

On Reed-Muller and related quaternary codes

(Codis Reed-Muller i codis quaternaris relacionats)

A la teoria dels codis lineals, cal remarcar la importància del codi Reed-Muller. L'any 1972, la nau espacial Mariner 9 va transmetre imatges de Mart fent servir el codi Reed-Muller d'ordre 1 $RM(1,5)$. Aquests codis són d'especial interès degut a la facilitat del seu procés de construcció, codificació i decodificació.

A partir de l'any 1994, es va obrir una nova porta a la recerca de la teoria de codis. Es va provar que alguns codis no lineals molt importants, degut al fet que el nombre de paraules codis era superior al de la resta de codis lineals amb la mateixa longitud i distància mínima, tenien estructura de codis \mathbb{Z}_4 -lineals.

A partir d'aquest moment, també es va començar a estudiar la relació dels codis Reed-Muller amb els codis quaternaris. Van aparèixer un parell de famílies de \mathbb{Z}_4 -codis relacionats amb els Reed-Muller, els codis $QRM(r, m)$ i els codis $ZRM(r, m)$. En aquesta Tesi estudiem amb profunditat aquestes dues famílies de \mathbb{Z}_4 -codis.

Respecte als codis $QRM(r, m)$, descriurem una generalització, construirem la classe $\overline{QRM}(r, m)$ on, per a cada valor r i m , tot codi C que pertanyi a $\overline{QRM}(r, m)$ compleix que C mòdul 2 és, exactament, el codi $RM(r, m)$. Generalitzem les propietats bàsiques dels codis $QRM(r, m)$ als codis de la classe $\overline{QRM}(r, m)$. Es demostra que tots els codis Preparata-like i Kerdock-like són la imatge via l'aplicació de Gray de codis a $\overline{QRM}(r, m)$. A més, també es calcula el rang i la dimensió del nucli dels codis d'aquesta classe. Finalment, podem trobar diferents construccions d'aquest codis i la creació de cadenes amb propietats d'aquestes cadenes relacionades amb la dualitat i la distància mínima dels codis que la formen.

A la literatura, hi ha dues definicions diferents de codis $ZRM(r, m)$. Farem servir aquesta notació, $ZRM(r, m)$, per als codis definits per Hammons, Kumar, Calderbank, Sloane, i Sole l'any 1994 i $ZRM^*(r, m)$ per als codis definits posteriorment per Zhe-Xian Wan l'any 1997. Hem demostrat que aquests codis coincideixen si i només si $r = 0, 1, 2, m$ i $m + 1$ que és, exactament, els valors per al quals la imatge d'aquests codis via l'aplicació de Gray és un codi Reed-Muller. Estudiem propietats d'aquestes dues famílies. Fent servir l'aplicació de Gray, les imatges dels codis $ZRM(r, m)$ són codis lineals i donem la seva dimensió i calculem el rang i la dimensió del nucli de les imatges dels codis $ZRM^*(r, m)$.