analítica, no guarden cap correlació amb els resultats del procés de matematització en activitats contextualitzades a l'entorn del programari interactiu Geogebra. Podríem haver esperat, per exemple, que els alumnes que obtenen millors resultats en les activitats de matematització amb Geogebra (especialment els que hem classificat a la categoria 1, els matematitzadors complets) obtinguessin també els millors resultats a

la prova escrita convencional. I, complementàriament, que a mesura que els resultats de la matematització amb Geogebra són inferiors, els resultats a la prova escrita també ho fossin. Però això no ha estat així. No existeix correlació.
A l'estudi de casos que hem realitzat sobre quatre alumnes representatius hem comparat el procés de resolució d'un problema de la prova escrita convencional (el problema 5) amb el procés de resolució corresponent a una de les activitats amb Geogebra (l'activitat 7) on es planteja una situació molt semblant. I tal com hem exposat unes poques pàgines abans d'aquesta, el rendiment dels alumnes és major en la resolució en l'entorn contextualitzat de Geogebra que pel procediment escrit convencional. I hem subratllat que això es produeix no perquè els alumnes no *sàpiguen què fer*, sinó perquè perden les referències visuals i donen cegament per bo el resultat de la mecànica algebraica que segueixen, encara que contingui errors que els alumnes detectarien fàcilment si situessin les suposades solucions (falses solucions) en un senzill esquema gràfic traçat sobre el paper.
Per tant, ens trobem amb alumnes que han matematitzat amb èxit en situacions contextualitzades en l'entorn del programari interactiu Geogebra però que uns pocs dies després cometen errors de mecànica algebraica en una situació molt semblant corresponent a una prova escrita convencional, i no se n'adonen perquè perden la referència del context visual.
Una prova escrita convencional requereix una preparació específica convencional, és a dir, que la tècnica de resoldre exercicis i problemes de l'estil dels que poden formar part d'un examen convencional s'aprèn practicant un nombre suficient d'aquest tipus d'exercicis i problemes. Si els alumnes obtenen bons resultats a la matematització amb Geogebra, és obvi que han matematitzat: han utilitzat eines matemàtiques que els han ajudat a organitzar i resoldre un problema. Però això no els garanteix que siguin capaços de superar una prova escrita convencional, la qual té les seves pròpies exigències pel que fa a la preparació.

Després d'això anterior, el que segueix és gairebé automàtic:

Les activitats d'aplicació i matematització requereixen una avaluació específicament dissenyada per a les seves característiques.

Si el que es pretén és avaluar si els alumnes són capaços d'organitzar i resoldre un problema d'aplicació, és a dir, de matematitzar, llavors és necessari mesurar uns ítems específicament dissenyats per a aquest procés, els quals conduiran a un resultat que tindrà un determinat pes en l'avaluació global de l'alumne i en la seva possible acreditació o promoció. Si el que es pretén és mesurar la destresa dels alumnes a l'hora de resoldre exercicis i problemes convencionals, llavors les proves escrites convencionals són adequades. No és el mateix saber resoldre exercicis i problemes d'un examen després d'haver-ne practicat un bon nombre del mateix estil, que enfrontar-se a una activitat d'aplicació per a la qual no hi ha hagut un entrenament de repetició.
En l'avaluació d'alumnes de primer curs de Batxillerat, com els que han protagonitzat la implementació del nostre plantejament, és possible adoptar diferents punts de vista. L'avaluació que està contemplada a la programació didàctica per a la unitat de

geometria analítica es pot fer de diferents maneres. Hi ha una manera convencional d'enfocar l'avaluació, que consisteix en atorgar un gran pes a les proves escrites convencionals, i en tot cas tenir en compte també aspectes complementaris com el treball a l'aula, els exercicis lliurats, etc., per acabar de perfilar la qualificació de cada alumne. En aquest enfocament convencional, l'entrenament (també convencional) a base de sèries d'exercicis i problemes estàndard amb resolució escrita sobre el paper, té una gran influència sobre el resultat de l'avaluació. L'alumne disciplinat que realitza sèries d'exercicis i problemes convencionals té una alta probabilitat d'obtenir una qualificació positiva.

Però si la metodologia didàctica no és estrictament tradicional també és possible adoptar altres enfocaments per a l'avaluació. En el nostre cas, els alumnes han realitzat activitats dissenyades per induir la matematització en el context visual i interactiu del programari Geogebra. No han rebut un entrenament de repetició sobre activitats estandarditzades, sinó que directament s'han enfronta a les activitats amb Geogebra, en les quals han matematitzat. La seva matematització no estat dirigida ni proporcionada des d'agents externs, és a dir, que no ha estat forçada, sinó induïda. Els alumnes, en cada activitat, han llegit els breus enunciats de cada situació i han començat a resoldre amb Geogebra sense cap direcció externa durant el procés de resolució. I d'aquest procés de matematització hem obtingut uns resultats, que no mesuren si un entrenament de repetició ha tingut èxit, sinó que són adequats per mesurar si els alumnes han representat, visualitzat i manipulat interactivament la situació que se'ls ha plantejat, i si amb això l'han resolta. Aquest procés de matematització toca el nucli de la competència matemàtica de l'alumne. És perfectament legítima la decisió d'atorgar un pes considerable dins de l'avaluació a la competència de l'alumne per matematitzar i resoldre situacions contextualitzades per a les quals no ha rebut una preparació específica prèvia.

De fet, no tan sols és una decisió legítima, sinó que està en consonància amb les idees que expressa l'administració educativa catalana en el decret pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments del Batxillerat (142/2008, de 15 de juliol), del qual n'hem citat uns quants fragments al capítol 1. Recordem, per exemple, un fragment d'una de les cites: *"La competència en contextualització és consubstancial al treball matemàtic en el Batxillerat."*

La dificultat d'aplicar una avaluació que atorgui un pes important a la competència de matematitzar en contextos no és teòrica, sinó pràctica. Cal tenir en compte que el Batxillerat és una etapa educativa que té l'obligació de preparar adequadament els alumnes que volen accedir a la universitat. I aquests alumnes han de realitzar una prova d'accés externa al centre on cursen el Batxillerat. Mentre aquesta prova sigui convencional, és a dir, mentre es pugui preparar sobretot mitjançant un entrenament de repetició sobre exercicis i problemes estandarditzats i realitzats per escrit, l'interès pràctic dels docents se situarà en preparar els alumnes per superar aquesta prova externa i per tant la via més directa i ben coneguda per aconseguir-ho serà un treball convencional a l'aula: un plantejament "de dalt a baix" (primer proporcionar els continguts ja formalitzats i després aplicar-los en exercicis i problemes estandarditzats i per escrit) i un "anar per feina" en el sentit de no consumir temps i esforços en plantejaments innovadors.

Ara bé, si el tipus de competència que han de demostrar els alumnes canvia, i ho fa en el sentit que preveuen les autoritats educatives, atorgar pes a la competència de l'alumne per matematitzar i resoldre situacions contextualitzades adquireix un interès d'ordre pràctic. Recordem un fragment d'una cita que ja hem presentat al capítol 1: "*Les assignatures tenen un enfocament més pràctic i proper, i es passa d'un sistema de transmissió descriptiu a un altre basat en la interacció, investigació i reflexió, de tal manera que l'alumne es planteja preguntes i resol problemes més reals a partir dels coneixements que adquireix"* (Joaquim Prats, director del Consell Superior d'avaluació del Sistema Educatiu, l'any 2007, referint-se al canvi futur en les proves d'accés a la universitat).

A partir d'això anterior, afirmem:

Les activitats d'aplicació i matematització trobaran definitivament el seu lloc dins del currículum quan per promocionar i acreditar sigui necessari demostrar que es té una mínima competència en la matematització en situacions contextualitzades.

Llavors, la necessitat de crear i implementar aquest tipus d'activitats, integrades a la programació didàctica, serà indiscutible.

6.3. Conclusions referents a la innovació didàctica

En aquest mateix capítol de conclusions hem enunciat (i comentat) els motius pels quals el nostre plantejament didàctic resulta avantatjós en comparació amb un plantejament tradicional: alta motivació i alta implicació dels alumnes com a subjectes actius conscients del procés d'aprenentatge, millor rendiment en les activitats contextualitzades amb un alt assoliment de la matematització horitzontal i una millor valoració subjectiva per part dels estudiants.
Aquestes característiques són pròpies del nostre plantejament concret, implementat a l'aula en condicions reals, però considerem que poden existir altres conjunts d'activitats que les comparteixin. Aquests altres conjunts es poden aplicar a altres unitats didàctiques diferents de la geometria analítica de primer de Batxillerat (pensem sobretot en altres unitats de geometria, però no creiem que aquesta sigui una limitació absoluta) i fins i tot a altres nivells educatius. Aquestes altres propostes també es poden basar en un plantejament "de baix a dalt" amb activitats contextualitzades en un entorn interactiu TIC, i aconseguir, com ho ha fet la nostra, que els alumnes manipulin interactivament els elements de les situacions concretes que plantegen les activitats, les organitzin i les resolguin amb un alt percentatge d'èxit. I també poden proporcionar una alta motivació i una alta autoconsciència de l'aprenentatge, superiors a les d'un plantejament tradicional.
És a dir: prenem els trets que considerem essencials del nostre plantejament i en fem una generalització. Considerem que aquestes característiques no tenen per què ser exclusives del nostre plantejament concret, sinó que poden estar presents en altres propostes didàctiques.

A partir d'aquestes característiques, al final del capítol 5 hem definit el que anomenem *plataforma MATH*:

Una plataforma MATH és un conjunt organitzat d'activitats d'aplicació contextualitzades en un entorn TIC, previ a la formalització dels continguts matemàtics, que, pel seu propi disseny, indueix de forma no forçada la matematització horitzontal amb resultats alts per a una gran majoria d'alumnes, i que aconsegueix per als alumnes una alta motivació i una alta autoconsciència de l'aprenentatge respecte d'un plantejament tradicional.
S'anomena plataforma perquè indueix la matematització horitzontal i perquè és la base a partir de la qual s'aborda l'abstracció i la formalització dels continguts matemàtics.

L'acrònim MATH l'hem construït amb les lletres M (matematització, motivació), A (activitats, aplicació) T (TIC) i H (horitzontal; per la matematització horitzontal).

Llavors, el nostre plantejament, com a conjunt, conté un subconjunt d'activitats contextualitzades (en un entorn interactiu TIC) que és una plataforma MATH. I de la mateixa manera que nosaltres hem dissenyat i implementat una proposta didàctica que conté una plataforma MATH, es poden construir altres propostes per a altres unitats didàctiques, fins i tot en altres nivells educatius que, com la nostra, segueixin un enfocament "de baix a dalt" dins del qual comencin per induir la matematització en els alumnes a través de les activitats contextualitzades d'una plataforma MATH.

Però hem de tenir en compte que el nostre plantejament "de baix a dalt" no es queda tan sols en la fase de matematització induïda dins d'una plataforma MATH, sinó que s'organitza en dues fases consecutives: la primera és la ja esmentada de matematització induïda, i la segona és una fase en què el professor subministra als alumnes la formalització dels continguts matemàtics.
Raonablement no podem esperar que els alumnes arribin sols a l'estructuració formal corresponent als estàndards del currículum i de la programació didàctica, ni amb la plataforma de matematització ni sense ella. Una cosa és obtenir generalitzacions a partir d'activitats contextualitzades i una altra cosa molt diferent és adquirir el coneixement organitzat i formal de la unitat didàctica. Això últim els alumnes no ho poden fer sols. Els cal una intervenció docent externa que completi, organitzi, estructuri i que, en definitiva, formalitzi (és a dir, que "doni forma").
Llavors, ha de ser el professor qui, a partir del que han assolit els alumnes mitjançant la plataforma MATH, defineixi conceptes, descrigui propietats i estructuri continguts. Amb això, es completa l'enfocament "de baix a dalt", en el qual la plataforma MATH ocupa l'espai de "baix" (activitats contextualitzades) i al mateix temps prepara el terreny per al salt cap a l'espai de "dalt" (formalització subministrada pel professor).

Així, queda definit el conjunt del sistema didàctic on s'acompleix el plantejament "de baix a dalt". L'hem anomenat *sistema MATHFORM*:

Un sistema MATHFORM és aquell que parteix d'una plataforma MATH per arribar després a la formalització dels continguts matemàtics.

Hem construït l'acrònim MATHFORM mitjançant la contracció i addició de "MATHematization" i "FORMalization", és a dir, matematització i formalització o, també, formalització de la matematització.

Hem definit un sistema MATHFORM a partir de les característiques del nostre plantejament didàctic implementat a l'aula en condicions reals. Ho hem fet amb la idea que, de la mateixa manera que el nostre plantejament ha estat operatiu i ha presentat una sèrie d'avantatges respecte d'un plantejament tradicional (les quals hem mostrat i comentat abans), és possible utilitzar el sistema MATFORM per a altres unitats didàctiques i fins i tot per a altres etapes educatives. És a dir, que les línies bàsiques i l'estructura fonamental de la nostra experiència són extensibles. Aquest aspecte de l'extensió el tractem en propers apartats d'aquest mateix capítol ("perspectives de futur" i "implicacions didàctiques"): a partir de la nostra experiència docent realitzem una sèrie de consideracions que complementen les nostres aportacions científiques.

6.4. Consideracions finals

Havent arribat al final, és bo dirigir una mirada enrere per recordar, encara que sigui molt breument, com vam començar el camí que hem transitat i com ens ha portat fins on som.

Hem partit de:

- El nostre coneixement de la docència de les matemàtiques a l'educació secundària, com a professionals del sistema educatiu públic català.
- L'evidència que existeix un important debat social sobre l'educació.
- La nostra percepció que es poden desenvolupar plantejaments didàctics innovadors que representin un guany real i mesurable respecte de l'ensenyament tradicional de les matemàtiques.
- La nostra percepció que la integració de les TIC en els processos d'ensenyament i aprenentatge encara ha de desenvolupar molt potencial.
- L'exemple que ens dóna la història de les matemàtiques sobre com la resolució de problemes concrets, relacionats amb les necessitats i les aspiracions humanes, condueix a nous coneixements que en etapes posteriors es van estructurant en una teoria: primer les aplicacions, després la teoria.
- L'exemple que ens dóna la història de la didàctica de les matemàtiques, i en concret de la geometria analítica, sobre una tendència que culmina amb la matemàtica moderna: l'aparell teòric, molt algebritzat, acaba essent el primer que es presenta als alumnes, i les aplicacions vénen després.

- El coneixement del treball teòric de diferents autors de la didàctica de les matemàtiques, els quals aposten per les aplicacions contextualitzades, la matematització en entorns realistes i la modelització.

Hem formulat la hipòtesi que un enfocament de matematització "de baix a dalt" (primer la matematització en situacions contextualitzades i només després la formalització teòrica) permet dissenyar i implementar activitats d'ensenyament i aprenentatge de la geometria analítica.

Hem dissenyat i aplicat:

- Un plantejament didàctic per a la geometria analítica de primer de Batxillerat, integrat en el currículum i la programació didàctica, que aborda els continguts començant per activitats contextualitzades en l'entorn interactiu del programari Geogebra, i que només després se'n va cap a la teoria i cap a unes activitats més tradicionals.
- La seqüenciació i temporització de les activitats en un marc absolutament real.
- La metodologia per recollir informació i per analitzar-la.

En el procés d'implementació, hem enregistrat:

- El desenvolupament dia a dia de les sessions.
- Els materials que han generat els alumnes: fitxers de Geogebra, respostes escrites corresponents a les activitats (de multiopció i també obertes), prova escrita convencional.

Hem analitzat:

- El desenvolupament de les sessions i les estratègies de resolució utilitzades pels alumnes.
- Els resultats grupals i individuals de la matematització, amb la distinció de tres tipus de matematització.
- Els resultats grupals i individuals de les valoracions subjectives dels alumnes sobre l'entorn d'aprenentatge.

Hem realitzat un estudi de casos sobre quatre alumnes, amb el propòsit d'analitzar les seves resolucions per a un dels problemes de la prova escrita de la unitat didàctica, i per comparar-les amb la resolució d'una activitat amb Geogebra que planteja una situació molt similar.

Hem validat la nostra hipòtesi.

Hem obtingut unes conclusions, que hem exposat en aquest mateix capítol. Hem constatat que amb el plantejament didàctic implementat:

- Els alumnes matematitzen; no es limiten, com en un plantejament exclusivament tradicional, a rebre uns continguts teòrics.
- Els alumnes estan molt més motivats, reflexionen molt més sobre el que fan i comprenen millor els continguts matemàtics que en un plantejament tradicional.

Hem abstret generalitzacions, referides a la innovació didàctica, a partir del nostre plantejament particular. Els hem donat nom i les hem definides:

- La plataforma MATH, que indueix la matematització.
- El sistema MATHFORM, que inclou tota la seqüència didàctica, des de la matematització induïda a la plataforma MATH fins a la final formalització dels continguts proporcionada pel professor.

I projectem la mirada cap al futur:

El plantejament didàctic aplicat és una de les maneres de respondre a les necessitats que crea el canvi que experimenta el sistema educatiu. Cada vegada es valoren més les capacitats dels alumnes per matematitzar en entorns d'aprenentatge basats en la resolució de problemes, amb una utilització plenament integrada de les tecnologies de la informació i la comunicació.

La combinació d'una bona preparació per superar una proves escrites convencionals i d'una matematització induïda sobre activitats d'aplicació contextualitzades, permet:

- La certificació de coneixements matemàtics segons un criteri tradicional (la superació d'una prova escrita).
- L'augment de la competència matemàtica pel fet d'haver treballat en un entorn de matematització, sota condicions d'implicació activa.

El resultat d'això: alumnes que a més de saber resoldre exercicis estàndard que els permetin superar una prova escrita (com passa en un plantejament tradicional) puguin realment organitzar-se i matematitzar en un entorn de resolució d'aplicacions i problemes, la qual cosa implica una competència matemàtica de gran importància no tan sols individual, sinó social.

6.5. Limitacions

Com qualsevol investigació que comporta una fase d'implementació a l'aula, i com qualsevol enfocament que es proposa emprendre un camí d'innovació didàctica, el nostre plantejament té una sèrie de limitacions que convé explicitar. Ens referim, naturalment, a les limitacions que presenta un enfocament didàctic contextualitzat i amb eines TIC per a l'ensenyament de la geometria analítica a Batxillerat.

En primer lloc, hi ha les limitacions de tipus més estructural, és a dir, aquelles que van associades a la realització d'un plantejament quan ja des del seu punt de partida es proposa no ser tradicional i al mateix temps pretén integrar-se en una realitat d'un sistema educatiu i d'un centre educatiu on abunden els elements tradicionals, en el sentit que provenen d'una tradició organitzativa i didàctica consolidada. Tot i que considerem provat que hem assolit els objectius que ens proposàvem (explicitats al capítol 1), creiem que no seria raonable suposar que les condicions de treball del nostre cas particular es poden traslladar automàticament, sense cap dificultat, a qualsevol altre centre d'educació secundària. Pensant en això, mostrem, una per una, quines són les limitacions d'aquest tipus estructural que des del nostre punt de vista advertim:

1. Integrar i temporalitzar.
Els continguts per a la geometria analítica de Batxillerat estan desenvolupats d'una manera tradicional o convencional als llibres de text i al material complementari d'ús corrent. La seqüència didàctica per presentar aquests continguts també està fixada de manera convencional dins d'uns límits bastant estrets. Per altra banda, la manca de temps suficient per complir la programació didàctica és un problema habitual per als docents. En aquestes condicions, si impartir els continguts organitzats en una forma tradicional ja resulta dificultós, evidentment no existeix cap incentiu estructural per implementar un plantejament diferent del tradicional. Tot el contrari: cal un esforç molt considerable, que inclou no tan sols la preparació i el disseny, sinó també el difícil encaix temporal, sota la pressió d'haver de complir una programació per a la qual sempre sembla que no hi ha prou temps.

2. Mitjans tècnics necessaris.
A la immensa majoria dels centres educatius, els mitjans tècnics per aplicar les TIC al procés d'ensenyament i aprenentatge són recursos escassos. És cert que pràcticament tots els centres disposen d'ordinadors per als alumnes, però és molt difícil que estiguin disponibles durant unes quantes setmanes seguides a totes les hores en què s'imparteix una determinada matèria, i per a tot el grup de tal manera que cada alumne pugui treballar individualment. Nosaltres hem pogut organitzar aquesta disponibilitat per a la implementació del nostre plantejament, però això no és un fet habitualment possible en molts centres educatius.

3. Tradició i incertesa.
Si bé existeix un plantejament tradicional dominant per a l'ensenyament de la geometria analítica, també és cert que la incorporació de noves metodologies i noves tecnologies al procés d'ensenyament i aprenentatge ja es percep dins del món educatiu com un fet inevitable. Però existeix encara una notable incertesa sobre com s'ha de produir la integració d'aquestes metodologies i tecnologies en les programacions didàctiques. Fins ara, és evident que la preparació dels estudiants de Batxillerat està fortament marcada per les exigències de les proves externes d'accés a la universitat. Aquestes proves demanen uns coneixements i una manera de demostrar-los que necessiten una preparació convencional. En el cas de les

matemàtiques, aquesta preparació consisteix en l'entrenament de repetició amb sèries d'exercicis i problemes estandarditzats.
Per tant, existeix, en un pla teòric i de bones intencions, una crida cap a noves metodologies didàctiques però, a la pràctica, "l'anar per feina" recomana no sortir dels camins convencionals. Quan els canvis previstos per l'administració educativa arribin fins a les proves d'accés a la universitat, i quan la mateixa universitat hagi implementat també el seu propi canvi organitzatiu i metodològic (el procés europeu de Bolonya) sorgirà la necessitat pràctica de desenvolupar de manera generalitzada noves metodologies per a l'ensenyament de les matemàtiques al Batxillerat, en les quals, com afirma el decret 142/2008, de 15 de juliol pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments del Batxillerat a Catalunya, en un fragment que ja hem citat abans al capítol 1:

"La formalització de resultats haurà de ser introduïda com a punt d'arribada del procés de construcció de coneixement matemàtic."

4. Febles coneixements previs, en geometria, dels estudiants.
La geometria és una part de les programacions didàctiques de l'educació obligatòria que sol quedar sacrificada (disminuïda o directament eliminada) si sorgeixen problemes de temps per treballar la totalitat dels continguts programats. Al capítol 2 hem citat una frase d'una ponència de Sánchez (1983; reimpressió de 1997) que ara volem recordar:

"A l'educació general bàsica, pràcticament es van suprimir les qüestions geomètriques, tant les referents a les propietats de les figures i les seves relacions de posició al pla i a l'espai com a les transformacions geomètriques i a la mesura d'àrees i volums."

A l'actualitat no podem afirmar que es produeixi una dràstica supressió de la geometria, però sí que, com hem assenyalat abans, les unitats didàctiques de geometria solen estar al capdavant de la llista de víctimes a l'hora d'escapçar continguts quan existeixen problemes de temps. I, com sap qualsevol docent, aquests problemes són moneda corrent.
Per il·lustrar quin és l'efecte que té això, recuperem la part inicial d'una cita de Peralta (1995) que també hem mostrat al capítol 1:

"Com a conseqüència és suficientment contrastat el fet de la mala preparació en geometria dels alumnes [de batxillerat]. *Hi ha nombroses experiències que confirmen aquest fet."*

Aquesta mala preparació també comporta que en un plantejament com el nostre haguem d'afrontar el fet d'haver d'aplicar activitats amb una forta contextualització visual i manipulativa en un grup d'alumnes que estan acostumats a resoldre problemes geomètrics amb mètodes analítics i algebraics.

A part de les limitacions de tipus estructural que hem exposat, també volem comentar que existeixen altres limitacions que s'evidencien durant el procés concret d'implementació del plantejament didàctic. En destaquem dues que afecten la completitud de les sèries de dades recollides per a posteriors anàlisis:

5. Inassistències.
El nostre plantejament utilitza un disseny segons el qual és necessari aplicar estrictament una determinada seqüència d'activitats. Com en qualsevol altra unitat didàctica, ens trobem que és corrent que en moltes sessions no hi assisteixi algun alumne (un o més d'un) per diverses causes. La més habitual és la indisposició o malaltia de curta durada. Això provoca que les sèries de dades que utilitzem per a l'anàlisi tinguin "forats". Per sort, en el nostre procés d'implementació no hi ha hagut cap cas individual d'inassistència prolongada, i per altra banda l'anàlisi ha mostrat que les sèries de dades són resistents a aquestes incidències, és a dir, que la falta d'algunes dades no desemboca en sèries de resultats amb incoherències internes o amb fenòmens de difícil explicació. Però, naturalment, i encara que el conjunt de l'anàlisi no resulti perjudicat, la situació desitjable és comptar amb totes les dades.

6.Preguntes sense resposta i activitats no acabades o no lliurades.
De vegades alguns alumnes no han respost algunes preguntes de les activitats tot i ser presents a la sessió. Hem trobat sorprenent que en alguns pocs casos hagin quedat sense respondre preguntes de valoració sobre l'ús de Geogebra. És a dir, sense cap creu que marqui una de les quatre opcions possibles: gens, poc, bastant, molt. Sembla raonable pensar que es tracta d'oblits o distraccions, i no de fets intencionats, ja que se'ns fa difícil imaginar que un alumne no sigui capaç de decidir-se per cap de les quatre opcions, o que tingui motius per no voler respondre.
Aquests comportaments no han estat habituals sinó esporàdics i, de fet, el conjunt de dades ha resistit bé la presència d'aquests "forats". Sobretot perquè es tracta d'un conjunt nombrós: caldria un alt percentatge de preguntes sense resposta per invalidar-lo per a l'anàlisi, cosa que no ha succeït. Però, com ja hem comentat abans, la situació desitjable és comptar amb totes les respostes de tots els alumnes per a totes les activitats.
També ens hem trobat amb casos en què alguns alumnes no acabaven les activitats. Ha succeït sobretot a l'activitat 7: per falta de temps, els alumnes no han pogut completar (i molts ni començar) la resolució per escrit després d'haver acabat la resolució amb Geogebra. Per tant, unes dades inicialment previstes finalment no s'han pogut incorporar al conjunt que ha estat objecte d'anàlisi. Això ha tingut, com hem explicat al capítol 5, una certa compensació en el fet d'analitzar resolucions per escrit posteriors però corresponents a una situació semblant (el problema 5 de la prova escrita). Per altra banda, han sorgit alguns problemes molt puntuals en el procés de gravació i lliurament (telemàtic) dels fitxers de Geogebra. En alguna ocasió uns pocs alumnes els han extraviat i no els han pogut recuperar.

6.6. Perspectives de futur

El nostre plantejament didàctic i la seva implementació en condicions estrictament reals a l'aula ens han permès obtenir uns resultats a partir dels quals hem realitzat una sèrie d'anàlisis que, al seu torn, ens han conduït fins a unes determinades interpretacions. El nostre treball té un principi i un final, i està situat en un context concret. Però, encara que, com és natural, arribi a unes certes conclusions, el punt on acaba es pot considerar també el punt de partida per formular noves preguntes o per ampliar l'àmbit d'aplicació de preguntes que ja han estat formulades.
La primera qüestió que volem assenyalar en aquest apartat de perspectives de futur connecta amb el que ja hem manifestat al capítol introductori: l'educació (i en particular l'educació matemàtica) està immersa en un temps de profundes transformacions, algunes de les quals es comencen a endevinar. Són múltiples els factors que hi incideixen. Alguns dels més importants ja els hem esmentat a la introducció: el debat social i polític, l'aposta explícita de l'administració per canvis en la metodologia didàctica, i la imparable incorporació de les TIC al procés d'ensenyament i aprenentatge.
Davant d'aquesta situació plena de reptes, la qual produirà inevitablement transformacions en la pràctica educativa a les aules, nosaltres hem fonamentat, dissenyat, aplicat, analitzat i interpretat un determinat plantejament didàctic.
El nostre treball constitueix, naturalment, un fet particular. Però també té la intenció d'acceptar, malgrat les limitacions que presenta com les pot presentar qualsevol altre treball, el repte que suposa l'adaptació del procés d'ensenyament i aprenentatge a les noves circumstàncies que transformen l'educació. Per tant, és també una proposta amb elements innovadors. Volgudament innovadors. Com a tal proposta, indica un cert camí. Resumint, la nostra proposta és en primer lloc, i genèricament, el que hem anomenat enfocament "de baix a dalt" i en segon lloc, ja més concretament, el que hem distingit amb l'etiqueta de "plataforma de matematització".
Considerem que el nostre plantejament és extensible, amb les adaptacions que siguin necessàries, a altres unitats didàctiques de les matemàtiques de Batxillerat i fins i tot exportable a altres nivells educatius, com per exemple l'Educació Secundària Obligatòria. Per tant, unes línies que poden ser objecte de futures recerques són:

1. Extensió i exportació del plantejament didàctic.
Quins són els resultats de l'aplicació del plantejament a altres grups de Batxillerat que estudien geometria analítica en altres centres educatius (cadascun amb les seves particularitats)?
Com funciona el plantejament aplicat a altres unitats didàctiques de contingut geomètric?
Com funciona l'adaptació del plantejament a la geometria de l'Educació Secundària Obligatòria?

2. Adaptació a noves exigències externes.
Un plantejament en la línia del nostre, realment pot aportar una bona preparació adaptada a les exigències de les noves proves d'accés a la universitat? Pot contribuir a la millora dels resultats en les proves internacionals d'avaluació?

A més de contemplar, des d'una perspectiva general, el nostre plantejament com una de les possibles vies per afrontar els nous reptes educatius, i a més de proposar la seva extensió i exportació, hi ha una qüestió més concreta que és present en el nostre treball i que, des del nostre punt de vista, també pot ser objecte de futures investigacions:

3. La bretxa entre la resolució visual i manipulativa i la resolució escrita convencional.
Com establir ponts sòlids, mitjançant estratègies didàctiques concretes, per salvar la bretxa que hem detectat entre la resolució en un entorn visual i manipulatiu, i la resolució convencional per escrit (aquesta última amb rendiments inferiors)?
Quina és la causa de la bretxa? En quina part és deguda a una hàbits adquirits durant etapes prèvies de formació? Té causes inherents a l'aprehensió humana?
Els fenòmens que hem anomenat *mecànica cega* i *suspensió de judici* són també deguts als hàbits adquirits?

6.7. Implicacions didàctiques

Durant l'anàlisi i la interpretació que hem realitzat, ens hem basat en els resultats obtinguts a partir de la fase d'implementació. D'aquí han sorgit els conceptes de plataforma MATH i de sistema MATHFORM. El que ara pretenem no és reflexionar per determinar cap on ens porten els resultats, perquè ja ho hem fet, sinó complementar les nostres reflexions amb una sèrie de consideracions que sorgeixen de la nostra experiència docent. No es tracta, per tant, de realitzar aportacions estrictament demostrables, però sostenim que són substancioses.

En primer lloc, entenem que per a un docent, entrar en contacte per primera vegada amb els conceptes de plataforma MATH i sistema MATHFORM planteja, d'entrada, dos interrogants. Un es pot formular mitjançant aquesta pregunta: puc utilitzar avantatjosament un sistema MATHFORM (amb la corresponent plataforma) per a qualsevol unitat didàctica? I l'altra pot prendre la forma d'aquesta pregunta: si utilitzo un sistema MATHFORM, amb quins criteris o quines orientacions dissenyo les activitats d'aplicació que han de constituir la plataforma MATH?

Pel que fa a la primera pregunta, hem d'aclarir que la nostra intenció original no era crear una determinada metodologia didàctica que fos aplicable a qualsevol fracció de continguts o unitat didàctica del currículum, sinó implementar un plantejament específicament pensat per a la geometria analítica de primer de Batxillerat. Aclarit això, afegim que a partir de la implementació hem arribat a una síntesi emergent que

ens ha portat al sistema MATHFORM. De fet, és com si nosaltres mateixos, en un procés anàleg al que han experimentat els alumnes, haguéssim assolit la nostra matematització vertical, és a dir, arribat a una generalització a partir de la resolució de situacions concretes. I des d'aquest assoliment manifestem el convenciment que el nostre plantejament didàctic, o sistema, és exportable a altres unitats didàctiques. No gosem afirmar rotundament, d'entrada, que ho és per a qualsevol unitat. Però sí que ens sembla especialment adequat utilitzar-lo per a l'ensenyament i aprenentatge d'aquells conceptes que es puguin començar a treballar amb els alumnes a través d'activitats contextualitzades i amb mitjans tecnològics que permetin la visualització, la manipulació i la interacció. Això és perfectament realitzable en pràcticament qualsevol unitat didàctica de geometria, i no tan sols de Batxillerat (com és el cas de la nostra investigació) sinó de l'Educació Secundària Obligatòria.
No obstant la prudència que hem volgut mantenir respecte de l'aplicabilitat del sistema al currículum (o, en plural, als currículums), tenim la impressió que ha de ser possible dissenyar, també per a unitats didàctiques que no pertanyin a l'àmbit estricte de la geometria, una "sèrie d'activitats d'aplicació realitzades mitjançant TIC, prèvies a la formalització dels continguts matemàtics, que, pel seu propi disseny, indueixen de forma no forçada, i amb una alta motivació, la matematització horitzontal amb resultats alts per a una gran majoria d'alumnes"; és a dir, una plataforma MATH. I complementar la fase induïda amb una fase forçada que condueixi cap a la formalització dels continguts.

Respondrem ara la segona pregunta que de forma retòrica hem plantejat. Un cop el docent pren la decisió de dissenyar activitats que constitueixin una plataforma MATH, ha de prendre també una sèrie de decisions sobre les característiques concretes d'aquestes activitats. El que nosaltres podem aportar, com a orientacions didàctiques, és el que es desprèn de l'experiència del nostre cas. Sobre això, considerem que hi ha una sèrie d'aspectes a destacar. Comencem pel fet evident (per coherència amb el que significa una plataforma MATH) que les activitats no s'han de pensar, com habitualment es fa, per resoldre exercicis o problemes després d'haver introduït els conceptes a través d'una explicació teòrica més o menys convencional. Això resulta obvi si recordem com hem realitzat el nostre plantejament i com hem definit la plataforma, però creiem que val la pena remarcar-ho perquè la situació més corrent és utilitzar les activitats i la tecnologia per abordar una exercitació posterior a la presentació teòrica. La plataforma no és un terreny d'exercitació convencional. És un terreny on es desenvolupa la matematització induïda, amb l'objectiu de dirigir-se cap a uns continguts que ja rebran després la deguda formalització teòrica.
Un altre aspecte que ens sembla que val la pena destacar és que no cal un entorn tecnològic molt sofisticat per a la plataforma, ni activitats que presentin situacions complexes. No diem que no pugui ser així, però si ens fixem en el nostre cas, veurem que les activitats dissenyades per al nostre enfocament "de baix a dalt" plantegen situacions que es poden formular de manera simple i que no desemboquen en complicades construccions geomètriques o en llargues resolucions per escrit. El més important és que el disseny estigui pensat per induir la matematització, és a dir, per conduir els alumnes cap als conceptes, no explícitament, sinó marcant subtilment el camí a través de les preguntes que han de respondre.

En tot cas, si cal (i per als alumnes de Batxillerat sí que cal) després de la fase de matematització induïda ja arribarem a la formalització dels continguts i, per tant, a la seva presentació estructurada. A partir d'aquí, podrem abordar una exercitació tradicional a través d'activitats (exercicis i problemes) convencionals. Resulta clar que al Batxillerat haurem de concedir també una gran importància al domini convencional dels continguts, ja que els alumnes estan en una etapa d'educació postobligatòria i de marcat caràcter propedèutic (en altres paraules, han de sortir preparats per a estudis universitaris). Pel que fa a l'Educació Secundària Obligatòria, el marge de maniobra a l'hora de determinar el grau de formalització és més ampli, a partir de la base que constitueixen les competències bàsiques i els objectius mínims que els alumnes han d'assolir.
També ens sembla oportú puntualitzar que quan ens referim a la fase de formalització forçada dels continguts i utilitzem els adjectius "tradicional" o "convencional" no necessàriament pensem en una classe magistral on el professor va omplint pissarres i els alumnes copien a les seves llibretes. Amb els adjectius esmentats volem significar que és el professor qui proporciona la formalització teòrica. Això es pot realitzar com fa cent anys o més, amb guix i pissarra, però sens dubte també es pot realitzar amb el suport de mitjans tecnològics moderns. Per exemple, l'ús de projeccions per presentar continguts teòrics, per posar exemples o per resoldre exercicis d'aplicació davant dels alumnes. Per tant, afirmem que una presentació teòrica d'estructura bàsica convencional (el professor dirigeix l'explicació, presenta i formalitza) és perfectament compatible amb mitjans tecnològics moderns. La no convencionalitat del nostre plantejament concret, i d'una plataforma MATH en general, no resideix en el mer ús de la tecnologia, sinó en l'enfocament de baix a dalt i en la matematització induïda.

No volem tancar aquest apartat sense fer referència a un aspecte tan fonamental com és l'avaluació dels aprenentatges dels alumnes. A l'apartat del capítol 5 on hem presentat els resultats de la prova escrita convencional que han realitzat els alumnes al final de la fase d'implementació del nostre plantejament didàctic, hem arribat a la conclusió que "una prova escrita tradicional no reflecteix els assoliments dels alumnes en el procés de matematització". Una prova escrita convencional és un bon indicador per reflectir la preparació específica, basada en la repetició d'exercicis i problemes estàndard, que un alumne ha realitzat amb l'objectiu de precisament superar una prova escrita, però no és un bon instrument per mesurar l'assoliment de la matematització induïda.
Utilitzant una cita de Niss (1989) que ja ha aparegut en capítols anteriors, afirmem que una prova escrita convencional mesura bé l'aprenentatge "basat només en fórmules i processos estereotipats", però no serveix per avaluar "el treball amb problemes reals" on intervé de manera decisiva "l'autonomia de l'estudiant". Això ens condueix inevitablement a la necessitat de dissenyar una avaluació que contempli els dos aspectes: per una banda la matematització induïda que es produeix a la plataforma MATH, i per una altra banda l'assoliment d'un aprenentatge convencional basat en "fórmules i processos estereotipats" que correspon a la fase de formalització forçada o, més ben dit, a l'exercitació convencional (problemes i exercicis) que acompanya la formalització dels conceptes matemàtics.

Hem de tenir present que l'etapa educativa on hem dut a terme el procés d'implementació del nostre plantejament didàctic, el Batxillerat, té un fonamental component propedèutic, és a dir, preparatori per a uns estudis superiors. Per tant, l'avaluació ha de mesurar l'aprenentatge de "fórmules i processos estereotipats"; unes fórmules i uns processos que formen la base sobre la qual s'han de desenvolupar altres fórmules i processos en estudis posteriors. Però, al mateix temps cal tenir en compte que cada vegada més es valora "la interacció, investigació i reflexió, de tal manera que l'alumne es planteja preguntes i resol problemes més reals a partir dels coneixements que adquireix" (és un fragment d'una notícia apareguda a la premsa, citada al capítol 1, que recollia unes declaracions del catedràtic Joaquim Prats, director del Consell Superior d'avaluació del Sistema Educatiu, arran dels canvis previstos a les proves d'accés a la universitat). Per tant, el disseny de l'avaluació ha de contemplar també aquests aspectes.

Si el sistema MATHFORM es vol aplicar a unitats didàctiques de l'Educació Secundària Obligatòria, l'avaluació ha de contemplar igualment el pes relatiu que es concedeix a "la interacció, investigació i reflexió" per una banda i a les "fórmules i processos estereotipats" per una altra banda. El que raonablement es pot esperar és que, en comparació amb el Batxillerat, augmenti la importància de la primera part esmentada, i disminueixi la de la segona.

Bibliografia

- APOSTEL, L. (1960). *Towards the Fomal Study of Models in the Non-formal Sciences*. Synthese, 12, pp. 125-161.
- ASHURST, F. G. (1985): *Fundadores de las matemáticas modernas*. Alianza Editorial. Madrid.
- BERGASA, J. (2003): *Laplace. El matemático de los cielos. Ed. Nivola*. Madrid.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. (2004): *Modelación matemática y los desafíos para enseñar Matemática*. Educación Matemática, vol. 16, núm. 2.
- BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*. Alianza Universidad. Madrid.
- BROUSSEAU, G. (1983): *Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques*. Recherches en didactique des mathématiques, 4, 2, pp. 165-198.
- BROUSSEAU, G. (1989): *Utilidad e interés de la didáctica para un profesor. 1ª parte*. Suma, núm 4.
- BROUSSEAU, G. (1990): *Utilidad e interés de la didáctica para un profesor. 2ª parte*. Suma, núm 5.
- BROUSSEAU, G. (1986): *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.* Recherches en didactique des mathématiques, 7, 2, pp.33-115.
- CHAMOSO, J. M.; RAWSON, W. B. (2001): *En la búsqueda de lo importante en el aula de Matemáticas*. Suma núm. 36, pp. 33-41.
- CHEVALLARD, Y. (1991): *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique*. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier. Grenoble.
- CHICA, A. (2001): *Descartes. Geometría y método.* Ed. Nivola. Madrid.
- COLLETTE, J. P. (1985): *Historia de las matemáticas*. Ed. Siglo XXI. Madrid.
- DE LANGE, J. (1987*): Mathematics, insight and meaning*. Teaching, Learning and Testing of Mathematics for the Life and Social Sciencies. Utrecht.
- DESCARTES, R. (1999): *La geometria.* Institut d'Estudis Catalans-Ed. Pòrtic-Eumo Editorial. Barcelona.
- DUNHAM, W. (2000): *Euler, el maestro de todos los matemáticos*. Ed. Nivola. Madrid**.**
- ENGLISH, C. (1999): *Modelling for the New Millennium*, en Hoyles, C.; Morgan, C.; Woodhouse, G. (Eds.) *Rethinking the Mathematics Curriculum*. Falmer Press. Londres.

- FILLOY, E. (1998): *Didáctica e historia de la geometria euclidiana*. Grupo Editorial Iberoamérica. México, D. F.
- GEYMONAT, L. (1980): *El pensamiento científico*. EUDEBA. Buenos Aires.
- GODINO, J. D.; BATANERO, M. (1994): *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 14, núm 3, pp. 325-355.
- GÓMEZ CHACÓN, I. M. (1998): *Matemáticas y contexto. Enfoques y estrategias para el aula*. Ed. Narcea. Madrid. Hi ha força publicacions d'aquesta autora a la seva web personal.
- GÓMEZ URGELLÉS, J. (1998): *Contribució a l'estudi dels processos de modelització a l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivell universitari*. Tesi UAB 5819, 5820.
- GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A. (1990): *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele,* en Llinares, S.; Sánchez, M.V. *Teoría y práctica en educación matemática,* Cap. 6.
- MARTÍN, F. (2000): *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano*. Ed. Nivola. Madrid.
- NISS, M (1989): *Aims and Scope of Applications and Modelling in Mathematics Curriculua*, en Blum, W.; Berry, J. S.; Biehler R.; Huntley, I. D.; Kaiser-Messmer, G.; Profke, L. (Eds.) *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics*. Ellis Horwood. Chichester.
- NISS, M.; BLUM, W. (1989*): Applications and modelling in learning and teaching mathematics*. Ellis Horwood. Chichester.
- NISS, M.; LESH, R.; LEE, D. (1984): *Theme group 6: Applications and Modelling*. Proceedings of ICME 5.
- PAPY, G. (1968): *Matemática moderna*. EUDEBA. Buenos Aires.
- PERALTA, J. (1995): *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la matemática.* Ed. Huerga y Fierro. Madrid.
- PLA, J.; VIADER, P. (1999): *Introducció a "La Géométrie" de René Descartes*, en Descartes, R. *La geometria*. Institut d'Estudis Catalans-Ed. Pòrtic-Eumo Editorial. Barcelona.
- REY PASTOR, J.; BABINI, J. (1985): *Historia de la Matemática.* Vol 2. Gedisa. Barcelona.
- RÍBNIKOV, K. (1991): *Historia de las matemáticas.* Ed. Mir. Moscou.
- RUIZ, L. (1993): *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Tesi doctoral. Universitat de Granada.
- SÁNCHEZ, G. (1997): *La enseñanza de la geometría en el momento actual y en el futuro inmediato* (ponència presentada a les III Jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas, Saragossa). Suma núm. 25, pp. 17-22.

- SÁNCHEZ, C; VALDÉS, C. (2003): *Kolmogórov. El zar del azar*. Ed. Nivola. Madrid.
- STACHOWIAK, H. (1973): *Allgemeine Modelltheorie*. New York: Wein.
- TORANZOS, F. I. (1963): *Enseñanza de la matemática*. Ed. Kapelusz. Buenos Aires.
- TORRECILLAS, B. (1999): *Fermat. El mago de los números.* Ed Nivola. Madrid.
- TREFFERS, A. (1986): *Three Dimensions*. Reidel. Dordrecht.
- VAN DER HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2000): *Mathematics education in the Netherlands: a Guided tour.* Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.
- VAN REEUWIJK, M. (1997): *Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas.* UNO Revista de didáctica de las Matemáticas, núm. 12, pp. 9-16.
- WARZEL, A. (1989): *General Theory of Modelling and Theory of Action – A Solution for the Educational Situation at School?* en Blum, W.; Berry, J. S.; Biehler R.; Huntley, I. D.; Kaiser-Messmer, G.; Profke, L. (Eds.) *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics*. Ellis Horwood. Chichester.

ANNEXOS

Annex 1: Activitats

Activitat 1: *a mig camí*

La situació

En un camp pla, utilitzem un sistema d'eixos cartesians, el qual fa possible la localització exacta de cada element d'aquest camp. L'origen de coordenades el situem en una masia, i orientem els eixos de manera que coincideixin amb els punts cardinals. Naturalment, podem representar la masia per un punt perquè les distàncies que considerarem són força més grans que les dimensions de la casa. Comptarem les distàncies en centenars de metres.

Un arbre, A, està en la posició (2,3), és a dir, a 200 m est i 300 m nord. Un altre arbre B està en la posició (5,-1), és a dir, 500 m est i 100 m sud.
Volem plantar un altre arbre, M, exactament a mig camí del segment que uneix A i B.

Amb Geogebra

Quina serà la posició d'aquest nou arbre? El que se't demana és: la posició de M respecte la masia.

La informació inicial amb què comptes és: posicions de A i B.

Les eines de treball que tens són: els vectors i les operacions que saps fer amb ells.

El fitxer resultant s'ha de guardar de la següent manera: si, per exemple, et dius Anna Pujol, el nom que li donaràs és **annap1** (el nom, la inicial del cognom i el número d'activitat).

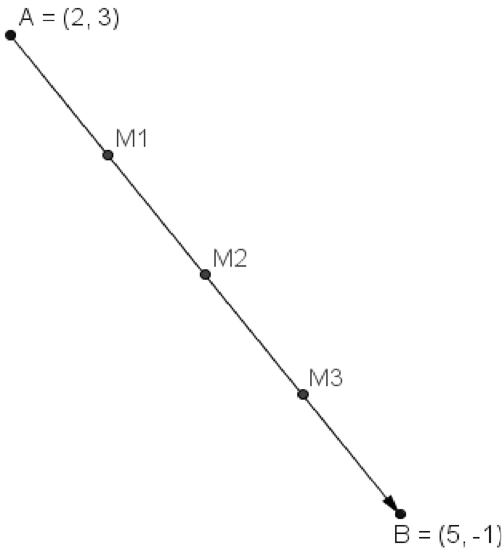
Per escrit

Sobre la resolució de la situació plantejada		
a	Has trobat el punt M? Si l'has trobat, les seves coordenades són: (preferiblement, escriu les coordenades en forma de nombres racionals)	☐ Sí ☐ No Coordenades: (,)
b	Has utilitzat el botó "Punt mitjà o centre" del programa?	☐ Sí ☐ No
c	Has sumat vectors?	☐ Sí ☐ No
d	Has multiplicat escalars per vectors?	☐ Sí ☐ No
e	Has construït un paral·lelogram?	☐ Sí ☐ No

f	Contesta només si has trobat el punt *M*: és possible escriure un càlcul amb les coordenades dels punts *A* i *B* que tingui com a resultat les coordenades del punt *M*? Si has respost que sí, escriu el càlcul.	☐ Sí ☐ No Càlcul:
g	Si et donen dues posicions, *A* i *B,* pots escriure una fórmula general que mostri com calcular el punt mitjà *M*? Si has respost que sí, escriu la fórmula.	☐ Sí ☐ No Fórmula:
h	Contesta només si has escrit la fórmula: has mogut el punt *A* o *B* per comprovar que el teu sistema per calcular el punt mitjà serveix també per a altres posicions de *A* i *B*?	☐ Sí ☐ No

Sobre l'ús de Geogebra		
i	Usar Geogebra t'ha ajudat per representar i veure clar el plantejament de l'activitat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
j	Usar Geogebra t'ha ajudat per trobar les coordenades dels punts?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
k	Usar Geogebra t'ha ajudat per poder entendre el que vas fent i avançar en el procés de resoldre?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
l	Usar Geogebra t'ha ajudat per resoldre no tan sols el problema concret sinó per trobar fórmules generals?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
m	Comparat amb el tipus de treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt

Activitat 2: *en fila*



La situació

A l'activitat 1, havies trobat la posició de l'arbre *M*, a mig camí entre *A* i *B*.

Suposa ara que no volem plantar un sol arbre entre *A* i *B*, sinó tres, de tal manera que tots els arbres formin una fila i que la distància entre dos arbres consecutius sigui sempre la mateixa.

Amb Geogebra

Construeix *M1*, *M2* i *M3*.
Guarda el fitxer.

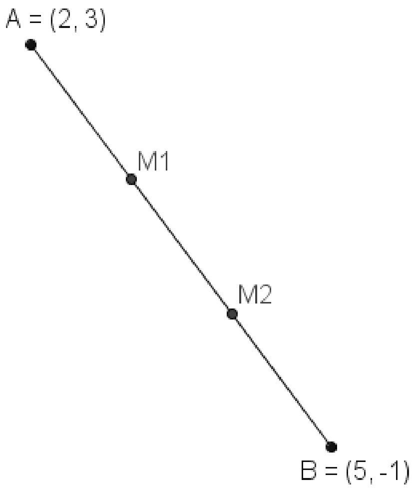
Per escrit

Sobre la resolució de la situació plantejada		
a	Has trobat el punt *M2*? Si l'has trobat, les seves coordenades són: (preferiblement, escriu les coordenades en forma de nombres racionals)	☐ Sí ☐ No Coordenades: (,)
b	Has trobat el punt *M1*? Si l'has trobat, les seves coordenades són: (preferiblement, escriu les coordenades en forma de nombres racionals)	☐ Sí ☐ No Coordenades: (,)
c	Has trobat el punt *M3*? Si l'has trobat, les seves coordenades són: (preferiblement, escriu les coordenades en forma de nombres racionals)	☐ Sí ☐ No Coordenades: (,)
d	Has utilitzat el botó "Punt mitjà o centre" del programa?	☐ Sí ☐ No
e	Has construït algun vector?	☐ Sí ☐ No
f	Has sumat vectors?	☐ Sí ☐ No
g	Has multiplicat escalars per vectors?	☐ Sí ☐ No
h	Contesta només si has trobat el punt *M2*: és possible escriure un càlcul amb les coordenades dels punts *A* i *B* que tingui com a resultat les coordenades del punt *M2*? Si has respost que sí, escriu el càlcul.	☐ Sí ☐ No Càlcul:

i	Pots escriure una fórmula general per al càlcul de *M2* on apareguin els símbols *A*, *B* i *M2*? Si has respost que sí, escriu la fórmula.	☐ Sí ☐ No Fórmula:
j	Contesta només si has trobat el punt *M1*: és possible escriure un càlcul amb les coordenades dels punts *A* i *B* que tingui com a resultat les coordenades del punt *M1*? Si has respost que sí, escriu el càlcul.	☐ Sí ☐ No Càlcul:
k	Pots escriure una fórmula general per al càlcul de *M1* on apareguin els símbols *A*, *B* i *M1*? Si has respost que sí, escriu la fórmula.	☐ Sí ☐ No Fórmula:
l	Contesta només si has trobat el punt *M3*: és possible escriure un càlcul amb les coordenades dels punts *A* i *B* que tingui com a resultat les coordenades del punt *M3*? Si has respost que sí, escriu el càlcul.	☐ Sí ☐ No Càlcul:
m	Pots escriure una fórmula general per al càlcul de *M3* on apareguin els símbols *A*, *B* i *M3*? Si has respost que sí, escriu la fórmula.	☐ Sí ☐ No Fórmula:
n	Contesta només si has escrit alguna de les tres fórmules: has mogut els punts *A* o *B* per comprovar que el teu sistema per calcular el punts *M1*, *M2* i *M3* serveix també per a altres posicions de *A* i *B*?	☐ Sí ☐ No

Sobre l'ús de Geogebra		
o	Usar Geogebra t'ha ajudat per representar i veure clar el plantejament de l'activitat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
p	Usar Geogebra t'ha ajudat per trobar les coordenades dels punts?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
q	Usar Geogebra t'ha ajudat per poder entendre el que vas fent i avançar en el procés de resoldre?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
r	Usar Geogebra t'ha ajudat per resoldre no tan sols el problema concret sinó per trobar fórmules generals?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
s	Comparat amb el tipus de treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt

Activitat 3: *també en fila*



La situació

Suposa que en comptes de plantar tres arbres més, en vols plantar dos, *M1* i *M2*, en les mateixes condicions de distàncies iguals entre arbres consecutius. Intenta trobar la solució i explica com ho fas.

Amb Geogebra

Construeix *M1* i *M2*.
Guarda el fitxer.

Per escrit

	Sobre la resolució de la situació plantejada	
a	Has trobat el punt *M1*? Si l'has trobat, les seves coordenades són: (preferiblement, escriu les coordenades en forma de nombres racionals)	☐ Sí ☐ No Coordenades: (,)
b	Has trobat el punt *M2*? Si l'has trobat, les seves coordenades són: (preferiblement, escriu les coordenades en forma de nombres racionals)	☐ Sí ☐ No Coordenades: (,)
c	Has construït algun vector?	☐ Sí ☐ No
d	Has sumat vectors?	☐ Sí ☐ No
e	Has multiplicat escalars per vectors?	☐ Sí ☐ No
f	Contesta només si has trobat el punt *M1*: és possible escriure un càlcul amb les coordenades dels punts *A* i *B* que tingui com a resultat les coordenades del punt *M1*? Si has respost que sí, escriu el càlcul.	☐ Sí ☐ No Càlcul:
g	Pots escriure una fórmula general per al càlcul de *M1* on apareguin els símbols *A*, *B* i *M1*? Si has respost que sí, escriu la fórmula.	☐ Sí ☐ No Fórmula:
h	Contesta només si has trobat el punt *M2*: és possible escriure un càlcul amb les coordenades dels punts *A* i *B* que tingui com a resultat les coordenades del punt *M2*? Si has respost que sí, escriu el càlcul.	☐ Sí ☐ No Càlcul:

i	Pots escriure una fórmula general per al càlcul de *M2* on apareguin els símbols *A*, *B* i *M2*? Si has respost que sí, escriu la fórmula.	☐ Sí ☐ No Fórmula:
j	Contesta només si has escrit alguna de les dues fórmules: has mogut els punts *A* o *B* per comprovar que el teu sistema per calcular el punts *M1* i *M2* serveix també per a altres posicions de *A* i *B*?	☐ Sí ☐ No

Sobre l'ús de Geogebra		
k	Usar Geogebra t'ha ajudat per representar i veure clar el plantejament de l'activitat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
l	Usar Geogebra t'ha ajudat per trobar les coordenades dels punts?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
m	Usar Geogebra t'ha ajudat per poder entendre el que vas fent i avançar en el procés de resoldre?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
n	Usar Geogebra t'ha ajudat per resoldre no tan sols el problema concret sinó per trobar fórmules generals?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
o	Comparat amb el tipus de treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt

Activitat 4: *allargant la fila*

La situació

En les activitats anteriors, has localitzat les posicions de punts entre *A* i *B*, tots alineats amb *A* i *B*, precisament. De fet, podries plantar els arbres cada vegada més a prop els uns dels altres, i si no fos que els troncs tenen un cert gruix i les arrels s'estenen per sota terra (és a dir, si en comptes d'arbres plantessis punts sense dimensions) podries col·locar-los tan a prop com volguessis.

També podries plantar un arbre alineat amb *A* i *B*, però que no estigués situat entre *A* i *B*.

Amb Geogebra

Planta un parell d'arbres alineats amb *A* i *B*, però que no estiguin situats entre *A* i *B,* i anomena'ls *P1* i *P2*.

Guarda el fitxer.

Per escrit

Sobre la resolució de la situació plantejada		
a	Has situat el punt *P1*? Si l'has col·locat, escriu les seves coordenades: (preferiblement, escriu les coordenades en forma de nombres racionals)	☐ Sí ☐ No Coordenades: (,)
b	Has situat el punt *P2*? Si l'has col·locat, escriu les seves coordenades: (preferiblement, escriu les coordenades en forma de nombres racionals)	☐ Sí ☐ No Coordenades: (,)
c	Has construït algun vector?	☐ Sí ☐ No
d	Has sumat vectors?	☐ Sí ☐ No
e	Has multiplicat escalars per vectors?	☐ Sí ☐ No
f	Contesta només si has col·locat el punt *P1*: és possible escriure un càlcul amb les coordenades dels punts *A* i *B* que tingui com a resultat les coordenades del punt *P1*? Si has respost que sí, escriu el càlcul.	☐ Sí ☐ No Càlcul:

g	Pots escriure una fórmula per al càlcul de *P1* on apareguin els símbols *A*, *B* i *M1*? Si has respost que sí, escriu la fórmula.	☐ Sí ☐ No Fórmula:
h	Contesta només si has col·locat el punt *P2*: és possible escriure un càlcul amb les coordenades dels punts *A* i *B* que tingui com a resultat les coordenades del punt *P2*? Si has respost que sí, escriu el càlcul.	☐ Sí ☐ No Càlcul:
i	Pots escriure una fórmula per al càlcul de *P2* on apareguin els símbols *A*, *B* i *P2*? Si has respost que sí, escriu la fórmula.	☐ Sí ☐ No Fórmula:
j	Contesta només si has escrit alguna de les dues fórmules: has mogut el punt *A* o *B* per comprovar que el teu sistema per calcular el punts *P1* i *P2* serveix també per a altres posicions de *A* i *B*?	☐ Sí ☐ No
k	Pots escriure una fórmula general per al càlcul de la posició d'un punt qualsevol *P* que estigui alineat amb *A* i *B*? Si has respost que sí, escriu la fórmula.	☐ Sí ☐ No Fórmula:

Sobre l'ús de Geogebra		
l	Usar Geogebra t'ha ajudat per representar i veure clar el plantejament de l'activitat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
m	Usar Geogebra t'ha ajudat per trobar les coordenades dels punts?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
o	Usar Geogebra t'ha ajudat per poder entendre el que vas fent i avançar en el procés de resoldre?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
p	Usar Geogebra t'ha ajudat per resoldre no tan sols el problema concret sinó per trobar fórmules generals?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
q	Comparat amb el tipus de treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt

Activitat 5: *el treball d'arrossegar un objecte pesant Primera part*

La situació

Volem arrossegar un objecte molt pesant (tan pesant que no tenim prou força per aixecar-lo) per una superfície horitzontal, en línia recta. El lliguem amb una corda i estirem (com en aquells concursos d'arrossegar pedres que són tradicionals en alguns indrets). La corda, quan tiba, forma un cert angle amb la horitzontal.

Amb Geogebra

Representa la situació.

Per escrit

Sobre la situació plantejada		
a	Has representat el desplaçament? Si has respost que sí, què has usat?	☐ Sí ☐ No ☐ Rectes ☐ Segments ☐ Vectors ☐ Una altra cosa Quina?
b	Has representat la força? Si has respost que sí, què has usat?	☐ Sí ☐ No ☐ Rectes ☐ Segments ☐ Vectors ☐ Una altra cosa Quina?
c	Has marcat l'angle que formen el desplaçament i la força?	☐ Sí ☐ No

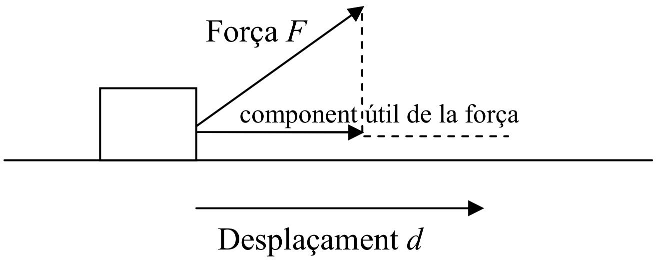
d	Has representat l'objecte? Si has respost que sí, què has usat?	☐ Sí ☐ No ☐ Un punt ☐ Un polígon ☐ Un cercle ☐ Una altra cosa Quina?

Sobre l'ús de Geogebra		
e	Usar Geogebra t'ha ajudat per representar i veure clar el plantejament de l'activitat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
f	Comparat amb el tipus de treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt

Activitat 5: *el treball d'arrossegar un objecte pesant Segona part*

Què és el que ja saps sobre una situació com aquesta

Com ja saps, existeix una magnitud física anomenada treball que, en un cas simple com aquest, en què la força aplicada és constant i el desplaçament rectilini, es calcula com el producte de la component útil de la força pel desplaçament. La component útil és aquella que té la mateixa direcció i sentit que el desplaçament.



En el Sistema Internacional d'unitats, la unitat per a la força és el Newton (N) i la unitat per a la distància és el metre (m). Per al treball, la unitat és el Joule (J): 1J=1N·1m

Amb Geogebra

El programa Geogebra permet una construcció en la qual es pugui visualitzar la força *F* i el seu valor en Newtons, el desplaçament *d* i el seu valor en metres, l'angle α que formen la força i el desplaçament, així com la representació gràfica i el valor de la component útil de la força.

També es pot calcular i visualitzar el valor del treball.

Per escrit

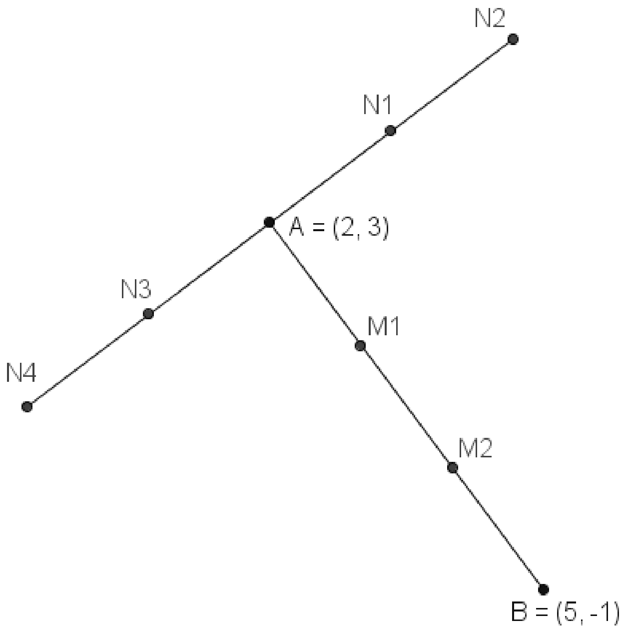
Sobre la resolució de la situació plantejada		
a	Has calculat el mòdul de la component útil de la força?	☐ Sí ☐ No
b	Si coneixes la força *F*, el desplaçament *d* i l'angle que formen, pots escriure una fórmula de càlcul per obtenir la component útil de la força? Si has respost que sí, escriu la fórmula.	☐ Sí ☐ No Fórmula:

c	Si coneixes la força *F*, el desplaçament *d* i l'angle que formen, pots escriure una fórmula de càlcul per obtenir el treball *W*? Si has respost que sí, escriu la fórmula	☐ Sí ☐ No Fórmula:
d	Només si has calculat la component útil i el treball: has modificat la força o el desplaçament per veure com varien la component útil i el treball?	☐ Sí ☐ No
e	Si els mòduls de *F* i *d* no varien i només varia l'angle que formen (entre 0 i 90 graus), per a quin angle serà major el treball *W*?	☐ Sempre valdrà el mateix ☐ 45 graus ☐ 0 graus ☐ 90 graus
f	Si cal fer un treball *W* per arrossegar una distància *d*, com ha de ser l'angle entre *F* i *d* perquè haguem de fer la mínima força possible?	☐ L'angle no importa ☐ 45 graus ☐ 0 graus ☐ 90 graus

Sobre l'ús de Geogebra		
g	Usar Geogebra t'ha ajudat per representar i veure clar el plantejament de l'activitat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
h	Usar Geogebra t'ha ajudat per trobar la component útil de la força i el treball?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
i	Usar Geogebra t'ha ajudat per poder entendre el que vas fent i avançar en el procés de resoldre?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
j	Usar Geogebra t'ha ajudat per resoldre no tan sols el problema concret sinó per trobar fórmules generals?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
k	Comparat amb el tipus de treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt

Activitat 6: *en perpendicular*

La situació



En l'activitat 1, l'objectiu era plantar un arbre a mig camí del segment que unia dos punts, *A* i *B*. A les activitats 2 i 3 plantàvem més arbres entre aquests punts.

Ara, el plantejament serà el següent: hem plantat dos arbres entre *A* i *B* (com a l'activitat 3), però volem plantar-ne quatre més, seguint la mateixa distància entre arbre i arbre, però partint d'*A* i en perpendicular al segment *AB*. En aquest esquema pots visualitzar la situació:

Amb Geogebra

Construeix *N1*, *N2*, *N3* i *N4*.
Guarda el fitxer.

Per escrit

Sobre la resolució de la situació plantejada		
a	Has situat el punt *N1*? Si l'has col·locat, escriu les seves coordenades: (preferiblement, escriu les coordenades en forma de nombres racionals)	☐ Sí ☐ No Coordenades: (,)
b	Has situat el punt *N2*? Si l'has col·locat, escriu les seves coordenades: (preferiblement, escriu les coordenades en forma de nombres racionals)	☐ Sí ☐ No Coordenades: (,)
c	Has situat el punt *N3*? Si l'has col·locat, escriu les seves coordenades: (preferiblement, escriu les coordenades en forma de nombres racionals)	☐ Sí ☐ No Coordenades: (,)

d	Has situat el punt *N4*? Si l'has col·locat, escriu les seves coordenades: (preferiblement, escriu les coordenades en forma de nombres racionals)	☐ Sí ☐ No Coordenades: (,)
e	Per trobar la direcció perpendicular al segment *AB*, has utilitzat:	☐ Res, perquè no l'he trobada ☐ La recta perpendicular ☐ Un vector perpendicular ☐ Una altra cosa. Quina?
f	Escriu l'equació vectorial i l'equació implícita de la recta que conté els punts *A* i *B*.	Vectorial: Implícita:
g	Només si has trobat la direcció perpendicular, escriu l'equació vectorial i l'equació implícita de la recta perpendicular al segment *AB*.	Vectorial: Implícita:
h	Només si has escrit les equacions implícites de les dues rectes anteriors, mou el punt *A* o el punt *B* i observa els coeficients de les dues equacions.	☐ No veig cap relació entre els coeficients. ☐ Sí que veig una relació entre els coeficients. Escriu quina:

	Sobre l'ús de Geogebra	
i	Usar Geogebra t'ha ajudat per representar i veure clar el plantejament de l'activitat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
j	Usar Geogebra t'ha ajudat per trobar les coordenades i les equacions?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
k	Usar Geogebra t'ha ajudat per poder entendre el que vas fent i avançar en el procés de resoldre?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
l	Usar Geogebra t'ha ajudat per resoldre no tan sols el problema concret sinó per trobar fórmules generals?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
m	Comparat amb el tipus de treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt

Activitat 7: *quadrat*

La situació

Es vol delimitar una superfície, un camp de conreu, amb forma quadrada. Dos dels vèrtexs del quadrat seran unes fites naturals: un arbre Q que està a 370 m oest i 150 m sud (-3,7 , -1,5) i una roca R que està a 200 m oest i 230 m nord (-2,0 , 2,3). Els vèrtexs Q i R defineixen un dels costats del quadrat.

Amb Geogebra

a) Troba la posició dels dos vèrtexs que falten, S i T.

b) Al centre d'aquest camp quadrat s'hi vol construir una caseta per guardar-hi estris. Troba la posició d'aquest centre M.

Per escrit

Resol per escrit: troba S, T i M.

Sobre l'ús de Geogebra		
a	Usar Geogebra t'ha ajudat per representar i veure clar el plantejament de l'activitat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
b	Usar Geogebra t'ha ajudat per trobar les coordenades de S, T i M?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
c	Usar Geogebra t'ha ajudat per poder entendre el que vas fent i avançar en el procés de resoldre?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
d	Comparat amb el tipus de treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt

Activitat 8: *a la mateixa distància de tres punts*

La situació

A la masia, es llança un repte matemàtic entre una colla d'amics: S'ha enterrat una caixa que està exactament a la mateixa distància de tres punts, l'arbre $A(2\ ,\ 3)$, l'arbre $B(5,\ -1)$ i la casa $O(0\ ,\ 0)$. Guanya qui la localitzi i la desenterri fent un sol forat.

Per resoldre el problema, un de la colla recorda les classes de geometria. Sap que el punt que és a la mateixa distància dels tres vèrtexs d'un triangle s'anomena circumcentre i que està a la intersecció de les tres mediatrius del triangle. Una mediatriu és la recta que passa pel punt mitjà d'un costat i és perpendicular a aquest costat. El circumcentre és el centre de la circumferència que passa pels tres vèrtexs i, per tant, està a un radi de distància de cada un d'ells.

Amb Geogebra

Troba les coordenades exactes del lloc on està enterrada la caixa. Pensa que n'hi ha prou amb trobar la intersecció de dues mediatrius.

Per escrit

Posa sobre el paper els càlculs per trobar les coordenades del punt.

	Sobre l'ús de Geogebra	
a	Usar Geogebra t'ha ajudat per representar i veure clar el plantejament de l'activitat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
b	Usar Geogebra t'ha ajudat per trobar les coordenades del punt?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
c	Usar Geogebra t'ha ajudat per poder entendre el que vas fent i avançar en el procés de resoldre?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
d	Comparat amb el tipus de treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt

Qüestionari final		
Llegeix les afirmacions i marca fins a quin punt hi estàs d'acord: gens, poc, bastant o molt.		
a	Realitzar activitats amb Geogebra ha fet les classes més amenes?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
b	Realitzar activitats amb Geogebra ha fet les classes més interessants?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
c	Realitzar activitats amb Geogebra t'ha fet sentir que tenies més participació i iniciativa en el procés d'aprenentatge?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
d	Començar primer per activitats concretes amb Geogebra i aprofitar-ho per fer després la teoria t'ha ajudat a comprendre millor els continguts matemàtics?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
e	Començar primer per activitats concretes amb Geogebra i aprofitar-ho per fer després la teoria ha facilitat la teva implicació i la teva motivació?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
f	Comparades amb les classes de prendre apunts, les activitats amb Geogebra t'han fet pensar més sobre el que estaves fent?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
g	Les activitats amb Geogebra t'han semblat difícils?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
h	Has trobat un salt important de dificultat entre les classes amb Geogebra i les classes en què havies de prendre apunts i fer exercicis a la llibreta?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
i	Les activitats amb Geogebra sobre col·locar punts en una línia t'han ajudat a entendre millor la teoria de les equacions de la recta?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
j	Les activitats amb Geogebra sobre estirar i arrossegar un objecte t'han ajudat a entendre millor la teoria del producte escalar?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
k	Les activitats amb Geogebra t'han ajudat a entendre millor la teoria sobre vectors que són perpendiculars?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
l	Usar Geogebra t'ha ajudat a representar i plantejar les activitats dels fulls que repartia el professor?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
m	Usar Geogebra t'ha ajudat per poder entendre el que vas fent i avançar en el procés de resoldre les activitats fetes a l'aula d'informàtica?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
n	Les activitats amb Geogebra t'han ajudat a passar del casos concrets cap a les fórmules generals?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt
o	En general, comparat amb el tipus de treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?	☐Gens ☐Poc ☐Bastant ☐Molt

Valoració personal escrita

A continuació tens espai per escriure els comentaris que vulguis sobre el que penses del treball que hem fet al tema de geometria analítica. Pots escriure sobre el que t'ha agradat i el que no, el que has trobat útil i el que creus que no t'ha servit, el que t'ha semblat fàcil o has trobat difícil, etc.

Annex 2: Registre diari de la implementació a l'aula

Sessions

<table>
<tr><td colspan="2">Dimecres, 13 de març de 2008
Sessió 0: Introducció a l'ús de Geogebra</td></tr>
<tr><td>Hora: 8.30 a 9:30</td><td>Lloc: aula d'informàtica 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Assistents: tot el grup</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objectius:
Desenvolupar una sessió d'introducció al Geogebra perquè l'alumnat es familiaritzi amb les característiques bàsiques del funcionament del programa, i que tingui una primera visió de quines són les potencialitats per treballar aspectes del currículum.
Destacar a través d'alguns exemples senzills la correspondència entre l'àrea gràfica i l'àrea algebraica del programa.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desenvolupament:
La distribució de la pantalla: menú, botons, àrea gràfica, àrea algebraica, barra d'entrada i barra de comanda.
L'àrea gràfica: com usar els botons; com modificar l'aspecte dels eixos. Com crear elements i com esborrar-los.
Exemple: construcció d'un triangle qualsevol. Marcar els angles. Modificar la figura des de l'àrea gràfica i des de l'àrea algebraica. Comprovar el teorema del sinus introduint els càlculs des de la barra d'entrada.
Exemple: rectes. Traçat gràfic i entrada algebraica; intersecció de dues rectes com a solució d'un sistema d'equacions.
Exemple: vectors. Traçar i definir mitjançant components. Producte d'un escalar per un vector. Suma de vectors. Operacions combinades amb punts i vectors.
Exemple: funcions en general. Definir una paràbola i modificar-la; definir una funció racional amb asímptotes verticals.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observacions durant la sessió:
Tot l'alumnat segueix bé la presentació dels elements del programa i reprodueix els exemples. També modifica els elements definits per veure com canvia la representació i la part algebraica. Només cal alguna intervenció puntual del professor per resoldre algun dubte sobre l'ús d'algun botó o la sintaxi d'alguna fórmula per a la barra d'entrada del programa.
Es desenvolupen els continguts previstos. S'assoleixen els objectius.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Dilluns, 28 d'abril de 2008
Sessió 1</td></tr>
<tr><td>Hora: 10:30 a 11:30</td><td>Lloc: aula d'informàtica 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Assistents
Manel · Juan · <s>Dídac</s>
Youssef · <s>Jesús</s> · Soslan
M. Carmen · Alba · Alberto
Toni · Federico · José
Raquel · Neus · Erik
Angelo · Ivan
Marta · Tanya</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objectius:
Recordar els continguts elementals introductoris sobre punts i vectors, ja vistos a 4t d'ESO.
Usar el programa Geogebra com a suport de les explicacions del professor.
Ensenyar el procés de transferència de fitxers Geogebra al professor mitjançant la intraweb.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desenvolupament:
Punt. Coordenades d'un punt. Vector amb origen a un punt A i extrem a un altre punt B. Components d'un vector. Mostro als alumnes com poden traçar la recta paral·lela a l'eix d'abscisses que passa per A i la paral·lela a l'eix d'ordenades que passa per B, per construir el triangle rectangle on s'observen les components del vector. Els alumnes reprodueixen la figura als seus ordinadors i assagen de moure el punts origen i extrem. Usant el catets del triangle, justifico perquè escric a la pissarra AB=B-A.
Càlcul del mòdul a la pissarra pel Teorema de Pitàgores amb un vector d'exemple. Tots els alumnes reconeixen bé la situació. Tot seguit calculen la longitud del mateix vector amb Geogebra. Veuen que els càlculs coincideixen.
Càlcul a la pissarra de l'angle que forma el vector d'exemple amb l'eix d'abscisses. Pregunto com, i de seguida em responen que amb la tangent (i l'arc tangent). Faig el càlcul. Tot seguit els ensenyo com marcar l'angle amb Geogebra. Veuen que els càlculs coincideixen.
Punt "desplaçat" segons el vector d'exemple. Marco un punt d'exemple D i, a la barra d'entrada de Geogebra, sumo les coordenades del punt i el vector per obtenir el punt D'. Els pregunto què passarà si en comptes de sumar el vector sumo el mateix vector multiplicat per 1/2. Modifiquen el punt D' segons això i veuen el resultat.
Els explico què significa sumar punts i vectors: en realitat és sumar vectors. Per comoditat parlem de punt, però és el vector que va de l'origen al punt considerat. A la pissarra, sobre un dibuix d'un punt "desplaçat" segons un vector, afegeixo el vector de l'origen al punt de partida i de l'origen al punt extrem. Traço el paral·lelogram.
Per acabar, els ensenyo com poden transferir-me els fitxers Geogebra mitjançant la intraweb. Primer el graven al seu llapis de memòria (l'Angelo s'ofereix voluntari i ho fa). Després entren a la intraweb, amb usuari i contrasenya, i van a l'apartat de transferència. L'Angelo m'envia el seu fitxer i els altres veuen a través del projector de l'aula com m'apareix a la meva carpeta de la intraweb.</td></tr>
</table>

Observacions durant la sessió:
No observo que cap alumne tingui dificultats en seguir les explicacions sobre els continguts. Sí que algunes vegades s'entrebanquen a l'hora de representar amb Geogebra, però és per falta de pràctica amb l'ús del programa. De tota manera, en un segon intent o amb una indicació puntual avancen sense dificultat.

Dimecres, 30 d'abril de 2008

Sessió 2: activitat 1

Hora: 8:30 a 9:30	**Lloc:** aula d'informàtica 1

Assistents

Manel	Juan	~~Dídac~~
Youssef	~~Jesús~~	Soslan
M. Carmen	Alba	Alberto
Toni	Federico	José
Raquel	Neus	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	

Objectius:
Lliurar, en paper, l'activitat 1 als alumnes perquè la realitzin.
Recollir els fulls escrits pels alumnes i els fitxers Geogebra.

Desenvolupament:
Activitat 1: *a mig camí*.
Lliuro als alumnes els fulls de l'activitat 1. Llegim el plantejament i el que demana l'activitat (jo en veu alta). Els comento que tenen temps suficient per treballar aquesta activitat amb Geogebra i que no es precipitin a l'hora d'omplir el formulari. Com que és la primera vegada que treballen amb aquest estil d'activitats, cal fer-los aquesta mena d'indicacions. Tot plegat, entre entrar, engegar els equips i donar les explicacions preliminars, s'ha consumit el primer quart d'hora (aproximadament) de la sessió.
Quan comencen a treballar, faig algunes fotos i enregistro un vídeo breu (amb la mateixa càmera fotogràfica) en el qual es veu un recorregut per l'aula d'informàtica 1. M'aturo en alguna pantalla.
Quan resta un quart d'hora per acabar la classe pràcticament tots han acabat el treball amb Geogebra. No m'han fet ni una sola pregunta sobre l'ús dels botons. Han tardat una mitja hora. Veig com omplen el formulari de l'activitat.
En aquest tram final, els recordo que han d'entrar a la intraweb del centre per enviar-me els fitxers Geogebra. Cinc alumnes ho fan sense problemes, però els altres, per falta de pràctica, tenen dificultats, bé perquè no recorden l'usuari o la contrasenya, o bé perquè no s'acaben d'aclarir amb el procediment. Els ajudo en la transferència de fitxers: explico a través del projector el procés d'entrar a la intraweb i enviar un fitxer. Recullo els papers de l'activitat 1.

Observacions durant la sessió: Hi ha una bona actitud de treball per part de tot l'alumnat. Caldrà veure amb detall les respostes, però la meva impressió en voltar per l'aula i mirar les pantalles és que la majoria són capaços de trobar el punt *M* per un mètode diferent a usar el botó "punt mitjà" del programa. Em fixo en alguns processos de resolució que em criden l'atenció. Anoto aquests: La Neus troba el punt mitjà construint el segment *AB* i col·locant el punt *M* en aquest segment. Mesura les distàncies *AM*, *MB* i *AB*. Mou el punt *M* fins que *AM*=*MB*. És una manera d'aproximar-se "manualment" a la solució del cas particular. Li comento que si moc el punt *A* o el punt *B*, *M* deixa d'estar al mig. En Federico ha arribat el primer, molt ràpid, a la conclusió *M*=(*A*+*B*)/2. La M. Carmen ha arribat sola al resultat *M*=*B*-1/2*AB*. En José traça el típic paral·lelogram amb un vèrtex a l'origen de coordenades. Observo un fet curiós en fer una ullada ràpida a les respostes escrites d'alguns alumnes: marquen "no" a la pregunta "Has multiplicat escalars per vectors?" però per calcular *M* multipliquen un escalar per un vector. És a dir, que d'alguna manera saben quines operacions han de fer però declaren el contrari del que en realitat han fet.
Observacions després d'examinar les respostes: L'examen de les respostes escrites i, sobretot, dels fitxers Geogebra revela que els alumnes han usat 4 diferents estratègies de resolució. Són les següents. Hi ha 5 alumnes sobre 17 (Marta, Tanya, Neus, Juan i Soslan) que han marcat un punt mòbil en el segment *AB* de manera que "manualment" ajusten la posició fins que el col·loquen al mig. Amb això, són capaços de trobar el punt mitjà. Dos d'ells, Marta i Tanya, no presenten cap càlcul per trobar les coordenades ni cap fórmula general, però Juan i Soslan sí que ho fan. Juan, fins i tot, dóna la fórmula de la semisuma de coordenades dels punts *A* i *B*. És un fet curiós que escrigui una fórmula general correcta després sense haver usat la barra d'entrada algebraica de Geogebra i ni tan sols haver representat un punt mitjà que ho segueixi essent després de moure els punts *A* i *B*. Hi ha 2 alumnes sobre 17 (Toni i José) que dibuixen els vectors *OA* i *OB* i els sumen, però no escriuen cap càlcul concret ni cap fórmula general. Hi ha 5 alumnes sobre 17 (Ivan, Youssef, Angelo, Federico i Erik) que sumen les coordenades de *A* i *B* i divideixen per 2. Presenten el càlcul concret i donen la fórmula general. Hi ha 5 alumnes sobre 17 (Alberto, Manel, Raquel, M. Carmen i Alba) que construeixen el vector *AB*, el multipliquen per 1/2 i sumen això a les coordenades de *A* (o fan servir la variant de restar-ho a les coordenades de *B*). Presenten el càlcul concret i donen la fórmula general.

Dilluns, 5 de maig de 2008

Sessió 3: activitats 2 i 3

Hora: 10:30 a 11:30	**Lloc:** aula d'informàtica 1

Assistents

Manel	Juan	Dídac
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	Alba	Alberto
Toni	Federico	José
Raquel	Neus	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	

Objectius:

Lliurar, en paper, les activitats 2 i 3 als alumnes perquè les realitzin.
Recollir els fulls escrits pels alumnes i els fitxers Geogebra.

Desenvolupament:

Activitat 2: *en fila*. Activitat 3: *també en fila*.
Lliuro als alumnes els fulls de l'activitat 2 i els comento que és una continuació de l'activitat 1, de tal manera que han de tenir present la feina que van fer durant la sessió anterior. Els demano que omplin el formulari i que no deixin en blanc cap resposta del tipus sí/no o multiopció.
Mentre dono les explicacions introductòries, la professora Gemma Vilarrubias les grava amb la càmera. Gemma actuarà com a professora de suport per atendre incidències, preguntes i dubtes. Després, durant la sessió, enregistro un vídeo que recorre els llocs o són els alumnes i faig algunes fotos.
Al cap de mitja hora aproximadament d'haver iniciat la sessió, m'adono que hi ha dos alumnes que ja han trobat els punts que demanen les dues activitats i que pràcticament han acabat d'escriure les respostes sobre els papers. Són Alberto i Manel. Altres alumnes van més a poc a poc. És el cas de Federico i Erik, que rumien durant força estona com poden escriure fórmules generals per al que han fet.
Ara que els alumnes ja han adquirit l'experiència de l'activitat 1 i comencen a estar familiaritzats amb l'entorn de treball, es fan més evidents les diferències dels temps que necessiten per representar les activitats i escriure les respostes.
Quan falten vint minuts per acabar, alguns alumnes ja m'envien els fitxers a través de la intraweb i enllesteixen les respostes escrites (Alberto, Manel, Angelo), d'altres els segueixen de prop (Raquel, M. Carmen, Alba) i alguns altres encara no han començat l'activitat 3 (Federico, Erik, Iván, Jesús). Aquests últims acaben ràpidament l'activitat 3, i envien els fitxers un parell de minuts després que hagi tocat el timbre que marca el final de la sessió.

Observacions durant la sessió:

Hi ha una bona actitud de treball per part de tot l'alumnat.
Cal destacar que hi ha dos alumnes que no eren presents a la sessió anterior (absències per motius justificats): Jesús i Dídac. Es nota que el sistema de treball els ve de nou. Fan esforços per adaptar-se. No els he donat cap explicació especial que compensi l'absència a la sessió anterior. Serà interessant veure com han abordat les activitats.

Quan recorro l'aula tinc la impressió que la majoria d'alumnes tendeix a enfocar les activitats 2 i 3 de la mateixa manera que ho van fer a l'activitat 1. És a dir, que qui va usar una estratègia tipus punt-vector director la continua usant, i el mateix passa amb qui va usar la semisuma de coordenades.
Observacions després d'examinar les respostes: Activitat 2 Tots els alumnes troben les coordenades correctes dels punts demanats, les quals apareixen als fitxers Geogebra i a les respostes escrites. Jesús no lliura les respostes escrites ni el fitxer, encara que ha treballat sobre l'activitat, però no se n'ha sortit. Cal tenir en compte que aquest alumnes no va assistir a la sessió anterior. En canvi, Dídac, que tampoc no hi va ser, se'n surt bé. Els alumnes han utilitzat quatre estratègies diferents de resolució, tres de les quals ja havien aparegut a l'activitat anterior. Hi ha 2 alumnes sobre 18 (Juan i Soslan) que utilitzen el botó "punt mitjà" del programa. Però, curiosament, a les respostes escrites presenten les fórmules de càlcul corresponents a la semisuma de les coordenades dels punts extrems. És a dir, que no usen l'àlgebra al programa Geogebra però sí que la presenten per escrit. Això ja ho feien a l'activitat anterior, amb la diferència que havien usat l'estratègia del punt mòbil que ajustaven manualment. Hi ha 2 alumnes sobre 18 (Neus i Youssef) que, com en l'activitat anterior, usen punts mòbils que ajusten manualment a la posició buscada. Però, també curiosament, a les respostes escrites presenten les fórmules on sumen les coordenades d'un dels extrems al vector director multiplicat pel nombre adequat. Hi ha 8 alumnes sobre 18 (Dídac, Raquel, Angelo, Ivan, Erik, Federico, Tanya i Marta) que apliquen sucessivament l'estratègia de la semisuma dels punts extrems, primer amb *A* i *B* per trobar *M2*, i després amb *A* i *M2* per trobar *M1* i amb *M2* i *B* per trobar *M3*. Ivan, Angelo, Federico i Erik ja havien usat l'estratègia de la semisuma a l'activitat 1. Tanya i Marta havien usat l'estratègia del punt mòbil a l'activitat 1 però ara usen l'àlgebra tant a Geogebra com per escrit. Raquel és un cas curiós, ja que va usar l'estratègia del vector multiplicat per un nombre i sumat a un dels extrems a l'activitat 1 i ara utilitza la semisuma. Dídac no va estar present a l'activitat anterior. Hi ha 6 alumnes sobre 18 (Alberto, Manel, M. Carmen, Alba, José i Toni) que usen l'estratègia tipus "equació vectorial de la recta", és a dir, sumar les coordenades d'un extrem, amb el vector director multiplicat pel nombre adequat. Ja ho havien fet a l'activitat 1, excepte José i Toni, que havien usat l'estratègia del "paral·lelogram", és a dir, sumar els vectors *OA* i *OB* i fer la meitat del vector resultant. Activitat 3 Tots els alumnes que lliuren els fitxers i les respostes escrites troben les coordenades correctes dels punts demanats. N'hi ha dos, Juan i Soslan, que no lliuren fitxers ni respostes escrites. La raó és que han consumit pràcticament tot els temps de la sessió per a l'activitat 2 i no han tingut temps d'abordar l'activitat 3. Són, però, l'excepció. El cas de Jesús ja l'he comentat a l'activitat 2: no va assistir a la sessió anterior. Però, a pesar que no lliura la resposta escrita per falta de temps, sí que lliura el fitxer de Geogebra en el qual s'aprecia que ha sumat el vector director *AB* multiplicat per un nombre a un dels extrems del segment.

Pel que fa a les estratègies de resolució dels 16 alumnes que han lliurat els fitxers i les respostes escrites:
Hi ha 15 alumnes que usen l'estratègia tipus "equació vectorial de la recta", és a dir, sumar les coordenades d'un extrem, amb el vector director multiplicat pel nombre adequat, tant si havien fet servir aquesta estratègia a l'activitat anterior com si no. Per tant, el tipus d'activitat i l'experiència adquirida ha portat a la gran majoria d'alumnes cap a aquest camí, que prefigura l'equació vectorial de la recta.
Hi ha un sol alumne (Ivan) que usa punts mòbils que ajusta manualment a la posició buscada. No presenta càlculs concrets. Fa un intent de presentar una fórmula general, però és incorrecta. A l'activitat 2 havia usat l'estratègia de la semisuma. En aquesta activitat 3 no ha pogut aplicar-la i no ha sabut trobar-li una alternativa algebraica.

Dimecres, 7 de maig de 2008

Sessió 4: activitat 4

Hora: 08:30 a 09:30 | **Lloc:** aula d'informàtica 1

Assistents

Manel	Juan	~~Dídac~~
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	Alba	Alberto
Toni	Federico	José
Raquel	Neus	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	

Objectius:
Lliurar, en paper, l'activitat 4 als alumnes perquè les realitzin. Indicar-los que, un cop acabada l'activitat 4, han de lliurar una explicació escrita on justifiquin les estratègies de resolució emprades a les activitats 1, 2, 3 i 4.
Recollir els fulls escrits pels alumnes i els fitxers Geogebra.

Desenvolupament:
Activitat 4: *allargant la fila.*
Lliuro als alumnes els fulls de l'activitat 4. Els demano que omplin el formulari i que no deixin en blanc cap resposta del tipus sí/no o multiopció.
Al cap de mitja hora aproximadament d'haver iniciat la sessió, la majoria dels alumnes han enllestit el treball amb Geogebra i omplen el qüestionari de l'activitat o bé ja l'han omplert i m'envien els fitxers a través de la intraweb de l'institut.
A mesura que van acabant l'activitat, lliuro a cadascú un full en blanc perquè em justifiquin per escrit perquè han usat unes determinades estratègies a l'hora de resoldre les activitats.
Enregistro un breu vídeo en què apareix un recorregut per l'aula.
Quan resta un quart d'hora per acabar la sessió, tots han acabat la feina i jo he recollit tots els papers. A continuació els introdueixo l'equació vectorial de la recta mitjançant una explicació a la pissarra de l'aula. Faig referència a les activitats 1, 2, 3 i 4 com a exemples que permeten construir punts alineats partint de dos punts donats *A* i *B*, o bé d'un punt donat *A* o *B* i un vector director (el qual és en realitat el vector *AB* o *BA*).

Construeixo la fórmula general de l'equació vectorial de la recta que passa per *P* i té vector director *v* i l'aplico a la recta que passa pel punt *A* de les activitats i té vector director *v=AB*. Com a paràmetre, utilitzo la lletra *t*. Faig els càlculs per a uns quants valors de *t* per mostrar com apareixen punts de la recta. Finalment, prenc l'equació vectorial general i separo les components per obtenir les equacions paramètriques. Ho aplico a la recta que passa per *A* i té vector director *v=AB.*
Observacions durant la sessió: Hi ha una bona actitud de treball per part de tot l'alumnat. Tal com jo preveia abans de començar la sessió, tots els alumnes han enllestit de pressa l'activitat 4. Es nota que han adquirit familiaritat amb el mètode de treball i que aprofiten l'experiència de les activitats anteriors. Segons observo quan recorro l'aula, no tenen cap problema per col·locar punts alineats amb *A* i *B* però que no pertanyen al segment *AB*. Tinc també la impressió que més alumnes que en les activitats anteriors utilitzen com a estratègia un punt, un paràmetre i un vector director. Caldrà confirmar-ho a l'anàlisi dels fitxers i les respostes escrites. Al final de la classe, noto que segueixen bé la introducció de l'equació vectorial de la recta i les equacions paramètriques.
Observacions després d'examinar les respostes: <u>Activitat 4</u> Tots els alumnes que lliuren els fitxers i les respostes escrites donen les coordenades de dos punts que estan efectivament alineats amb *A* i *B*. Tots utilitzen la barra d'entrada algebraica del programa Geogebra per introduir per sumar un punt (*A* o *B*) amb el vector *AB* multiplicat per un nombre. Per tant, després de passar per les activitats 1, 2 i 3, en aquesta activitat 4 només hi ha una sola estratègia per a tothom, la que prefigura l'equació vectorial de la recta. Només Ivan no lliura les respostes escrites perquè ha estat donant voltes a com resoldre amb Geogebra durant tota la sessió, però finalment lliura el fitxer en el qual es pot veure com ha resolt amb la mateixa estratègia que la resta dels alumnes. Hi ha 8 dels 16 alumnes que lliuren respostes escrites que donen una fórmula general per a la recta que és, de fet, l'equació vectorial, encara que ells encara no saben que s'anomena així. Deixen en blanc la pregunta 2 alumnes (no responen si és possible o no donar una fórmula general) i 5 contesten que no poden donar-la. Hi ha 1 alumna que dóna una fórmula però és incorrecta. <u>Estratègies de resolució de les activitats 1, 2, 3 i 4</u> Les respostes escrites sobre les estratègies de resolució van des d'unes poques línies fins al que vol ser una reproducció força extensa i fidel dels passos seguits amb Geogebra. Totes les respostes (excepte una, la d'Angelo) contenen el que es pot considerar la fórmula de l'equació vectorial de la recta. He escrit "es pot considerar" perquè en alguns casos està escrita pràcticament com ho faria el professor a la pissarra, i en altres casos apareix amb uns símbols que s'entenen a la primera però que no són els habituals [per exemple, *P=A*+(*x·u*), escrit així, on *A* simbolitza les coordenades del punt *A* de les activitats, *x* simbolitza el paràmetre i la lletra u, sense fletxa, indica les components del vector director].

Cal destacar que no els he dit que m'hagin d'escriure fórmules matemàtiques, sinó que els he demanat només una explicació sobre l'estratègia seguida, sense donar instruccions més concretes. I resulta que apareix la fórmula en totes les respostes menys en una (Angelo), encara que no és estrictament una excepció, ja que ofereix una explicació equivalent en llenguatge ordinari: *vaig sumar al punt A una petita part del vector u*. Per tant, tots han incorporat al seu bagatge l'equació vectorial de la recta com a estratègia principal. Com ja he explicat en els comentaris a les respostes d'aquesta sessió i de les anteriors, alguns alumnes ho han fet des del principi i altres s'hi han incorporat després.
En algunes respostes l'alumne s'esforça per reproduir gràficament les situacions de les activitats 1, 2, 3 i 4, i en altres respostes en té prou amb l'escriptura i alguna fórmula. Però el que realment m'interessa és si expliquen o no els motius que els han dut a emprendre una determinada estratègia. A continuació mostro què responen sobre això:

Manel: *He escollit fer-ho amb la fórmula* [escriu la fórmula] *perquè em resulta més fàcil i ràpid per resoldre els problemes... En les quatre activitats he utilitzat la mateixa fórmula per demostrar que no importa el punt.*

Youssef: Per a l'activitat 1 declara que ha utilitzat la fórmula del punt mitjà (encara que no l'escriu correctament) *perquè em va sortir bé el resultat*. Per a l'activitat 2 *vaig utilitzar el botó de distància per veure quan els 3 punts estaven a la mateixa distància perquè no sabia la fórmula* [es refereix a col·locar punts mòbils i ajustar manualment les distàncies]. Per a les activitats 3 i 4 vaig utilitzar la fórmula [escriu la fórmula vectorial] *perquè era més fàcil i ràpid de fer quan la coneixes*.

M. Carmen: Ha utilitzat la fórmula vectorial en totes les activitats. *He utilitzat aquest mètode perquè era la manera més clara i ràpida que vaig trobar*.

Toni: Per a l'activitat 1 usa el paral·lelogram. *La suma de vectors crea un paral·lelogram que em proporciona el punt mig del vector AB. Era l'única que vaig pensar*. Però a partir de l'activitat 2 ja utilitza la fórmula vectorial: *La vaig fer perquè era més senzilla i ràpida que l'utilitzada a l'activitat 1.*

Raquel: Per a l'activitat 1 utilitza la fórmula vectorial amb el vector director *AB*. *Ho vaig fer així perquè en tenir només dos punts si resto la meitat* [del vector *AB*] *a A o B em surt el punt mitjà.* Curiosament, per a l'activitat 2 utilitza el càlcul del punt mitjà com a semisuma de les coordenades dels extrems. Però a partir de l'activitat 3 torna a la fórmula vectorial: *no es podia aplicar la fórmula de l'exercici anterior* [ja no valia el càlcul de punts mitjans].

Angelo: Excepte a l'activitat 1, que calcula el punt mitjà com a semisuma, a la resta d'activitats usa la fórmula vectorial. *Vaig utilitzar aquest mètode perquè sumar vectors va ser la forma més fàcil de representar punts*.

Marta: Per a l'activitat 1 declara que va usar la fórmula de la semisuma per trobar el punt mitjà, però es tracta d'un error de memòria, ja que va col·locar un punt mòbil entre *A* i *B* i va ajustar manualment les distàncies. Sí que recorda bé que va usar la semisuma consecutivament per resoldre l'activitat 2. *Hi ha diferents maneres però jo vaig trobar que aquest mètode era bastant fàcil*. No diu res de l'activitat 3 i sobre l'activitat 4 declara que va usar la fórmula vectorial, encara que no justifica el perquè.

Juan: Escriu que ha calculat els punts mitjans de les activitats 1 i 2 amb la semisuma de coordenades *perquè era un càlcul que recordava del curs passat i era fàcil de fer-ho*. De fet, a la resolució de les activitats va escriure la fórmula correcta però amb Geogebra va utilitzar un punt mòbil a l'activitat 1 i el botó punt mitjà a l'activitat 2, tal com he reflectit als comentaris sobre les activitats corresponents. Sobre l'activitat 3 diu que *no vaig saber com resoldre l'exercici*. Per a l'activitat 4 escriu la fórmula vectorial.

Jesús: No va assistir a l'activitat 1. Les activitats 2 i 3 li van venir de nou, li va faltar temps i no va lliurar les respostes escrites. Però per a l'activitat 3 sí que va lliurar el fitxer, on es comprova que tal com declara va utilitzar la fórmula vectorial: *aquest sistema em semblava l'única manera de resoldre* [l'activitat 3] *dins de les meves capacitats*. Per a l'activitat 4 segueix la mateixa estratègia vectorial.

Alba: Presenta una resposta escrita pràcticament igual a la de M. Carmen. Per a l'activitat 1 també comenta: *Ho he fet d'aquesta manera perquè va ser la més clara que vaig veure*.

Federico: Explica el procediment concret que ha fer servir a cada activitat, sense entrar en opinions o valoracions: semisuma a la 1 i fórmula vectorial a partir de la 2. A l'activitat 4, on s'havien de marcar punts alineats amb *A* i *B* però no pertanyents al segment *AB*, escriu una frase final: *O sigui que li he sumat una mesura més gran que el propi vector*.

Neus: És força explícita en comentaris sobre el perquè de l'estratègia utilitzada. Sobre l'activitat 1, en què havia fet servir un punt mòbil que ajustava manualment, escriu: *Ho vaig decidir perquè no ho sabia fer d'una altra forma, i vaig estar mirant a veure si es podia fer d'una altra forma, i vaig trobar la distància i vaig estar rumiant, i vaig pensar en agafar els punts i que tots tinguin la mateixa distància, i a la finestra esquerra em posava les coordenades. Però era molt pesat per buscar-ho*. Fa el mateix a l'activitat 2, però a la 3 ja hi ha un canvi: *Aquí ja ho sabia fer de la fórmula* [escriu la fórmula vectorial *M1=A+¼u*] *i vaig trobar que era més senzill i vaig decidir fer-ho així, ja que és més senzill i ràpid de fer*.

Soslan: Comenta bàsicament el mateix que el seu company Juan, però és més breu i no explica els motius. També declara obertament per a l'activitat 3 que *No ho vaig saber resoldre*.

Alberto: *He escollit la fórmula P=A+(x·u) perquè crec que és la manera més ràpida i eficaç de resoldre aquest tipus d'exercicis. Amb aquest mètode es pot situar qualsevol* *punt en la línia entre A i B respectivament.. Encara que es moguin ens punts A i B es pot fer servir el mateix mètode ja que serveix per a qualsevol posició. He fet el mateix mètode per a les 4 activitats per demostrar que no importa la posició entre A i B, que sempre sortirà el punt indicat*.

José: Per a l'activitat 1 escriu que *Primer vaig pensar en fer una equació per trobar el punt a partir del vector AB però no sabia pas com fer-ho, per això em va semblar més fàcil fer una suma de vectors, em sembla que era la fórmula més senzilla*. A partir de l'activitat 2 usa la fórmula vectorial i a l'activitat 3 comenta: *Ja que a l'última vegada aquella fórmula va ser tan efectiva, vaig decidir utilitzar-la una altra vegada canviant el nombre variant* [es refereix al paràmetre].

Erik: Explica que a les activitats 1 i 2 ha usat la semisuma . A partir de la 3 fa servir la fórmula vectorial. Escriu en castellà: *La utilicé porque todas las actividades anteriores sirvieron para deducir esta fórmula*.

Els alumnes Tanya i Ivan no han lliurat les respostes escrites. Dídac era absent.

Dijous, 8 de maig de 2008

Sessió 5: equacions de la recta, punts alineats i vectors linealment dependents

Hora: 08:30 a 09:30 | **Lloc:** aula 0.5

Assistents

Manel	Juan	Dídac
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	Alba	Alberto
Toni	Federico	José
Raquel	Neus	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	

Objectius:

Mostrar els cinc tipus d'equació de la recta al pla: vectorial, paramètriques, contínua, implícita i explícita de manera progressiva i per aquest ordre, per veure com cada una s'obté algebraicament a partir de l'anterior.

Trobar les cinc formes de l'equació de la recta que passa pels punts *A* i *B* de les activitats anteriors.

Remarcar les característiques de cada tipus d'equació pel que fa a la possibilitat de llegir-hi un punt i un vector director.

Determinar si tres punts donats estan o no alineats.

Desenvolupament:

Començo la sessió recordant als alumnes les fórmules de les equacions vectorial i paramètriques que vaig introduir al final de la sessió anterior. Utilitzo la pissarra i per tant una presentació tradicional dels continguts, però també faig referència sovint a

les activitats anteriors amb Geogebra, ja que tots els punts que calia trobar estaven alineats i en aquelles sessions ja va aparèixer una estratègia de resolució que prefigurava l'equació vectorial. De les equacions paramètriques passo a la contínua aïllant el paràmetre i igualant. Després, a l'equació implícita, per a la qual remarco la importància dels coeficients de *x* i *y*, ja que en la forma $Ax+By+C=0$ el vector director es pot expressar com $v=(-B,A)$. A continuació, l'equació explícita, per a la qual subratllo la relació del pendent amb el vector director. De fet, l'equació explícita els és molt familiar, ja que l'han treballada a l'ESO i també durant aquest primer curs de Batxillerat, en la unitat didàctica de funcions elementals. Els alumnes prenen nota i de tant en tant pregunten sobre algun pas concret. Són preguntes sobre operacions algebraiques. Quan jo els pregunto si segueixen bé les meves explicacions, tots assenteixen. Faig una visió comparativa sobre la forma de les equacions i la informació que ens permeten llegir només de veure-les. En primer lloc, una qüestió tan òbvia com quines tenen paràmetre i quines no. Després, quines permeten llegir directament un punt i un vector director (vectorial, contínua, implícita) i quines també ens donen informació sobre la direcció, encara que no tan directa (implícita, explícita). Al final de la sessió, els pregunto com podem saber si tres punts *A*, *B* i *C* estan alineats o no. Dibuixo la situació. Hi ha un moment de silenci. L'Alberto em contesta que cal mirar els vectors *AB* i *AC*. Efectivament, si els punts estan alineats, les seves components són proporcionals (també les de *AB* i *BC*). A més els comento que si dos vectors *u* i *v* són paral·lels podem escriure que $u=tv$, on t és un nombre real. En canvi, si no ho són, no podem trobar cap nombre *t* per al qual es compleixi això. Els alumnes han mantingut l'atenció durant tota la sessió. Per acabar, i ja sobre el senyal del timbre que marca el final de la classe, els encarrego feina que comentarem a la pròxima sessió de tipus tradicional, la sessió 7: trobar totes les equacions de tres rectes, cada una de les quals ha de passar per dos punts donats (exercici 2 de la pàgina 180 del llibre).

Dilluns, 12 de maig de 2008 **Sessió 6: activitat 5**		
Hora: 10:30 a 11:30	**Lloc:** aula d'informàtica 1	
Assistents		
Manel	Juan	Dídac
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	~~Alba~~	Alberto
Toni	Federico	José
Raquel	~~Neus~~	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	
Objectius: Lliurar, en paper, l'activitat 5 (primera i segona part) als alumnes perquè les realitzin. Recollir els fulls escrits pels alumnes i els fitxers Geogebra.		

Explicar, després que els alumnes han lliurat els fulls, i a partir de l'observació de les activitats amb Geogebra que han fet, com modelitzar la situació que planteja l'activitat 5 i, a partir d'aquí, calcular el treball fet per la força *F*.
Desenvolupament: Activitat 5, primera part*: el treball d'arrossegar un objecte pesant.* Activitat 5, segona part. Lliuro als alumnes els fulls de la primera part de l'activitat 5. Llegeixo per a tots en veu alta el text explicatiu. Comencen a treballar. Mentre faig aquests comentaris inicials, la professora Gemma Vilarrubias ho enregistra un en vídeo. Aquesta professora hi és present durant tota la sessió per fer de suport en les possibles incidències i els dubtes que puguin sorgir per part dels alumnes. Al cap d'un quart d'hora, gairebé tots m'assenyalen que ja han acabat la feina amb el programa Geogebra. Em van lliurant les respostes escrites i m'envien els fitxers a través de la intraweb. A mesura que m'adono que han acabat la primera part, els lliuro el full de la segona part. Alguns són prou ràpids i ho veuen clar de seguida, però altres necessiten més temps, ben bé fins que sona el timbre que marca el final de la sessió. Enregistro un breu vídeo en què apareix un recorregut per l'aula. Uns quants alumnes pregunten, independentment els uns dels altres, a la professora Gemma o a mi, com es realitzen alguns càlculs amb el programa, com per exemple el cosinus d'un angle. Ja no recorden que ho van haver de practicar a la sessió introductòria del dia 13 de març. Els resolem els dubtes. Pràcticament quan sona el timbre que marca el final de la sessió, i quan ja tots els alumnes m'han lliurat els fitxers i les respostes escrites, dedico uns pocs minuts a modelitzar la situació. Ho veuen a través de la pantalla de projecció de l'aula. Construeixo la projecció de la força sobre el desplaçament i mesuro la longitud de la força, el desplaçament i la projecció. Mesuro l'angle que formen la força i el desplaçament. Després, calculo el treball com a producte dels mòduls dels vectors força i força útil, i també com a producte $F \cdot d \cdot \cos\alpha$. Els mostro que evidentment el resultat és el mateix. Modifico la força, tant el mòdul com l'angle que forma amb el desplaçament. Els pregunto: a igual mòdul, per a quin angle el treball és major? Tres o quatre veus em responen que zero graus.
Observacions durant la sessió: Hi ha una bona actitud de treball per part de tot l'alumnat. Observo a les pantalles que la majoria dels alumnes han representat l'objecte físic mitjançant un punt quan treballen sobre la primera part de l'activitat. Segons el que veig quan recorro l'aula, una de les principals dificultats que tenen és construir la projecció del vector força sobre el vector desplaçament (és a dir, la component útil de la força). Hi ha uns quants alumnes que construeixen el triangle rectangle que té per hipotenusa la força i catet horitzontal la component útil, però de tal manera que quan modifiquen la força els falla la projecció, ja que ho han fet dependre la segona de la primera. Observo també que una bona part dels alumes escriuen correctament $F_{útil} = F \cdot \cos\alpha$, on l'angle alfa és el que formen la força i el desplaçament.

Observacions després d'examinar les respostes:

Primera part

Predominen les estratègies que utilitzen vectors per representar la força i el desplaçament i un punt per representar l'objecte. Però cal fer distincions.

Hi ha 13 alumnes sobre 17 que utilitzen un vector col·locat en horitzontal per representar el desplaçament. Tres alumnes (José, Ivan i Soslan) tracen una recta per representar el desplaçament i un alumne (Juan) usa un segment.

Tots els alumnes utilitzen un vector per representar la força. De fet, tots cursen l'assignatura de física a primer de Batxillerat. És natural que associïn automàticament els conceptes de força i vector perquè representen les forces mitjançant vectors. Però tot i que a la física han usat algunes vegades vectors per representar desplaçaments, hi ha quatre alumnes que a la primer part de l'activitat no representen el desplaçament mitjançant un vector. Això suggereix que l'associació dels conceptes vector i desplaçament no és tan forta com l'associació vector i força.

Hi ha 11 alumnes sobre 17 que usen un punt per representar l'objecte. Cinc alumnes (Dídac, M. Carmen, Raquel, Tanya i Marta) el representen mitjançant un rectangle de dimensions considerables i un alumne (Jesús) fa servir un cercle, també força gran. Per tant, la majoria dels alumnes treballen amb un objecte puntual, la qual cosa és una notable abstracció, però una part significativa de l'alumnat considera un objecte extens, que representa amb una figura geomètrica simple.

Tots els alumnes marquen correctament l'angle que formen els vectors força i desplaçament, l'origen dels quals situen a l'objecte.

Com a fet curiós, m'adono que 11 alumnes sobre 17 (Toni, Erik, Ivan, Angelo, Dídac, Youssef, Jesús, M. Carmen, Raquel, Tanya i Marta) han traçat la força i el desplaçament de tal manera que la longitud del desplaçament coincideix amb la projecció de la força sobre la horitzontal. Dit d'una altra manera, el desplaçament i la força formen part d'un triangle rectangle; el desplaçament és el catet horitzontal i la força la hipotenusa.

Segona part

El que més em crida l'atenció després d'haver analitzar les respostes escrites i els fitxers és el notable contrast que existeix en molts casos entre unes respostes escrites correctes per al càlcul de la força útil i el treball (amb les fórmules generals perfectament escrites $F_{\text{útil}}= F{\cdot}\cos\alpha$; $W= F{\cdot}d{\cdot}\cos\alpha$) i no haver calculat amb Geogebra el mòdul de la força útil i el treball. Sí que la majoria dels alumnes representa força bé la situació amb Geogebra, però molts passen directament a la resposta escrita sense realitzar els càlculs amb el programari. Aquest fet es produeix (com a mínim amb la força útil o amb el treball, o amb tots dos) en 12 alumnes sobre 17 (Jesús, Federico, Dídac, Alberto, Manel, Soslan, Juan, Ivan, M. Carmen, Toni, José i Erik).

Hi ha 4 alumnes sobre 17 (Angelo, Youssef, Marta i Tanya) que no calculen amb Geogebra ni donen per escrit la força útil i el treball.

Hi ha una alumna (Raquel) que ho fa tot, tant amb Geogebra com per escrit.

De fet, cap alumne, excepte Raquel, calcula el treball amb Geogebra, encara que 13 alumnes (inclosa Raquel) escriuen la fórmula correcta.

També m'adono que la valoració sobre l'ús de Geogebra és en general més baixa que

en les activitats anteriors, inclosa la primera part d'aquesta. Abunden força més les respostes "poc". Això encaixa amb el fet que a molts alumnes no els ha calgut calcular la força útil i el treball amb Geogebra com a pas previ per obtenir raonadament les fórmules.
Igualment trobo remarcable que 10 alumnes sobre 17 responguin correctament que per a un angle de zero graus el treball serà màxim, i que 9 sobre 17 escriguin que la força mínima necessària es produeix per a un angle de zero graus, tot això malgrat que la gran majoria d'alumnes no han calculat la força útil ni el treball amb Geogebra, encara que sí que han escrit les fórmules correctes. En conjunt a les preguntes *e* i *f*, en 7 casos apareix erròniament la resposta 45^o, en un cas la resposta 90^o, i en un cas la resposta "sempre valdrà el mateix". En sis casos no hi ha resposta.

Dimecres, 14 de maig de 2008

Sessió 7: producte escalar

Hora: 08:30 a 09:30	**Lloc:** aula dibu2

Assistents

Manel	Juan	~~Dídac~~
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	~~Alba~~	Alberto
Toni	Federico	~~José~~
Raquel	Neus	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	

Objectius:
Introduir el producte escalar de dos vectors a partir del treball fet a l'activitat 5, com a producte de mòduls pel cosinus de l'angle que formen.
Presentar un camí alternatiu per calcular el producte escalar a partir de l'expressió dels vectors segons la base canònica del pla. Realitzar raonadament la demostració.
Usar les dues maneres de calcular el producte escalar per obtenir el cosinus de l'angle que formen dos vectors.
Presentar el producte escalar com a "test" per decidir si dos vectors són perpendiculars o no.
Partir del càlcul del producte escalar amb components per proporcionar un mètode senzill per trobar ràpidament un vector perpendicular a un vector donat.

Desenvolupament:
Els primers minuts de la sessió els dedico a comentar com es resol l'exercici 2 de la pàgina 180 del llibre, que vaig encarregar als alumnes al final de la sessió 5. Havien de trobar les cinc formes de l'equació de la recta (vectorial, paramètriques, contínua, implícita i explícita) per a tres casos en què es donen dos punts. Em centro en el primer cas. A la pissarra, escric ràpidament les equacions vectorial, paramètriques i contínua. Després, amb unes simples transformacions algebraiques passo de la contínua a la implícita i a l'explícita. Subratllo que en la forma implícita $Ax+By+C=0$ el vector director es pot expressar com $v=(v_1, v_2)=(-B,A)$, i en la forma explícita el pendent és $m=v_2/v_1$.

A continuació introdueixo el producte escalar de dos vectors. Per abordar-ho, recordo l'activitat 5, en la qual els alumnes havien d'obtenir una expressió per al càlcul del treball que realitza una força constant quan provoca un desplaçament rectilini, $W=F_{\text{útil}}\cdot d=F\cdot d\cdot\cos\alpha$, on *F* i *d* són els mòduls. A partir d'aquí els dic que $F\cdot d\cdot\cos\alpha$ ho anomenarem producte escalar dels vectors *F* i *d*. I que, en general, el producte escalar de dos vectors és el producte dels mòduls pel cosinus de l'angle que formen.
Comento que calcular els mòduls no és cap problema a partir de les components, però que calcular el cosinus es presenta més complicat. Llavors, els anuncio que buscaré un altre camí matemàtic per calcular el producte escalar només a partir de les components sense haver-me de preocupar de l'angle. Per fer-ho, escric un vector $u=(u_1,u_2)$ a partir de la base del pla $\{e_1,e_2\}$. Introduir la base del pla és fàcil: faig el dibuix d'un vector *u* amb origen a l'origen de coordenades, marco les components, marco la base del pla i després mostro que puc expressar $u=u_1e_1+u_2e_2$. Llavors, estic en condicions d'escriure el producte escalar de dos vectors així:
$u\cdot v=(u_1e_1+u_2e_2)\cdot(v_1e_1+v_2e_2)$. Desenvolupo el producte i raono que els termes on apareix $e_1\cdot e_2$ s'anul·len, ja que es tracta del productes escalar de dos vectors que formen un angle conegut de 90°, el cosinus del qual és zero. Els productes $e_1.e_1$ *i* $e_2.e_2$ valen 1, ja que els mòduls són 1 i l'angle és de 0°, amb cosinus igual a 1.
Per tant, finalment he obtingut $u\cdot v=u_1v_1+u_2v_2$. Amb l'avantatge que ara disposo de dues fórmules per calcular el mateix producte. Combinant-les, és possible trobar una expressió per calcular el cosinus de l'angle que formen dos vectors només a partir de les seves components, dividint el producte escalar $u_1v_1+u_2v_2$ entre el producte dels mòduls.
Faig un exemple a la pissarra de càlcul de l'angle entre dos vectors.
La professora Gemma Vilarrubias, que està de suport durant aquesta sessió, enregistra en vídeo una part d'aquesta explicació anterior.
En els minuts finals de la sessió, explico que el producte escalar és un excel·lent "test" de perpendicularitat, ja que si dos vectors són perpendiculars, el seu producte escalar és zero i a l'inrevés, si el producte escalar és zero significa que són perpendiculars.
Els plantejo una pregunta: donat un vector, en puc trobar ràpidament un altre que sigui perpendicular? Els dic que es fixin en el producte escalar. Alberto em respon que serà zero si les components del segon vector són com les del primer, però canviades d'ordre. Jo afegeixo que cal canviar un dels signes. Llavors escric que donat $u=(u_1,u_2)$, puc trobar ràpidament un vector d'igual mòdul però perpendicular com $v=(-u_2,u_1)$ o bé com $v=(u_2,-u_1)$.
Finalment, els encarrego uns exercicis del llibre per a la sessió següent. De la pàgina 177, els exercicis 21 i 26ab (sobre el producte escalar). De la pàgina 198, els exercicis 5 i 7 (sobre les equacions de la recta).
Malgrat la càrrega teòrica de la sessió, en comparació amb les sessions d'activitats amb Geogebra, tots els alumnes han mantingut una bona atenció i han contestat que entenien les explicacions quan els ho he preguntat. Les preguntes que m'han fet han anat dirigides que jo els aclarís alguns passos algebraics.

Dijous, 15 de maig de 2008

Sessió 8: exercicis sobre producte escalar i equacions de la recta

Hora: 08:30 a 09:30	**Lloc:** aula 0.5

Assistents

Manel	Juan	~~Dídac~~
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	~~Alba~~	Alberto
Toni	Federico	~~José~~
Raquel	Neus	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	

Objectius:
Realitzar i comentar davant de l'alumnat exercicis sobre els productes escalar i les equacions de la recta.

Desenvolupament:
Jo no puc conduir la sessió perquè aquest dia tinc, com a director del centre, una reunió sobre la formació professional als serveis centrals del Departament d'Educació. S'encarrega de la classe la professora Gemma Vilarrubias.
Tal com hem parlat ella i jo, comença la sessió amb els exercicis que els alumnes tenien encarregats: de la pàgina 177, els exercicis 21 i 26ab (sobre el producte escalar); de la pàgina 198, els exercicis 5 i 7 (sobre les equacions de la recta).
Com que la sessió evoluciona prou bé, la professora decideix discutir a classe l'exercici 22 de la pàgina 177 (producte escalar) i l'exercici 19 de la pàgina 198 (equacions de la recta).
La professora Gemma Vilarrubias m'informa posteriorment que tot ha anat bé. En tot cas, alguns alumnes han manifestat dubtes sobre com construir a la pràctica (en exercicis) vectors perpendiculars a vectors donats. És el que vaig explicar al final de la sessió anterior. Ella els ho aclareix.

Dilluns, 19 de maig de 2008

Sessió 9: activitat 6

Hora: 10:30 a 11:30	**Lloc:** aula d'informàtica 1

Assistents

Manel	Juan	Dídac
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	Alba	Alberto
Toni	Federico	José
Raquel	Neus	Erik
Angelo	Ivan	
~~Marta~~	Tanya	

Objectius: Lliurar, en paper, l'activitat 6 als alumnes perquè les realitzin. Recollir els fulls escrits pels alumnes i els fitxers Geogebra. Explicar, quan els alumnes han lliurat els fulls, com es poden trobar els punts demanats a partir de l'experiència de les activitats anteriors i de les explicacions de la sessió 7.
Desenvolupament: Activitat 6: *en perpendicular.* Lliuro als alumnes els fulls de la primera part de l'activitat 6. Llegeixo per a tots en veu alta el text explicatiu. Comencen a treballar. Tots els alumnes col·loquen ràpidament els punts *M1* i *M2* (de fet, l'activitat no demana situar-los, només els presenta perquè recorden la feina de les activitats anteriors). Però s'estan una bona estona pensant com col·locar els punts *N1*, *N2*, *N3* i *N4*. Aparentment l'activitat s'assembla molt a les activitats 1, 2, 3 i 4, però el fet d'introduir la perpendicularitat provoca que s'ho hagin de pensar molt. És semblant però diferent, i salvar aquesta diferència els consumeix temps. Quan queda un quart d'hora per acabar, la majoria dels alumnes han trobat els punts demanats i es dediquen a respondre les preguntes sobre les equacions de les rectes. Tenen el temps just per acabar el fitxer, enviar-lo a través de la intraweb i lliurar les respostes escrites, abans que als minuts finals els comenti amb l'ajuda del projector com es pot trobar el vector director perpendicular a *AB* i , amb ell, els punts demanats. Per fer l'explicació, tinc en compte les dificultats que he observat que trobaven en el procés de resolució.
Observacions durant la sessió: Hi ha una bona actitud de treball per part de tot l'alumnat. També és a l'aula la professora Gemma Vilarrubias, per fer de suport. Tant a ella com a mi diversos alumnes ens manifesten que no veuen del tot clar com col·locar els punts de tal manera que compleixin alhora les condicions d'estar en la direcció perpendicular i a les distàncies demanades entre ells. Els diem que recordin el que han fet en activitats anteriors per trobar *M1* i *M2*, i que pensin en com obtenir la perpendicularitat. També hi ha alguns alumnes que queden desconcertats quan construeixen correctament un vector perpendicular al vector *AB* i s'adonen que, quan l'introdueixen a la barra d'entrada, el programa el situa amb origen al punt (0,0). Imaginaven que hauria de tenir el mateix origen que el vector de partida. M'adono de la raó per la qual creuen que el vector perpendicular a *AB* ha de tenir el mateix origen. En construir *AB*, evidentment apareix una fletxa que va de *A* a *B*. Si es permuten les coordenades i es canvia un dels signes, el que es fa és una entrada algebraica d'un vector (no es marca a l'àrea gràfica) i per tant el programa automàticament, per defecte, col·loca l'origen al (0,0). Això, com he dit, els desconcerta, encara que finalment ho resolen. Que defineixin un vector perpendicular a partir de les coordenades de *AB* té l'inconvenient que només val per als punts *A* i *B* de l'activitat. Si es canvien les seves coordenades, es desmunta la figura. Però també té l'avantatge que apliquen un recurs

que vam veure a la sessió 7. Han de raonar i aplicar. L'altre camí possible, que manté la perpendicularitat encara que es moguin els punts de partida, consisteix en anar a la barra de "comanda" i usar "vector perpendicular" (al vector donat). No tan sols es manté la perpendicularitat, sinó que el vector que apareix té el mateix mòdul i el mateix origen. No obstant això, d'aquesta manera els alumnes no poden veure quin algorisme intern ha usat el programa. No han de pensar en la relació que tenen les coordenades d'un i altre vector, simplement usar un recurs que és com prémer un botó i prou. De tota manera, al final de la sessió, quan veig que la majoria ha resolt bé el cas particular i quan tots han lliurat les activitats, explico com funciona la comanda "vector perpendicular". Observo que per obtenir les equacions vectorials que demana l'activitat la majoria dels alumnes les construeix a partir d'un punt i un vector director, com si resolgués sense el programa, és a dir, que no utilitzen el recurs fàcil de construir la recta amb Geogebra, mirar la finestra algebraica, clicar sobre l'equació (per defecte implícita) i sol·licitar que aparegui la forma vectorial. Suposo que és perquè desconeixen aquest recurs. Per altra banda, quan recorro l'aula m'adono que bona part dels alumnes intenten construir l'equació implícita per escrit, tal com jo ho vaig fer a la pissarra a la sessió 5, a partir de l'equació contínua, o bé tenint en compte la relació entre el vector director i els coeficients de *x* i *y*, que també vaig explicar. Els seria més còmode construir la recta i simplement llegir l'equació que apareix en pantalla. Per respondre la pregunta *h*, sí que es veuen obligats a construir les rectes amb Geogebra. En resum, una activitat que podien haver resolt i escrit en mitja hora els ha consumit pràcticament una hora. De fet, la sessió ja estava calculada per a una hora amb un criteri de previsió. La barreja del que ja coneixen bé de les activitats 1, 2, 3 i 4 amb l'element nou de la perpendicularitat els ha demanat temps.
Observacions després d'examinar les respostes: Tots els alumnes excepte dos (Juan i Soslan) troben les coordenades dels punts demanats. També tots els alumnes excepte dos (els mateixos Juan i Soslan) usen un vector perpendicular multiplicat pels nombre adequats per trobar els punts *N1*, *N2*, *N3* i *N4*. Curiosament, hi ha 6 alumnes que malgrat haver usat clarament el vector perpendicular a la construcció amb Geogebra, declaren a la resposta de l'apartat *e* que han usat una recta perpendicular (Raquel, Neus, José, Toni, Alberto i Manel). Pel que fa a Juan i Soslan, col·loquen *N2* i *N4* en posicions incorrectes però que a simple vista dibuixen una figura força semblant a la demanada, i calculen *N1* i *N3* com a punts mitjans. Tots els alumnes excepte dos (Juan i Soslan) donen com a mínim una de les equacions de les quatre demanades, i tots aquests les troben sobre el paper, és a dir, que no tracen les rectes amb Geogebra amb l'objectiu de veure les equacions en pantalla. No se'ls acut. Procedeixen com jo ho vaig fer a la pissarra durant la sessió 5. Hi ha 11 alumnes que responen que sí observen una relació entre els coeficients de les dues equacions implícites (fins i tot els que no les han traçades, per tant s'han de refiar només de les equacions que han trobat per escrit). Però d'aquests, només un alumne (Dídac) dóna una explicació correcta. Dels altres, 6 alumnes no escriuen cap explicació, i 4 en donen una d'incorrecta o incomprensible. Hi ha 4 alumnes que deixen en blanc la pregunta sobre la relació entre els coeficients

de les rectes.
Els 2 únics alumnes que no han calculat correctament els punts demanats són els que responen que no existeix cap relació entre els coeficients.

Dimecres, 21 de maig de 2008

Sessió 10: activitat 7

Hora: 08:30 a 09:30 | **Lloc:** aula d'informàtica 1

Assistents

Manel	Juan	Dídac
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	Alba	Alberto
Toni	Federico	José
Raquel	~~Neus~~	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	

Objectius:
Lliurar, en paper, l'activitat 7 als alumnes perquè la realitzin. Recollir els fulls escrits pels alumnes i els fitxers Geogebra (als fulls hi ha d'haver la resolució per escrit de l'activitat, independentment que s'hagi resolt també amb Geogebra).
Explicar, quan els alumnes han lliurat els fulls, com es poden trobar els punts demanats a partir de l'experiència de les activitats anteriors, especialment de la sessió 9.

Desenvolupament:
Activitat 7: *en perpendicular.*
Lliuro als alumnes els fulls de la primera part de l'activitat 7. Llegeixo per a tots en veu alta el text explicatiu. Remarco que el segment *QR* ha de ser un dels costats del quadrat. Això situa el problema de tal manera que es pot resoldre construint vectors perpendiculars. Marco a la pissarra blanca de l'aula uns punts que anomeno *Q* i *R* i traço el segment *QR*. Pregunto als alumnes com es pot completar la figura perquè aparegui un quadrat. Sento una resposta que va pel bon camí i tot seguit pregunto si he de traçar el quadrat de manera que el segment quedi a la dreta o a l'esquerra. El traço amb el segment a l'esquerra. Torno a preguntar: ja està? Hi ha un moment de silenci. Tot seguit dibuixo un segon quadrat que té el segment *QR* a la dreta i que el comparteix amb el que havia dibuixat primer. Per tant, els demano, quantes solucions hi ha?. Veuen clar que són dues. Després d'aquests comentaris, els demano que no tan sols marquin els quadrets de les preguntes amb multiopcions, sinó que també escriguin al revers del full la resolució del problema com si els hagués donat l'enunciat a l'aula ordinària, sense ordinadors.
La professora Gemma Vilarrubias (que actua de suport) enregistra un vídeo que cobreix la meva intervenció inicial. Els alumnes comencen a treballar.
La resolució amb Geogebra consumeix la major part del temps per a la majoria dels alumnes. Quan resten 15 minuts per acabar, només han començat les respostes escrites M. Carmen, Alba, Raquel, Manel i Alberto. Els altres encara completen el fitxer o estan en el procés d'enviar-me'l a través de la intraweb En aquestes

condicions ja no és possible que la majoria dels alumnes pugui presentar una resolució escrita.
Quan m'han lliurat les respostes escrites perquè el ho he demanat, dedico l'últim parell de minuts, molt ràpidament, amb l'ajuda del projector de l'aula, a explicar com s'iniciava el procés de resolució amb Geogebra mitjançant l'ús d'un vector perpendicular al vector *QR* i com s'havia de continuar.
Angelo em diu que en el moment que no ha pogut gravar el fitxer per enviar-lo a través de la intraweb. Comprovo que s'ha perdut: faig una cerca al disc dur de l'ordinador i efectivament el fitxer no hi és. Es tracta d'un accident. De tota manera, he pogut observar abans, quan voltava per l'aula, que ha construït els quadrats.

Observacions durant la sessió:
Hi ha una bona actitud de treball per part de tot l'alumnat.
Uns quants alumnes tenen dificultats per col·locar els punts *Q* i *R* a la pantalla . Com que les coordenades són nombres decimals, és molt difícil situar-los amb el ratolí, i els alumnes veuen clar que han d'usar la barra d'entrada algebraica. Però no tenen en compte que per entrar un nombre decimal s'ha d'usar el punt, no la coma. Entre la professora Gemma Vilarrubias i jo resolem aquesta dificultat quan detectem que algú la té.
Malgrat que és dimecres i el dilluns anterior els alumnes van fer l'activitat 6, en la qual intervenien vectors perpendiculars a un vector donat, hi ha una colla d'alumnes que tarden uns quants minuts per adonar-se que poden resoldre el problema fàcilment si comencen per construir un vector perpendicular al vector *QR*. Aquesta és la clau de la solució, però els costa trobar-la (Marta, Tanya, Federico, Erik, Iván, Jesús i Youssef). En canvi, altres alumnes, com M. Carmen, Raquel, Alberto i Manel són prou ràpids.
La majoria dels alumnes tarden més temps del que ja havia previst per construir els dos quadrats. Aparentment, un cop han traçat el primer vector perpendicular, el procés ha de ser molt ràpid i mecànic, però m'adono que per adonar-se de quin és el camí a seguir i seguir-lo pas a pas, necessiten força temps. Els costa situar-se i avançar. Per tant, no els queda prou temps per abordar una resposta escrita completa.
Per altra banda, quan recorro l'aula cap al final de la sessió, m'adono que alguns alumnes que treballen en la resposta escrita en realitat no resolen l'activitat per escrit (a pesar que al principi he deixat clar què els demanava), sinó que redacten una explicació dels passos que han seguit per resoldre amb Geogebra (Jesús, Alberto i Manel). Altres sí que comencen a escriure el que he demanat: M. Carmen, Alba, Erik i Dídac.

Observacions després d'examinar les respostes:
<u>Fitxers de Geogebra</u>
A part de problema d'Angelo amb el fitxer que s'ha esborrat i no ha pogut lliurar, m'adono que Alberto i Manel m'han enviat fitxer però apareix en blanc. Evidentment es tracta d'un accident, ja que a l'aula he observat que realitzaven la construcció del quadrat.
Dels 15 alumnes que lliuren fitxers revisables, 11 construeixen correctament els dos quadrats que són solució (Youssef, M. Carmen, Toni, Marta, Jesús, Alba, Federico, Ivan, Tanya, José, Erik). D'aquests, 8 presenten també els dos punts mitjans correctes (M. Carmen, Toni, Jesús, Alba, Federico, Ivan, José, Erik), 1 col·loca només un dels dos

punts mitjans (Youssef), i els 2 casos restants (Marta, Tanya) presenten un sol punt col·locat manualment, a ull, que visualment està prou centrat però que no correspon al punt demanat.
Tots els 11 alumnes que construeixen correctament els quadrats utilitzen un vector perpendicular definit a partir del vector *QR* (o *RQ*) a base de permutar les coordenades i canviar un dels signes.
Hi ha 4 alumnes (Raquel, Juan, Dídac, Soslan) que construeixen figures que a simple vista semblen quadrats però que no tenen els vèrtexs en les posicions correctes. Els vèrtexs dels quadrilàters que es veuen són punts propers als vèrtexs autèntics.

<u>Respostes escrites</u>
A causa de la falta de temps per realitzar les respostes escrites que han patit alguns alumnes, hi ha 6 fulls en blanc (Youssef, Marta, Juan, Ivan, Tanya, Soslan). En altres 5 casos hi ha un inici de resposta, amb bona aparença, que queda tallat (Toni, Raquel, Angelo, Dídac, José) i per tant no es pot saber si acabaria o no en una resposta completa correcta.
Hi ha 3 alumnes que no inicien exactament una solució escrita, sinó que intenten explicar quin és el procediment que han seguit amb Geogebra (Manel, Jesús, Alberto).
Hi ha 4 alumnes que escriuen una solució correcta usant un vector perpendicular a *QR* (o *RQ*) per trobar els vèrtexs que falten. D'aquests alumnes, 2 comencen una resposta escrita per trobar els punts mitjans però no és correcta (M. Carmen, Alba) i els altres 2 no escriuen res sobre el càlcul dels punts mitjans, se suposa que per falta de temps.

A causa que la majoria dels alumnes no ha tingut temps per realitzar les respostes escrites, no hi ha prou dades per realitzar una anàlisi de les respostes per caracteritzar el comportament del grup.

Dijous, 22 de maig de 2008

Sessió 11: activitat 8

Hora: 08:30 a 09:30 | **Lloc:** aula d'informàtica 1

Assistents

Manel	Juan	Dídac
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	Alba	Alberto
Toni	Federico	José
Raquel	~~Neus~~	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	

Objectius:
Lliurar, en paper, l'activitat 8 als alumnes perquè la realitzin. Recollir els fulls escrits pels alumnes i els fitxers Geogebra (als fulls hi ha d'haver la resolució per escrit de l'activitat, independentment que s'hagi resolt també amb Geogebra).
Explicar, quan els alumnes han lliurat els fulls, com es poden trobar el punt demanats.

Desenvolupament:
Activitat 8: *a la mateixa distància de tres punts.*
Lliuro als alumnes els fulls de la primera part de l'activitat 8. Llegeixo per a tots en veu alta el text explicatiu. Com que les mediatrius i el circumcentre d'un triangle els queden molt llunyans en el temps (pertanyen als dos primers cursos de l'ESO, i no en forma algebraica, és clar) dibuixo un triangle a la pissarra blanca de l'aula i les tres mediatrius, les quals s'intersecten en el circumcentre. Traço també la circumferència corresponent. Pregunto si per trobar el circumcentre cal traçar necessàriament les tres mediatrius. Sento unes quantes veus que em diuen que amb dues n'hi ha prou. De tota manera, els comento que amb Geogebra no els suposarà una despesa significativa de temps traçar-les totes tres.
La professora Gemma Vilarrubias enregistra un vídeo que cobreix aquesta intervenció inicial.
Igual que a la sessió anterior, els demano que no tan sols marquin els quadrets de les preguntes amb multiopcions, sinó que també escriguin al revers del full la resolució del problema com si els hagués donat l'enunciat a l'aula ordinària, sense ordinadors.
Els alumnes comencen a treballar.
Observo que al cap d'un quart d'hora d'haver iniciat la sessió ja hi ha un bon grup d'alumnes que han treballat ràpid i bé. Han construït el triangle, les mediatrius i la circumferència: Federico, Angelo, Erik, Alberto, Manel, Dídac, M. Carmen, Alba, Toni i José. Al cap d'un quart d'hora més, tots els alumnes han completat el fitxer Geogebra i me l'han enviat a través de la intraweb o bé estan en el procés d'enviar-lo.
Això els proporciona temps suficient per abordar la solució escrita amb possibilitats reals d'acabar-la.
Després d'haver observat que tots han construït bé la solució amb Geogebra, considero que no és necessari que jo la presenti amb el projector. Els deixo tot el temps que resta per treballar sobre la resolució escrita, fins que sona el timbre del final de la sessió.

Observacions durant la sessió:
Després de l'experiència de la sessió anterior (10), jo contemplava la possibilitat que la resolució amb Geogebra també consumís molt de temps, però no ha estat així.
M'adono que a les respostes escrites els alumnes troben els punts mitjans ràpidament i sense dificultats, però que bastants vacil·len a l'hora de construir les mediatrius. Per trobar la direcció perpendicular a un costat han d'obtenir un vector a partir dels vèrtexs, i després permutar les coordenades i canviar un signe. Fins que no s'adonen d'això, hi donen unes quantes voltes. Després, dubten sobre quina forma de l'equació de la recta han d'usar. En veig dos (Alberto, Raquel) que treuen la llibreta d'apunts de la bossa i la consulten. Quan em pregunten per com construir l'equació, els suggereixo la forma contínua per després obtenir la implícita.

Observacions després d'examinar les respostes:
<u>Fitxers de Geogebra</u>
Tots els 18 alumnes que han realitzat l'activitat han trobat les coordenades del circumcentre construint com a mínim dues mediatrius (la majoria han construït les tres; només Maria Carmen i Alba n'han traçat només dos) i marcant la seva intersecció. Tots han construït la circumferència que passa pels tres vèrtexs del

triangle. Les diferències més importants que hi ha entre els diferents fitxers són en la validesa de la construcció general si es mou algun dels vèrtexs del triangle.
Hi ha 10 alumnes (Manel, Youssef, M. Carmen, Angelo, Marta, Alba, Federico, Tanya, Alberto, Erik) que construeixen una figura que conserva les propietats independentment de la situació dels vèrtexs del triangle: la circumferència passa pels tres vèrtexs i el punt del circumcentre correspon a la intersecció de les mediatrius.
Hi ha 1 alumne (Raquel) que construeix bé la circumferència però col·loca manualment el punt del circumcentre sobre la intersecció de les mediatrius.
Hi ha 1 alumne (Ivan) que escriu les equacions de les mediatrius a la barra d'entrada algebraica (és a dir que es basa en la resolució per escrit), per la qual cosa només valen per al triangle de l'activitat.
Hi ha 4 alumnes (Juan, Dídac, Soslan) que tracen una circumferència amb centre mòbil sobre una de les mediatrius, i que passa per un dels vèrtexs del triangle. Quan la circumferència s'ajusta manualment de tal manera que passa pels tres vèrtexs i té el centre a la intersecció de les mediatrius, apareixen les coordenades correctes del circumcentre. Però si es mou un vèrtex, la figura es desmunta.
Hi ha 2 alumnes (Toni, José) que col·loquen el centre de la circumferència sobre una mediatriu però no la fan passar per cap vèrtex del triangle, sinó que l'ajusten manualment.

<u>Respostes escrites</u>
Dels 18 alumnes presents a l'activitat, n'hi ha 5 (Toni, Raquel, Jesús, Alberto, José) que resolen correctament per escrit: troben algebraicament com a mínim dues equacions de mediatrius i resolen el sistema d'equacions. Les diferències entre aquestes resolucions resideixen en quina forma de l'equació de la recta han utilitzat per trobar les equacions de les mediatrius. Jesús utilitza la forma implícita $A\mathrm{x}+B\mathrm{y}+C=0$, en què la parella (A,B) és el vector que té origen i extrem als vèrtexs del costat corresponent i per tant és perpendicular al vector director de la mediatriu. El nombre C el troba substituint les coordenades (x,y) del punt mitjà del costat per on passa la mediatriu. Raquel i Alberto usen la forma contínua per col·locar punts i vectors directors, i després fan uns pocs càlculs per convertir-la a forma implícita. Toni i José usen la forma explícita, en què el pendent ve donat pel vector director de la mediatriu (vector perpendicular al costat corresponent), que donat segons els coeficients de la forma implícita és $-A/B$. L'ordenada a l'origen la troben substituint les coordenades del punt mitjà per on passa la mediatriu.
Hi ha 2 alumnes, Federico i Dídac que fan els passos de resolució del sistema format per dues mediatrius però cometen errors de càlcul i per tant les coordenades resultants no són correctes. Tots dos usen la forma implícita per construir les mediatrius.
Hi ha 3 alumnes que troben les equacions de com a mínim dues mediatrius però no aborden o no acaben la resolució del sistema. Usen la forma implícita per construir les mediatrius.
Els 8 alumnes restants no arriben a construir l'equació de cap mediatriu, tot i que aborden els càlculs per trobar punts mitjans i/o vectors perpendiculars als costats, excepte Manel, que lliura el full en blanc.

Dilluns, 26 de maig de 2008

Sessió 12: resolució per escrit de les activitats 7 i 8; posicions relatives

Hora: 10:30 a 11:30	**Lloc:** aula dibu1

Assistents

Manel	Juan	Dídac
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	Alba	Alberto
Toni	Federico	José
Raquel	Neus	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	

Objectius:

Mostrar als alumnes la resolució per escrit (a la pissarra) de les activitats 7 i 8, amb una presentació comentada i raonada pas a pas.

Explicar les posicions relatives de punt i recta i de dues rectes insistint amb el significat no tan sols geomètric-visual, sinó també (i sobretot) algebraic.

Desenvolupament:

Els primers 40 minuts de la sessió els dedico a la resolució per escrit de les activitats 7 (*quadrat*) i 8 (*a la mateixa distància de tres punts*). L'enfocament és tradicional: es basa en una explicació amb l'ajuda de la pissarra. M'interessa que tornin a veure les activitats però presentades de manera sistemàtica pel professor, pas per pas, i amb els comentaris que insisteixen sobre quin és el procés de resolució i el seu perquè. Com és habitual en la meva manera de fer, incloc preguntes dirigides a l'alumnat en l'explicació.

La professora Gemma Vilarrubias enregistra en vídeo fragments d'aquestes explicacions.

A l'activitat 7, calculo el vector *AB* i a partir d'ell n'obtinc un de perpendicular amb el mateix mòdul, pel procediment perfectament conegut pels alumnes de permutar les coordenades i canviar un signe. Com que tinc dues maneres de canviar un signe, els mostro els dos vectors *v* i *w* i els demano que els identifiquin amb les components dels vectors que van dels punts *A* i *B* als punts buscats dels dos quadrats que poden ser solució (un a l'esquerra i l'altre a la dreta del segment *AB*). Se n'adonen sense dificultat. Així, els comento, com que $v=-w$, en realitat amb un sol vector puc trobar els vèrtexs dels dos quadrats buscats, que anomeno *S*, *T*, *S'* i *T'*. Ho escric i ho calculo: $S=A+v$; $T=B+v$; $S'=A-v$; $T'=B-v$

Per a l'activitat 8, els recordo que en tinc prou amb trobar dues mediatrius i resoldre el sistema que formen. Procedeixo en quatre passos. El primer pas és trobar dos punts mitjans: *C* (del segment *AB*) i *D* (del segment *OB*). El segon pas és trobar els vectors directors de les mediatrius a partir dels vectors *AB* o *OB*, pel procediment conegut d'obtenir un vector perpendicular a un de donat. El tercer pas és construir les equacions contínues de les dues mediatrius amb els punts mitjans i els vectors directors i passar-les a forma implícita. El quart pas és resoldre el sistema d'equacions resultants, que per als alumnes té la forma coneguda d'un sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites. Pregunto què prefereixen: substitució, igualació o

reducció. La majoria diu substitució. Resolc i trobo les coordenades del circumcentre, és a dir, del punt que està a la mateixa distància dels punts *A*, *B* i *O*. Li dic *M*(91/34 , 13/34).
Em queden uns 20 minuts, que dedico a introduir i explicar les posicions relatives de punt i recta i de dos punts.
Pel que fa a la posició relativa de punt i recta insisteixo en el fet que si un punt pertany a una recta, compleix l'equació i si no, no la compleix (i a la inversa: el compliment o no de l'equació ens permet decidir si hi pertany o no). Quan he preguntat als alumnes sobre quin càlcul podem fer amb les coordenades d'un punt per saber si pertany a una recta, hi ha hagut silenci. He hagut de prendre la iniciativa i mostrar-los que cal anar a l'equació. Els costa molt convertir una idea intuïtiva de la situació en àlgebra. He utilitzat dos exemples. El primer, amb un punt i una equació implícita. Molt fàcil i tothom ho capta. El segon, amb una equació vectorial. Quan han vist que després de substituir el punt encara queda el paràmetre, no han sabut què fer. Els he aclarit que cal separar les components i veure si el valor del paràmetre és el mateix a les dues paramètriques. Si ho és, el punt pertany a la recta (a l'exemple que els he mostrat, no hi pertany).
Pel que fa a la posició relativa de dues rectes, els he preguntat quants casos creuen que hi pot haver. He sentit vàries veus: paral·leles, perpendiculars, es tallen. Els he dit que la perpendicularitat és un cas particular de rectes que es tallen. Les altres dues situacions possibles són que siguin paral·leles o que siguin la mateixa recta escrita de dues maneres diferents. A continuació, ho he enfocat des del punt de vista de les solucions del sistema d'equacions. Si es tallen, quantes solucions? Després d'un moment de silenci, un es poques veus diuen que una. Si són paral·leles? Un alumne (Alberto) em contesta que cap. I si són la mateixa recta? El mateix alumne em contesta que infinites solucions. Els poso dos exemples. El primer consisteix en dues rectes paral·leles, una escrita en equació implícita i l'altra en explícita, amb la intenció que a simple vista no resulti massa evident el paral·lelisme. Resolc el sistema i els mostro que obtinc una equació absurda: senyal que no hi ha solució. Després retoco el sistema anterior de manera que els termes independents de les equacions siguin iguals. Torno a resoldre i obtinc una identitat 0=0. Els comento que això és cert per a qualsevol punt: senyal d'infinites solucions. Es tracta de la mateixa recta escrita dues vegades.
Sona el timbre. Els encarrego un parell d'exercicis de la pàgina 199 del llibre: 25 i 31. Han d'utilitzar vectors i rectes.
M'he adonat que hi ha alguns alumnes mentalment dispersos o mig absents. A algun li he fet un toc d'atenció (Tanya, Juan) . De fet, coincideix que tots aquests s'han adonat que no podran promocionar a segon curs. Avui m'ha semblat, per primera vegada, que aquests alumnes han llençat la tovallola, almenys la de les classes en format tradicional, perquè durant les sessions a l'aula TIC bé que treballaven. Però no tenen ganes de seguir les explicacions a la pissarra i prendre apunts.

Dimecres, 28 de maig de 2008

Sessió 13: exercicis diversos i distàncies

Hora: 08:30 a 09:30	**Lloc:** aula dibu2

Assistents

Manel	Juan	Dídac
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	Alba	Alberto
Toni	Federico	~~José~~
Raquel	~~Neus~~	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	

Objectius:

Comentar els exercicis encarregats a la sessió anterior.
Explicar les distàncies entre dos punts, entre punt i recta i entre dues rectes.
Preparar la propera sessió de consultes i dubtes per a la prova escrita presentant a la pissarra un resum comentat dels aspectes més importants de la teoria i els exercicis treballats.

Desenvolupament:

El primer quart d'hora el dedico a comentar l'exercici 25 de la pàgina 199 del llibre. Es presenten tres vèrtexs d'un triangle i es demana trobar l'equació d'una determinada altura, una mediana i una mediatriu. A mesura que abordo cada una de les parts, pregunto als alumnes com ho han fet i rebo força respostes correctes. Veig que la majoria se n'ha sortit força bé. En tot cas, jo, com en totes les activitats que he desenvolupat a la pissarra, ho presento sistematitzat, amb una forma i un llenguatge matemàtic compacte i "estàndard", com el que fan servir els llibres de text o de resolució de problemes. És important que s'hi acostumin i que ho prenguin com a model.
A continuació presento l'última part dels aspectes teòrics que em queden per abordar: les distàncies. En primer lloc, la distància entre dos punts, que no ofereix cap dificultat, ja que només cal construir el vector i calcular el mòdul. Això ho entenen perfectament. Faig un exemple a la pissarra. En segon lloc, la distància entre un punt i una recta. Els dic que la demostració de la fórmula la poden trobar a la pàgina 194 del llibre (he considerat que no és necessari reproduir-la a la pissarra; això és un criteri personal, ja que en el cas del producte escalar sí que vaig considerar que era interessant mostrar a la pissarra que operant amb els vectors de la base del pla s'arriba a la fórmula $u{\cdot}v=u_1v_1+u_2v_2$). També faig un exemple amb un punt i una recta concrets. En tercer lloc, la distància entre dues rectes, que només és interessant si són paral·leles i que es redueix a prendre un punt d'una recta i calcular a quina distància està de l'altra recta. També faig un exemple a la pissarra.
Em queden uns 20 minuts per acabar la sessió. Llavors, apunto a la pissarra un resum dels aspectes fonamentals de la teoria i els exercicis que hem vist. El vaig comentant a mesura que l'escric. La intenció és sintetitzar i ordenar. L'experiència com a docent m'indica que això ajuda ela alumnes a construir una visió estructurada d'una unitat didàctica i a tenir en compte allò que és més important a l'hora d'organitzar les últimes hores d'estudi abans d'una prova escrita.

Aquí escric, encara més resumidament, el que presento a la pissarra. No reprodueixo algun breu exemple que utilitzo per il·lustrar les explicacions.

- Vector entre dos punts. Components. Mòdul. Angle amb l'eix *x*.
- Punts alineats. Com decidir si ho estan.
- Equacions de la recta: vectorial, paramètriques, contínua, implícita, i explícita. Com construir-les. Com obtenir un vector director i un punt a partir de cada una d'elles.
- Producte escalar. Angle que formen dos vectors. Angle que formen dues rectes.
- Vectors paral·lels i vectors perpendiculars. Com decidir si ho són o no. Com construir un vector perpendicular a un vector donat.
- Posicions relatives. Com decidir si un punt pertany a una recta. Com decidir si dues rectes es tallen, són paral·leles o són la mateixa recta.
- Distàncies: punt-punt, punt-recta i recta-recta.

Els demano que repassin el que hem fet fins ara i que a la propera sessió (demà) portin preparades les consultes que vulguin fer. També els dic que per estudiar de manera efectiva per a una prova escrita, no n'hi ha prou amb mirar la pissarra a l'aula o amb llegir els apunts a la llibreta, sinó que cal tornar a fer a casa els exercicis i problemes que s'han treballat a classe.

Em queden encara uns 5 minuts, que dedico a comentar ràpidament els segon exercici que tenien encarregat: 31 de la pàgina 199 del llibre. Aquest exercici dóna els quatre vèrtexs d'un quadrilàter (no rectangle i no paral·lelogram) i demana trobar-ne l'àrea. Suggereix dividir-lo en dos triangles amb una base comuna. No pretenc acabar-lo, sinó indicar una estratègia de resolució. M'adono que la majoria dels alumnes no se n'han sortit quan l'han intentat. Traço el quadrilàter i el divideixo en dos triangles. Pregunto com calculen l'àrea d'un triangle i la resposta és unànime i ràpida: base pera altura dividit per dos. Dibuixo les dues altures sobre la base comuna. Com calcular-les? Federico en diu que es pot fer per trigonometria, amb un costat i un angle. Efectivament, dic jo: haurem d'utilitzar el sinus. Llavors els recordo una fórmula de la trigonometria per al càlcul de l'àrea d'un triangle: àrea=1/2(costat·costat·sinus de l'angle que formen). D'aquesta manera s'adonen que per a cada triangle han de calcular el mòdul de dos vectors (costats) i el sinus de l'angle que formen (en realitat calcularan primer el cosinus mitjançant el producte escalar).

Dijous, 29 de maig de 2008

Sessió 14: consultes i dubtes dels alumnes

Hora: 08:30 a 09:30	**Lloc:** aula 0.5

Assistents

Manel	Juan	Dídac
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	Alba	Alberto
Toni	Federico	José
Raquel	~~Neus~~	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	

Objectius:
Realitzar una sessió preparatòria (per a la prova escrita) centrada en resoldre i comentar aquells aspectes de la unitat didàctica que sorgeixen a petició dels alumnes.

Desenvolupament:
Començo la sessió dient als alumnes que suposo que han repassat el treball que hem fet sobre la unitat didàctica i que han marcat els aspectes que volen consultar-me. Els indico que espero les seves preguntes.
A partir d'aquí, vaig atenent i comentant les preguntes que sorgeixen. De vegades, quan acabo de comentar-ne una i en demano una altra, es produeix un interval de silenci en el qual observo com una bona part dels alumnes gira fulls de les llibretes per buscar alguna anotació.
De fet, totes les consultes que em fan són sobre aspectes que ja hem treballat, amb la intenció que hi insisteixi:
Com determinar si tres punts estan alineats. Explico que si partim dels punts *P*, *Q* i *R* una manera ràpida i fàcil és construir els vectors *PQ* i *PR* (o *QR*) i veure si tenen les components proporcionals, és a dir, si són paral·lels. Dibuixo a la pissarra un cas en què estan alineats i un en que no. Faig un exemple, amb tres punts que no estan alineats.
Com calcular l'angle entre dos vectors i entre dues rectes. Contesto que el segon cas es redueix al primer, perquè calculem l'angle entre els vectors directors de les rectes. En realitat calculem primer el cosinus de l'angle utilitzant el producte escalar i els mòduls. Faig un exemple amb dos vectors. Després, desenvolupo un segon exemple amb dues rectes, una en forma implícita i l'altra en forma vectorial. Això em serveix també perquè hagin d'identificar els vectors directors en diferents tipus d'equació. Els recordo, perquè és molt útil, que a la forma implícita $Ax+By+C=0$, el vector de components (A,B) és perpendicular a la recta i el vector de components $(-B,A)$ és un vector director de la recta.
Com construir totes les formes de l'equació d'una recta a partir d'una forma donada. Els dic que usaré un exemple per seguir el camí invers al que vaig explicar quan vaig introduir les equacions de la recta. Començaré per l'explícita. N'escric una, $y=\frac{2}{3}x-1$. Llavors, dic que si en trec un vector director i un punt, puc construir qualsevol forma de l'equació de la recta. El pendent em proporciona el vector director, de components (3,2). Un punt el puc obtenir donant un valor a *x* i calculant *y*. Per exemple, l'ordenada a l'origen (0,-1). L'equació implícita és una simple reordenació de l'explícita. Les altres es poden construir immediatament amb el vector i el punt. Les escric.
Com calcular l'àrea d'un triangle definit per tres vèrtexs. Això apunta directament a l'exercici que vaig esbossar a la sessió anterior. M'adono que em reclamen que desenvolupi un exemple. Traço uns eixos i marco tres punts Els recordo que necessito una base i una altura. Les marco. Puc obtenir l'altura per trigonometria usant un costat i el sinus de l'angle que forma aquest costat amb la base. Així arribo a la fórmula que ja els vaig comentar a la sessió d'ahir, àrea=1/2(costat·costat·sinus de l'angle que formen). L'aplico al triangle que he dibuixat. Calculo els mòduls dels vectors que corresponen als dos costats i calculo el cosinus usant el producte escalar i els mòduls. Llavors, dic que o bé amb la calculadora puc obtenir l'angle i el seu sinus, o bé d'una manera elegant utilitzar que $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ per aïllar el cosinus. Jo ho faig d'aquesta última manera.

Com determinar que dues rectes són en realitat la mateixa. Contesto que primer cal resoldre el sistema que formen. Si ens apareixen infinites solucions, estarem en aquest cas. Invento un exemple en què escric una equació implícita i després uso el mateix vector director i un punt de la recta calculat mentalment per escriure unes equacions paramètriques. Semblen dues rectes diferents. Els pregunto com resoldre el sistema. Algunes veus em contesten que puc substituir. Efectivament, puc substituir *x* i *y* de les paramètriques a la implícita. Queda una equació on la incògnita és el paràmetre. Si té una sola solució, les rectes es tallen, perquè a un valor del paràmetre li correspon un sol valor de *x* i *y*. Si apareix una equació absurda, no hi ha solució: les rectes són paral·leles. Si, tal com passa a l'exemple, obtinc 0=0, la igualtat és vàlida per a qualsevol valor del paràmetre i per tant per a qualsevol parella (*x*,*y*). Hi ha infinites solucions. Es tracta de la mateixa recta escrita de dues maneres diferents.
Quan queden uns 3 minuts per acabar la sessió, ja no hi ha més preguntes.
Tots els alumnes han tingut una bona actitud durant la sessió, fins i tot aquells que em sembla que donen aquesta i altres assignatures per perdudes ara que perceben la proximitat del final del curs.

Dilluns, 2 de juny de 2008

Sessió 15: prova escrita

Hora: 10:30 a 11:30	**Lloc:** aula dibu1

Assistents

Manel	Juan	Dídac
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	Alba	Alberto
Toni	Federico	José
Raquel	~~Neus~~	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	

Objectius:
Realitzar una prova escrita del mateix estil que s'hauria preparat per a un enfocament tradicional de la unitat didàctica.

Desenvolupament:
La prova escrita consta de 5 exercicis o problemes. Són aquests:

1) Determina si els punts $A(-3,5)$; $B(4,1)$; $C(-59,37)$ estan alineats. [1,5 punts]
a) En cas afirmatiu, troba l'equació implícita de la recta a la qual pertanyen.
b) En cas negatiu, troba l'equació implícita de la recta que passa pels punts *A* i *B*.

2) Calcula quin angle formen les rectes $r \equiv 7x + 4y + 1 = 0$; $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5t \end{cases}$ [1,5 punts]

3) Tenim el punt $P(2,0)$ i la recta $r \equiv \frac{x+3}{-1} = \frac{y-3}{3}$ [2,5 punts]

a) Troba l'equació implícita de la recta que passa per P i és paral·lela a r.
b) Troba l'equació implícita de la recta que passa per P i és perpendicular a r.
c) Determina si un altre punt $Q(12,–42)$ pertany o no a la recta r.

4) Demostra algebraicament que els punts $A(1, –2)$; $B(3,1)$; $C(4, –1)$; $D(6,2)$ formen un paral·lelogram, és a dir, un quadrilàter amb costats paral·lels dos a dos. [1,5 punts]

5) Els punts $A(0, –4)$; $B(–2,0)$; $C(4,3)$ són tres vèrtexs d'un rectangle. [3 punts]
a) Comprova (amb càlculs) que efectivament els costats AB i BC són perpendiculars.
b) Troba les coordenades del quart vèrtex del rectangle, D.
c) Calcula el perímetre del rectangle.
d) Troba les coordenades del centre M del rectangle (on es tallen les dues diagonals).

Observacions sobre els resultats de la prova escrita:
S'ha produït una polarització de la classe.
Hi ha un primer grup d'alumnes que més o menys s'ha preocupat d'estudiar.
M. Carmen (7)
Toni (9,2)
Raquel (5,2)
Jesús (4,9)
Federico (8)
Ivan (6,3)
Dídac (5,5)
Alberto (9,7)
José (4,5)
Erik (6)

Hi ha un grup d'alumnes que no ha estudiat i ha fet acte de presència a l'examen, però res més. Tots tenen un zero. Els exàmens són en blanc o bé tenen alguna cosa escrita que no val ni una dècima. Es tracta d'alumnes que en veure que arriba el final de curs i no podran superar un nombre important de matèries, llencen la tovallola, perquè pensen en la repetició o perquè volen abandonar.
Manel
Youssef
Marta
Juan
Alba
Tanya
Soslan

Hi ha un cas que és l'excepció a la situació polaritzada. Angelo (2,7) que no sé si ha estudiat gaire o no però l'examen li ha anat malament.

Dimecres, 4 de juny de 2008

Explicació de la prova escrita

Hora: 08:30 a 09:30	**Lloc:** aula dibu2

Assistents

Manel	Juan	Dídac
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	Alba	Alberto
Toni	Federico	José
Raquel	~~Neus~~	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	

Objectius:

Mostrar a la pissarra com es fa la prova escrita.
Repartir a cada alumne la seva prova escrita corregida perquè pugui seguir les explicacions i vegi on ha respost correctament i on s'ha equivocat.

Desenvolupament:

Faig l'examen a la pissarra. Comento cada exercici.

Dijous, 5 de juny de 2008

Qüestionari final

Hora: 08:30 a 09:30	**Lloc:** aula 0.5

Assistents

Manel	Juan	Dídac
Youssef	Jesús	Soslan
M. Carmen	Alba	Alberto
Toni	Federico	José
Raquel	~~Neus~~	Erik
Angelo	Ivan	
Marta	Tanya	

Objectius:

Passar als alumnes un qüestionari final amb preguntes sobre la valoració personal sobre el treball fet a les sessions 1-15.
Recollir els qüestionaris per a uns posteriors buidatge i anàlisi.

Desenvolupament:

Jo no hi sóc perquè tinc una reunió a Barcelona sobre el nou cicle formatiu de grau mitjà que s'implantarà a l'institut el proper curs, però he deixat les còpies del qüestionari a la professora Gemma Vilarrubias perquè les reparteixi als alumnes i després les reculli.

Valoracions personals lliures dels alumnes

Les respostes del tipus multiopció ja queden recollides en una taula, però aquí reprodueixo les valoracions lliures dels alumnes. El text introductori per demanar-los que escriguin és aquest:

“A continuació tens espai per escriure els comentaris que vulguis sobre el que penses del treball que hem fet al tema de geometria analítica. Pots escriure sobre el que t’ha agradat i el que no, el que has trobat útil i el que creus que no t’ha servit, el que t’ha semblat fàcil o has trobat difícil, etc.”

Els alumnes tenen l’espai de gairebé tot un full A4 per respondre, però les respostes són totes de poques línies. Les reprodueixo íntegrament a continuació. He corregit algunes errades ortogràfiques, però he respectat la sintaxi encara que sigui defectuosa.

Manel: *Utilitzar el Geogebra m’ha ajudat a veure més clar les equacions de la recta i la teoria sobre els vectors.*

Youssef: *M’han semblat més fàcils els exercicis amb Geogebra.*

M. Carmen: *Les classes amb Geogebra m’han agradat. He pogut aprendre millor que a l’aula normal i les classes han sigut molt més amenes. Crec que he assolit els coneixements bastant bé.*

Toni: *Les activitats fetes amb el Geogebra m’han ajudat per veure després al fer els exercicis a la llibreta el sistema de com solucionar-los. També ha estat una activitat amena comparant-la amb les classes fetes a les aules.*

Raquel: *Utilitzar el Geogebra m’ha agradat molt, perquè així es té un altre punt de vista sobre la geometria. Crec que ha estat útil utilitzar aquest programa m’ha ajudat a veure les activitats més clares, encara que a l’hora de fer-ho a mà m’ha costat una mica. Però crec que ha valgut la pena utilitzar aquest programa.*

Angelo: *Ha estat bastant interessant a l’hora de comprendre millor les activitats fetes a classe.*

Marta: *M’ha semblat un bon mètode treballar a l’aula d’informàtica i he trobat les classes més interessants.*

Juan: *Geogebra m’ha agradat bastant, les classes havien sigut molt divertides.*

Federico: *M’ha semblat un tema que havíem d’haver fet abans i no al final de curs, ja que ens hauria pogut ajudar en altre matèries.*

Jesús: *Trobo que les classes amb Geogebra han estat radicalment diferents.*

Alba: *M’ha agradat treballar amb Geogebra perquè he après coses gairebé sense assabentar-me. Era una optativa [opció?] molt interessant per canviar la manera de fer classe.*

Ivan: *Gràcies amb geometria analítica podem calcular moltes coses més ràpid, també* *geometria analítica ajuda entendre els problemes. M'agrada molt aquest tema perquè jo tinc un 6 d'aquest trimestre.*

Tanya: *M'ha agradat molt fer els exercicis amb ordinador, perquè tot es fa més ràpid i no és tan avorrit.*

Dídac: *El Geogebra m'ha semblat un programa molt bo per poder comprendre millor la teoria i et motiva més a entendre-ho.*

Soslan: *A veure, les classes a informàtica m'han agradat més que les classes normals, perquè ho entenia bastant, hi havia coses que no entenia però més o menys ho entenia. No era tan complicat com jo pensava que seria. En conclusió que prefereixo fer geometria que classe normal.*

Alberto: *Les activitats amb Geogebra són una altra manera de veure les matemàtiques, per tant crec que són una bona manera d'aprendre, ja que les classes sempre es fan més divertides, encara que el que crec que s'havia de fer després de cada activitat amb Geogebra és fer una altra a la pissarra per entendre-ho de les dues maneres. El que he trobat més difícil ha sigut passar els meus coneixements amb Geogebra a paper.*

José: *Ha estat una experiència molt bona ja que ho havíem fet [?]. Els exercicis que fèiem han resultat força fàcils però quan es posaven a la pràctica escrita la seva dificultat augmentava.*

Erik (respon en castellà): *A mi me gustó mucho porque no sólo me sirvió para mates sino para física y tecno, además se me aclararon muchas dudas, espero que el año que viene se vuelva a realizar.*

Annex 3: Taules de respostes de les activitats

Activitat 1

	RESPOSTES DE L'ALUMNAT SOBRE LA RESOLUCIÓ										
	a		b	c	d	e	f		g		h
	sí / no	coordenades	sí / no	sí / no	sí / no	sí / no	sí / no	càlcul	sí / no	fórmula	sí / no
Manel	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0
Youssef	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
M. Carmen	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
Toni	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
Raquel	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
Angelo	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
Marta	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Juan	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
Jesús											
Alba	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
Federico	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
Neus	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
Ivan	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
Tanya	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Dídac											
Soslan	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
Alberto	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
José	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
Erik	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
MITJANA	1,00	0,71	0,29	0,24	0,29	0,12	0,82	0,71	0,59	0,47	0,47

	RESPOSTES SOBRE GEOGEBRA				
	i	j	k	l	m
	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m
Manel	2/3	1	2/3	1/3	2/3
Youssef	2/3	1/3	1/3	2/3	2/3
M. Carmen	2/3	2/3	2/3	1	
Toni	2/3	1	2/3	1/3	2/3
Raquel	2/3	2/3	2/3	2/3	1
Angelo	1	1	1	2/3	2/3
Marta	2/3	1	2/3	1/3	2/3
Juan	2/3	1	1/3	2/3	2/3
Jesús					
Alba	2/3	1/3	2/3	2/3	1/3
Federico	2/3	1	2/3	1/3	1/3
Neus	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3
Ivan	2/3	1/3	0	2/3	1/3
Tanya	2/3	1	2/3	1/3	2/3
Dídac					
Soslan	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3
Alberto	2/3	2/3	1	1/3	2/3
José	2/3	1	1/3	1/3	2/3
Erik	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3
MITJANA	0,69	0,76	0,61	0,49	0,63

Activitat 2

RESPOSTES DE L'ALUMNAT SOBRE LA RESOLUCIÓ

	a		b		c		d	e	f	g	h		i		j		k		l		m		n
	sí / no	coordenades	sí / no	coordenades	sí / no	coordenades	sí / no	sí / no	sí / no	sí / no	sí / no	càlcul	sí / no	fórmula	sí / no	càlcul	sí / no	fórmula	sí / no	càlcul	sí / no	fórmula	sí / no
Manel	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
Youssef	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
M. Carmen	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Toni	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Raquel	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Angelo	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Marta	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Juan	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Jesús																							
Alba	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Federico	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Neus	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Ivan	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Tanya	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Dídac	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Soslan	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
Alberto	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
José	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Erik	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
MITJANA	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,22	0,56	0,50	0,39	0,94	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,83	1,00	1,00	1,00	0,83	0,61

RESPOSTES SOBRE GEOGEBRA

	o	p	q	r	s
	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m
Manel	1	1	2/3	1/3	2/3
Youssef	2/3	2/3	1/3	1/3	2/3
M. Carmen	2/3	2/3	2/3	2/3	1
Toni	2/3	2/3	2/3	1/3	1/3
Raquel	2/3	1	2/3	2/3	2/3
Angelo	1	1	1	1	2/3
Marta					
Juan	2/3	2/3	1/3	1	2/3
Jesús					
Alba	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3
Federico	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
Neus	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
Ivan	2/3	1	2/3	1/3	2/3
Tanya	1	1	2/3	2/3	1
Dídac	1/3	2/3	2/3	2/3	1/3
Soslan	1/3	2/3	1/3	2/3	2/3
Alberto	1	1	2/3	2/3	2/3
José	2/3	1	2/3	1	2/3
Erik	2/3	1	2/3	2/3	2/3
MITJANA	0,71	0,82	0,63	0,63	0,67

Activitat 3

	RESPOSTES DE L'ALUMNAT SOBRE LA RESOLUCIÓ																RESPOSTES SOBRE GEOGEBRA				
	a		b		c	d	e	f		g		h		i		j	k	l	m	n	o
	sí / no	coordenades	sí / no	coordenades	sí / no	sí / no	sí / no	sí / no	càlcul	sí / no	fórmula	sí / no	càlcul	sí / no	fórmula	sí / no	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m
Manel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	2/3	1/3	2/3
Youssef	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3	1/3	1/3	2/3
M. Carmen	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3	2/3	2/3	1
Toni	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	2/3	2/3	2/3	1/3	1/3
Raquel	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	1	2/3	2/3	2/3
Angelo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3
Marta	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	2/3	2/3	1
Juan																					
Jesús																					
Alba	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3
Federico	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0					
Neus	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	1	2/3	2/3
Ivan	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2/3	1/3	1	2/3	1
Tanya	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	2/3	2/3	1
Dídac	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1/3	2/3	2/3	2/3	1/3
Soslan																					
Alberto	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	2/3	1	1	2/3
José	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	2/3	1	2/3	2/3	2/3
Erik	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	1	2/3	2/3	2/3
MITJANA	1,00	1,00	1,00	1,00	0,94	0,44	0,94	1,00	0,94	0,88	0,81	1,00	0,88	0,88	0,75	0,56	0,78	0,80	0,73	0,62	0,71

Activitat 4

	RESPOSTES DE L'ALUMNAT SOBRE LA RESOLUCIÓ																		RESPOSTES SOBRE GEOGEBRA				
	a		b		c	d	e	f		g		h		i		j	k		l	m	o	p	q
	sí / no	coordenades	sí / no	coordenades	sí / no	sí / no	sí / no	sí / no	càlcul	sí / no	fórmula	sí / no	càlcul	sí / no	fórmula	sí / no	sí / no	fórmula	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m
Manel	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	2/3	2/3	2/3
Youssef	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	2/3	1/3	1/3	2/3	2/3
M. Carmen	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	2/3	2/3	2/3	2/3	1
Toni	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	2/3	2/3	2/3	2/3	1
Raquel	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3
Angelo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3
Marta	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	2/3	1	2/3	1	2/3
Juan	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	2/3	1	1/3	2/3	1/3
Jesús	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
Alba	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	2/3	2/3	2/3	2/3	1
Federico	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	2/3	1	2/3	2/3
Neus	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3
Ivan																							
Tanya	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	2/3	1	2/3	1	2/3
Dídac																							
Soslan	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3
Alberto	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	2/3	1	2/3	1	2/3
José	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	2/3	2/3	1	2/3
Erik	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
MITJANA	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,53	1,00	1,00	0,94	0,82	0,59	1,00	1,00	0,82	0,65	0,65	0,59	0,47	0,75	0,75	0,65	0,75	0,71

Activitat 5

	RESPOSTES DE L'ALUMNAT SOBRE LA RESOLUCIÓ							RESPOSTES SOBRE GEOGEBRA	
	a		b		c	d		e	f
	sí / no	vector	sí / no	vector	sí / no	sí / no	punt	g-p-b-m	g-p-b-m
Manel	1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3
Youssef	1	1	1	1	1	1	1	1/3	2/3
M. Carmen	1	1	1	1	1	1	0	2/3	1
Toni	1	1	1	1	1	1	1	1/3	1/3
Raquel	1	1	1	1	1	1	0	2/3	1
Angelo	1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3
Marta	1	1	1	1	1	1	0	2/3	2/3
Juan	1	0	1	1	1	1	1	1	2/3
Jesús	1	1	1	1	1	1	0	1	2/3
Alba									
Federico	1	1	1	1	1	1	1	1/3	1/3
Neus									
Ivan	1	0	1	1	1	1	1	1/3	1/3
Tanya	1	1	1	1	1	1	0	2/3	2/3
Dídac	1	1	1	1	1	1	0	1/3	1/3
Soslan	1	0	1	1	1	1	1	1/3	2/3
Alberto	1	1	1	1	1	1	1	1/3	1/3
José	1	0	1	1	1	1	1	2/3	2/3
Erik	1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3
MITJANA	1,00	0,76	1,00	1,00	1,00	1,00	0,65	0,57	0,61

	RESPOSTES DE L'ALUMNAT SOBRE LA RESOLUCIÓ								RESPOSTES SOBRE GEOGEBRA				
	a	b		c		d	e	f	g	h	i	j	k
	sí / no	sí / no	fórmula	sí / no	fórmula	sí / no	0 graus	0 graus	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m
Manel	0	1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3	1	2/3	2/3
Youssef	0	0	0	0	0	0	0	0	2/3	1/3	1/3	1/3	1/3
M. Carmen	1	1	1	1	1	1	0	0	1/3	1/3	1/3	1/3	1
Toni	1	1	0	1	1	0	1	1	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
Raquel	1	1	1	1	1	1	0	0	2/3	2/3	2/3	2/3	1
Angelo	0	0	0	0	0	1	0	1	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
Marta	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
Juan	0	0	0	1	1	0	0	1	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
Jesús	1	1	0	1	1	1	1	1	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
Alba													
Federico	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
Neus													
Ivan	1	1	1	1	1	1	1	0	1/3	2/3	1/3	2/3	1/3
Tanya	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
Dídac	0	1	1	1	1	0	1	1	1/3	2/3	1/3	1/3	1/3
Soslan	0	1	0	1	1	0	1	1	1/3	1/3	1/3	1/3	2/3
Alberto	0	1	1	1	1	1	1	0	1/3	1/3	1/3	2/3	1/3
José	0	1	1	1	1	0	1	0	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3
Erik	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
MITJANA	0,41	0,71	0,53	0,76	0,76	0,53	0,59	0,53	0,49	0,49	0,49	0,51	0,55

Activitat 6

	RESPOSTES DE L'ALUMNAT SOBRE LA RESOLUCIÓ															RESPOSTES SOBRE GEOGEBRA				
	a		b		c		d		e	f		g		h		i	j	k	l	m
	sí / no	coordenades	sí / no	coordenades	sí / no	coordenades	sí / no	coordenades	vector	vectorial	implícita	vectorial	implícita	sí / no	relació	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m
Manel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	2/3	2/3	2/3
Youssef	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1/3	2/3	2/3	1/3	2/3
M. Carmen	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	2/3	2/3	2/3	2/3	1
Toni	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3
Raquel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	2/3	2/3	2/3	2/3	1
Angelo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	2/3
Marta																				
Juan	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3	2/3	1/3	1/3	1/3
Jesús	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
Alba	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	2/3	2/3	2/3	1	2/3
Federico	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
Neus	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3
Ivan	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1/3	2/3	2/3	2/3	1
Tanya	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	2/3	1/3	1
Dídac	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3	1/3	1/3	2/3
Soslan	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2/3	1/3	1/3	2/3	2/3
Alberto	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	2/3	2/3	1	1/3	2/3
José	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
Erik	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
MITJANA	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,67	0,44	0,67	0,72	0,50	0,11	0,65	0,69	0,63	0,57	0,69

Activitat 7

	GEOG.			RESPOSTES SOBRE GEOGEBRA			
				a	b	c	d
	completa quadrat	troba centre		g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m
Manel				1	1	2/3	2/3
Youssef	1	1		2/3	2/3	2/3	2/3
M. Carmen	1	1		2/3	1	1	1
Toni	1	1		2/3	2/3	2/3	2/3
Raquel	0	0		2/3	2/3	2/3	2/3
Angelo				2/3	2/3	2/3	2/3
Marta	1	0		1	2/3	1	2/3
Juan	0	0		2/3	1/3	1/3	2/3
Jesús	1	1		2/3	2/3	2/3	2/3
Alba	1	1		2/3	2/3	1	2/3
Federico	1	1		1	2/3	2/3	1
Neus							
Ivan	1	1		1/3	2/3	1/3	0
Tanya	1	1		1	1	1	1
Dídac	0	0		1	1	1	1
Soslan	0	0					
Alberto				1	1	2/3	2/3
José	1	1		1/3	2/3	2/3	2/3
Erik	1	1		2/3	2/3	2/3	2/3
MITJANA	0,73	0,67		0,75	0,75	0,73	0,71

Activitat 8

	GEO	ESCRIT		RESPOSTES SOBRE GEOGEBRA			
				a	b	c	d
	troba circumcentre	mediatrius	circumcentre	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m	g-p-b-m
Manel	1	0	0	1	1	2/3	2/3
Youssef	1	0	0	2/3	2/3	2/3	1
M. Carmen	1	1	0	1	1	2/3	2/3
Toni	1	1	1	1/3	2/3	2/3	2/3
Raquel	1	1	1	2/3	2/3	2/3	2/3
Angelo	1	0	0	2/3	2/3	2/3	2/3
Marta	1	0	0	2/3	2/3	1	2/3
Juan	1	0	0	2/3	2/3	2/3	1
Jesús	1	1	1	1	1	1	2/3
Alba	1	1	0	1	1	2/3	1
Federico	1	1	0	2/3	2/3	2/3	2/3
Neus							
Ivan	1	1	0	2/3	1/3	0	2/3
Tanya	1	0	0	1	1	1	1
Dídac	1	1	0	1	1	1	1
Soslan	1	0	0	1	2/3	2/3	2/3
Alberto	1	1	1	1	1	1	2/3
José	1	1	1	2/3	2/3	1/3	1/3
Erik	1	0	0	2/3	2/3	2/3	2/3
MITJANA	1,00	0,56	0,28	0,80	0,78	0,70	0,74

Qüestionari final

	amenes	interessants	iniciativa	comprensió	motivació	reflexió	difícils	salt	equacions recta	producte escalar	vec. perpendiculars	plantejar	avançar	fórmules generals	ajuda Geogebra
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
Manel	1/3	1	2/3	1	2/3	1/3	0	1/3	1	2/3	2/3	2/3	1	2/3	1
Youssef	2/3	2/3	1/3	1/3	1/3	2/3	1/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3	1	2/3
M. Carmen	1	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
Toni	2/3	2/3	2/3	1	2/3	2/3	1/3	1/3	2/3	1/3	2/3	1	2/3	1/3	2/3
Raquel	1	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1
Angelo	1	1	2/3	2/3	2/3	1	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
Marta	1/3	2/3	2/3	2/3	1	2/3	2/3	1	2/3	2/3	1	1	1	2/3	2/3
Juan	1	2/3	2/3	2/3	2/3	1	1/3	1	1/3	2/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
Jesús	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3	1/3	0	0	1/3	2/3	1/3	1/3	1/3	2/3
Alba	1	1	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	1/3	1/3	1/3	1	1	2/3	2/3
Federico	1	1	1/3	2/3	1/3	2/3	0	1/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3
Neus															
Ivan	2/3	2/3	1/3	1	1	2/3	1/3	1	1/3	1	2/3	1/3	1	1/3	2/3
Tanya	1	2/3	2/3	2/3	2/3	1	1/3	1	2/3	2/3	1	1	1	2/3	1
Dídac	1	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
Soslan	1	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	1/3	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1
Alberto	1	1	2/3	2/3	2/3	1	1/3	1/3	2/3	1	1	2/3	2/3	1	2/3
José	1	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	0	1	2/3	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	1/3
Erik	2/3	1	1/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	1	2/3	1	2/3	2/3	1	1
MITJANA	0,83	0,78	0,56	0,67	0,67	0,72	0,30	0,59	0,57	0,61	0,67	0,69	0,72	0,65	0,72

Annex 4: Taules de respostes agrupades segons el tipus de matematització

Matematització horitzontal amb el programari Geogebra (MHG)

	MH GEOGEBRA																					
	Activitat 1	Activitat 2			Activitat 3		Activitat 4		Activitat 5					Activitat 6				Activitat 7		Activitat 8	Mitjana	Banda
	a	a	b	c	a	b	a	b	a	b	c	d	a	a	b	c	d					
Manel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0,85	M
Youssef	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0,95	M
M. Carmen	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0,95	M
Toni	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,95	M
Raquel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0,85	M
Angelo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0,85	M
Marta	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0					1	0	1	0,75	BB
Juan	0	1	1	1			1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0,50	N
Jesús							1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0,93	M
Alba	1	1	1	1	1	1	1	1						1	1	1	1	1	1	1	1,00	M
Federico	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	M
Neus	1	1	1	1	1	1	1	1						1	1	1	1				1,00	M
Ivan	1	1	1	1	1	1			0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,94	M
Tanya	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0,85	M
Dídac		1	1	1	1	1			1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0,76	BB
Soslan	0	1	1	1			1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0			1	0,56	B
Alberto	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0,85	M
José	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0,90	M
Erik	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	M

Matematització horitzontal reflectida per escrit (MHE)

	MH ESCRITA															
	Activitat 1	Activitat 2			Activitat 3		Activitat 4		Activitat 6				Activitat 8		Mitjana	Banda
	f	h	j	l	f	h	f	h	f		g					
Manel	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0,64	B
Youssef	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0,71	BB
M. Carmen	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0,86	M
Toni	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,93	M
Raquel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	M
Angelo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0,86	M
Marta	0	1	1	1	1	1	1	1					0	0	0,70	BB
Juan	1	1	1	1			1	1	0	0	0	0	0	0	0,50	N
Jesús							1	1	0	0	0	1	1	1	0,63	B
Alba	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0,86	M
Federico	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0,93	M
Neus	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0			0,75	BB
Ivan	1	1	1	1	0	0			0	1	0	1	1	0	0,58	B
Tanya	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0,57	B
Dídac		1	1	1	1	1			1	1	1	1	1	0	0,91	M
Soslan	1	1	1	1			1	1	0	0	0	0	0	0	0,50	N
Alberto	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0,86	M
José	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0,86	M
Erik	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0,79	BB

Matematització vertical (MV)

	MV															
	Activitat 1	Activitat 2			Activitat 3		Activitat 4			Activitat 5				Activitat 6	Mitjana	Banda
	G	i	k	m	g	i	g	i	k	b	c	e	f	h		
Manel	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0,43	P
Youssef	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0,50	N
M. Carmen	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0,64	B
Toni	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0,64	B
Raquel	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0,71	BB
Angelo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0,71	BB
Marta	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0		0,54	B
Juan	0	1	1	1			1	1	0	0	1	0	1	0	0,58	B
Jesús							1	1	1	0	1	1	1	0	0,75	BB
Alba	1	1	1	1	1	1	1	1	0					0	0,80	BB
Federico	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0,64	B
Neus	0	1	1	1	1	1	1	1	0					0	0,70	BB
Ivan	0	1	1	1	0	0				1	1	1	0	0	0,55	B
Tanya	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0,50	N
Dídac		1	1	1	1	1				1	1	1	1	0	0,90	M
Soslan	0	1	0	1			1	0	0	0	1	1	1	0	0,50	N
Alberto	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0,50	N
José	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0,64	B
Erik	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0,86	M

Annex 5: Taules de respostes agrupades segons el tipus de pregunta de valoració subjectiva

Pregunta 1

	Usar Geogebra t'ha ajudat per representar i veure clar el plantejament de l'activitat?											
	Activitat 1	Activitat 2	Activitat 3	Activitat 4	Activitat 51	Activitat 52	Activitat 6	Activitat 7	Activitat 8	Qüestionari final	Mitjana	Banda de valoració
Manel	2/3	1	1	1	2/3	2/3	1	1	1	2/3	0,87	M
Youssef	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3	0,60	B
M. Carmen	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	1	2/3	0,67	BB
Toni	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3	1/3	1	0,63	B
Raquel	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	0,67	BB
Angelo	1	1	1	1	2/3	1/3	1	2/3	2/3	2/3	0,80	BB
Marta	2/3		1	2/3	2/3	1/3		1	2/3	1	0,75	BB
Juan	2/3	2/3		2/3	1	1/3	1/3	2/3	2/3	1/3	0,59	B
Jesús				2/3	1	2/3	1/3	2/3	1	1/3	0,67	BB
Alba	2/3	2/3	2/3	2/3			2/3	2/3	1	1	0,75	BB
Federico	2/3	2/3		1	1/3	2/3	2/3	1	2/3	2/3	0,70	BB
Neus	2/3	2/3	1	2/3			2/3				0,73	BB
Ivan	2/3	2/3	2/3		1/3	1/3	1/3	1/3	2/3	1/3	0,48	P
Tanya	2/3	1	1	2/3	2/3	1/3	1	1	1	1	0,83	M
Dídac		1/3	1/3		1/3	1/3	2/3	1	1	2/3	0,58	B
Soslan	2/3	1/3		2/3	1/3	1/3	2/3		1	2/3	0,58	B
Alberto	2/3	1	1	2/3	1/3	1/3	2/3	1	1	2/3	0,73	BB
José	2/3	2/3	2/3	1	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	0,67	BB
Erik	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3		2/3	2/3	2/3	0,67	BB
Mitjana	0,69	0,71	0,78	0,75	0,57	0,49	0,65	0,75	0,80	0,69		
Banda	BB	BB	BB	BB	B	P	B	BB	BB	BB		

Pregunta 2

	Usar Geogebra t'ha ajudat per trobar el que se't demana?									
	Activitat 1	Activitat 2	Activitat 3	Activitat 4	Activitat 52	Activitat 6	Activitat 7	Activitat 8	Mitjana	Banda de valoració
Manel	1	1	1	1	2/3	1	1	1	0,96	M
Youssef	1/3	2/3	2/3	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	0,54	B
M. Carmen	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	1	1	0,71	BB
Toni	1	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	0,71	BB
Raquel	2/3	1	1	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	0,75	BB
Angelo	1	1	1	1	1/3	1	2/3	2/3	0,83	M
Marta	1		1	1	1/3		2/3	2/3	0,78	BB
Juan	1	2/3		1	1/3	2/3	1/3	2/3	0,67	BB
Jesús				2/3	2/3	1/3	2/3	1	0,67	BB
Alba	1/3	2/3	2/3	2/3		2/3	2/3	1	0,67	BB
Federico	1	2/3		2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	0,71	BB
Neus	2/3	2/3	2/3	1/3		2/3			0,60	B
Ivan	1/3	1	1/3		2/3	2/3	2/3	1/3	0,57	B
Tanya	1	1	1	1	1/3	1	1	1	0,92	M
Dídac		2/3	2/3		2/3	2/3	1	1	0,78	BB
Soslan	2/3	2/3		2/3	1/3	1/3		2/3	0,56	B
Alberto	2/3	1	2/3	1	1/3	2/3	1	1	0,79	BB
José	1	1	1	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3	0,75	BB
Erik	2/3	1	1	2/3	2/3		2/3	2/3	0,76	BB
Mitjana	0,76	0,82	0,80	0,75	0,49	0,69	0,75	0,78		
Banda	BB	BB	BB	BB	P	BB	BB	BB		

Pregunta 3

	Usar Geogebra t'ha ajudat per poder entendre el que vas fent i avançar en el procés de resoldre?										
	Activitat 1	Activitat 2	Activitat 3	Activitat 4	Activitat 52	Activitat 6	Activitat 7	Activitat 8	Qüestionari final	Mitjana	Banda de valoració
Manel	2/3	2/3	2/3	2/3	1	2/3	2/3	2/3	1	0,74	BB
Youssef	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3	0,48	P
M. Carmen	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	1	2/3	2/3	0,67	BB
Toni	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	0,67	BB
Raquel	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	0,67	BB
Angelo	1	1	1	1	1/3	1	2/3	2/3	2/3	0,81	BB
Marta	2/3		2/3	2/3	1/3		1	1	1	0,76	BB
Juan	1/3	1/3		1/3	1/3	1/3	1/3	2/3	1/3	0,38	P
Jesús				2/3	2/3	1/3	2/3	1	1/3	0,61	B
Alba	2/3	2/3	2/3	2/3		2/3	1	2/3	1	0,75	BB
Federico	2/3	2/3		1	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	0,71	BB
Neus	2/3	2/3	1	2/3		2/3				0,73	BB
Ivan	0	2/3	1		1/3	2/3	1/3	0	1	0,50	N
Tanya	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	1	1	1	0,74	BB
Dídac		2/3	2/3		1/3	1/3	1	1	2/3	0,67	BB
Soslan	2/3	1/3		1/3	1/3	1/3		2/3	2/3	0,48	P
Alberto	1	2/3	1	2/3	1/3	1	2/3	1	2/3	0,78	BB
José	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	0,59	B
Erik	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3		2/3	2/3	2/3	0,67	BB
Mitjana	0,61	0,63	0,73	0,65	0,49	0,63	0,73	0,70	0,72		
Banda	B	B	BB	B	P	B	BB	BB	BB		

Pregunta 4

	Usar Geogebra t'ha ajudat per resoldre no tan sols el problema concret sinó per trobar fórmules generals?								
	Activitat 1	Activitat 2	Activitat 3	Activitat 4	Activitat 52	Activitat 6	Qüestionari final	Mitjana	Banda de valoració
Manel	1/3	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3	0,52	B
Youssef	2/3	1/3	1/3	2/3	1/3	1/3	1	0,52	B
M. Carmen	1	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	0,67	BB
Toni	1/3	1/3	1/3	2/3	2/3	1/3	1/3	0,43	P
Raquel	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3	0,62	B
Angelo	2/3	1	1	1	1/3	1	2/3	0,81	BB
Marta	1/3		2/3	1	1/3		2/3	0,60	B
Juan	2/3	1		2/3	1/3	1/3	1/3	0,56	B
Jesús				2/3	2/3	1/3	1/3	0,50	N
Alba	2/3	1/3	1/3	2/3		1	2/3	0,61	B
Federico	1/3	2/3		2/3	2/3	2/3	2/3	0,61	B
Neus	1/3	2/3	2/3	2/3		2/3		0,60	B
Ivan	2/3	1/3	2/3		2/3	2/3	1/3	0,56	B
Tanya	1/3	2/3	2/3	1	1/3	1/3	2/3	0,57	B
Dídac		2/3	2/3		1/3	1/3	2/3	0,53	B
Soslan	1/3	2/3		2/3	1/3	2/3	2/3	0,56	B
Alberto	1/3	2/3	1	1	2/3	1/3	1	0,71	BB
José	1/3	1	2/3	1	2/3	2/3	2/3	0,71	BB
Erik	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3		1	0,67	BB
Mitjana	0,49	0,63	0,62	0,75	0,51	0,57	0,65		
Banda	P	B	B	BB	B	B	B		

Pregunta 5

	Comparat amb el treball que fas habitualment a la classe de Matemàtiques (amb llapis i paper), usar Geogebra t'ha ajudat?											
	Activitat 1	Activitat 2	Activitat 3	Activitat 4	Activitat 51	Activitat 52	Activitat 6	Activitat 7	Activitat 8	Qüestionari final	Mitjana	Banda de valoració
Manel	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1	0,70	BB
Youssef	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	1	2/3	0,67	BB
M. Carmen		1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3	0,93	M
Toni	2/3	1/3	1/3	1	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	0,60	B
Raquel	1	2/3	2/3	2/3	1	1	1	2/3	2/3	1	0,83	M
Angelo	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3	0,63	B
Marta	2/3		1	2/3	2/3	1/3		2/3	2/3	2/3	0,67	BB
Juan	2/3	2/3		1/3	2/3	1/3	1/3	2/3	1	1/3	0,56	B
Jesús				2/3	2/3	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3	0,62	B
Alba	1/3	2/3	2/3	1			2/3	2/3	1	2/3	0,71	BB
Federico	1/3	2/3		2/3	1/3	2/3	2/3	1	2/3	2/3	0,63	B
Neus	2/3	2/3	2/3	2/3			1/3				0,60	B
Ivan	1/3	2/3	1		1/3	1/3	1	0	2/3	2/3	0,56	B
Tanya	2/3	1	1	2/3	2/3	1/3	1	1	1	1	0,83	M
Dídac		1/3	1/3		1/3	1/3	2/3	1	1	2/3	0,58	B
Soslan	2/3	2/3		2/3	2/3	2/3	2/3		2/3	1	0,71	BB
Alberto	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3	0,60	B
José	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	1/3	1/3	0,60	B
Erik	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3		2/3	2/3	1	0,70	BB
Mitjana	0,63	0,67	0,71	0,71	0,61	0,55	0,69	0,71	0,74	0,72		
Banda	B	BB	BB	BB	B	B	BB	BB	BB	BB		