CÀLCUL DE L'ESCISSIÓ DE SEPARATRIUS USANT TÈCNIQUES DE MATCHING COMPLEX I RESSURGÈNCIA APLICADES A L'EQUACIÓ DE HAMILTON-JACOBI

Carme Olivé Farré

Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques

Universitat Rovira i Virgili

17 de maig de 2006

Memòria presentada per a aspirar al grau de Doctor en Matemàtiques per la Universitat Politècnica de Catalunya.

Programa de doctorat de Matemàtica Aplicada

Certifico que la present memòria ha estat realitzada per Carme Olivé Farré i dirigida per mi.

Barcelona, 17 de maig de 2006

Dra. M. Teresa Martínez-Seara i Alonso

Als meus pares, al Xavier i al Marc.

Agraïments

Vull donar les gràcies especialment als meus pares M. Carme i Josep, pel seu esforç personal per a que jo pugués estudiar el que em venia realment de gust i per animar-me a intentar sempre el màxim possible. Sense el seu constant recolçament a tota hora i en tot moment jo no podria presentar ara aquest treball.

També han estat claus el meu marit Xavier i el meu fill Marc, que han compartit amb mi èpoques estressants i, de vegades, han hagut d'espavilar-se sense el meu ajut. Trobo que ho han fet amb generositat i els estic agraïda.

De la meva estada a Barcelona durant els estudis de llicenciatura i doctorat en guardaré sempre un bell record per l'afecte amb el qual em va acollir a casa seva l'Elvira, cosina de la meva mare. La tranquil·litat que em va proporcionar no té preu.

Així mateix he de fer menció dels membres del Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques de la URV, perquè sempre han estat disposats a escoltar, donar consells i aclarir qüestions tècniques o burocràtiques. De fet, pel nombre d'hores que hi passem, el despatx és gairebé com una segona casa. També hi he d'incloure els companys del Departament de Matemàtica Aplicada I de la UPC, on m'hi sento molt a gust i gairebé sembla la meva tercera casa.

Finalment, agrair a la meva directora de tesi Tere Martínez-Seara la seva bona disposició, la seva paciència infinita i el caliu humà que sempre m'ha demostrat. La seva vàlua científica i el seu saber fer m'han permès poder seguir endavant en la sempre difícil tasca de la recerca. És un autèntic plaer poder treballar amb ella i els altres companys del grup de recerca.

Índex

Capítol 1

Plantejament del problema.

1.1 Introducció al problema.

En alguns casos, quan un sistema hamiltonià integrable es pertorba amb un terme d'oscil·lació ràpida no necessàriament petit, el sistema resultant es comporta de manera propera a un integrable en el sentit que les zones caòtiques són molt petites. Un exemple clàssic on té lloc aquest fenomen i que ha estat usat ja per diversos autors [Sa95, DGJS97, T97], és el del pèndol amb una pertorbació periòdica en el temps de període molt petit:

$$\begin{cases} \dot q = p \\ \dot p = \sin q - \mu \sin q \sin(t/\varepsilon) \end{cases} \tag{1.1}$$

on $0 < \varepsilon < 1$ i $\mu > 0$ són dos paràmetres i $(q, t) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\varepsilon\mathbb{Z}$. Aquest sistema és hamiltonià amb funció de Hamilton associada:

$$H_{\mu,\varepsilon}(q, p, t/\varepsilon) := \frac{p^2}{2} - 1 + \cos q + \mu(1 - \cos q)\sin(t/\varepsilon), \tag{1.2}$$

que és analítica en $(q, p, t/\varepsilon, \mu)$, $H_{\mu,\varepsilon}(0, 0, t/\varepsilon) = 0$ i pot considerar-se com a suma del hamiltonià del sistema no pertorbat i d'una pertorbació ràpidament oscil·lant:

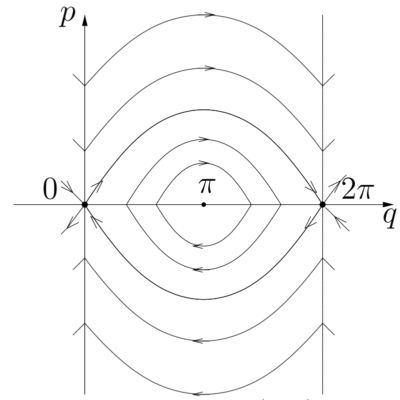
$$H_{\mu,\varepsilon}(q, p, t/\varepsilon) = H_0(q, p) + \mu H_1(q, p, t/\varepsilon) \tag{1.3}$$

amb

$$H_0(q, p) := \frac{p^2}{2} - 1 + \cos q, \qquad H_1(q, p, t/\varepsilon) := (1 - \cos q)\sin(t/\varepsilon). \tag{1.4}$$

És important remarcar que l'estudi fet en aquesta memòria donarà conclusions quan el paràmetre $\mu \leq \mu_0$, però μ_0 pot ser qualsevol valor independent de l'altre paràmetre ε, que sí serà petit. En particular, pot prendre valors grans.

El nostre estudi s'ha centrat en aquest cas, però amb les hipòtesis adequades, els mètodes emprats són generalitzables a pertorbacions periòdiques generals de sistemes integrables al pla, és a dir, hamiltonians del tipus (1.3) amb $H_0(q, p)$ i $H_1(q, p, t/\varepsilon)$ qualssevol. Així doncs, s'ha utilitzat l'exemple (1.1), on ja s'han fet estudis previs (vegi's [T97], però també [Sa95]), com a test del mètode proposat per tal d'obtenir resultats quan el paràmetre de la pertorbació del sistema és gran.



Per a $\mu = 0$, el camp és autònom i aleshores el retrat de fase, que és el resultat de la projecció sobre un pla $t = t_0$ de les òrbites $(q(t), p(t), t)$, ens dóna una visió perfecta del comportament del sistema. En el cas del pèndol simple, la dinàmica del sistema és ben coneguda: identificant $q = 0$ amb $q = 2\pi$, l'espai de fase està format per òrbites periòdiques al voltant del punt d'equilibri estable $(\pi, 0)$, que representen oscil·lacions del pèndol al voltant del seu punt més baix, i per òrbites periòdiques lluny de $(\pi, 0)$, que representen rotacions completes del pèndol a més o menys velocitat. Les varietats invariants estable i inestable del punt d'equilibri hiperbòlic (0,0) estan formades per solucions del sistema que tendeixen a (0,0) quan el temps tendeix a $+\infty$ o $-\infty$ respectivament. En el cas no pertorbat, aquestes dues varietats coincideixen i corresponen a les solucions que satisfan $H_0(q, p) = 0$, és a dir,

$$\{(q, p) \,|\, q \in \mathbb{R},\ p = \pm 2 \sin \frac{q}{2}\}, \tag{1.5}$$

i que, a més, fan de separació entre els dos tipus de moviment del pèndol, per la qual cosa reben el nom de separatrius.

Escollint una de les dues branques, podem diferenciar la varietat estable de la inestable únicament distingint el domini de q entre $(0, 4\pi)$ i $(-2\pi, 2\pi)$, tal i com es pot veure a la Figura 1.1. També podem expressar les separatrius parametritzades per $t \in \mathbb{R}$:

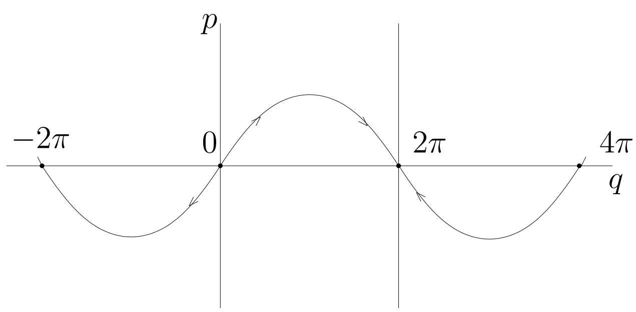


Figura 1.1: Separatriu del pèndol simple, γ_0.

$$\gamma_0(t - t_0) = \big(q_0(t - t_0), \dot{q}_0(t - t_0)\big) = \big(4 \arctan e^{t - t_0}, 2/\cosh(t - t_0)\big) \in (0, 2\pi) \times (0, 2], \tag{1.6}$$

on amb $t \in (-\infty, t_0]$ veiem la varietat inestable corresponent a $q \in (0, \pi]$ i amb $t \in [t_0, \infty)$ veiem l'estable corresponent a $q \in [\pi, 2\pi)$. L'elecció del valor t_0 és tal que, per a temps $t = t_0$, l'òrbita passa per $(\pi, 2)$. Si posem $q_0(t - t_0) = 4 \arctan e^{-(t - t_0)}$, la parametrització (1.6) seria $\gamma_0(t - t_0) = \big(q_0(t - t_0), \dot{q}_0(t - t_0)\big) \in (0, 2\pi) \times [-2, 0)$ i ens dóna l'altra separatriu, que és totalment simètrica respecte l'eix $p = 0$. Com que les separatrius estan formades per punts comuns a les dues varietats invariants associades a un mateix punt hiperbòlic, també s'anomenen òrbites homoclíniques del sistema no pertorbat.

Si estenem el domini de t a $\mathbb{C}$, observem que les separatrius tenen singularitats als punts $t_0 + i\frac{\pi}{2} + i\pi\mathbb{Z}$. El fet que la primera singularitat estigui a distància $\pi/2$ de l'eix real, apareixerà reflectit a les constants involucrades als resultats sobre la distància entre les varietats estable i inestable del punt hiperbòlic en pertorbar el sistema.

Quan $\mu \neq 0$, el camp ja no és autònom, però pel fet que la pertorbació sigui $2\pi\varepsilon$-periòdica respecte t, una manera de visualitzar la dinàmica del sistema és usant l'aplicació de Poincaré P^{t_0}, que es defineix de la següent manera: considerem $\Sigma^{t_0} = \{(q,p,t_0),\ (q,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$ la secció tranversal a temps $t_0 \in \mathbb{R}$ al flux de (1.1) i sigui $(q(t;t_0), p(t;t_0))$ una solució del sistema tal que $(q(t_0;t_0), p(t_0;t_0))) = (q_0, p_0) \in \Sigma^{t_0}$, aleshores $P^{t_0}(q_0,p_0) = (q(t_0+2\pi\varepsilon;t_0), p(t_0+2\pi\varepsilon;t_0))$, és a dir, com es pot veure a la Figura 1.2, a cada punt $(q_0,p_0) \in \Sigma^{t_0}$ se li assigna el corresponent pel flux a temps $2\pi\varepsilon$.

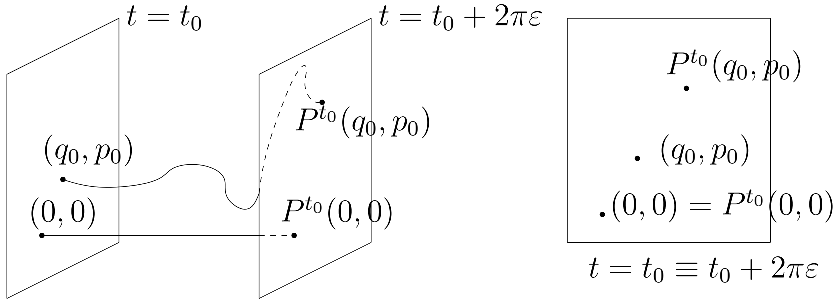


Figura 1.2: Aplicació de Poincaré.

Una altra manera d'estudiar la dinàmica del sistema (1.1) és considerant el flux autònom associat:

$$\begin{cases} \dot q = p \\ \dot p = \sin q - \mu \sin q \sin(s/\varepsilon) \\ \dot s = 1 \end{cases} \qquad \text{per a } (q,p,s) \in [0,2\pi]\times\mathbb{R}\times[0,2\pi\varepsilon]$$

on, per a $\mu = 0$, $\big(0,0,\mathbb{R}/(2\pi\varepsilon\mathbb{Z})\big)$ és una òrbita periòdica de període $2\pi\varepsilon$, que té varietats estable i inestable, $\mathcal{W}_0^+$ i $\mathcal{W}_0^-$, 2-dimensionals coincidents al llarg de la varietat homoclínica $\mathcal{W}_0^+ = \mathcal{W}_0^- = \{\gamma_0(t-t_0)\times\mathbb{R}/(2\pi\varepsilon\mathbb{Z})\}$. Els punts fixos hiperbòlics del sistema no pertorbat donen lloc, quan $\mu \neq 0$, a òrbites $2\pi\varepsilon$-periòdiques en el sistema pertorbat, que per P^{t_0} es veuen com a punts fixos. En el nostre cas concret, com que (0,0) es manté com un punt d'equilibri del sistema pertorbat, tenim també l'òrbita $2\pi\varepsilon$-periòdica hiperbòlica $\big(0,0,\mathbb{R}/(2\pi\varepsilon\mathbb{Z})\big)$, però ara amb varietats invariants estable i inestable bidimensionals $\mathcal{W}^\pm$ diferents, tot i que properes a la varietat homoclínica tal i com es pot veure a la Figura 1.3, i que, degut a l'estructura hamiltoniana, es tallen entre elles.

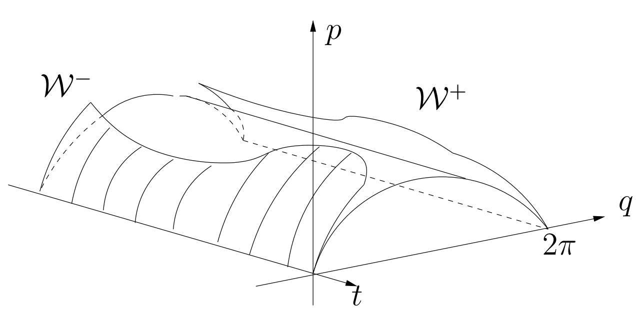


Figura 1.3: Trencament de separatrius.

A la Figura 1.4 s'ha representat com, per a P^{t_0}, la intersecció d'aquestes varietats bidimensionals amb $t = t_0$ dóna corbes invariants que corresponen a les varietats unidimensionals estable i inestable de $(0,0)$ punt fix de P^{t_0}. Aquestes corbes són properes a l'òrbita homoclínica $\gamma_0(t-t_0)$ de la Figura 1.1 i s'intersequen en punts pertanyents a diverses òrbites homoclíniques del sistema (1.1) amb $\mu \neq 0$.

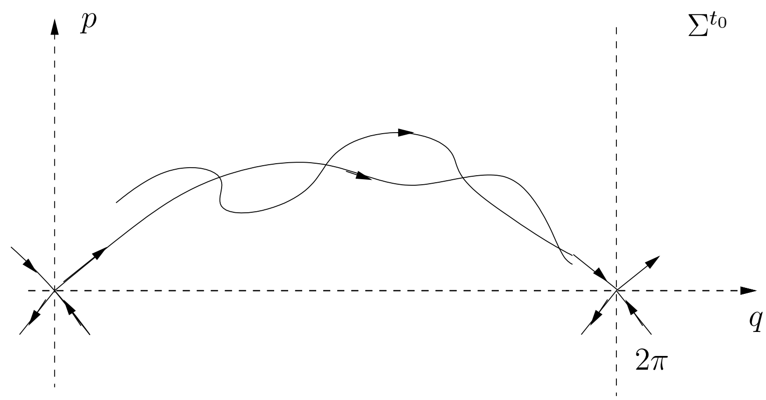


Figura 1.4: Trencament de separatrius.

Aquesta intersecció transversal de varietats invariants, que coincideixen en el problema no pertorbat (trencament de separatrius), ja va ser donada per Poincaré [Po93] com a principal obstacle per a la integrabilitat d'equacions diferencials, doncs dóna lloc a comportaments complicats de les trajectòries.

La distància entre les corbes estable i inestable de P^{t_0} s'hauria de calcular, per exemple, integrant les equacions variacionals associades a l'òrbita homoclínica, però Poincaré va proposar un mètode pertorbatiu en el paràmetre de la pertorbació μ, que Melnikov [Me63] i Arnold [Ar64] van desenvolupar més tard i que ara es coneix com a Mètode de Poincaré-Melnikov-Arnold. El mètode dóna, en primer ordre, el resultat d'aquesta integració i, per tant, es va convertir en la forma estàndard d'estudiar el problema. La distància entre les dues corbes es calcula sobre la recta normal a la separatriu en el punt $\gamma_0(0) = (\pi, 2)$ de la secció Σ^{t_0}, situació indicada gràficament a la Figura 1.5 i que pot trobar-se detalladament explicada al capítol 4 del llibre [GuH83].

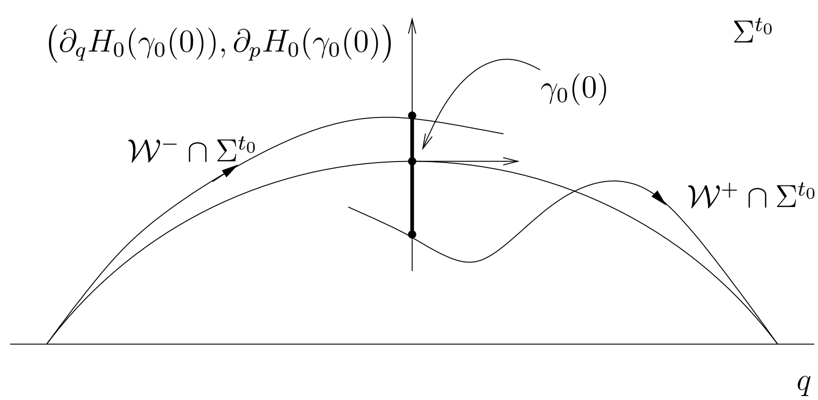


Figura 1.5: Distància entre les varietats invariants estable i inestable.

Si $x^{\pm}(t;t_0) = \big(q^{\pm}(t;t_0), p^{\pm}(t;t_0)\big)$ són les òrbites de $\mathcal{W}^{\pm}$ tals que $x^{\pm}(t_0;t_0) \in \Sigma^{t_0} \cap \{q = \pi\}$, la distància que busquem és senzillament

$$d(t_0) = \left\| x^+(t_0;t_0) - x^-(t_0;t_0) \right\| = \left| p^+(t_0;t_0) - p^-(t_0;t_0) \right| \tag{1.7}$$

i la fórmula obtinguda per Melnikov és

$$d(t_0) = \mu \frac{|M(t_0)|}{\|\big(\partial_p H_0(\gamma_0(0)), -\partial_q H_0(\gamma_0(0))\big)\|} + O(\mu^2), \tag{1.8}$$

on

$$M(t_0) := \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_1\}\big(\gamma_0(t-t_0), t/\varepsilon\big)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_1\}\big(\gamma_0(t), (t+t_0)/\varepsilon\big)\, dt, \tag{1.9}$$

és l'anomenada funció de Melnikov i $\{H_0, H_1\} = \partial_p H_0 \partial_q H_1 - \partial_q H_0 \partial_p H_1$ és el parèntesi de Poisson. Sigui d el màxim d'aquestes distàncies, aleshores,

$$d = \mu \frac{1}{\|\big(\partial_p H_0(\gamma_0(0)), -\partial_q H_0(\gamma_0(0))\big)\|} \max_{t_0} |M(t_0)| + O(\mu^2). \tag{1.10}$$

Si $M(t_0^*) = 0$ i t_0^* és un zero simple, hom pot veure que $x^+(t;t_0)$ i $x^-(t;t_0)$ intersequen a $\Sigma^{t_0} \cap \{q = \pi\}$ per a un $t_0 = t_0^* + O(\mu)$. Així doncs, com que $x^+(t_0;t_0) = x^-(t_0;t_0) = x^h(t_0;t_0)$, la corresponent solució $x^h(t;t_0)$ és una òrbita homoclínica del sistema (1.1) per a $\mu \neq 0$. Un cop obtingut t_0^* tal que $M(t_0^*) = 0$, la teoria de Melnikov també ens dóna una aproximació de l'angle que les dues corbes invariants, $\mathcal{W}^+ \cap \Sigma^{t_0}$ i $\mathcal{W}^- \cap \Sigma^{t_0}$, fan en el moment d'intersecar-se a $q = \pi$:

$$\sin\alpha = \mu \frac{|M'(t_0^*)|}{\|\gamma_0(0)\|^2} + O(\mu^2). \tag{1.11}$$

Per altra banda, si t_0^{**} és un zero consecutiu a t_0^* de la funció de Melnikov, aquesta teoria permet provar que l'àrea del lòbul format per les interseccions de $\mathcal{W}^+ \cap \Sigma^{t_0}$ i $\mathcal{W}^- \cap \Sigma^{t_0}$ al pla $t = t_0$, ve aproximada per:

$$A = \mu \int_{t_0^*}^{t_0^{**}} |M(t_0)|\, dt_0 + O(\mu^2). \tag{1.12}$$

En el nostre cas, segons (1.6), $\gamma_0(0) = (q_0(0), p_0(0)) = (\pi, 2)$ i aleshores

$$\big(\partial_p H_0(\gamma_0(0)), -\partial_q H_0(\gamma_0(0))\big) = \big(p_0(0), \sin q_0(0)\big) = (2, 0).$$

Pel que fa a la funció de Melnikov,

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_0(t) \sin q_0(t) \sin\frac{t+t_0}{\varepsilon}\, dt = \cos(t_0/\varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} p_0(t) \sin q_0(t) \sin(t/\varepsilon)\, dt = \\ &= \cos(t_0/\varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} 4\frac{\sinh t}{\cosh^3 t} \sin(t/\varepsilon)\, dt = -4i \cos(t_0/\varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh t}{\cosh^3 t}\, e^{it/\varepsilon}\, dt, \end{aligned}$$

però, usant que $\sinh t/\cosh^3 t$ té un pol triple a $i\pi/2$ i el Teorema dels Residus, pot comprovar-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh t}{\cosh^3 t}\, e^{it/\varepsilon}\, dt = \frac{\pi i}{\varepsilon^2} \frac{1}{2\sinh(\varepsilon^{-1}\pi/2)},$$

per tant,

$$M(t_0) = \frac{2\pi}{\varepsilon^2}\cos(t_0/\varepsilon)\frac{1}{\sinh(\varepsilon^{-1}\pi/2)},$$

que, sabent (1.10), (1.11) i (1.12), ens porta a la conclusió que:

$$\begin{aligned} d =& \mu\frac{\pi}{\varepsilon^2}\frac{1}{\sinh(\varepsilon^{-1}\pi/2)} + O(\mu^2), \\ \sin\alpha =& \mu\frac{\pi}{2\varepsilon^3}\frac{1}{\sinh(\varepsilon^{-1}\pi/2)} + O(\mu^2), \\ A =& \mu\frac{4\pi}{\varepsilon}\frac{1}{\sinh(\varepsilon^{-1}\pi/2)} + O(\mu^2). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Poincaré ja va detectar els fenòmens exponencialment petits en alguns sistemes dinàmics, però no van ser estudiats metòdicament fins molt més tard.

Així doncs, situacions com la nostra, en les quals un sistema integrable amb un punt fix hiperbòlic s'ha pertorbat amb un terme no regular en ε (en concret era periòdic en t/ε), provoquen que $M(t_0)$ sigui exponencialment petita respecte ε (vegi's [Fo93]) i per tant, amb aquest mètode pertorbatiu clàssic la fórmula (1.13) dóna una bona mesura del trencament en primer ordre de μ només si

$$\mu = o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\,e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}\right),$$

condició que limita de manera extrema el rang de valors per al paràmetre μ.

A la següent secció donarem un resum del progrés que ja s'ha fet en demostrar que, si μ és suficientment petit respecte ε, el Mètode de Melnikov continua essent vàlid. El nostre objectiu, però, va més en la línea de [T97, Sa95] i és veure que, si μ és gran, es pot obtenir una fórmula aproximada de la distància entre varietats invariants(i les altres quantitats relacionades) on la fórmula de Melnikov ja no apareix com a terme dominant.

1.2 Estudis previs del problema.

El primers resultats sobre trencament exponencialment petit de separatrius van consistir en fites superiors de l'angle d'escissió, tant per al cas d'aplicacions com per al de fluxos [Ne84, Fo93, Si94, Fo95, FS96]. El càlcul asimptòtic d'aquest angle es va començar a fer en exemples concrets i un dels models més estudiats va ser el del pèndol pertorbat periòdicament:

$$\ddot{q} = \sin q + \mu\sin(t/\varepsilon), \tag{1.14}$$

per al qual nombrosos treballs han donat resultats quan el paràmetre μ és suficientment petit respecte l'altre paràmetre ε.

Amb $\mu = \delta\varepsilon^p$, on δ és petit, l'estudi de (1.14) es va fer per primera vegada a [HoMSc88] (i després a [Sc89]), obtenint-se que, si $p \geq 8$, el terme de Melnikov preveu correctament la petitesa exponencial de l'escissió i l'angle de transversalitat, tot i que no pot aplicar-se directament. Posteriorment, a [EKS93] es va arribar al mateix resultat però ampliant els casos a $p \geq 3$.

Utilitzant un altre enfoc del problema fonamentalment diferent als anteriors, a [DS92, G93] es va obtenir una expressió asimptòtica per a l'angle. En el cas del segon article, i seguint la idea donada a [GLT91], s'hi dóna el procés a seguir per a la construcció d'una aproximació analítica de les varietats en els complexos, amb la qual podria arribar-se a un resultat vàlid per a $p > 5$. La demostració rigurosa, basada en l'existència d'unes coordenades canòniques adequades, anomenades *Flow-Box*, que expressen les varietats invariants pertorbades d'una forma senzilla, i un teorema d'extensió de les varietats invariants, pot trobar-se a [DS92], on es va provar que l'expressió asimptòtica era vàlida per a $p \geq 0$. Encara ara, la validesa de l'expressió asimptòtica no s'ha pogut establir per a valors inferiors de p. En qualsevol cas, el treball [Fo93] prova que, per al sistema més general $\ddot{q} = f(q) + \varepsilon^p g(t/\varepsilon)$, una fita superior és vàlida permetent valors $p > -2$.

Tots els resultats aportats fins ara usen la complexificació de les varietats invariants com a punt clau per arribar als resultats i, segons diferents aproximacions numèriques al problema com són [Si90] i [BO91], sembla que -1 seria el límit inferior dels valors de p per als quals es confirmaria l'expressió asimptòtica donada per la fórmula de Melnikov per a l'exemple (1.14) amb $\mu = \delta\varepsilon^p$. A [G97] es tracta el cas $p = -2$, on s'hi proposa una fórmula amb el mateix factor exponencial que el terme de Melnikov corresponent, però amb un coeficient diferent, doncs ja no seria el terme dominant.

Així mateix, a [DS96] s'exposa, generalitzant les eines de [DS92], un mètode per confirmar l'expressió exponencialment petita que dóna la funció de Melnikov per a sistemes hamiltonians generals amb un grau i mig de llibertat i una dependència en el temps ràpidament oscil·latòria; s'hi obté una acurada estimació a priori de la mida permesa de la pertorbació. En concret, s'hi estudien sistemes de la forma

$$H(q, p, t/\varepsilon) = H_0(q, p) + \delta\varepsilon^p H_1(q, p, t/\varepsilon)$$

i es prova que la predicció donada per la funció de Melnikov és vàlida si $p \geq l$ on l es defineix com l'ordre de la pertorbació (per a més detalls, vegi's el propi article). Per al cas del sistema (1.14), $l = 0$ i aleshores el resultat dóna la validesa del mètode de Melnikov per a $p \geq 0$, que és el que ja s'havia obtingut a [DS92].

Un altre problema que ha estat estudiat per diversos autors és com el tractat en aquesta memòria:

$$\ddot{q} = \sin q - \mu \sin q \sin(t/\varepsilon), \tag{1.15}$$

on $\mu = \delta\varepsilon^p$. Segons els resultats de [DS96], en aquest cas $l = 2$ i per tant tindríem que el mètode de Melnikov és vàlid per a $p \geq 2$. Per contra, a [T97] s'arriba a una fórmula asimptòtica diferent de la que prediria la fórmula de Poincaré-Melnikov per al cas $p = 0$; el mètode proposat usa una versió contínua del procés de promitjos de [Ne84] aplicat a un pèndol amb un punt de suspensió ràpidament oscil·lant.

El mètode que seguirem nosaltres permetrà demostrar que el terme de Melnikov proporciona correctament el primer ordre de la distància de varietats invariants en el sistema (1.15) per a $\mu = \varepsilon^p$ amb qualsevol $0 < p < 2$, però quan ε és petit i $p = 0$, obtenim una fórmula rigorosa per a la distància que ens indica que el terme dominant ja no és la funció de Melnikov sinó una altra funció de μ analítica i senar. Aquest mètode es basa en el fet que les varietats invariants estable i inestable poden expressar-se com a grafs de funcions que són solucions de l'Equació de Hamilton-Jacobi. Aquest enfocament ja va ser usat a [Sa95, Sa01]; en el primer treball s'estudiava un sistema del mateix tipus que (1.15), però degut a la complexitat de les fórmules se simplificava el terme $\sin(t/\varepsilon)$ deixant-lo a $e^{it/\varepsilon}$, i en el segon treball s'estudiava el Model Generalitzat d'Arnold amb $d + 1 \geq 3$ graus de llibertat i s'obtenien fites superiors de la separació de separatrius.

Per a altres problemes d'escissió de separatrius en dimensió superior, ja sigui per sistemes hamiltonians amb més graus de llibertat o per pertorbacions quasi-periòdiques del pèndol, s'han donat resultats parcials a [Ga94, G95, DGJS97, RW98].

La petitesa exponencial de l'escissió de separatrius es presenta també en difeomorfismes propers a la identitat, en el cas que els valors propis de la part lineal del difeomorfisme en un punt fix hiperbòlic tendeixin a 1. En aquesta línia, l'exemple típic és el de l'anomenada aplicació estàndard: si $T^2 = \mathbb{R}^2/(2\pi Z)^2$, $(X,Y) \in T^2 \mapsto (X_1, Y_1) \in T^2$ en què

$$\begin{cases} X_1 = X + Y_1 \pmod{2\pi} \\ Y_1 = Y + \varepsilon \sin(X) \pmod{2\pi} \end{cases} \tag{1.16}$$

Si $\varepsilon = 0$, la transformació és integrable però no té cap mena de dinàmica, doncs consta de línies paral·leles horitzontals que es transformen en elles mateixes amb un desplaçament fixat. Quan $\varepsilon \neq 0$, a [GLS94] es veu com la transformació té un punt fix el·líptic a $(\pi, 0)$, un d'hiperbòlic a (0,0) i els valors propis de la part lineal en el (0,0) són $\lambda = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}}$. Per obtenir resultats sobre la intersecció de varietats, no es poden usar els mètodes de la teoria pertorbativa, doncs no hi ha una estructura inicial que doni, per pertorbació, l'estructura de les varietats del punt fix.

També podem classificar en aquest grup els difeomorfismes que Hénon va estudiar a [He76]:

$$\begin{aligned} F_{a,b} \quad &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ &(x,y) \mapsto (1 + y - ax^2, bx) \end{aligned} \tag{1.17}$$

El problema de l'escissió de separatrius per a aquest tipus d'aplicacions és significativament més complicat que per a fluxos, perquè tant l'aplicació (1.16) com la (1.17), no poden ser expressades com properes a una aplicació integrable a tot el pla i, per tant, el seu estudi és més delicat, vegi's [L84].

El cas de sistemes hamiltonians amb dos graus de llibertat prop de ressonàncies poden ser estudiats via l'aplicació de Poincaré, amb la qual obtenim famílies d'aplicacions que preserven àrea i que també són properes a la identitat. Per a aquest tipus de famílies d'aplicacions en el pla s'han obtingut fites superiors exponencialment petites de la distància d'escissió, [Ne84, FoSi90, Fo95, G96], mentre que una mesura eficient d'aquesta escissió només s'ha fet en casos concrets d'aplicacions tipus estàndard, [L84, LScT89, GLT91, GLS94, T96]. Tot i que a [GLS94] s'ha donat una fórmula asimptòtica per al cas de l'aplicació estàndard, queda per veure una demostració d'una fórmula asimptòtica general per a l'escissió de separatrius en famílies d'aplicacions properes a la identitat.

Els primers passos en l'aplicació estàndard, per donar una expressió asimptòtica de l'angle entre separatrius són a [L84]:

$$\sin \alpha = \frac{\pi |\theta_1|}{\varepsilon} e^{-\pi^2/\sqrt{\varepsilon}} [1 + O(\varepsilon^{1/16})],$$

en què θ_1 no depèn de ε i va ser calculada numèricament amb posterioritat a [LScT89]. A [G99] pot trobar-se la demostració completa d'aquesta fórmula asimptòtica. Finalment, a [GLS94] es va refinar aquesta fórmula, aconseguint posar una sèrie asimptòtica en potències de ε en lloc del factor $1 + O(\varepsilon^{1/16})$. A [L84] ja es va veure la necessitat de passar al camp complex si es volia tractar amb quantitats exponencialment petites, i d'aquesta idea han sorgit tots els mètodes que han aconseguit anar més lluny. [FoSi90, Fo95] van aplicar aquesta idea a famílies més generals, estudiant les varietats invariants a través de la forma normal de Birkhoff d'un difeomorfisme prop d'un punt hiperbòlic.

Si a l'aplicació estàndard es posa un polinomi o un polinomi trigonomètric en el lloc de $\sin(X)$, també s'han obtingut expressions asimptòtiques de l'escissió de separatrius, [GLT91].

Una altra línia de recerca en aplicacions en el pla que presenten escissió de separatrius és la utilitzada a [GlPB89, DR96, DR97, DR98], i que consisteix a desenvolupar la teoria de Poincaré-Melnikov per a difeomorfismes propers a integrables que tenen un punt fix hiperbòlic, una òrbita homoclínica i on, com en els fluxos, també hi ha un paràmetre regular i un de singular.

Una aplicació al pla s'anomena de *tipus estàndard* si, per a alguna funció g, té la forma $F(x,y) = (y, -x + g(x))$. Quan g és entera, es va veure a [L88] que no té separatrius. Si es relaxa una mica la condició de regularitat de g, [Su89] va donar tres famílies d'aplicacions tipus estàndard integrables. La primera família té un polinomi de grau quatre en x i y com a integral primera, i és fàcil veure que les aplicacions d'aquesta família que tenen una separatriu associada a l'origen, després de diversos canvis de coordenades, poden posar-se de la forma:

$$F_0(x,y) = \left(y, -x + 2y\frac{\mu + \beta y}{1 - 2\beta y + y^2}\right) \qquad -1 < \beta < 1 < \mu. \tag{1.18}$$

Si $\beta = 0$, és l'anomenada aplicació de McMillan [McM71], estudiada a [GlPB89], calculant-ne explícitament la funció de Melnikov per a l'aplicació pertorbada $F_\varepsilon = F_0 + \varepsilon F_1$ sota pertorbacions lineals $F_1(x,y) = (0, ax + by)$. La funció de Melnikov per a aplicacions no és una integral, sinó una suma infinita i (a priori) incalculable analíticament. En general, el càlcul d'aquest tipus de sèries demana passar al camp complex, i en aquest sentit [GlPB89] usa la fórmula de sumació de Poincaré, la teoria dels residus i funcions el·líptiques.

Si les singularitats que apareixen en el procés només són pols, a [DR96] es desenvolupa, per primera vegada, una teoria general per a famílies de difeomorfismes analítics per tal de calcular la funció de Melnikov, transformant-la en una suma finita equivalent, via la teoria dels residus. A més, s'hi presenta un criteri de no-integrabilitat. La condició sobre el tipus permès de singularitats ja apareixia en el cas de fluxos i de moment és difícil obviar-la.

Els exemples tractats a [DR96] són el problema de la "taula de billar convexa" [Bir27] i la família d'aplicacions (1.18) pertorbada: $F_\varepsilon = F_0 + \varepsilon F_1 + O(\varepsilon^2)$ en què F_1 és una polinomi vectorial en x i y. En tots dos casos es comprova que compleixen les condicions dels teoremes que estableixen per tal de calcular explícitament la funció de Melnikov i poder estudiar-ne la no integrabilitat. S'ha resolt doncs el cas regular, ε petit i μ finit, per a la família (1.18).

Tot això s'aplica a [DR98] al cas de l'aplicació de McMillan pertorbada amb una funció entera i en què $\mu = \cosh h$ i $\varepsilon = h^p$ per a $h > 0$ petit i $p \geq 0$. En aquest treball es demostra que, si $p > 6$, la funció de Poincaré-Melnikov també preveu correctament aquest comportament exponencialment petit de l'àrea de les illes entre varietats i se'n dóna una fórmula asimptòtica. Per tant, també queda resolt parcialment el cas singular per a la família (1.18), és a dir, el cas que μ i ε petits provoquen la petitesa exponencial. S'hi segueix la idea de [L84], que ja van desenvolupar [DS92, DS96] per al cas de fluxos propers a integrables. El fet que una aplicació integrable aproximi a tot arreu l'aplicació pertorbada, fa que es puguin traslladar les idees principals de [DS92, DS96] a aplicacions, doncs els sistemes ràpidament forçats que s'hi tractaven tenien un comportament semblant, és a dir, eren propers a integrables. Queda doncs, en aquest cas, veure què passa si $p < 6$, usant per exemple mètodes similars a l'utilitzat en aquesta memòria.

1.3 Matching complex, resumació de Borel i Ressurgència.

Una altra línia de mètodes amb la finalitat de calcular l'escissió de separatrius en el cas exponencialment petit, ve de la mà de tècniques de matching en el pla complex i de la Teoria de la Ressurgència, [L91, KSe91, HM93, Su94, Sa95, BSaSV98]. Aquesta teoria permet, a més, relacionar l'escissió de separatrius amb l'existència de singularitats ramificades al pla complex, que provoquen l'anomenat *fenomen de Stokes*.

La pràctica del matching diu que, per tal de veure propietats *amagades* d'una funció definida per una sèrie asimptòtica, generalment de potències respecte d'un paràmetre ε, s'ha d'anar a zones anomenades *capes límit* on aquestes sèries deixen de ser asimptòtiques. Aquestes capes límit poden trobar-se seguint dos mètodes: el primer és usant informació de la seva localització obtinguda a partir de mètodes heurístics i el segon és buscant les singularitats dels termes de la sèrie.

La situació que normalment es presenta, és voler calcular la diferència entre dues funcions diferents, que són solució de la mateixa equació diferencial i que tenen la mateixa sèrie asimptòtica, anomenada *sèrie outer*, o sigui que la diferencia és més enllà de tot ordre, és a dir, és més petita que ε^n per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$; en realitat, en condicions d'analiticitat, és de la forma $e^{-constant/\varepsilon^k}$ per a alguna $k \in \mathbb{R}^+$ i resulta "invisible" als mètodes clàssics de pertorbació. Generalment, en els problemes d'escissió de separatrius, essent aquestes solucions ben definides i fitades $\forall\, t \in \mathbb{R}$, els termes d'aquesta sèrie no tenen singularitats a $\mathbb{R}$ i, per tant, s'ha d'anar a buscar les capes límit a $\mathbb{C}$. Aquest pas de considerar les variables dins el domini complex permet que aquestes quantitats no detectades als reals resultin visibles i, per tant, calculables.

Un cop localitzada una singularitat dels termes de la sèrie asimptòtica, un canvi de variables adequat ens permetrà estudiar l'equació a prop seu, en l'anomenada *zona inner*. Amb aquest canvi, l'equació inicial té per solució un nou desenvolupament asimptòtic en ε, que no és res més que l'antiga sèrie reordenada. De fet, el primer terme d'aquest nou desenvolupament és la solució d'una equació independent de ε, anomenada *Equació Inner*, i és, en essència, la "suma" dels principals termes divergents del desenvolupament outer.

Per tal d'establir l'aproximació de la diferència de solucions de l'equació inicial a la zona inner, necessitarem utilitzar la informació obtinguda prèviament a la zona outer i això serà possible considerant una zona intermitja (zona de *matching*) que permeti fer aquest transvasament d'informació. La tècnica del matching complex ja va ser emprada a [BSaSV98].

Centrant-nos a la zona inner, ens trobem amb l'existència de dues solucions de l'Equació Inner asimptòtiques a la mateixa sèrie divergent. La diferència d'aquestes dues solucions pot calcular-se amb el mètode de la *resumació de Borel*, que relaciona aquesta diferència amb el coeficient residual de la singularitat més propera a l'eix real de la transformada de Borel de la sèrie divergent. La justificació rigorosa d'aquest fet la donarà la *Teoria de la Ressurgència*.

El càlcul numèric d'aquest coeficient residual pot fer-se usant les tècniques de [LScT89, KSe91, HM93], que el relacionen amb la sèrie divergent outer, o emprant alguna tècnica analítica si l'equació és senzilla, com es va fer a [BSaSV98].

El que es feia a [HM93] era calcular formalment l'escissió de separatrius de l'aplicació estàndard, i a [BSaSV98] es calculava un invariant adiabàtic de l'oscil·lador harmònic que es presentava exponencialment petit. Nosaltres pretenem calcular la diferència entre separatrius del problema (1.1) o equivalenment

$$\ddot{q} = \sin q - \mu \sin q \sin(t/\varepsilon),$$

amb els paràmetres μ i ε independents. Creiem que un estudi més profund de l'Equació Inner associada a aquest sistema, podria relacionar els resultats que hem obtingut amb els donats a [T97].

Per entendre com actua la Teoria de la Ressurgència, iniciada per J. Écalle, en l'estudi d'una equació diferencial, veurem un exemple molt senzill però que il·lustra el que volem exposar: l'Equació d'Euler.

Considerem l'equació diferencial

$$\phi'(x) - \phi(x) = -1/x, \qquad x \in]0, +\infty[\tag{1.19}$$

de la qual en busquem una solució formal a l'infinit del tipus: $\tilde{\phi}(x) = \sum_{n \geq 0} \phi_n \frac{1}{x^{n+1}}$.

Per tal de deteminar els coeficients ϕ_n, substituïm la sèrie a l'equació i obtenim que $\phi_0 = 0$, $\phi_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Per tant, la solució formal de (1.19) la podem expressar com

$$\tilde{\phi}(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}}, \tag{1.20}$$

que és una sèrie divergent $\forall\, x \in \mathbb{R}$ però Gevrey-1, és a dir, que existeixen dues constants positives M i K tals que

$$|\phi_n| \leq M K^n n!.$$

Veurem que, amb l'ajut de la resumació de Borel, aquesta sèrie generarà dues funcions $\phi^{\pi^{\pm}}$ que seran solució de l'Equació (1.19) i seran asimptòtiques Gevrey-1 a la sèrie (1.20), és a dir, que a cada subsector tancat $\bar{S}$ del domini de $\phi^{\pi^{\pm}}$, existeixen dues constants positives M i K tals que $\forall N \geq 1$ i $\forall x \in \bar{S}$ es compleix que

$$|\phi^{\pi^{\pm}}(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \phi_n x^{-n-1}| \leq M K^N N! |x|^{-N-1}.$$

La transformada de Borel (que és la transformada inversa de Laplace) formal és un operador lineal de l'espai de sèries formals $z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$, l'acció del qual sobre una sèrie $\tilde{\phi}(x) = \sum_{n \geq 0} \phi_n x^{-n-1}$ és transformar-la en

$$\tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\phi})(\zeta) = \hat{\phi}(\zeta) = \sum_{n \geq 0} \phi_n \frac{\zeta^n}{n!}, \tag{1.21}$$

per tant, la transformada de la sèrie (1.20) és

$$\tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\phi})(\zeta) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \zeta^n. \tag{1.22}$$

Aquesta sèrie és convergent al disc $D = \{|\zeta| < 1\}$ i defineix una funció $\hat{\phi}(\zeta) = (1+\zeta)^{-1}$, analítica a D, prolongable analíticament en un entorn de $\mathbb{R}^+$ i de creixement menor que l'exponencial a l'infinit. Observem que, com que $\tilde{\mathcal{B}}$ té la propietat $\tilde{\mathcal{B}}(\partial_x\tilde{\phi}) = -\zeta\tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\phi})$, obtindríem igualment la funció $\hat{\phi}(\zeta)$ com a solució de la transformada de l'Equació (1.19):

$$-\zeta\hat{\phi}(\zeta) - \hat{\phi}(\zeta) = -1.$$

Podem doncs calcular la seva transformada de Laplace en la direcció $\mathbb{R}^+$:

$$\phi^0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\zeta}\hat{\phi}(\zeta)\, d\zeta,$$

que és una funció analítica a tot el seu domini de definició, $\Re e(x) > 0$, i s'anomena *resumada de Borel* de $\tilde{\phi}$ en la direcció $\mathbb{R}^+$. Pot comprovar-se, derivant sota el signe integral, que aquesta funció és la solució de l'edo (1.19) que s'anul·la a l'infinit i que és asimptòtica Gevrey-1 a la sèrie formal $\tilde{\phi}$ al semiplà $\Re e(x) > 0$,

La funció ϕ^0 està definida a priori al semiplà $\Re e(x) > 0$, però podem prolongar-la analíticament a altres zones de $\mathbb{C}$ simplement deformant el camí d'integració dins del domini d'analiticitat de $\hat{\phi}$, que és $S = \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$. Triem doncs una direcció d_θ de S i definim la transformada de Laplace de $\hat{\phi}$ en la direcció d_θ:

$$\phi^\theta(x) = \mathcal{L}^\theta\hat{\phi}(x) = \int_0^{\infty(\theta)} e^{-x\zeta}\hat{\phi}(\zeta)\, d\zeta = \int_0^{\infty(\theta)} e^{-x\zeta}\frac{1}{1+\zeta}\, d\zeta$$

al semiplà bisecat per la direcció conjugada $P_\theta = \{x \mid \Re e(x\cdot\zeta) > 0 \quad \forall\zeta \in d_\theta\} = \{x \mid -\theta - \frac{\pi}{2} < \arg(x) < -\theta + \frac{\pi}{2}\}$ que veiem a la Figura 1.6. El procés de com s'ha passat de $\tilde{\phi}$ a ϕ^θ queda reflectit en l'esquema de la Figura 1.7.

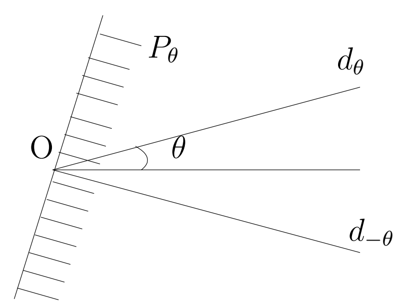


Figura 1.6: Domini de definició de ϕ^θ.

Movent d_θ des de $\mathbb{R}^+$ fins a $\mathbb{R}^-$(sense arribar-hi, perquè $\hat{\phi}$ hi té una singularitat) en el sentit positiu, pel teorema de Cauchy obtindrem que les funcions ϕ^θ i ϕ^0 coincideixen a $P_\theta \cap P_0$, per tant, ϕ^θ és una continuació analítica de ϕ^0. Quan arribem a $\mathbb{R}^-$ per dalt, la integral la farem sobre el camí d_{π^-} definit com el de la Figura 1.8.

Així doncs, tenim la funció ϕ^0 prolongada analíticament per a $x \in \mathbb{C} - i\mathbb{R}^+$: al semiplà $\Re e(x) > 0$ ve donada per

$$\phi^0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\zeta}\hat{\phi}(\zeta)\, d\xi$$

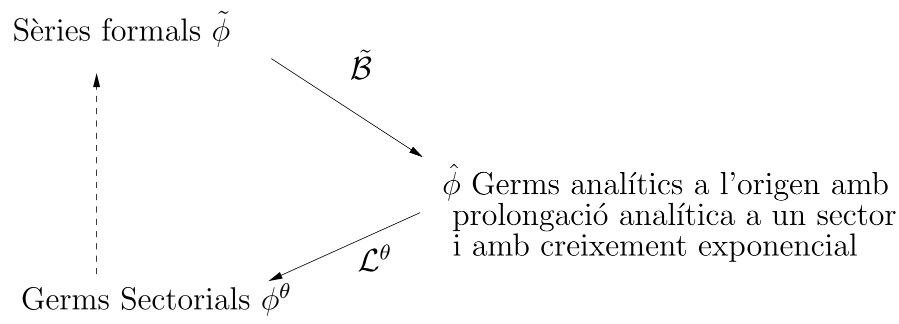


Figura 1.7: Esquema del pas del model multiplicatiu al convolutiu i al sectorial.

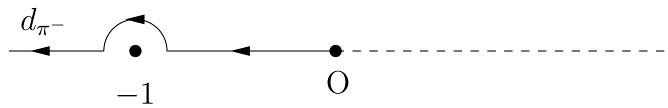


Figura 1.8: Camí d_{π^-}.

i al semiplà $\Re e(x) < 0$ ve donada per

$$\phi^{\pi^-}(x) = \int_{d_{\pi^-}} e^{-x\zeta}\hat{\phi}(\zeta)\, d\zeta.$$

Si variem ara d_θ des de $\mathbb{R}^+$ fins a $\mathbb{R}^-$ en el sentit negatiu, amb una construcció anàloga, obtenim una prolongació analítica per a $x \in \mathbb{C} - i\mathbb{R}^-$: al semiplà $\Re e(x) > 0$ ve donada per

$$\phi^0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\zeta}\hat{\phi}(\zeta)\, d\zeta$$

i al semiplà $\Re e(x) < 0$ ve donada per

$$\phi^{\pi^+}(x) = \int_{d_{\pi^+}} e^{-x\zeta}\hat{\phi}(\zeta)\, d\zeta$$

on d_{π^+} és el camí simètric de d_{π^-}.

Tenim doncs dues prolongacions, que coincideixen en un sector d'amplada estrictament menor que π on són asimptòtiques Gevrey-1 a la mateixa sèrie. En aquesta situació, un resultat clàssic, que pot trobar-se per exemple a [B94], assegura que la seva diferència no ha de ser necessàriament zero, però ha de ser exponencialment petita. El Teorema del Residu ens en dóna la resposta exacta: sigui γ el camí indicat a la Figura 1.9,

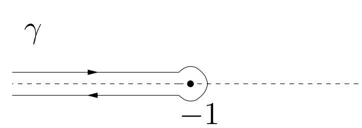


Figura 1.9: Camí d'integració γ.

aleshores

$$\phi^{\pi^+}(x) - \phi^{\pi^-}(x) = \int_\gamma e^{-x\zeta}\hat{\phi}(\zeta)\, d\zeta = -2\pi i \mathrm{Res}\left(e^{-x\zeta}\hat{\phi}(\zeta); -1\right) = -2\pi i e^x,$$

valor que és exponencialment petit al semiplà $\Re e(x) < 0$.

El fet que $\phi^{\pi^+}(x) \neq \phi^{\pi^-}(x)$ és un exemple del fenomen de Stokes. Aquesta ambigüitat està lligada a la presència al pla complex de singularitats de la transformada de Borel, $\hat{\phi}(\zeta)$. En aquest cas tan senzill en el qual es té $\hat{\phi}$ de manera explícita i amb una única singularitat, no ha estat difícil arribar al resultat final, però en general no serà així. Per als casos de les anomenades *funcions ressorgents simplement ramificades*, en les quals la seva transformada de Borel té les singularitats isolades a la superfície de Riemann del logaritme i aquestes singularitats només són polars simples o logarítmiques, Jean Écalle va proposar fer l'anàlisi final del fenomen de Stokes mitjançant un càlcul diferencial (*el càlcul diferencial estranger*) dins l'àlgebra formada per aquestes funcions.

Situant-nos en el nostre problema inner, les dues funcions buscades (corresponents a les varietats estable i inestable) verificaran la mateixa equació en derivades parcials i seran asimptòtiques a una mateixa sèrie $\tilde{\phi}$ divergent, però Gevrey-1 i que demostrarem que és una funció ressorgent simple. Tal i com hem fet en l'Equació d'Euler, trobarem aquestes dues funcions com a resultat de fer la transformada de Laplace de $\hat{\phi}$ en dues direccions diferenciades de manera que entre ambdues hi ha totes les singularitats de $\hat{\phi}$. La diferència entre dues d'aquestes solucions ja sabem que serà exponencialment petita i caldrà calcular-ne les constants involucrades.

Val a dir que, en el cas estudiat en aquest treball, les dues solucions buscades són funcions de dues variables (z, τ) però periòdiques en τ, per tant, la variable "ressorgent" serà z; així doncs, tindrem una única sèrie de potències en z asimptòtica a ambdues funcions a l'estil de la (1.20), però ara amb coeficients periòdics en τ.

La naturalesa de l'Equació Inner que apareixia a [BSaSV98] permetia calcular el coeficient del terme exponencialment petit exactament, perquè l'equació tractada era de Ricatti i es podia transformar en una lineal de segon ordre la transformada de la Borel de la qual es podia resoldre explícitament. Això no succeeix en la majoria de situacions (veure per exemple [HM93]) i no es poden obtenir resultats quantitatius de forma analítica, perquè la solució de l'Equació Inner no es coneix exactament. En aquestes situacions pot seguir-se l'estratègia de [HM93], que consisteix a usar la informació de la part dominant de l'equació per extreure conclusions de l'equació global.

Un primer pas és establir la relació entre els coeficients de les solucions formals de les dues equacions (la total i la lineal). Aquesta relació és essencial per conèixer el comportament de la transformada de Borel de la sèrie i transmetre'l a la seva resumada de Borel, que és en definitiva la funció que es busca. Siguin

$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!}\,\zeta^n$ la transformada de Borel de la solució formal de l'Equació Inner,

$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!}\,\zeta^n$ la transformada de Borel de la solució formal de la seva part dominant

i $\hat{\phi}, \hat{\phi}_d$ les respectives prolongacions analítiques. Com que es coneix exactament $\hat{\phi}_d$ en tot el pla complex, si es demostra que per a una certa K el terme $\hat{\phi} - K\hat{\phi}_d$ només contribueix a la resumada ϕ^θ en termes d'ordre més alt, s'està en condicions de conèixer, en primer ordre, el coeficient del terme exponencialment petit. La contribució de $\hat{\phi} - K\hat{\phi}_d$ a ϕ^θ s'estudia usant la Teoria de la Ressurgència per localitzar les seves singularitats, el seu tipus i com afecten a ϕ^θ. En concret, a [HM93] el procés seguit és el següent. Es demostra que el comportament

asimptòtic de b_n és
$$b_n \sim B\frac{(2n+1)!}{(4\pi^2)^n}(-1)^n,$$
en què B és una constant; aquest creixement ràpid dels coeficients els convenç (s'hauria de justificar rigurosament usant la Teoria de la Ressurgència) que la contribució dels termes no lineals a a_n és negligible quan n creix. Per tant, les a_n tenen el mateix tipus de creixement que les b_n excepte que la constant B queda canviada lleugerament per les primeres iteracions:
$$a_n \sim k_n b_n \text{ en què } k_n = K + d_n \text{ i } \lim_{n\to+\infty} d_n = 0.$$
Així, resultaria que $\phi^\theta \sim K\phi_d^\theta$, és a dir, que el primer pol de la solució total seria el de la solució dominant i contribuiria al resultat de la diferència tot i que el residu quedaria multiplicat per K. Val a dir que el comportament aproximat dels coeficients d'una sèrie no garanteix en general el coneixement de la seva prolongació analítica fora del disc de convergència. Malgrat això, en aquests casos, la Teoria de la Ressurgència, que usa fortament que les sèries corresponen a solucions d'equacions, justifica aquests resultats.

Així doncs, estudiant l'Equació Inner amb la Teoria de la Ressurgència, es pot arribar a calcular el coeficient del terme exponencialment petit dominant. Per a una lectura més detallada d'aquesta teoria pot veure's [Eca81, CNP93b, StSh96].

Un altre treball on s'han seguit aquestes tècniques és [L91], on es demostra que les transformades de Laplace d'una mateixa funció però sobre camins diferents, són les varietats estable i inestable de l'aplicació estàndard. Com a resultat, la distància entre separatrius pot ser avaluada per una funció exponencialment decreixent. Aquesta mateixa idea s'utilitza a [Ch98] per calcular l'escissió de l'aplicació d'Hénon expressada en la forma $HM(X,Y) = (X+Y+\varepsilon X(1-X), Y+\varepsilon X(1-X))$, i més recentment, una justificació de la Teoria de la Ressurgència emprada es dóna a [GSa01].

L'únic treball en què s'ha calculat l'escissió de separatrius basant-se només en la Teoria de la Ressurgència ha estat [Sa95], que estudia aquest fenomen en l'equació del pèndol amb pertorbació simplificada:
$$\ddot{q} = \sin q - \mu \sin q\, e^{it/\varepsilon}.$$
En aquest article es recupera la idea de Poincaré [Po93] de determinar les separatrius a partir de dues solucions particulars $\mathsf{T}^\pm(q,t;\mu,\varepsilon)$ de l'Equació de Hamilton-Jacobi, obtingudes com a desenvolupaments en potències del paràmetre regular μ. Aquestes solucions permeten expressar les varietats invariants com a grafs de les seves derivades parcials en q:
$$\mathcal{W}^\pm : p = \partial_q \mathsf{T}^\pm(q,t;\mu,\varepsilon),$$
per tant, la diferència de les derivades parcials d'aquestes dues solucions dóna la distància d'escissió buscada. L'autor de [Sa95] utilitza l'anomenada *Ressurgència paramètrica*, que consisteix a usar el paràmetre singular ε com a variable en les transformades de Laplace per tal de detectar el fenomen exponencialment petit en ε. Usant la idea de Poincaré, estudiant completament les dues solucions i interpretant la divergència de les sèries en ε amb la Teoria de la Ressurgència paramètrica, retroba el resultat de [HoMSc88, G93, DS92] que fa referència a que la funció de Melnikov preveu correctament l'escissió de separatrius. Un resultat important al qual arriba amb aquest mètode, és que el paràmetre μ del seu problema pot ser escollit de l'ordre de ε^{-1}, és a dir, no té perquè ser petit. Recordem que la pertorbació en el seu estudi és un cas simplificat del (1.1).

Nosaltres seguirem la idea de [Sa95] d'expressar les varietats invariants a partir de les solucions de l'Equació de Hamilton-Jacobi que s'anul·len a l'infinit, però expressarem aquestes solucions en sèrie de potències del paràmetre singular ε i usarem la Ressurgència Equacional per a l'estudi de l'Equació Inner. Unes primeres versions dels resultats poden trobar-se a [OS99] i [OSaS01].

1.4 L'Equació de Hamilton-Jacobi i el trencament de separatrius.

Amb l'objectiu de posar en evidència el paper del paràmetre ε, apliquem el canvi $\tau = t/\varepsilon$ al sistema (1.1), passant a tenir

$$\begin{cases} q' = \varepsilon p \\ p' = \varepsilon \sin q(1 - \mu \sin \tau), \end{cases} \tag{1.23}$$

on $'$ vol dir la derivada respecte el nou temps. El Hamiltonià (1.2) passa a ser:

$$\varepsilon H_{\mu,\varepsilon}(q,p,\tau) = \varepsilon \frac{p^2}{2} + \varepsilon(-1 + \cos q) + \mu\varepsilon(1 - \cos q)\sin \tau. \tag{1.24}$$

Dels dos paràmetres ε i μ, el primer s'anomena singular perquè, si bé el sistema (1.1) es podia considerar pertorbació respecte μ d'un integrable que n'aproximava la dinàmica, el sistema (1.23) no és pertorbació d'un que tingui una dinàmica propera al nostre per a valors petits de ε sinó que és degenerat quan $\varepsilon = 0$.

Recordem que les varietats invariants estable i inestable $\mathcal{W}^\pm$ de l'òrbita periòdica hiperbòlica $\mathcal{T} = (0,0) \times \mathbb{R}/(2\pi\varepsilon\mathbb{Z})$ estan formades per solucions del sistema que tendeixen a $\mathcal{T}$ quan el temps tendeix a $+\infty$ o $-\infty$ respectivament. Si $\mu = 0$, la separatriu (1.5) podem expressar-la com el graf de la diferencial de la funció

$$\mathsf{T}_0(q) = 4(1 - \cos(q/2)).$$

Poincaré va establir a [Po93] que les varietats invariants es conserven sota pertorbacions petites, mantenint-se prop de la separatriu, si estem prou a prop de l'origen. El flux del sistema preserva la 2-forma simplèctica $\mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p$, la qual s'anul·la sobre $\mathcal{T}$, per tant, també s'anul·la sobre $\mathcal{W}^\pm$, que són varietats bidimensionals, és a dir, que $\mathcal{W}^\pm$ són varietats Lagrangianes (veure [LoMSa03] per a més detalls). Tot això permet assegurar que aquestes varietats poden escriure's com el graf de les diferencials d'unes certes funcions:

$$p = \partial_q \mathsf{T}^\pm(q,\tau;\mu,\varepsilon), \tag{1.25}$$

on $\mathsf{T}^\pm$ són les solucions en certs dominis de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ de l'Equació de Hamilton-Jacobi:

$$\partial_\tau \mathsf{T} + \varepsilon H_{\mu,\varepsilon}(q, \partial_q \mathsf{T}, \tau) = 0 \tag{1.26}$$

que, segons es pot veure a la Figura 1.3, verifiquen la condició asimptòtica

$$\lim_{q \to 0} \partial_q \mathsf{T}^-(q,\tau;\mu,\varepsilon) = 0, \quad \lim_{q \to 2\pi} \partial_q \mathsf{T}^+(q,\tau;\mu,\varepsilon) = 0. \tag{1.27}$$

Pel fet que, tant l'equació com les condicions, només involucren $\mathsf{T}^{\pm}$ a través de les seves derivades, les solucions estan determinades excepte constants additives dependents de (μ, ε), que podem prendre el conveni de considerar-les nul·les sense cap problema doncs, segons (1.25), qui realment determinen les varietats invariants són $\partial_q \mathsf{T}^{\pm}$ i no pas $\mathsf{T}^{\pm}$. La unicitat de solució en aquestes condicions és conseqüència immediata de la unicitat de les varietats invariants, en cas contrari, obtindríem les varietats invariants estable i inestable com a grafs de dues funcions diferents, fet totalment absurd.

Per tot això, l'estudi del possible trencament de separatrius es deriva en l'estudi de la diferència entre dues solucions particulars de l'Equació en derivades parcials (1.26).

El fet que $H_{\mu,\varepsilon}(q, p, \tau) = H_{\mu,\varepsilon}(q, -p, \pi - \tau)$ ens dóna la simetria del problema respecte $p = 0$ i ens permet centrar-nos només en, per exemple, $p > 0$. Per altra banda, observem que $H_{\mu,\varepsilon}(q, p, \tau) = H_{\mu,\varepsilon}(2\pi - q, p, \pi - \tau)$, la qual cosa comporta que, si $\mathsf{T}^{-}(q, \tau; \mu, \varepsilon)$ és solució de (1.26) amb la primera condició de (1.27), aleshores la funció $\mathsf{T}^{+}(q, \tau; \mu, \varepsilon) = -\mathsf{T}^{-}(2\pi - q, \pi - \tau; \mu, \varepsilon)$ en sigui també solució però amb la segona condició de (1.27).

Teorema 1.1. *Sigui $\mu_0 > 0$ i $0 < Q_0 < \pi$ fixats. Aleshores existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \mu \leq \mu_0$ i $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, existeix una única solució T^{-} de (1.26) a $(0, \pi + Q_0) \times \mathbb{R}$ que satisfà la primera condició de (1.27) $\big($respectivament T^{+} a $(\pi - Q_0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ per a la segona condició de (1.27)$\big)$.*

Demostració. Es farà el canvi

$$q(u) = 4 \arctan e^{u} \quad \Leftrightarrow \quad u(q) = \ln\big(\tan(q/4)\big) \tag{1.28}$$

per passar de les funcions $\mathsf{T}^{\pm}(q, \tau; \mu, \varepsilon)$ a les $T^{\pm}(u, \tau; \mu, \varepsilon) = \mathsf{T}^{\pm}(q(u), \tau; \mu, \varepsilon)$, amb la qual cosa, qualsevol $0 < Q_0 < \pi$ fixarà una $u_0 > 0$ tal que

$$q \in (0, \pi + Q_0) \quad \Leftrightarrow \quad u \in (-\infty, u_0).$$

Com que només volem resultats a $\mathbb{R}$, en tenim prou amb la informació del Corol·lari 2.2, que estableix resultats per a $T^{\pm}$ i ens dóna directament la tesi de l'enunciat. ∎

Volem donar ara una expressió asimptòtica per a

$$\Delta\mathsf{T}(q, \tau; \mu, \varepsilon) := \mathsf{T}^{+}(q, \tau; \mu, \varepsilon) - \mathsf{T}^{-}(q, \tau; \mu, \varepsilon),$$

on intervindrà la funció:

$$F_0(q, \tau; \mu, \varepsilon) := \varepsilon^{-1} f_0^{[i]}(\mu) e^{-\varepsilon^{-1}\pi/2} 2i \sin\big(\tau - \varepsilon^{-1} \ln(\tan(q/4))\big), \tag{1.29}$$

essent $f_0^{[i]}(\mu) = -2\pi i \mu + O(\mu^3)$ analítica, factor del qual en parlarem més endavant, però que ja avancem serà el resultat de l'aplicació de la Teoria de la Ressurgència a l'Equació Inner del nostre problema.

Teorema 1.2. *Sigui $\mu_0 > 0$ i $0 < Q_0 < \pi$ fixats. Aleshores existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \mu \leq \mu_0$, $0 < \tilde{c} < 1$ i $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, existeix una constant $C_0 > 0$ tal que $\forall (q,\tau) \in (\pi - Q_0, \pi + Q_0) \times \mathbb{R}$,*

$$|\Delta \mathsf{T}(q,\tau;\mu,\varepsilon) - B(\mu,\varepsilon) - F_0(q,\tau;\mu,\varepsilon)| \leq C_0 \varepsilon^{-1} \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}},$$

$$|\partial_q \Delta \mathsf{T}(q,\tau;\mu,\varepsilon) - \partial_q F_0(q,\tau;\mu,\varepsilon)| \leq \frac{C_0}{2\sin(q/2)} \varepsilon^{-2} \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}},$$

$$\left|\partial_q^2 \Delta \mathsf{T}(q,\tau;\mu,\varepsilon) - \partial_q^2 F_0(q,\tau;\mu,\varepsilon)\right| \leq \frac{C_0}{2\sin^2(q/2)} \varepsilon^{-3} \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}},$$

on $B(\mu,\varepsilon) = O(\mu\varepsilon^2)$ analítica.

Demostració. Per simplificar, no posarem la dependència en els paràmetres μ, ε de les funcions. Observem primer que, si

$$F(u,\tau) := \varepsilon^{-1} f_0^{[i]}(\mu) e^{-\varepsilon^{-1}\pi/2} 2i \sin(\tau - \varepsilon^{-1} u)$$

el canvi (1.28) dóna l'equivalència:

$$F_0(q,\tau) = F(u(q),\tau);$$

a més, pel canvi indicat, qualsevol $\tilde{u}_2 > 0$ es correspon amb una constant $\pi + Q_0 \in (\pi, 2\pi)$ i $-\tilde{u}_2$ amb $\pi - Q_0 \in (0,\pi)$.

Recordant que $\mathsf{T}(q,\tau) = T(u(q),\tau)$, les tres desigualtats de l'enunciat es demostren a partir del Teorema 6.4. Sigui $B(\mu,\varepsilon)$ el terme donat per aquest Teorema, aleshores

$$\begin{aligned} |\Delta \mathsf{T}(q,\tau) - B(\mu,\varepsilon) - F_0(q,\tau)| =& |\Delta T(u(q),\tau) - B(\mu,\varepsilon) - F(u(q),\tau)| \leq \\ & \leq C_0 \varepsilon^{-1} \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Per a $\partial_q \Delta \mathsf{T}(q,\tau)$, necessitem usar l'expressió u' de (1.36):

$$\begin{aligned} |\partial_q \Delta \mathsf{T}(q,\tau) - \partial_q F_0(q,\tau)| =& |u'(q)| \cdot |\partial_u \Delta T(u(q),\tau) - \partial_u F(u(q),\tau)| \leq \\ \leq & \frac{1}{2\sin(q/2)} C_0 \varepsilon^{-2} \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \end{aligned}$$

i, finalment, recordant l'expressió de u'' també de (1.36),

$$\begin{aligned} |\partial_q^2 \Delta \mathsf{T}(q,\tau) - \partial_q^2 F_0(q,\tau)| =& |u''(q)| \cdot |\partial_u \Delta T(u(q),\tau) - \partial_u F(u(q),\tau)| + \\ & + |(u'(q))^2| \cdot |\partial_u^2 \Delta T(u(q),\tau) - \partial_u^2 F(u(q),\tau)| \leq \\ \leq & \frac{|\cos(q/2)|}{4\sin^2(q/2)} C_0 \varepsilon^{-2} \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} + \\ & + \frac{1}{4\sin^2(q/2)} C_0 \varepsilon^{-3} \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \ln^{-1}(1/\varepsilon) \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Considerant ara que

$$|\cos(q/2)|\varepsilon + 1 \leq 2,$$

obtindríem el resultat per a $\partial_q^2 \Delta \mathsf{T}(q,\tau)$:

$$|\partial_q^2 \Delta \mathsf{T}(q,\tau) - \partial_q^2 F_0(q,\tau)| \leq \frac{1}{2\sin^2(q/2)} C_0 \varepsilon^{-3} \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}. \qquad \blacksquare$$

Finalment el resultat del trencament de separatrius al qual arribem queda recollit en el següent corol·lari, on qualsevol de les tres magnituds (àrea, distància o angle) que ens mesuren el trencament de separatrius, es relacionarà amb $\Delta \mathsf{T}$ o amb una de les seves derivades.

Corol·lari 1.3. *Fixat $\mu_0 > 0$, existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \mu \leq \mu_0$, $0 < \tilde{c} < 1$ i $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, es verifiquen les següents fórmules asimptòtiques:*

$$\begin{aligned} A =& \varepsilon^{-1} \left(4|f_0^{[i]}(\mu)| + O\left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}, \\ d =& \varepsilon^{-2} \left(|f_0^{[i]}(\mu)| + O\left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}, \\ \sin\alpha =& \varepsilon^{-3} \left(\frac{1}{2} |f_0^{[i]}(\mu)| + O\left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}, \end{aligned} \tag{1.30}$$

essent $f_0^{[i]}(\mu) = -2\pi i \mu + O(\mu^3)$ analítica.

Demostració. El fet que les varietats invariants vinguin donades de manera tan senzilla per (1.25), fa que la distància (1.7) mesurada al pla $\Sigma^{t_0} \cap \{q = \pi\}$ sigui simplement:

$$d(t_0) = \left| \partial_q \mathsf{T}^+(\pi, t_0/\varepsilon) - \partial_q \mathsf{T}^-(\pi, t_0/\varepsilon) \right|, \tag{1.31}$$

la qual cosa, ens permet arribar a l'expressió enunciada, doncs de la definició de $F_0(q,\tau;\mu,\varepsilon)$ donada a (1.29):

$$\partial_q F_0(q, t_0/\varepsilon) = -\varepsilon^{-2} \frac{1}{\sin(q/2)} i f_0^{[i]}(\mu) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \cos\left(\varepsilon^{-1} \left(t_0 - \ln(\tan(q/4)) \right) \right), \tag{1.32}$$

per tant,

$$\partial_q F_0(\pi, t_0/\varepsilon) = -i f_0^{[i]}(\mu) \varepsilon^{-2} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \cos(t_0/\varepsilon)$$

i usant el resultat del Teorema 1.2 per a $\partial_q \Delta \mathsf{T}$:

$$d = \max_{t_0} d(t_0) = \varepsilon^{-2} \left(|f_0^{[i]}(\mu)| + O\left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}.$$

Pel que fa a l'àrea que Melnikov donava amb la fórmula (1.12), també ara tindrà una expressió senzilla relacionada amb les funcions $\mathsf{T}^{\pm}$. A partir de (1.25) podem considerar les parametritzacions $\gamma_{\pm}(q) = \left(q, \partial_q \mathsf{T}^{\pm}(q, t_0/\varepsilon)\right)$ d'aquestes corbes, aleshores,

$$A = \left| \int_{q_0}^{q_1} \partial_q \mathsf{T}^+(q, t_0/\varepsilon) - \partial_q \mathsf{T}^-(q, t_0/\varepsilon)\, dq \right| = \left| \mathsf{T}^+(q, t_0/\varepsilon) - \mathsf{T}^-(q, t_0/\varepsilon) \Big|_{q_0}^{q_1} \right| \tag{1.33}$$

on q_0 i q_1 són dos punts consecutius on les corbes $\gamma_{\pm}$ es tallen a Σ^{t_0}. I pel Teorema 1.2,

$$A = \left| F_0(q_1, t_0/\varepsilon) - F_0(q_0, t_0/\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{-1} \left[\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right] e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \right) \right|.$$

Ara bé, també pel Teorema 1.2, el punts q_0 i q_1 són solucions de:

$$\partial_q \Delta \mathsf{T}(q, t_0/\varepsilon) = \partial_q F_0(q, t_0/\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{-2}\left[\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right] e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}\right) = 0$$

però segons l'expressió (1.32), aquests q_0 i q_1 fan que, amb un error exponencialment petit,

$$F_0(q_1, t_0/\varepsilon) - F_0(q_0, t_0/\varepsilon) = f_0^{[i]}(\mu) 4i\varepsilon^{-1} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}},$$

doncs l'única dependència de F_0 respecte q és a través de $\sin\left(\varepsilon^{-1}\left(t_0 - \ln(\tan(q/4))\right)\right)$.

Així doncs, la fórmula de l'àrea queda com:

$$A = \varepsilon^{-1}\left(4|f_0^{[i]}(\mu)| + O\left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}.$$

Finalment, partint de les mateixes parametritzacions però usant el temps sobre l'òrbita homoclínica no pertorbada (1.6) com a paràmetre, és a dir, el canvi (1.28), podem donar altres parametritzacions de les varietats invariants de manera que, quan el paràmetre sigui 0, aquestes passin per $q = \pi$:

$$\gamma_\pm(u) = \big(q_0(u), \partial_q \mathsf{T}^\pm(q_0(u), t_0/\varepsilon)\big). \tag{1.34}$$

Prenem ara $t_0 = t_0^*$ com el valor segons el qual $\partial_q \mathsf{T}^\pm(\pi, t_0^*/\varepsilon) = \partial_q \mathsf{T}^\pm(\pi, t_0^*/\varepsilon)$, és a dir, quan es produeix una intersecció de les corbes $\mathcal{W}^+ \cap \Sigma^{t_0^*}$ i $\mathcal{W}^- \cap \Sigma^{t_0^*}$ per a $q = \pi$. Aleshores, l'angle entre aquestes corbes és:

$$\sin\alpha = \frac{\left|\gamma'_-(0) \wedge \gamma'_+(0)\right|}{\|\gamma'_-(0)\| \cdot \|\gamma'_+(0)\|} = \frac{\left|\partial_q^2 \mathsf{T}^+(\pi, t_0^*/\varepsilon) - \partial_q^2 \mathsf{T}^-(\pi, t_0^*/\varepsilon)\right|}{\sqrt{1 + \left(\partial_q^2 \mathsf{T}^-(\pi, t_0^*/\varepsilon)\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\partial_q^2 \mathsf{T}^+(\pi, t_0^*/\varepsilon)\right)^2}}. \tag{1.35}$$

El primer que podem veure és que $\partial_q^2 \mathsf{T}^\pm(\pi, t_0^*/\varepsilon) = O(\mu\varepsilon)$. Efectivament, el canvi $u(q) = \ln\big(\tan(q/4)\big)$ tal que $u(\pi) = 0$, té derivades:

$$u'(q) = \frac{1}{2\sin(q/2)}, \quad u''(q) = -\frac{\cos(q/2)}{4\sin^2(q/2)}, \tag{1.36}$$

aleshores $u'(\pi) = 1/2$ i $u''(\pi) = 0$. Per tant, com que $\mathsf{T}(q, \tau) = T(u(q), \tau)$,

$$\partial_q^2 \mathsf{T}^\pm(\pi, \tau) = u''(\pi)\partial_u T(u(\pi), \tau) + \big(u'(\pi)\big)^2 \partial_q^2 T^\pm(u(\pi), \tau) = \frac{1}{4}\,\partial_q^2 T^\pm(u(\pi), \tau)$$

i tornant a usar el Corol·lari 2.2, obtenim:

$$|\partial_q^2 \mathsf{T}^\pm(q, \tau)| \le \frac{1}{4}\left(b_0\,\mu\varepsilon^2 e^{\mp 2\,\Re e\, u(q)} + |T_0''(u(q))| + \varepsilon|\partial_u^2 T_1(u(q), \tau)|\right),$$

on

$$T_0''(0) = -8\frac{\sinh 0}{\cosh^3 0} = 0, \qquad \partial_u^2 T_1(0, \tau) = -4\mu\left(\frac{1}{\cosh^2 0} - \frac{3\sinh^2 0}{\cosh^4 0}\right)\cos\tau = -4\mu\cos\tau.$$

Per arribar al resultat que preteníem:

$$|\partial_q^2 \mathsf{T}^\pm(\pi, \tau)| \le \frac{1}{4}\,b_0\,\mu\varepsilon^2 + \mu\varepsilon.$$

Tornant a (1.35), segons el Teorema 1.2,

$$\partial_q^2 \Delta \mathsf{T}(\pi, t_0^*/\varepsilon) = \partial_q^2 F_0(\pi, t_0^*/\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{-3}\left[\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right]e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}\right) \tag{1.37}$$

i de (1.32), sabem que

$$\begin{aligned}\partial_q^2 F_0(q,\tau) =& \varepsilon^{-2}\frac{\cos(q/2)}{4\sin^2(q/2)}\,2if_0^{[i]}(\mu)e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}\cos\left(\tau - \varepsilon^{-1}\ln(\tan(\pi/4))\right) - \\ & - \varepsilon^{-3}\frac{1}{4\sin^2(q/2)}\;2if_0^{[i]}(\mu)e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}\sin\left(\tau - \varepsilon^{-1}\ln(\tan(\pi/4))\right),\end{aligned}$$

per tant,

$$\partial_q^2 F_0(\pi, t_0^*/\varepsilon) = -\frac{1}{2}\;if_0^{[i]}(\mu)\varepsilon^{-3}e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}\sin(t_0^*/\varepsilon). \tag{1.38}$$

Però, si el valor t_0^* és tal que

$$\begin{aligned}\partial_q \Delta \mathsf{T}(\pi, t_0^*/\varepsilon) =& \partial_q F_0(\pi, t_0^*/\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{-2}\left[\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right]e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}\right) = \\ =& -if_0^{[i]}(\mu)\cos\left(t_0^*/\varepsilon\right)\varepsilon^{-2}e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} + O\left(\varepsilon^{-2}\left[\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right]e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}\right) = 0,\end{aligned}$$

llavors hom pot veure de (1.37) i de (1.38) que:

$$\partial_q^2 \Delta \mathsf{T}(\pi, t_0^*/\varepsilon) = \varepsilon^{-3}\left(-\frac{1}{2}\;if_0^{[i]}(\mu) + O\left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right)\right)e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}},$$

per tant, arribem al resultat de l'enunciat pel que fa a $\sin\alpha$ que quedava per demostrar. ■

Observació 1.4. *Els resultats d'aquest Corol·lari són òptims per a μ gran. Si posem $\mu = \varepsilon^p$ amb $0 < p < 2$, veiem que les Fórmules (1.30) validen el terme dominant proposat pel mètode de Melnikov a les Fórmules (1.13). En els altres casos, la funció $f_0^{[i]}(\mu)$ analítica és la que marca els resultats.*

1.5 Mesura del trencament de separatrius.

En aquesta secció detallarem el procés que hem seguit amb l'objectiu de mesurar el trencament de separatrius que acabem d'explicar. En aquests casos de pertorbacions singulars, les varietats invariants estable i inestable tenen diferents aproximacions segons considerem diferents regions del pla complex.

1.5.1 La sèrie outer.

En el cas $\mu = 0$, la solució de l'Equació (1.26):

$$\partial_\tau \mathsf{T}_0 + \varepsilon\frac{1}{2}\left(\partial_q \mathsf{T}_0\right)^2 + \varepsilon(-1+\cos q) = 0$$

ens ha de donar les separatrius (1.5) del pèndol no pertorbat. El sistema no pertorbat és autònom, per tant, sabem que T_0 no dependrà de τ i aleshores només ens cal resoldre

$$(\partial_q \mathsf{T}_0)^2 = 2(1 - \cos q).$$

La funció T_0 serà

$$\mathsf{T}_0(q) = \pm 4\cos(q/2) + K,$$

que també podem considerar-la a $(0, 4\pi)$ o a $(-2\pi, 2\pi)$ per diferenciar la varietat estable de la inestable. Per mesurar el trencament de separatrius només ens cal tenir en compte les varietats a $p > 0$, i prenent $K = 4$ per motius que veurem més endavant, resulta

$$\mathsf{T}_0(q) = 4(1 - \cos(q/2)). \tag{1.39}$$

Si $\mu \neq 0$, intentem buscar les funcions $\mathsf{T}^{\pm}$ com a sèries de potències de ε,

$$\mathsf{T}^{\pm}(q, \tau; \mu, \varepsilon) = \mathsf{T}_0(q) + \sum_{n\geq 1} \mathsf{T}_n^{\pm}(q, \tau; \mu)\varepsilon^n \tag{1.40}$$

els coeficients de les quals siguin funcions 2π-periòdiques en τ i verifiquin les condicions (1.27).

Proposició 1.5. *Les solucions formals en potències de ε de l'Equació (1.26) són de la forma*

$$\mathsf{T}_0(q) + \sum_{n\geq 1} \mathsf{T}_n(q, \tau; \mu)\varepsilon^n$$

on $\mathsf{T}_0(q) = 4(1 - \cos(q/2))$, $\mathsf{T}_1(q, \tau; \mu) = 2\mu \sin^2(q/2)\cos\tau$ i, per a $n \geq 2$, les funcions $\mathsf{T}_n(q, \tau; \mu)$ són, excepte signe i constant additiva dependent de μ, les úniques solucions 2π-periòdiques en τ de

$$\partial_\tau \mathsf{T}_n + \partial_q \mathsf{T}_0 \partial_q \mathsf{T}_{n-1} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n_1 + n_2 = n-1 \\ n_1, n_2 \geq 1}} \partial_q \mathsf{T}_{n_1} \partial_q \mathsf{T}_{n_2} = 0. \tag{1.41}$$

A més, són real-analítiques i $\partial_q \mathsf{T}_n(0, \tau; \mu) = \partial_q \mathsf{T}_n(2\pi, \tau; \mu) = 0$

La demostració d'aquesta proposició pot trobar-se a l'Apèndix A.1.

Aquest resultat indica que, per a qualsevol n, ens trobem amb la igualtat $\partial_q \mathsf{T}_n^-(q, \tau; \mu) = \partial_q \mathsf{T}_n^+(q, \tau; \mu)$ i, per tant, amb aquesta estratègia no som capaços de diferenciar entre la varietat estable i la inestable. Com que actualment se sap que en realitat les dues varietats no coincideixen en el cas pertorbat, arribem a la conclusió que la sèrie trobada no pot ser convergent en el domini on estan definides les dues funcions. De fet, el que succeeix és que les dues varietats són asimptòtiques Gevrey-1 en dominis diferents a la sèrie trobada, és a dir, existeixen constants $Q_0 \in (0, \pi)$, $M > 0$ i $K > 0$ tals que $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$

$$\forall\, q \in (0, \pi + Q_0), \qquad \left| \mathsf{T}^-(q, \tau; \mu) - \sum_{n=0}^{N-1} \mathsf{T}_n(q, \tau; \mu)\varepsilon^n \right| \leq M K^N \varepsilon^N N!$$

$$\forall\, q \in (\pi - Q_0, 2\pi), \qquad \left| \mathsf{T}^+(q, \tau; \mu) - \sum_{n=0}^{N-1} \mathsf{T}_n(q, \tau; \mu)\varepsilon^n \right| \leq M K^N \varepsilon^N N!.$$

Aleshores, pot demostrar-se que la diferència entre varietats invariants a $(\pi - Q_0, \pi + Q_0)$ no és que sigui menor que qualsevol potència de ε, sinó que és d'ordre $e^{-c/\varepsilon}$, resultat clarament insuficient, doncs pretenem captar el coeficient d'aquesta exponencial. Per tal de trobar una expressió asimptòtica per a aquesta diferència, haurem d'apropar-nos a una singularitat, perquè és d'esperar que, prop d'ella, els termes exponencialment petits invisibles a $\mathbb{R}$, també hagin augmentat i puguin ser detectats.

1.5.2 Parametrització i aproximació de les varietats invariants.

Tal i com s'explicava a l'apartat 1.3, haurem doncs de recórrer a complexificar les variables i cercar les singularitats dels termes de la sèrie outer (1.40). Abans però, i amb la intenció de comprendre millor la dinàmica sobre les varietats, seguirem la idea que va proposar Poincaré [Po93] i que consistia a parametritzar les varietats invariants estable i inestable mitjançant $q_0(u)$, que correspon a la parametrització temporal de la separatriu del pèndol no pertorbat:

$$\begin{aligned} &q = q_0(u) = 4 \arctan e^u, \\ &T(u,\tau;\mu,\varepsilon) = \mathsf{T}(q_0(u),\tau;\mu,\varepsilon), \\ &H_{\mu,\varepsilon}(q_0(u),p,\tau) = \frac{p^2}{2} + \varphi(u)(\mu\sin\tau - 1), \end{aligned} \tag{1.42}$$

on s'ha definit la funció

$$\varphi(u) := 1 - \cos q_0(u) = \frac{2}{\cosh^2 u}. \tag{1.43}$$

Podem extendre el domini de la variable τ a una banda complexa i aleshores usarem la notació

$$\mathbb{T}_{\sigma_0} = \{\tau \in \mathbb{C}/2\pi;\ |\Im m\,\tau| < \sigma_0\}. \tag{1.44}$$

Treballarem amb funcions enteres respecte $\tau \in \mathbb{C}/2\pi$, per tant, en particular seran analítiques a $\mathbb{T}_{\sigma_0}$ per a qualsevol $\sigma_0 > 0$.

Si considerem la variable u dins el domini complex, recordem que $q_0(u)$ té només singularitats polars a $\{i\pi/2 + i\pi\mathbb{Z}\}$ i és $2\pi i$-periòdica, per tant, defineix una funció analítica a $\mathbb{C} \setminus \{[\frac{\pi i}{2}, \frac{3\pi i}{2}] + 2\pi i\mathbb{Z}\}$ amb les propietats:

$$\lim_{\Re e\, u\to-\infty} q_0(u) = 0, \qquad \lim_{\Re e\, u\to+\infty} q_0(u) = 2\pi.$$

Ara l'Equació de Hamilton-Jacobi té l'expressió:

$$\partial_\tau T + \varepsilon H_{\mu,\varepsilon}\left(q_0(u), \frac{\cosh u}{2}\,\partial_u T, \tau\right) = 0,$$

$$\varepsilon^{-1}\partial_\tau T + \frac{\cosh^2 u}{8}\,(\partial_u T)^2 + \varphi(u)(\mu\sin\tau - 1) = 0 \tag{1.45}$$

i les solucions $T^\pm$ han de complir respectivament:

$$\lim_{\Re e\, u\to-\infty}\big(\cosh u\,\partial_u T^-(u,\tau;\mu,\varepsilon)\big) = 0, \ \lim_{\Re e\, u\to+\infty}\big(\cosh u\,\partial_u T^+(u,\tau;\mu,\varepsilon)\big) = 0. \tag{1.46}$$

Recordem que també imposem que $T^\pm$ no tinguin terme independent de les variables u i τ.

La nostra prioritat ha passat doncs a obtenir informació de $T^-(u,\tau;\mu,\varepsilon) - T^+(u,\tau;\mu,\varepsilon)$, de les derivades d'aquesta diferència i de $\partial_u^2 T^\pm(u,\tau;\mu,\varepsilon)$.

La funció $\mathsf{T}_0(q)$ trobada a (1.39) amb l'elecció que es va fer de la seva constant, passarà a

$$T_0(u) := 4\frac{e^u}{\cosh u} \quad \text{amb} \quad T_0'(u) = \frac{4}{\cosh^2 u} \tag{1.47}$$

i $\mathsf{T}_1(q,\tau;\mu)$ pasarà a

$$T_1(u,\tau;\mu) := \mu\varphi(u)\cos\tau = \mu\frac{2}{\cosh^2 u}\cos\tau. \tag{1.48}$$

Fent també el canvi a la recurrència (1.41), obtenim la dels corresponents termes T_n:

$$\partial_\tau T_n = -\partial_u T_{n-1} - \frac{\cosh^2 u}{8} \sum_{\substack{n_1+n_2=n-1 \\ n_1,n_2\geq 1}} \partial_u T_{n_1}\partial_u T_{n_2}. \tag{1.49}$$

Les propietats de T_n provindran del tipus de recurrència que compleixen i de la naturalesa de $\varphi(u)$.

La complexificació de la variable u ha introduït singularitats en els punts $\{i\pi/2 + i\pi\mathbb{Z}\}$ a les funcions $T_n(u,\tau;\mu)$, observi's per exemple les expressions de T_0 i de T_1 a (1.47) i (1.48) respectivament. Donat el caràcter de la recurrència (1.49), totes les funcions $T_n(u,\tau;\mu)$ tindran les mateixes singularitats que té T_1, tot i que d'ordre superior, i únicament aquestes; en concret, T_n tindrà pols d'ordre $n+1$. Per tant, $\pm i\pi/2$ són les singularitats més properes a $\mathbb{R}$ per a tots els termes de la sèrie.

Una zona sectorial que quedi lluny dels punts $\pm i\pi/2$ i que contingui un interval $(-\infty,u_0]\subset\mathbb{R}$ amb $u_0>0$, s'anomena *domini outer* de la variable u per a la funció T^-. Respectivament, amb la condició que contingui $[u_0,\infty)\subset\mathbb{R}$, es té el *domini outer* de la variable u per a la funció T^+.

A partir de constants fixades $a\in(0,\pi/4)$, $\gamma\in[0,1)$ i $0<u_0$, per a $\varepsilon\in(0,1)$ se'n deriven $\beta_0\in(0,\pi/2)$ i $u_1>u_0$ (veure Apèndix A.2), i definim el nostres dominis outer esquerre i dret per a les funcions T^- i T^+ respectivament com:

$$\begin{aligned} D^u_\gamma :=&\{u\in\mathbb{C} \mid \quad |\arg(u-u_0)|>\pi-\beta_0\}\cup \\ &\cup\{u\in\mathbb{C} \mid \quad |u\pm i\pi/2|>a\varepsilon^\gamma,\ \Re e\, u<-a\varepsilon^\gamma\sin\beta_0,\ |\arg(u-u_1)|>\pi-\beta_0\} \\ D^s_\gamma :=&\{u\in\mathbb{C} \mid -u\in D^u_\gamma\}. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Al Capítol 2 es demostrarà la bondat de l'aproximació als respectius dominis outer de les varietats invariants per T_0 i T_1 definides a (1.47) i (1.48) respectivament. Per la naturalesa d'aquesta aproximació, serà òptim usar a $D^u_\gamma\times\mathbb{T}_{\sigma_0}$ la norma de Fourier:

$$\|h\|_{2,\sigma_0} := \sum_k \sup_{u\in D^u_\gamma} |\cosh^2 u\cdot h^{[k]}(u)|\, e^{|k|\sigma_0}$$

El resultat obtingut per a T^- es recull al Teorema 2.1, que reproduïm a continuació:

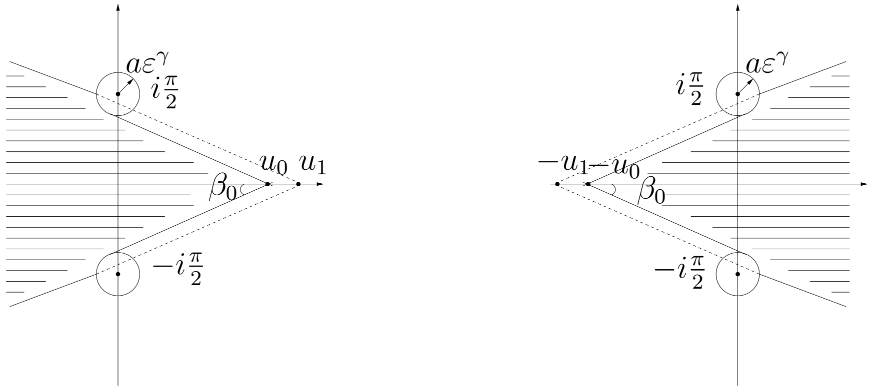


Figura 1.10: Dominis outer D^u_γ i D^s_γ.

Teorema. *Existeix* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que, per a qualssevol* $0 < \mu \leq \mu_0$, $0 \leq \gamma < 1$ *i* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, *existeix* $T^-(u,\tau;\mu,\varepsilon)$ *real-analítica a* $D^u_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ *i solució de (1.45) que satisfà la condició (1.46). A més, existeix una constant* b_0, *tal que* $\forall(u,\tau) \in D^u_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ *tenim que*

$$\|\partial_u T^- - T_0' - \varepsilon\partial_u T_1\|_{2,\sigma_0} \leq b_0\,\mu\varepsilon^{2-2\gamma},$$
$$\|\partial^2_u T^- - T_0'' - \varepsilon\partial^2_u T_1\|_{2,\sigma_0} \leq b_0\,\mu\varepsilon^{2-3\gamma}.$$

1.5.3 La sèrie inner i l'Equació Inner.

El creixement desmesurat de $T^\pm(u,\tau;\mu,\varepsilon)$ prop de les singularitats $\pm i\pi/2$ ens permetrà captar els termes que són exponencialment petits quan $u \in \mathbb{R}$ i que no ens deixen calibrar amb precisió la diferència $T^- - T^+$. Haurem doncs de concentrar-nos en una zona propera a aquestes singularitats.

Una zona que quedi prop dels punts $\pm i\pi/2$, però sempre a certa distància per tal de mantenir l'analiticitat de les funcions, s'anomena *domini inner* de la variable u. En el nostre cas, demanarem una distància màxima a $\pm i\pi/2$ de $\overline{a}\varepsilon^\gamma$, on de seguida posarem condicions a la constant $\overline{a}$. Per contra, imposarem allunyar-nos-en una distància mínima de $c\varepsilon\ln(1/\varepsilon)$ amb $0 < c < 1$ però de manera que $c\varepsilon\ln(1/\varepsilon) < a\varepsilon^\gamma$, cosa que és possible per a qualssevol a i c perquè $c/a < \varepsilon^{\gamma-1}\ln^{-1}(1/\varepsilon) \to +\infty$ si ε és prou petit. A més, necessitem imposar una qüestió purament tècnica que ens limita el moviment per la dreta, en el cas de T^-, i per l'esquerra, en el cas de T^+.

Definim doncs el nostre domini inner per a T^- com:

$$D^u_\varepsilon := D^u_{\varepsilon,+} \cup D^u_{\varepsilon,-}, \tag{1.51}$$

format per dues zones no connectades definides per:

$$D^u_{\varepsilon,+} := \{u \in \mathbb{C} \,|\, |u - i\pi/2| < \overline{a}\varepsilon^\gamma,\ \Im m\, u < \pi/2 - c\varepsilon\ln(1/\varepsilon),\ |\arg(u - i\pi/2)| > \beta_1\}, \tag{1.52}$$

$$D^u_{\varepsilon,-} := \{u \in \mathbb{C} \,|\, |u + i\pi/2| < \overline{a}\varepsilon^\gamma,\ \Im m\, u > -\pi/2 + c\varepsilon\ln(1/\varepsilon),\ |\arg(u + i\pi/2)| > \beta_1\}. \tag{1.53}$$

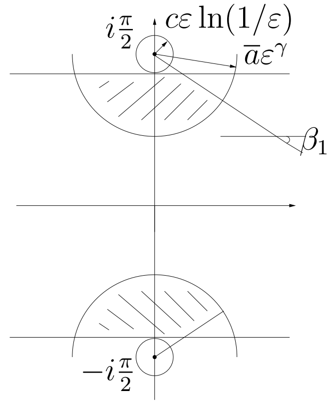


Figura 1.11: Domini inner, D^u_ε.

La constant $\overline{a}$ es pren de manera que es compleixi la situació de la Figura 1.12, on $\overline{a}\varepsilon^\gamma < \pi/2$ per tal de no canviar de semiplà imaginari, i $\pm iz_0 \in D^u_{\varepsilon,\pm}$ per tal que tots els punts de $D^u_{\varepsilon,\pm} \cap \{\Re e\, u \le 0,\, |u \mp i\pi/2| = \overline{a}\varepsilon^\gamma\}$ estiguin també al domini outer D^u_γ (possible tal i com s'explica a l'Apèndix A.3).

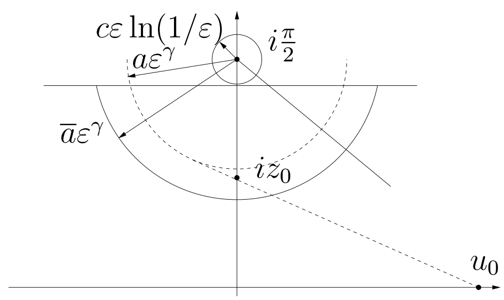


Figura 1.12: Relació entre el domini outer D^u_γ i el domini inner $D^u_{\varepsilon,+}$.

El domini total on tindrem definida la funció T^- és doncs:

$$D^u := D^u_\gamma \cup D^u_\varepsilon \tag{1.54}$$

de manera que D^u, tal i com ja havíem avançat, és un domini sectorial que conté $\mathbb{R}^-$.

Per a qualsevol domini D^u_* de $T^-(\cdot,\tau;\mu,\varepsilon)$, es defineix el seu equivalent per a $T^+(\cdot,\tau;\mu,\varepsilon)$ com

$$D^s_* := \{u \in \mathbb{C} \mid -u \in D^u_*\}$$

i així podem definir

$$D^s := D^s_\gamma \cup D^s_\varepsilon \tag{1.55}$$

de manera que D^s és un domini sectorial que conté $\mathbb{R}^+$.

Situant-nos a $D^u_{\varepsilon,+}$, com que T_n tenia un pol d'ordre $n+1$ a $i\pi/2$, pot expressar-se segons el seu desenvolupament de Laurent com

$$
\begin{aligned}
T_0(u) &= \frac{4}{u-i\pi/2}\left(1+(u-i\pi/2)+\frac{1}{3}(u-i\pi/2)^2+O((u-i\pi/2)^4)\right),\\
\varepsilon T_1(u,\tau;\mu) &= \varepsilon\frac{-2\mu\cos\tau}{(u-i\pi/2)^2}\left(1-\frac{1}{3}(u-i\pi/2)^2+O((u-i\pi/2)^4)\right),\\
\varepsilon^2 T_2(u,\tau;\mu) &= \varepsilon^2\frac{1}{(u-i\pi/2)^3}\left(-4\mu\sin\tau-\mu^2/3-\frac{1}{3}\mu^2(u-i\pi/2)^2+O((u-i\pi/2)^4)\right),\\
\forall n\geq 3,\quad \varepsilon^n T_n(u,\tau;\mu) &= \varepsilon^n\frac{1}{(u-i\pi/2)^{n+1}}\left(a_n(\tau;\mu)+O((u-i\pi/2)^2)\right).
\end{aligned}
$$

Així doncs,

$$
\varepsilon\sum_{n\geq 0}T_n(u,\tau;\mu)\varepsilon^n=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\varepsilon}{u-i\pi/2}\right)^{n+1}\left(a_n(\tau;\mu)+O(u-i\pi/2)\right),
$$

i, fent els reescalats

$$
z=\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2)\quad \text{i}\quad \phi(z,\tau;\mu,\varepsilon)=\varepsilon T(\varepsilon z+i\pi/2,\tau;\mu,\varepsilon), \tag{1.56}
$$

arribem a l'anomenada *sèrie inner*

$$
\sum_{n\geq 0}\phi_n(z,\tau;\mu)\varepsilon^n=\varepsilon\sum_{n\geq 0}T_n(\varepsilon z+i\pi/2,\tau;\mu)\varepsilon^n=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n(\tau;\mu)}{z^{n+1}}+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}}O(\varepsilon z),
$$

de manera que hem redistribuït els termes de la sèrie outer i retenim les seves parts dominants al nou terme d'ordre zero en ε, que serà, per tant, l'objecte del nostre estudi per tal de captar el trencament de varietats invariants.

El reescalat (1.56) converteix l'Equació de Hamilton-Jacobi (1.45) en:

$$
\partial_\tau\phi+\frac{\cosh^2(\varepsilon z+i\pi/2)}{8\varepsilon^2}(\partial_z\phi)^2+\frac{2\varepsilon^2}{\cosh^2(\varepsilon z+i\pi/2)}(\mu\sin\tau-1)=0. \tag{1.57}
$$

Expressant ara tots els termes en potències de ε:

$$
\begin{aligned}
\frac{\cosh^2(\varepsilon z+i\pi/2)}{8\varepsilon^2} &= -\frac{z^2}{8}\left[1+\frac{(\varepsilon z)^2}{3}+\cdots\right],\\
\frac{2\varepsilon^2}{\cosh^2(\varepsilon z+i\pi/2)} &= -\frac{2}{z^2}+\frac{2}{3}\varepsilon^2+\cdots,
\end{aligned}
$$

s'obté una equació en derivades parcials lineal per a cada funció $\phi_n(z,\tau;\mu)$, $n\geq 1$:

$$
\begin{aligned}
\partial_\tau\phi_0-\frac{z^2}{8}(\partial_z\phi_0)^2+\frac{2}{z^2}(1-\mu\sin\tau) &= 0, \qquad (1.58)\\
\partial_\tau\phi_n-\frac{z^2}{4}\partial_z\phi_0\partial_z\phi_n+A(z,\tau,\phi_0,\dots,\phi_{n-1}) &= 0 \qquad \forall\, n\geq 1,
\end{aligned}
$$

essent la de $\phi_0(z,\tau;\mu)$ anomenada *Equació Inner* i l'única que no és lineal. Considerant (1.57) com una pertorbació de (1.58), podrem tenir aproximacions de les varietats invariants estable i inestable a partir de solucions particulars $\phi_0^\pm$ de (1.58), que hauran de ser 2π-periòdiques en τ i complir la condició asimptòtica

$$\lim_{\Re e\, z\to\pm\infty} \phi_0^\pm(z,\tau;\mu) = 0 \tag{1.59}$$

per tal que aproximin $T^\pm$ quan $\varepsilon \to 0$ i εz sigui petit. Finalment, estimarem la diferència $\phi_0^- - \phi_0^+$ per a valors de z amb part imaginària suficientment negativa, doncs la condició del domini inner $\Im m\, u < \pi/2 - c\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ s'ha convertit en $\Im m\, z < -c\ln(1/\varepsilon)$.

A l'article [G97] també s'estudia l'escissió de separatrius, indicant quina és l'Equació Inner (equació independent del paràmetre ε) associada a diversos problemes. Aquesta equació, que en el cas estudiat és un sistema, és anomenada *sistema de referència*. La nostra Equació Inner (1.58) resulta ser l'Equació de Hamilton-Jacobi

$$\partial_\tau \phi_0 + \mathcal{H}_\mu(z, \partial_z\phi_0, \tau) = 0$$

del sistema de referència obtingut a [G97] per al nostre problema i que té funció de Hamilton associada $\mathcal{H}_\mu(z,p,\tau) = -\frac{1}{8}\, z^2p^2 + 2z^{-2}(1-\mu\sin\tau)$.

1.5.4 Teoria de la Ressurgència.

La solució formal de l'Equació (1.58) en potències de z^{-1} que verifiqui la condició asimptòtica (1.59) ha de ser del tipus:

$$\tilde{\phi}_0(z,\tau;\mu) = \sum_{n\geq 0} a_n(\tau;\mu) z^{-n-1} \tag{1.60}$$

amb $a_n(\tau;\mu)$ polinomis trigonomètrics en τ. Aquesta solució formal és essencialment única però no convergent i l'estudi de la seva divergència entra dins el camp cobert per la Teoria de la Ressurgència, passant per la tranformada de Borel formal.

El problema s'ha transformat ara en obtenir solucions de (1.58) asimptòtiques a la sèrie (1.60), que aproximaran les varietats invariants estable i inestable, i estudiar-ne la seva diferència. Aquestes solucions particulars s'obtindran, tal i com es va fer amb l'Equació d'Euler a la Secció 1.3, pel mètode de resumació de Borel a partir de la solució formal $\tilde{\phi}_0$ i després de l'estudi de les singularitats de la seva transformada de Borel $\hat{\phi}_0$:

$$\phi_0^\pm(z,\tau;\mu) = \int_0^{\pm\infty} e^{-z\zeta}\hat{\phi}_0(\zeta,\tau;\mu)\, d\zeta.$$

Tot això serà possible perquè demostrarem que l'Equació (1.58) té una solució formal (1.60) de tipus Gevrey-1, que és una *funció ressorgent simplement ramificada*, és a dir, la seva transformada de Borel formal

$$\hat{\phi}_0(\zeta,\tau;\mu) = \sum_{n\geq 0} a_n(\tau;\mu)\frac{\zeta^n}{n!}$$

defineix, prop de l'origen, una funció holomorfa de ζ que té continuació analítica seguint qualsevol camí de $\mathbb{C}$ que comenci a l'origen i eviti els punts $i\mathbb{Z}^*$, on hi ha les seves singularitats, que només seran de tipus polar o logarítmic. En realitat, no cal tota aquesta informació més enllà de la primera singularitat, però s'obté gràcies als conceptes d'*Integral Formal* i *Equació del Pont*, dels quals en parlarem extensament al Capítol 3.

La divergència de $\tilde{\phi}_0$ serà analitzada amb els operadors Δ_ω anomenats *derivades estrangeres d'índex* ω i que mesuren les singularitats de les determinacions de $\hat{\phi}_0$ als punts $\omega \in i\mathbb{Z}^*$. En concret, el comportament de $\hat{\phi}_0$ prop de i (anàlegament prop de $-i$), que és la seva singularitat més propera a l'origen, serà

$$\hat{\phi}_0(i+\zeta,\tau;\mu) = f_0^{[i]}(\mu)\, e^{i\tau}\left(\frac{1}{2\pi i\zeta} + \hat{\chi}(\zeta,\tau;\mu)\frac{\log\zeta}{2\pi i}\right) + \text{ germ regular a l'origen,}$$

amb $f_0^{[i]}(\mu) = -2\pi i\mu + O(\mu^3)$ i on $\hat{\chi}$ serà la transformada de Borel formal de $\tilde{\chi} = -1 + e^{-i\tilde{S}}$, essent per altra part $\tilde{S}(z,\tau;\mu) = \sum_{n\geq 0} S_n(\tau;\mu) z^{-n-1}$ una sèrie divergent tal que la funció $Y(z,\tau;\mu) = z - \tau + \tilde{S}(z,\tau;\mu)$ és una solució de l'equació variacional de l'Equació Inner (1.58):

$$\partial_\tau Y - \frac{1}{4} z^2 \partial_z \phi_0 \partial_z Y = 0.$$

El que realment ens interessa, però, de les solucions $\phi_0^\pm$ és una fórmula asimptòtica per a la seva diferència per a valors de z amb part imaginària suficientment negativa (recordem que $z = (u - i\pi/2)/\varepsilon$), la qual cosa s'obtindrà al Corol·lari 3.30 a partir de la informació sobre les singularitats de $\hat{\phi}_0$:

$$\phi_0^+(z,\tau;\mu) - \phi_0^-(z,\tau;\mu) \sim f_0^{[i]}(\mu)\, e^{-i\left(z-\tau+\tilde{S}(z,\tau;\mu)\right)}, \quad \text{quan } \Im m\, z \to -\infty$$

uniformement per a μ i $\Im m\,\tau$ fitades. Si ε és prou petit, aquesta fórmula asimptòtica ens portarà al final de tot el procés, a un resultat exponencialment petit per a la distància entre separatrius del nostre problema inicial (1.1).

1.5.5 Matching i aproximació de les varietats al domini inner.

La propietat essencial dels dominis outer i inner definits per a T^-, i que els relaciona de manera decisiva, és que tenen per intersecció a $\Re e\, u < 0$ la indicada a la Figura 1.13, anomenada *zona de matching* entre D_γ^u i D_ε^u i que connecta la informació que es té de T^- a la zona outer amb la que es té a la zona inner. Per a un $0 < \delta < 1$, usarem la notació:

$$D^u_{\gamma,\delta} := D^u_{\gamma,\delta,+} \cup D^u_{\gamma,\delta,-} \tag{1.61}$$

amb

$$\begin{aligned} D^u_{\gamma,\delta,+} &:= \{u\in\mathbb{C}\,|\,(1-\delta)\overline{a}\varepsilon^\gamma \le |u-i\pi/2| \le (1+\delta)\overline{a}\varepsilon^\gamma,\ \Im m\, u < \pi/2-(1-\delta)c\varepsilon\ln(1/\varepsilon),\ \Re e\, u<0\} \\ D^u_{\gamma,\delta,-} &:= \{u\in\mathbb{C}\,|\,(1-\delta)\overline{a}\varepsilon^\gamma \le |u+i\pi/2| \le (1+\delta)\overline{a}\varepsilon^\gamma,\ \Im m\, u > -\pi/2+(1-\delta)c\varepsilon\ln(1/\varepsilon),\ \Re e\, u<0\}. \end{aligned} \tag{1.62}$$

Gràcies a aquesta zona de matching, podrem usar la informació de la funció $T^-(u,\tau;\mu,\varepsilon)$ a $D_\gamma^u \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ obtinguda al Capítol 2 i serem capaços de donar al Capítol 4 com a aproximacions de les varietats invariants estable i inestable a la zona inner, les funcions $\phi_0^\pm$ trobades al Capítol 3 i que són solucions de l'Equació (1.58). Si els dominis $\mathcal{D}_\varepsilon^u$, $\mathcal{D}_{\varepsilon,+}^u$ i $\mathcal{D}_{\gamma,\delta,+}^u$ són els respectius de D_ε^u, $D_{\gamma,\delta}^u$ i $D_{\gamma,\delta,+}^u$ pel canvi a variable inner $z = \varepsilon^{-1}(u - i\pi/2)$, el resultat per a ϕ^- està recollit al Teorema 4.1:

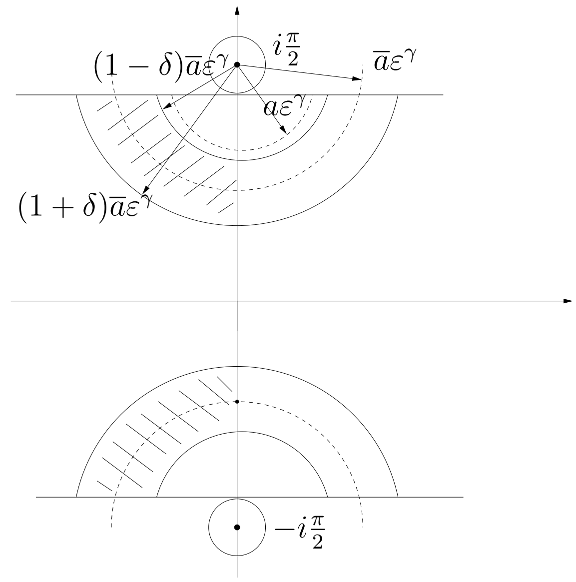


Figura 1.13: Zona de matching, $D^u_{\gamma,\delta}$.

Teorema. *Siguin* $\mu_0, \sigma_0 > 0$ *fixades. Existeix* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que, per a qualssevol* $0 < \sigma < \sigma_0$, $0 < \mu \leq \mu_0$, $1/3 < \gamma < 1/2$ *i* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, *la solució de l'Equació (1.57)* $\phi^-(z, \tau; \mu, \varepsilon) = \varepsilon T^-(\varepsilon z + i\pi/2, \tau; \mu, \varepsilon)$ *existeix i és analítica a* $\mathcal{D}^u_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_\sigma$.

A més, existeix una constant d_0 *tal que*

$$\begin{aligned} \|\partial_z \phi^- - \partial_z \phi_0^-\|_\infty &\leq d_0\, \varepsilon^2, \\ \|\partial_z^2 \phi^- - \partial_z^2 \phi_0^-\|_\infty &\leq d_0 \frac{\varepsilon^2}{\ln^2(1/\varepsilon)}, \end{aligned}$$

on la norma s'ha pres al domini $\mathcal{D}^u_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_\sigma$

Naturalment, s'obté l'anàleg per a ϕ^+.

1.5.6 Variables de redreçament del flux.

Als Capítols 5 i 6 veurem que $\Delta T(u, \tau; \mu, \varepsilon) := T^+(u, \tau; \mu, \varepsilon) - T^-(u, \tau; \mu, \varepsilon)$ verifica l'equació en derivades parcials lineal:

$$\varepsilon^{-1} \partial_\tau \Delta T + \left[\frac{\cosh^2 u}{8} \left(\partial_u T^+ + \partial_u T^- \right) \right] \partial_u \Delta T = 0,$$

de la qual, per redreçament del flux, es demostra que les seves solucions fitades a una certa banda vertical de $\mathbb{C}$ són exponencialment petites a $\mathbb{R}$.

El canvi de variables que redreçarà el flux s'obtindrà al Capítol 5 gràcies als resultats obtinguts als capítols anteriors i que fan referència a l'aproximació de les varietats invariants per diferents funcions, segons s'estigui en el domini outer o el domini inner, i a l'aproximació de la diferència entre varietats a la zona inner obtinguda per l'aplicació dels mètodes de la Teoria de la Ressurgència.

Finalment, ja al Capítol 6 i gràcies al redreçament del flux, s'estableix el resultat final, que relaciona $\Delta T(u,\tau;\mu,\varepsilon)$ amb $F(u,\tau;\mu,\varepsilon) = 2if_0^{[i]}(\mu)e^{-\varepsilon^{-1}\pi/2}\sin(\tau-\varepsilon^{-1}u)$ i que podem trobar al Teorema 6.4:

Teorema. *Sigui $\mu_0 > 0$ fixada. Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \mu \le \mu_0$, $0 < \tilde{c} < 1$ i $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, existeixen constants $\tilde{u}_2$ i C_0 tals que $\forall (u,\tau) \in (-\tilde{u}_2, \tilde{u}_2) \times \mathbb{R}$*

$$
\begin{aligned}
|\Delta T(u,\tau) - B(\mu,\varepsilon) - F(u,\tau)| &\le C_0\varepsilon^{-1}\left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right)e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}},\\
|\partial_u\Delta T(u,\tau) - \partial_u F(u,\tau)| &\le C_0\varepsilon^{-2}\left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right)e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}},\\
\left|\partial_u^2\Delta T(u,\tau) - \partial_u^2 F(u,\tau)\right| &\le C_0\varepsilon^{-3}\left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right)e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}},
\end{aligned}
$$

on $B(\mu,\varepsilon) = O(\mu\varepsilon^2)$ analítica.

1.6 El sistema promitjat.

La mida d'una pertorbació de freqüència $1/\varepsilon$ i mitjana 0 com la del sistema (1.23), és més petita del que sembla inicialment. Fent un pas de promitjos s'evidencia l'autèntica magnitud de la pertorbació i permet tractaments més curats del problema. Vegem quin sistema promitjat tindríem en el cas del sistema (1.23).

Lema 1.6. *Existeix un canvi canònic de variables $(q,p) = (\bar{q}, \bar{p} + \varepsilon G(\bar{q},\tau;\mu))$ analític i 2π-periòdic en τ tal que transforma el sistema (1.23) que té associat el Hamiltonià (1.24) en el*

$$
\left\{\begin{array}{l}
\bar{q}' = \varepsilon\bar{p} + \varepsilon^2\mu\sin\bar{q}\cos\tau\\
\bar{p}' = \varepsilon\sin\bar{q} - \varepsilon^2\mu\bar{p}\cos\bar{q}\cos\tau - \varepsilon^3\mu^2\cos\bar{q}\sin\bar{q}\cos^2\tau
\end{array}\right.
$$

amb Hamiltonià associat

$$
\varepsilon\overline{H}_{\mu,\varepsilon}(\bar{q},\bar{p},\tau) = \varepsilon\frac{\bar{p}^2}{2} + \varepsilon(-1+\cos\bar{q}) + \varepsilon^2\mu\sin\bar{q}\cos\tau\,\bar{p} - \varepsilon^3\mu^2\frac{\cos(2\bar{q})-1}{4}\cos^2\tau. \tag{1.63}
$$

Demostració. Inicialment, busquem un canvi

$$
(q,p) = (\bar{q},\bar{p}) + \big(\varepsilon g_1(\bar{q},\bar{p},\tau;\mu),\, \varepsilon g_2(\bar{q},\bar{p},\tau;\mu)\big) \tag{1.64}
$$

que passi (1.23) a

$$
\left\{\begin{array}{l}
\bar{q}' = \varepsilon F_1(\bar{q},\bar{p}) + O(\varepsilon^2)\\
\bar{p}' = \varepsilon F_2(\bar{q},\bar{p}) + O(\varepsilon^2).
\end{array}\right.
$$

La teoria dels promitjos assegura que el canvi existeix i, a més, que les funcions F_i són:

$$
\begin{aligned}
F_1(\bar{q},\bar{p}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{p}\,d\tau = \bar{p},\\
F_2(\bar{q},\bar{p}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\bar{q}(1-\mu\sin\tau)\,d\tau = \sin\bar{q}.
\end{aligned}
$$

La condició a imposar a les funcions g_i és que ens permetin eliminar la dependència en τ del primer ordre de ε a les dues equacions del sistema. A la primera equació ja no hi ha tal dependència, per tant, no ens cal una g_1. Per tal de trobar g_2, mirem quin sistema tindríem a partir del (1.23) amb les noves variables:

$$\begin{cases} \bar{q}' = q' = \varepsilon\bar{p} + \varepsilon^2 g_2(\bar{q},\bar{p},\tau;\mu) \\ \bar{p}' = p' - \varepsilon\bar{q}'\partial_{\bar{q}} g_2(\bar{q},\bar{p},\tau;\mu) - \varepsilon\bar{p}'\partial_{\bar{p}} g_2(\bar{q},\bar{p},\tau;\mu) - \varepsilon\partial_\tau g_2(\bar{q},\bar{p},\tau;\mu) = \\ \quad = \varepsilon\sin\bar{q}(1-\mu\sin\tau) - \varepsilon\bar{q}'\partial_{\bar{q}} g_2(\bar{q},\bar{p},\tau;\mu) - \varepsilon\bar{p}'\partial_{\bar{p}} g_2(\bar{q},\bar{p},\tau;\mu) - \varepsilon\partial_\tau g_2(\bar{q},\bar{p},\tau;\mu), \end{cases}$$

però, com que $\bar{q}', \bar{p}' = O(\varepsilon)$, g_2 només cal que sigui tal que $\partial_\tau g_2(\bar{q},\bar{p},\tau;\mu) = -\mu\sin\bar{q}\sin\tau$, per tant, $g_2(\bar{q},\bar{p},\tau;\mu) = \mu\sin\bar{q}\cos\tau$. Observem que $\partial_{\bar{p}} g_2 = 0$, la qual cosa ens facilitarà molt les coses.

Així doncs, un pas de promitjos equival a fer el canvi

$$\begin{cases} q = \bar{q} \\ p = \bar{p} + \varepsilon\mu\sin\bar{q}\cos\tau \end{cases}$$

que ens manté la mateixa part no pertorbada, anomenada sistema promitjat, i la contribució de la pertorbació passa a ordre $\varepsilon^2\mu$:

$$\begin{cases} \bar{q}' = \varepsilon\bar{p} + \varepsilon^2\mu\sin\bar{q}\cos\tau \\ \bar{p}' = \varepsilon\sin\bar{q} - \varepsilon^2\mu\bar{p}\cos\bar{q}\cos\tau - \varepsilon^3\mu^2\cos\bar{q}\sin\bar{q}\cos^2\tau. \end{cases}$$

Sistema que també és hamiltonià amb funció de Hamilton associada:

$$\varepsilon\overline{H}_{\mu,\varepsilon}(\bar{q},\bar{p},\tau) = \varepsilon\frac{\bar{p}^2}{2} + \varepsilon(-1+\cos\bar{q}) + \varepsilon^2\mu\sin\bar{q}\cos\tau\,\bar{p} - \varepsilon^3\mu^2\frac{\cos(2\bar{q})-1}{4}\cos^2\tau$$

on s'ha afegit el terme $-\varepsilon + \varepsilon^3\mu^2\cos^2\tau/4$ per tal de mantenir la propietat $\varepsilon\overline{H}_{\mu,\varepsilon}(0,0,\tau) = 0.$ ■

Per simplificar la notació, es tornaran a usar les variables q i p en lloc de $\bar{q}$ i $\bar{p}$.

Les varietats estable i inestable de la solució periòdica $(0,0)$ vindran donades per $p = \partial_q\overline{\mathsf{T}}^{\pm}(q,\tau;\mu,\varepsilon)$, on $\overline{\mathsf{T}}^{\pm}$ són solucions 2π-periòdiques en τ de l'Equació de Hamilton-Jacobi:

$$\partial_\tau\overline{\mathsf{T}} + \varepsilon\overline{H}_{\mu,\varepsilon}(q,\partial_q\overline{\mathsf{T}},\tau) = 0. \tag{1.65}$$

Pot comprovar-se que hi ha una senzilla relació entre les funcions generadores de les varietats invariants en el sistema inicial i el sistema promitjat:

$$\overline{\mathsf{T}}(q,\tau;\mu,\varepsilon) = \mathsf{T}(q,\tau;\mu,\varepsilon) - \varepsilon\mathsf{T}_1(q,\tau;\mu),$$

on $\mathsf{T}_1(q,\tau;\mu) = 2\mu\sin^2(q/2)\cos\tau$. Per tant, $\overline{\mathsf{T}}^{\pm}$ també tenen, respectivament, condició:

$$\lim_{q\to 0}\partial_q\overline{\mathsf{T}}^{-}(q,\tau;\mu,\varepsilon) = 0, \qquad \lim_{q\to 2\pi}\partial_q\overline{\mathsf{T}}^{+}(q,\tau;\mu,\varepsilon) = 0.$$

Fent ara també el canvi (1.42):

$$\begin{aligned} &\overline{T}(u,\tau;\mu,\varepsilon) = \overline{\mathsf{T}}(q_0(u),\tau;\mu,\varepsilon), \\ &\overline{H}_{\mu,\varepsilon}(q_0(u),p,\tau) = \frac{p^2}{2} - \varphi(u) + \varepsilon\mu\varphi'(u)\frac{\cosh u}{2}\cos\tau\,p + \varepsilon^2\mu^2 f(u,\tau), \end{aligned} \tag{1.66}$$

on la funció $\varphi(u)$ ja estava definida a (1.43) i ara s'ha definit

$$f(u,\tau) := \frac{\sinh^2 u}{\cosh^4 u}(1+\cos(2\tau)) = f_1(u)(1+\cos(2\tau)). \tag{1.67}$$

La corresponent Equació de Hamilton-Jacobi per a $\overline{T}^{\pm}$ és:

$$\partial_\tau \overline{T} + \varepsilon \overline{H}_{\mu,\varepsilon}(q_0(u), \frac{\cosh u}{2}\partial_u \overline{T}, \tau) = 0,$$

$$\varepsilon^{-1}\partial_\tau \overline{T} + \frac{\cosh^2 u}{8}\left(\partial_u \overline{T}\right)^2 + \varepsilon\mu\varphi'(u)\frac{\cosh^2 u}{4}\cos\tau\,\partial_u \overline{T} - \varphi(u) + \varepsilon^2\mu^2 f(u,\tau) = 0 \tag{1.68}$$

amb condició respectiva

$$\lim_{\Re e\, u\to-\infty}\Big(\cosh u\,\partial_u \overline{T}^-(u,\tau;\mu,\varepsilon)\Big) = 0 \ \text{ i } \lim_{\Re e\, u\to+\infty}\Big(\cosh u\,\partial_u \overline{T}^+(u,\tau;\mu,\varepsilon)\Big) = 0. \tag{1.69}$$

La diferència entre $T^{\pm}$ i $\overline{T}^{\pm}$ només és el terme $\varepsilon T_1(u,\tau)$, definit a (1.48):

$$\overline{T}^{\pm}(u,\tau;\mu,\varepsilon) = T^{\pm}(u,\tau;\mu,\varepsilon) - \varepsilon T_1(u,\tau;\mu). \tag{1.70}$$

Capítol 2

Existència i aproximació de les varietats invariants a la zona outer.

2.1 Introducció i resultats principals.

Recordem que les funcions $\mathsf{T}^{\pm}(q,\tau;\mu,\varepsilon)$ ens permeten definir les varietats invariants del sistema pertorbat (1.23) i apareixen explícitament a les fórmules (1.31), (1.33) i (1.35), que proporcionen una mesura del trencament de separatrius. En realitat, treballarem amb les funcions $T^{\pm}(u,\tau;\mu,\varepsilon) = \mathsf{T}^{\pm}(q_0(u),\tau;\mu,\varepsilon)$, que ja vam definir a la Secció 1.5.2. L'objectiu d'aquest capítol és demostrar l'existència d'aquestes funcions en els dominis outer $D^u_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i $D^s_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ definits a (1.50), i conèixer el pes que hi té el terme

$$T_0(u) + \varepsilon T_1(u,\tau;\mu) = 4\frac{e^u}{\cosh u} + \varepsilon\mu\frac{2}{\cosh^2 u}\cos\tau.$$

Estudiarem només el cas inestable i anàlogament es faria l'estudi en el cas estable.

Totes les funcions que intervenen en el problema depenen d'algun dels paràmetres μ i ε o d'ambdós alhora, però, per simplificar la notació, a partir d'ara no indicarem aquesta dependència. En tot el que segueix considerarem fixades les constants $a>0$, $u_0>0$ i $\sigma_0>0$ que defineixen el domini $D^u_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$. Qualsevol constant que es generi sota aquest domini evidenment dependrà de a, u_0 i σ_0, tot i que no ho indicarem explícitament. També considerarem fixat un cert valor μ_0, el qual determinarà els possibles valors del paràmetre μ en el sentit que $0<\mu\le\mu_0$.

Podem treballar amb la norma del suprem usual:

$$\|h\|_\infty := \sup_{(u,\tau)\in D^u_\gamma\times\mathbb{T}_{\sigma_0}} |h(u,\tau)|$$

però, pel fet que les funcions amb les quals tractem són 2π-periòdiques en τ, es pot considerar el seu desenvolupament de Fourier $h(u,\tau)=\sum_k h^{[k]}(u)e^{ik\tau}$ a $D^u_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i tractar amb la norma de Fourier:

$$\|h\|_{\infty,\sigma_0} := \sum_k \|h^{[k]}\|_\infty\, e^{|k|\sigma_0} \qquad \text{i} \qquad \|h^{[k]}\|_\infty := \sup_{u\in D^u_\gamma} |h^{[k]}(u)|.$$

Per $<h>$ denotarem la mitjana de la funció h a $[0,2\pi]$, és a dir,

$$<h>= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(u,t)\,dt = h^{[0]}(u).$$

Per altra banda, busquem funcions que compleixin la condició (1.46), o sigui,

$$\lim_{\Re e\, u \to -\infty} \big(\cosh u\, \partial_u T^-(u,\tau)\big) = 0, \qquad \lim_{\Re e\, u \to +\infty} \big(\cosh u\, \partial_u T^+(u,\tau)\big) = 0.$$

Així doncs, per tal de copsar millor el comportament de $\partial_u T^\pm(u,\tau) - T_0'(u) - \varepsilon \partial_u T_1(u,\tau)$ respecte la variable u, tant quan u esdevé fitada com quan s'acosta a les singularitats de $T_0(u)$, usarem la norma de Fourier lleugerament modificada:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|h\|_{n,\sigma_0} := \sum_k \|h^{[k]}\|_n \, e^{|k|\sigma_0} \qquad \text{i} \qquad \|h^{[k]}\|_n := \sup_{u \in D^u_\gamma} |\cosh^n u \cdot h^{[k]}(u)|, \tag{2.1}$$

$$\|h\|^*_{n,\sigma_0} := \|h\|_{n,\sigma_0} + \|\partial_u h\|_{n,\sigma_0}.$$

De fet, demostrarem que el producte $\cosh^2 u\, \partial_u T^+(u,\tau)$ està fitat, o sigui, que la major part de les vegades usarem aquesta norma amb $n = 2$. Pel que fa a la relació entre $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|_{n,\sigma}$, és molt senzill veure que:

$$\|h\|_\infty \le \|h\|_{\infty,\sigma_0} \quad \text{i} \quad \|\cosh^n u \cdot h\|_\infty \le \|h\|_{n,\sigma_0}$$

i, si definim $q_{\sigma_0-\sigma} = (e^{\sigma_0-\sigma}+1)/(e^{\sigma_0-\sigma}-1)$, també és fàcil demostrar usant la desigualtat de Cauchy que:

$$\forall\, 0 < \sigma < \sigma_0, \quad \|h\|_{n,\sigma} \le q_{\sigma_0-\sigma} \|\cosh^n u \cdot h\|_\infty. \tag{2.2}$$

El resultat al qual arribarem per a $T^\pm(u,\tau) - T_0(u) - \varepsilon T_1(u,\tau)$ amb

$$T_0(u) = 4\frac{e^u}{\cosh u}, \qquad T_1(u,\tau) = \mu \frac{2}{\cosh^2 u} \cos\tau \tag{2.3}$$

està recollit en el següent teorema:

Teorema 2.1. *Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \mu \le \mu_0$, $0 \le \gamma < 1$ i $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, existeix $T^-(u,\tau)$ real-analítica a $D^u_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i solució de (1.45) que satisfà la condició (1.46).*

A més, existeix $b_0 > 0$, tal que $\forall (u,\tau) \in D^u_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ tenim que

$$\|\partial_u T^- - T_0' - \varepsilon \partial_u T_1\|_{2,\sigma_0} \le b_0\, \mu \varepsilon^{2-2\gamma},$$
$$\|\partial_u^2 T^- - T_0'' - \varepsilon \partial_u^2 T_1\|_{2,\sigma_0} \le b_0\, \mu \varepsilon^{2-3\gamma}.$$

El mateix resultat és cert per a $T^+(u,\tau) - T_0(u) - \varepsilon T_1(u,\tau)$ a $D^s_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ amb la corresponent condició de (1.46), essent la demostració totalment anàlega.

Si només ens cal informació per a $u \in \mathbb{R}$:

Corol·lari 2.2. *Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \mu \le \mu_0$ i $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, existeix $T^-(u,\tau)$ real-analítica a $(-\infty, u_0) \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i solució de (1.45) que satisfà la condició (1.46).*

A més, existeix $b_0 > 0$, tal que $\forall (u,\tau) \in (-\infty, u_0) \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ tenim que

$$|\partial_u T^-(u,\tau) - T_0'(u) - \varepsilon \partial_u T_1(u,\tau)| \le b_0\, \mu \varepsilon^2 e^{2u},$$
$$|\partial_u^2 T^-(u,\tau) - T_0''(u) - \varepsilon \partial_u^2 T_1(u,\tau)| \le b_0\, \mu \varepsilon^2 e^{2u}.$$

El mateix resultat és cert per a $T^+(u,\tau) - T_0(u) - \varepsilon T_1(u,\tau)$ a $(-u_0,+\infty)\times\mathbb{T}_{\sigma_0}$ amb la corresponent condició de (1.46) i hauríem de canviar el factor e^{2u} per e^{-2u}.

Demostració. Com que només ens interessen les fites a $u\in\mathbb{R}$, podem prendre $\gamma=0$.

Tenint en compte que, a partir de la definició (2.1) de la norma $\|\cdot\|_{2,\sigma_0}$,

$$|h| = |\cosh^{-2}u|\cdot|\cosh^2 u\cdot h| \le e^{2u}\frac{4}{(e^{2u}+1)^2}\|h\|_{2,\sigma_0},$$

i com que $e^{2u}+1>1$, posant el terme $T^- - T_0 - \varepsilon T_1$ en el lloc de h, arribem al resultat desitjat:

$$|T^-(u,\tau) - T_0(u) - \varepsilon T_1(u,\tau)| \le e^{2u}4\,b_0\,\mu\varepsilon^2.$$

Hauríem de modificar el coeficient perquè ha aparegut un factor 4, però amb redefinir b_0 n'hi hauria prou.

Anàlogament faríem per a qualsevol dels altres dos casos. ■

Fixada una determinada constant $U>0$, ens interessarà conèixer més acuradament el comportament de $\partial_u T^-(u,\tau) - T_0'(u) - \varepsilon\partial_u T_1(u,\tau)$ al domini $\{\Re e\, u < -U\}\times\mathbb{T}_{\sigma_0}$. El resultat obtingut està recollit en el següent teorema i es demostrarà a la Secció 2.3.

Teorema 2.3. *Sigui $U>0$ suficientment gran. Existeix $\varepsilon_0>0$ tal que, per a qualssevol $0<\mu\le\mu_0$ i $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, l'equació diferencial*

$$\varepsilon^{-1}f'(\tau) + 2f(\tau) + 2\varepsilon\mu\cos\tau\, f(\tau) + \mu f(\tau)^2 + 2\varepsilon\cos\tau + \varepsilon^2\mu\cos^2\tau = 0$$

té una única solució real-analítica $f_2(\tau)$ definida a $\mathbb{T}_{\sigma_0}$ i $\exists\alpha_1$ tal que

$$\|f_2\|_\infty \le \alpha_1\varepsilon^2.$$

A més, es verifica que $\exists k_1$ tal que $\forall(u,\tau)\in\{\Re e\, u<-U\}\times\mathbb{T}_{\sigma_0}$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\cosh^2 u}{4}\Big(\partial_u T^-(u,\tau) - T_0'(u) - \varepsilon\partial_u T_1(u,\tau)\Big) - \mu f_2(\tau)\right| &\le k_1\mu\varepsilon^2 e^{2\,\Re e\, u},\\
\left|\partial_u\left(\frac{\cosh^2 u}{4}\,\left(\partial_u T^-(u,\tau) - T_0'(u) - \varepsilon\partial_u T_1(u,\tau)\right)\right)\right| &\le k_1\mu\varepsilon^2 e^{2\,\Re e\, u}.
\end{aligned}$$

Com que en tot el procés es tractarà d'anar comparant $T^\pm$ amb $T_0+\varepsilon T_1$ (o bé comparant les funcions $\overline{T}^\pm$ definides a (1.70) amb T_0), ens convidrà definir noves funcions

$$Q^\pm(u,\tau) := \mu^{-1}\left(T^\pm(u,\tau) - T_0(u) - \varepsilon T_1(u,\tau)\right) = \mu^{-1}\left(\overline{T}^\pm(u,\tau) - T_0(u)\right) \tag{2.4}$$

i substituint $\overline{T}$ per $T_0+\mu Q$ a (1.68):

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-1}\mu\partial_\tau Q(u,\tau) + \mu^2\frac{\cosh^2 u}{8}\left(\partial_u Q(u,\tau)\right)^2 + 2\mu\frac{\cosh^2 u}{8}\,\partial_u Q(u,\tau)\,T_0'(u) + \frac{\cosh^2 u}{8}\left(T_0'(u)\right)^2 - \varphi(u) +\\
+\,\varepsilon\mu^2\varphi'(u)\frac{\cosh^2 u}{4}\cos\tau\,\partial_u Q(u,\tau) + \varepsilon\mu\varphi'(u)\frac{\cosh^2 u}{4}\cos\tau\,T_0'(u) + \varepsilon^2\mu^2 f(u,\tau) = 0,
\end{aligned}$$

però tenint en compte que

$$\varphi'(u) = -4\sinh u/\cosh^3 u, \quad T_0'(u) = 4/\cosh^2 u, \qquad \frac{\cosh^2 u}{8}\left(T_0'(u)\right)^2 = \varphi(u),$$

l'equació per a $Q^{\pm}$ és

$$\varepsilon^{-1}\partial_\tau Q + \mu\frac{\cosh^2 u}{8}\left(\partial_u Q\right)^2 + \partial_u Q - \varepsilon\mu\tanh u\cos\tau\,\partial_u Q + \varepsilon\varphi'(u)\cos\tau + \varepsilon^2\mu f(u,\tau) = 0 \quad (2.5)$$

amb condicions respectives

$$\lim_{\Re e\, u\to\pm\infty}\left(\cosh u\,\partial_u Q^{\pm}(u,\tau)\right) = 0, \quad (2.6)$$

donades per les condicions (1.69) i el fet que T_1 és la definida a (2.3).

El nostre objectiu és doncs, estudiar les solucions de l'Equació (2.5).

2.2 La separatriu com a aproximació.

Aquesta secció està dedicada a la demostració del Teorema 2.1, abans però d'iniciar la demostració necessitem conèixer les propietats de la norma $\|\cdot\|_{2,\sigma_0}$ i alguns lemes previs.

A partir de les normes $\|\cdot\|_{2,\sigma_0}$ i $\|\cdot\|^*_{2,\sigma_0}$ definim els espais de funcions:

$$\mathcal{E}_{2,\sigma_0} := \{h(u,\tau)\mid h: D^u_\gamma\times\mathbb{T}_{\sigma_0}\longrightarrow\mathbb{C},\ \text{real-analítica},\ \|h\|_{2,\sigma_0} < +\infty\} \quad (2.7)$$

$$\mathcal{DE}_{2,\sigma_0} := \{g(u,\tau)\mid g,\partial_u g: D^u_\gamma\times\mathbb{T}_{\sigma_0}\longrightarrow\mathbb{C},\ \text{real-analítiques},\ \|g\|^*_{2,\sigma_0} < +\infty\}. \quad (2.8)$$

Fixat un radi $r>0$, una bola a l'espai $\mathcal{E}_{2,\sigma_0}$ serà:

$$\mathcal{B}(r) := \{h(u,\tau)\in\mathcal{E}_{2,\sigma_0}\mid \|h\|_{2,\sigma_0}\le r\}.$$

Pot comprovar-se que si $\left(\{h(u)\mid h: D^u_\gamma\longrightarrow\mathbb{C},\ \text{real-analítica}\},\ \|\cdot\|\right)$ per a qualsevol norma $\|\cdot\|$ és una àlgebra de Banach, aleshores

$$\left(\{h(u,\tau)\mid h: D^u_\gamma\times\mathbb{T}_{\sigma_0}\longrightarrow\mathbb{C},\ \text{real-analítica}\},\ \|\cdot\|_{\sigma_0}\right)$$

també ho és, on $\|h\|_{\sigma_0} = \sum_k \|h^{[k]}\|e^{|k|\sigma_0}$ (vegi's [Sa01])

Lema 2.4. *Sigui $U>0$, $\gamma\in[0,1)$ i $\beta_0\in(0,\pi/2)$ l'angle de la Figura 1.10.*

Aleshores, $\exists C>1$ tal que $\forall\varepsilon\in(0,1)$ i $\forall u\in D^u_\gamma$

1. $\forall\,\Re e\, u\le -U$, $|\tanh u|\le(\tanh U)^{-1}$.
2. $|\tanh u|\le C\varepsilon^{-\gamma}$.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-U} |\cosh\zeta|^{-n}\,d\zeta \leq \frac{1}{n|\sinh U|^n}$.

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{u} |\cosh\zeta|^{-2}\,d\zeta \leq C\varepsilon^{-\gamma}$.

5. $\forall\beta\in[0,\beta_0/2]$ *i* $\forall\xi\in\mathbb{R}^-$, $\displaystyle\left|\frac{\cosh u}{\cosh(u+\xi e^{\pm i\beta})}\right| \leq C$.

6. $\forall\beta\in[0,\beta_0/2]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\left|\frac{\cosh u}{\cosh(u+\xi e^{\pm i\beta})}\right|^2 d\xi \leq C$.

Anàlogament, per a $\Re e\, u \geq U > 0$ i $u \in D^s_\gamma$ obtenim les mateixes fites, canviant quan calgui les integrals per $\int_u^{+\infty}$.

La demostració de tots els apartats d'aquest lema és llarga i s'ha cregut oportú posar-la a l'Apèndix A.4 per tal de no desviar l'atenció de la línia general de demostració del Teorema 2.1.

Lema 2.5. *Si totes les normes que apareixen en les següents expressions estan ben definides, aleshores:*

1. $\|h_1\cdot h_2\|_{2,\sigma_0} \leq \|h_1\|_{\infty,\sigma_0}\cdot\|h_2\|_{2,\sigma_0}$.
2. $\|\cosh^2 u\, h_1\cdot h_2\|_{2,\sigma_0} \leq \|h_1\|_{2,\sigma_0}\cdot\|h_2\|_{2,\sigma_0}$.
3. $\forall\delta\in(0,1)$, *sigui* $\{u\in D^u_\gamma\,|\,d(u,\partial D^u_\gamma)\geq\delta\varepsilon^\gamma\}\times\mathbb{T}_{\sigma_0}$ *el domini per a* $\|\cdot\|^{(1)}_{2,\sigma_0}$, *aleshores* $\exists\,\delta_0\in(0,1/3)$ *tal que* $\|\partial_u h\|^{(1)}_{2,\sigma_0} \leq \dfrac{1}{\delta_0\varepsilon^\gamma}\|h\|_{2,\sigma_0}$.
4. $h\in\mathcal{E}_{2,\sigma_0} \Rightarrow m=0,1,\ \displaystyle\lim_{\Re e\, u\to-\infty}(\cosh^m u\cdot h(u,\tau))=0$ *i* $\displaystyle\int_{-\infty}^{u} h(v,\tau)dv$ *existeix i és fitada a* D^u_γ.

Demostració. Les dues primeres propietats surten fàcilment aplicant la definició que s'ha fet de la norma $\|\cdot\|_{2,\sigma_0}$. La tercera propietat necessita una mica més de detall i és la que demostrarem tot seguit. Derivant la funció $\cosh^2 u\cdot h^{[k]}(u)$:

$$\cosh^2 u\cdot\partial_u h^{[k]}(u) = \partial_u\left(\cosh^2 u\cdot h^{[k]}(u)\right) - 2\sinh u\cosh u\cdot h^{[k]}(u).$$

Per a una $\delta\in(0,1)$, si inicialment considerem el domini D^u_γ, usant la desigualtat de Cauchy podem fitar $\partial_u\left(\cosh^2 u\cdot h^{[k]}(u)\right)$ en un domini resultant de separar-nos una distància $\delta\varepsilon^\gamma$ de la frontera:

$$\left|\partial_u\left(\cosh^2 u\cdot h^{[k]}(u)\right)\right| \leq \frac{\|\cosh^2 u\cdot h^{[k]}(u)\|_\infty}{\delta\varepsilon^\gamma} = \frac{\|h^{[k]}\|_2}{\delta\varepsilon^\gamma}.$$

El segon apartat del Lema 2.4 assegura que a D^u_γ, $\|\tanh u\|_\infty \leq C\varepsilon^{-\gamma}$ amb $C>1$. Per tant,

$$\begin{aligned}|\cosh^2 u\cdot\partial_u h^{[k]}(u)| &\leq \left|\partial_u\left(\cosh^2 u\cdot h^{[k]}(u)\right)\right| + |2\sinh u\cosh u\cdot h^{[k]}(u)| \leq \\ &\leq \frac{\|h^{[k]}\|_2}{\delta\varepsilon^\gamma} + 2C\varepsilon^{-\gamma}\|h^{[k]}\|_2 \leq \left(\frac{1}{\delta\varepsilon^\gamma}+\frac{2C}{\varepsilon^\gamma}\right)\|h^{[k]}\|_2.\end{aligned}$$

Sigui $\delta_0 = (1/\delta + 2C)^{-1} < 1/3$, aleshores

$$|\cosh^2 u \cdot \partial_u h^{[k]}(u)| \leq \frac{1}{\delta_0 \varepsilon^\gamma} \|h^{[k]}\|_2.$$

Pel que fa a la norma $\|\cdot\|_{2,\sigma_0}^{(1)}$, això implica que

$$\|\partial_u h\|_{2,\sigma_0}^{(1)} = \sum_k \|h^{[k]}\|_2^{(1)} e^{|k|\sigma_0} \leq \sum_k \frac{1}{\delta_0 \varepsilon^\gamma} \|h^{[k]}\|_2 \, e^{|k|\sigma_0} = \frac{1}{\delta_0 \varepsilon^\gamma} \|h\|_{2,\sigma_0}.$$

Finalment, si observem que

$$|\cosh^2 u \cdot h(u,\tau)| \leq \|h\|_{2,\sigma_0},$$

ja tenim la primera part de l'últim apartat i la propietat 4 del Lema 2.4 ens dóna la segona part. ■

Lema 2.6. *Si $h \in \mathcal{E}_{2,\sigma_0}$, aleshores*

$$\partial_u \int_{\mathbb{R}^-} h(u+t,\tau)\, dt = \int_{\mathbb{R}^-} \partial_u h(u+t,\tau)\, dt = h(u,\tau).$$

$$\partial_u \int_{\mathbb{R}^-} h(u+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^-} \partial_u h(u+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\, dt.$$

Demostració. Com que $h \in \mathcal{E}_{2,\sigma_0}$, ja sabem que les integrals

$$\int_{\mathbb{R}^-} h(u+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\, dt \qquad \text{i} \qquad \int_{\mathbb{R}^-} h(u+t,\tau)\, dt$$

existeixen a $D_\gamma^u \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i que $\lim_{\Re e\, u \to -\infty} h(u,\tau) = 0$. Per poder permutar la derivació amb el signe integral, és suficient demostrar que la integral $\int_{\mathbb{R}^-} \partial_u h(u+t,\tau)\, dt$ convergeix uniformement.

Derivant la funció $\cosh^2 u \cdot h(u,\tau)$:

$$\cosh^2 u \cdot \partial_u h(u,\tau) = \partial_u \left(\cosh^2 u \cdot h(u,\tau)\right) - 2\sinh u \cosh u \cdot h(u,\tau).$$

Si inicialment considerem el domini $D_\gamma^u \cap \{\Re e\, u \leq -c\}$ amb una $c > a\varepsilon^\gamma$, podem fitar $\partial_u \left(\cosh^2 u \cdot h(u,\tau)\right)$ en un domini D_c resultant de separar-nos una distància c de la frontera (veure Figura 2.1):

$$|\partial_u \left(\cosh^2 u \cdot h(u,\tau)\right)| \leq \frac{\|\cosh^2 u \cdot h(u,\tau)\|_\infty}{c} \leq \frac{\|h\|_{2,\sigma_0}}{c}.$$

El primer apartat del Lema 2.4, ens diu que, a $\{\Re e\, u \leq -2c\}$, $|\tanh u| \leq (\tanh(2c))^{-1}$. Per tant,

$$\begin{aligned} |\cosh^2 u \cdot \partial_u h(u,\tau)| &\leq |\partial_u \left(\cosh^2 u \cdot h(u,\tau)\right)| + |2\sinh u \cosh u \cdot h(u,\tau)| \leq \\ &\leq \frac{\|h\|_{2,\sigma_0}}{c} + 2|\tanh(2c)|^{-1}\|h\|_{2,\sigma_0} \leq \left(\frac{1}{c} + 2|\tanh(2c)|^{-1}\right)\|h\|_{2,\sigma_0} = A_c\|h\|_{2,\sigma_0}. \end{aligned}$$

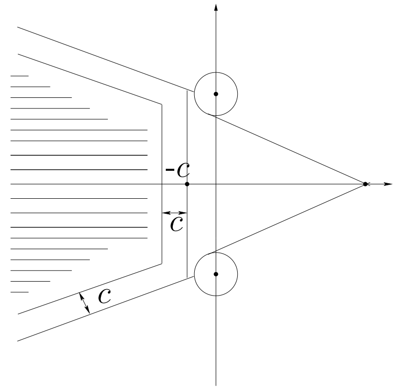


Figura 2.1: Domini reduït D_c.

$\forall u \in D^u_\gamma \cap \{\Re e\, u \leq -c\}$ i $\forall t \leq -c/\sin\beta_0$, pot comprovar-se que $\Re e(u+t) < -2c$ i podem usar la fita que acabem de trobar per als punts $u+t$:

$$|\partial_u h(u+t,\tau)| \leq A_c \|h\|_{2,\sigma_0} |\cosh(u+t)|^{-2}.$$

Pot comprovar-se que aquest procés és el mateix que el que es va fer a l'Apartat 3 del Lema 2.5, però volíem deixar constància que per al resultat no cal que c sigui petit.

De l'Apartat 4 del Lema 2.4 sabem que,

$$\int_{-\infty}^{-c/\sin\beta_0} |\cosh(u+t)|^{-2}\, dt = \int_{-\infty}^{\Re e\, u - c/\sin\beta_0} |\cosh v|^{-2}\, dv \leq C\varepsilon^{-\gamma},$$

per tant podem concloure que la integral

$$\int_{\mathbb{R}^-} \partial_u h(u+t,\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{-c/\sin\beta_0} \partial_u h(u+t,\tau)\, dt + \int_{-c/\sin\beta_0}^{0} \partial_u h(u+t,\tau)\, dt$$

convergeix uniformement.

Tot aquest procés s'ha fet independentment del valor de la variable τ, només calia que $\tau \in \mathbb{T}_{\sigma_0}$. Com que $\forall \tau \in \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i $\forall t \in \mathbb{R}$, $\tau + \varepsilon^{-1} t \in \mathbb{T}_{\sigma_0}$, obtenim la segona fórmula de l'enunciat.

Finalment,

$$\int_{-\infty}^{0} \partial_u h(u+t,\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{dt} h(u+t,\tau)\, dt = h(u,\tau) - \lim_{\Re e\, u \to -\infty} h(u,\tau) = h(u,\tau). \qquad \blacksquare$$

Lema 2.7. *L'operador ∂_u^{-1} definit com*

$$\partial_u^{-1} h(u,\tau) = \int_{\mathbb{R}^-} h(u+t,\tau)\, dt \tag{2.9}$$

va de $\mathcal{E}_{2,\sigma_0}$ a $\mathcal{DE}_{2,\sigma_0}$ i $\partial_u \circ \partial_u^{-1} = Id$. A més, $\exists C > 1$ tal que

$$|\partial_u^{-1} h(u,\tau)| \leq \|h\|_{2,\sigma_0} C\varepsilon^{-\gamma}.$$

Demostració. Si $h \in \mathcal{E}_{2,\sigma_0}$, sabem que la integral

$$\int_{\mathbb{R}^-} h(u+t,\tau)\,dt$$

existeix a $D^u_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i per tant l'operador ∂_u^{-1} està ben definit. Comprovarem ara que $\partial_u^{-1}h \in \mathcal{DE}_{2,\sigma_0}$.

Desenvolupant per Fourier, $h(u,\tau) = \sum_k h^{[k]}(u)\, e^{ik\tau}$, aleshores

$$\partial_u^{-1}h(u,\tau) = \sum_k \partial_u^{-1}h^{[k]}(u)\, e^{ik\tau} \quad \text{on} \quad \partial_u^{-1}h^{[k]}(u) = \int_{\mathbb{R}^-} h^{[k]}(u+t)\,dt$$

Usant l'Apartat 6 del Lema 2.4, podem fitar la norma $\|\cdot\|_2$ dels coeficients $\partial_u^{-1}h^{[k]}$:

$$\begin{aligned}
|\cosh^2 u\, \partial_u^{-1}h^{[k]}(u)| &\le \left| \int_{-\infty}^0 \cosh^2 u\, h^{[k]}(u+t)\,dt \right| \le \\
&\le \int_{-\infty}^0 |\cosh^2(u+t)\, h^{[k]}(u+t)| \left| \frac{\cosh u}{\cosh(u+t)} \right|^2 dt \le \\
&\le \|h^{[k]}\|_2 \int_{-\infty}^0 \left| \frac{\cosh u}{\cosh(u+t)} \right|^2 dt \le \|h^{[k]}\|_2 C.
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\|\partial_u^{-1}h\|_{2,\sigma_0} = \sum_k \|\partial_u^{-1}h^{[k]}\|_2\, e^{|k|\sigma_0} \le \sum_k \|h^{[k]}\|_2 C\, e^{|k|\sigma_0} \le \|h\|_{2,\sigma_0} C \;\Rightarrow\; \partial_u^{-1}h \in \mathcal{E}_{2,\sigma_0}.$$

La identitat $\partial_u \circ \partial_u^{-1} = \mathrm{Id}$ ens ve donada pel Lema 2.6, per tant, $\partial_u \partial_u^{-1}h(u,\tau) = h(u,\tau) \in \mathcal{E}_{2,\sigma_0}$ i amb això queda demostrat que $\partial_u^{-1}h \in \mathcal{DE}_{2,\sigma_0}$.

Finalment, usant l'Apartat 4 del Lema 2.4 amb la integral horitzontal,

$$|\partial_u^{-1}h(u,\tau)| \le \int_{-\infty}^0 |h(u+t,\tau)|\,dt \le \|h\|_{2,\sigma_0} \int_{-\infty}^0 |\cosh(u+t)|^{-2}\,dt \le \|h\|_{2,\sigma_0} C\varepsilon^{-\gamma}. \qquad \blacksquare$$

Considerem ara l'operador lineal definit sobre l'espai $\mathcal{DE}_{2,\sigma_0}$:

$$L_\varepsilon g(u,\tau) = \left(\varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_u\right) g(u,\tau). \tag{2.10}$$

El següent lema ens donarà el seu operador invers per la dreta.

Lema 2.8. *L'operador*

$$\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(h)(u,\tau) := \int_{\mathbb{R}^-} h(u+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\,dt \tag{2.11}$$

està definit a $\mathcal{E}_{2,\sigma_0}$ i té les següents propietats:

1. *és lineal de $\mathcal{E}_{2,\sigma_0}$ en $\mathcal{DE}_{2,\sigma_0}$ i commuta amb l'operador diferencial ∂_u.*
2. *$L_\varepsilon \circ \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon = Id$.*
3. *Existeix $A_1 > 0$ tal que*
   a. $\|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(h)\|_{2,\sigma_0} \le A_1 \|h\|_{2,\sigma_0}$, *però si* $< h >= 0$, $\|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(h)\|_{2,\sigma_0} \le A_1 \varepsilon \|h\|_{2,\sigma_0}$.
   b. $\|\partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(h)\|_{2,\sigma_0} \le A_1 \|h\|_{2,\sigma_0}$.

Demostració. Està clar que és lineal i la propietat commutativa ens la dóna el Lema 2.6. Si $h \in \mathcal{E}_{2,\sigma_0}$, aleshores clarament $\mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon(h)$ és real-analítica a $D^u_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$. Sabem doncs que podem escriure

$$g(u,\tau) = \mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon(h)(u,\tau) = \sum_k g^{[k]}(u)\, e^{ik\tau} \tag{2.12}$$

i directament de la definició (2.11), amb $h(u,\tau) = \sum_k h^{[k]}(u)\, e^{ik\tau}$:

$$g^{[k]}(u) = \int_{-\infty}^0 h^{[k]}(u+t) e^{ik\,\varepsilon^{-1}t}\, dt, \tag{2.13}$$

on sabíem que $h^{[k]}(u) \to 0$ de manera exponencial perquè $h \in \mathcal{E}_{2,\sigma_0}$, per tant, era integrable.

Com que $h^{[k]}$ és real-analítica i integrable a D^u_γ, podem fer canvis de camins d'integració sense cap problema sempre que ens mantinguem dins el domini. $\forall \xi \in \mathbb{R}^-$, $u + \xi e^{\pm i\beta_0/2} \in D^u_\gamma$, per tant, per a $k > 0$ farem el canvi $t = \xi e^{-i\beta_0/2}$ i per a $k < 0$ farem $t = \xi e^{i\beta_0/2}$:

$$g^{[k]}(u) = e^{\mp i\beta_0/2} \int_{-\infty}^0 h^{[k]}(u + \xi e^{\mp i\beta_0/2}) e^{ik\,\varepsilon^{-1}\xi e^{\mp i\beta_0/2}}\, d\xi.$$

Aleshores, per a $k \neq 0$, usant l'Apartat 5 del Lema 2.4 i integrant l'exponencial:

$$\begin{aligned}\left|g^{[k]}(u)\cosh^2 u\right| &\leq |\cosh u|^2 \,\|h^{[k]}\|_2 \int_{-\infty}^0 e^{|k|\varepsilon^{-1}\xi \sin(\beta_0/2)} |\cosh(u + \xi e^{\mp i\beta_0/2})|^{-2}\, d\xi = \\ &= \|h^{[k]}\|_2 \int_{-\infty}^0 e^{|k|\varepsilon^{-1}\xi\sin(\beta_0/2)} \left|\frac{\cosh u}{\cosh(u+\xi e^{\mp i\beta_0/2})}\right|^2 dt \leq \|h^{[k]}\|_2 \frac{C^2}{|k|\sin(\beta_0/2)}\,\varepsilon.\end{aligned}$$

El cas $k = 0$ s'ha de tractar diferent, usant l'Apartat 6 del Lema 2.4:

$$\left|g^{[0]}(u)\cosh^2 u\right| \leq \int_{-\infty}^0 |h^{[0]}(u+t)|\, |\cosh u|^2\, dt \leq \|h^{[0]}\|_2 \int_{-\infty}^0 \left|\frac{\cosh u}{\cosh(u+t)}\right|^2 dt \leq \|h^{[0]}\|_2 C.$$

Tot això ens indica que:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon(h)\|_{2,\sigma_0} =& \|g\|_{2,\sigma_0} = \sum_k \|g^{[k]}\|_2 e^{|k|r} \leq \|h^{[0]}\|_2 C + \frac{C^2}{\sin(\beta_0/2)}\,\varepsilon \sum_{k\neq 0} \|h^{[k]}\|_2 \frac{1}{|k|}\, e^{|k|r} \leq \\ \leq& \frac{C^2}{\sin(\beta_0/2)} \|h\|_{2,\sigma_0} < +\infty\end{aligned} \tag{2.14}$$

i que, si $< h >= h^{[0]}(u) = 0$, aleshores

$$\|\mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon(h)\|_{2,\sigma_0} = \sum_k \|g^{[k]}\|_2 e^{|k|r} \leq \frac{C^2}{\sin(\beta_0/2)}\,\varepsilon \sum_{k\neq 0} \|h^{[k]}\|_2 \frac{1}{|k|}\, e^{|k|r} \leq \frac{C^2}{\sin(\beta_0/2)}\,\varepsilon \|h\|_{2,\sigma_0}. \tag{2.15}$$

Per tal de fitar $\partial_u \mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon(h)(u,\tau) = \partial_u g(u,\tau)$, tornarem a la fórmula (2.13), i usarem el Lema

2.6,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{du}\, g^{[k]}(u) &= \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{du}\, h^{[k]}(u+t)e^{ik\,\varepsilon^{-1}t}\, dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{d}{du}\, h^{[k]}(u+t)e^{ik\,\varepsilon^{-1}t} + ik\varepsilon^{-1}h^{[k]}(u+t)e^{ik\,\varepsilon^{-1}t} \right) dt - \\
& \quad -ik\varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{0} h^{[k]}(u+t)e^{ik\,\varepsilon^{-1}t}\, dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{dt}\, (h^{[k]}(u+t)e^{ik\,\varepsilon^{-1}t})\, dt - ik\varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{0} h^{[k]}(u+t)e^{ik\,\varepsilon^{-1}t}\, dt = \\
&= h^{[k]}(u) - \lim_{t\to-\infty} \left(h^{[k]}(u+t)e^{ik\,\varepsilon^{-1}t} \right) - ik\varepsilon^{-1}g^{[k]}(u) = h^{[k]}(u) - ik\varepsilon^{-1}g^{[k]}(u).
\end{aligned}
$$

Per tant, $\forall\, k \neq 0$:

$$
\left| \frac{d}{du}\, g^{[k]}(u) \cosh^2 u \right| \leq |h^{[k]}(u) \cosh^2 u| + |k|\varepsilon^{-1}|g^{[k]}(u)\cosh^2 u| \leq \left(1 + \frac{C^2}{\sin(\beta_0/2)} \right) \|h^{[k]}\|_2.
$$

El cas $k = 0$ és més senzill:

$$
\frac{d}{du}\, g^{[0]}(u) = \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{du}\, h^{[0]}(u+t)\, dt = h^{[0]}(u) - \lim_{t\to-\infty} h^{[0]}(u+t) = h^{[0]}(u).
$$

Finalment,

$$
\begin{aligned}
\|\partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(h)\|_{2,\sigma_0} =& \|\partial_u g\|_{2,\sigma_0} = \sum_k \left\| \frac{d}{du}\, g^{[k]} \right\|_2 e^{|k|r} \leq \left(1 + \frac{C^2}{\sin(\beta_0/2)} \right) \sum_k \|h^{[k]}\|_2\, e^{|k|r} = \\
&= \left(1 + \frac{C^2}{\sin(\beta_0/2)} \right) \|h\|_{2,\sigma_0}.
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

Així doncs, hem comprovat que, si $h \in \mathcal{E}_{2,\sigma_0}$, aleshores $\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(h) \in \mathcal{DE}_{2,\sigma_0}$ i, a més, els resultats (2.14), (2.15) i (2.16) ens demostren el tercer apartat de l'enunciat.

Per demostrar que $L_\varepsilon \circ \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon = \mathrm{Id}$, usarem el resultat trobat segons el qual

$$
\frac{d}{du}\, g^{[k]}(u) = h^{[k]}(u) - ik\varepsilon^{-1}g^{[k]}(u).
$$

$$
L_\varepsilon\big(\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(h)\big)(u,\tau) = \sum_k \left(\varepsilon^{-1}ikg^{[k]}(u) + \frac{d}{du}\, g^{[k]}(u) \right) e^{ik\tau} = \sum_k h^{[k]}(u)e^{ik\tau} = h(u,\tau). \qquad \blacksquare
$$

Ja vam veure a la Secció 1.6 que la funció

$$
Q^-(u,\tau) = \mu^{-1}\big(T^-(u,\tau) - T_0(u) - \varepsilon T_1(u,\tau)\big) = \mu^{-1}\big(\overline{T}^-(u,\tau) - T_0(u)\big)
$$

és solució de l'equació:

$$
L_\varepsilon Q(u,\tau) = -\mu \frac{\cosh^2 u}{8} \left(\partial_u Q(u,\tau)\right)^2 + \varepsilon\mu \tanh u \cos\tau\, \partial_u Q(u,\tau) - \varepsilon\varphi'(u)\cos\tau - \varepsilon^2 \mu f(u,\tau),
$$

per tant, en interessa fer primer un estudi de les propietats de la seva part dreta.

Lema 2.9. *Siguin* $\varphi(u) = 2/\cosh^2 u$ *i* $f(u,\tau) = \frac{\sinh^2 u}{\cosh^4 u}(1+\cos(2\tau))$. *Per a cada* $0 < \varepsilon < 1$ *i* $0 < \mu \leq \mu_0$, $\forall h \in \mathcal{E}_{2,\sigma_0}$ *la fórmula*

$$H_1(h,u,\tau) := -\mu\frac{\cosh^2 u}{8}\left(h(u,\tau)\right)^2 + \varepsilon\mu\tanh u\cos\tau\, h(u,\tau) - \varepsilon\varphi'(u)\cos\tau - \varepsilon^2\mu f(u,\tau) \quad (2.17)$$

defineix un operador que té les propietats:

1. $H_1(h,\cdot,\cdot) \in \mathcal{E}_{2,\sigma_0}$.
2. *Sigui* $\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon$ *l'operador definit a (2.11), aleshores* $\exists b_1 > 0$ *tal que*
$$\|\partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\left(H_1(0,\cdot,\cdot)\right)\|_{2,\sigma_0} \leq \frac{1}{2}b_1\varepsilon^{2-2\gamma}.$$
3. $\exists B_1 > 0$, $\forall h_1,\, h_2 \in \mathcal{B}(b_1\varepsilon^{2-2\gamma})$,
$$\|H_1(h_1,\cdot,\cdot) - H_1(h_2,\cdot,\cdot)\|_{2,\sigma_0} \leq \mu\varepsilon^{1-\gamma}B_1\|h_1 - h_2\|_{2,\sigma_0}.$$

Demostració. Per alleugerir les expressions, usarem la notació que ja vam suggerir a (1.67):

$$f(u,\tau) = f_1(u)(1+\cos(2\tau)) \qquad \text{amb} \qquad f_1(u) = \frac{\sinh^2 u}{\cosh^4 u}.$$

Primer obtindrem les fites que necessitarem de les funcions que intervenen a la definició de H_1. La propietat bàsica que farem servir és l'Apartat 2 del Lema 2.4:

$$\begin{aligned}
\|\tanh u\cos\tau\|_{\infty,\sigma_0} &= \|\tanh u\|_\infty e^{\sigma_0} \leq C\varepsilon^{-\gamma}e^{\sigma_0} \\
|\varphi'(u)\cosh^2 u| &= |-4\sinh u\cosh^{-3}u\cosh^2 u| \leq 4\|\tanh u\|_\infty \leq 4C\varepsilon^{-\gamma} \\
&\Rightarrow \|\varphi'\cos\tau\|_{2,\sigma_0} = \|\varphi'\|_2 e^{\sigma_0} \leq 4C\varepsilon^{-\gamma}e^{\sigma_0}. \\
\left|f_1(u)\cosh^2 u\right| &= \left|\frac{\sinh^2 u}{\cosh^4 u}\cosh^2 u\right| \leq \|\tanh^2 u\|_\infty \leq C^2\varepsilon^{-2\gamma} \\
&\Rightarrow \|f\|_{2,\sigma_0} = \|f_1\|_2\left(1+e^{2\sigma_0}\right) \leq C^2\varepsilon^{-2\gamma}\left(1+e^{2\sigma_0}\right).
\end{aligned} \quad (2.18)$$

Si $h \in \mathcal{E}_{2,\sigma_0}$, aleshores, usant les propietats de la norma $\|\cdot\|_{2,\sigma_0}$ recollides al Lema 2.5 i les fites (2.18),

$$\begin{aligned}
\|H_1(h,\cdot,\cdot)\|_{2,\sigma_0} &\leq \frac{1}{8}\mu\|h\|^2_{2,\sigma_0} + \varepsilon\mu\|\tanh u\cos\tau\|_{\infty,\sigma_0}\|h\|_{2,\sigma_0} + \varepsilon\|\varphi'\cos\tau\|_{2,\sigma_0} + \varepsilon^2\mu\|f\|_{2,\sigma_0} \leq \\
&\leq \frac{1}{8}\mu\|h\|^2_{2,\sigma_0} + \varepsilon\mu C\varepsilon^{-\gamma}e^{\sigma_0}\|h\|_{2,\sigma_0} + \varepsilon 4C\varepsilon^{-\gamma}e^{\sigma_0} + \varepsilon^2\mu C^2\varepsilon^{-2\gamma}(1+e^{2\sigma_0}) = \\
&= \frac{1}{8}\mu\|h\|^2_{2,\sigma_0} + \mu Ce^{\sigma_0}\varepsilon^{1-\gamma}\|h\|_{2,\sigma_0} + 4Ce^{\sigma_0}\varepsilon^{1-\gamma} + \mu C^2(1+e^{2\sigma_0})\varepsilon^{2-2\gamma} < +\infty.
\end{aligned}$$

D'on $H_1(h,\cdot,\cdot) \in \mathcal{E}_{2,\sigma_0}$ i, a més, $\|H_1(0,\cdot,\cdot)\|_{2,\sigma_0} \leq \left(4Ce^{\sigma_0} + \mu C^2(1+e^{2\sigma_0})\right)\varepsilon^{1-\gamma}$.

Per calcular una fita de $\|\partial_u\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\left(H_1(0,\cdot,\cdot)\right)\|_{2,\sigma_0}$ podríem usar el resultat del Lema 2.8 i la fita que acabem de trobar:

$$\|\partial_u\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\left(H_1(0,\cdot,\cdot)\right)\|_{2,\sigma_0} \leq A_1\|H_1(0,\cdot,\cdot)\|_{2,\sigma_0} \leq A_1\big(4Ce^{\sigma_0} + \mu C^2(1+e^{2\sigma_0})\big)\varepsilon^{1-\gamma},$$

però, com que tenim $\partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o} H_1(0,\cdot,\cdot)$ de manera explícita, podem fer-ne un estudi més detallat per tal de tenir una fita millor. Per la linealitat de l'operador $\mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}$,

$$\partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}\left(H_1(0,u,\tau)\right) = -\varepsilon \partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}\left(\varphi'(u)\cos\tau\right) - \varepsilon^2 \mu \partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}\left(f(u,\tau)\right), \tag{2.19}$$

on $\varphi'(u)\cos\tau$ té mitjana zero però no $f(u,\tau)$. Usant el primer apartat del Lema 2.8, sabem que si $h \in \mathcal{DE}_{2,\sigma_0} \subset \mathcal{E}_{2,\sigma_0}$, aleshores $\partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}(h) = \mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}(\partial_u h)$. O sigui, que

$$\partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}\left(\varphi'(u)\cos\tau\right) = \mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}\left(\varphi''(u)\cos\tau\right) \tag{2.20}$$

i ara aplicarem l'Apartat 3a del Lema 2.8:

$$\|\mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}\left(\varphi''\cos\tau\right)\|_{2,\sigma_0} \le A_1\varepsilon\|\varphi''\cos\tau\|_{2,\sigma_0} = 2A_1\varepsilon\|\varphi''\|_2 e^{\sigma_0}$$

Per al segon terme de (2.19) només podem aplicar l'Apartat 3b del Lema 2.8:

$$\|\partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}\left(f\right)\|_{2,\sigma_0} \le A_1\|f\|_{2,\sigma_0} = A_1\|f_1\|_2(1+2e^{2\sigma_0}).$$

I usant l'Apartat 2 del Lema 2.4, podem fitar les normes $\|\varphi''\|_2$ i $\|f_1\|_2$:

$$\begin{aligned} |\varphi''(u)\cosh^2 u| &= |\left(-4\cosh^{-2}u + 12\sinh^2 u\cosh^{-4}u\right)\cosh^2 u| = |-4+12\tanh^2 u| \le \\ &\le 4+12\|\tanh^2 u\|_\infty \le (4+12C^2)\varepsilon^{-2\gamma} \quad \Rightarrow \quad \|\varphi''\|_2 \le (4+12C^2)\varepsilon^{-2\gamma}, \end{aligned}$$

i del principi de la demostració, a (2.18), $\|f_1\|_2 \le C^2\varepsilon^{-2\gamma}$. Així doncs,

$$\begin{aligned} \|\partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}\left(\varphi'\cos\tau\right)\|_{2,\sigma_0} = \|\mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}\left(\varphi''\cos\tau\right)\|_{2,\sigma_0} &\le 2A_1 e^{\sigma_0}(4+12C^2)\varepsilon^{1-2\gamma}, \\ \|\partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}\left(f\right)\|_{2,\sigma_0} &\le A_1C^2(1+2e^{2\sigma_0})\varepsilon^{-2\gamma}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Amb (2.21) completem la fita de l'expressió (2.19): per a $\mu \le \mu_0$, $\exists\, b_1$ tal que

$$\|\partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}\left(H_1(0,\cdot,\cdot)\right)\|_{2,\sigma_0} \le \varepsilon\|\partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}\left(\varphi'\cos\tau\right)\|_{2,\sigma_0} + \mu\varepsilon^2\|\partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\rm o}\left(f\right)\|_{2,\sigma_0} \le \frac{1}{2}\,b_1\varepsilon^{2-2\gamma}.$$

Siguin $h_1,\ h_2 \in \mathcal{B}(b_1\varepsilon^{2-2\gamma})$, usant les propietats de la norma $\|\cdot\|_{2,\sigma_0}$ recollides al Lema 2.5 i la primera fita de (2.18),

$$\begin{aligned} \|H_1(h_1,\cdot,\cdot) - H_1(h_2,\cdot,\cdot)\|_{2,\sigma_0} &\le \frac{1}{8}\mu\|\cosh^2 u(h_1+h_2)(h_1-h_2)\|_{2,\sigma_0} + \\ &\quad +\varepsilon\mu\|\tanh u\cos\tau(h_1-h_2)\|_{2,\sigma_0} \le \\ &\le \mu\left[\frac{1}{8}\|h_1+h_2\|_{2,\sigma_0} + \varepsilon\|\tanh u\cos\tau\|_{\infty,\sigma_0}\right]\|h_1-h_2\|_{2,\sigma_0} \le \\ &\le \mu\left[\frac{1}{4}b_1\varepsilon^{2-2\gamma} + Ce^{\sigma_0}\varepsilon^{1-\gamma}\right]\|h_1-h_2\|_{2,\sigma_0}. \end{aligned}$$

Per tant, si anomenem $B_1 = \frac{1}{4}b_1 + Ce^{\sigma_0}$,

$$\|H_1(h_1,\cdot,\cdot) - H_1(h_2,\cdot,\cdot)\|_{2,\sigma_0} \le \mu\varepsilon^{1-\gamma}B_1\|h_1-h_2\|_{2,\sigma_0}. \qquad \blacksquare$$

Tenim ara totes les eines necessàries per poder demostrar el Teorema 2.1 que havíem enunciat al principi del capítol.

Demostració del Teorema 2.1. Recordem que usarem la funció

$$Q^- = \mu^{-1}\big(T^- - T_0 - \varepsilon T_1\big) = \mu^{-1}\big(\overline{T}^- - T_0\big)$$

definida a (2.4). Per a un cert $\delta \in (0,1)$, ens interessarà separar-nos una distància $\delta\varepsilon^\gamma$ de la frontera de D^u_γ per poder tenir la fita de $\partial_u(\partial_u Q^-)$ a partir de la que trobarem per a $\partial_u Q^-$, per tant, el que farem és començar amb el domini D^u_γ ampliat $\delta\varepsilon^\gamma$ i així, al final, els resultats seran tots vàlids a D^u_γ; el domini resultant per l'ampliació pot escriure's de la mateixa manera que D^u_γ però canviant alguns paràmetres: de D^u_γ passem a

$$\begin{aligned}\widetilde{D^u_\gamma} &= \{u \in \mathbb{C} \,|\, u = \tilde{u}_0 + te^{\pm i\beta},\ \forall\beta \in [0,\beta_0) \text{ i } t \in \mathbb{R}^-\} \cup \\ &\quad \cup\{u \in \mathbb{C} \,|\, u = \tilde{u}_1 + te^{\pm i\beta},\ \forall\beta \in [0,\beta_0) \text{ i } t \in \mathbb{R}^-,\ \Re e\, u \le -\tilde{a}\varepsilon^\gamma \sin\beta_0,\ |u \pm i\pi/2| > \tilde{a}\varepsilon^\gamma\},\end{aligned}$$

definint $\tilde{a} = a - \delta$, $\tilde{u}_0 = u_0 + \frac{\delta\varepsilon^\gamma}{\sin\beta_0}$ i $\tilde{u}_1 = u_1 + \frac{\delta\varepsilon^\gamma}{\sin\beta_0}$. A la Figura 2.2 es pot veure el resultat de l'ampliació.

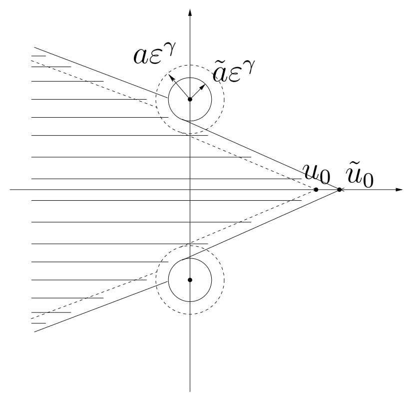


Figura 2.2: Domini ampliat $\widetilde{D^u_\gamma}$.

Notarem per $\widetilde{\mathcal{E}}_{2,\sigma_0}$ i $\widetilde{\mathcal{DE}}_{2,\sigma_0}$ els espais $\mathcal{E}_{2,\sigma_0}$ i $\mathcal{DE}_{2,\sigma_0}$ respectivament, però canviant el domini D^u_γ pel $\widetilde{D^u_\gamma}$. Tots els resultats obtinguts fins ara seran aplicats al domini $\widetilde{D^u_\gamma}$ i als espais $\widetilde{\mathcal{E}}_{2,\sigma_0}$ i $\widetilde{\mathcal{DE}}_{2,\sigma_0}$.

Usant els operadors L_ε i H_1 definits a (2.10) i (2.17) respectivament, l'Equació de Q^- trobada a (2.5) pot expressar-se com:

$$L_\varepsilon Q(u,\tau) = H_1(\partial_u Q, u, \tau) \tag{2.22}$$

amb condició per a Q^- donada a (2.6):

$$\lim_{\Re e\, u \to -\infty} \big(\cosh u\, \partial_u Q^-(u,\tau)\big) = 0. \tag{2.23}$$

Afegint la condició que Q^- no tingui termes independents de les variables u i τ, ja vam justificar a la Secció 1.4 que aquest problema té una única solució.

Per resoldre (2.22), primer resoldrem $h(u,\tau) = \partial_u \mathcal{G}^\circ_\varepsilon(H_1(h,u,\tau))$ trobant un punt fix de l'operador:

$$\mathcal{F}(h)(u,\tau) := \partial_u \mathcal{G}^\circ_\varepsilon(H_1(h,u,\tau)) \tag{2.24}$$

i veurem que els punts fixos de $\mathcal{F}$ es correspondran amb les derivades respecte u de les solucions de l'Equació (2.22).

Gràcies a la propietat 1 del Lema 2.9, $\forall h \in \widetilde{\mathcal{E}}_{2,\sigma_0}$, sabem que $H_1(h,\cdot,\cdot) \in \widetilde{\mathcal{E}}_{2,\sigma_0}$, aleshores, el Lema 2.8 ens assegura que $\partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon H_1(h,\cdot,\cdot) \in \widetilde{\mathcal{E}}_{2,\sigma_0}$. Així doncs, l'operador $\mathcal{F}$ està definit de $\widetilde{\mathcal{E}}_{2,\sigma_0}$ en ell mateix.

Comprovant que, per a un cert radi r, $\mathcal{F}(0) \in \mathcal{B}(r)$ i que $\mathcal{F}$ és una contracció a $\mathcal{B}(r)$, aplicarem el Teorema del Punt Fix.

Per la propietat 2 del Lema 2.9, $\exists b_1 > 0$ tal que

$$\|\mathcal{F}(0)\|_{2,\sigma_0} = \|\partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(H_1(0,\cdot,\cdot))\|_{2,\sigma_0} \leq \frac{1}{2} b_1 \varepsilon^{2-2\gamma}.$$

Siguin $h_1,\, h_2 \in \mathcal{B}(b_1\varepsilon^{2-2\gamma})$, pel Lema 2.8 i la propietat 3 del Lema 2.9, $\exists A_1, B_1 > 0$ tals que,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)\|_{2,\sigma_0} &= \|\partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(H_1(h_1,\cdot,\cdot)) - \partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(H_1(h_2,\cdot,\cdot))\|_{2,\sigma_0} = \\
&= \|\partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\left(H_1(h_1,\cdot,\cdot) - H_1(h_2,\cdot,\cdot)\right)\|_{2,\sigma_0} \leq \\
&\leq A\|H_1(h_1,\cdot,\cdot) - H_1(h_2,\cdot,\cdot)\|_{2,\sigma_0} \leq A_1 \mu \varepsilon^{1-\gamma} B_1 \|h_1 - h_2\|_{2,\sigma_0}.
\end{aligned}$$

Si $\mu\varepsilon^{1-\gamma} A_1\, B_1 \leq 1/2$, aleshores $\|\mathcal{F}(h_1) - \mathcal{F}(h_2)\|_{2,\sigma_0} \leq \frac{1}{2}\, \|h_1 - h_2\|_{2,\sigma_0}$. La qual cosa, per a $h \in \mathcal{B}(b_1\varepsilon^{2-2\gamma})$, ens porta a:

$$\|\mathcal{F}(h)\|_{2,\sigma_0} \leq \|\mathcal{F}(h) - \mathcal{F}(0)\|_{2,\sigma_0} + \|\mathcal{F}(0)\|_{2,\sigma_0} \leq \frac{1}{2}\|h\|_{2,\sigma_0} + \frac{1}{2} b_1 \varepsilon^{2-2\gamma} \leq b_1 \varepsilon^{2-2\gamma}.$$

Per tant, si $\mu\varepsilon^{1-\gamma}$ és suficientment petit, $\mathcal{F}$ és una contracció de $\mathcal{B}(b_1\varepsilon^{2-2\gamma}) \subset \widetilde{\mathcal{E}}_{2,\sigma_0}$ en ella mateixa i el Teorema del Punt Fix ens assegura que existeix una única $h^- \in \mathcal{B}(b_1\varepsilon^{2-2\gamma}) \subset \widetilde{\mathcal{E}}_{2,\sigma_0}$ tal que

$$h^-(u,\tau) = \partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(H_1(h^-,u,\tau)). \tag{2.25}$$

A partir d'aquesta funció h^-, definim

$$Q^-(u,\tau) = \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(H_1(h^-,u,\tau))$$

i, per (2.25), tenim que $h^- = \partial_u Q^-$, per la qual cosa $Q^-(u,\tau) = \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(H_1(\partial_u Q^-,u,\tau))$ i usant que $L_\varepsilon \circ \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon = \mathrm{Id}$,

$$L_\varepsilon Q^-(u,\tau) = H_1(\partial_u Q^-,u,\tau).$$

A més, com que $\partial_u Q^- = h^- \in \widetilde{\mathcal{E}}_{2,\sigma_0}$, aleshores $\lim_{\Re e\, u \to -\infty} \big(\cosh u \cdot \partial_u Q^-(u,\tau)\big) = 0$. Així doncs hem resolt el problema (2.22)-(2.23).

Pel que fa a la fita de $\partial_u Q^-$, arribem immediatament al resultat que volíem:

$$\|\partial_u Q^-\|_{2,\sigma_0} = \|h^-\|_{2,\sigma_0} \leq b_1 \varepsilon^{2-2\gamma}.$$

Ara, a partir de $\partial_u Q^-$ i usant la Propietat 3 de $\|\cdot\|_{2,\sigma_0}$ recollida al Lema 2.5, si fem una reducció $\delta\varepsilon^\gamma$ del domini $\widetilde{D^u_\gamma}$, aleshores $\exists\, \delta_0 \in (0,1/3)$ tal que podem trobar una fita de $\partial^2_u Q^-$ al domini reduït:

$$\|\partial^2_u Q^-(u,\tau)\|^{(1)}_{2,\sigma_0} \leq \frac{\|\partial_u Q^-\|_{2,\sigma_0}}{\delta_0 \varepsilon^\gamma} \leq \frac{b_1 \varepsilon^{2-2\gamma}}{\delta_0 \varepsilon^\gamma} = \delta_0^{-1} b_1 \varepsilon^{2-3\gamma}.$$

Però una reducció de mida $\delta\varepsilon^\gamma$ de $\widetilde{D^u_\gamma}$ ens porta a D^u_γ, per tant, prenent com a b_0 el màxim dels coeficients de les tres fites, obtenim els resultats enunciats per a T^-. ■

Observi's que, per la definició que hem fet de Q^- i les propietats de l'operador $\mathcal{G}^o_\varepsilon$, podem obtenir també una fita de Q^- al domini $D^u_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$. Vegem de quin termes consta $\mathcal{G}^o_\varepsilon(H_1(h^-,u,\tau))$:

$$\begin{aligned} Q^-(u,\tau) = \mathcal{G}^o_\varepsilon(H_1(h^-,u,\tau)) &= \mathcal{G}^o_\varepsilon(H_1(0,u,\tau)) + \Big(\mathcal{G}^o_\varepsilon(H_1(h^-,u,\tau)) - \mathcal{G}^o_\varepsilon(H_1(0,u,\tau))\Big) = \\ &= \mathcal{G}^o_\varepsilon(H_1(0,u,\tau)) + \mathcal{G}^o_\varepsilon\big(H_1(h^-,u,\tau) - H_1(0,u,\tau)\big). \end{aligned}$$

Ara bé, de la definició (2.17) de l'operador H_1,

$$H_1(0,u,\tau) = \quad -\varepsilon\varphi'(u)\cos\tau - \varepsilon^2\mu f_1(u) - \varepsilon^2\mu f_1(u)\cos(2\tau), \tag{2.26}$$

$$H_1(h^-,u,\tau) - H_1(0,u,\tau) = \quad -\mu\tfrac{1}{8}\cosh^2 u(h^-(u,\tau))^2 + \varepsilon\mu\tanh u\cos\tau\, h^-(u,\tau). \tag{2.27}$$

Per al cas (2.26), la linealitat del $\mathcal{G}^o_\varepsilon$, l'Apartat 3a del Lema 2.8 quan hi ha mitjana nul·la i les fites trobades a (2.18), ens porten a:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}^o_\varepsilon(H_1(0,\cdot,\cdot))\|_{2,\sigma_0} &\le \varepsilon\|\mathcal{G}^o_\varepsilon(\varphi'\cdot\cos\tau)\|_{2,\sigma_0} + \varepsilon^2\mu\|\mathcal{G}^o_\varepsilon(f_1)\|_{2,\sigma_0} + \varepsilon^2\mu\|\mathcal{G}^o_\varepsilon(f_1\cdot\cos(2\tau))\|_{2,\sigma_0} \le \\ &\le \varepsilon A_1\varepsilon\|\varphi'\cdot\cos\tau\|_{2,\sigma_0} + \varepsilon^2\mu\|\mathcal{G}^o_\varepsilon(f_1)\|_{2,\sigma_0} + \varepsilon^2\mu A_1\varepsilon\|f_1\cdot\cos(2\tau)\|_{2,\sigma_0} \le \\ &\le 4A_1Ce^{\sigma_0}\varepsilon^{2-\gamma} + \varepsilon^2\mu\|\mathcal{G}^o_\varepsilon(f_1)\|_{2,\sigma_0} + \mu A_1C^2e^{\sigma_0}\varepsilon^{3-2\gamma}. \end{aligned}$$

El terme $\|\mathcal{G}^o_\varepsilon(f_1)\|_{2,\sigma_0}$ cal estudiar-lo especialment per poder tenir una fita el més acurada possible:

$$\|\mathcal{G}^o_\varepsilon(f_1)\|_{2,\sigma_0} = \left|\int_{\mathbb{R}^-} \frac{\sinh^2(u+t)}{\cosh^4(u+t)}\,dt\cosh^2 u\right| \le \int_{\mathbb{R}^-}\left|\frac{\sinh^2(u+t)}{\cosh^2(u+t)}\cdot\frac{\cosh^2 u}{\cosh^2(u+t)}\right|dt$$

i els Apartats 2 i 6 del Lema 2.4 ens donen:

$$\|\mathcal{G}^o_\varepsilon(f_1)\|_{2,\sigma_0} \le C^3\varepsilon^{-\gamma}.$$

Per tant, $\exists\, k_0 > 0$ tal que

$$\|\mathcal{G}^o_\varepsilon(H_1(0,\cdot,\cdot))\|_{2,\sigma_0} \le \big(4A_1Ce^{\sigma_0} + \mu C^3 + \mu A_1C^2e^{\sigma_0}\varepsilon^{1-\gamma}\big)\varepsilon^{2-\gamma} \le k_0\varepsilon^{2-\gamma}. \tag{2.28}$$

Pel que fa a (2.27), la linealitat del $\mathcal{G}^o_\varepsilon$, la primera part de l'Apartat 3a del Lema 2.8 i les propietats de la norma $\|\cdot\|_{2,\sigma_0}$ recollides al Lema 2.5, ens permeten reduir aquesta expressió a:

$$\|\mathcal{G}^o_\varepsilon\big(H_1(h^-,\cdot,\cdot) - H_1(0,\cdot,\cdot)\big)\|_{2,\sigma_0} \le \ \mu A_1\|h^-\|_{2,\sigma_0}\left(\frac{1}{8}\|h^-\|_{2,\sigma_0} + \varepsilon\|\tanh u\cos\tau\|_{\infty,\sigma_0}\right),$$

on usarem que $h^- \in \mathcal{B}(b_1\varepsilon^{2-2\gamma})$ i la fita trobada a (2.18): $\exists\, k_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}^o_\varepsilon\big(H_1(h^-,\cdot,\cdot) - H_1(0,\cdot,\cdot)\big)\|_{2,\sigma_0} &\le \mu A_1b_1\varepsilon^{2-2\gamma}\left(\frac{1}{8}\,b_1\varepsilon^{2-2\gamma} + \varepsilon C\varepsilon^{-\gamma}e^{\sigma_0}\right) = \\ &= \mu A_1b_1\varepsilon^{3-3\gamma}\left(\frac{1}{8}\,b_1\varepsilon^{1-\gamma} + Ce^{\sigma_0}\right) \le k_1\varepsilon^{3-3\gamma}. \end{aligned}$$

Aquest resultat, junt amb (2.28), ens porta a:

$$\|Q^-\|_{2,\sigma_0} \le k_0\varepsilon^{2-\gamma} + k_1\varepsilon^{3-3\gamma}$$

i, si volguéssim fer servir que Q^- fos d'ordre $\varepsilon^{2-\gamma}$, caldria demanar que $\gamma < 1/2$.

2.3 Demostració del Teorema 2.3.

Hem de demostrar primer que existeix una única solució $f_2(\tau)$ 2π-periòdica de l'equació de l'enunciat. Per poder-ho fer, vegem primer un lema tècnic.

Lema 2.10. *Siguin $\mu > 0$ i $0 < \varepsilon < 1$. $\forall\, \tau \in \mathbb{T}_{\sigma_0}$ definim les funcions:*

$$\begin{aligned}
I(\tau) &:= \int_0^\tau e^{2\varepsilon s} h(s)\, ds, \text{ amb } h(s) \text{ real-analítica i } 2\pi\text{-periòdica,}\\
I_1(\tau) &:= 2\varepsilon \int_0^\tau e^{2\varepsilon s} \cos s\, ds = \frac{2\varepsilon}{1+4\varepsilon^2} e^{2\varepsilon\tau}\big(2\varepsilon\cos\tau + \sin\tau\big) - \frac{4\varepsilon^2}{1+4\varepsilon^2},\\
I_2(\tau) &:= \varepsilon^2\mu \int_0^\tau e^{2\varepsilon s} \cos^2 s\, ds = \mu\frac{\varepsilon}{4(1+\varepsilon^2)} e^{2\varepsilon\tau}\big(1+\varepsilon^2+\varepsilon^2\cos(2\tau)+\varepsilon\sin(2\tau)\big) - \mu\frac{\varepsilon(1+2\varepsilon^2)}{4(1+\varepsilon^2)}.
\end{aligned}$$

Aleshores tenim les següents propietats:

1. $I(\tau+2\pi) = I(2\pi) + e^{4\pi\varepsilon} I(\tau)$.
2. $I_1(2\pi) = \dfrac{4\varepsilon^2}{1+4\varepsilon^2}(e^{4\pi\varepsilon}-1)$ *i* $\left| I_1(\tau) + \dfrac{4\varepsilon^2}{1+4\varepsilon^2}\right| \le 6 e^{\sigma_0}\varepsilon e^{2\varepsilon\,\Re e\,\tau}$.
3. $I_2(2\pi) = \mu\dfrac{\varepsilon(1+2\varepsilon^2)}{4(1+\varepsilon^2)}\left(e^{4\pi\varepsilon}-1\right)$ *i* $\left| I_2(\tau) + \mu\dfrac{\varepsilon(1+2\varepsilon^2)}{4(1+\varepsilon^2)}\right| \le \mu\dfrac{1}{4}\left(1+2e^{2\sigma_0}\right)\varepsilon e^{2\varepsilon\,\Re e\,\tau}$.

Demostració. En el primer apartat farem un canvi del camí d'integració, fent primer de 0 a 2π i després de 2π a $\tau+2\pi$. La periodicitat de h serà fonamental:

$$\begin{aligned}
I(\tau+2\pi) &= \int_0^{\tau+2\pi} e^{2\varepsilon s} h(s)\, ds = \int_0^{2\pi} e^{2\varepsilon s} h(s)\, ds + \int_{2\pi}^{\tau+2\pi} e^{2\varepsilon s} h(s)\, ds =\\
&= I(2\pi) + \int_0^\tau e^{2\varepsilon(t+2\pi)} h(t+2\pi)\, dt =\\
&= I(2\pi) + e^{4\pi\varepsilon}\int_0^\tau e^{2\varepsilon t} h(t)\, dt = I(2\pi) + e^{4\pi\varepsilon} I(\tau).
\end{aligned}$$

La primera propietat dels dos últims apartats es demostra senzillament substituint τ per 2π. Pel que fa a les altres propietats, farem servir que $0 < \mu \le \mu_0$, que $0 < \varepsilon < 1$ i que, a $\mathbb{T}_{\sigma_0}$, $|e^{ik\tau}| \le e^{k\sigma_0}$:

$$\begin{aligned}
\left| I_1(\tau) + \frac{4\varepsilon^2}{1+4\varepsilon^2}\right| &\le \frac{2\varepsilon}{1+4\varepsilon^2} e^{2\varepsilon\,\Re e\,\tau}\big(2\varepsilon e^{\sigma_0} + e^{\sigma_0}\big) \le \frac{2\varepsilon(2\varepsilon+1)}{1+4\varepsilon^2} e^{\sigma_0} e^{2\varepsilon\,\Re e\,\tau} \le 6 e^{\sigma_0}\varepsilon e^{2\varepsilon\,\Re e\,\tau},\\
\left| I_2(\tau) + \mu\frac{\varepsilon(1+2\varepsilon^2)}{4(1+\varepsilon^2)}\right| &\le \mu\frac{\varepsilon}{4(1+\varepsilon^2)} e^{2\varepsilon\,\Re e\,\tau}\big(1+\varepsilon^2+\varepsilon^2 e^{2\sigma_0} + \varepsilon e^{2\sigma_0}\big) \le\\
&\le \mu\frac{\varepsilon}{4} e^{2\varepsilon\,\Re e\,\tau}\Big(1 + \frac{\varepsilon^2+\varepsilon}{1+\varepsilon^2} e^{2\sigma_0}\Big) \le \mu\frac{1}{4}\left(1+2e^{2\sigma_0}\right)\varepsilon e^{2\varepsilon\,\Re e\,\tau}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 2.11. *Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \mu \leq \mu_0$ i $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, l'equació diferencial*

$$\varepsilon^{-1} f'(\tau) + 2f(\tau) + 2\varepsilon\mu \cos\tau\, f(\tau) + \mu f(\tau)^2 + 2\varepsilon \cos\tau + \varepsilon^2 \mu \cos^2\tau = 0 \tag{2.29}$$

té una única solució real-analítica $f_2(\tau)$ definida a $\mathbb{T}_{\sigma_0}$ i, a més, $\exists \alpha_1$ tal que

$$\|f_2\|_\infty \leq \alpha_1 \varepsilon^2.$$

Demostració. Si definim la funció

$$F(\tau, z) := 2\varepsilon\mu \cos\tau\, z + \mu z^2 + 2\varepsilon \cos\tau + \varepsilon^2 \mu \cos^2\tau,$$

que és real-analítica en les dues variables i 2π-periòdica en τ, l'Equació (2.29) pot escriure's com:

$$f'(\tau) = -2\varepsilon f(\tau) - \varepsilon F(\tau, f(\tau)). \tag{2.30}$$

Pot comprovar-se fàcilment que $f(\tau)$ és una solució de (2.30) si i només si

$$f(\tau) = e^{-2\varepsilon\tau} \left[-\varepsilon I(\tau) + c_0\right], \tag{2.31}$$

on c_0 és una constant arbitrària i hem usat la notació del lema anterior per a $I(\tau)$ amb $h(s) = F(s, f(s))$, que és 2π-periòdica sempre que ho sigui $f(s)$. En imposar la 2π-periodicitat de la solució, i usant la primera propietat del Lema 2.10, la constant c_0 quedarà totalment determinada:

$$\begin{array}{rcl}
f(\tau + 2\pi) & = & e^{-2\varepsilon(\tau+2\pi)} \left[-\varepsilon I(\tau + 2\pi) + c_0\right] = e^{-2\varepsilon\tau} e^{-4\pi\varepsilon} \left[-\varepsilon I(2\pi) - \varepsilon e^{4\pi\varepsilon} I(\tau) + c_0\right] = \\
 & = & e^{-2\varepsilon\tau} \left[-\varepsilon e^{-4\pi\varepsilon} I(2\pi) - \varepsilon I(\tau) + e^{-4\pi\varepsilon} c_0\right] = f(\tau) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & & c_0 = -\varepsilon \dfrac{1}{e^{4\pi\varepsilon} - 1} I(2\pi).
\end{array}$$

Així doncs, per trobar la solució 2π-periòdica de (2.29), aplicarem el Teorema del Punt Fix sobre $\mathcal{B}(r)$ una bola tancada de radi r de l'espai de Banach

$$\mathcal{X} := \{f(\tau) \,|\, f : \mathbb{T}_{\sigma_0} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{real-analítica}, \ \|f\|_\infty < +\infty\}$$

i usant l'operador definit com la part dreta de (2.31) amb la c_0 trobada:

$$\mathcal{F}(f)(\tau) := -\varepsilon e^{-2\varepsilon\tau} \left[\int_0^\tau e^{2\varepsilon s} F(s, f(s))\, ds + \frac{1}{e^{4\pi\varepsilon} - 1} \int_0^{2\pi} e^{2\varepsilon s} F(s, f(s))\, ds\right]. \tag{2.32}$$

Està clar que si f és real-analítica i 2π-periòdica, $\mathcal{F}(f)$ també ho és. Per la continuïtat de $e^{2\varepsilon s} F(s, f(s))$ a $[0, 2\pi] \times i[-\sigma_0, \sigma_0]$ i la 2π-periodicitat de $\mathcal{F}(f)$, podem deduir que $|\mathcal{F}(f)(\tau)|$ està fitat a tot el domini $\mathbb{T}_{\sigma_0}$. Per tant, l'operador $\mathcal{F}$ està definit de $\mathcal{X}$ en ell mateix. Cal demostrar ara que és una contracció a $\mathcal{B}(r)$ per a una r adequada.

Com que $F(s,0) = 2\varepsilon\cos s + \varepsilon^2\mu\cos^2 s$, podem expressar $\mathcal{F}(0)(\tau)$ en termes de les funcions $I_1(\tau)$ i $I_2(\tau)$ del Lema 2.10 i usar-ne les seves propietats:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}(0)(\tau)| &= \varepsilon e^{-2\varepsilon\,\Re e\,\tau}\left|I_1(\tau)+I_2(\tau)+\frac{1}{e^{4\pi\varepsilon}-1}\big(I_1(2\pi)+I_2(2\pi)\big)\right| = \\
&= \varepsilon e^{-2\varepsilon\,\Re e\,\tau}\left|I_1(\tau)+I_2(\tau)+\frac{4\varepsilon^2}{1+4\varepsilon^2}+\mu\frac{\varepsilon(1+2\varepsilon^2)}{4(1+\varepsilon^2)}\right| \le \\
&\le \varepsilon e^{-2\varepsilon\,\Re e\,\tau}\left(6e^{\sigma_0}\varepsilon e^{2\varepsilon\,\Re e\,\tau}+\mu_0\frac{1}{4}\left(1+2e^{2\sigma_0}\right)\varepsilon e^{2\varepsilon\,\Re e\,\tau}\right) = \left(6e^{\sigma_0}+\mu_0\frac{1}{4}\left(1+2e^{2\sigma_0}\right)\right)\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

O sigui, que $\exists\,\alpha_1 = 12e^{\sigma_0}+\mu_0\frac{1}{2}\left(1+2e^{2\sigma_0}\right)$ tal que

$$\|\mathcal{F}(0)\|_\infty \le \frac{1}{2}\,\alpha_1\varepsilon^2.$$

Siguin $f(\tau), \overline{f}(\tau) \in \mathcal{B}(\alpha_1\varepsilon^2) \subset \mathcal{X}$ i volem fitar $\mathcal{F}(f)(\tau) - \mathcal{F}(\overline{f})(\tau)$. Cal fer doncs un estudi de la integral de $e^{2\varepsilon s}\big(F(s,f(s)) - F(s,\overline{f}(s))\big)$. L'analiticitat d'aquesta funció ens permet fer la integral seguint el camí format pel segment $s = i\xi$ per a $\xi \in [0, \Im m\,\tau]$ i el segment $s = \xi + i\,\Im m\,\tau$ per a $\xi \in [0, \Re e\,\tau]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau e^{2\varepsilon s}\big(F(s,f(s))-F(s,\overline{f}(s))\big)\,ds =& i\int_0^{\Im m\,\tau} e^{2\varepsilon i\xi}\big(F(\cdot,f(\cdot))-F(\cdot,\overline{f}(\cdot))\big)(i\xi)\,d\xi + \\
&+\int_0^{\Re e\,\tau} e^{2\varepsilon(\xi+i\,\Im m\,\tau)}\big(F(\cdot,f(\cdot))-F(\cdot,\overline{f}(\cdot))\big)(\xi+i\,\Im m\,\tau)\,d\xi.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Però, com que

$$F(s,f(s)) - F(s,\overline{f}(s)) = 2\varepsilon\mu\cos s\cdot(f(s)-\overline{f}(s)) + \mu(f(s)+\overline{f}(s))(f(s)-\overline{f}(s))$$

i $f, \overline{f} \in \mathcal{B}(\alpha_1\varepsilon^2)$, aleshores

$$\begin{aligned}
|F(s,f(s)) - F(s,\overline{f}(s))| &\le 2\varepsilon\mu e^{\sigma_0}\|f-\overline{f}\|_\infty + \mu 2\alpha_1\varepsilon^2\|f-\overline{f}\|_\infty \le \\
&\le \mu\varepsilon 2\left(e^{\sigma_0}+\alpha_1\right)\|f-\overline{f}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Tornant amb aquesta informació a (2.33),

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\tau e^{2\varepsilon s}\big(F(s,f(s))-F(s,\overline{f}(s))\big)\,ds\right| &\le \\
&\le \mu\varepsilon 2\left(e^{\sigma_0}+\alpha_1\right)\|f-\overline{f}\|_\infty\left(\left|\int_0^{\Im m\,\tau} 1\,d\xi\right| + \left|\int_0^{\Re e\,\tau} e^{2\varepsilon\xi}\,d\xi\right|\right) = \\
&= \mu\varepsilon 2(e^{\sigma_0}+\alpha_1)\|f-\overline{f}\|_\infty\left(|\,\Im m\,\tau| + \frac{1}{2\varepsilon}\left|e^{2\varepsilon\,\Re e\,\tau}-1\right|\right).
\end{aligned}$$

Recordem que $|\,\Im m\,\tau| \le \sigma_0$ i que, per la periodicitat de $\mathcal{F}(f)(\tau) - \mathcal{F}(\overline{f})(\tau)$, només cal considerar $0 \le \Re e\,\tau \le 2\pi$. Aleshores, la primera integral de $\mathcal{F}(f)(\tau) - \mathcal{F}(\overline{f})(\tau)$ podem fitar-la per:

$$\mu\varepsilon 2(e^{\sigma_0}+\alpha_1)\|f-\overline{f}\|_\infty\left(\sigma_0 + \frac{1}{2\varepsilon}(e^{2\varepsilon\,\Re e\,\tau}-1)\right) = \mu(e^{\sigma_0}+\alpha_1)\left(2\varepsilon\sigma_0 + e^{2\varepsilon\,\Re e\,\tau}-1\right)\|f-\overline{f}\|_\infty$$

i la segona integral per:

$$\mu\varepsilon 2(e^{\sigma_0}+\alpha_1)\|f-\overline{f}\|_\infty \frac{1}{2\varepsilon}(e^{4\pi\varepsilon}-1)=\mu(e^{\sigma_0}+\alpha_1)(e^{4\pi\varepsilon}-1)\|f-\overline{f}\|_\infty.$$

A partir d'aquests dos resultats, i recordant que $\Re e\,\tau\geq 0$,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(f)-\mathcal{F}(\overline{f})\|_\infty &\leq \\ &\leq \varepsilon e^{-2\varepsilon\,\Re e\,\tau}\mu(e^{\sigma_0}+\alpha_1)\left(2\varepsilon\sigma_0+e^{2\varepsilon\,\Re e\,\tau}-1+\frac{1}{e^{4\pi\varepsilon}-1}\left(e^{4\pi\varepsilon}-1\right)\right)\|f-\overline{f}\|_\infty= \\ &= \varepsilon\mu(e^{\sigma_0}+\alpha_1)\left(2\varepsilon\sigma_0 e^{-2\varepsilon\,\Re e\,\tau}+1\right)\|f-\overline{f}\|_\infty\leq\varepsilon\mu(e^{\sigma_0}+\alpha_1)\left(2\sigma_0+1\right)\|f-\overline{f}\|_\infty.\end{aligned}$$

Si $\varepsilon\mu$ és suficientment petit, $\varepsilon\mu(e^{\sigma_0}+\alpha_1)\left(2\sigma_0+1\right)\leq 1/2$ i podem demostrar que, $\forall\, a\in\mathcal{B}(\alpha_1\varepsilon^2)$, $\mathcal{F}(a)\in\mathcal{B}(\alpha_1\varepsilon^2)$:

$$\|\mathcal{F}(a)\|_\infty\leq\|\mathcal{F}(a)-\mathcal{F}(0)\|_\infty+\|\mathcal{F}(0)\|_\infty\leq\frac{1}{2}\|a-0\|_\infty+\frac{1}{2}\,\alpha_1\varepsilon^2\leq\alpha_1\varepsilon^2.$$

Així doncs, $\mathcal{F}$ és una contracció de $\mathcal{B}(\alpha_1\varepsilon^2)$ en ella mateixa i, en aquesta situació, el Teorema del Punt Fix ens assegura que:

$$\exists!\, f_2\in\mathcal{B}(\alpha_1\varepsilon^2)\ \text{ tal que }\ f_2=\mathcal{F}(f_2)$$

i hem arribat al resultat de l'enunciat. ∎

Un cop conegudes les propietats de $f_2(\tau)$, per tal d'acabar de demostrar el Teorema 2.3, ens anirà bé definir una nova norma de Fourier:

$$\llbracket h\rrbracket_{4,\sigma_0}:=\sum_k\llbracket h^{[k]}\rrbracket_4\, e^{|k|\sigma_0}\qquad\text{amb}\qquad\llbracket h^{[k]}\rrbracket_4:=\sup_{u\in\{\Re e\,u<-U\}}\left|e^{-4u}\cdot h^{[k]}(u)\right|$$

i, fixada una constant $U>0$, l'àlgebra de Banach

$$\mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}:=\{h(u,\tau)\mid h:\{\Re e\,u<-U\}\times\mathbb{T}_{\sigma_0}\longrightarrow\mathbb{C}\ \text{ real-analítica, }\ \llbracket h\rrbracket_{4,\sigma_0}<+\infty\},\qquad(2.34)$$

on una bola de radi $r>0$ serà:

$$\mathcal{B}(r):=\{h(u,\tau)\in\mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}\mid\llbracket h\rrbracket_{4,\sigma_0}\leq r\}.$$

No és una norma multiplicativa, però té les propietats recollides en el següent lema:

Lema 2.12. *Si totes les normes que apareixen en les següents expressions estan ben definides, aleshores*

1. $\llbracket f\cdot g\rrbracket_{4,\sigma_0}\leq\|f\|_\infty\llbracket g\rrbracket_{4,\sigma_0}$.
2. $\llbracket e^{-4u}f\cdot g\rrbracket_{4,\sigma_0}\leq\llbracket f\rrbracket_{4,\sigma_0}\llbracket g\rrbracket_{4,\sigma_0}$.
3. $\llbracket f\cdot g\rrbracket_{4,\sigma_0}\leq e^{-4U}\llbracket f\rrbracket_{4,\sigma_0}\llbracket g\rrbracket_{4,\sigma_0}$.
4. $h\in\mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}\Rightarrow\ \forall 0\leq s<4,\ \lim_{\Re e\,u\to-\infty}e^{-s\,u}h(u,\tau)=0$ *i la integral* $\int_{-\infty}^u h(v,\tau)\,dv$ *existeix. En particular,* $\lim_{\Re e\,u\to-\infty}h^{[k]}(u)=0$.

Demostració. La demostració és molt senzilla: només cal usar la definició que s'ha fet de la norma $\llbracket\cdot\rrbracket_{4,\sigma_0}$. ■

En aquest nou espai tenim resultats anàlegs als Lemes 2.6, 2.7 i 2.8.

Lema 2.13. *Si $h \in \mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}$, aleshores*

$$\partial_u \int_{\mathbb{R}^-} h(u+t,\tau)\,dt = \int_{\mathbb{R}^-} \partial_u h(u+t,\tau)\,dt = h(u,\tau).$$

$$\partial_u \int_{\mathbb{R}^-} h(u+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^-} \partial_u h(u+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\,dt.$$

Demostració. Anàloga a la del Lema 2.6. ■

Lema 2.14. *L'operador ∂_u^{-1} definit a (2.9) com*

$$\partial_u^{-1} h(u,\tau) = \int_{\mathbb{R}^-} h(u+t,\tau)\,dt$$

va de $\mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}$ a $\mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}$ i $\partial_u \circ \partial_u^{-1} = Id$.

Demostració. Anàloga a la del Lema 2.7. ■

Lema 2.15. *L'operador $\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon$ definit a (2.11) com*

$$\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(h)(u,\tau) = \int_{\mathbb{R}^-} h(u+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\,dt$$

té les següents propietats:

1. *És lineal de $\mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}$ en $\mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}$.*
2. *$L_\varepsilon \circ \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon = Id$, on recordem que $L_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_u$.*
3. *Existeix $A_2 > 0$ tal que*

   a. *Si $< h >= 0$, $\llbracket \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(h)\rrbracket_{4,\sigma_0} \le A_2 \varepsilon \llbracket h \rrbracket_{4,\sigma_0}$.*

   b. *$\llbracket \partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(h)\rrbracket_{4,\sigma_0} \le A_2 \llbracket h \rrbracket_{4,\sigma_0}$.*

Demostració. Està clar que $\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon$ és lineal i que, si $h \in \mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}$, aleshores $\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(h)$ és real-analítica a $\{\Re e\, u < -U\} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$. Queda comprovar que $\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(h) \in \mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}$.

Treballarem com en el Lema 2.8: amb els harmònics i fent canvis de camins a les integrals. $g(u,\tau) = \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon(h)(u,\tau) = \sum_k g^{[k]}(u)\, e^{ik\tau}$ amb $h(u,\tau) = \sum_k h^{[k]}(u)\, e^{ik\tau}$, aleshores:

$$g^{[k]}(u) = \int_{-\infty}^{0} h^{[k]}(u+t) e^{ik\,\varepsilon^{-1} t}\,dt. \tag{2.35}$$

Pera $k \neq 0$,

$$\begin{aligned}\left|g^{[k]}(u)e^{-4u}\right| &\leq \llbracket h^{[k]} \rrbracket_4 \int_{-\infty}^{0} e^{|k|\varepsilon^{-1}\xi \sin(\beta_0/2)} e^{4\xi\cos(\beta_0/2)}\, d\xi \leq \\ &\leq \llbracket h^{[k]} \rrbracket_4 \int_{-\infty}^{0} e^{|k|\varepsilon^{-1}\xi \sin(\beta_0/2)}\, d\xi = \llbracket h^{[k]} \rrbracket_4 \frac{1}{\sin(\beta_0/2)} \frac{1}{|k|}\, \varepsilon.\end{aligned}$$

El cas $k = 0$ s'ha de tractar diferent:

$$\left|g^{[0]}(u)e^{-4u}\right| = \left|\int_{-\infty}^{0} h^{[0]}(u+t)\, e^{-4(u+t)} e^{4t}\, dt\right| \leq \llbracket h^{[0]} \rrbracket_4 \int_{-\infty}^{0} e^{4t}\, dt \leq \frac{1}{4}\, \llbracket h^{[0]} \rrbracket_4.$$

Com que $0 < \beta_0/2 < \pi/4$,

$$\frac{1}{4} < \sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}/2} < \sin^{-1}(\beta_0/2)$$

i aleshores

$$\llbracket \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_{\varepsilon}(h) \rrbracket_{4,\sigma_0} \leq \frac{1}{4} \llbracket h^{[0]} \rrbracket_4 + \sum_{k\neq 0} \llbracket h^{[k]} \rrbracket_4 \frac{1}{\sin(\beta_0/2)} \frac{1}{|k|}\, \varepsilon e^{|k|r} \leq \llbracket h \rrbracket_{4,\sigma_0}.$$

Resultat que també ens dóna la demostració de l'Apartat 3a.

El segon apartat ja el teníem al Lema 2.8. Ens queda doncs només demostrar l'Apartat 3b.

Tornant a la fórmula (2.35), i usant el Lema 2.13,

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\, g^{[k]}(u) &= \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{du}\, h^{[k]}(u+t) e^{ik\,\varepsilon^{-1}t}\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{d}{du}\, h^{[k]}(u+t) e^{ik\,\varepsilon^{-1}t} + ik\varepsilon^{-1} h^{[k]}(u+t) e^{ik\,\varepsilon^{-1}t}\right) dt - \\ &\quad -ik\varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{0} h^{[k]}(u+t) e^{ik\,\varepsilon^{-1}t}\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{dt}\, (h^{[k]}(u+t) e^{ik\,\varepsilon^{-1}t})\, dt - ik\varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^{0} h^{[k]}(u+t) e^{ik\,\varepsilon^{-1}t}\, dt = \\ &= h^{[k]}(u) - \lim_{t\to-\infty} \left(h^{[k]}(u+t) e^{ik\,\varepsilon^{-1}t}\right) - ik\varepsilon^{-1} g^{[k]}(u) = h^{[k]}(u) - ik\varepsilon^{-1} g^{[k]}(u)\end{aligned}$$

Per tant, $\forall\, k \neq 0$:

$$\left|\frac{d}{du}\, g^{[k]}(u) e^{-4u}\right| \leq |h^{[k]}(u) e^{-4u}| + |k|\varepsilon^{-1} |g^{[k]}(u) e^{-4u}| \leq \left(1 + \frac{1}{\sin(\beta_0/2)}\right) \llbracket h^{[k]} \rrbracket_4.$$

El cas $k = 0$ és més senzill:

$$\frac{d}{du}\, g^{[0]}(u) = \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{du}\, h^{[0]}(u+t)\, dt = h^{[0]}(u) - \lim_{t\to-\infty} h^{[0]}(u+t) = h^{[0]}(u).$$

Finalment,

$$\llbracket \partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_{\varepsilon}(h) \rrbracket_{4,\sigma_0} = \llbracket \partial_u g \rrbracket_{4,\sigma_0} \leq \left(1 + \frac{1}{\sin(\beta_0/2)}\right) \sum_{k} \llbracket h^{[k]} \rrbracket_4\, e^{|k|r} = \left(1 + \frac{1}{\sin(\beta_0/2)}\right) \llbracket h \rrbracket_{4,\sigma_0}. \qquad \blacksquare$$

Lema 2.16. *Sigui $U > 0$ suficientment gran. Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \mu \leq \mu_0$ i $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\forall h \in \mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}$ la fórmula*

$$\begin{array}{rcl} H_2(h,u,\tau) & := & -\mu\frac{\cosh^2 u}{8}\left(h(u,\tau)\right)^2 + \varepsilon\mu\tanh u\cos\tau\, h(u,\tau) - \mu 4\cosh^2 u\, f_2(\tau)\, e^{2u} h(u,\tau) \\ & & -\mu\left(32\cosh^2 u\, e^{4u} - 8e^{2u}\right) f_2^2(\tau) + \varepsilon\mu 16\left(\tanh u + 1\right)\cos\tau\, f_2(\tau)\, e^{2u} \\ & & -\varepsilon\left(\varphi'(u) - 16e^{2u}\right)\cos\tau - \varepsilon^2\mu\left(f(u,\tau) - 8\cos^2\tau\, e^{2u}\right) \end{array} \tag{2.36}$$

on $f_2(\tau)$ és la funció donada pel Lema 2.11, $\varphi(u) = 2/\cosh^2 u$ i $f(u,\tau) = \frac{\sinh^2 u}{\cosh^4 u}(1+\cos(2\tau))$, defineix un operador que té les propietats següents:

1. *$H_2(h,\cdot,\cdot) \in \mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}$.*
2. *Sigui $\mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon$ l'operador definit a (2.11), aleshores $\exists b_2 > 0$ tal que*
$$\llbracket \partial_u \mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon\left(H_2(0,\cdot,\cdot)\right)\rrbracket_{4,\sigma_0} \leq \frac{1}{2} b_2 \varepsilon^2.$$
3. *$\exists B_2 > 0$ tal que $\forall h_1,\, h_2 \in \mathcal{B}(b_2\varepsilon^2)$,*
$$\llbracket H_2(h_1,\cdot,\cdot) - H_2(h_2,\cdot,\cdot)\rrbracket_{4,\sigma_0} \leq \mu\varepsilon B_2 \llbracket h_1 - h_2\rrbracket_{4,\sigma_0}.$$

Demostració. Si $h \in \mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}$, usant les propietats de la norma $\llbracket\cdot\rrbracket_{4,\sigma_0}$,

$$\begin{array}{rcl} \llbracket H_2(h,\cdot,\cdot)\rrbracket_{4,\sigma_0} & \leq & \mu\frac{1}{8}\|\cosh^2 u\, e^{4u}\|_\infty \llbracket h\rrbracket^2_{4,\sigma_0} + \varepsilon\mu\|\tanh u\cos\tau\|_\infty\llbracket h\rrbracket_{4,\sigma_0} + \\ & & +\mu 4\|\cosh^2 u\, f_2\, e^{2u}\|_\infty \llbracket h\rrbracket_{4,\sigma_0} + \\ & & +\mu\llbracket 32\cosh^2 u\, e^{4u} - 8e^{2u}\rrbracket_{4,\sigma_0}\|f_2\|^2_\infty + \varepsilon\mu 16\llbracket(\tanh u+1)\, e^{2u}\rrbracket_{4,\sigma_0}\|\cos\tau\, f_2\|_\infty + \\ & & +\varepsilon\llbracket\varphi' - 16e^{2u}\rrbracket_{4,\sigma_0}\|\cos\tau\|_\infty + \varepsilon^2\mu\llbracket f - 8\cos^2\tau\, e^{2u}\rrbracket_{4,\sigma_0}. \end{array}$$

Estudiarem cadascun dels termes per trobar-ne una fita i poder concloure que $H_2(h,\cdot,\cdot) \in \mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}$. Sovint es farà ús del fet que $\|f_2\|_\infty \leq \alpha_1\varepsilon^2$ i que, a $\{\Re e\, u < -U\}$, podem trobar una constant c_1 tal que $|(1+e^{2u})^{-1}| \leq 1 + c_1 e^{-2U}$.

Dels termes que porten el factor $\llbracket h\rrbracket_{4,\sigma_0}$, només ens interessa saber si els seus coeficients estan fitats, i així és:

$$\begin{array}{rcl} \|\cosh^2 u\, e^{4u}\|_\infty & = & \frac{1}{4}\,\mathrm{màx}|(\mathrm{e}^{2\mathrm{u}}+1)^2\mathrm{e}^{2\mathrm{u}}| \leq \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-2\mathrm{U}}+1)^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{U}}, \\ \|\tanh u\cos\tau\|_\infty & \leq & e^{\sigma_0}(\tanh U)^{-1}, \\ \|\cosh^2 u\, f_2\, e^{2u}\|_\infty & \leq & \alpha_1\varepsilon^2\frac{1}{4}\,\mathrm{màx}|(\mathrm{e}^{2\mathrm{u}}+1)^2| \leq \alpha_1\varepsilon^2\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-2\mathrm{U}}+1)^2. \end{array} \tag{2.37}$$

Pel que fa als altres termes, observem que corresponen a $H_2(0,\cdot,\cdot)$, a qui més endavant haurem d'aplicar l'operador $\mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon$, per tant, a part de comprovar que estan fitats, ens interessarà conservar-ne la fita en funció de u, a excepció dels termes on apareix φ' i f que, en ser explícits, se'n farà un procés més acurat per millorar-ne la fita.

$$\begin{array}{rl} |32\cosh^2 u\, e^{4u} - 8e^{2u}| = & |32\frac{1}{4}(e^{2u}+1)^2 e^{2u} - 8e^{2u}| \leq 8(2+e^{-2U})e^{4\Re e\, u} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \llbracket 32\cosh^2 u\, e^{4u} - 8e^{2u}\rrbracket_{4,\sigma_0} \leq 8(2+e^{-2U}) \\ |(\tanh u + 1)e^{2u}| = & |-(1-e^{2u})(1+e^{2u})^{-1} + 1|e^{2\Re e\, u} \leq 2(1+c_1 e^{-2U})e^{4\Re e\, u} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \llbracket(\tanh u+1)e^{2u}\rrbracket_{4,\sigma_0} \leq 2(1+c_1 e^{-2U}) \\ \|\cos\tau\, f_2\|_\infty \leq & \alpha_1 e^{\sigma_0}\varepsilon^2 \end{array} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
|\varphi'(u) - 16e^{2u}| &= |4\tanh u \cosh^{-2} u + 16e^{2u}| \leq 16e^{2\,\Re e\, u}\big|(e^{2u}-1)(e^{2u}+1)^{-3}+1\big| \leq \\
&\leq 16e^{4\,\Re e\, u}\big(4+3e^{-2U}+e^{-4U}\big)\big(1+c_1e^{-2U}\big)^3 \Rightarrow [\![\varphi' - 16e^{2u}]\!]_{4,\sigma_0} < \infty \\
|f(u,\tau) - 8\cos^2\tau\, e^{2u}| &= |2\tanh^2 u \cosh^{-2} u \cos^2\tau - 8\cos^2\tau\, e^{2u}| \leq \\
&\leq 4(1+2e^{2\sigma_0})e^{2\,\Re e\, u}\big|(e^{2u}-1)^2(e^{2u}+1)^{-3}-1\big| \leq \\
&\leq 4(1+2e^{2\sigma_0})e^{4\,\Re e\, u}(5+2e^{-2U}+e^{-4U})\big(1+c_1e^{-2U}\big)^3 \Rightarrow \\
&\Rightarrow [\![f - 8\cos^2\tau\, e^{2u}]\!]_{4,\sigma_0} < \infty.
\end{aligned}$$

Amb tots aquests resultats, arribem a la conclusió que

$$\text{si } h \in \mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}, \text{ aleshores } H_2(h,\cdot,\cdot) \in \mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}.$$

Sabent que

$$\begin{aligned}
H_2(0,u,\tau) = &- \mu\left(32\cosh^2 u\, e^{4u} - 8e^{2u}\right)\, f_2^2(\tau) + \varepsilon\mu 16\,(\tanh u + 1)\cos\tau\, f_2(\tau)\, e^{2u} \\
&- \varepsilon\left(\varphi'(u) - 16e^{2u}\right)\cos\tau - \varepsilon^2\mu\left(f(u,\tau) - 8\cos^2\tau\, e^{2u}\right),
\end{aligned}$$

hem de calcular ara una fita de $[\![\partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(H_2(0,\cdot,\cdot)\big)]\!]_{4,\sigma_0}$. Càlcul que farem de manera diferent per als termes que sabem tenen mitjana zero, que per als que o no la tenen o no ho sabem. Per als segons, senzillament usarem la Propietat 1 del Lema 2.12 i l'Apartat 3b del Lema 2.15:

$$\begin{gathered}
[\![\partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\left(\big(32\cosh^2 u\, e^{4u} - 8e^{2u}\big) f_2^2\right)]\!]_{4,\sigma_0} \leq A_2 [\![32\cosh^2 u\, e^{4u} - 8e^{2u}]\!]_{4,\sigma_0} \|f_2\|^2_\infty, \\
[\![\partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big([\tanh u + 1]e^{2u}\cos\tau\, f_2\big)]\!]_{4,\sigma_0} \leq A_2 [\![[\tanh u+1]e^{2u}]\!]_{4,\sigma_0} \|\cos\tau\, f_2\|_\infty, \\
[\![\partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(f - 8\cos^2\tau\, e^{2u}\big)]\!]_{4,\sigma_0} \leq A_2 [\![f - 8\cos^2\tau\, e^{2u}]\!]_{4,\sigma_0}.
\end{gathered}$$

Per als dos primers casos, usem les fites que s'han trobat a (2.38):

$$\begin{aligned}
[\![\partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\left(\big(32\cosh^2 u\, e^{4u} - 8e^{2u}\big) f_2^2\right)]\!]_{4,\sigma_0} &\leq A_2 8(2+e^{-2U})\alpha_1^2\varepsilon^4, \\
[\![\partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big([\tanh u + 1]e^{2u}\cos\tau\, f_2\big)]\!]_{4,\sigma_0} &\leq A_2 2(1+c_1e^{-2U})\alpha_1\varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

I per al tercer cas, seguint la notació que ja vam suggerir a (1.67):

$$f(u,\tau) = f_1(u)(1+\cos(2\tau)) \qquad \text{amb} \qquad f_1(u) = \frac{\sinh^2 u}{\cosh^4 u},$$

tenim que

$$f(u,\tau) - 8\cos^2\tau\, e^{2u} = \left(f_1(u) - 4e^{2u}\right)(1+\cos(2\tau))$$

i aleshores, si $\Re e\, u$ és suficientment negatiu, $\exists\, d_0$ tal que

$$f_1(u) - 4e^{2u} = e^{4u}(-6+O(e^{2u})) \Rightarrow [\![f - 8\cos^2\tau\, e^{2u}]\!]_{4,\sigma_0} = [\![f_1 - 4e^{2u}]\!]_4(1+2e^{2\sigma_0}) \leq d_0(1+2e^{2\sigma_0}).$$

Per tant,

$$[\![\partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(f - 8\cos^2\tau\, e^{2u}\big)]\!]_{4,\sigma_0} \leq A_2 d_0(1+2e^{2\sigma_0}) \tag{2.40}$$

Per a l'únic terme que té mitjana zero, recordem primer que, gràcies al Lema 2.13 que permet entrar la derivació dins la integral,

$$\partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(\,\big(\varphi'(u) - 16e^{2u}\big)\cos\tau\big) = \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(\,\big(\varphi''(u) - 32e^{2u}\big)\cos\tau\big)$$

a qui aplicarem l'Apartat 3a del Lema 2.15:

$$\llbracket \mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}\big(\big(\varphi'' - 32e^{2u}\big)\cos\tau\big)\rrbracket_{4,\sigma_0} \le A_2\varepsilon \llbracket \big(\varphi'' - 32e^{2u}\big)\cos\tau\big)\rrbracket_{4,\sigma_0}$$

però, per a $\Re e\, u$ suficientment negatiu, $\exists\, d_1$ tal que

$$\begin{aligned}\varphi''(u) - 32e^{2u} &= -4\cosh^{-2}u + 12\sinh^2 u\cosh^{-4}u - 32e^{2u} = e^{4u}(-256 + O(e^{2u})) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \llbracket \varphi'' - 32e^{2u}\rrbracket_4 \le d_1 \Rightarrow \llbracket \big(\varphi'' - 32e^{2u}\big)\cos\tau\big)\rrbracket_{4,\sigma_0} \le 2d_1 e^{\sigma_0}.\end{aligned}$$

Per tant,

$$\llbracket \partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}\big(\big(\varphi' - 16e^{2u}\big)\cos\tau\big)\rrbracket_{4,\sigma_0} \le A_2 2d_1 e^{\sigma_0}\varepsilon$$

Amb això, (2.39) i (2.40) completem la fita de $\llbracket \partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}\big(H_2(0,\cdot,\cdot)\big)\rrbracket_{4,\sigma_0}$:

$$\begin{aligned}\llbracket \partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}\left(H_2(0,\cdot,\cdot)\right)\rrbracket_4 \le{}& \mu A_2 8(2 + e^{-2U})\alpha_1^2\varepsilon^4 + \varepsilon\mu 16 A_2 2(1 + c_1 e^{-2U})\alpha_1\varepsilon^2 + \\ &+ \varepsilon A_2 2 d_1 e^{\sigma_0}\varepsilon + \varepsilon^2\mu A_2 d_0(1 + 2e^{2\sigma_0}).\end{aligned}$$

Per tant, si $\mu \le \mu_0$, $\exists\, b_2$ tal que

$$\llbracket \partial_u \mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}\left(H_2(0,\cdot,\cdot)\right)\rrbracket_4 \le \frac{1}{2}\, b_2\varepsilon^2.$$

$\forall h_1,\, h_2 \in \mathcal{B}(b_2\varepsilon^2)$, usant les propietats de la norma $\llbracket\cdot\rrbracket_{4,\sigma_0}$ i les fites de la (2.37), existeix una constant B_2 tal que:

$$\begin{aligned}\llbracket H_2(h_1,\cdot,\cdot) - H_2(h_2,\cdot,\cdot)\rrbracket_{4,\sigma_0} \le{}& \mu\frac{1}{8}\|\cosh^2 u\, e^{4u}\|_\infty \llbracket h_1 + h_2\rrbracket_{4,\sigma_0}\llbracket h_1 - h_2\rrbracket_{4,\sigma_0} + \\ &+\varepsilon\mu\|\tanh u\cos\tau\|_\infty \llbracket h_1 - h_2\rrbracket_{4,\sigma_0} + \\ &+\mu 4\|\cosh^2 u\, f_2\, e^{2u}\|_\infty \llbracket h_1 - h_2\rrbracket_{4,\sigma_0} \le \\ \le{}& \mu\varepsilon^2\frac{1}{16}(e^{-2U}+1)^2 e^{-2U} b_2 \llbracket h_1 - h_2\rrbracket_{4,\sigma_0} + \\ &+\mu\varepsilon e^{\sigma_0}(1 + e^{-2U})(1 + c_1 e^{-2U})\llbracket h_1 - h_2\rrbracket_{4,\sigma_0} + \\ &+\mu\varepsilon^2\alpha_1\varepsilon^2\frac{1}{4}(e^{-2U}+1)^2\llbracket h_1 - h_2\rrbracket_{4,\sigma_0} \le \\ \le{}& \mu\varepsilon B_2\llbracket h_1 - h_2\rrbracket_{4,\sigma_0}.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Finalment, demostrarem la següent proposició, la qual ens permetrà demostrar el Teorema 2.3 com a un simple corol·lari seu.

Proposició 2.17. *Sigui $U > 0$ suficientment gran. Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \mu \le \mu_0$ i $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, a $\{\Re e\, u < -U\} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ definim la funció*

$$P^-(u,\tau) := \mu^{-1}\big(T^-(u,\tau) - T_0(u) - \varepsilon T_1(u,\tau)\big) - 8f_2(\tau)\, e^{2u}, \tag{2.41}$$

on $f_2(\tau)$ és la funció donada pel Lema 2.11.

Aleshores, $\exists\, b_2 > 0$ tal que

$$\big|\partial_u P^-(u,\tau)\big| \le b_2\varepsilon^2 e^{4\,\Re e\, u}. \tag{2.42}$$

Demostració. Tornant a usar la notació $Q^-(u,\tau)=\mu^{-1}\big(T^-(u,\tau)-T_0(u)-\varepsilon T_1(u,\tau)\big)$, la relació entre Q^- i P^- és

$$Q^-(u,\tau)=P^-(u,\tau)+8f_2(\tau)\,e^{2u},$$

i substituint a l'Equació de Q^- (2.5), trobem la que compleix P^-:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1}\partial_\tau P+\partial_u P &= -\mu\frac{\cosh^2 u}{8}\,(\partial_u P)^2-\mu 4\cosh^2 u\, f_2(\tau)\,e^{2u}\partial_u P+\varepsilon\mu\tanh u\cos\tau\,\partial_u P\\ &\quad -\varepsilon^{-1}8f_2'(\tau)\,e^{2u}-16f_2(\tau)\,e^{2u}-\mu 32\cosh^2 u\, f_2^2(\tau)\,e^{4u}+\varepsilon\mu 16\tanh u\cos\tau\, f_2(\tau)\,e^{2u}\\ &\quad -\varepsilon\varphi'(u)\cos\tau-\varepsilon^2\mu f(u,\tau).\end{aligned}$$

Sabem que $f_2(\tau)$ és una solució de (2.29), per tant, multiplicant aquesta equació per $-8e^{2u}$:

$$-8\varepsilon^{-1}f_2'e^{2u}-16f_2e^{2u}=\mu 8f_2^2e^{2u}+\varepsilon\mu 16\cos\tau\, f_2e^{2u}+\varepsilon 16\cos\tau e^{2u}+\varepsilon^2\mu 8\cos^2\tau\, e^{2u}$$

i substituint-ho a l'equació de P^-:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1}\partial_\tau P+\partial_u P &= -\mu\frac{\cosh^2 u}{8}\,(\partial_u P)^2-\mu 4\cosh^2 u\, f_2(\tau)\,e^{2u}\partial_u P+\varepsilon\mu\tanh u\cos\tau\,\partial_u P\\ &\quad -\mu\left(32\cosh^2 u\, e^{4u}-8e^{2u}\right)\, f_2^2(\tau)+\varepsilon\mu 16\,(\tanh u+1)\cos\tau\, f_2(\tau)\,e^{2u}\\ &\quad -\varepsilon\left(\varphi'(u)-16e^{2u}\right)\cos\tau-\varepsilon^2\mu\left(f(u,\tau)-8\cos^2\tau\, e^{2u}\right).\end{aligned}$$

Segons la definició de H_2 a (2.36), podem escriure aquesta equació de la següent manera:

$$L_\varepsilon P=H_2(\partial_u P,u,\tau). \tag{2.43}$$

i P^- és una solució 2π-periòdica en τ que compleix la condició

$$\lim_{\Re e\, u\to-\infty}\cosh u\partial_u P^-(u,\tau)=\lim_{\Re e\, u\to-\infty}\big(\cosh u\partial_u Q^-(u,\tau)-4f_2(\tau)e^u(e^{2u}+1)\big)=0. \tag{2.44}$$

Afegint la condició que P^- no tingui termes independents de les variables u i τ, ja vam justificar a la Secció 1.4 que aquest problema té una única solució.

A partir de la definició de $\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}$ del Lema 2.15, que és l'operador invers per la dreta de L_ε, definim un nou operador:

$$\mathcal{H}(h)(u,\tau):=\partial_u\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}\big(H_2(h,u,\tau)\big)=\partial_u\int_{-\infty}^0 H_2(h,u+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\,dt$$

i veurem que els punts fixos de $\mathcal{H}$ coincideixen amb les derivades de les solucions de (2.43), és a dir, que $\partial_u P^-$ és solució de $h=\mathcal{H}(h)$.

$\forall\, h\in\mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}$, el Lema 2.16 diu que $H_2(h,\cdot,\cdot)\in\mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}$ i la tercera propietat del Lema 2.15 ens assegura que aleshores $\mathcal{H}$ està definit de $\mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}$ en ell mateix.

Demostrarem que, per a una certa $r>0$, $\mathcal{H}$ és una contracció de $\mathcal{B}(r)\subset\mathcal{E}^U_{4,\sigma_0}$ en ella mateixa i, per tant, hi té un únic punt fix.

Pel Lema 2.16, si U és suficientment gran,

$$\llbracket\mathcal{H}(0,\cdot,\cdot)\rrbracket_{4,\sigma_0}=\llbracket\partial_u\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}\big(H_2(0,\cdot,\cdot)\big)\rrbracket_{4,\sigma_0}\le\frac{1}{2}\,b_2\varepsilon^2.$$

Siguin $h_1, h_2 \in \mathcal{B}(b_2\varepsilon^2)$, aleshores, usant els Lemes 2.15 i 2.16,

$$\llbracket \mathcal{H}(h_1) - \mathcal{H}(h_2) \rrbracket_{4,\sigma_0} = \llbracket \partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(H_2(h_1,\cdot,\cdot) - H_2(h_2,\cdot,\cdot)\big) \rrbracket_{4,\sigma_0} \leq A_2 \mu\varepsilon B_2 \|h_1 - h_2\|_\infty .$$

Des d'on, si $\mu\varepsilon A_2 B_2 \leq 1/2$, $\forall h \in \mathcal{B}(b_2\varepsilon^2)$ obtenim que $\mathcal{H}(h) \in \mathcal{B}(b_2\varepsilon^2)$:

$$\llbracket \mathcal{H}(h) \rrbracket_{4,\sigma_0} \leq \llbracket \mathcal{H}(h) - \mathcal{H}(0) \rrbracket_{4,\sigma_0} + \llbracket \mathcal{H}(0) \rrbracket_{4,\sigma_0} \leq \frac{1}{2} \llbracket h - 0 \rrbracket_{4,\sigma_0} + \frac{1}{2} b_2\varepsilon^2 = b_2\varepsilon^2 .$$

Aleshores, el Teorema del Punt Fix ens indica que

$$\exists!\, h^- \in \mathcal{B}\left(b_2\varepsilon^2\right) \text{ tal que } h^- = \mathcal{H}(h^-) = \partial_u \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon \left(H_2(h^-,\cdot,\cdot)\right)$$

i, usant l'operador del Lema 2.14, això ens porta a

$$\partial_u^{-1} h^-(u,\tau) = \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(H_2(h^-,u,\tau)\big) \quad \text{amb} \quad \llbracket h^- \rrbracket_{4,\sigma_0} \leq b_2\varepsilon^2,$$

des d'on, usant la relació $L_\varepsilon \circ \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon = \mathrm{Id}$, s'obté que $\partial_u^{-1} h^-$ és solució de (2.43) i pot comprovar-se fàcilment que compleix la condició (2.44). Per unicitat de solució del problema, $P^- = \partial_u^{-1} h^-$ i pel Lema 2.14, $\partial_u P^- = h^-$, amb la qual cosa:

$$\left|\partial_u P^-(u,\tau)\right| \leq \|\partial_u P^- e^{-4u}\|_\infty e^{4\,\Re e\, u} \leq \llbracket h^- \rrbracket_{4,\sigma_0} e^{4\,\Re e\, u} \leq b_2\varepsilon^2 e^{4\,\Re e\, u}$$

i arribem al resultat (2.42) que volíem. ∎

Demostració del Teorema 2.3. La Proposició 2.17 ens permet fer aquesta demostració de manera gairebé directa. Fixem-nos primer en la relació entre el resultat al qual volem arribar i la funció P^-:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\cosh^2 u}{4}\Big(\partial_u T^-(u,\tau) - T_0'(u) - \varepsilon \partial_u T_1(u,\tau)\Big) - \mu f_2(\tau)\right| &= \left|\frac{\cosh^2 u}{4}\,\mu \partial_u Q^-(u,\tau) - \mu f_2(\tau)\right| \leq \\
\leq \left|\frac{\cosh^2 u}{4}\,\mu \partial_u \Big(Q^-(u,\tau) - 8 f_2(\tau) e^{2u}\Big)\right| &+ \left|\cosh^2 u\, 4\mu f_2(\tau) e^{2u} - \mu f_2(\tau)\right| \leq \\
\leq \left|\frac{\cosh^2 u}{4}\,\mu \partial_u P^-(u,\tau)\right| &+ \left|(e^{2u}+1)^2 - 1\right| \cdot |\mu f_2(\tau)|.
\end{aligned}$$

I com que $\cosh^2 u = \frac{1}{4}(e^{2u}+1)^2 e^{-2u}$, $(e^{2u}+1)^2 - 1 = 2e^{2u} + e^{4u}$ i $f_2(\tau) = O(\varepsilon^2)$, si $\Re e\, u < -\tilde{U} = -U + 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\cosh^2 u}{4}\,\mu \partial_u P^-(u,\tau)\right| &\leq \frac{1}{16}\,(e^{-2\tilde{U}} + 1)^2 e^{-2\,\Re e\, u} \mu b_2 \varepsilon^2 e^{4\,\Re e\, u}, \\
\left|(e^{2u}+1)^2 - 1\right| \cdot |\mu f_2(\tau)| &\leq (2 + e^{-2\tilde{U}}) e^{2\,\Re e\, u} \mu \alpha_1 \varepsilon^2 e^{2\,\Re e\, u}.
\end{aligned}$$

Amb la qual cosa arribaríem al primer resultat del Teorema 2.3: $\exists k_1$ tal que

$$\left|\frac{\cosh^2 u}{4}\left(\partial_u T^-(u,\tau) - T_0'(u) - \varepsilon \partial_u T_1(u,\tau)\right) - \mu f_2(\tau)\right| \leq k_1 \mu \varepsilon^2 e^{2\,\Re e\, u}.$$

La segona part del Teorema 2.3, s'obtindria reduint el domini a $\{\Re e\, u < -U\} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i usant la desigualtat de Cauchy. ∎

Capítol 3

Estudi de l'Equació Inner amb la Teoria de la Ressurgència.

Per tal d'assolir l'objectiu final de la mesura del trencament de separatrius del problema (1.1), es necessita calibrar la diferència entre les varietats invariants estable i inestable prop de les singularitats $\pm i\pi/2$ de l'òrbita homoclínica del problema no pertorbat. Hem doncs de traslladar-nos al domini inner (3.1) tal i com ja vam explicar a la Secció 1.5.3 i estudiar la diferència entre dues solucions especials de l'Equació Inner (3.3), solucions que estaran relacionades amb les varietas invariants estable i inestable.

Usant la Teoria de la Ressurgència, de la qual en donem les nocions bàsiques a les Subseccions 3.2.4 i 3.2.5, obtenim els resultats recollits a la Secció 3.2 i que aplicarem al nostre problema a la Secció 3.3. A més, l'ús de l'anomenada Equació del Pont que hem fet a la Secció 3.4, ens permet obtenir un altre resultat destacable que constata l'existència de solucions ressorgents de l'Equació Inner (1.58); la importància d'aquest estudi ve del fet que mai abans s'havia obtingut un resultat així per a una equació en derivades parcials nolineal. Aquest capítol es basa en l'article [OSaS03].

Aquest capítol és autocontingut, en el sentit que podria llegir-se independentment de la resta del document. L'únic resultat necessari per al desenvolupament dels altres capítols és el recollit al Corol·lari 3.30, del qual en donem una breu descripció en la següent secció.

3.1 L'Equació Inner i la Teoria de la Ressurgència.

Ja vam justificar a la Secció 1.5.3 que havíem de fer un estudi de les varietats invariants prop de $\pm i\pi/2$. Farem només el cas $i\pi/2$, essent l'altre totalment anàleg. Ja teníem definit l'anomenat domini inner a (1.52):

$$D^u_{\varepsilon,+} := \{u \in \mathbb{C} \,|\, |u - i\pi/2| < \bar{a}\varepsilon^\gamma,\, \Im m\, u < \pi/2 - c\varepsilon \ln(1/\varepsilon),\, |\arg(u - i\pi/2)| > \beta_1\}, \tag{3.1}$$

i els reescalats

$$z = \varepsilon^{-1}(u - i\pi/2) \quad \text{i} \quad \phi(z, \tau; \mu, \varepsilon) = \varepsilon T(\varepsilon z + i\pi/2, \tau; \mu, \varepsilon),$$

transformaven l'Equació de Hamilton-Jacobi (1.45) en:

$$\partial_\tau \phi + \frac{\cosh^2(\varepsilon z + i\pi/2)}{8\varepsilon^2}(\partial_z \phi)^2 + \frac{2\varepsilon^2}{\cosh^2(\varepsilon z + i\pi/2)}(\mu \sin\tau - 1) = 0 \tag{3.2}$$

i el domini $D^u_{\varepsilon,+}$ en

$$\mathcal{D}^u_{\varepsilon,+} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < \overline{a}\varepsilon^{\gamma-1},\ \Im m\, z < -c\ln(1/\varepsilon),\ |\arg(z)| > \beta_1\}.$$

Al Capítol 4 veurem que, sempre que $z \in \mathcal{D}^u_{\varepsilon,+}$ i considerant l'Equació (3.2) com a pertorbació de l'Equació Inner

$$\partial_\tau \phi_0 - \frac{z^2}{8}(\partial_z \phi_0)^2 + \frac{2}{z^2}(1 - \mu\sin\tau) = 0, \tag{3.3}$$

que a la vegada té un paràmetre μ complex, les solucions de (3.2) representants de les varietats invariants estable i inestable poden aproximar-se per solucions $\phi_0^\pm$ de l'Equació Inner amb condicions asimptòtiques respectives:

$$\lim_{\Re e\, z \to \pm\infty} \phi_0^\pm(z, \tau; \mu) = 0 \tag{3.4}$$

i amb la restricció de ser 2π-periòdiques en τ. En el capítol present, l'objectiu serà l'estudi d'aquestes solucions especials de l'Equació Inner, on farem ús de les tècniques de la Teoria de la Ressurgència. Aquest estudi es farà en un domini molt més ampli que el $\mathcal{D}^u_{\varepsilon,+}$, en concret, obtindrem resultats a un domini com el de la Figura 3.1.

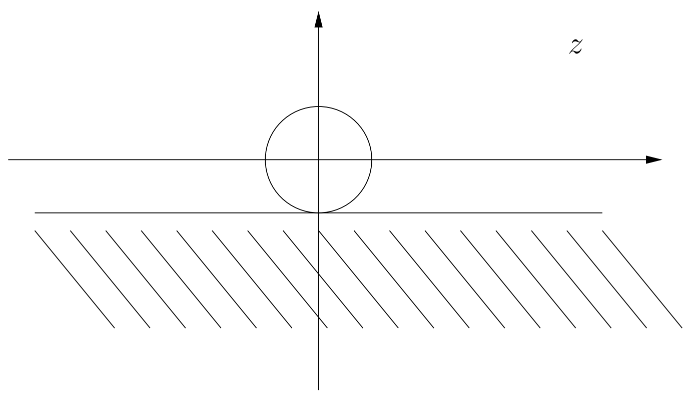


Figura 3.1: Obtindrem $\phi_0^+ - \phi_0^-$ a la part que mostrem ratllada.

El primer pas és obtenir una solució formal $\tilde{\phi}_0$ de l'Equació Inner que verifiqui la condició asimptòtica indicada:

$$\tilde{\phi}_0(z, \tau; \mu) = \sum_{n \geq 0} a_n(\tau; \mu) z^{-n-1} \tag{3.5}$$

amb $a_n(\tau; \mu)$ polinomis trigonomètrics en τ. Aquesta solució formal és essencialment única i se'n donen els detalls al Lema 3.4, però és divergent i s'estudiarà amb la Teoria de la Ressurgència, passant per la tranformada de Borel formal.

Pel mètode de resumació de Borel obtindrem dues solucions particulars:

$$\phi_0^\pm(z, \tau; \mu) = \int_0^{\pm\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta, \tau; \mu)\, d\zeta,$$

de les quals n'estudiarem la seva diferència per a valors de z amb part imaginària suficientment negativa (no oblidem que $z = (u - i\pi/2)/\varepsilon$ i necessitem resultats per a $\Im m\, u < \pi/2$). Això serà possible a partir de la detallada informació que ens donarà el càlcul diferencial estranger aplicat a $\tilde{\phi}_0$ i que pot trobar-se al Teorema 3.28: el comportament de $\hat{\phi}_0$ prop de i (anàlegament prop de $-i$), que és la seva singularitat més propera a l'origen, serà

$$\hat{\phi}_0(i+\zeta,\tau;\mu) = f_0^{[i]}(\mu)\, e^{i\tau}\left(\frac{1}{2\pi i\zeta} + \hat{\chi}(\zeta,\tau;\mu)\frac{\log\zeta}{2\pi i}\right) + \text{ germ regular a l'origen,} \tag{3.6}$$

amb $f_0^{[i]}(\mu) = -2\pi i\mu + O(\mu^3)$ i on $\hat{\chi}$ serà la transformada de Borel formal de $\tilde{\chi} = -1 + e^{-i\tilde{S}}$, essent per altra part $\tilde{S}(z,\tau;\mu) = \sum_{n\geq 0} S_n(\tau;\mu) z^{-n-1}$ una sèrie divergent amb propietats molt semblants a $\tilde{\phi}_0$ i que ja detallarem. Aquesta informació ens permetrà provar al Corol·lari 3.30 una fórmula asimptòtica per a $\phi_0^+ - \phi_0^-$. A continuació donem un breu extracte d'aquest Corol·lari:

Corol·lari. *Les funcions $\phi_0^{\pm}(z,\tau;\mu)$ són solucions de l'Equació (3.3) i satisfan la condició (3.4).*

La seva diferència és exponencialment petita quan $\Im m\, z \to -\infty$ i uniformement per a $|\Im m\, \tau| \leq \sigma_0$ i $|\mu| \leq \mu_0$:

$$\phi_0^+(z,\tau;\mu) - \phi_0^-(z,\tau;\mu) = f_0^{[i]}(\mu) e^{-i(z-\tau)}\Big(1 + O\left(|z|^{-1}\right)\Big) + O\left(|\mu| e^{a_1 \Im m\, z}\right),$$

on a_1 és qualsevol constant de l'interval (1,2).

Amb aquesta fórmula asimptòtica n'hi haurà suficient per resoldre el nostre problema de trencament de separatrius, però només hem fet servir una mínima part de la potència de la Teoria de la Ressurgència. Podem anar més enllà i obtenir el comportament de $\hat{\phi}_0$ a qualsevol de les seves singularitats.

Si de l'Equació (3.3) busquem una solució formal més general, anomenada Integral Formal, obtenim

$$\tilde{\phi}(z,\tau,b;\mu) = \sum_{n\geq 0} b^n \tilde{\phi}_n(z,\tau;\mu), \tag{3.7}$$

on $\tilde{\phi}_0$ serà (3.5), $\tilde{\phi}_1(z,\tau;\mu) = z - \tau + \tilde{S}(z,\tau;\mu)$ i la resta de termes seran la suma d'una part polinòmica i d'una sèrie formal en z^{-1}, amb tots els coeficients periòdics respecte τ. Trobarem una equació que estableix un pont entre la derivació usual i l'anomenada derivació estrangera, per la qual cosa rep el nom d'*Equació del Pont*:

$$e^{-\omega z}\Delta_\omega \tilde{\phi}(z,\tau,b;\mu) = f^{[\omega]}(b;\mu)\, \exp\!\big(-\omega\partial_b\, \tilde{\phi}(z,\tau,b;\mu)\big), \tag{3.8}$$

on $f^{[\omega]}(b;\mu) = \sum_{n\geq 0} f_n^{[\omega]}(\mu) b^n$. En termes de $\tilde{\phi}_n$, això vol dir que disposem d'unes relacions, conegudes com a *equacions de ressurgència*, entre la derivada estrangera de $\tilde{\phi}_n$ d'índex $\omega \in i\mathbb{Z}^*$ i les sèries $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \ldots, \tilde{\phi}_{n+1}$ que són del tipus:

$$\begin{aligned} \Delta_\omega \tilde{\phi}_0 &= f_0^{[\omega]} e^{\omega\tau} e^{-\omega\tilde{S}}, \\ \Delta_\omega \tilde{\phi}_n &= A_n^{[\omega]}(\tilde{\phi}_2, \ldots, \tilde{\phi}_{n+1};\mu)\, e^{\omega\tau}\, e^{-\omega\tilde{S}(z,\tau;\mu)}, \qquad n \geq 1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Això permet tenir un mapa de les singularitats de les continuacions analítiques de les seves transformades de Borel, perquè podrem calcular les derivades estrangeres successives

$\Delta_{\omega_r}\Delta_{\omega_{r-1}}\dots\Delta_{\omega_1}\tilde{\phi}_n$ en termes d'aquests coeficients $f_n^{[\omega]}$ i de les pròpies series $\tilde{\phi}_n$. De fet, la propietat que els germs $\hat{\phi}_n(\zeta,\tau;\mu)$ reapareguin (és a dir, ressorgeixin) en les singularitats de les seves continuacions analítiques, és l'origen del nom que J. Écalle va escollir per a la seva teoria [Eca81]. Per a més detalls d'aquesta teoria pot llegir-se [Eca92a, Eca93] o [CNP93a, CNP93b].

Observació 3.1. *L'Equació (3.3) pot escriure's com* $\partial_\tau\phi - \frac{1}{8}z^2(\partial_z\phi)^2 + z^{-2}P_\mu(\tau) = 0$*, amb*

$$P_\mu(\tau) = 2(1-\mu\sin\tau).$$

Termes pertorbatius més generals P_μ *no suposarien grans canvis en el nostre mètode. La simetria* $P_\mu(\pi-\tau) = P_\mu(\tau)$ *no és essencial, però fa l'anàlisi més simple (com veurem a la demostració del Lema 3.26 i a l'Observació 3.36 per exemple). Pertorbacions no simètriques afecten la transformada de Borel* $\hat{\phi}_0$ *convertint les seves singularitats en més complicades (no "simplement ramificades" segons la terminologia que usarem a la Secció 3.4).*

3.2 Estudi de la transformada de Borel $\hat{\phi}_0$ de la solució formal.

En aquesta secció demostrarem l'existència d'una solució formal $\tilde{\phi}_0$ de l'Equació (3.3) i ens interessarà establir la convergència i la continuació analítica de la seva transformada de Borel $\hat{\phi}_0 = \tilde{\mathcal{B}}\tilde{\phi}_0$ respecte la variable ζ, tant al full principal de la seva superfície de Riemann com als mig-fulls propers.

Finalment, l'objecte del nostre estudi serà el comportament de $\hat{\phi}_0$ prop de la seva primera singularitat $\omega = i$.

3.2.1 Espais de definició i la superfície de Riemann $\mathcal{R}$.

Els objectes formals amb els quals treballarem són sèries en potències de z^{-1}, els coeficients de les quals seran de l'espai $\mathcal{P} = \mathbb{C}[[e^{i\tau}, e^{-i\tau}]]$ dels polinomis trigonomètrics de τ, per tant, parlarem de l'espai $\mathcal{P}[[z^{-1}]]$. El subconjunt de les sèries en potències negatives de z, és a dir, sèries formals sense terme z-independent serà indicat amb $z^{-1}\mathcal{P}[[z^{-1}]]$. Finalment, necessitarem un espai formal més gran, que notarem per $\mathcal{P}[z][[z^{-1}]]$ i que consistirà en les sèries de Laurent formals en z amb una quantitat finita de potències de z, on els coeficients també seran polinomis trigonomètrics de τ. Així doncs, totes les sèries formals amb les quals treballarem podran ser expressades de dues maneres diferents segons ens interessi posar de relleu la seva dependència en z o en τ:

$$\tilde{\varphi}(z,\tau) = \sum_{n\geq n_0} \varphi_n(\tau) z^{-n-1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{\varphi}^{[k]}(z) e^{ik\tau},$$

on n_0 és un nombre enter (no negatiu si volem indicar un element de $z^{-1}\mathcal{P}[[z^{-1}]]$ o negatiu per a un element de $\mathcal{P}[z][[z^{-1}]]$) i $\varphi_n \in \mathcal{P}$, mentre que cada $\tilde{\varphi}^{[k]}$ pot escriure's a la vegada com

$$\tilde{\varphi}^{[k]}(z) = \sum_{n\geq n_0} \varphi_n^{[k]} z^{-n-1},$$

amb coeficients escalars $\varphi_n^{[k]}$. A més, les nostres sèries dependran del paràmetre complex μ, de fet ho faran de manera analítica.

A (1.21) de la Secció 1.3 ja vam definir l'acció de la transformada de Borel formal $\tilde{\mathcal{B}}$ com a operador lineal sobre l'espai $z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$:

$$\tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\varphi}^{[k]})(\zeta) = \hat{\varphi}^{[k]}(\zeta) = \sum_{n \geq n_0} \varphi_n^{[k]} \frac{\zeta^n}{n!}$$

i ara tenim la corresponent acció sobre l'espai $z^{-1}\mathcal{P}[[z^{-1}]]$:

$$\tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\varphi})(\zeta, \tau) = \hat{\varphi}(\zeta, \tau) = \sum_{n \geq n_0} \varphi_n(\tau) \frac{\zeta^n}{n!}.$$

Si és necessari, l'acció de $\tilde{\mathcal{B}}$ pot estendre's a $\mathbb{C}[z][[z^{-1}]]$ o $\mathcal{P}[z][[z^{-1}]]$ usant δ i les seves derivades: $z^j \mapsto \delta^{(j)}$ si $j \geq 0$ (per a més detalls pot llegir-se [Eca81, CNP93a]).

D'aquest operador $\tilde{\mathcal{B}}$ ens interessaran en especial tres propietats: la primera és que ∂_z es correspon amb un nou operador ∂, l'efecte del qual és el producte amb el factor $-\zeta$, és a dir,

$$\tilde{\mathcal{B}}(\partial_z \tilde{\varphi}) = \partial \tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\varphi}) = -\zeta \tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\varphi});$$

la segona és que el producte per z es correspon amb l'operador ∂_ζ,

$$\tilde{\mathcal{B}}(z\tilde{\varphi}) = \partial_\zeta \tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\varphi})$$

i la tercera és que l'operació producte es correspon amb el producte convolutiu, definit com

$$(\hat{\phi} * \hat{\psi})(\zeta, \tau) = \int_0^\zeta \hat{\phi}(\zeta_1, \tau) \hat{\psi}(\zeta - \zeta_1, \tau) \, d\zeta_1, \tag{3.10}$$

és a dir,

$$\tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\phi}\,\tilde{\psi}) = \tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\phi}) * \tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\psi}) = \hat{\phi} * \hat{\psi}.$$

L'àlgebra de convolució obtinguda no és unitària, doncs s'hauria de verificar que

$$\tilde{\mathcal{B}}(1) * \hat{\varphi} = \hat{\varphi},$$

però no existeix un tal germ analític a l'origen que ho compleixi. Per solventar aquest inconvenient, es defineix abstractament l'element unitat mitjançant δ, la delta de Dirac a 0, de manera que

$$\tilde{\mathcal{B}}(1) = \delta, \quad \delta * \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \quad \text{i} \quad \partial\delta = 0.$$

L'operador $\tilde{\mathcal{B}}$ envia una sèrie formal amb radi de convergència no nul a una sèrie de potències convergent que defineix una funció entera amb creixement exponencial com a molt d'ordre 1 ($\exists\, c_1, c_2 > 0$ tals que $\forall (\zeta, \tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$, $|\hat{\varphi}(\zeta, \tau)| \leq c_1 e^{c_2|\zeta|}$). Nosaltres treballarem amb sèries formals $\tilde{\phi}_0$ com la (3.5) 2π-periòdiques en τ, la transformada de les quals és de l'espai $\mathcal{P}\{\zeta\}$ dels germs analítics a l'origen, és a dir, convergeix prop de l'origen però té radi de convergència finit, per tant, $\tilde{\phi}_0$ serà divergent, en concret, serà Gevrey-1, que, com ja vam indicar a la Secció 1.3, vol dir que podem trobar dues constants positives M i K tals que

$$\forall \tau \in \mathbb{T}_{\sigma_0}, \ |a_n(\tau)| \leq M K^n n!. \tag{3.11}$$

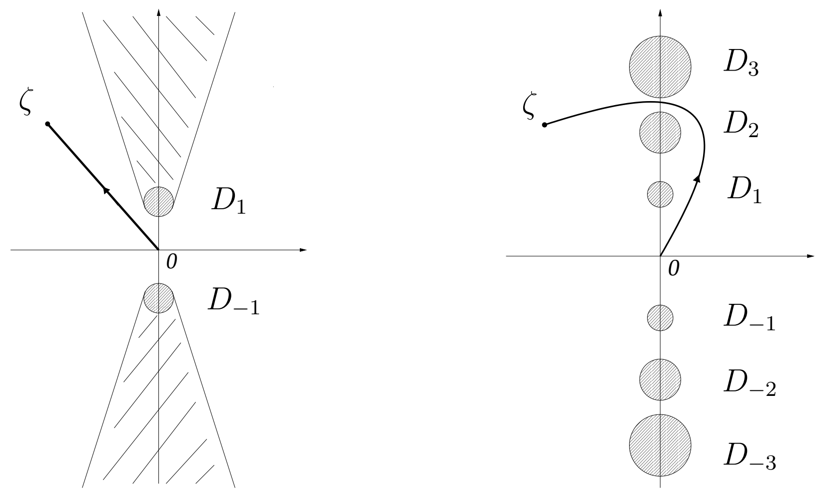


Figura 3.2: Exemples de punts dels subconjunts $\mathcal{R}_\rho^{(0)}$ i $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$ de $\mathcal{R}$.

Les singularitats respecte ζ de la seva transformada de Borel $\hat{\phi}_0$ poden ser considerades com les responsables de la seva divergència i, per tant, és important el seu estudi.

Quan a l'espai $\mathcal{P}[z][[z^{-1}]]$ la part de les potències negatives formin una sèrie de classe Gevrey-1, ho indicarem amb la notació $\mathcal{P}_1[z][[z^{-1}]]$.

Veurem que les úniques possibles singularitats de la continuació analítica de $\hat{\phi}_0$ estaran a $i\mathbb{Z}$. Aquesta propietat pot ser expressada com que $\hat{\phi}_0$ és holomorfa a la superfície de Riemann $\mathcal{R}$ consistent en totes les classes d'homotopia dels camins amb origen a 0 i que es mantenen a $\mathbb{C}\setminus i\mathbb{Z}$, excepte per al seu origen. Notarem per $\zeta \in \mathcal{R} \mapsto \dot{\zeta} \in (\mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}) \cup \{0\}$ la projecció natural, la qual és localment biholomorfa en un entorn de cada punt (només l'origen es projecta sobre 0 i aquesta és l'única diferència entre $\mathcal{R}$ i el recobriment universal de $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$).

La continuació analítica de $\hat{\phi}_0$ a tota la superfície de Riemann només serà necessària a l'estudi de les components $\tilde{\phi}_n$ de la Integral Formal que farem a la Secció 3.4. De moment, ens restringirem a subconjunts de $\mathcal{R}$.

El *full principal* $\mathcal{R}^{(0)}$ *de* $\mathcal{R}$ s'obté com el subconjunt de punts ζ de $\mathcal{R}$ que poden ser representats pel segment rectilini $[0, \dot{\zeta}]$; observi's que $\mathcal{R}^{(0)}$ és isomorf al pla tallat $\mathbb{C} \setminus \big(\pm i[1, +\infty)\big)$. Per a qualsevol $\rho \in]0,1[$, definim $\mathcal{R}_\rho^{(0)}$ com:

$$\mathcal{R}_\rho^{(0)} = \{\, \zeta \in \mathcal{R} \text{ representat per } [0, \dot{\zeta}] \subset \mathbb{C} \setminus D(\pm i, \rho) \,\}, \tag{3.12}$$

on $D(\pm i, \rho)$ indiquen els discs oberts de radi ρ centrats a $\pm i$ (vegi's la Figura 3.2). Usant la identificació entre ζ i $\dot{\zeta}$ per als punts de $\mathcal{R}^{(0)}$, podem reescriure (3.12) com

$$\mathcal{R}_\rho^{(0)} = \{\, \zeta \in \mathbb{C} \mid \forall \zeta' \in [0, \zeta],\ |\zeta' \pm i| \geq \rho \,\}. \tag{3.13}$$

Considerant ρ arbitràriament petit, provarem l'analiticitat de $\hat{\phi}_0$ a $\mathcal{R}^{(0)}$.

Si seguim explorant $\mathcal{R}$, des del full principal passem a un nou "mig-full proper" cada vegada que travessem l'eix imaginari entremig de dos punts singulars consecutius mi i $(m+1)i$, o bé $-(m+1)i$ i $-mi$, amb $m \geq 1$. Notarem per $\mathcal{R}^{(1)}$ la unió de $\mathcal{R}^{(0)}$ i tots els seus mig-fulls propers, és a dir, el subconjunt de $\mathcal{R}$ format per les classes d'homotopia dels camins amb origen a 0, que es mantenen a $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$ i que creuen l'eix imaginari com a molt una vegada. Anàlogament als subconjunts $\mathcal{R}_\rho^{(0)}$, definim els $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$ seguint la definició donada a [GSa01] per a un cas semblant, la unió dels quals recobreix $\mathcal{R}^{(1)}$ i, per tant, ens hi permetran provar qualsevol propietat de $\hat{\phi}_0$. Si usem la notació $D_m = D(mi, |m|\rho)$, podem dir, de manera ràpida, que els punts de $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$ són els representats per camins de $\mathcal{R}_\rho^{(0)}$ o per camins que passen entremig dels discs $D_{\pm m}$ i $D_{\pm(m+1)}$ amb $1 \le m \le M$, travessant l'eix imaginari com a molt una vegada (vegi's la Figura 3.2), essent

$$M = \left[\frac{1}{2}(\rho^{-1} - 1)\right]$$

per tal que els discs no se solapin. A més, la condició $M \ge 1$ fa que ara es requereixi $\rho < 1/3$.

Per a una definició més rigorosa de $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$, ens cal definir

$$\dot{\mathcal{R}}_\rho = \mathbb{C} \setminus \Big(\bigcup_{\substack{-M-1 \le m \le M+1 \\ m \ne 0}} D_m \Big).$$

Definició 3.2. *Anomenarem $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$ al subconjunt de $\mathcal{R}$ format per tots els punts ζ els quals poden ser representats per un camí contingut a $\dot{\mathcal{R}}_\rho$ i tal que γ_ζ, els més curt d'aquests camins, és*

1. *o un segment rectilini;*

2. *o la unió d'un segment rectilini amb inici a l'origen i tangent a D_m, amb $-M-1 \le m \le M+1$ i $m \ne 0$, i d'un arc de la circumferència ∂D_m amb final a $\dot{\zeta}$; en aquesta situació és necessari que aquest arc sigui més petit que mitja circumferència i que la tangent a γ_ζ en el punt $\dot{\zeta}$ estigui sempre a $\dot{\mathcal{R}}_\rho$;*

3. *o la unió d'un segment rectilini amb inici a l'origen i tangent a algun D_m, amb $-M-1 \le m \le M+1$ i $m \ne 0$, d'un arc de la circumferència ∂D_m i d'un segment rectilini $S(\zeta)$ tangent a D_m amb final a $\dot{\zeta}$; també ara és necessari que l'arc sigui més petit que mitja circumferència i que la línia que continua $S(\zeta)$ cap endarrere des de $\dot{\zeta}$ estigui sempre a $\dot{\mathcal{R}}_\rho$. Vegi's la part esquerra de la Figura 3.3.*

La idea de la definició d'aquest conjunt $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$ és cobrir $\mathcal{R}^{(1)}$ quan ρ tendeix a 0 i controlar els camins simètricament contràctils Γ_ζ associats als γ_ζ per tal de garantir l'estabilitat sota convolució de la propietat de ser holomorfa a $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$. Efectivament, quan intentem seguir la continuació analítica d'una convolució al llarg del camí γ_ζ per a un punt fixat ζ de $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$, es necessita introduir el camí Γ_ζ definit com:

- en el cas 1 anterior, Γ_ζ és el propi γ_ζ;

- en el cas 3, si $m \ge 1$, Γ_ζ és la unió de segments rectilinis i arcs de cercle obtinguts com el camí més curt que s'inicia a l'origen, meandreja entre els discs $\zeta - D_m, D_1, \ldots, \zeta - D_{m-k}, D_{k+1}, \ldots, \zeta - D_1, D_m$ (en aquest ordre) i acaba a ζ (si $m \le -1$, s'ha de substituir D_{m-k} per D_{m+k} i D_{k+1} per D_{-k-1} a la frase anterior) (vegi's la part dreta de la Figura 3.3);

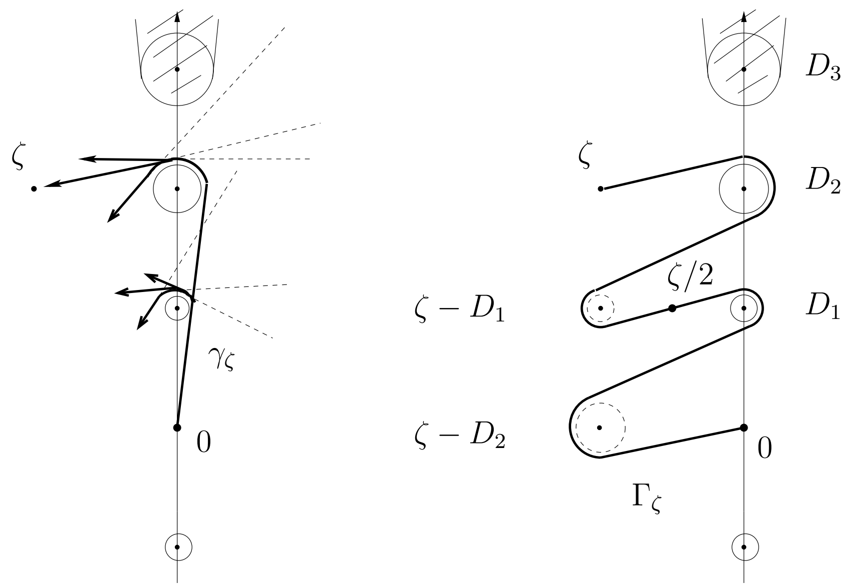


Figura 3.3: Els camins γ_ζ i Γ_ζ defineixen el mateix punt $\zeta \in \mathcal{R}_\rho^{(1)} \subset \mathcal{R}$.

- en el cas 2, la descripció és la mateixa excepte que, per causa de les tangències, no hi ha segments rectilinis des de D_k a $\zeta - D_{m-k}$ $(0 \le k \le m)$.

Aquest camí Γ_ζ està contingut a $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$ i és homotop a γ_ζ, és a dir, defineix el mateix punt ζ de la superfície de Riemann. A més, Γ_ζ és simètricament contràctil, és a dir, és simètric respecte el seu punt mitjà $\zeta/2$ i pot ser deformat contínuament al camí trivial $\{0\}$ usant només camins simètrics amb origen a 0 i continguts a $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$.

Així doncs, quan dues funcions $\hat{A}$ i $\hat{B}$ tenen extensió analítica a $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$, la seva convolució també s'estén analíticament a $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$ i ve donada per la fórmula

$$\hat{A} * \hat{B}(\zeta) = \int_{\Gamma_\zeta} \hat{A}(\zeta_1)\hat{B}(\zeta_2)\, d\zeta_1,$$

on ζ_2 és el punt simètric de ζ_1 respecte el punt $\zeta/2$ de Γ_ζ.

Aquesta fórmula ens permet tenir fites per a les convolucions a $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$. El següent lema és una reproducció del corresponent a [GSa01] (Lema 9, p. 538):

Lema 3.3. *Per a qualsevol $\zeta \in \mathcal{R}_\rho^{(1)}$, sigui $\ell(\zeta)$ la mida del camí Γ_ζ. Si $\hat{A}$ i $\hat{B}$ són funcions holomorfes a $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$ tals que*

$$\forall \zeta \in \mathcal{R}_\rho^{(1)}, \quad |\hat{A}(\zeta)| \le \hat{\mathcal{A}}\big(\ell(\zeta)\big) \quad i \quad |\hat{B}(\zeta)| \le \hat{\mathcal{B}}\big(\ell(\zeta)\big),$$

on $\hat{\mathcal{A}}$ i $\hat{\mathcal{B}}$ són funcions contínues no decreixents a $\mathbb{R}^+$, aleshores la seva convolució és holomorfa a $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$ i satisfa

$$\forall \zeta \in \mathcal{R}_\rho^{(1)}, \quad |\hat{A} * \hat{B}(\zeta)| \le \hat{\mathcal{A}} * \hat{\mathcal{B}}\big(\ell(\zeta)\big).$$

La demostració usa de manera determinant que cada ζ_1 de Γ_ζ té una abscissa sobre la corba no més petita que $\ell(\zeta_1)$; la qual cosa pot comprovar-se a partir de la definició que s'ha fet de Γ_ζ, gràcies a la limitació imposada als camins γ_ζ quan es va definir $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$.

3.2.2 Solucions formals de l'Equació Inner.

Lema 3.4. *Per a cada $\mu \in \mathbb{C}$, les solucions a $\mathcal{P}[z][[z^{-1}]]$ de l'Equació Inner (3.3) són de la forma*

$$\alpha + \tilde{\phi}_0(z,\tau;\mu) \quad o \quad \alpha + \tilde{\phi}_0(-z,\tau;\mu),$$

on α és un nombre complex arbitrari i la sèrie

$$\tilde{\phi}_0(z,\tau;\mu) = \sum_{n\geq 0} a_n(\tau;\mu) z^{-n-1} \tag{3.14}$$

està determinada com l'única solució a $z^{-1}\mathcal{P}[[z^{-1}]]$ amb terme inicial $4z^{-1}$. Els seus coeficients s'obtenen segons una fórmula recursiva: $a_0 = 4$, $a_1 = -2\mu\cos\tau$ i per a $n \geq 2$

$$< a_n > = -\frac{1}{8(n+1)} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1,n_2\geq 1}} < (n_1+1)a_{n_1}(n_2+1)a_{n_2} >, \tag{3.15}$$

$$\partial_\tau a_n = \frac{1}{8} \sum_{\substack{n_1+n_2=n-1 \\ n_1,n_2\geq 0}} (n_1+1)a_{n_1}(n_2+1)a_{n_2}, \tag{3.16}$$

on $< . >$ denota el valor mitjà del polinomi trigonomètric.

Demostració. La demostració d'aquest lema es fa senzillament substituint la sèrie (3.14) a l'Equació (3.3). Observi's que la part dreta de (3.16) té valor mitjà zero, perquè per a $n = 2$

$$< \sum_{\substack{n_1+n_2=1 \\ n_1,n_2\geq 0}} (n_1+1)a_{n_1}(n_2+1)a_{n_2} >= 2 < -8\mu\cos\tau >= 0$$

i per a $n \geq 3$,

$$\sum_{\substack{n_1+n_2=n-1 \\ n_1,n_2\geq 0}} (n_1+1)a_{n_1}(n_2+1)a_{n_2} = 4na_{n-1} + \sum_{\substack{n_1+n_2=n-1 \\ n_1,n_2\geq 1}} (n_1+1)a_{n_1}(n_2+1)a_{n_2},$$

que té mitjana zero gràcies a la condició (3.15) aplicada a $n-1$. Per tant (3.15) i (3.16) defineixen un únic polinomi trigonomètric a_n (el qual depèn polinomialment de μ).

La possibilitat d'afegir la constant additiva α ve donada pel fet que l'Equació (3.3) només involucra les derivades parcials de la funció incògnita.

El signe del davant de la z és aportat per la simetria de l'equació respecte la subtitució $z \mapsto -z$. Això només vol dir que en el problema pertorbat, podem estudiar el trencament de la separatriu superior o inferior ($p > 0$ o $p < 0$ en la notació inicial). ■

Així doncs,

$$\tilde{\phi}_0(z,\tau;\mu) \quad = \quad \frac{4}{z} - \frac{2\mu\cos\tau}{z^2} - \frac{4\mu\sin\tau + \frac{1}{3}\mu^2}{z^3} + \frac{12\mu\cos\tau + \frac{1}{2}\mu^2\sin(2\tau)}{z^4} + O(z^{-5})$$

i triarem el signe positiu per a tot el que segueix.

Lema 3.5. *La solució formal $\tilde{\phi}_0$ de l'Equació (3.3) és antimètrica respecte la involució $(z,\tau)\mapsto(-z,\pi-\tau)$:*

$$\tilde{\phi}_0(-z,\pi-\tau;\mu) = -\tilde{\phi}_0(z,\tau;\mu).$$

Demostració. La demostració és immediata per la simetria de l'Equació (3.3) respecte la substitució $\tau\mapsto\pi-\tau$ (gràcies a la pertorbació que s'havia posat al problema), i per la unicitat establerta al Lema 3.4. ■

Observació 3.6. *El fet que $-\mu\sin\tau = \mu\sin(\tau+\pi)$ fa que també tinguem una simetria respecte μ:*

$$\tilde{\phi}_0(z,\tau;-\mu) = \tilde{\phi}_0(z,\tau+\pi;\mu). \tag{3.17}$$

3.2.3 Analiticitat de $\hat{\phi}_0$ a $\mathcal{R}^{(1)}$.

D'acord amb les propietats de la transformada de Borel donades a la Secció 3.2.1,

$$\tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\phi}\,\tilde{\psi}) = \tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\phi}) * \tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\psi}) \quad \text{i} \quad \tilde{\mathcal{B}}(z\partial_z\tilde{\phi}_0) = -\partial_\zeta(\zeta\hat{\phi}_0), \tag{3.18}$$

per la qual cosa l'Equació (3.3) es transforma en

$$\partial_\tau\hat{\phi}_0 - \frac{1}{8}\left(\hat{\phi}_0 + \zeta\partial_\zeta\hat{\phi}_0\right)^{*2} + 2\zeta(1-\mu\sin\tau) = 0. \tag{3.19}$$

Per tal d'estudiar les solucions d'aquesta equació, ens interessarà fer algun canvi que ens la transformi en una més addient per aplicar el mètode de les majorants. A partir de $\tilde{\phi}_0 \in z^{-1}\mathcal{P}[[z^{-1}]]$ (donada al Lema 3.4) que té primer terme $4z^{-1}$, s'obté una nova sèrie formal $\tilde{F}$ segons

$$\begin{aligned}\tilde{F}(z,\tau;\mu) =&\mu^{-1}(1+\frac{1}{4}\,z^2\partial_z\tilde{\phi}_0(z,\tau;\mu)) = \sum_{j\geq 0} F_j(\tau;\mu)z^{-j-1} = \\ =&(\cos\tau)z^{-1} + (3\sin\tau + \frac{1}{4}\mu)z^{-2} + O(z^{-3})\end{aligned} \tag{3.20}$$

i que sovint ens interessarà caracteritzar amb la fórmula:

$$-\frac{1}{4}\,z^2\partial_z\tilde{\phi}_0 = 1-\mu\tilde{F} \tag{3.21}$$

o bé

$$-\partial_z\tilde{\phi}_0 = 4z^{-2} - 4\mu z^{-2}\tilde{F}, \tag{3.22}$$

expressió que ens permet donar còmodament una relació entre les transformades de Borel formals, usant les propietats (3.18):

$$\zeta\hat{\phi}_0(\zeta,\tau;\mu) = 4\zeta - 4\mu\big(\zeta * \hat{F}(\zeta,\tau;\mu)\big) \;\Rightarrow\; \hat{\phi}_0(\zeta,\tau;\mu) = 4 - 4\mu\zeta^{-1}\big(\zeta * \hat{F}(\zeta,\tau;\mu)\big). \tag{3.23}$$

Lema 3.7. *La sèrie formal $\hat{F}$ definida per (3.23) és, per a cada $\mu \in \mathbb{C}$, l'única solució a $\mathcal{P}[[\zeta]]$ de l'equació*

$$\hat{F} = \partial_\zeta^2 \mathcal{E}(\frac{1}{2}\zeta \sin\tau) + \frac{1}{2}\mu\big(\mathcal{E}''(\zeta * \hat{F}^{*2}) + 2\mathcal{E}'(1 * \hat{F}^{*2}) + \mathcal{E}(\hat{F}^{*2})\big), \tag{3.24}$$

on l'operador $\mathcal{E}$ de $\mathcal{P}[[\zeta]]$ està definit usant desenvolupaments de Fourier $\hat{X} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{X}^{[k]} e^{ik\tau}$, $\hat{Y} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{Y}^{[k]} e^{ik\tau}$ (compte que $\hat{X}^{[k]}, \hat{Y}^{[k]} \in \mathbb{C}[[\zeta]]$): $\hat{X} = \mathcal{E}\hat{Y}$ si i només si

$$\hat{X}^{[k]} = \frac{\zeta}{\zeta - ik}\hat{Y}^{[k]}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.25}$$

i $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ estan definits anàlogament per

$$(\mathcal{E}'\hat{Y})^{[k]} = -\frac{ik}{(\zeta - ik)^2}\hat{Y}^{[k]}, \quad (\mathcal{E}''\hat{Y})^{[k]} = \frac{2ik}{(\zeta - ik)^3}\hat{Y}^{[k]}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Demostració. El canvi de sèries

$$\tilde{\phi}_0 = 4z^{-1} + 4\mu\partial_z^{-1}\tilde{G}, \quad \tilde{G} \in z^{-3}\mathcal{P}[[z^{-1}]]$$

(on es considera ∂_z com a operador invertible $z^{-1}\mathcal{P}[[z^{-1}]] \to z^{-2}\mathcal{P}[[z^{-1}]]$) transforma l'Equació (3.3) en

$$(\partial_\tau + \partial_z)\tilde{G} = -z^{-3}\sin\tau + \frac{1}{2}\,\mu\,\partial_z\big((z\tilde{G})^2\big).$$

Corresponentment, al pla de Borel, $\hat{\phi}_0 = 4 - 4\mu\zeta^{-1}\hat{G}$, i podem buscar $\hat{G}$ com l'única solució formal a $\zeta^2\mathcal{P}[[\zeta]]$ de l'equació

$$\zeta^{-1}(\zeta - \partial_\tau)\hat{G} = \frac{1}{2}\,\zeta\sin\tau + \frac{1}{2}\,\mu(\partial_\zeta\hat{G})^{*2}. \tag{3.26}$$

L'invers de l'operador lineal que apareix a la part esquerra no és res més que el $\mathcal{E}$:

$$\zeta^{-1}(\zeta - \partial_\tau)\hat{X} = \hat{Y} \Leftrightarrow \hat{X} = \mathcal{E}\hat{Y}$$

(fixem-nos que $\hat{X}^{[0]} = \hat{Y}^{[0]}$). Per tant, l'Equació (3.26) pot reescriure's com

$$\hat{G} = \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\,\zeta\sin\tau\right) + \frac{1}{2}\,\mu\,\mathcal{E}\big((\partial_\zeta\hat{G})^{*2}\big).$$

Usant ara la propietat $\partial_\zeta^2 \circ \mathcal{E} = \mathcal{E}'' + 2\mathcal{E}' \circ \partial_\zeta + \mathcal{E} \circ \partial_\zeta^2$, derivem dues vegades per arribar a:

$$\partial_\zeta^2\hat{G} = \partial_\zeta^2\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\,\zeta\sin\tau\right) + \frac{1}{2}\mu\left[\mathcal{E}''\left((\partial_\zeta\hat{G})^{*2}\right) + 2\mathcal{E}'\left(\partial_\zeta\big((\partial_\zeta\hat{G})^{*2}\big)\right) + \mathcal{E}\left(\partial_\zeta^2\big((\partial_\zeta\hat{G})^{*2}\big)\right)\right].$$

Però de (3.22), $\hat{G} \in \zeta^2\mathcal{P}[[\zeta]]$ pot escriure's com $\hat{G} = \zeta * \hat{F}$, amb la qual cosa $\partial_\zeta\hat{G} = 1 * \hat{F}$ i arribem a les relacions:

$$\begin{aligned} (\partial_\zeta\hat{G})^{*2} &= (1 * \hat{F}) * (1 * \hat{F}) = \zeta * \hat{F}^{*2}, \\ \partial_\zeta\big((\partial_\zeta\hat{G})^{*2}\big) &= 1 * \hat{F}^{*2}, \quad \partial_\zeta^2\big((\partial_\zeta\hat{G})^{*2}\big) = \hat{F}^{*2}, \end{aligned}$$

que ens porten a l'Equació (3.24), que té per única solució a $\mathcal{P}[[\zeta]]$ la $\hat{F}$ definida a (3.23). ■

Podem ara establir el resultat principal d'aquesta secció.

Teorema 3.8. *Les transformades de Borel formals $\hat{\phi}_0(\zeta,\tau;\mu)$ i $\hat{F}(\zeta,\tau;\mu)$ són convergents per a ζ prop de l'origen (uniformement en τ i μ). Les funcions holomorfes resultants de variables ζ, τ i μ (per a les quals mantindrem la notació $\hat{\phi}_0$ i $\hat{F}$) admeten una continuació analítica a $\mathcal{R}^{(1)}\times(\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})\times\mathbb{C}$. A més, per a cada $\rho\in\left]0,\frac{1}{3}\right[$, existeix una funció contínua ℓ a $\mathcal{R}^{(1)}_\rho$ tal que*

$$\forall(\zeta,\tau,\mu)\in\mathcal{R}^{(1)}_\rho\times(\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})\times\mathbb{C},\quad |\hat{F}(\zeta,\tau;\mu)|\le 2\rho^{-3}\cosh(\Im m\,\tau)\,e^{c\,\ell(\zeta)},\tag{3.27}$$

on $c=24\rho^{-2}\text{màx}\left\{\rho^{-2}|\mu|\cosh(\Im\text{m}\,\tau),\left(|\mu|\cosh(\Im\text{m}\,\tau)\right)^{1/3}\right\}$ *i*

$$\left|\overset{\bullet}{\zeta}\right|\le\ell(\zeta)\le(2m+1)\left|\overset{\bullet}{\zeta}\right|+12m(m+1),\tag{3.28}$$

on l'enter m indica sobre quin full de $\mathcal{R}$ està el punt ζ: $m=0$ si $\zeta\in\mathcal{R}^{(0)}$, i si no és el cas, m està determinat per la necessitat de travessar $[mi,(m+1)i]$ o $[-mi,-(m+1)i]$ per tal de representar ζ (necessàriament $1\le m<\frac{1}{2}(\rho^{-1}-1)$).

Finalment, per a $(\zeta,\tau,\mu)\in\mathcal{R}^{(1)}_\rho\times(\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})\times\mathbb{C}$,

$$|\hat{\phi}_0(\zeta,\tau;\mu)|\le 4+4|\mu|\rho^{-3}\cosh(\Im m\,\tau)\,\frac{\ell(\zeta)^2}{\left|\overset{\bullet}{\zeta}\right|}\,e^{c\,\ell(\zeta)}.\tag{3.29}$$

Observació 3.9. *La funció ℓ és la que s'ha definit al Lema 3.3. Usant aquest Lema, de la desigualtat (3.27) s'obté directament la (3.29).*

Observació 3.10. *No estem particularment interessats en valors de τ complexes, però, com que treballem amb desenvolupaments de Fourier, no cal fer distincions i si ens interessa, al final, podem concretar els resultats per al cas que τ prengui valors reals.*

La demostració del Teorema 3.8 pot separar-se clarament en dues parts, les quals donarem sota els títols Analiticitat al full principal i Continuació analítica als mig-fulls propers.

Analiticitat al full principal.

La sèrie formal $\hat{F}\in\mathcal{P}[[\zeta]]$ establerta al Lema 3.7 és la transformada de Borel formal de $\tilde{F}$ definida a (3.20), per tant, pot escriure's com $\sum_{j\ge0}F_j(\tau;\mu)\zeta^j/j!$, on F_j són polinomis trigonomètrics en τ, els quals depenen polinòmicament de μ. Demostrarem la convergència d'aquesta sèrie i l'holomorfia a $\mathcal{R}^{(0)}\times(\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})\times\mathbb{C}$ de la funció analítica resultant; això òbviament implica resultats anàlegs per a $\hat{\phi}_0$. Sigui $\rho\in]0,1[$ fixat.

Proposició 3.11. *Per a cada τ i μ, la sèrie de potències $\hat{F}$ té radi de convergència positiu respecte ζ i la funció analítica resultant s'estén analíticament a $\mathcal{R}^{(0)}_\rho\times(\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})\times\mathbb{C}$ on satisfà la desigualtat (3.27) amb $\ell(\zeta)=|\zeta|$.*

Per demostrar aquesta proposició ens interessarà buscar $\hat{F}$ de la forma $\sum_{n\geq 0}\mu^n\hat{F}_n(\zeta,\tau)$, per tant desenvolupem l'Equació (3.24) en potències de μ i obtenim

$$\hat{F}_0 = \partial_\zeta^2\mathcal{E}(\frac{1}{2}\zeta\sin\tau) = -\frac{i}{2(\zeta+i)^3}\,e^{-i\tau} + \frac{i}{2(\zeta-i)^3}\,e^{i\tau}, \tag{3.30}$$

$$\hat{F}_n = \frac{1}{2}\sum_{n_1+n_2=n-1}\big(\mathcal{E}''(\zeta*\hat{F}_{n_1}*\hat{F}_{n_2}) + 2\mathcal{E}'(1*\hat{F}_{n_1}*\hat{F}_{n_2}) + \mathcal{E}(\hat{F}_{n_1}*\hat{F}_{n_2})\big), \qquad n\geq 1. \tag{3.31}$$

Com que $\frac{\zeta^k}{k!}*\frac{\zeta^j}{j!}=\frac{\zeta^{k+j+1}}{(k+j+1)!}$ i els operadors $\mathcal{E},\mathcal{E}',\mathcal{E}''$ no decreixen el grau en ζ, obtenim que $\hat{F}_n\in\zeta^n\mathcal{P}[[\zeta]]$. Observi's que això correspon al fet que els coeficients $F_j(\tau;\mu)$ siguin polinomis de μ de, com a molt, grau j. Així doncs, per a cada $\mu\in\mathbb{C}$, la sèrie $\sum_{n\geq 0}\mu^n\hat{F}_n(\zeta,\tau)$ convergeix fomalment cap a $\hat{F}\in\mathcal{P}[[\zeta]]$.

Com que $\hat{F}_0$ és meromorfa i l'analiticitat a $\mathcal{R}^{(0)}$ es preserva sota l'efecte dels operadors $\mathcal{E},\mathcal{E}',\mathcal{E}''$ i la convolució, per inducció sobre n es demostra que les sèries $\hat{F}_n$ són convergents i les funcions resultants són holomorfes a $\mathcal{R}^{(0)}\times(\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})$. De fet, les convolucions consecutives són les responsables de l'aparició de singularitats més complicades a $\pm i[1,\infty[$: per una banda, creen harmònics d'ordre més alt i l'acció dels operadors $\mathcal{E},\mathcal{E}',\mathcal{E}''$ dóna pols a tots els punts de $i\mathbb{Z}^*$; per altra banda, provoquen ramificacions en aquests punts singulars.

Per a la demostració de la Proposició 3.11, n'hi ha prou doncs amb demostrar la convergència uniforme de la sèrie de funcions holomorfes $\sum\mu^n\hat{F}_n$, perquè l'holomorfia a $\mathcal{R}^{(0)}\times(\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})$ de les $\hat{F}_n$ es transmetrà aleshores a $\hat{F}$.

Definició 3.12. Sèrie de Fourier majorant a $\mathcal{R}^{(0)}$: *direm que $\hat{A}\ll\hat{\mathcal{A}}$ si*

- $\hat{A}=\hat{A}(\zeta,\tau)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{A}^{[k]}(\zeta)\,e^{ik\tau}$, *on cada $\hat{A}^{[k]}$ és analítica a $\mathcal{R}^{(0)}_\rho$;*
- $\hat{\mathcal{A}}=\hat{\mathcal{A}}(\zeta,\tau)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{\mathcal{A}}^{[k]}(\zeta)\,e^{ik\tau}$, *on cada $\hat{\mathcal{A}}^{[k]}$ és contínua a $\mathbb{R}^+$ i la sèrie de Fourier $\sum\hat{\mathcal{A}}^{[k]}(\zeta)\,e^{ik\tau}$ és convergent per a $\tau\in\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ (uniformement per a ζ en qualsevol compacte de $\mathbb{R}^+$);*
- $\forall k\in\mathbb{Z},\ \forall\zeta\in\mathcal{R}^{(0)}_\rho,\ \ |\hat{A}^{[k]}(\zeta)|\leq\hat{\mathcal{A}}^{[k]}(|\zeta|)$.

En el nostre cas, les sèries de Fourier majorants $\hat{\mathcal{A}}(\zeta,\tau)$ sempre seran polinomis trigonomètrics. Una conclusió immediata d'aquesta definició és que podem obtenir una majoració estàndard per a $\hat{A}(\zeta,\tau)$:

$$\hat{A}\ll\hat{\mathcal{A}} \quad\Rightarrow\quad \forall\zeta\in\mathcal{R}^{(0)}_\rho,\ \forall\tau\in\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z},\ \ |\hat{A}(\zeta,\tau)|\leq\hat{\mathcal{A}}(|\zeta|,i\,\Im m\,\tau). \tag{3.32}$$

A les Equacions (3.31) apareixen convolucions i els operadors $\mathcal{E},\mathcal{E}',\mathcal{E}''$, per tant, per tal d'aplicar el mètode de les funcions majorants al nostre problema, ens interessa establir les majorants dels resultats d'aquests operadors.

Lema 3.13. *Si $\hat{A}\ll\hat{\mathcal{A}}$ i $\hat{B}\ll\hat{\mathcal{B}}$,*

$$\hat{A}*\hat{B}\ll\hat{\mathcal{A}}*\hat{\mathcal{B}},\quad \mathcal{E}\hat{A}\ll(1+\rho^{-1})\hat{\mathcal{A}},\quad \mathcal{E}'\hat{A}\ll\rho^{-2}\hat{\mathcal{A}},\quad \mathcal{E}''\hat{A}\ll 2\rho^{-3}\hat{\mathcal{A}}.$$

Demostració. L'analiticitat a $\mathcal{R}_\rho^{(0)}$ es preserva sota convolució perquè aquest conjunt és en forma d'estrella respecte $\zeta = 0$. Per a la primera desigualtat només cal aplicar la definició de convolució; per a les altres, observi's que, per a $k \in \mathbb{Z}$ i $\zeta \in \mathcal{R}_\rho^{(0)}$, $|\zeta - ik| \geq \rho|k|$, per tant

$$\left|\frac{\zeta}{\zeta - ik}\right| = \left|1 + \frac{ik}{\zeta - ik}\right| \leq 1 + \rho^{-1}, \quad \left|\frac{ik}{(\zeta - ik)^2}\right| \leq \rho^{-2}, \quad \left|\frac{2ik}{(\zeta - ik)^3}\right| \leq 2\rho^{-3}. \qquad \blacksquare$$

Lema 3.14. *Siguin*

$$\hat{\mathcal{F}}_0 = \rho^{-3}\cos\tau,$$
$$\hat{\mathcal{F}}_n = \sum_{n_1+n_2=n-1} (\rho^{-3}\zeta * \hat{\mathcal{F}}_{n_1} * \hat{\mathcal{F}}_{n_2} + \rho^{-2}\, 1 * \hat{\mathcal{F}}_{n_1} * \hat{\mathcal{F}}_{n_2} + \rho^{-1}\hat{\mathcal{F}}_{n_1} * \hat{\mathcal{F}}_{n_2}), \qquad n \geq 1,$$

aleshores, per a $n \geq 0$, $\hat{F}_n \ll \hat{\mathcal{F}}_n$.

A més, $\hat{\mathcal{F}}_n(\zeta,\tau) = 4^n\rho^{-3n-2}\hat{P}_n(\zeta)\cos^{n+1}\tau$ *on* $\hat{P}_n$ *són polinomis que satisfan*

$$\forall \zeta, X \geq 0, \quad \sum_{n\geq 0} X^n\hat{P}_n(\zeta) \leq 2\rho^{-1}\, e^{\kappa(X)\zeta}, \qquad \textit{amb}\ \ \kappa(X) = \rho^{-1}\text{màx}\left\{6\mathrm{X}, (6\mathrm{X})^{1/3}\right\}. \tag{3.33}$$

Demostració. Per les fórmules recursives (3.30) i (3.31) i el Lema 3.13 (usant que $\rho^{-1} \geq 1$), està clar que les $\hat{\mathcal{F}}_n$ són sèries de Fourier majorants per a les $\hat{F}_n$. Les seves transformades de Laplace formals $\tilde{\mathcal{F}}_n(z,\tau)$ són fàcils de calcular perquè la sèrie generatriu $\tilde{\mathcal{F}} = \sum_{n\geq 0}\mu^n\tilde{\mathcal{F}}_n$ satisfà l'equació quadràtica

$$\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}_0 + \mu(\rho^{-1} + \rho^{-2}z^{-1} + \rho^{-3}z^{-2})\tilde{\mathcal{F}}^2, \qquad \tilde{\mathcal{F}}_0 = \rho^{-3}z^{-1}\cos\tau,$$

per tant

$$\tilde{\mathcal{F}} = \rho^{-3}z^{-1}(\cos\tau)\mathsf{R}\big(4\mu\rho^{-3}(\rho^{-1}z^{-1} + \rho^{-2}z^{-2} + \rho^{-3}z^{-3})\cos\tau\big), \tag{3.34}$$

on $\mathsf{R}(x) = 2x^{-1}\big(1 - (1-x)^{1/2}\big)$. Però com que $\mathsf{R}(x) = \sum_{n\geq 0} r_n x^n$ with $0 < r_n \leq 1$, arribem al resultat

$$\tilde{\mathcal{F}}_n = 4^n r_n\rho^{-3n-2}\tilde{P}_n(z)\cos^{n+1}\tau, \quad \text{amb} \quad \tilde{P}_n(z) = (\rho z)^{-1}\big((\rho z)^{-1} + (\rho z)^{-2} + (\rho z)^{-3}\big)^n,$$

i la corresponent fórmula per a $\hat{\mathcal{F}}_n$ involucra el polinomi $\hat{P}_n(\zeta) = \tilde{\mathcal{B}}\tilde{P}_n(\zeta) = \rho^{-1}1 * \big(\rho^{-1} + \rho^{-2}\zeta + \rho^{-3}\frac{\zeta^2}{2}\big)^{*n}$:

$$\hat{\mathcal{F}}_n = 4^n r_n\rho^{-3n-2}\hat{P}_n(\zeta)\cos^{n+1}\tau.$$

Tenint en compte que $\hat{P}_n(\zeta) = \sum_{j\geq 0} P_{n,j}\frac{\zeta^j}{j!}$, podem escriure

$$\sum_{n\geq 0} X^n\hat{P}_n(\zeta) = \sum_{j\geq 0} Q_j(X)\frac{\zeta^j}{j!}, \qquad \text{amb}\ \ Q_j(X) = \sum_{n\geq 0} P_{n,j}X^n.$$

Ara bé,

$$\tilde{Q}(z,X) = \sum_{j\geq 0} Q_j(X)z^{-j-1} = \sum_{n\geq 0} X^n\tilde{P}_n(z) = (\rho z)^{-1}\sum_{n\geq 0}\Big(X\big((\rho z)^{-1} + (\rho z)^{-2} + (\rho z)^{-3}\big)\Big)^n =$$
$$= \frac{(\rho z)^{-1}}{1 - X\big((\rho z)^{-1} + (\rho z)^{-2} + (\rho z)^{-3}\big)}$$

és convergent si $|\rho z|^{-1} \leq \text{mín}\{(6X)^{-1}, (6X)^{-1/3}\}$ per a qualsevol $X \geq 0$ i

$$|\tilde{Q}(z,X)| \leq |\rho z|^{-1} \frac{1}{1 - 3X \,\text{màx}\,\{|\rho\text{z}|^{-1}, |\rho\text{z}|^{-3}\}}.$$

Però pot comprovar-se que

$$|\rho z|^{-1} \leq \text{mín}\{(6X)^{-1}, (6X)^{-1/3}\} \Rightarrow \text{màx}\left\{|\rho\text{z}|^{-1}, |\rho\text{z}|^{-3}\right\} \leq \frac{1}{6\text{X}}$$

per tant,

$$|\tilde{Q}(z,X)| \leq 2|\rho z|^{-1}$$

i transmetent la fita de $\tilde{Q}(z,X)$ als seus coeficients mitjançant les desigualtats de Cauchy:

$$Q_j(X) \leq 2\rho^{-1}\kappa(X)^j,$$

s'arriba al resultat (3.33). ■

Utilitzant (3.32), el Lema 3.14 implica que, per a cada n,

$$\forall \zeta \in \mathcal{R}_\rho^{(0)},\ \forall \tau \in \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}, \quad |\hat{F}_n(\zeta,\tau)| \leq 4^n \rho^{-3n-2} \hat{P}_n(|\zeta|) \cosh^{n+1}(\Im m\,\tau). \tag{3.35}$$

Amb (3.33), deduïm la convergència uniforme de la sèrie $\sum_{n\geq 0} \mu^n \hat{F}_n(\zeta,\tau)$ de funcions analítiques a $\mathcal{R}_\rho^{(0)}$ i això ens porta a l'analiticitat de $\hat{F}$ a $\mathcal{R}_\rho^{(0)}$ per a tot τ i μ, i obtenim la fita (3.27) (amb $\ell(\zeta) = |\zeta|$):

$$|\hat{F}(\zeta,\tau;\mu)| \leq \rho^{-2}\cosh(\Im m\,\tau) \sum_{n\geq 0} \big(4\rho^{-3}|\mu|\cosh(\Im m\,\tau)\big)^n \hat{P}_n(|\zeta|) \leq \rho^{-2}\cosh(\Im m\,\tau) 2\rho^{-1}\, e^{\kappa(X)|\zeta|},$$

amb $X = 4\rho^{-3}|\mu|\cosh(\Im m\,\tau)$.

Acabada la demostració de la Proposició 3.11 per a $\rho \in]0,1[$, tenim el mateix resultat al full principal $\mathcal{R}^{(0)}$ considerant ρ arbitràriament petit.

Continuació analítica als mig-fulls propers.

Ja vam veure a la Secció 3.2.1 que a $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$ havíem de fer la restricció $\rho \in\ ]0,1/3[$. Per tal d'obtenir ara l'analiticitat de $\hat{F}$ a $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$ i la desigualtat (3.27) amb la funció ℓ definida al Lema 3.3 de la Secció 3.2.1, només haurem d'adaptar la demostració feta a la secció anterior.

Definició 3.15. Sèrie de Fourier majorant a $\mathcal{R}^{(1)}$: *direm que* $\hat{A} \ll_1 \hat{\mathcal{A}}$ *si*

- $\hat{A} = \hat{A}(\zeta,\tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{A}^{[k]}(\zeta)\, e^{ik\tau}$, *on cada* $\hat{A}^{[k]}$ *és analítica a* $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$*;*
- $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{A}}(\zeta,\tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\mathcal{A}}^{[k]}(\zeta)\, e^{ik\tau}$, *on cada* $\hat{\mathcal{A}}^{[k]}$ *és contínua i no decreixent a* $\mathbb{R}^+$*, i la sèrie de Fourier* $\sum \hat{\mathcal{A}}^{[k]}(\zeta)\, e^{ik\tau}$ *és convergent per a* $\tau \in \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ *(uniformement per a* ζ *en qualsevol compacte de* $\mathbb{R}^+$*);*
- $\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall \zeta \in \mathcal{R}_\rho^{(1)},\ \ |\hat{A}^{[k]}(\zeta)| \leq \hat{\mathcal{A}}^{[k]}\big(\ell(\zeta)\big)$.

La propietat (3.32) s'ha de reemplaçar per la

$$\hat{A} \ll_1 \hat{\mathcal{A}} \quad \Rightarrow \quad \forall \zeta \in \mathcal{R}_\rho^{(1)},\ \forall \tau \in \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z},\ \ |\hat{A}(\zeta,\tau)| \leq \hat{\mathcal{A}}\big(\ell(\zeta), i\,\Im m\,\tau\big). \tag{3.36}$$

També tenim una adaptació òbvia del Lema 3.13, el qual incorpora el Lema 3.3. Amb totes aquestes eines, arribem a l'anàleg del Lema 3.14:

Lema 3.16. *Per a qualsevol $n \geq 0$, $\hat{F}_n \ll_1 \hat{\mathcal{F}}_n$, amb les mateixes majorants $\hat{\mathcal{F}}_n$ del Lema 3.14.*

Obtindríem doncs que, per a $\zeta \in \mathcal{R}_\rho^{(1)}$, $\tau \in \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$, $n \geq 0$,

$$|\hat{F}_n(\zeta, \tau)| \leq \rho^{-2} \cosh(\Im m\, \tau)\, X^n \hat{P}_n\big(\ell(\zeta)\big), \qquad X = 4\rho^{-3} \cosh(\Im m\, \tau),$$

i arribem a la maeixa conclusió que abans usant (3.33).

Per acabar la demostració del Teorema 3.8, només queda comprovar la validesa de (3.28) per a qualsevol punt ζ of $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$. Només tindrem en compte el Cas 3 de la Definició 3.2 de Γ_ζ quan $m \geq 1$ (per als altres casos l'adaptació és senzilla): cadascun dels $m+1$ segments entre D_k i $\zeta - D_{m-k}$ $(0 \leq k \leq m)$ té mida $\leq |\overset{\bullet}{\zeta} - mi| + m\rho$, cadascun dels m segments entre $\zeta - D_{m-k}$ i D_{k+1} $(0 \leq k \leq m-1)$ té mida $\leq |\overset{\bullet}{\zeta} - (m+1)i| + (m+1)\rho$, els arcs de circumferència tenen mida total $\leq 2(1+2+\ldots+m)2\pi\rho$, per tant,

$$\ell(\zeta) \leq (2m+1)|\overset{\bullet}{\zeta}| + 2m(m+1)(1+\rho) + 2m(m+1)\rho\pi \leq (2m+1)|\overset{\bullet}{\zeta}| + 4m(m+1) + 8m(m+1).$$

3.2.4 Majors de singularitats.

Seguint [Eca92b] i [CNP93b], en aquesta secció descriurem les nocions bàsiques relacionades amb les singularitats de funcions holomorfes. És suficient tractar les singularitats a l'origen de la superfície de Riemann del logaritme $\underset{\bullet}{\mathbb{C}} = \{\zeta = r\, e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R},\ r > 0\}$, perquè en qualsevol altre cas ens hi podem referir amb una translació adequada. Donats dos nombres reals $\theta_1 < \theta_2$, notarem per S_{θ_1,θ_2} el sector de $\underset{\bullet}{\mathbb{C}}$ definit per $\theta_1 < \arg\zeta < \theta_2$.

Definició 3.17. *Siguin $\theta \in \mathbb{R}$ i $\alpha > 0$. Considerem l'espai dels germs de funcions holomorfes $\overset{\vee}{\varphi}(\zeta)$ per a $\zeta \in S_{\theta-\alpha-2\pi,\theta+\alpha}$ i $|\zeta|$ suficientment petit. El seu quocient per $\mathbb{C}\{\zeta\}$ és, per definició, l'espai $\mathrm{SING}_{\theta,\alpha}$ de les singularitats en la direcció θ amb obertura 2α. Un germ $\overset{\vee}{\varphi}$ s'anomena major, la seva classe a $\mathrm{SING}_{\theta,\alpha}$ s'anomena la singularitat de $\overset{\vee}{\varphi}$ i la notarem amb $\mathrm{sing}(\overset{\vee}{\varphi})$ o $\overset{\triangledown}{\varphi}$.*

A qualsevol singularitat $\overset{\triangledown}{\varphi}$, podem associar el seu menor $\hat{\varphi}$, el qual s'obté a partir de qualsevol major $\overset{\vee}{\varphi}$ segons la fórmula:

$$\hat{\varphi}(\zeta) = \overset{\vee}{\varphi}(\zeta) - \overset{\vee}{\varphi}(\zeta\, e^{-2\pi i}).$$

És per tant, un germ de funció holomorfa a $S_{\theta-\alpha,\theta+\alpha}$.

Una singularitat i el seu menor també s'anomenen, respectivament, "microfunció" i la seva "variació". Els exemples més senzills de singularitats són la singularitat de Dirac $\delta = \mathrm{sing}\left(\frac{1}{2\pi i\zeta}\right)$, o més en general les seves derivades $\delta^{(n)} = \mathrm{sing}\left(\frac{(-1)^n n!}{2\pi i\zeta^{n+1}}\right)$ amb $n \in \mathbb{N}$, i la singularitat logarítmica $\mathrm{sing}\left(\hat{\varphi}(\zeta)\frac{\log\zeta}{2\pi i}\right)$ per a qualsevol $\hat{\varphi} \in \mathbb{C}\{\zeta\}$ (la determinació del logaritme escollida no és important); tots són elements de $\mathrm{SING}_{\theta,\alpha}$ per a qualssevol θ i α. La singularitat logarítmica és un cas particular d'una "singularitat integrable".

Definició 3.18. *Una singularitat s'anomena integrable si admet un major $\overset{\vee}{\varphi}$ tal que $\zeta\overset{\vee}{\varphi}(\zeta) \to 0$ uniformement quan $\zeta \to 0$ a qualsevol subsector de $S_{\theta-\alpha-2\pi,\theta+\alpha}$. Notarem per $\mathrm{SING}^{\mathrm{int}}_{\theta,\alpha}$ l'espai de les singularitats integrables en la direcció θ amb obertura 2α.*

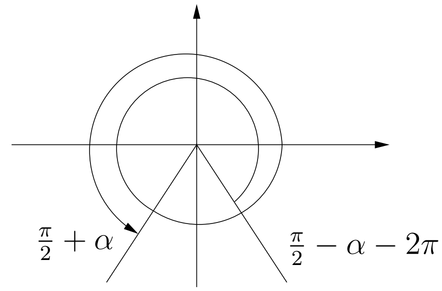


Figura 3.4: Domini d'un element de $\mathrm{SING}_{\theta,\alpha}$ amb $\theta=\pi/2$ i $\alpha\in(0,2\pi)$.

Definició 3.19. *Un menor integrable és un germ de funció holomorfa $\hat{\varphi}$ a $S_{\theta-\alpha,\theta+\alpha}$, el qual admet una primitiva $\hat{\psi}$ tal que $\hat{\psi}(\zeta)\to 0$ quan $\zeta\to 0$ uniformement en un subsector de $S_{\theta-\alpha,\theta+\alpha}$. Notarem per $\mathrm{ANA}^{\mathrm{int}}_{\theta,\alpha}$ el corresponent espai de germs.*

Les singularitats integrables també s'anomenen "petites microfuncions" i el següent lema les caracteritza a traves dels menors integrables.

Lema 3.20. *L'aplicació lineal $\overset{\triangledown}{\varphi}\mapsto\hat{\varphi}$ indueix una bijecció de $\mathrm{SING}^{\mathrm{int}}_{\theta,\alpha}$ a $\mathrm{ANA}^{\mathrm{int}}_{\theta,\alpha}$. S'usa $\hat{\varphi}\mapsto{}^{\flat}\hat{\varphi}$ per indicar la seva aplicació inversa.*

La demostració d'aquest lema es faria, per una part, integrant un representant de la singularitat al voltant de l'origen, i per altra part, usant la fórmula integral de Cauchy (vegi's [CNP93b, p. 159–160]). Un exemple molt senzill és quan $\hat{\varphi}\in\mathbb{C}\{\zeta\}$, que aleshores ${}^{\flat}\hat{\varphi}=\operatorname{sing}\left(\hat{\varphi}(\zeta)\frac{\log\zeta}{2\pi i}\right)$.

La convolució definida a (3.10) dota $\mathrm{ANA}^{\mathrm{int}}_{\theta,\alpha}$ d'una estructura d'àlgebra, però es pot estendre la convolució als majors de les singularitats, resultat que recollim en el següent lema, tot i que no en donarem la demostració.

Lema 3.21. *Siguin $\overset{\vee}{\varphi}$ i $\overset{\vee}{\psi}$ els majors de les singularitats $\overset{\triangledown}{\varphi}$ i $\overset{\triangledown}{\psi}$ de $\mathrm{SING}_{\theta,\alpha}$, i sigui $\eta\in S_{\theta-\alpha-2\pi,\theta+\alpha}$ suficientment proper a l'origen. El germ definit per*

$$\overset{\vee}{\chi}_{\eta}(\zeta)=\int_{I_{\eta,\zeta}}\overset{\vee}{\varphi}(\zeta_1)\overset{\vee}{\psi}(\zeta-\zeta_1)\,d\zeta_1,\qquad \arg\eta-\pi<\arg\zeta<\arg\eta,\quad |\zeta|\ \textit{suficientment petit},$$

on $I_{\eta,\zeta}$ és el segment rectilini $[\eta,\eta\,e^{-i\pi}+\zeta]$, s'estén analíticament a $S_{\theta-\alpha-2\pi,\theta+\alpha}$ (per a $|\zeta|$ suficientment petit); la seva classe a $\mathrm{SING}_{\theta,\alpha}$ només depèn de $\overset{\triangledown}{\varphi}$ i $\overset{\triangledown}{\psi}$. La definició $\operatorname{sing}(\overset{\vee}{\chi}_{\eta})=\overset{\triangledown}{\varphi}*\overset{\triangledown}{\psi}$ dota $\mathrm{SING}_{\theta,\alpha}$ d'una estructura d'àlgebra commutativa, amb δ com a unitat.

Si a més $\overset{\triangledown}{\varphi}$ i $\overset{\triangledown}{\psi}$ són singularitats integrables, també ho és $\overset{\triangledown}{\varphi}*\overset{\triangledown}{\psi}$ i podem escriure ${}^{\flat}\hat{\varphi}*{}^{\flat}\hat{\psi}={}^{\flat}(\hat{\varphi}*\hat{\psi})$.

Observi's que el segment rectilini $I_{\eta,\zeta}$ s'ha construït de manera que $\forall\zeta_1\in I_{\eta,\zeta}$ es té que $\zeta_1=t\eta+(1-t)\,(\eta\,e^{-i\pi}+\zeta)$ i aleshores

$$\zeta-\zeta_1=\zeta-t\eta-(1-t)\left(\eta\,e^{-i\pi}+\zeta\right)=(1-t)\eta+t\left(\eta\,e^{-i\pi}+\zeta\right)\in I_{\eta,\zeta},$$

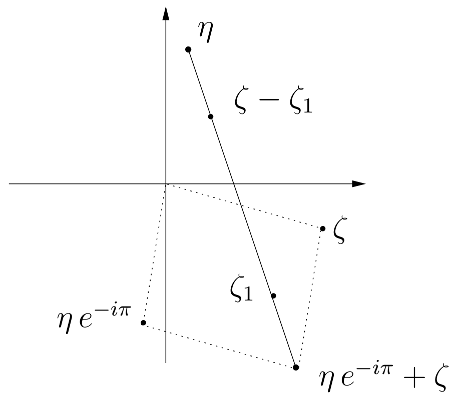


Figura 3.5: El segment $I_{\eta,\zeta}$.

d'on, a més, es dedueix que els dos punts són simètrics respecte el punt mig del segment (vegi's la Figura 3.5).

Per a qualsevol singularitat integrable $\overset{\triangledown}{\varphi}$, es pot definir l'anàleg convolutiu de l'exponencial:

$$\exp_*\big(\overset{\triangledown}{\varphi}\big) = \delta + \overset{\triangledown}{\varphi} + \frac{1}{2!}\,\overset{\triangledown}{\varphi} * \overset{\triangledown}{\varphi} + \frac{1}{3!}\,\overset{\triangledown}{\varphi} * \overset{\triangledown}{\varphi} * \overset{\triangledown}{\varphi} + \dots \tag{3.37}$$

La convergència de la corresponent sèrie de menors és òbvia quan $\hat{\varphi}(\zeta) \in \mathbb{C}\{\zeta\}$, doncs un major de $\exp_*\big({}^\flat\hat{\varphi}\big)$ és

$$\frac{1}{2\pi i\zeta} + \hat{\psi}(\zeta)\frac{\log\zeta}{2\pi i}, \qquad \text{amb } \ \hat{\psi} = \hat{\varphi} + \frac{1}{2!}\,\hat{\varphi} * \hat{\varphi} + \frac{1}{3!}\,\hat{\varphi} * \hat{\varphi} * \hat{\varphi} + \dots \tag{3.38}$$

(vegi's [CNP93b, p. 161–162] per al cas general).

La derivada d'una singularitat $\overset{\triangledown}{\varphi} = \mathrm{sing}(\overset{\vee}{\varphi})$ està definida per la singularitat $\mathrm{sing}(\partial_\zeta \overset{\vee}{\varphi})$. Però l'operador ∂_ζ no és una derivació a l'àlgebra $\{\mathrm{SING}_{\theta,\alpha}, *\}$ perquè:

$$\partial_\zeta(\overset{\triangledown}{\varphi} * \overset{\triangledown}{\psi}) = (\partial_\zeta \overset{\triangledown}{\varphi}) * \overset{\triangledown}{\psi} = \overset{\triangledown}{\varphi} * (\partial_\zeta \overset{\triangledown}{\psi});$$

per contra, l'operador

$$\partial \,:\, \mathrm{sing}\big(\overset{\vee}{\varphi}(\zeta)\big) \mapsto \mathrm{sing}\big(-\zeta\overset{\vee}{\varphi}(\zeta)\big), \tag{3.39}$$

sí és una derivació.

Observació 3.22. *Algunes singularitats poden ser desenvolupades en sèries de monomis, és a dir, en singularitats elementals* $\delta^{(n)}$ *amb* $n \in \mathbb{Z}$ *(definim* $\delta^{(-n)} = {}^\flat\big(\zeta^{n-1}/\Gamma(n)\big)$ *if* $n \geq 1$*), o* $\mathrm{sing}\big(\zeta^{\sigma-1}/((1 - e^{-2\pi i\sigma})\Gamma(\sigma))\big)$ *amb* $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$*, etc. Sobre elles es pot definir la tranformada de Laplace formal a partir de la seva acció sobre cada monomi:*

$$\tilde{\mathcal{L}} : \delta^{(p)} \to z^p$$

de manera que la convolució i la multiplicació s'intercanvien. Recuperem així la transformada de Borel formal definida a (1.21) com la seva aplicació inversa (prenent els menors en el cas de singularitats integrables).

Definició 3.23. *S'anomenen singularitats simplement ramificades les que admeten un representant de la forma:*

$$\overset{\vee}{\varphi}(\zeta) = \overset{\vee}{P}(\zeta) + \hat{\varphi}(\zeta)\frac{\log\zeta}{2\pi i}$$

on $\overset{\vee}{P}$ és un germ meroform a 0 i $\hat{\varphi}$ un germ regular, és a dir, que la singularitat $\overset{\triangledown}{\varphi}$ pot descomposar-se de manera única com:

$$\overset{\triangledown}{\varphi} = \sum_{0\leq n\leq N} A_n\delta^{(n)} + \sum_{n\leq -1} B_n\delta^{(n)},$$

on les constants A_n són els coeficients de la part polar i les B_n els coeficients d'un element de $\mathbb{C}_1[[z^{-1}]$, les sèries Gevrey-1. Seguint amb la notació de la Secció 3.2.1, l'operador $\tilde{\mathcal{L}}$ estableix un isomorfisme entre l'àlgebra convolutiva de les singularitats simplement ramificades i l'àlgebra multiplicativa $\mathbb{C}_1[z][[z^{-1}]$.

3.2.5 Les derivades estrangeres primeres.

La Teoria de la Ressurgència se centra sobre singularitats els menors de les quals tenen bones propietats de continuació analítica.

La definició que donem a continuació està adaptada a la nostra situació en la qual el primer punt singular que trobem quan sortim de l'origen en la direcció θ és ω (el nostre cas serà $\omega = e^{i\theta}$ amb $\theta = \pi/2$ o $3\pi/2$).

Definició 3.24. *Sigui $\theta \in \mathbb{R}$ i $\beta > 0$. Definim $\mathrm{RES}^{(1)}_{\theta,\beta}$ com l'espai de les $\overset{\triangledown}{\varphi} \in \mathrm{SING}_{\theta,\alpha}$ per algun $\alpha > 0$ i el menor del qual $\hat{\varphi}$ s'estén analíticament al llarg de $]0,\omega[$ o sigui que el germ $\overset{\vee}{\psi}(\zeta) = \hat{\varphi}(\omega+\zeta)$, el qual està definit per a $\arg\zeta$ prop de $\theta-\pi$, s'estén analíticament a $S_{\theta-\beta-2\pi,\theta+\beta}$ (per a $|\zeta|$ suficientment petit).*

Definim l'operador $\Delta_\omega : \mathrm{RES}^{(1)}_{\theta,\beta} \to \mathrm{SING}_{\theta,\beta}$ com $\Delta_\omega\overset{\triangledown}{\varphi} = \mathrm{sing}(\overset{\vee}{\psi})$.

Vegem algunes de les propietats d'aquest operador.

Proposició 3.25. *1. Δ_ω s'anul·la sobre una singularitat elemental $\delta^{(n)}$:*

$$\Delta_\omega\delta^{(n)} = 0 \quad \text{amb} \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.40}$$

2. Δ_ω no commuta amb l'operador ∂ definit a (3.39), sinó que la seva relació podem escriure-la com:

$$[\Delta_\omega, \partial] = -\omega\Delta_\omega; \tag{3.41}$$

3. Si $\overset{\triangledown}{\varphi}_1, \overset{\triangledown}{\varphi}_2 \in \mathrm{RES}^{(1)}_{\theta,\beta}$, aleshores $\overset{\triangledown}{\varphi}_1 * \overset{\triangledown}{\varphi}_2 \in \mathrm{RES}^{(1)}_{\theta,\beta}$ i

$$\Delta_\omega(\overset{\triangledown}{\varphi}_1 * \overset{\triangledown}{\varphi}_2) = (\Delta_\omega\overset{\triangledown}{\varphi}_1) * \overset{\triangledown}{\varphi}_2 + \overset{\triangledown}{\varphi}_1 * (\Delta_\omega\overset{\triangledown}{\varphi}_2). \tag{3.42}$$

Demostració. Com que el menor de $\delta^{(n)}$ és 0 si $n \geq 0$ o bé $\zeta^{-n-1}/\Gamma(-n)$ si $n \leq -1$, no tenen singularitats a ω i per tant $\Delta_\omega \delta^{(n)} = 0$.

El menor de la singularitat $\overset{\triangledown}{\chi} = \partial \overset{\triangledown}{\varphi} = -\zeta \overset{\triangledown}{\varphi}$ és

$$\hat{\chi}(\zeta) = \check{\chi}(\zeta) - \check{\chi}(\zeta e^{-2\pi i}) = -\zeta \check{\varphi}(\zeta) + \zeta e^{-2\pi i} \check{\varphi}(\zeta e^{-2\pi i}) = -\zeta\big(\check{\varphi}(\zeta) - \check{\varphi}(\zeta e^{-2\pi i})\big) = -\zeta \hat{\varphi}(\zeta),$$

per tant,

$$\begin{aligned}\Delta_\omega \partial \overset{\triangledown}{\varphi} =& \operatorname{sing}(\hat{\chi}(\omega+\zeta)) = \operatorname{sing}(-(\omega+\zeta)\hat{\varphi}(\omega+\zeta)) = -(\omega+\zeta)\operatorname{sing}(\hat{\varphi}(\omega+\zeta)) = \\ =& -(\omega+\zeta)\Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi} = -\omega \Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi} + \partial \Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi}.\end{aligned}$$

Finalment, la terecera propietat necessita més detall i pot trobar-se la seva demostració a [CNP93b]. ■

La tercera propietat, i per contraposició amb la derivació natural ∂_ζ, dóna el nom de *derivada estrangera d'índex* ω a l'operador Δ_ω. Una altra propietat, que no usarem fins la Secció 3.4 però que també recorda la derivació natural, és

$$\Delta_\omega \exp_*\big(\overset{\triangledown}{\varphi}\big) = \exp_*\big(\overset{\triangledown}{\varphi}\big) * \Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi};$$

efectivament, només cal tenir en compte la regla de Leibnitz que acabem d'enunciar i que $\Delta_\omega \delta = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta_\omega \exp_*\big(\overset{\triangledown}{\varphi}\big) =& \Delta_\omega\Big(\delta + \overset{\triangledown}{\varphi} + \frac{1}{2!}\overset{\triangledown}{\varphi} * \overset{\triangledown}{\varphi} + \frac{1}{3!}\overset{\triangledown}{\varphi} * \overset{\triangledown}{\varphi} * \overset{\triangledown}{\varphi} + \dots\Big) = \\ =& \Delta_\omega \delta + \Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi} + \frac{1}{2!} 2\, \overset{\triangledown}{\varphi} * \Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi} + \frac{1}{3!} 3\, \overset{\triangledown}{\varphi} * \overset{\triangledown}{\varphi} * \Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi} + \dots = \\ =& \Big(\delta + \overset{\triangledown}{\varphi} + \frac{1}{2!}\overset{\triangledown}{\varphi} * \overset{\triangledown}{\varphi} + \dots\Big) * \Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi} = \exp_*\big(\overset{\triangledown}{\varphi}\big) * \Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi}.\end{aligned}$$

Quan hi ha una rèplica formal, com la que indicàvem a l'Observació 3.22, l'operador Δ_ω pot considerar-se actuant sobre desenvolupaments formals en z:

$$\Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi} = \sum_{n \leq N} A_n \delta^{(n)} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_\omega \tilde{\varphi} = \sum_{n \leq N} A_n z^n. \tag{3.43}$$

Això ens permet reformular-ho tot en el model formal, tot i que la interpretació sigui al model convolutiu. Aleshores, recordant que l'operador ∂ correspon al $\frac{\partial}{\partial z}$ en el model formal, la relació (3.41) pot expressar-se com la commutació de $\frac{\partial}{\partial z}$ i la *derivada estrangera puntejada* $\dot{\Delta}_\omega = e^{-\omega z}\, \Delta_\omega$:

$$\begin{aligned}&\Delta_\omega \partial \overset{\triangledown}{\varphi} = (\partial - \omega)\Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi} \;\Rightarrow\; \Delta_\omega \tfrac{\partial}{\partial z}\, \tilde{\varphi} = \big(\tfrac{\partial}{\partial z} - \omega\big)\, \Delta_\omega \tilde{\varphi} \;\Rightarrow \\ &\qquad\qquad \Rightarrow\; \dot{\Delta}_\omega \tilde{\varphi} = e^{-\omega z} \Delta_\omega \tfrac{\partial}{\partial z}\, \tilde{\varphi} = e^{-\omega z}\, \big(\tfrac{\partial}{\partial z} - \omega\big)\, \Delta_\omega \tilde{\varphi} = \tfrac{\partial}{\partial z}\, \big(e^{-\omega z} \Delta_\omega \tilde{\varphi}\big) = \tfrac{\partial}{\partial z}\, \dot{\Delta}_\omega \tilde{\varphi}.\end{aligned}$$

I passant la convolució al producte, també tenim la derivada d'una exponencial:

$$\Delta_\omega \exp\big(\tilde{\varphi}\big) = \exp\big(\tilde{\varphi}\big) \Delta_\omega \tilde{\varphi}. \tag{3.44}$$

Per descomptat, totes les definicions són aplicables al cas de majors que depenguin de variables $\tau \in \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ i $\mu \in \mathbb{C}$, només cal tractar-les com a paràmetres. Cal indicar que, quan treballem amb singularitats que admeten majors analítics en $\tau \in \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$, els operadors $\frac{\partial}{\partial\tau}$ i Δ_ω commuten (igualment amb $\dot{\Delta}_\omega$).

A la Secció 3.4 ampliarem aquests conceptes al cas d'una singularitat més llunyana $\omega = me^{i\theta}$ per tal de poder arribar als resultats desitjats, però per a l'estudi de les dues properes seccions en tenim prou amb el que hem definit fins ara.

3.2.6 Singularitat de $\hat{\phi}_0$ a $\zeta = i$.

Tot i que ens centrarem en la singularitat a $\zeta = i$, òbviament els resultats són anàlegs per a $-i$ usant l'antisimetria de $\tilde{\phi}_0$ que vam establir al Lema 3.5.

Com ja vam indicar a la fórmula (3.6) de la introducció, el comportament singular de $\hat{\phi}_0$ estarà relacionat amb una sèrie formal $\tilde{S}$, els coeficients de la qual poden calcular-se recursivament.

Lema 3.26. *L'equació lineal (la linearització de l'Equació (3.3) al voltant de $\tilde{\phi}_0$)*

$$\partial_\tau Y - \frac{1}{4} z^2 \partial_z \tilde{\phi}_0 \partial_z Y = 0 \tag{3.45}$$

admet una única solució de la forma

$$Y = z - \tau + \tilde{S}, \qquad \tilde{S} \in z^{-1}\mathcal{P}[[z^{-1}]] \tag{3.46}$$

amb

$$\tilde{S} = \tilde{S}(z, \tau; \mu) = (-\frac{1}{4}\mu^2 + \mu \sin\tau) z^{-1} - 4\mu(\cos\tau) z^{-2} + O(z^{-3}).$$

Demostració. L'equació de $\tilde{S}$ és

$$\partial_\tau \tilde{S} - \frac{1}{4} z^2 \partial_z \tilde{\phi}_0 \partial_z \tilde{S} = \frac{1}{4} z^2 \partial_z \tilde{\phi}_0 - 1,$$

que, a partir de la relació (3.21), podem escriure com

$$(\partial_\tau + \partial_z)\tilde{S} = \mu\tilde{F} + \mu\tilde{F}\,\partial_z\tilde{S}.$$

Si busquem $\tilde{S} = \sum_{j\geq 0} S_j(\tau;\mu) z^{-j-1}$, usant de (3.20) que $\tilde{F} = \sum_{j\geq 0} F_j(\tau;\mu) z^{-j-1}$, arribem al sistema d'equacions

$$\partial_\tau S_0 = \mu F_0, \tag{3.47}$$

$$\partial_\tau S_j = j S_{j-1} + \mu F_j - \mu \sum_{j_1+j_2=j-2} (j_2+1) F_{j_1} S_{j_2}, \qquad j \geq 1. \tag{3.48}$$

De (3.20) sabem que $F_0(\tau;\mu) = \cos\tau$, per tant $S_0(\tau;\mu) = \mu\sin\tau + < S_0 > \in \mathcal{P}$. Com que volem resoldre (3.48) a $\mathcal{P}$, afegim la condició

$$< S_j > = \frac{\mu}{j+1} < -F_{j+1} + \sum_{j_1+j_2=j-1} (j_2+1) F_{j_1} S_{j_2} >, \qquad j \geq 0, \tag{3.49}$$

i pot comprovar-se fàcilment que el nostre sistema d'equacions admet una única solució a $\mathcal{P}$. Efectivament, la condició (3.49), a part de fixar la constant respecte τ, per exemple

$$< S_0 >= \mu < -F_1 >= -\frac{1}{4}\mu^2,$$

permet que la banda dreta de l'Equació (3.48) a rang $j+1$ tingui mitjana zero i, per tant, es pugui mantenir la 2π-periodicitat en τ per a S_{j+1}. ■

Observació 3.27. *Per ser $z^2\partial_z\tilde{\phi}_0$ simètric respecte la involució $(z,\tau) \mapsto (-z, \pi-\tau)$, si $Y(z,\tau;\mu) = z - \tau + \tilde{S}(z,\tau;\mu)$ satisfà (3.45), $-\pi - Y(-z,\pi-\tau;\mu) = z - \tau - \tilde{S}(-z,\pi-\tau;\mu)$ també n'és solució. Per tant, la sèrie formal $\tilde{S}$ és antisimètrica respecte aquesta involució. A més, a la Secció 3.4 veurem que la seva transformada de Borel formal $\hat{S}$ serà convergent per a ζ prop de l'origen i s'estendrà analíticament a $\mathcal{R}$.*

Teorema 3.28. *Existeixen funcions $A(\tau;\mu)$, $\hat{\psi}(\zeta,\tau;\mu)$ i $\hat{r}(\zeta,\tau;\mu)$, holomorfes per a $(\zeta,\tau,\mu) \in \mathcal{R}^{(0)} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$, tals que*

$$\hat{\phi}_0(i+\zeta,\tau;\mu) = \frac{A(\tau;\mu)}{2\pi i\zeta} + \hat{\psi}(\zeta,\tau;\mu)\frac{\log\zeta}{2\pi i} + \hat{r}(\zeta,\tau;\mu), \tag{3.50}$$

per a $i+\zeta$ mantenint-se al full principal $\mathcal{R}^{(0)}$ (és a dir, l'expressió anterior descriu la singularitat a $\zeta = i$ de la determinació principal de $\hat{\phi}_0(\zeta,\tau;\mu)$).

A més, existeix una funció entera senar $f_0^{[i]}(\mu) = -2\pi i\mu + O(\mu^3)$ tal que

$$A(\tau;\mu) + \tilde{\psi}(z,\tau;\mu) = f_0^{[i]}(\mu)\, e^{i\tau} e^{-i\tilde{S}(z,\tau;\mu)}, \tag{3.51}$$

on $\tilde{\psi} = \tilde{\mathcal{B}}^{-1}\hat{\psi}$.

Observació 3.29. *Per ser i la primera singularitat que trobem quan, sortint de l'origen, ens movem per $i\mathbb{R}^+$, per la definició 3.24 de derivada estrangera Δ_i i la relació (3.43), l'expressió (3.50) és equivalent a*

$$\Delta_i\tilde{\phi}_0 = A + \tilde{\psi}. \tag{3.52}$$

La relació (3.9) anunciada al principi d'aquest capítol pot considerar-se com una formulació ressorgent de les expressions (3.50) i (3.51). Observi's que $A(\tau;\mu)$ és en realitat

$$A(\tau;\mu) = f_0^{[i]}(\mu)\, e^{i\tau}.$$

El caràcter senar de $f_0^{[i]}$ és una característica especial del nostre problema i s'obté de (3.17).

Demostració. Seguint el llenguatge introduït a la Secció 3.2.4, els germs regulars $\hat{\phi}_0(\zeta)$ i $\hat{F}(\zeta)$ (considerant τ i μ com a paràmetres), dels quals vam establir l'existència al Teorema 3.8, poden mirar-se com a singularitats integrables: $\overset{\triangledown}{\phi}_0 = {}^\flat\hat{\phi}_0$, $\overset{\triangledown}{F} = {}^\flat\hat{F}$. Per exemple, si escollim la direcció $\theta = \pi/2$, l'analiticitat de $\hat{\phi}_0$ a $\mathcal{R}^{(1)}$ ens permet considerar

$$\overset{\triangledown}{X}_0 = \operatorname{sing}\big(\hat{\phi}_0(i+\zeta)\big) \tag{3.53}$$

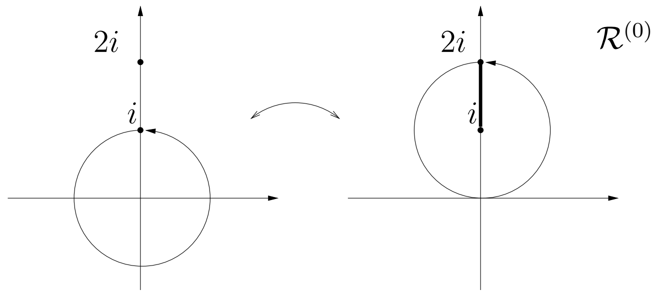


Figura 3.6: Automorfisme entre una part de $\mathbb{C}$ i una part de $\mathcal{R}^{(0)}$.

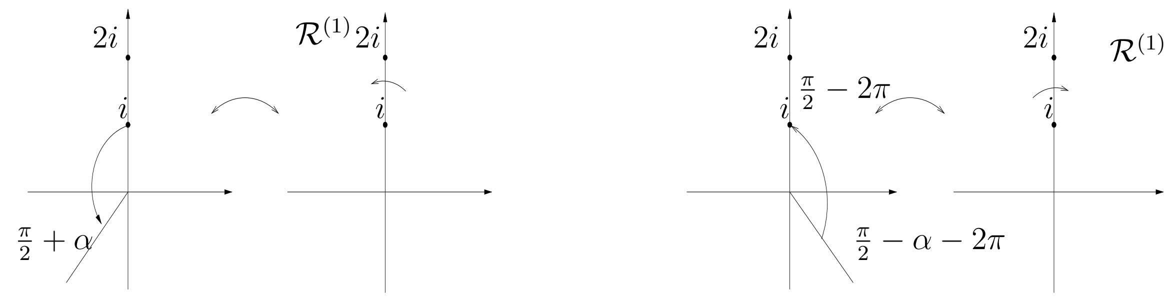


Figura 3.7: Correspondències amb els punts de $\mathcal{R}^{(1)}$ accessibles des de $\mathcal{R}^{(0)}$ travessant $]i, 2i[$ de dreta a esquerra i d'esquerra a dreta respectivament.

com un element de $\mathrm{SING}_{\pi/2,\alpha}$ per a qualsevol $\alpha \leq \pi$. Observi's que això vol dir que considerem la translació $\zeta \mapsto \zeta' = i + \zeta$ com un automorfisme entre la part de $\underset{\bullet}{\mathbb{C}}$ amb $\pi/2 - 2\pi < \arg\zeta < \pi/2$ i $|\zeta| < 1$ i la part de $\mathcal{R}^{(0)}$ on $\zeta' \notin i\,[1, +\infty[$ i $|\zeta' - i| < 1$ (vegi's Figura 3.6), mentre que els punts ζ' del mig-full de $\mathcal{R}$ accessibles des de $\mathcal{R}^{(0)}$ travessant $]i, 2i[$ de dreta a esquerra corresponen a $\pi/2 < \arg\zeta < \pi/2 + \alpha$ i els del mig-full accessible travessant d'esquerra a dreta corresponen a $\pi/2 - \alpha - 2\pi < \arg\zeta < \pi/2 - 2\pi$ (vegi's Figura 3.7).

D'acord amb les propietats indicades al Teorema 3.8, sabem que $\overset{\triangledown}{\phi}_0 \in \mathrm{RES}^{(1)}_{\pi/2,\beta}$ per a qualsevol $\beta \leq \pi$, i la fórmula (3.53) pot reescriure's com

$$\overset{\triangledown}{X}_0 = \Delta_i \overset{\triangledown}{\phi}_0. \tag{3.54}$$

En aquest entorn de singularitats, i recordant (3.37) i (3.38), el teorema que volem demostrar propugna l'existència d'un escalar $f_0^{[i]}(\mu)$ tal que

$$\overset{\triangledown}{X}_0 = f_0^{[i]}(\mu)\, e^{i\tau} \exp_*\big(-i^\flat \hat{S}\big). \tag{3.55}$$

La idea principal és que $\dot{\Delta}_i$ commuta amb les dues derivades usuals, ∂_z i ∂_τ, per tant $\dot{\Delta}_i \tilde{\phi}_0$ satisfà la linearització de l'Equació (3.3) al voltant de $\tilde{\phi}_0$, és a dir, la mateixa Equació (3.45) que, segons el Lema 3.26, té solució $z - \tau + \tilde{S}$:

$$\partial_\tau Y - \frac{1}{4} z^2 \partial_z \tilde{\phi}_0(z, \tau; \mu)\, \partial_z Y = 0,$$

que, per la notació de la sèrie formal $\tilde{D}_0 := 1 - \mu\tilde{F} = -\frac{1}{4}z^2\partial_z\tilde{\phi}_0(z,\tau;\mu)$, pot escriure's com:

$$\partial_\tau Y + \tilde{D}_0(z,\tau;\mu)\partial_z Y = 0; \tag{3.56}$$

però qualsevol solució d'aquesta equació ha de ser una funció de $z - \tau + \tilde{S}$ i, en el cas de $\dot{\Delta}_i\tilde{\phi}_0$, el requeriment de periodicitat respecte τ i la naturalesa de la seva dependència respecte z la forçarà a ser proporcional a $e^{-i(z-\tau+\tilde{S})}$.

Com que la transformada de Laplace formal de $\overset{\triangledown}{\phi}_0$ és solució de l'Equació (3.3), $\overset{\triangledown}{\phi}_0$ ha de satisfer:

$$\partial_\tau\overset{\triangledown}{\phi}_0 - \frac{1}{8}\,\delta^{(2)} * \left(\partial\overset{\triangledown}{\phi}_0\right)^{*2} + 2\delta^{(-2)}(1 - \mu\sin\tau) = 0.$$

Aplicant Δ_i a aquesta equació i usant les propietats (3.42), (3.40) i (3.41) de la derivada estrangera, obtenim

$$\partial_\tau\Delta_i\overset{\triangledown}{\phi}_0 - \frac{1}{8}\,2\delta^{(2)} * \partial\overset{\triangledown}{\phi}_0 * \left(\partial\Delta_i\overset{\triangledown}{\phi}_0 - i\Delta_i\overset{\triangledown}{\phi}_0\right) = 0,$$

que, segons la notació $\overset{\triangledown}{D}_0 := \delta - \mu\overset{\triangledown}{F} = -\frac{1}{4}\,\delta^{(2)} * \left(\partial\overset{\triangledown}{\phi}_0\right)$ i la indicada a (3.54), podem donar com:

$$\partial_\tau\overset{\triangledown}{X}_0 + \overset{\triangledown}{D}_0 * \partial\overset{\triangledown}{X}_0 = i\overset{\triangledown}{D}_0 * \overset{\triangledown}{X}_0. \tag{3.57}$$

Per altra banda, ja hem comentat que qualsevol funció de $z - \tau + \tilde{S}$ és solució de l'Equació (3.56), per tant $e^{iz-i\tau+i\tilde{S}}$ també la verificarà. Així doncs, la sèrie formal $\tilde{Z}_0 = e^{-i\tau+i\tilde{S}}$ satisfà

$$\partial_\tau\tilde{Z}_0 + \tilde{D}_0\partial_z\tilde{Z}_0 = -i\tilde{D}_0\tilde{Z}_0. \tag{3.58}$$

Com que la Proposició 3.44 de la Secció 3.4.4 demostrarà que la transformada de Borel formal de $\tilde{S}$ convergeix, ara podem definir la singularitat $\overset{\triangledown}{Z}_0 = e^{-i\tau}\exp_*(i\,{}^\flat\hat{S})$ i aplicant la transformada de Borel a l'Equació (3.58), es comprova que $\overset{\triangledown}{Z}_0$ satisfà una equació anàloga a (3.57):

$$\partial_\tau\overset{\triangledown}{Z}_0 + \overset{\triangledown}{D}_0 * \partial\overset{\triangledown}{Z}_0 = -i\overset{\triangledown}{D}_0 * \overset{\triangledown}{Z}_0.$$

Com a conseqüència, $\overset{\triangledown}{\varphi} = \overset{\triangledown}{X}_0 * \overset{\triangledown}{Z}_0 = e^{-i\tau}\overset{\triangledown}{X}_0 * \exp_*(i\,{}^\flat\hat{S})$ satisfà

$$\partial_\tau\overset{\triangledown}{\varphi} + \overset{\triangledown}{D}_0 * \partial\overset{\triangledown}{\varphi} = 0. \tag{3.59}$$

En efecte,

$$\begin{aligned}\partial_\tau\overset{\triangledown}{\varphi} + \overset{\triangledown}{D}_0 * \partial\overset{\triangledown}{\varphi} =& (\partial_\tau\overset{\triangledown}{X}_0) * \overset{\triangledown}{Z}_0 + \overset{\triangledown}{X}_0 * (\partial_\tau\overset{\triangledown}{Z}_0) + \overset{\triangledown}{D}_0 * \partial(\overset{\triangledown}{X}_0 * \overset{\triangledown}{Z}_0) = \\ =& (i\overset{\triangledown}{D}_0 * \overset{\triangledown}{X}_0 - \overset{\triangledown}{D}_0 * \partial\overset{\triangledown}{X}_0) * \overset{\triangledown}{Z}_0 + \overset{\triangledown}{X}_0 * (-i\overset{\triangledown}{D}_0 * \overset{\triangledown}{Z}_0 - \overset{\triangledown}{D}_0 * \partial\overset{\triangledown}{Z}_0) + \overset{\triangledown}{D}_0 * \partial(\overset{\triangledown}{X}_0 * \overset{\triangledown}{Z}_0)\end{aligned}$$

i gràcies a la propietat commutativa de la convolució

$$\partial_\tau\overset{\triangledown}{\varphi} + \overset{\triangledown}{D}_0 * \partial\overset{\triangledown}{\varphi} = -\overset{\triangledown}{D}_0 * \partial\overset{\triangledown}{X}_0 * \overset{\triangledown}{Z}_0 - \overset{\triangledown}{X}_0 * \overset{\triangledown}{D}_0 * \partial\overset{\triangledown}{Z}_0 + \overset{\triangledown}{D}_0 * \partial(\overset{\triangledown}{X}_0 * \overset{\triangledown}{Z}_0),$$

però pot veure's fàcilment que $\partial(\overset{\triangledown}{X}_0 * \overset{\triangledown}{Z}_0) = \partial\overset{\triangledown}{X}_0 * \overset{\triangledown}{Z}_0 + \overset{\triangledown}{X}_0 * \partial\overset{\triangledown}{Z}_0$, per tant, $\partial_\tau\overset{\triangledown}{\varphi} + \overset{\triangledown}{D}_0 * \partial\overset{\triangledown}{\varphi} = 0$.

Però $\overset{\triangledown}{\varphi}$ admet un major $\check{\varphi}(\zeta,\tau;\mu)$ el qual és holomorf per a $|\zeta| < 1$, $-5\pi/2 < \arg\zeta < 3\pi/2$, i $(\tau,\mu) \in (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$ (perquè és el cas de $\overset{\triangledown}{X}_0$ pel Teorema 3.8 i de ${}^\flat\hat{S}$ per la Proposició 3.44), i

$\overset{\triangledown}{D}_0$ també admet un major $\overset{\vee}{D}_0$ (per exemple $\overset{\vee}{D}_0(\zeta,\tau;\mu) = \frac{1}{2\pi i\zeta} - \mu\hat{F}(\zeta,\tau;\mu)\frac{\log\zeta}{2\pi i}$). Podem doncs desenvolupar l'Equació (3.59) en sèrie de Fourier-Taylor respecte τ i μ.

Usant la notació

$$\overset{\vee}{\varphi}(\zeta,\tau;\mu) = \sum_{n\geq 0}\mu^n\overset{\vee}{\varphi}_n(\zeta,\tau) = \sum_{n\geq 0,\ k\in\mathbb{Z}}\mu^n\, e^{ik\tau}\overset{\vee}{\varphi}_{n,k}(\zeta),$$

$$\overset{\triangledown}{\varphi} = \sum_{n\geq 0}\mu^n\overset{\triangledown}{\varphi}_n, \qquad \overset{\triangledown}{D}_0 = \delta - \sum_{n\geq 0}\mu^{n+1}\overset{\triangledown}{F}_n(\zeta,\tau),$$

trobem les equacions:

$$\begin{aligned} &\partial_\tau\overset{\triangledown}{\varphi}_0 + \partial\overset{\triangledown}{\varphi}_0 = 0,\\ &\partial_\tau\overset{\triangledown}{\varphi}_n + \partial\overset{\triangledown}{\varphi}_n = \sum_{n_1+n_2=n-1}\overset{\triangledown}{F}_{n_1} * \partial\overset{\triangledown}{\varphi}_{n_2}, \qquad n\geq 1. \end{aligned} \tag{3.60}$$

La primera equació ens porta a $(ik-\zeta)\overset{\vee}{\varphi}_{0,k}(\zeta)\in\mathbb{C}\{\zeta\}$ per a cada $k\in\mathbb{Z}$, la qual cosa implica l'existència d'una $A_0\in\mathbb{C}$ tal que

$$\overset{\vee}{\varphi}_{0,0}(\zeta) - \frac{A_0}{2\pi i\zeta}\in\mathbb{C}\{\zeta\},$$

mentre que $\overset{\vee}{\varphi}_{0,k}(\zeta)\in\mathbb{C}\{\zeta\}$ per a $k\neq 0$. Arribem doncs a la conclusió que $\overset{\triangledown}{\varphi}_0 = A_0\delta$ i, per tant, $\partial\overset{\triangledown}{\varphi}_0 = 0$.

Introduint aquesta informació a (3.60) i amb els mateixos arguments, obtenim successivament que $\overset{\triangledown}{\varphi}_1 = A_1\delta$, $\overset{\triangledown}{\varphi}_2 = A_2\delta,\ldots$, per a una certa col·lecció de nombres complexes $A_1, A_2,\ldots$ i, com a conseqüència, $\partial\overset{\triangledown}{\varphi}_1 = 0$, $\partial\overset{\triangledown}{\varphi}_2 = 0,\ldots$

El desenvolupament de $\overset{\triangledown}{\varphi}$ es redueix doncs a $f_0^{[i]}(\mu)\delta$, on la sèrie $f_0^{[i]}(\mu) = \sum_{n\geq 0}A_n\mu^n$ defineix una funció entera a causa del domini d'holomorfia del major $\overset{\vee}{\varphi}(\zeta,\tau;\mu)$ que havíem trobat abans. Amb aquest resultat i per la definició de $\overset{\triangledown}{\varphi}$ que hem fet, obtenim:

$$\operatorname{sing}\big(\hat{\phi}_0(i+\zeta)\big) = \overset{\triangledown}{X}_0 = \Delta_i\overset{\triangledown}{\phi}_0 = e^{i\tau}f_0^{[i]}(\mu)\delta * \exp_*(-i\,{}^\flat\hat{S}) = e^{i\tau}f_0^{[i]}(\mu)\exp_*(-i\,{}^\flat\hat{S}).$$

Ara bé, usant (3.38), un major de $f_0^{[i]}(\mu)e^{i\tau}\exp_*(-i\,{}^\flat\hat{S})$ és

$$\frac{f_0^{[i]}(\mu)e^{i\tau}}{2\pi i\zeta} + \hat{\psi}(\zeta,\tau)\frac{\log\zeta}{2\pi i}, \qquad \text{amb } \hat{\psi} = f_0^{[i]}(\mu)e^{i\tau}\left(-i\hat{S} - \frac{1}{2!}\hat{S}*\hat{S} + i\frac{1}{3!}\hat{S}*\hat{S}*\hat{S} + \ldots\right), \tag{3.61}$$

per tant, hem demostrat els resultats (3.50) i (3.51), llevat de l'expressió de $f_0^{[i]}(\mu)$.

La propietat (3.17) de simetria de $\tilde{\phi}_0$ respecte la involució $(\tau,\mu)\mapsto(\tau+\pi,-\mu)$ es transmet a $\tilde{S}$ i, per tant, a $e^{i\tau}\overset{\triangledown}{\varphi} = \Delta_i\overset{\triangledown}{\phi}_0 * \exp_*(i\,{}^\flat\hat{S})$, d'on surt el caràcter senar de $f_0^{[i]}(\mu)$. L'estimació uniforme (3.29) implica que la funció $f_0^{[i]}(\mu)$ és d'ordre 1 respecte μ i el valor A_1 el calcularem a partir de (3.23):

$$\hat{\phi}_0(\zeta,\tau) = 4 - 4\mu\zeta^{-1}\big(\zeta * \hat{F}(\zeta,\tau)\big) = 4 - 4\mu\zeta^{-1}\big(\zeta * \hat{F}_0(\zeta,\tau)\big) - 4\mu\zeta^{-1}\big(\zeta * (\hat{F}-\hat{F}_0)(\zeta,\tau)\big),$$

on $\hat{F}_0$ es va definir a (3.30) a traves de l'operador $\mathcal{E}$ de (3.25):

$$\hat{F}_0 = \frac{1}{2}\,\partial_\zeta^2\mathcal{E}\,(\zeta\sin\tau) \;\Rightarrow\; \zeta * \hat{F}_0 = \frac{1}{2}\,\mathcal{E}\,(\zeta\sin\tau) = -\frac{1}{4i}\frac{\zeta^2}{\zeta+i}\,e^{-i\tau} + \frac{1}{4i}\frac{\zeta^2}{\zeta-i}\,e^{i\tau}$$

i sabem que $\hat{F} - \hat{F}_0 = O(\mu)$.

Podem doncs escriure:

$$\hat{\phi}_0(\zeta,\tau) = 4 + \frac{\mu}{i}\,\frac{\zeta}{\zeta+i}\,e^{-i\tau} - \frac{\mu}{i}\,\frac{\zeta}{\zeta-i}\,e^{i\tau} - 4\mu\zeta^{-1}\big(\zeta * (\hat{F}-\hat{F}_0)(\zeta,\tau)\big)$$

i com que $\zeta/(\zeta-i) = 1 + i/(\zeta-i)$, posant al final tots els termes regulars en i coneguts:

$$\hat{\phi}_0(\zeta,\tau) = -\frac{2\pi i\mu}{2\pi i(\zeta-i)}\,e^{i\tau} - 4\mu\zeta^{-1}\big(\zeta * (\hat{F}-\hat{F}_0)(\zeta,\tau)\big) + 4 + \frac{\mu}{i}\,\frac{\zeta}{\zeta+i}\,e^{-i\tau} - \frac{\mu}{i}\,e^{i\tau},$$

expressió que, comparant-la amb (3.61) i sabent que $f_0^{[i]}(\mu)$ és senar, ens dóna que

$$f_0^{[i]}(\mu) = -2\pi i\mu + O(\mu^3). \qquad \blacksquare$$

3.3 Aplicació de les sumes de Borel-Laplace de $\tilde{\phi}_0$ al problema del trencament de separatrius.

Els Teoremes 3.8 i 3.28 són suficients per implementar el nostre mètode a l'estudi de solucions particulars analítiques de l'Equació (3.3).

Quan es restringim a $\mathcal{R}_\rho^{(0)} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$ i identifiquem $\mathcal{R}_\rho^{(0)}$ amb un subconjunt de $\mathbb{C}$, hem d'usar $\ell(\zeta) = |\zeta|$ a la fita (3.29); aquesta fita ens indica que $\hat{\phi}_0(\zeta,\tau;\mu)$ té, com a molt, creixement exponencial respecte ζ de tipus no més gran que

$$c = c_\rho(\tau;\mu) = 24\rho^{-2}\text{màx}\left(\rho^{-2}|\mu|\cosh(\Im\text{m}\,\tau), \big(|\mu|\cosh(\Im\text{m}\,\tau)\big)^{1/3}\right).$$

Per tant, per a qualsevol $\theta \in \,]-\pi/2, 3\pi/2]$ tal que $\big[0, e^{i\theta}\infty\big[$ estigui contingut a $\mathcal{R}_\rho^{(0)}$, és a dir, tal que

$$\theta \in \mathcal{I}_\rho^+ = \left[-\tfrac{\pi}{2} + \arcsin\rho, \tfrac{\pi}{2} - \arcsin\rho\right] \quad \text{o} \quad \theta \in \mathcal{I}_\rho^- = \left[\tfrac{\pi}{2} + \arcsin\rho, \tfrac{3\pi}{2} - \arcsin\rho\right],$$

podem calcular la integral de Laplace de $\hat{\phi}$, també anomenada resumada de Borel de $\tilde{\phi}$, en la direcció θ:

$$\mathcal{L}^\theta\hat{\phi}_0(z,\tau;\mu) = \int_0^{e^{i\theta}\infty} e^{-z\zeta}\hat{\phi}_0(\zeta,\tau;\mu)\,d\zeta$$

definida quan $\Re e(z\,e^{i\theta}) > c = c_\rho(\tau;\mu)$. Pel Teorema de Cauchy, aquesta fórmula defineix dues funcions holomorfes ϕ_0^+ i ϕ_0^-. Notarem per $\phi_0^\pm$ la que s'obté enganxant les funcions $\mathcal{L}^\theta\hat{\phi}_0$ amb $\theta \in \mathcal{I}_\rho^\pm$. Per a cada $\rho \in \,]0,1[$ les funcions $\phi_0^\pm$ estan definides i són holomorfes a $\{\,(z,\tau;\mu) \in \mathbb{C}\times(\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})\times\mathbb{C} \mid z \in \mathcal{D}_\rho^\pm(\tau;\mu)\,\}$, on $\mathcal{D}_\rho^\pm(\tau;\mu)$ és la unió dels semiplans $\Re e(z\,e^{i\theta}) > c$ per a $\theta \in \mathcal{I}_\rho^\pm$, és a dir

$$\mathcal{D}_\rho^\pm(\tau;\mu) = c_\rho(\tau;\mu)\Sigma_\rho^\pm, \qquad \Sigma_\rho^\pm = \{\,z \in \mathbb{C} \mid \forall z' \in [\pm\rho^{-1}, z],\ |z'| \geq 1\,\} \tag{3.62}$$

(vegi's la Figura 3.8). Per raons tècniques, usarem dominis una mica més petits:

$$\underline{\mathcal{D}}_\rho^\pm(\tau;\mu) = \big(c_\rho(\tau;\mu)+1\big)\Sigma_{2\rho}^\pm, \quad \text{i} \quad \underline{\mathcal{D}}_\rho(\tau;\mu) = \big(3c_\rho(\tau;\mu)+1\big)\big(\Sigma_{2\rho}^+ \cap \Sigma_{2\rho}^-\big).$$

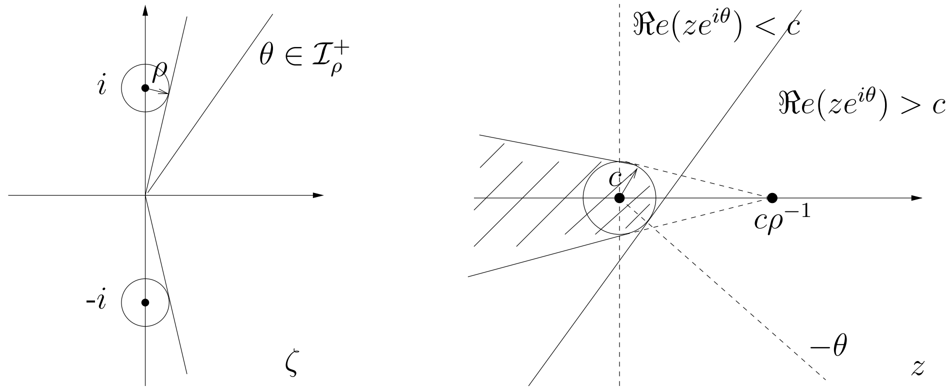


Figura 3.8: Les direccions $\theta \in \mathcal{I}_\rho^+$ determinen el domini $\mathcal{D}_\rho^+$, el qual apareix a la part dreta com el complementari de la part ratllada.

Corol·lari 3.30. *Les funcions $\phi_0^\pm(z,\tau;\mu)$ són solucions de l'Equació (3.3) i satisfan la condició (3.4). De fet, admeten com a desenvolupament asimptòtic la solució formal $\tilde{\phi}_0$ definida al Lema 3.4: per a cada $\rho \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$, $\mu_0 > 0$, $\sigma_0 \geq 0$,*

$$\phi_0^\pm(z,\tau;\mu) \sim \sum_{n\geq 0} a_n(\tau;\mu) z^{-n-1} \quad \textit{quan } z \in \underline{\mathcal{D}}_\rho^\pm(i\sigma_0;\mu_0), \tag{3.63}$$

uniformement per a $|\mu| \leq \mu_0$ i $|\Im m\, \tau| \leq \sigma_0$.

La seva diferència és exponencialment petita quan $\Im m\, z \to -\infty$: amb les notacions del Teorema 3.28,

$$\phi_0^+(z,\tau;\mu) - \phi_0^-(z,\tau;\mu) \sim f_0^{[i]}(\mu)\, e^{-i\left(z-\tau+\tilde{S}(z,\tau;\mu)\right)} \tag{3.64}$$

quan $z \in \underline{\mathcal{D}}_\rho(i\sigma_0;\mu_0) \cap \{\Im m\, z < 0\}$, i uniformement per a $|\mu| \leq \mu_0$ i $|\Im m\, \tau| \leq \sigma_0$.

En particular, tenim un equivalent asimptòtic quan $\Im m\, z \to -\infty$ i $\mu \to 0$ independentment, uniformement per a $|\Im m\, \tau| \leq \sigma_0$:

$$\phi_0^+(z,\tau;\mu) - \phi_0^-(z,\tau;\mu) = f_0^{[i]}(\mu) e^{-i(z-\tau)} \Big(1 + O\left(|z|^{-1}\right)\Big) + O\left(|\mu| e^{a_1 \Im m\, z}\right), \tag{3.65}$$

on a_1 és qualsevol constant de l'interval (1,2).

Observació 3.31. *Les varietats estable i inestable $p = \partial_q T^\pm$ estan relacionades amb les derivades parcials respecte z de ϕ_0^+ i ϕ_0^-. Tal i com vam explicitar a la demostració del Corol·lari 1.3, la intersecció de les varietats es produeix en els punts crítics de $T^+ - T^-$, la distància entre elles ve donada per $\partial_q(T^+ - T^-)$ i l'angle corresponent de separació ve mesurat per $\partial_q^2(T^+ - T^-)$. Així doncs, no només ens interessa la diferència entre ϕ_0^+ i ϕ_0^-, això però, no és un problema, perquè la fórmula asimptòtica (3.64) pot diferenciar-se respecte z.*

Demostració. A partir de la solució $\tilde{\phi}_0$ de (3.3) donada a (3.14), s'obtenen les funcions ϕ_0^+ i ϕ_0^- pel procés que acabem d'indicar i que no és res més que la sumació de Borel-Laplace en direccions diferents, les propietats de la qual ens asseguren que admeten $\tilde{\phi}_0$ com a desenvolupament asimptòtic i que satisfan la mateixa equació (vegi's [B94]).

La condició d'asimptoticitat uniforme (3.63) vol dir que, per a cada $n \geq 0$, la funció

$$z^{n+1}\big(\phi_0^{\pm}(z,\tau;\mu) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j(\tau;\mu) z^{-j-1}\big) \tag{3.66}$$

està fitada a $\{\,(z,\tau;\mu)\ |\ z \in \underline{\mathcal{D}}_\rho^{\pm}(i\sigma_0;\mu_0),\ |\Im m\,\tau| \leq \sigma_0,\ |\mu| \leq \mu_0\,\}$. Per arribar a aquest resultat, és suficient seguir la idea de [Mal95, Sec. 1.4.2], considerant τ i μ com a paràmetres respecte els quals s'obté la uniformitat fixant ρ, μ_0, σ_0. Efectivament, la desigualtat (3.29) ens diu que

$$\forall \zeta \in \mathcal{R}_\rho^{(0)}, \quad |\hat{\phi}_0(\zeta,\tau;\mu)| \leq (A + |\mu| B|\zeta|) e^{C|\zeta|}, \tag{3.67}$$

amb $A, B, C = c_\rho(i\sigma_0, \mu_0) > 0$ depenent només de ρ, μ_0, σ_0, si $|\mu| \leq \mu_0$ i $|\Im m\,\tau| \leq \sigma_0$. Si $z \in \underline{\mathcal{D}}_\rho^{+}(i\sigma_0, \mu_0)$, es pot trobar $\theta \in \mathcal{I}_{2\rho}^{+}$ tal que $\Re e(z\,e^{i\theta}) > C+1$, i d'aquí la desigualtat (3.67) és certa a la franja $\{\mathrm{dist}(\zeta, e^{i\theta}\mathbb{R}^+) \leq \rho\}$ i l'estimació asimptòtica per a ϕ_0^+ s'obté de la mateixa manera que a [Mal95]. Per a ϕ_0^- el procés és anàleg.

De fet, la funció (3.66) està fitada per $\mathrm{const}\,\rho^{-n}(n+1)!$, per tant, si recordem (3.11), en realitat l'asimpoticitat és de tipus Gevrey-1.

El nostre objectiu ara és demostrar la fórmula (3.64), la qual representa un desenvolupament asimptòtic dels mateix tipus que el que acabem de veure però ara hi ha present un factor e^{-iz} exponencialment petit a $\{\Im m\, z < 0\}$.

Siguin $\rho < \frac{1}{3}$, $a_1 \in\ ]1+\rho, 2-2\rho[$, μ_0 i σ_0 fixats i consideri's $(\tau;\mu) \in (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$ tals que $|\Im m\,\tau| \leq \sigma_0$ i $|\mu| \leq \mu_0$. Per a $\theta \in \big]0, \frac{\pi}{2} - \arcsin(2\rho)\big[$ i z tal que $\Re e(z\,e^{i\theta}) > 3C+1$, $\Re e(z\,e^{i(\pi-\theta)}) > 3C+1$ i $\Im m\, z < 0$ (variant θ, cobriríem tot $\underline{\mathcal{D}}_\rho \cap \{\Im m\, z < 0\}$), calculem la diferència:

$$\phi_0^+(z,\tau;\mu) - \phi_0^-(z,\tau;\mu) = \int_{e^{i(\pi-\theta)}\infty}^{e^{i\theta}\infty} e^{-z\zeta} \hat{\phi}_0(\zeta,\tau;\mu)\, d\zeta. \tag{3.68}$$

Aplicant el Teorema de Cauchy, podem moure el camí d'integració tan amunt com volguem fins que trobem i. La continuació analítica de $\hat{\phi}_0$ als mitjos-fulls propers de la superfície de Riemann $\mathcal{R}$ ens permet deformar aquest camí, travessant l'eix imaginari entre els punts i i $2i$ i anar a l'infinit i tornar abans de retornar al full principal (vegi's la Figura 3.9). Amb aquest canvi, la convergència de la integral està garantida per (3.29) amb $m = 1$, és a dir $\ell(\zeta) \leq 3|\zeta| + 24$, la qual cosa ens dóna

$$|\hat{\phi}_0(\zeta,\tau;\mu)| \leq (A + |\mu| B|\dot{\zeta}|) e^{3C|\dot{\zeta}|} \tag{3.69}$$

per als punts ζ del nou camí.

Així doncs, la integral (3.68) pot descomposar-se en dues clarament diferenciades:

$$\phi_0^+(z,\tau;\mu) - \phi_0^-(z,\tau;\mu) = \int_{\gamma_\theta} \hat{\phi}_0(\zeta,\tau;\mu)\, e^{-z\zeta}\, d\zeta + \int_{\Gamma_{a_1,\theta}} \hat{\phi}_0(\zeta,\tau;\mu)\, e^{-z\zeta}\, d\zeta$$

on la primera part és la contribució de la singularitat a i. La segona part es tracta d'un terme exponencialment petit: usant (3.69) i la condició sobre $\Re e(z\,e^{i\theta})$ i $\Re e(z\,e^{i(\pi-\theta)})$, aquest terme està fitat per $|\mu| D\, e^{a_1 \Im m\, z}$, on D depèn únicament de ρ, σ_0, μ_0 i $1 < a_1 < 2$ acabarà essent tan a prop com vulguem de 2.

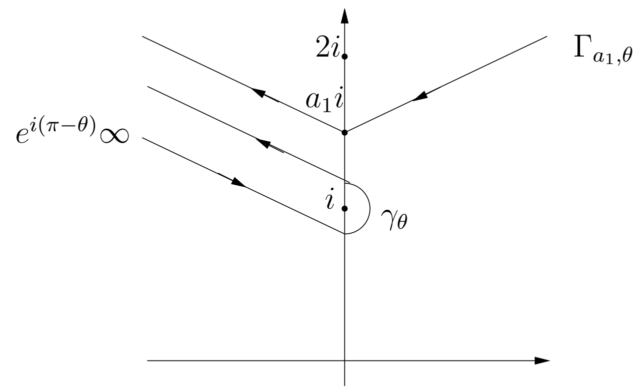


Figura 3.9: Deformació del camí d'integració a l'estudi de $\phi_0^+ - \phi_0^-$.

Pel resultat (3.50), la integral sobre γ_θ pot escriure's com:

$$e^{-iz}A(\tau;\mu) + e^{-iz}\int_0^{e^{i(\pi-\theta)}\infty} \hat{\psi}(\zeta,\tau;\mu)\, e^{-z\zeta}\, d\zeta$$

i és, per tant, asimptòtica a $e^{-iz}\big(A(\tau;\mu) + \tilde{\psi}(z,\tau;\mu)\big)$ que, segons (3.51), es tracta del mateix que $f_0^{[i]}(\mu)\, e^{-i\left(z-\tau+\tilde{S}(z,\tau;\mu)\right)}$. En aquest cas, la uniformitat s'obté de les fites a $\mathcal{R}_\rho^{(0)}$ per a $\hat{\psi} = f_0^{[i]}(\mu)\, e^{i\tau}\,(-i\hat{S} - \frac{1}{2!}\hat{S}^{*2} + \frac{i}{3!}\hat{S}^{*3} + \ldots)$, obtingudes a partir de les de $\hat{S}$ anàlogues a (3.29) (vegi's la desigualtat (3.89) de la Secció 3.4.4). ■

3.4 La Integral Formal i l'Equació del Pont.

3.4.1 El Principi de Huygens.

En l'àmbit de la Ressurgència, és important no restringir-se a una solució formal particular del problema en qüestió. Per a equacions diferencials ordinàries, per exemple, es pot usar el concepte de "integral general formal": una solució formal que depèn d'un nombre adequat de paràmetres i, quan sigui convergent, variant aquests paràmetres obtens localment totes les possibles solucions. Per a una equació en derivades parcials de primer ordre com la (3.3), hi ha el concepte clàssic de "solució completa" que pot trobar-se, per exemple a [Che]. Per a una equació $f\left(q, \frac{\partial\phi}{\partial q}, \phi\right) = 0$ en una regió de $\mathbb{R}^{2n+1}$ on, com a mínim una de les derivades parcials $\frac{\partial f}{\partial p_i}(q,p,s)$ no s'anul·la, es pot definir una solució completa (local) com una funció $\phi(q,\alpha)$ sobre un obert de $\mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$(q,\alpha) \mapsto \left(q, \frac{\partial\phi}{\partial q}(q,\alpha), \phi(q,\alpha)\right)$$

és una parametrització (local) de la hipersuperfície $f = 0$ a l'espai $\mathbb{R}^{2n+1}$. El Principi de Huygens assegura que, localment, qualsevol solució de l'equació pot obtenir-se a partir de ϕ.

En el nostre cas, l'equació és

$$H(z,\tau,\partial_z\phi,\partial_\tau\phi) = 0, \tag{3.70}$$

amb una funció de Hamilton $H(z,\tau,B,E) = E - \frac{1}{8}z^2B^2 + 2z^{-2}(1-\mu\sin\tau)$. Es pot comprovar que, si $\phi(z,\tau,b)$ resol l'equació per a cada b (on b és un paràmetre unidimensional) i si

$$z \mapsto \partial_b\phi(z,\tau,b)$$

és invertible per a cada τ i b, la funció $(z,\tau,b,a) \mapsto a + \phi(z,\tau,b)$ (on a és una nova variable unidimensional) és una solució completa.

Una manera de comprovar la validesa del principi de Huygens en el nostre cas és considerar la transformació simplèctica generada per la funció $(z,\tau,b,e) \mapsto e\tau + \phi(z,\tau,b)$, és a dir, la definida implícitament per:

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \partial_b\phi(z,\tau,b),\\
\overline{\tau} &= \tau,\\
B &= \partial_z\phi(z,\tau,b),\\
E &= e + \partial_\tau\phi(z,\tau,b).
\end{aligned}$$

De la segona relació sabem que $\tau = \overline{\tau}$ i, com que $\partial_b\phi$ és invertible respecte z per a cada τ i b, de la primera tenim que $z = g(\overline{z},\overline{\tau},b)$ per a una certa funció g. Aleshores, i gràcies a que ϕ és solució de l'Equació (3.70), el Hamiltonià en les noves variables és:

$$\begin{aligned}
&H\big(g(\overline{z},\overline{\tau},b),\overline{\tau},\partial_z\phi(g(\overline{z},\overline{\tau},b),\overline{\tau},b), e + \partial_\tau\phi(g(\overline{z},\overline{\tau},b),\overline{\tau},b)\big) = \\
&\qquad\qquad = e + \partial_\tau\phi - \frac{1}{8}\,g^2\cdot\big(\partial_z\phi\big)^2 + 2g^{-2}\cdot(1-\mu\sin\overline{\tau}) = e.
\end{aligned}$$

Per tant, la corresponent Equació de Hamilton-Jacobi es pot resoldre trivialment; però la relació entre les solucions en diferents sistemes de coordenades no és fàcil d'escriure.

Queda així explicat el per què podem restringir-nos a buscar una solució formal com la que indicàvem a (3.7): $\partial_b\tilde{\phi}(z,\tau,b) = z - \tau + \ldots$ és formalment invertible.

De fet, per trobar la nostra Equació del Pont, del principi de Huygens només farem servir que les solucions de la linealització de l'Equació Inner (3.3) al voltant de la Integral Formal $\tilde{\phi}(z,\tau,b)$ són funcions de $\partial_b\tilde{\phi}$.

3.4.2 Les components $\tilde{\phi}_n$ de la Integral Formal.

Sigui $\tilde{\phi}_0(z,\tau;\mu)$ la sèrie definida al Lema 3.4. Una sèrie

$$\tilde{\phi}(z,\tau,b;\mu) = \sum_{n\geq 0} b^n\tilde{\phi}_n(z,\tau;\mu)$$

és solució formal de l'Equació (3.3) si i només si

$$\big(\partial_\tau + \tilde{D}_0\partial_z\big)\tilde{\phi}_1 = 0, \tag{3.71}$$

$$\big(\partial_\tau + \tilde{D}_0\partial_z\big)\tilde{\phi}_n = \frac{1}{8}z^2 \sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1,n_2\geq 1}} \partial_z\tilde{\phi}_{n_1}\partial_z\tilde{\phi}_{n_2}, \qquad n\geq 2, \tag{3.72}$$

on

$$\tilde{D}_0(z,\tau;\mu) = 1 - \mu\tilde{F}(z,\tau;\mu) = -\frac{1}{4}z^2\partial_z\tilde{\phi}_0(z,\tau;\mu). \tag{3.73}$$

Observi's que l'Equació (3.71) és exactament la mateixa que (3.45); com a $\tilde{\phi}_1$ triem la solució $z-\tau+\tilde{S}$ definida al Lema 3.26. Determinarem ara una successió de sèries formals $\left\{\tilde{\phi}_n(z,\tau;\mu)\right\}_{n\geq 2}$ solucions de (3.72).

Tècnicament, ens interessa considerar $x = z + \tilde{S}(z,\tau;\mu)$ con un canvi de variables formal que *redreci* el camp vectorial $\partial_\tau + \tilde{D}_0(z,\tau;\mu)\partial_z$.

Lema 3.32. *Per a cada $\mu \in \mathbb{C}$, la relació*

$$x = z + \tilde{S}(z,\tau;\mu) \Leftrightarrow z = x + \tilde{R}(x,\tau;\mu) \tag{3.74}$$

defineix una sèrie formal $\tilde{R} \in x^{-1}\mathcal{P}[[x^{-1}]]$, la qual és l'única solució en aquest espai de l'equació

$$\tilde{R}(x,\tau;\mu) = -\tilde{S}(x+\tilde{R}(x,\tau;\mu),\tau;\mu). \tag{3.75}$$

A més, la sèrie $\tilde{R}$ és antisimètrica respecte la involució $\sigma : (z,\tau) \mapsto (-z, \pi-\tau)$.

Observació 3.33. *L'Equació (3.74) no vol dir res més que les dues transformacions formals $x = \Phi(z,\tau;\mu) = z + \tilde{S}(z,\tau;\mu)$ i $z = \Psi(x,\tau;\mu) = x + \tilde{R}(x,\tau;\mu)$ són mútuament inverses. La sèrie $\tilde{R}$ també es pot definir a partir de (3.77) i recuperar $\tilde{S}$, per a cada μ, com l'única solució a $z^{-1}\mathcal{P}[[z^{-1}]]$ de l'equació*

$$\tilde{S}(z,\tau;\mu) = -\tilde{R}(z+\tilde{S}(z,\tau;\mu),\tau;\mu) \tag{3.76}$$

la qual no és res més que la condició $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$.

A partir d'ara, i per tal de simplificar les notacions, a les demostracions no indicarem la dependència en μ de les funcions.

Demostració. Per veure l'equivalència entre (3.74) i (3.75) (o (3.76)) només cal substituir la part dreta de (3.74) a la part esquerra:

$$x = x + \tilde{R}(x,\tau;\mu) + \tilde{S}(x+\tilde{R}(x,\tau;\mu),\tau;\mu) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \tilde{R}(x,\tau;\mu) + \tilde{S}(x+\tilde{R}(x,\tau;\mu),\tau;\mu),$$

d'on és fàcil comprovar-ne l'existència i unicitat de solució $\tilde{R}$, la qual és antisimètrica per ser-ho $\tilde{S}$. ■

Lema 3.34. *La sèrie formal $\tilde{R} \in x^{-1}\mathcal{P}[[x^{-1}]]$ obtinguda al Lema 3.32 dóna el canvi formal $z = x + \tilde{R}(x,\tau;\mu)$ que conjuga l'operador*

$$\partial_\tau + \tilde{D}_0(z,\tau;\mu)\partial_z$$

amb el redreçat $\partial_\tau + \partial_x$, la qual cosa indica que també és l'única solució a $x^{-1}\mathcal{P}[[x^{-1}]]$ de l'equació

$$(\partial_\tau + \partial_x)\tilde{R}(x,\tau;\mu) = -\mu\tilde{F}(x+\tilde{R}(x,\tau;\mu),\tau;\mu). \tag{3.77}$$

Demostració. Donada qualsevol sèrie $\tilde{H}(z,\tau)$, sigui $\hat{H}(x,\tau)=\tilde{H}(x+\tilde{R}(x,\tau),\tau)$. Aleshores,

$$\begin{aligned}\partial_\tau\hat{H}(x,\tau) &= \partial_z\tilde{H}(x+\tilde{R}(x,\tau),\tau)\cdot\partial_\tau\tilde{R}(x,\tau)+\partial_\tau\tilde{H}(x+\tilde{R}(x,\tau),\tau),\\ \partial_x\hat{H}(x,\tau) &= \partial_z\tilde{H}(x+\tilde{R}(x,\tau),\tau)\cdot\Big(1+\partial_x\tilde{R}(x,\tau)\Big).\end{aligned}$$

Per tant, sumant les dues expressions i reagrupant termes,

$$\begin{aligned}\partial_\tau\hat{H}(x,\tau)+\partial_x\hat{H}(x,\tau) &= \partial_\tau\tilde{H}(x+\tilde{R}(x,\tau),\tau)+\\ &+ \Big[\partial_\tau\tilde{R}(x,\tau)+1+\partial_x\tilde{R}(x,\tau)\Big]\cdot\partial_z\tilde{H}(x+\tilde{R}(x,\tau),\tau).\end{aligned}$$

Així doncs, si

$$1+\partial_x\tilde{R}+\partial_\tau\tilde{R}=\tilde{D}_0(x+\tilde{R},\tau), \tag{3.78}$$

aleshores $\tilde{H}$ és solució de

$$\partial_\tau\tilde{H}+\tilde{D}_0(z,\tau)\cdot\partial_z\tilde{H}=0$$

si i només si $\hat{H}$ és solució de $(\partial_\tau+\partial_x)\hat{H}=0$.

O sigui, que la conjugació entre els camps vectorials és equivalent a demanar la condició (3.78).

Del Lema 3.26 s'obté:

$$(\partial_\tau+\tilde{D}_0(z,\tau)\partial_z)(z-\tau+\tilde{S})=0$$

o escrit d'una altra manera,

$$1-\partial_\tau\tilde{S}=\tilde{D}_0(z,\tau)+\tilde{D}_0(z,\tau)\partial_z\tilde{S},$$

però, per (3.76), és anàleg a:

$$1+\partial_x\tilde{R}+\partial_\tau\tilde{R}=\tilde{D}_0(z,\tau)(1+\partial_x\tilde{R})-\tilde{D}_0(z,\tau)\partial_x\tilde{R}=\tilde{D}_0(z,\tau),$$

$$1+\partial_x\tilde{R}(x,\tau)+\partial_\tau\tilde{R}(x,\tau)=\tilde{D}_0(x+\tilde{R}(x,\tau),\tau),$$

amb la qual cosa hem acabat.

Finalment, per la relació (3.73), la condició (3.78) és el mateix que (3.77). ■

Proposició 3.35. *Per a cada $\mu\in\mathbb{C}$ i $n\geq 2$, existeix una única sèrie $\tilde{\phi}_n$ a $\mathcal{P}[z][[z^{-1}]]$ el terme constant de la qual (el coeficient de $e^{ik\tau}z^{-j}$ quan $k=j=0$) s'anul·la, i qualsevol altra solució de l'Equació (3.72) en aquest espai és la suma de $\tilde{\phi}_n$ i un nombre complex arbitrari. La sèrie $\tilde{\phi}_n$ és antisimètrica respecte la involució $\sigma:(z,\tau)\mapsto(-z,\pi-\tau)$ i pot escriure's com*

$$\tilde{\phi}_n(z,\tau;\mu)=P_n(z,\tau;\mu)+\tilde{\phi}_{[n]}(z,\tau;\mu),\qquad P_n\in\mathcal{P}[z],\quad \tilde{\phi}_{[n]}\in z^{-1}\mathcal{P}[[z^{-1}]], \tag{3.79}$$

on P_n té grau $2n-1$ en z.

La successió $\{\tilde{\phi}_n\}_{n\geq 2}$ està determinada recursivament per les fórmules (3.82), (3.83) i (3.84). Afegint els dos primers termes $\tilde{\phi}_0$ i $\tilde{\phi}_1=z-\tau+\tilde{S}$ com els donats als Lemes 3.4 i 3.26, tenim la "Integral Formal" (o "solució completa formal")

$$\tilde{\phi}(z,\tau,b;\mu)=\sum_{n\geq 0}b^n\tilde{\phi}_n(z,\tau;\mu). \tag{3.80}$$

Observació 3.36. *L'antisimetria, que recordem té el seu origen en l'elecció de la pertorbació $2(1-\mu\sin\tau)$ a (3.3), és una característica del nostre problema molt útil: garantirà que l'equació (3.72) transformada pel canvi (3.74), tingui la part de la dreta amb residu de mitjana zero (és a dir que el promig respecte τ del seu residu en x, o el coeficient de $e^{ik\tau}x^{-j}$ quan $k=0$ i $j=1$, s'anul·li) i així admetrà primitives respecte x de $\mathcal{P}[x][[x^{-1}]]$.*

Per a altres tipus de pertorbacions, potser caldria admetre múltiples de $\log x$: les components $\tilde{\phi}_n(x+\tilde{R}(x,\tau),\tau)$ serien de $\mathcal{P}[x][[x^{-1}]]\oplus\mathbb{C}\log x$. Malgrat la no-linearitat de l'equació, aquests termes logarítmics no proliferarien, perquè la part de la dreta de (3.72) està formada per les derivades de les components i, per tant, encara és de $\mathcal{P}[x][[x^{-1}]]$.

Demostració. Procedim a fer el canvi de variable (3.74) al sistema d'equacions (3.71) i (3.72): segons el Lema 3.34, les equacions per a les noves incògnites $\tilde{g}_n(x,\tau)=\tilde{\phi}_n(x+\tilde{R}(x,\tau),\tau)$ són

$$(\partial_\tau+\partial_x)\,\tilde{g}_1 = 0, \tag{3.81}$$
$$(\partial_\tau+\partial_x)\,\tilde{g}_n = \tilde{B}_n, \qquad n\geq 2, \tag{3.82}$$

amb

$$\tilde{B}_n(x,\tau) := \frac{1}{8}\,x^2\left(\frac{1+x^{-1}\tilde{R}}{1+\partial_x\tilde{R}}\right)^2 \sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1,n_2\geq 1}} \partial_x\tilde{g}_{n_1}\partial_x\tilde{g}_{n_2}. \tag{3.83}$$

L'elecció que hem fet de $\tilde{\phi}_1(z,\tau)=z-\tau+\tilde{S}(z,\tau)$, es transporta a

$$\tilde{g}_1(x,\tau)=x-\tau$$

com la solució de (3.81). Observi's que les úniques solucions a $\mathcal{P}[x][[x^{-1}]]$ d'aquesta equació homogènia són les constants. Per tant, el primer resultat que proposa l'enunciat equival a l'existència d'una única solució $\tilde{g}_n(x,\tau)$ de (3.82) a $\mathcal{P}[x][[x^{-1}]]$ amb terme constant zero per a cada $n\geq 2$.

Donada $B\in\mathcal{P}[x][[x^{-1}]]$, l'equació $(\partial_\tau+\partial_x)A=B$ és pot estudiar fàcilment desenvolupant ambdós costats, primer en sèries de Fourier i després en sèries de potències de x. Per a cada $k\in\mathbb{Z}$, trobem $(ik+\partial_x)A^{[k]}=B^{[k]}$ la qual admet òbviament una única solució $\mathbb{C}[x][[x^{-1}]]$ si $k\neq 0$:

$$A^{[k]}=\frac{1}{ik}\left(1+\frac{1}{ik}\partial_x\right)^{-1}B^{[k]}.$$

L'única possible obstrucció és el residu de $B^{[0]}$ (coeficient de x^{-1}); quan aquest residu s'anul·la, l'equació $\partial_x A^{[0]}=B^{[0]}$ admet una única solució a $\mathbb{C}[x][[x^{-1}]]$ sense terme constant. A més, la valoració respecte x^{-1} és augmentada, com a molt, en 1 quan passem de $B^{[k]}$ a $A^{[k]}$, per conseqüent, la sèrie de Fourier obtinguda $\sum A^{[k]}(x)\,e^{ik\tau}$ també és de $\mathcal{P}[x][[x^{-1}]]$.

Com que una sèrie simètrica respecte σ ha de tenir el coeficient de Fourier d'índex zero parell respecte x, quan B és simètrica no hi ha obstrucció i aleshores la corresponent solució és antisimètrica.

Procedint per inducció sobre $n\geq 2$: essent la sèrie $\partial_x\tilde{g}_m(x,\tau)$ simètrica respecte σ per a $1\leq m\leq n-1$ i tenint una part polinomial en x de grau $2m-2$, la sèrie $\tilde{B}_n$ $(n\geq 2)$ és simètrica i té una part polinomial de grau $2n-2$, aleshores la corresponent solució $\tilde{g}_n$ és antisimètrica i té una part polinomial de grau $2n-1$.

Recuperem les solucions $\tilde{\phi}_n$ de l'Equació (3.72) mitjançant

$$\tilde{\phi}_n(z,\tau) = \tilde{g}_n(z + \tilde{S}(z,\tau),\tau) \tag{3.84}$$

i són antisimètriques respecte la involució σ, perquè el nostre canvi formal de variable commuta amb σ. A més, com que $\tilde{S} \in z^{-1}\mathcal{P}[[z^{-1}]]$, el grau de les parts polinomials de $\tilde{\phi}_n$ i $\tilde{g}_n$ és el mateix. ■

3.4.3 Les propietats ressorgents de la Integral Formal.

Veurem que les transformades de Borel formals $\hat{\phi}_n(\zeta,\tau;\mu)$ de les sèries $\tilde{\phi}_{[n]}$ introduïdes a (3.79) són convergents per a ζ prop de l'origen, incloent-hi el cas de $\tilde{\phi}_{[1]} = \tilde{S}$. Segons l'Observació 3.22, podem considerar totes les components $\tilde{\phi}_n$ de la Integral Formal (per a τ i μ fixats) com les rèpliques formals de les singularitats

$$\overset{\triangledown}{\phi}_n = \overset{\triangledown}{P}_n + {}^\flat\hat{\phi}_n, \tag{3.85}$$

on $\overset{\triangledown}{P}_n$ és una combinació lineal de singularitats elementals $\delta^{(j)} = \operatorname{sing}\left(\frac{(-1)^j j!}{2\pi i\zeta^{j+1}}\right)$ amb $0 \le j \le 2n-1$ corresponents als monomis z^j (per conveni $\overset{\triangledown}{P}_0 = 0$).

Per tal d'establir el nostre resultat sobre l'estructura analítica d'aquests germs $\hat{\phi}_n$, donarem els conceptes bàsics de la Teoria de la Ressurgència que ja vam començar a les Seccions 3.2.4 i 3.2.5. Seguint les definicions donades a [Sa95] o [GSa01], a continuació introduïm el concepte de funció ressorgent.

Definició 3.37. *Definim* RES *com l'espai de totes les* $\overset{\triangledown}{\varphi}$ *de* $\mathrm{SING}_{\theta,\alpha}$ *per a algun* θ,α *i el menor de les quals* $\hat{\varphi}$ *s'estén analíticament al recobriment universal de* $\mathbb{C}\setminus i\mathbb{Z}$*. Aquestes* $\overset{\triangledown}{\varphi}$ *s'anomenen funcions ressorgents (amb singularitats a* $i\mathbb{Z}$*).*

Els nostres menors $\hat{\phi}_n$ seran a més regulars a l'origen, o sigui, menors que són analítics a la superfície de Riemann $\mathcal{R}$ que vam definir a la Secció 3.2.1, però no imposem aquesta condició a la definició perquè no simplifica en cap moment l'exposició.

Definició 3.38. *Sigui* $\omega = m\, e^{i\theta} \in \underset{\bullet}{\mathbb{C}}$ *amb* $\theta \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ *i* $m \in \mathbb{N}^*$*. Definim un operador lineal* Δ_ω : RES $\to$ RES *segons la fórmula*

$$\Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi} = \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{m-1}\in\{+,-\}} \frac{p(\varepsilon)!q(\varepsilon)!}{m!} \operatorname{sing}\big(\hat{\varphi}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{m-1}}(\omega+\zeta)\big), \tag{3.86}$$

on $p(\varepsilon)$ *i* $q(\varepsilon) = m-1-p(\varepsilon)$ *indiquen el número de signes positius i de signes negatius a* $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{m-1})$*, i* $\hat{\varphi}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{m-1}}(\omega+\zeta)$ *indica el germ obtingut per a* $\arg\zeta$ *prop de* $\theta-\pi$ *seguint la continuació analítica del menor* $\hat{\varphi}$ *al llarg de* $]0,\omega[$ *i circumvalant els punts singulars intermitjos* $re^{i\theta}$ *per la dreta si* $\varepsilon_r = +$ *i per l'esquerra si* $\varepsilon_r = -$.

Aquest operador Δ_ω pot entendre's com una mitjana de les diferents possibles determinacions del menor $\hat{\varphi}$ prop de la singularitat ω. Òbviament, quan $m = 1$ aquesta definició és consistent amb la 3.24.

Proposició 3.39. *L'espai* RES *és una subàlgebra de* $\mathrm{RES}^{(1)}_{\theta,\beta}$ *per a qualssevol* $\theta \in \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ *i* $\beta > 0$*; els operadors* Δ_ω *satisfan la regla de Leibniz.*

Amb la definició que hem donat, els operadors Δ_ω i $\Delta_{\omega e^{2\pi i}}$ són diferents (vegi's [CNP93b], p. 208–209), però actuen igual sobre funcions ressorgents els menors de les quals són regulars a l'origen.

També ara, quan les funcions ressorgents admetin una rèplica formal, ens interessarà mirar l'operador Δ_ω actuant en el model formal. Per exemple, si $\overset{\triangledown}{\varphi} \in \mathrm{RES}$ admet una transformada de Laplace formal $\tilde{\varphi} \in \mathcal{P}[z][[z^{-1}]]$ (la qual cosa vol dir que pot descomposar-se com la $\overset{\triangledown}{\phi}_n$ a (3.85), o equivalentment que el seu menor $\hat{\varphi}$ és regular a l'origen), dir que $\Delta_{\omega_r} \ldots \Delta_{\omega_1} \overset{\triangledown}{\varphi} \in \mathcal{P}[z][[z^{-1}]]$ per a tots els $\omega_1, \ldots, \omega_r$, equival a la propietat que totes les singularitats que es troba la continuació analítica de $\hat{\varphi}$ són sumes de parts polars (és a dir, combinacions lineals de $\delta^{(j)}$ amb $j \geq 0$) i singularitats logarítmiques (singularitats integrables amb menors regulars). Una funció ressorgent ($\overset{\triangledown}{\varphi}$ o $\tilde{\varphi}$) d'aquest tipus s'anomena *simplement ramificada* i la seva derivada estrangera pot escriure's a l'espai de les singularitats com

$$\Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi} = A_N \delta^{(N)} + \cdots + A_0 \delta + {}^\flat\hat{\phi},$$

per a certes constants A_j i on $\hat{\phi}$ és el menor de la singularitat $\Delta_\omega \overset{\triangledown}{\varphi}$, que pot calcular-se al segment $[0, e^{i\theta}]$ d'acord amb la fórmula

$$\hat{\phi}(\zeta) = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{m-1} \in \{+,-\}} \frac{p(\varepsilon)!q(\varepsilon)!}{m!} \big(\hat{\varphi}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{m-1},+}(\omega+\zeta) - \hat{\varphi}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{m-1},-}(\omega+\zeta)\big).$$

Al model formal escriurem:

$$\Delta_\omega \tilde{\varphi} = A_N z^N + \cdots + A_0 + \tilde{\mathcal{B}}^{-1}\hat{\phi}.$$

Igual que en el cas $m = 1$, les *derivades estrangeres puntejades* $\dot{\Delta}_\omega = e^{-\omega z}\,\Delta_\omega$ commuten amb $\frac{\partial}{\partial z}$.

Observi's que $\Delta_{\omega_r} \ldots \Delta_{\omega_1} \overset{\triangledown}{\varphi}$ és una combinació de les singularitats de diverses determinacions de $\hat{\varphi}$ al punt $\omega_1 + \ldots + \omega_r$, i això és important perquè si coneixem totes aquestes derivades successives, podrem disposar del comportament singular de $\hat{\varphi}$ a tot arreu.

Teorema 3.40. *Totes les components* $\tilde{\phi}_n$ $(n \geq 0)$ *de la Integral Formal definida a la Proposició 3.35 són funcions ressorgents simplement ramificades que depenen analíticament de* $\tau \in \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ *i* $\mu \in \mathbb{C}$*, i els menors de les quals tenen creixement com a molt exponencial al llarg de les semirectes no verticals contingudes a* $\mathcal{R}$*.*

Per a cada $\omega \in i\mathbb{Z}^*$*, existeix una successió de funcions enteres* $\left\{f_n^{[\omega]}(\mu)\right\}_{n\geq 0}$ *(on* $f_0^{[i]}(\mu)$ *és la funció donada al Teorema 3.28) tal que compleixen l'equació:*

$$\dot{\Delta}_\omega \tilde{\phi} = f^{[\omega]} e^{-\omega \partial_b \tilde{\phi}}, \qquad f^{[\omega]}(b;\mu) = \sum_{n\geq 0} f_n^{[\omega]}(\mu) b^n \tag{3.87}$$

anomenada "Equació del Pont". Aquesta equació ha de ser entesa com un sistema d'infinites "relacions ressorgents" obtingudes desenvolupant en potències de b: $\Delta_\omega \tilde{\phi}_0 = f_0^{[\omega]} e^{\omega\tau} e^{-\omega\tilde{S}}$ *i*

$$\Delta_\omega \tilde{\phi}_n = \left[f_n^{[\omega]} + \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^r \omega^r}{r!} \sum_{\substack{n_0+n_1+\ldots+n_r=n+r \\ n_0\geq 0,\ n_1,\ldots,n_r \geq 2}} n_1 \ldots n_r\, f_{n_0}^{[\omega]}\, \tilde{\phi}_{n_1} \ldots \tilde{\phi}_{n_r} \right] e^{\omega\tau} e^{-\omega\tilde{S}}$$

per a $n \geq 1$.

Així doncs, la derivada estrangera de $\Delta_\omega \tilde{\phi}_n$ queda determinada per $f_0^{[\omega]}(\mu), \ldots, f_n^{[\omega]}(\mu)$ i les sèries $\tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_{n+1}$. Les derivades estrangeres successives de $\tilde{\phi}_n$ es calculen aplicant la derivada estrangera puntejada a ambdós costats de l'Equació del Pont i desenvolupant en potències de b. Per exemple, recordant (3.44):

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_{\omega_2}\, \dot{\Delta}_{\omega_1} \tilde{\phi} &= f^{[\omega_1]}\, \dot{\Delta}_{\omega_2} e^{-\omega_1 \partial_b \tilde{\phi}} = -\omega_1 f^{[\omega_1]} e^{-\omega_1 \partial_b \tilde{\phi}} \partial_b\, \dot{\Delta}_{\omega_2} \tilde{\phi} \\ &= \omega_1 f^{[\omega_1]} \Big(\omega_2 f^{[\omega_2]} \partial_b^2 \tilde{\phi} - \partial_b f^{[\omega_2]} \Big) e^{-(\omega_1+\omega_2)\partial_b \tilde{\phi}} \end{aligned}$$

la qual cosa ens permet calcular les sèries $\dot{\Delta}_{\omega_2}\, \dot{\Delta}_{\omega_1} \tilde{\phi}_n$, que quedaran en funció de $f_0^{[\omega_1]}, \ldots, f_n^{[\omega_1]}$, $f_0^{[\omega_2]}, \ldots, f_{n+1}^{[\omega_2]}$ i $\tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_{n+2}$.

Observació 3.41. *Fixem-nos que sempre estem treballant amb (3.80) de manera formal respecte b. La causa és que en cap moment hem establert la seva convergència.*

D'aquí i fins al final del capítol ens dedicarem a la demostració del Teorema 3.40.

3.4.4 Estudi de les transformades de Borel $\hat{R}$ i $\hat{S}$

Començarem demostrant l'analiticitat de les transformades de Borel formals $\hat{S}$ and $\hat{R}$ a $\mathcal{R}^{(1)}$, la qual cosa farem seguint el mètode de funcions majorants ja usat a la Secció 3.2.3.

Abans però, necesitem demostrar dos lemes que seran el punt de partida del mètode de sèries majorants que usarem per a l'estudi de $\hat{R}$ i $\hat{S}$.

Lema 3.42. *La transformada de Borel formal de* $\tilde{R}$ *és* $\hat{R}(\zeta,\tau) = \sum_{n\geq 0} \hat{R}_n(\zeta,\tau)$, *amb sèries formals* $\hat{R}_n \in \zeta^n \mathcal{P}[[\zeta]]$ *definides per les fórmules recurrents*

$$\begin{aligned} \hat{R}_0 &= \mu\, \mathcal{E}_0 \hat{F}, \\ \hat{R}_n &= \mu\, \mathcal{E}_0 \hat{T}_n, \quad \hat{T}_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^r}{r!} (\zeta^r \hat{F}) * \sum_{n_1+\ldots+n_r=n-r} \hat{R}_{n_1} * \ldots * \hat{R}_{n_r}, \qquad n \geq 1, \end{aligned}$$

on $\hat{F}(\zeta,\tau)$ *es va definir a (3.23) i l'operador* $\mathcal{E}_0$ *es defineix usant desenvolupaments de Fourier:*

$$\hat{A} = \mathcal{E}_0 \hat{B} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall k \in \mathbb{Z})\ \hat{A}^{[k]}(\zeta) = \frac{1}{\zeta - ik} \hat{B}^{[k]}(\zeta), \tag{3.88}$$

a condició que $\hat{B}^{[0]}$ *s'anul·li a* $\zeta = 0$.

Demostració. Com que $\hat{F}$ satisfà la condició $\hat{F}^{[0]}(0) = 0$ (gràcies a (3.30) i (3.31)), es pot comprovar inductivament que, per a cada n, $\hat{R}_n$ està ben definida i és de $\zeta^n \mathcal{P}[[\zeta]]$. L'operador $\mathcal{E}_0$ està definit de manera que les transformades de Laplace corresponents satisfan

$$\begin{aligned} -(\partial_\tau + \partial_x)\tilde{R}_0 &= \mu \tilde{F}, \\ -(\partial_\tau + \partial_x)\tilde{R}_n &= \mu \tilde{T}_n, \quad \tilde{T}_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r!}(\partial_z^n \tilde{F}) \sum_{n_1+\ldots+n_r=n-r} \tilde{R}_{n_1} \ldots \tilde{R}_{n_r}, \qquad n \geq 1, \end{aligned}$$

la qual cosa porta a que la sèrie $\sum \tilde{R}_n(x,\tau)$ (la qual és formalment convergent) satisfà l'equació (3.77), per aplicació a $\tilde{F}$ de la fórmula de Taylor. ■

Lema 3.43. *La transformada de Borel formal de $\tilde{S}$ és $\hat{S}(\zeta,\tau) = \sum_{n\geq 0} \hat{S}_n(\zeta,\tau)$, amb sèries formals $\hat{S}_n \in \zeta^n \mathcal{P}[[\zeta]]$ definides per les fórmules recurrents*

$$\begin{aligned} \hat{S}_0 &= -\hat{R}, \\ \hat{S}_n &= \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r+1}}{r!}(\zeta^r \hat{R}) * \sum_{n_1+\ldots+n_r=n-r} \hat{S}_{n_1} * \ldots * \hat{S}_{n_r}, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

Demostració. Senzillament s'ha d'aplicar la fórmula de Taylor a (3.76). ■

Vista l'existència de $\hat{R}(\zeta,\tau;\mu)$ i $\hat{S}(\zeta,\tau;\mu)$ podem enunciar el resultat sobre la seva analiticitat i creixement exponencial.

Proposició 3.44. *La sèrie formal $\tilde{R}(x,\tau;\mu) \in x^{-1}\mathcal{P}[[x^{-1}]]$ definida al Lema 3.32 i la sèrie formal $\tilde{S}(z,\tau;\mu) \in z^{-1}\mathcal{P}[[z^{-1}]]$ definida al Lema 3.26 admeten transformades de Borel formals $\hat{R}(\zeta,\tau;\mu)$ i $\hat{S}(\zeta,\tau;\mu)$ les quals són convergents per a ζ prop de l'origen (uniformement en τ i μ). Les funcions resultants són holomorfes en les tres variables i s'estenen analíticament a $\mathcal{R}^{(1)} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$.*

A més, per a cada $\rho \in]0,1/3[$, existeix una funció no decreixent κ i un nombre positiu K tals que

$$|\hat{R}(\zeta,\tau;\mu)|,\ |\hat{S}(\zeta,\tau;\mu)| \leq K|\mu|\cosh(\Im m\,\tau)\, e^{\kappa\left(|\mu|\cosh(\Im m\,\tau)\right)\ell(\zeta)} \tag{3.89}$$

per a $\zeta \in \mathcal{R}_\rho^{(1)}$, $\tau \in \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$, $\mu \in \mathbb{C}$, i on ℓ és la funció definida al Lema 3.3.

La resta d'aquesta secció està dedicada a la demostració d'aquesta proposició.

Sigui $\rho \in]0,1/3[$ fixat. La demostració de l'analiticitat de $\hat{R}$ per a $\zeta \in \mathcal{R}_\rho^{(1)}$ serà similar a l'estudi que ja vam fer de $\hat{F}$ a la Secció 3.2.3. Recordem que es va obtenir: $\hat{F} = \sum_{n\geq 0} \mu^n \hat{F}_n(\zeta,\tau)$ amb, d'acord amb el Lema 3.16, $\hat{F}_n \ll_1 \hat{\mathcal{F}}_n$, on les sèries majorants $\hat{\mathcal{F}}_n$ es van definir al Lema 3.14. Ara ens interessarà escriure:

$$\hat{F} = \hat{F}_0 + \hat{F}_*, \qquad \hat{F}_*(\zeta,\tau) = \sum_{n\geq 1} \mu^n \hat{F}_n(\zeta,\tau),$$
$$\hat{F}_0 \ll_1 \hat{\mathcal{F}}_0 = \rho^{-3}\cos\tau, \quad \hat{F}_* \ll_1 \hat{\mathcal{F}}_*, \quad \hat{F} \ll_1 \hat{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}}_0 + \hat{\mathcal{F}}_*,$$

definint $\hat{\mathcal{F}}_*(\zeta,\tau)$ amb els seus coeficients de Fourier $\hat{\mathcal{F}}_*^{[k]}(\zeta) = \sum_{n\geq 1} |\mu|^n \hat{\mathcal{F}}_n^{[k]}(\zeta)$. Aquests coeficients $\hat{\mathcal{F}}_*^{[k]}$ són funcions enteres de ζ les quals s'anul·len a 0, i el desenvolupament de Taylor de les quals només té coeficients no negatius. Amb un raonament lleugerament millorat respecte el del Lema 3.14, es demostra que la sèrie de Fourier $\sum \hat{\mathcal{F}}_*^{[k]}(\zeta)e^{ik\tau}$ convergeix per a $\tau \in \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ uniformement per a ζ en qualsevol compacte de $\mathbb{C}$. La transformada de Laplace formal de $\hat{\mathcal{F}}(\zeta,\tau)$ la tenim donada explícitament a (3.34) (substituint μ per $|\mu|$).

Per la definició de $\mathcal{E}_0$ i del Lema 3.3, les sèries $\hat{R}_n$ donades al Lema 3.42 són convergents i defineixen funcions analítiques a $\mathcal{R}_\rho^{(1)} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})$. Es tracta ara de buscar-ne sèries majorants $\hat{\mathcal{R}}_n$ que ens permetin demostrar la convergència de la sèrie de funcions holomorfes $\sum \hat{R}_n$.

Començarem descomposant $\hat{R}_0$ com $\mu\mathcal{E}_0\hat{F}_0 + \mu\mathcal{E}_0\hat{F}_*$, on

$$\mathcal{E}_0\hat{F}_0 \ll_1 \rho^{-1}\hat{\mathcal{F}}_0$$

(perquè $\hat{\mathcal{F}}_0^{[0]}(\zeta) = 0$ i $|\zeta - ik| \geq \rho$ per a $k \neq 0$ i $\zeta \in \mathcal{R}_\rho^{(1)}$). La sèrie majorant per a $\mathcal{E}_0\hat{F}_*$ i la resta de $\hat{R}_n$ es deduiran usant el següent resultat.

Lema 3.45. *Existeix $\alpha > 0$, depenent només de ρ, tal que, si $\hat{B} \ll_1 \hat{\mathcal{B}}$ amb funcions enteres $\hat{\mathcal{B}}^{[k]}$ que s'anul·len a 0 i el desenvolupament de Taylor de les quals només involucra coeficients no negatius, aleshores*

$$\hat{A} = \mathcal{E}_0\hat{B} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} \ll_1 \hat{\mathcal{A}} = \alpha\partial_\zeta\hat{B}.$$

Demostració. El fet que les funcions $\hat{B}^{[k]}$ s'anul·lin a l'origen ens permet escriure $\hat{A} = \zeta^{-1}\hat{C}$ amb $\hat{C} = \mathcal{E}\hat{B} \ll_1 2\rho^{-1}\hat{\mathcal{B}}$ seguint el Lema 3.13 adaptat a $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$. A més, $|\dot{\zeta}|^{-1}\ell(\zeta)$ està fitat a $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$ (gràcies a (3.28), usant $|\dot{\zeta}| = \ell(\zeta)$ al full principal i $|\dot{\zeta}| \geq \rho$ als altres), així doncs, per a tot $k \in \mathbb{Z}$ i $\zeta \in \mathcal{R}_\rho^{(1)}$,

$$|\hat{A}^{[k]}(\zeta)| \leq \frac{2\rho^{-1}}{|\dot{\zeta}|}\hat{\mathcal{B}}^{[k]}\big(\ell(\zeta)\big) \leq \frac{\alpha}{\ell(\zeta)}\hat{\mathcal{B}}^{[k]}\big(\ell(\zeta)\big),$$

per a algun $\alpha > 0$.

Arribem al resultat enunciat comparant $\hat{\mathcal{B}}^{[k]}(\ell) = \sum_{j\geq 1} b_j^{[k]}\ell^j$ i $\partial_\zeta\hat{\mathcal{B}}^{[k]}(\ell) = \sum_{j\geq 1} j b_j^{[k]}\ell^{j-1}$ per a qualsevol $\ell \in \mathbb{R}^+$. ■

Observació 3.46. *Les transformades de Laplace formals de les sèries majorants estan relacionades segons la fórmula $\tilde{\mathcal{A}}(z,\tau) = \alpha z\tilde{\mathcal{B}}(z,\tau)$, i això implica que $\tilde{\mathcal{B}}(z,\tau) = O(z^{-2})$.*

Corol·lari 3.47. *Per a cada n, $\hat{R}_n \ll_1 \hat{\mathcal{R}}_n$ amb sèries majorants definides per les fórmules recurrents:*

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{R}}_0 &= |\mu|\left(\rho^{-1}\hat{\mathcal{F}}_0 + \alpha\partial_\zeta\hat{\mathcal{F}}_*\right), \\
\hat{\mathcal{R}}_n &= |\mu|\alpha\partial_\zeta\hat{\mathcal{T}}_n, \quad \hat{\mathcal{T}}_n = \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!}(\zeta^r\hat{\mathcal{F}}) * \sum_{n_1+\ldots+n_r=n-r}\hat{\mathcal{R}}_{n_1} * \ldots * \hat{\mathcal{R}}_{n_r}, \qquad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Demostració. Es pot comprovar per inducció sobre n que $\hat{T}_n \ll_1 \hat{\mathcal{T}}_n$, gràcies al comportament de les sèries majorants respecte la convolució a $\mathcal{R}_\rho^{(1)}$ que vam establir a la Secció 3.2.3 (com que $|\dot{\zeta}| \leq \ell(\zeta)$, aleshores $\zeta^r \hat{F} \ll_1 \zeta^r \hat{\mathcal{F}}$), i per tant $\hat{\mathcal{T}}_n$ està en les hipòtesis del lema anterior. ■

Segons (3.36), només ens queda fitar els termes de la sèrie $\sum \hat{\mathcal{R}}_n(\ell(\zeta), i\,\Im m\,\tau)$. Tal i com vam fer a la demostració del Lema 3.14, això pot fer-se considerant la sèrie de les transformades de Laplace $\tilde{\mathcal{R}}_n(x,\tau)$, les quals són sèries convergents de x i que estan determinades recurrentment per les fórmules:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}}_0 &= |\mu| \Big(\alpha x \tilde{\mathcal{F}}(x,\tau) - (\alpha x - \rho^{-1}) \tilde{\mathcal{F}}_0(x,\tau) \Big), \\
\tilde{\mathcal{R}}_n &= |\mu| \alpha x \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^r}{r!} \partial_z^r \tilde{\mathcal{F}}(x,\tau) \sum_{n_1+\ldots+n_r=n-r} \tilde{\mathcal{R}}_{n_1} \ldots \tilde{\mathcal{R}}_{n_r}, \qquad n \geq 1.
\end{aligned}$$

En aquestes expressions s'hi pot entreveure el desenvolupament de Taylor d'una equació implícita: la sèrie generadora $\tilde{\mathcal{R}}(x,\tau,\delta) = \sum_{n\geq 0} \tilde{\mathcal{R}}_n(x,\tau)\delta^n$ és solució de

$$\alpha^{-1} x^{-1} \tilde{\mathcal{R}} = |\mu| \Big(\tilde{\mathcal{F}}(x - \delta\tilde{\mathcal{R}}, \tau) - \big(1 - (\alpha\rho x)^{-1}\big) \tilde{\mathcal{F}}_0(x,\tau) \Big).$$

Substituint (3.34) però posant $\mathsf{R}(z) = 1 + z\mathsf{S}(z)$, $X = (\rho x)^{-1}$ i $\nu = |\mu|\rho^{-3}\cos\tau$, trobem

$$\tilde{\mathcal{R}}(x,\tau,\delta) = \nu(\rho x)^{-1} U\big((\rho x)^{-1}, |\mu|\rho^{-3}\cos\tau, \delta\big),$$

on $U(X,\nu,\delta) = \sum_{n\geq 0} U_n(X,\nu)\delta^n$ resol

$$\begin{aligned}
U &= 1 + \alpha\nu(1 - \rho\delta\nu X^2 U)^{-1} \big(\rho\delta X U + 4f\mathsf{S}(4\nu X f)\big), \\
f &= f(X,\nu,\delta,U) = (1 - \rho\delta\nu X^2 U)^{-1} + X(1 - \rho\delta\nu X^2 U)^{-2} + X^2(1 - \rho\delta\nu X^2 U)^{-3}.
\end{aligned}$$

El Teorema de la Funció Implícita conclou que, en aquesta situació, existeix un nombre positiu C i una funció no decreixent Λ (només depenent de ρ) tal que la funció U és holomorfa i fitada per C per a $|\delta| \leq 2$ i $|X| \leq \Lambda(|\nu|)^{-1}$. Per tant $|x\tilde{\mathcal{R}}_n(x,\tau)| \leq 2^{-n}\rho^{-4}C|\mu\cos\tau|$ per a $|x^{-1}| \leq \rho\Lambda(\rho^{-3}|\mu\cos\tau|)^{-1}$, la qual cosa implica

$$\hat{\mathcal{R}}_n(\zeta,\tau) \leq 2^{-n-1} K |\mu\cos\tau|\, e^{\kappa(\rho^{-3}|\mu\cos\tau|)\zeta}$$

amb $K = 2\rho^{-4}C$ i $\kappa = \rho^{-1}\Lambda$.

Gràcies a (3.36), obtenim el resultat buscat per a $\hat{R}(\zeta,\tau)$ a $\mathcal{R}^{(1)} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})$. Posant $\delta = 1$, també tindrem que $\hat{R} \ll_1 \hat{\mathcal{R}}$ amb una sèrie majorant $\hat{\mathcal{R}} = \sum_{n\geq 0} \hat{\mathcal{R}}_n(\zeta,\tau)$ la qual satisfà

$$|\hat{\mathcal{R}}(\zeta,\tau)| \leq K|\mu\cos\tau|\, e^{\kappa(\rho^{-3}|\mu\cos\tau|)\zeta}, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^+,\ \tau \in \mathbb{C}. \tag{3.90}$$

La sèrie formal $\hat{S}_n$ del Lema 3.43 convergeix clarament per a ζ prop de l'origen i s'estén analíticament a $\mathcal{R}_\rho^{(1)} \times (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})$. S'obté la majoració $\hat{S}_n \ll_1 \hat{\mathcal{S}}_n$ definint:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{S}}_0 &= \hat{\mathcal{R}}, \\
\hat{\mathcal{S}}_n &= \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r!} (\zeta^r \hat{\mathcal{R}}) * \sum_{n_1+\ldots+n_r=n-r} \hat{\mathcal{S}}_{n_1} * \ldots * \hat{\mathcal{S}}_{n_r}, \qquad n \geq 1.
\end{aligned}$$

La sèrie generadora $\tilde{\mathcal{S}}(z,\tau,\delta) = \sum_{n\geq 0} \tilde{\mathcal{S}}_n(z,\tau)\delta^n$ és solució de

$$\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{R}}(z - \delta\tilde{\mathcal{S}}, \tau),$$

i aribem a la mateixa conclusió que abans (augmentant K i κ). Altra vegada prenent $\delta = 1$, tenim que $\hat{S} \ll_1 \hat{\mathcal{S}}$ amb una sèrie majorantque satisfà la mateixa desigualtat (3.90) que $\hat{\mathcal{R}}$.

Amb això acabem la demostració de la Proposició 3.44. Només indicar que l'analiticitat de $\hat{S}$ també es podria deduir aplicant les idees de [Pha89] relacionades amb "funcions implícites ressorgents".

En vista a capítols següents, ens interessa establir l'existència de funcions analítiques obtingudes com a resultat de la resumació de Borel de les funcions ressorgents $\tilde{R}$ i $\tilde{S}$.

Corol·lari 3.48. *Sigui $\mathcal{D}^-_\rho$ el domini definit a (3.62). Existeix una solució R^- 2π-periòdica en τ i analítica a $\mathcal{D}^-_\rho \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ de l'equació*

$$(\partial_\tau + \partial_x)R(x,\tau;\mu) = -1 - \frac{1}{4}\left(x + R(x,\tau;\mu)\right)^2 \partial_z \phi_0^-(x + R(x,\tau;\mu),\tau;\mu), \tag{3.91}$$

és a dir, el canvi $z = x + R^-(x,\tau)$ conjuga el camp

$$\partial_\tau - \frac{1}{4} z^2 \partial_z \phi_0^-(z,\tau;\mu)\partial_z$$

amb el camp redreçat $\partial_\tau + \partial_x$. També existeix una solució S^- 2π-periòdica en τ i analítica a $\mathcal{D}^-_\rho \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ de l'equació

$$S(z,\tau;\mu) = -R(z + S(z,\tau;\mu),\tau;\mu), \tag{3.92}$$

és a dir, que una és la inversa de l'altra:

$$x = z + S^-(z,\tau;\mu) \Leftrightarrow z = x + R^-(x,\tau;\mu). \tag{3.93}$$

A més, compleixen que

$$R^-(x,\tau;\mu) = O(x^{-1}) \qquad i \qquad S^-(z,\tau;\mu) = O(z^{-1}). \tag{3.94}$$

Demostració. Al Lema 3.32 es va establir l'existència d'una única solució formal $\tilde{R}$ a l'espai $x^{-1}\mathcal{P}[[x^{-1}]]$ de l'Equació (3.91) amb $\tilde{\phi}_0$ i a la Proposició 3.44 hem demostrat que la seva transformada de Borel formal $\hat{B}$ és convergent prop de l'origen i s'estén analíticament a $\mathcal{R}^{(0)}$ amb creixement, com a molt exponencial, per tant, podem calcular-ne la seva transformada de Laplace en la direcció $\mathbb{R}^-$ i, pel Teorema de Cauchy, està definida analíticament a $\mathcal{D}^-_\rho$. Pot comprovar-se que aquesta funció és solució de (3.91). A més, és asimptòtica Gevrey-1 a $\tilde{R} \in x^{-1}\mathcal{P}[[x^{-1}]]$, per tant, $R^-(x,\tau;\mu) = O(x^{-1})$.

Per a la S^- pot fer-se un raonament anàleg. ■

3.4.5 Final de la demostració del Teorema 3.40.

Tenim ara ja tots els resultats necessaris per poder demostrar el Teorema 3.40. Tornarem a utilitzar les idees de la Secció 3.2.6, però ara d'una manera més sistemàtica, per tal d'anar deduint les relacions de Ressurgència i la propagació de l'analiticitat d'un full de la superfície de Riemann $\mathcal{R}$ al proper. Es tracta de demostrar l'analiticitat de cada $\hat{\phi}_n(\zeta,\tau;\mu)$ a $\mathcal{R}\times(\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})\times\mathbb{C}$ (amb creixement com a molt exponencial en direccions no verticals de $\mathcal{R}$), amb només singularitats "simplement ramificades" les quals vénen donades en termes de la Integral Formal i d'escalars $f_n^{[\omega]}(\mu)$.

Començarem demostrant l'analiticitat a $\mathcal{R}^{(1)}\times(\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})\times\mathbb{C}$, i després la "propagarem" d'un full a l'altre de $\mathcal{R}$ resolent equacions lineals per a les derivades estrangeres.

Analiticitat de $\hat{\phi}_n$ a $\mathcal{R}^{(1)}$.

Proposició 3.49. *Les transformades de Borel formals $\hat{\phi}_n(\zeta,\tau;\mu)$ de les components de la Integral Formal tenen totes la propietat* (A) *de ser convergents per a ζ prop de l'origen i definir una funció holomorfa a $\mathcal{R}^{(1)}\times(\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})\times\mathbb{C}$ amb creixement com a molt exponencial en direccions no verticals de $\mathcal{R}^{(1)}$.*

Demostració. La propietat (A) ja es va comprovar per a $\hat{\phi}_0$ a la Secció 3.2 i per a $\hat{\phi}_1$ a la secció anterior, doncs recordem que, per definició, $\hat{\phi}_1=\hat{S}$.

Per a $n\geq 2$, usarem la fórmula (3.84), descomposant $\tilde{g}_n$ en la suma d'un polinomi $p_n\in\mathcal{P}[x]$ i una sèrie $\tilde{g}_{[n]}\in x^{-1}\mathcal{P}[[x^{-1}]]$, i després anàlegament $p_n(z+\tilde{S}(z,\tau),\tau)$ com la suma de $\tilde{P}_n\in\mathcal{P}[z]$ i de $\tilde{P}_{[n]}\in z^{-1}\mathcal{P}[[z^{-1}]]$. Seguint la notació (3.79), tenim

$$\tilde{\phi}_{[n]}=\tilde{P}_{[n]}(z,\tau)+\tilde{g}_{[n]}(z+\tilde{S}(z,\tau),\tau). \tag{3.95}$$

Per la Proposició 3.44, la propietat (A) és immediata per a $\hat{P}_{[n]}(\zeta,\tau)$ (desenvolupant cada monomi $\big(z+\tilde{S}(z,\tau)\big)^j$ i usant l'estabilitat per convolució d'aquesta propietat).

La transformada de Borel formal del segon terme de la dreta de (3.95) es pot esciure com:

$$\hat{g}_n+\sum_{r\geq 1}\frac{(-1)^r}{r!}(\zeta^r\hat{g}_n)*\hat{S}^{*r}, \tag{3.96}$$

i per tant, com a conseqüència de (3.82),

$$(\partial_\tau+\partial_x)\tilde{g}_{[n]}=\tilde{B}_{[n]},$$

on $\tilde{B}_{[n]}$ s'obté de $\tilde{B}_n$ eliminant la part polinomial.

Queda només demostrar que $\hat{g}_n=\mathcal{B}\tilde{g}_{[n]}$ satisfan la propietat (A). En efecte,

$$\tilde{B}_2=x^2(1+x^{-1}\tilde{R})\sum_{r\geq 0}(-\partial_x\tilde{R})^r$$

implica que $\hat{B}_2$ satisfà la propietat (A), atès que es pot usar (3.89) per fitar $\big(\zeta\hat{R}(\zeta,\tau)\big)^{*r}$ amb $K|\mu|\cosh(\Im m\,\tau)\frac{\ell(\zeta)^{2r-1}}{(2r-1)!}e^{\kappa\ell(\zeta)}$, així és que $\hat{g}_2=-\mathcal{E}_0\hat{B}_2$ també la satisfà. Per inducció sobre n, el mateix és cert per a les altres funcions $\hat{B}_n$ i $\hat{g}_n=-\mathcal{E}_0\hat{B}_n$.

Veiem doncs que (3.96) és una sèrie convergent de funcions holomorfes per a cada $n\geq 2$ (per fitar $\hat{S}^{*r}$ s'usa (3.89)). ■

Corol·lari 3.50. *Les singularitats* $\overset{\triangledown}{\phi}_n$ *definides a (3.85) per a* $n \geq 0$ *són elements de l'espai* $\mathrm{RES}^{(1)}_{\theta,\beta}$ *per a qualssevol* $\theta \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ *i* $\beta \leq \pi$.

Demostració. Per al cas de $\overset{\triangledown}{\phi}_0 = {}^\flat\hat{\phi}_0$, aquest resultat ja el vam establir a la Secció 3.2.6, com a conseqüència del Teorema 3.8. La Proposició 3.49 ens dóna el resultat buscat per a la resta de singularitats $\overset{\triangledown}{\phi}_n$, doncs es tracta de la mateixa propietat indicada a la Definició 3.24 de l'espai $\mathrm{RES}^{(1)}_{\theta,\beta}$. ■

Demostració de l'Equació del Pont per a $\omega = \pm i$.

De moment, només tenim les derivades estrangeres Δ_i and Δ_{-i} per ser aplicades a les singularitats $\overset{\triangledown}{\phi}_n$. D'acord amb el Teorema 3.28 de la Secció 3.2.6 i les explicacions donades allí, ja sabem que

$$\Delta_i \overset{\triangledown}{\phi}_0 = f_0^{[i]}(\mu) e^{i\tau} \exp_*\big(-{}^\flat(i\hat{S})\big),$$

i, per descomptat, una relació similar per a $\Delta_{-i}\overset{\triangledown}{\phi}_0$; aquestes relacions poden escriure's en el model formal:

$$\dot{\Delta}_i \tilde{\phi}_0 = f_0^{[i]}(\mu) e^{-i\tilde{\phi}_1}, \qquad \dot{\Delta}_{-i} \tilde{\phi}_0 = f_0^{[-i]}(\mu) e^{i\tilde{\phi}_1}.$$

Proposició 3.51. *En realitat,* $f_0^{[i]}(\mu) = f_0^{[-i]}(\mu)$.

Demostració. Observem primer que es compleix la propietat $(\dot{\Delta}_i\tilde{\phi}_0) \circ \sigma = -\dot{\Delta}_{-i}\tilde{\phi}_0$ on σ és la involució $(t,\tau) \mapsto (-t, \pi - \tau)$. Efectivament, per a qualsevol $\overset{\triangledown}{\phi}$,

$$\begin{aligned}\Delta_{-i}(\overset{\triangledown}{\phi} \circ \sigma)(\zeta,\tau) &= \mathrm{sing}\big(\hat{\phi} \circ \sigma(\zeta - i, \tau)\big) = \mathrm{sing}\big(\hat{\phi}(-\zeta + i, \pi - \tau)\big) = \\ &= \Delta_i \overset{\triangledown}{\phi}(-\zeta, \pi - \tau) = (\Delta_i \overset{\triangledown}{\phi}) \circ \sigma(\zeta,\tau).\end{aligned}$$

Per tant,

$$\dot{\Delta}_{-i}(\tilde{\phi} \circ \sigma) = e^{iz}\Delta_{-i}(\tilde{\phi} \circ \sigma) = e^{iz}(\Delta_i\tilde{\phi}) \circ \sigma = \Big(e^{-iz}\Delta_i\tilde{\phi}\Big) \circ \sigma = (\dot{\Delta}_i\tilde{\phi}) \circ \sigma.$$

Però, segons el Lema 3.5, $\tilde{\phi}_0$ és antisimètrica respecte σ, per tant, $\dot{\Delta}_{-i}(\tilde{\phi}_0 \circ \sigma) = -\dot{\Delta}_{-i}(\tilde{\phi}_0)$ i arribem al primer resultat que volíem, d'on deduïm que:

$$\Big((\dot{\Delta}_i\tilde{\phi}_0) \circ \sigma\Big)(z,\tau) = -f_0^{[-i]}(\mu) e^{i\tilde{\phi}_1(z,\tau)}.$$

Per altra banda, la Proposició 3.35 ens diu que $\tilde{\phi}_1(z,\tau) = z - \tau + \tilde{S}(z,\tau)$ on de $\tilde{S}$ sabem per l'Observació 3.27 que és antisimètrica respecte σ. Com a conseqüència,

$$\begin{aligned}\Big((\dot{\Delta}_i\tilde{\phi}_0) \circ \sigma\Big)(z,\tau) &= f_0^{[i]}(\mu) e^{-i\tilde{\phi}_1(-z,\pi-\tau)} = f_0^{[i]}(\mu) e^{i\pi} e^{-i(-z+\tau+\tilde{S}(-z,\pi-\tau))} = \\ &= f_0^{[i]}(\mu) e^{i\pi} e^{i(z-\tau+\tilde{S}(z,\tau))} = -f_0^{[i]}(\mu) e^{i\tilde{\phi}_1(z,\tau)}.\end{aligned}$$

Així doncs, $f_0^{[i]}(\mu) = f_0^{[-i]}(\mu)$. ■

Seguint els mateixos raonaments de la Secció 3.2.6, podem derivar relacions anàlogues per a les restants singularitats $\overset{\triangledown}{\phi}_n$. Però és més eficient treballar amb la sèrie generadora $\overset{\triangledown}{\phi} = \sum b^n \overset{\triangledown}{\phi}_n$: sigui $\overset{\triangledown}{X} = \Delta_\omega \overset{\triangledown}{\phi}$, és a dir

$$\overset{\triangledown}{X} = \sum_{n\geq 0} b^n \overset{\triangledown}{X}_n, \qquad \overset{\triangledown}{X}_n = \Delta_\omega \overset{\triangledown}{\phi}_n \in \mathrm{SING}_{\theta,\beta},$$

per a $\omega = e^{i\theta}$, amb $\theta = \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$ i $\beta = \pi$.

En aquests moments, per a $n \geq 1$ encara desconeixem la naturalesa de la singularitat de cada $\hat{\phi}_n$ i no hi ha per tant una rèplica formal òbvia per a les singularitats $\overset{\triangledown}{X}_n$. Però les regles del càlcul estranger ens permeten obtenir les equacions lineals que satisfan aquestes singularitats, únicament aplicant Δ_ω a (3.71) i (3.72); l'equació corresponent per a la sèrie generadora és:

$$\partial_\tau \overset{\triangledown}{X} + \overset{\triangledown}{D} * \partial \overset{\triangledown}{X} = \omega \overset{\triangledown}{D} * \overset{\triangledown}{X}, \qquad \overset{\triangledown}{D} = -\frac{1}{4}\delta^{(2)} * \partial \overset{\triangledown}{\phi}. \tag{3.97}$$

Per altra banda, tal i com vam fer a la Secció 3.2.6, es pot comprovar que la sèrie de singularitats $\overset{\triangledown}{Z} = \exp_*(-\omega z + \omega \partial_b \overset{\triangledown}{\phi})$ satisfà

$$\partial_\tau \overset{\triangledown}{Z} + \overset{\triangledown}{D} * \partial \overset{\triangledown}{Z} = -\omega \overset{\triangledown}{D} * \overset{\triangledown}{Z}. \tag{3.98}$$

Usant el desenvolupament de l'exponencial, aquesta $\overset{\triangledown}{Z}$ ha de ser entesa con una sèrie formal $\sum b^n \overset{\triangledown}{Z}_n$ amb coeficients a $\mathrm{SING}_{\theta,\beta}$: $\overset{\triangledown}{Z}_0 = e^{-\omega\tau + \omega^\flat \hat{S}}$, etc. De fet, l'Equació (3.98) és una conseqüència de l'equació

$$(\partial_\tau + \tilde{D}\partial_z)\partial_b \tilde{\phi} = 0,$$

la qual és simplement la linearització de l'Equació Inner (3.3) al voltant de la Integral Formal $\tilde{\phi}$.

Combinant les Equacions (3.97) i (3.98), obtenim

$$\partial_\tau \overset{\triangledown}{\varphi} + \overset{\triangledown}{D} * \partial \overset{\triangledown}{\varphi} = 0, \qquad \overset{\triangledown}{\varphi} = \overset{\triangledown}{X} * \overset{\triangledown}{Z},$$

la qual es resol desenvolupant en potències de b i raonant com es va fer a la Secció 3.2.6: tenim $\partial_\tau \overset{\triangledown}{\varphi}_0 + \overset{\triangledown}{D}_0 * \partial \overset{\triangledown}{\varphi}_0 = 0$, la qual és l'Equació (3.59), per tant $\overset{\triangledown}{\varphi}_0$ ha de ser proporcional a δ amb el factor $f_0^{[\omega]}(\mu)$, $\partial \overset{\triangledown}{\varphi}_0$ s'ha d'anul·lar i obtenim així per inducció que cada $\overset{\triangledown}{\varphi}_n$ és proporcional a δ algun factor $f_n^{[\omega]}(\mu)$.

Com a resultat tenim una successió de factors de proporcionalitat $\left(f_n^{[\omega]}(\mu)\right)_n$ tal que

$$\Delta_\omega \overset{\triangledown}{\phi} = \left(\sum_{n\geq 0} b^n f_n^{[\omega]}(\mu)\right) \exp_*(\omega z - \omega \partial_b \overset{\triangledown}{\phi}), \qquad \omega = \pm i. \tag{3.99}$$

Desenvolupant ara respecte b, veiem que cada $\Delta_\omega \overset{\triangledown}{\phi}_n$ admet una transformada de Laplace formal a $\mathcal{P}[z][[z^{-1}]]$; la relació corresponent a (3.99) i el seu desenvolupament en el model formal són precisament les relacions ressorgents indicades al Teorema 3.40 per al cas $\omega = \pm i$.

Les derivades estrangeres i propagació de l'analiticitat.

Sigui $\mathrm{RES}^{(1)}$ l'àlgebra formada per totes les singularitats de $\mathrm{RES}^{(1)}_{\theta,\pi}$ per a $\theta \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ i que admeten un menor regular el qual s'estén analíticament a $\mathcal{R}^{(1)}$. Sabem pel Corol·ari 3.50 que cada $\overset{\triangledown}{\phi}_n$ està a $\mathrm{RES}^{(1)}$.

Quan desenvolupem respecte b, l'Equació (3.99) indica que les singularitats $\overset{\triangledown}{\phi}_n$ estan de fet al subespai que podem notar amb $\mathrm{RES}^{(2)}$, format pels elements $\overset{\triangledown}{\varphi}$ de $\mathrm{RES}^{(1)}$ les derivades estrangeres dels quals $\Delta_{\pm i}\overset{\triangledown}{\varphi}$ estan a $\mathrm{RES}^{(1)}$.

Els arguments i les notacions $\mathrm{RES}^{(1)}$, $\mathrm{RES}^{(2)}$ són essencialment els mateixos que a [GSa01, p. 588]. Si $\overset{\triangledown}{\psi}_{\pm} = \Delta_{\pm i}\overset{\triangledown}{\varphi}$, la determinació de $\hat{\varphi}$ en qualsevol dels quatre mitjos-fulls accessibles travessant l'eix imaginari entre i i $2i$, o entre $-i$ i $-2i$, pot expressar-se en termes de les determinacions principals de $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}_+$ i $\hat{\psi}_-$. Així doncs, les derivades estrangeres actuen com una eina d'exploració de la superfície de Riemann $\mathcal{R}$.

Aquest procés pot ser continuat perquè l'espai $\mathrm{RES}^{(2)}$ és una subàlgebra sobre la qual no només està definida la primera derivada estrangera $\Delta_{\pm i}$, sinó que també ho estan els operadors $\Delta_{\pm i} \circ \Delta_{\pm i}$ i $\Delta_{\pm 2i}$. A (3.86) ja vam definir els operadors Δ_{2i} i Δ_{-2i} i sabem que satisfan la regla de Leibniz.

Podem doncs aplicar la derivació estrangera a l'Equació (3.99), després d'haver desenvolupat, i repetir els mateixos arguments d'abans amb $\Delta_{\pm 2i}$, obtenint així expressions de totes les derivades estrangeres computables en termes de singularitats conegudes per estar a $\mathrm{RES}^{(2)}$. Una vegada més, aquestes fórmules poden interpretar-se com informació de les determinacions dels menors $\hat{\phi}_n$ sobre fulls llunyans de $\mathcal{R}$, suficient per establir que:

$$\overset{\triangledown}{\phi}_n \in \mathrm{RES}^{(3)} = \{\, \overset{\triangledown}{\varphi} \in \mathrm{RES}^{(2)} \mid \Delta_{\pm i}\overset{\triangledown}{\varphi} \in \mathrm{RES}^{(2)} \text{ i } \Delta_{\pm 2i}\overset{\triangledown}{\varphi} \in \mathrm{RES}^{(1)} \,\}, etc.$$

és a dir, que es pot construir una successió decreixent d'espais tals que tots contenen les singularitats $\overset{\triangledown}{\phi}_n$ i la intersecció del qual no és sinó RES.

Amb això hem acabat la demostració del Teorema 3.40.

Capítol 4

Existència i aproximació de les varietats invariants a la zona inner.

4.1 Les solucions inner com a aproximacions.

L'objectiu d'aquest capítol és l'estudi de les varietats invariants estable i inestable a la zona inner $D^u_\varepsilon = D^u_{\varepsilon,+} \cup D^u_{\varepsilon,-}$ definida a (1.51). Ens hem centrat en la varietat invariant inestable, però tot el procés es pot repetir anàlegament per a la varietat invariant estable.

Ens situarem prop de la singularitat $i\pi/2$ de la varietat invariant amb el canvi $z = (u - i\pi/2)/\varepsilon$, que transforma el domini $D^u_{\varepsilon,+}$ en:

$$\mathcal{D}^u_{\varepsilon,+} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq \overline{a}\varepsilon^{\gamma-1},\ \Im m\, z \leq -c\ln(1/\varepsilon),\ |\arg(z)| \geq \beta_1\}. \tag{4.1}$$

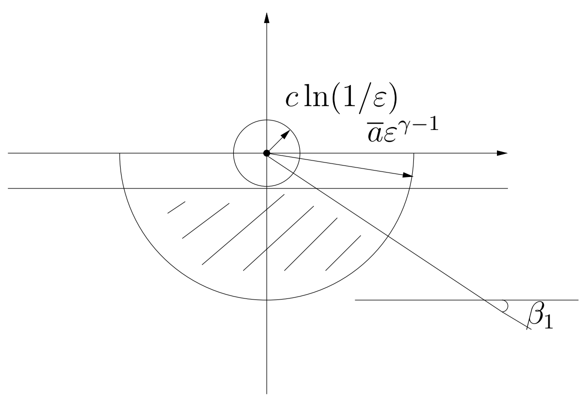


Figura 4.1: Domini $\mathcal{D}^u_{\varepsilon,+}$.

Anàlogament, el canvi $z = (u + i\pi/2)/\varepsilon$ ens situaria prop de la singularitat $-i\pi/2$ i transforma $D^u_{\varepsilon,-}$ en:

$$\mathcal{D}^u_{\varepsilon,-} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq \overline{a}\varepsilon^{\gamma-1},\ \Im m\, z \geq c\ln(1/\varepsilon),\ |\arg(z)| \geq \beta_1\}.$$

Notarem el domini inner de la variable z per

$$\mathcal{D}^u_\varepsilon := \mathcal{D}^u_{\varepsilon,+} \cup \mathcal{D}^u_{\varepsilon,-}.$$

En tot el que segueix considerarem fixades les constants $\overline{a}$, γ, c, β_1 i σ_0 que defineixen el domini $\mathcal{D}^u_\varepsilon \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$. També considerarem fixada μ_0 que ens limitarà els valors del paràmetre μ. Qualsevol constant que es generi sota aquest domini evidenment dependrà d'aquests paràmetres, tot i que no ho indicarem explícitament. També en aquest capítol, tot i que les funcions depenguin d'algun dels paràmetres μ i ε o d'ambdós alhora, per simplificar la notació, la majoria de vegades no indicarem aquesta dependència.

El resultat principal d'aquest capítol és l'aproximació de la varietat invariant inestable $\phi^-(z,\tau;\mu,\varepsilon) = \varepsilon T^-(\varepsilon z + i\pi/2, \tau;\mu,\varepsilon)$ a $\mathcal{D}^u_\varepsilon$ per la funció $\phi_0^-(z,\tau;\mu)$, estudiada amb tot detall al Capítol 3.

A l'esquerra del domini $\mathcal{D}^u_\varepsilon$ construirem una corona que ens servirà d'enllaç per fer el matching entre l'aproximació de les varietats a la zona outer i l'aproximació a la zona inner, en el sentit que, per estudiar la varietat invariant inestable a $\mathcal{D}^u_\varepsilon$, usarem la seva informació a D^u_γ donada pel Teorema 2.1 a través de la funció $T^-(u,\tau;\mu,\varepsilon)$.

Teorema 4.1. *Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \sigma < \sigma_0$, $0 < \mu \leq \mu_0$, $1/3 < \gamma < 1/2$ i $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, la solució de l'Equació (1.57) $\phi^-(z,\tau;\mu,\varepsilon) = \varepsilon T^-(\varepsilon z + i\pi/2, \tau;\mu,\varepsilon)$ existeix i és analítica a $\mathcal{D}^u_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_\sigma$.*

A més, existeix una constant d_0 tal que

$$\|\partial_z \phi^- - \partial_z \phi_0^-\|_\infty \leq d_0\, \varepsilon^2,$$
$$\|\partial_z^2 \phi^- - \partial_z^2 \phi_0^-\|_\infty \leq d_0 \frac{\varepsilon^2}{\ln^2(1/\varepsilon)},$$

on la norma s'ha pres al domini $\mathcal{D}^u_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_\sigma$

Farem només l'aproximació a $\mathcal{D}^u_{\varepsilon,+}$, essent totalment anàloga per a l'altra part del domini $\mathcal{D}^u_\varepsilon$.

4.2 Dominis de treball.

Per tal d'aconseguir els resultats finals al domini $\mathcal{D}^u_{\varepsilon,+}$, inicialment haurem de treballar amb un domini més gros, per tant, donats $\tilde{a} > \overline{a}$ i $\tilde{c} < c$, definim

$$\tilde{\mathcal{D}}^u_{\varepsilon,+} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq \tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1},\ \Im m\, z \leq -\tilde{c}\ln(1/\varepsilon),\ |\arg(z)| \geq \beta_1^{(i)}\}. \tag{4.2}$$

Entremig de $\mathcal{D}^u_{\varepsilon,+}$ i $\tilde{\mathcal{D}}^u_{\varepsilon,+}$ necessitarem diversos dominis, que definirem amb l'ajuda de constants $0 \leq h_i < 1$:

$$\mathcal{D}^{u(i)}_{\varepsilon,+} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq (1-h_i)\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1},\ \Im m\, z \leq -(1+h_i)\tilde{c}\ln(1/\varepsilon),\ |\arg(z)| \geq \beta_1^{(i)}\}. \tag{4.3}$$

Per conveni, considerarem $h_0 = 0$ i aleshores $\mathcal{D}^{u(0)}_{\varepsilon,+} = \tilde{\mathcal{D}}^u_{\varepsilon,+}$. Observem que, si $h_{i-1} < h_i$, els corresponents dominis compleixen que $\mathcal{D}^{u(i)}_{\varepsilon,+} \subset \mathcal{D}^{u(i-1)}_{\varepsilon,+}$, tal i com es veu a la Figura 4.2; pel que fa a l'angle $\beta_1^{(i-1)}$, s'haurà de canviar per l'angle $\beta_1^{(i)} = \beta_1^{(i-1)} + b$ on b serà tal que permeti la situació representada a la Figura 4.2, és a dir, per a certa $\omega > 0$, $\forall\, z \in \mathcal{D}^{u(i)}_{\varepsilon,+}$ es compleixi que $\mathcal{B}_z\big(|z|\varepsilon^{\omega}\big) \subset \mathcal{D}^{u(i-1)}_{\varepsilon,+}$. El domini $\mathcal{D}^u_{\varepsilon,+}$ serà $\mathcal{D}^{u(3)}_{\varepsilon,+}$, de manera que tindrem la cadena:

$$\mathcal{D}^u_{\varepsilon,+} = \mathcal{D}^{u(3)}_{\varepsilon,+} \subset \mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+} \subset \mathcal{D}^{u(1)}_{\varepsilon,+} \subset \mathcal{D}^{u(0)}_{\varepsilon,+} = \tilde{\mathcal{D}}^u_{\varepsilon,+}.$$

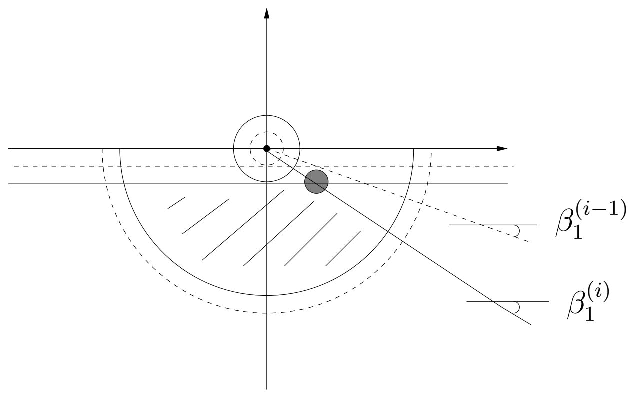


Figura 4.2: Domini $\mathcal{D}^{u(i)}_{\varepsilon,+} \subset \mathcal{D}^{u(i-1)}_{\varepsilon,+}$.

De vegades, ens interessarà destacar el tros de la frontera de l'esquerra de $\tilde{\mathcal{D}}^u_{\varepsilon,+}$:

$$\Gamma^u_{\gamma,+} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = \tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1},\ \Re e\, z \le 0,\ \Im m\, z \le -\tilde{c}\ln(1/\varepsilon)\}; \tag{4.4}$$

al seu voltant, considerarem la corona $\mathcal{D}^u_{\gamma,\delta,+}$ d'amplada 2δ a l'estil de la definida a (1.61) i que podem veure a la Figura 4.3:

$$\mathcal{D}^u_{\gamma,\delta,+} := \{z \in \mathbb{C};\ (1-\delta)\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1} \le |z| \le (1+\delta)\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1},\ \Re e\, z \le 0,\ \Im m\, z \le -(1-\delta)\tilde{c}\ln(1/\varepsilon)\}, \tag{4.5}$$

en la qual es farà el trasvàs d'informació de la zona outer a la zona inner, doncs és important observar que, per l'elecció que es va fer de $a < \overline{a} < \tilde{a}$, els punts $z \in \mathcal{D}^u_{\gamma,\delta,+}$ corresponen a $u = \varepsilon z + i\pi/2$ encara al domini outer D^u_γ i és per aquí que farem el matching d'informació d'una zona a l'altra.

Si treballem amb $\mathcal{D}^{u(i)}_{\varepsilon,+}$, només haurem de canviar $\tilde{a}$ per $(1-h_i)\tilde{a}$, $\tilde{c}$ per $(1+h_i)\tilde{c}$ i δ per δ_i i tindrem els corresponents $\Gamma^{u(i)}_{\gamma,+}$ i $\mathcal{D}^{u(i)}_{\gamma,\delta_i,+}$.

4.3 Canvi de variables $z = x + R^-(x,\tau)$.

Ja vam comentar a la Secció 1.6 que de vegades ens convindria treballar amb $\overline{T} = T - \varepsilon T_1$ per tal de tenir explícites les propietats de T_1. Després del canvi de variable i de funcions

$$\begin{aligned} &z = (u - i\pi/2)/\varepsilon \\ &\overline{\phi}(z,\tau) = \varepsilon\overline{T}(\varepsilon z + i\pi/2,\tau) = \varepsilon T(\varepsilon z + i\pi/2,\tau) - \varepsilon^2\mu\varphi(\varepsilon z + i\pi/2)\cos\tau \\ &F(z,\tau) = f(\varepsilon z + i\pi/2,\tau), \end{aligned} \tag{4.6}$$

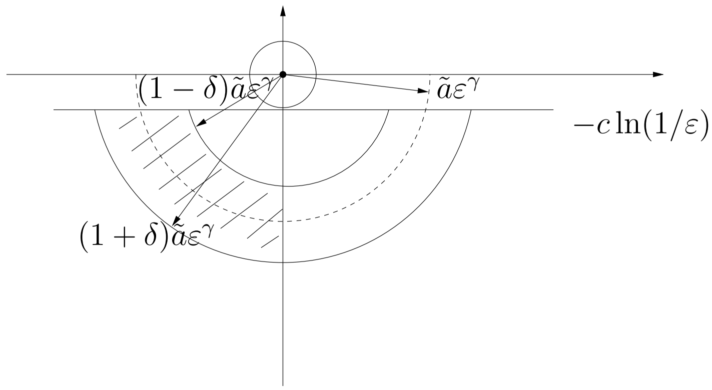


Figura 4.3: Zona de matching, $\mathcal{D}^u_{\gamma,\delta,+}$.

on ja havíem definit $\varphi(u) = 2/\cosh^2 u$ i $f(u,\tau) = \dfrac{\sinh^2 u}{\cosh^4 u}(1+\cos(2\tau))$, l'Equació (1.68) pren la forma:

$$\partial_\tau\overline{\phi} + \frac{\cosh^2(\varepsilon z + i\pi/2)}{8\varepsilon^2}(\partial_z\overline{\phi})^2 - \varepsilon\mu\tanh(\varepsilon z + i\pi/2)\cos\tau\,\partial_z\overline{\phi} - \varepsilon^2\varphi(\varepsilon z + i\pi/2) + \varepsilon^4\mu^2 F(z,\tau) = 0. \tag{4.7}$$

El corresponent terme de $\overline{\phi}$ d'ordre 0 en ε, $\overline{\phi}_0$, satisfà l'equació:

$$\partial_\tau\overline{\phi}_0 - \frac{1}{8}z^2(\partial_z\overline{\phi}_0)^2 - \mu\cos\tau z^{-1}\partial_z\overline{\phi}_0 + 2z^{-2} - \mu^2 2z^{-4}\cos^2\tau = 0, \tag{4.8}$$

i pot comprovar-se que

$$\overline{\phi}_0(z,\tau) = \phi_0(z,\tau) + 2\mu\cos\tau\, z^{-2}, \tag{4.9}$$

essent ϕ_0 una solució de l'Equació Inner (3.3). Pel Corol·lari 3.30, $\phi_0^-(z,\tau) \sim \tilde{\phi}_0(z,\tau) = 4z^{-1} - 2\mu\cos\tau\, z^{-2} + O(z^{-3})$, per tant, la varietat invariant inestable estarà caracteritzada per $\overline{\phi_0^-}$ tal que:

$$\overline{\phi_0^-}(z,\tau) = \phi_0^-(z,\tau) + 2\mu\cos\tau\, z^{-2} = z^{-1}\left(4 + O(z^{-2})\right) \quad \forall (z,\tau) \in \mathcal{D}^u_{\varepsilon,+}\times\mathbb{T}_{\sigma_0}. \tag{4.10}$$

Per tal d'estudiar la diferència entre $\overline{\phi}^-$ i $\overline{\phi_0^-}$, definim la funció

$$\overline{\psi}^-(z,\tau) := \overline{\phi}^-(z,\tau) - \overline{\phi_0^-}(z,\tau) \tag{4.11}$$

a $(z,\tau)\in\mathcal{D}^u_{\varepsilon,+}\times\mathbb{T}_{\sigma_0}$. Aquesta funció és solució de l'equació que s'obté a partir de les Equacions (4.7) i (4.8):

$$\partial_\tau\overline{\psi} - \left(\frac{z^2}{4}\,\partial_z\overline{\phi_0^-}(z,\tau) + \mu\cos\tau z^{-1} + a^-(z,\tau)\right)\partial_z\overline{\psi} = b(z)(\partial_z\overline{\psi})^2 + c^-(z,\tau), \tag{4.12}$$

on s'han considerat les funcions:

$$
\begin{aligned}
a^-(z,\tau) &= -\left(\frac{1}{4\varepsilon^2}\cosh^2(\varepsilon z + i\pi/2) + \frac{z^2}{4}\right)\partial_z\overline{\phi_0}^- + \mu\cos\tau\big(\varepsilon\tanh(\varepsilon z + i\pi/2) - z^{-1}\big),\\
b(z) &= -\frac{1}{8\varepsilon^2}\cosh^2(\varepsilon z + i\pi/2),\\
c^-(z,\tau) &= -\left(\frac{1}{8\varepsilon^2}\cosh^2(\varepsilon z + i\pi/2) + \frac{z^2}{8}\right)(\partial_z\overline{\phi_0}^-)^2 +\\
&\quad + \mu\cos\tau\left(\varepsilon\tanh(\varepsilon z + i\pi/2) - z^{-1}\right)\partial_z\overline{\phi_0}^- +\\
&\quad + \varepsilon^2\varphi(\varepsilon z + i\pi/2) + 2z^{-2} - \varepsilon^4\mu^2 F(z,\tau) - \mu^2 2z^{-4}\cos^2\tau.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

El següent lema ens transformarà l'Equació (4.12) en una altra que ens permetrà arribar als resultats que volem.

Lema 4.2. *Existeix* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que, per a qualssevol* $0 < \mu \le \mu_0$, $0 \le \gamma < 1$ *i* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, *existeix un canvi de variables analític a* $\mathcal{D}^{u(i)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$

$$
z = x + R^-(x,\tau) \qquad \left(\textit{o bé } x = z + S^-(z,\tau) \textit{ analític a } \mathcal{D}^{u(i-1)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}\right) \tag{4.14}
$$

tal que

1. *la funció*
$$
\Psi^-(x,\tau) := \overline{\psi}^-(x + R^-(x,\tau),\tau) \tag{4.15}
$$
és solució de l'equació
$$
\partial_\tau\Psi + \big(1 - A^-(x,\tau)\big)\partial_x\Psi = B^-(x,\tau)(\partial_x\Psi)^2 + C^-(x,\tau) \tag{4.16}
$$
on les funcions A^-, B^- *i* C^- *són analítiques a* $\mathcal{D}^{u(i)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$*;*

2. $\forall\,(x,\tau) \in \mathcal{D}^{u(i)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$, *es té que* $z \in \mathcal{D}^{u(i-1)}_{\varepsilon,+}$ *(o bé* $\forall\,(z,\tau) \in \mathcal{D}^{u(i)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$, *es té que* $x \in \mathcal{D}^{u(i-1)}_{\varepsilon,+}$*);*

3. $\forall\tau \in \mathbb{T}_{\sigma_0}$, $x \in \Gamma^{u(i)}_{\gamma,+}$ *es transforma en* $z \in \mathcal{D}^{u(i)}_{\gamma,\delta_i,+} \subset \tilde{\mathcal{D}}^u_{\varepsilon,+}$ *per a una certa* δ_i*.*

A més, existeixen constants C_A, C_A', C_A'', C_B, C_B', C_B'', C_C, C_C', C_C'' *tals que* $\forall\,(x,\tau) \in \mathcal{D}^{u(i)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$

$$
\begin{array}{lll}
|A^-(x,\tau)| \le C_A\varepsilon^{2\gamma}, & |\partial_x A^-(x,\tau)| \le C_A'\varepsilon^{1+\gamma}, & |\partial_x^2 A^-(x,\tau)| \le C_A''\varepsilon^2,\\
|B^-(x,\tau)| \le C_B|x|^2, & |\partial_x B^-(x,\tau)| \le C_B'|x|, & |\partial_x^2 B^-(x,\tau)| \le C_B'',\\
|C^-(x,\tau)| \le C_C\varepsilon^2, & |\partial_x C^-(x,\tau)| \le C_C'\varepsilon^2|x|^{-2}, & |\partial_x^2 C^-(x,\tau)| \le C_C''\varepsilon^2|x|^{-3}.
\end{array}
$$

Observació 4.3. *De fet, per a cada* $\tau \in \mathbb{T}_{\sigma_0}$, *la imatge de* $\Gamma^{u(i)}_{\gamma,+}$ *pel canvi és una altra corba, que és arbitràriament propera a* $\Gamma^{u(i)}_{\gamma,+}$ *perquè* δ_i *pot ser tan petit com es vulgui.*

Demostració. La informació que tenim del Corol·lari 3.48 és que el canvi de variable (4.14) conjuga l'operador

$$
\partial_\tau - \frac{z^2}{4}\partial_z\phi_0^-(z,\tau)\partial_z = \partial_\tau - \left(\frac{z^2}{4}\partial_z\overline{\phi_0}^-(z,\tau) + \mu\cos\tau z^{-1}\right)\partial_z
$$

amb l'operador $\partial_\tau + \partial_x$. Així doncs, si a l'Equació (4.12) li fem el canvi (4.14), es transforma en (4.16) on s'ha usat la notació:

$$\begin{aligned} A^-(x,\tau) =& a^-(x+R^-(x,\tau),\tau)\frac{1}{1+\partial_x R^-(x,\tau)}, \\ B^-(x,\tau) =& b(x+R^-(x,\tau))\frac{1}{(1+\partial_x R^-(x,\tau))^2}, \\ C^-(x,\tau) =& c^-(x+R^-(x,\tau),\tau). \end{aligned} \tag{4.17}$$

A més, del Corol·lari 3.48 deduïm que $\exists\, d>0$ tal que

$$\forall (x,\tau)\in \mathcal{D}^{u(i)}_{\varepsilon,+}\times \mathbb{T}_{\sigma_0}, \quad |R^-(x,\tau)| \le d|x|^{-1} \le d(1+h_i)^{-1}\tilde{c}^{-1}\ln^{-1}(1/\varepsilon). \tag{4.18}$$

Si ε és suficientment petit, existeix $0<h_{i-1}<h_i<1$ tal que

$$d(h_i-h_{i-1})^{-1}(1+h_i)^{-1}\tilde{c}^{-1} \le \tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1}\ln(1/\varepsilon) \quad \text{i} \qquad d(h_i-h_{i-1})^{-1}(1+h_i)^{-1}\tilde{c}^{-1} \le \tilde{c}\ln^2(1/\varepsilon),$$

d'on podem obtenir:

$$|R^-(x,\tau)| \le (h_i-h_{i-1})\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1} \quad \text{i} \qquad |R^-(x,\tau)| \le (h_i-h_{i-1})\tilde{c}\ln(1/\varepsilon)$$

i usar-ho per demostrar que $z\in\mathcal{D}^{u(i-1)}_{\varepsilon,+}$:

$$\begin{aligned} |z| &\le |x| + |R^-(x,\tau)| \le (1-h_i)\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1} + (h_i-h_{i-1})\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1} = (1-h_{i-1})\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1}, \\ \Im m\, z &\le \Im m\, x + \Im m\, R^-(x,\tau) \le -(1+h_i)\tilde{c}\ln(1/\varepsilon) + (h_i-h_{i-1})\tilde{c}\ln(1/\varepsilon) = \\ &= -(1+h_{i-1})\tilde{c}\ln(1/\varepsilon). \end{aligned}$$

Pot comprovar-se fàcilment que, per aquest canvi de variable, $x\in\Gamma^{u(i)}_{\gamma,+}$ es transforma en $z\in\mathcal{D}^{u(i)}_{\gamma,\delta_i,+}\subset\tilde{\mathcal{D}}^u_{\varepsilon,+}$ per a certa $0<\delta_i<1$. Efectivament,

$$|x|(1-|R^-(x,\tau)x^{-1}|) \le |z| \le |x|(1+|R^-(x,\tau)x^{-1}|)$$

i, com que $|x|\ge(1+h_i)\tilde{c}\ln(1/\varepsilon)$, de (4.18) tenim

$$|x|\big(1-\delta_i\big) \le |z| \le |x|\big(1+\delta_i\big)$$

on s'ha pres $\delta_i = d(1+h_i)^{-2}\tilde{c}^{-2}\ln^{-2}(1/\varepsilon)$, que és menor que 1 si ε és prou petit. D'aquestes desigualtats s'obté, per una part, que

$$x + R^-(x,\tau) = O(x), \tag{4.19}$$

fet que serà utilitzat repetidament en el decurs d'aquesta demostració, i per altra part, com que $|x| = (1-h_i)\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1}$,

$$(1-h_i)\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1}\big(1-\delta_i\big) \le |z| \le (1-h_i)\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1}\big(1+\delta_i\big)$$

o sigui, que $z\in\mathcal{D}^{u(i)}_{\gamma,\delta_i,+}$.

Per tal d'obtenir les fites de l'enunciat, primer estudiarem les funcions que intervenen a les definicions (4.13):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8\varepsilon^2}\cosh^2(\varepsilon z + i\pi/2) &= \frac{1}{8}\, z^2\left(-1-\frac{1}{3}(\varepsilon z)^2 + O(\varepsilon z)^4\right),\\
\varepsilon^2\varphi(\varepsilon z + i\pi/2) &= \frac{2\varepsilon^2}{\cosh^2(\varepsilon z + i\pi/2)} = z^{-2}\left(-2+\frac{2}{3}(\varepsilon z)^2 + O(\varepsilon z)^4\right),\\
\varepsilon\tanh(\varepsilon z + i\pi/2) &= z^{-1}\left(1+\frac{1}{3}(\varepsilon z)^2 + O(\varepsilon z)^4\right),\\
\varepsilon^4 F(z,\tau) &= \varepsilon^4 f(\varepsilon z + i\pi/2,\tau) = \frac{2\varepsilon^2}{\cosh^2(\varepsilon z + i\pi/2)}\left(\varepsilon\tanh(\varepsilon z + i\pi/2)\right)^2\cos^2\tau =\\
&= z^{-4}\left(-2-\frac{2}{3}(\varepsilon z)^2 + O(\varepsilon z)^4\right)\cos^2\tau.
\end{aligned}$$

Així doncs, usant el resultat (4.10), que $\varepsilon z = O(\varepsilon^{\gamma})$ i que $z^{-1} = O(\ln^{-1}(1/\varepsilon))$, obtenim:

$$\begin{aligned}
a^{-}(z,\tau) &= z^2\left(\frac{1}{12}(\varepsilon z)^2 + O(\varepsilon z)^4\right) z^{-2}\left(-4+O(z^{-2})\right) + \mu\cos\tau z^{-1}\left(\frac{1}{3}(\varepsilon z)^2 + O(\varepsilon z)^4\right) =\\
&= O(\varepsilon z)^2,\\
\partial_z a^{-}(z,\tau) &= \varepsilon O(\varepsilon z),\\
\partial_z^2 a^{-}(z,\tau) &= \varepsilon^2 O(1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b(z,\tau) &= \frac{1}{8}z^2\left(1+O(\varepsilon z)^2\right),\\
\partial_z b(z,\tau) &= \frac{1}{4}z\left(1+O(\varepsilon z)^2\right),\\
\partial_z^2 b(z,\tau) &= \frac{1}{4}\left(1+O(\varepsilon z)^2\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c^{-}(z,\tau) &= \frac{1}{8}z^2\left(\frac{1}{3}(\varepsilon z)^2 + O(\varepsilon z)^4\right) z^{-4}\left(16+O(z^{-2})\right) +\\
&\quad +\mu\cos\tau z^{-1}\left(\frac{1}{3}(\varepsilon z)^2 + O(\varepsilon z)^4\right) z^{-2}\left(-4+O(z^{-2})\right) +\\
&\quad +z^{-2}\left(\frac{2}{3}(\varepsilon z)^2 + O(\varepsilon z)^4\right) + z^{-4}\left(\frac{2}{3}(\varepsilon z)^2 + O(\varepsilon z)^4\right)\cos^2\tau\mu^2 =\\
&= \frac{2}{3}\,\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2(\varepsilon z)^2) + O(\varepsilon^2 z^{-2}) +\\
&\quad +\mu\cos\tau\left(-\frac{4}{3}\,\varepsilon^2 z^{-1} + O(\varepsilon^3(\varepsilon z)) + O(\varepsilon^2 z^{-3})\right) +\\
&\quad +\frac{2}{3}\,\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2(\varepsilon z)^2) + \left(\frac{2}{3}\varepsilon^2 z^{-2} + O(\varepsilon^4)\right)\cos^2\tau\mu^2 = O(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_z c^{-}(z,\tau) &= O(\varepsilon^3(\varepsilon z)) + O(\varepsilon^2 z^{-3}) + \mu\cos\tau\left(\frac{4}{3}\,\varepsilon^2 z^{-2} + O\left(\varepsilon^4\right)\right) + O\left(\varepsilon^3(\varepsilon z)\right) +\\
&\quad +\left(-\frac{4}{3}\,\varepsilon^2 z^{-3} + O\left(\varepsilon^5(\varepsilon z)\right)\right)\cos^2\tau\mu^2 = O\left(\varepsilon^2 z^{-2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_z^2 c^-(z,\tau) &= O(\varepsilon^4)+O(\varepsilon^2 z^{-4})+\mu\cos\tau\left(-\frac{8}{3}\varepsilon^2 z^{-3}+O\left(\varepsilon^5(\varepsilon z)\right)\right)+O\left(\varepsilon^4\right)+\\ &\quad+\left(4\varepsilon^2 z^{-4}+O\left(\varepsilon^6\right)\right)\cos^2\tau\mu^2=O\left(\varepsilon^2 z^{-3}\right).\end{aligned}$$

Finalment, usant que $|1+\partial_x R^-(x,\tau)|>1/2$, la relació (4.19), que $\varepsilon x=O(\varepsilon^\gamma)$ i que $|x|\geq(1+h_i)\tilde{c}\ln(1/\varepsilon)$, traslladem la informació trobada per a a^-, b^- i c^- a les funcions (4.17). Per a la funció A^- i les seves derivades,

$$A^-(x,\tau)=a^-(x+R^-(x,\tau),\tau)\frac{1}{1+\partial_x R^-(x,\tau)}=O\left((\varepsilon x)^2\right)\quad\Rightarrow\quad |A^-(x,\tau)|\leq C_A\varepsilon^{2\gamma};$$

$$\begin{aligned}\partial_x A^-(x,\tau) &= \partial_z a^-(x+R^-(x,\tau),\tau)+a^-(x+R^-(x,\tau),\tau)\frac{\partial_x^2 R^-(x,\tau)}{(1+\partial_x R^-(x,\tau))^2}=\\ &= \varepsilon O(\varepsilon x)+O(\varepsilon^2)|x+R^-(x,\tau)|^2|x|^{-3}=O(\varepsilon^{1+\gamma})\quad\Rightarrow\quad|\partial_x A^-(x,\tau)|\leq C_A'\varepsilon^{1+\gamma};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_x^2 A^-(x,\tau) =&\partial_z^2 a^-(x+R^-(x,\tau),\tau)(1+\partial_x R^-(x,\tau))+\\ &+\partial_z a^-(x+R^-(x,\tau),\tau)\frac{\partial_x^2 R^-(x,\tau)}{1+\partial_x R^-(x,\tau)}+\\ &+a^-(x+R^-(x,\tau),\tau)\frac{\partial_x^3 R^-(x,\tau)(1+\partial_x R^-(x,\tau))-2(\partial_x^2 R^-(x,\tau))^2}{(1+\partial_x^-(x,\tau))^3}=\\ =&O(\varepsilon^2)+O(\varepsilon^2)|x+R^-(x,\tau)|\cdot|x|^{-3}+O(\varepsilon^2)|x+R^-(x,\tau)|^2|x|^{-3}\Rightarrow\\ \Rightarrow&|\partial_x^2 A^-(x,\tau)|\leq C_A''\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Seguirem el mateix procés per a B^- i les seves derivades:

$$\begin{aligned}B^-(x,\tau) &= b(x+R^-(x,\tau),\tau)\frac{1}{(1+\partial_x R^-(x,\tau))^2}=O\left(x^2\right)\Rightarrow|B^-(x,\tau)|\leq C_B|x|^2,\\ \partial_x B^-(x,\tau) &= \partial_z b(x+R^-(x,\tau),\tau)\frac{1}{1+\partial_x R^-(x,\tau)}+b(x+R^-(x,\tau),\tau)\frac{-2\partial_x^2 R^-(x,\tau)}{(1+\partial_x R^-(x,\tau))^3}=\\ &= O(|x|)+O(|x|^2)O(|x|^{-3})\quad\Rightarrow\quad|\partial_x B^-(x,\tau)|\leq C_B'|x|,\\ \partial_x^2 B^-(x,\tau) &= \partial_z^2 b(x+R^-(x,\tau),\tau)-3\partial_z b(x+R^-(x,\tau),\tau)\frac{\partial_x^2 R^-(x,\tau)}{(1+\partial_x R^-(x,\tau))^2}+\\ &\quad+2b(x+R^-(x,\tau),\tau)\frac{\partial_x^3 R^-(x,\tau)(1+\partial_x R^-(x,\tau))-3(\partial_x^2 R^-(x,\tau))^2}{(1+\partial_x R^-(x,\tau))^4}=\\ &= O(1)+O(|x|)O(|x|^{-3})+O(|x|^2)O(|x|^{-4})\quad\Rightarrow\quad|\partial_x^2 B^-(x,\tau)|\leq C_B''.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C^-(x,\tau) &= c^-(x+R^-(x,\tau),\tau)\Rightarrow|C^-(x,\tau)|\leq C_C\varepsilon^2,\\ \partial_x C^-(x,\tau) &= \partial_z c^-(x+R^-(x,\tau),\tau)(1+\partial_x R^-(x,\tau))\Rightarrow|\partial_x C^-(x,\tau)|\leq C_C'\varepsilon^2|x|^{-2},\\ \partial_x^2 C^-(x,\tau) &= \partial_z^2 c^-(x+R^-(x,\tau),\tau)(1+\partial_x R^-(x,\tau))^2+\partial_z c^-(x+R^-(x,\tau),\tau)\partial_x^2 R^-(x,\tau)=\\ &= \varepsilon^2 O(|x|^{-3})+\varepsilon^2 O(|x|^{-2})O(|x|^{-3})\quad\Rightarrow\quad|\partial_x^2 C^-(x,\tau)|\leq C_C''\varepsilon^2|x|^{-3}.\qquad\blacksquare\end{aligned}$$

4.4 Condicions de matching.

Necessitarem informació de $\Psi^-(x,\tau)$ i les seves derivades quan $(x,\tau)\in\Gamma_{\gamma,+}^{u(1)}\times\mathbb{T}_{\sigma_0}$ i, per tant, de $\overline{\psi}^-(z,\tau)$ i de les seves derivades quan $z=x+R^-(x,\tau)\in\mathcal{D}_{\gamma,\delta_1,+}^{u(1)}\subset\tilde{\mathcal{D}}_{\varepsilon,+}^u$, que es troba al domini outer. Però, recordant que $\phi^-(z,\tau) = \varepsilon T^-(\varepsilon z + i\pi/2, \tau)$, l'estudi previ de ϕ_0^- al Capítol 3 i la relació (4.9), ens donaran aquesta informació. El següent lema en recull els resultats, que seran usats com a condició inicial de les respectives equacions.

Lema 4.4. *Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \mu \leq \mu_0$, $0 \leq \gamma < 1$ i $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, existeix $c_0 > 0$ tal que*

$$\forall (x,\tau) \in \Gamma^{u(1)}_{\gamma,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}, \begin{cases} |\partial_x \Psi^-(x,\tau)| \leq c_0 \left(\varepsilon^2 + \varepsilon^{4-4\gamma}\right) \\ |\partial_x^2 \Psi^-(x,\tau)| \leq c_0 \left(\varepsilon^3 + \varepsilon^{5-5\gamma}\right). \end{cases}$$

Demostració. Per definició $\Psi^-(x,\tau) = \overline{\psi}^-(x + R^-(x,\tau),\tau)$ i en tot el procés tinguem present que si $(x,\tau) \in \Gamma^{u(1)}_{\gamma,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$, aleshores $|x| = (1-h_1)\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1}$ i, a més, existeix $0 < \delta_1 < 1$ tal que $z \in \mathcal{D}^{u(1)}_{\gamma,\delta_1,+}$, la qual cosa vol dir que tenim la propietat $(1-\delta_1)(1-h_1)\tilde{a}\varepsilon^\gamma \leq |\varepsilon z| \leq (1+\delta_1)(1-h_1)\tilde{a}\varepsilon^\gamma$.

Per fitar les funcions

$$\partial_x \Psi^-(x,\tau) = \partial_z \overline{\psi}^-(x + R^-(x,\tau),\tau)(1 + \partial_x R^-(x,\tau)) \qquad \text{i}$$

$$\partial_x^2 \Psi^-(x,\tau) = \partial_z^2 \overline{\psi}^-(x+R^-(x,\tau),\tau)(1+\partial_x R^-(x,\tau))^2 + \partial_z \overline{\psi}^-(x+R^-(x,\tau),\tau)\partial_x^2 R^-(x,\tau) \quad (4.20)$$

prèviament necessitem fer un estudi de $\partial_z \overline{\psi}^-$ i $\partial_z^2 \overline{\psi}^-$.

Si $z \in \mathcal{D}^{u(1)}_{\gamma,\delta_1,+}$, aleshores $\varepsilon z + i\pi/2 \in D^u_\gamma$ i podem usar la informació que tenim de la zona outer donada al Teorema 2.1. Aproximarem doncs $\overline{T}^-$ per T_0 i compararem $\overline{\phi_0}^-$ amb el primer terme del desenvolupament de Laurent en $i\pi/2$ de εT_0:

$$\begin{aligned} \overline{\psi}^-(z,\tau) &= \overline{\phi}^-(z,\tau) - \overline{\phi_0}^-(z,\tau) = \varepsilon \overline{T}^-(\varepsilon z + i\pi/2,\tau) - \overline{\phi_0}^-(z,\tau) = \\ &= \varepsilon \left(\overline{T}^-(\varepsilon z + i\pi/2,\tau) - T_0(\varepsilon z + i\pi/2) \right) + \varepsilon T_0(\varepsilon z + i\pi/2) - \overline{\phi_0}^-(z,\tau) = \\ &= \varepsilon \left(\overline{T}^-(\varepsilon z + i\pi/2,\tau) - T_0(\varepsilon z + i\pi/2) \right) + \\ &\quad + \varepsilon T_0(\varepsilon z + i\pi/2) - 4z^{-1} - \left(\overline{\phi_0}^-(z,\tau) - 4z^{-1} \right). \end{aligned}$$

Aleshores, les seves derivades són:

$$\begin{aligned} \partial_z \overline{\psi}^-(z,\tau) &= \varepsilon^2 \left(\partial_u \overline{T}^-(\varepsilon z + i\pi/2,\tau) - T_0'(\varepsilon z + i\pi/2) \right) + \\ &\quad + \varepsilon^2 T_0'(\varepsilon z + i\pi/2) + 4z^{-2} - \left(\partial_z \overline{\phi_0}^-(z,\tau) + 4z^{-2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_z^2 \overline{\psi}^-(z,\tau) &= \varepsilon^3 \left(\partial_u^2 \overline{T}^-(\varepsilon z + i\pi/2,\tau) - T_0''(\varepsilon z + i\pi/2) \right) + \\ &\quad + \varepsilon^3 T_0''(\varepsilon z + i\pi/2) - 8z^{-3} - \left(\partial_z^2 \overline{\phi_0}^-(z,\tau) - 8z^{-3} \right). \end{aligned}$$

Pel Teorema 2.1 sabem que, si $\varepsilon z + i\pi/2 \in D^u_\gamma$ i $|\varepsilon z + i\pi/2| = O(\varepsilon^\gamma)$, aleshores:

$$\partial_u \overline{T}^-(\varepsilon z + i\pi/2,\tau) - T_0'(\varepsilon z + i\pi/2) = O\left(\varepsilon^{2-4\gamma}\right),$$

$$\partial_u^2 \overline{T}^-(\varepsilon z + i\pi/2, \tau) - T_0''(\varepsilon z + i\pi/2) = O\left(\varepsilon^{2-5\gamma}\right).$$

Per altra banda, com que $T_0(u) = 4e^u/\cosh u$, podem desenvolupar-lo al voltant de $i\pi/2$ obtenint:

$$T_0(u) = \frac{4}{u - i\pi/2} + 4 + \frac{4}{3}(u - i\pi/2) + O\big((u - i\pi/2)^2\big),$$

per tant, per a $z \in \mathcal{D}^{u(1)}_{\gamma,\delta_1,+}$, és a dir, εz petit

$$T_0(\varepsilon z + i\pi/2) = \frac{4}{\varepsilon z} + 4 + \frac{4}{3}\varepsilon z + O((\varepsilon z)^2)$$

i llavors,

$$\varepsilon^2 T_0'(\varepsilon z + i\pi/2) + 4z^{-2} = O\left(\varepsilon^2\right), \qquad \varepsilon^3 T_0''(\varepsilon z + i\pi/2) - 8z^{-3} = O\left(\varepsilon^3\right).$$

Finalment, de (4.10) sabem que:

$$\overline{\phi_0}^-(z,\tau) - 4z^{-1} = O(z^{-3}) = O\left(\varepsilon^{3-3\gamma}\right)$$

i per tant,

$$\partial_z \overline{\phi_0}^-(z,\tau) + 4z^{-2} = O\left(\varepsilon^{4-4\gamma}\right),$$

$$\partial_z^2 \overline{\phi_0}^-(z,\tau) - 8z^{-3} = O\left(\varepsilon^{5-5\gamma}\right).$$

Així doncs, $\partial_z \overline{\psi}^-(z,\tau) = \varepsilon^2 O\left(\varepsilon^{2-4\gamma}\right) + O\left(\varepsilon^2\right) + O\left(\varepsilon^{4-4\gamma}\right)$ i,

$$\partial_z \overline{\psi}^-(z,\tau) = O\big(\varepsilon^2 + \varepsilon^{4-4\gamma}\big). \tag{4.21}$$

Per altra part, sempre que $|x| = O(\varepsilon^{\gamma-1})$, sabem del Corol·lari 3.48 que:

$$\partial_x R^-(x,\tau) = O(\varepsilon^{2-2\gamma}) \quad \text{ i } \quad \partial_x^2 R^-(x,\tau) = O(\varepsilon^{3-3\gamma}), \tag{4.22}$$

per tant, podem trobar una constant c_0 tal que

$$\forall (x,\tau) \in \Gamma^{u(1)}_{\gamma,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}, \quad |\partial_x \Psi^-(x,\tau)| \leq c_0 \left(\varepsilon^2 + \varepsilon^{4-4\gamma}\right).$$

Pel que fa a $\partial_z^2 \overline{\psi}^-$,

$$\partial_z^2 \overline{\psi}^-(z,\tau) = \varepsilon^3 O\left(\varepsilon^{2-5\gamma}\right) + O\left(\varepsilon^3\right) + O\left(\varepsilon^{5-5\gamma}\right),$$

que junt amb (4.21) i (4.22), podem posar-ho a l'expressió (4.20) i obtenir que existeix una constant c_0 tal que

$$(x,\tau) \in \Gamma^{u(1)}_{\gamma,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}, \quad |\partial_x^2 \Psi^-(x,\tau)| \leq c_0 \left(\varepsilon^3 + \varepsilon^{5-5\gamma}\right). \qquad \blacksquare$$

4.5 Problema de Cauchy per a una equació en derivades parcials.

La dificultat de resoldre l'Equació (4.16) ens porta a estudiar la que se'n deriva per a $\Phi^- = \partial_x \Psi^-$:

$$\partial_\tau \Phi + \big(1 - A^-(x,\tau) - 2B^-(x,\tau)\,\Phi\big)\ \partial_x \Phi = \partial_x A^-(x,\tau)\,\Phi + \partial_x B^-(x,\tau)\,\Phi^2 + \partial_x C^-(x,\tau), \quad (4.23)$$

que és una equació en derivades parcials de primer ordre quasi-lineal. Amb la informació de $\partial_x \Psi^-(x,\tau)$, retornarem a l'Equació (4.16) per tal d'obtenir resultats per a $\Psi^-(x,\tau)$.

El següent teorema estableix l'existència de solució analítica, sota certes condicions, d'una equació d'aquest tipus, resultat que farem servir al Teorema 4.9 per demostrar l'existència de solució de l'Equació (4.23) amb les condicions de matching donades al Lema 4.4. A més, donarem una fita d'aquesta solució.

Teorema 4.5. *Sigui Γ una corba representada paramètricament per*

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s)$$

on $f(s)$, $g(s)$ i $h(s)$ són funcions analítiques en un entorn de $s_0 \in \mathbb{C}$. Siguin $a(x,y,z)$, $b(x,y,z)$ i $c(x,y,z)$ funcions analítiques en un entorn a $\mathbb{C}^3$ de $(x_0,y_0,z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0))$. Si

$$\begin{vmatrix} a(x_0,y_0,z_0) & f'(s_0) \\ b(x_0,y_0,z_0) & g'(s_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4.24)$$

aleshores l'equació en derivades parcials

$$a(x,y,\Phi)\partial_x\Phi(x,y) + b(x,y,\Phi)\partial_y\Phi(x,y) = c(x,y,\Phi)$$

té una única superfície integral analítica $z = \Phi(x,y)$ tal que $h(s) = \Phi(f(s), g(s))$ per a valors de s prop de s_0.

Demostració. La demostració pot trobar-se a [J82] i es basa en el mètode de les corbes característiques, que trasllada el problema a trobar funcions

$$x(t,s),\ y(t,s)\ \text{ i }\ \overline{\Phi}(t,s) \quad (4.25)$$

solució d'un sistema d'equacions diferencials ordinàries de primer ordre

$$\begin{cases} \partial_t x = a(x,y,\overline{\Phi}) \\ \partial_t y = b(x,y,\overline{\Phi}) \\ \partial_t \overline{\Phi} = c(x,y,\overline{\Phi}) \end{cases} \quad (4.26)$$

amb condicions inicials

$$\begin{cases} x(0,s) = f(s) \\ y(0,s) = g(s) \\ \overline{\Phi}(0,s) = h(s). \end{cases} \quad (4.27)$$

En línies generals, aquesta demostració utilitza la teoria existent sobre equacions diferencials ordinàries, que porta a l'existència i unicitat de solució analítica al voltant del punt inicial

$(0, f(s), g(s), h(s))$, que depèn analíticament de s. També justifica, perquè la condició (4.24) permet aplicar el Teorema de la funció implícita al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x - x(t,s) = 0 \\ y - y(t,s) = 0 \end{array} \right. ,$$

l'existència local al voltant del punt $(0, s_0, x_0, y_0)$ de funcions

$$t = \mathcal{T}(x,y) \quad \text{i} \quad s = \mathcal{S}(x,y)$$

solucions de

$$x = x(\mathcal{T}(x,y), \mathcal{S}(x,y)), \quad y = y(\mathcal{T}(x,y), \mathcal{S}(x,y))$$

i, per tant, garantitza que localment (4.25) representa una superfície

$$z = \Phi(x,y) = \overline{\Phi}(\mathcal{T}(x,y), \mathcal{S}(x,y)). \qquad \blacksquare$$

Els següents dos lemes recullen qüestions tècniques que es faran servir més endavant.

Lema 4.6. *Siguin $k_1, k_2, \omega > 0$ i $\varepsilon > 0$ suficientment petit, aleshores $\forall |y| \leq k_2\, \varepsilon^\omega$ i $\forall x$ tal que $\Im m\, x < -k_1 \ln(1/\varepsilon)$*

$$\begin{array}{l} |x+y|^{-1} \leq 2|x|^{-1}, \\ |x+y| \leq \frac{3}{2}|x|. \end{array}$$

Demostració. Observem primer que $|x|(1 - |y||x|^{-1}) \leq |x+y| \leq |x|(1 + |y||x|^{-1})$ i que, si ε és suficientment petit, $|y||x|^{-1} \leq k_2\, \varepsilon^\omega k_1^{-1} \ln^{-1}(1/\varepsilon) \leq 1/2$. Amb això n'hi ha prou per arribar als resultats indicats. $\blacksquare$

Lema 4.7. *Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que per a qualssevol $0 \leq \gamma < 1$, $\beta_1 \in (0, \pi/2)$, $k_1, k_2 > 0$, si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, aleshores*

$$\begin{array}{l} \forall x^* \ \textit{tal que} \ \Re e\, x^* \leq 0, \Im m\, x^* \leq -k_1 \ln(1/\varepsilon) \ \ \textit{i} \ \ |x^*| = k_2 \varepsilon^{\gamma - 1}, \\ \forall t \in [0, T] \quad \textit{amb} \ T = \textit{mín}\{-2\, \Re e\, x^*, -\Re e\, x^* - \dfrac{1}{\tan \beta_1} \Im m\, x^*\} \end{array}$$

es compleix que

$$\int_0^t |r + x^*|^n \, dr \leq \left\{ \begin{array}{lll} K|t + x^*|^{n+1} & \textit{si} & n \leq -2; \\ K \ln(1/\varepsilon), & \textit{si} & n = -1; \\ K\varepsilon^{(n+1)(\gamma-1)}, & \textit{si} & n \geq 0. \end{array} \right. \tag{4.28}$$

Quan $n \geq -1$, de vegades ens convidrà que aparegui el terme $|t + x^*|^{-1}$ explícitament:

$$\int_0^t |r + x^*|^n \, dr \leq \left\{ \begin{array}{lll} K \ln(1/\varepsilon) \varepsilon^{\gamma-1} |t + x^*|^{-1}, & \textit{si} & n = -1; \\ K\varepsilon^{(n+2)(\gamma-1)} |t + x^*|^{-1}, & \textit{si} & n \geq 0. \end{array} \right. \tag{4.29}$$

En qualsevol cas, $K = K(n)$.

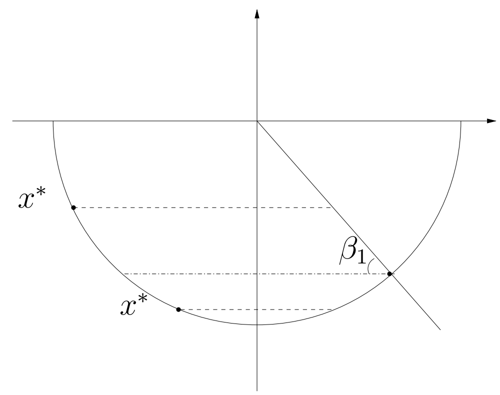


Figura 4.4: Punts $t+x^*$ amb $t\in[0,T]$.

Demostració. Els punts $t+x^*$ compleixen que $\Im m(t+x^*)=\Im m\, x^*$ i amb la condició $t\le T$ ens assegurem que estan sempre a l'esquerra de la recta que passa per l'origen i té pendent $-\tan\beta_1$. A la Figura 4.4 poden veure's les possibilitats per als punts $t+x^*$.

Fixem-nos que, si $r\in[0,T]$, $\Im m(r+x^*)=\Im m\, x^*$ i $\Re e(r+x^*)\le T+\Re e\, x^*\le -\Re e\, x^*$, per tant,

$$k_1\ln(1/\varepsilon)\le -\Im m\, x^*\le |r+x^*|\le |x^*|=k_2\varepsilon^{\gamma-1}.$$

Amb les idees del Lema 7.1 de [DS92] pot demostrar-se que $\exists\, C>0$ tal que:

$$\int_0^t |r+x^*|^n\,dr\le \begin{cases} C\sup\limits_{r\in[0,t]} |\ln|r+x^*||, & \text{si} \quad n=-1;\\ C\sup\limits_{r\in[0,t]} |r+x^*|^{n+1}, & \text{si} \quad n\ne -1.\end{cases} \tag{4.30}$$

Per les característiques de la funció ln, pot comprovar-se que

$$|\ln|r+x^*||\le \text{màx}\left\{|\ln\left(\mathrm{k}_1\ln(1/\varepsilon)\right)|, |\ln(\mathrm{k}_2\varepsilon^{\gamma-1})|\right\}. \tag{4.31}$$

I per a un ε suficientment petit,

- $1<k_1\ln(1/\varepsilon)<k_1 1/\varepsilon$ i $|\ln k_1|/\ln(1/\varepsilon)<1$, aleshores

$$|\ln\left(k_1\ln(1/\varepsilon)\right)|\le|\ln k_1|+\ln(1/\varepsilon)=\ln(1/\varepsilon)\left(\frac{|\ln k_1|}{\ln(1/\varepsilon)}+1\right)\le 2\ln(1/\varepsilon).$$

- $|\ln k_2|/\ln(1/\varepsilon)\le 1-\gamma$ i, per tant,

$$|\ln(k_2\varepsilon^{\gamma-1})|\le|\ln k_2|+\ln\varepsilon^{\gamma-1}=\ln(1/\varepsilon)\left(\frac{|\ln k_2|}{\ln(1/\varepsilon)}+1-\gamma\right)\le 2\ln(1/\varepsilon).$$

De (4.31), arribem doncs a la conclusió que

$$|\ln|r+x^*||\le 2\ln(1/\varepsilon)$$

i, per tant, al cas $n=-1$ de (4.28).

El cas $n = 0$ és molt senzill:

$$\int_0^t 1\,dr = t \le -2\,\Re e\,x^* \le 2|x^*| \le 2k_2\varepsilon^{\gamma-1}.$$

Si $n \ge 0$,

$$|r + x^*|^{n+1} \le |x^*|^{n+1} \le k_2^{n+1}\varepsilon^{(n+1)(\gamma-1)}$$

i ja hauríem arribat als resultats de (4.28) per a $n \ge -1$. També convindrà un altre tipus de fites, recollides a (4.29), i que s'obtenen de les ja trobades afegint el factor $k_2\varepsilon^{\gamma-1}|t+x^*|^{-1} > 1$ (gràcies al fet que $|t + x^*| \le k_2\varepsilon^{\gamma-1}$).

A la fórmula (4.30), ens queden els casos $n \le -2$, dels quals haurem de fer un estudi més detallat del valor de $|r + x^*|$ per trobar-ne una fita inferior, doncs $n + 1 < 0$.

El punts $r + x^*$ es mouen en una línia horitzontal a alçada $\Im m\,x^*$, per tant, el valor mínim de $|r+x^*|$ seria $|\,\Im m\,x^*|$, és a dir, $r = -\,\Re e\,x^*$, però voldríem una fita inferior relacionada amb el factor $|t + x^*|$.

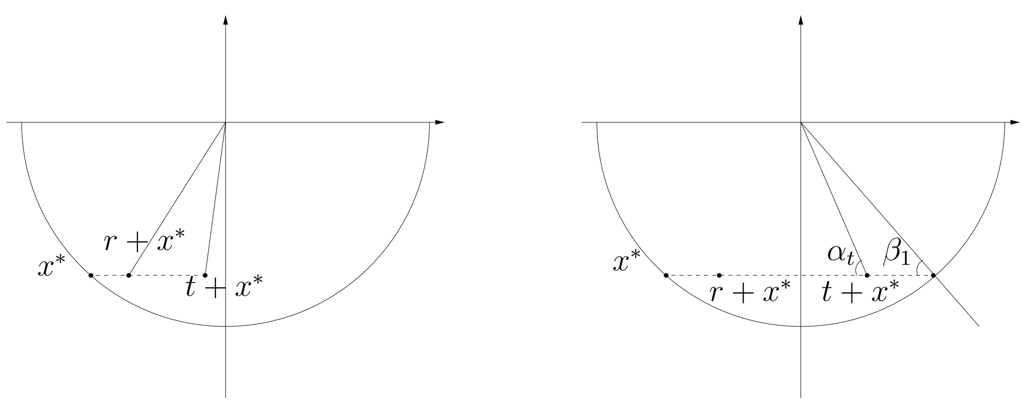


Figura 4.5: Trajectòria de $r + x^*$.

Si $t \le -\,\Re e\,x^*$, ja veiem a l'esquerra de la Figura 4.5 que els punts $r + x^*$ es mantenen amb part real negativa i el mòdul mínim l'assoleixen per al valor de $r \le t$ tal que $\Re e(r+x^*) < 0$ sigui el més gran possible, és a dir, per a $r = t$. Podem dir doncs que, en aquest cas, $|r+x^*| \ge |t+x^*|$.

Si $-\,\Re e\,x^* < t < T$, veiem que el valor més petit de $|r + x^*|$ és $|\,\Im m\,x^*|$, però a la Figura 4.5 ja veiem que $\alpha_t > \beta_1$ per tant,

$$|\,\Im m\,x^*| = \sin\alpha_t|t + x^*| \ge \sin\beta_1|t + x^*|.$$

En qualsevol cas,

$$|r + x^*|^{-1} \le (\sin\beta_1)^{-1}|t + x^*|^{-1}$$

i així, de (4.30) obtenim que $\exists\,K$ tal que

$$\forall n \ge -2, \quad \int_0^t |r + x^*|^n\,dr \le K|t + x^*|^{n+1},$$

amb la qual cosa acabem la demostració de (4.28). ∎

Fixada $x^* \in \Gamma^{u(1)}_{\gamma,+}$ i una condició inicial petita $g^*(\tau)$ que sigui 2π-periòdica i analítica a $\mathbb{T}_{\sigma_0}$, provarem l'existència d'una solució de l'Equació (4.23) en una banda complexa continguda a la zona inner al voltant de $\Im m\, x = \Im m\, x^*$. Després, al Corol·lari 4.10, veurem que si g^* és el valor de $\Phi^- = \partial_x \Psi^-$ en un punt x^* de la zona matching, el Teorema 4.5 ens assegura que la solució que obtindrem al Teorema 4.9 és la continuació analítica a la zona inner de Φ^-, coneguda ja a la zona outer.

Observació 4.8. *Per no complicar les fórmules de la demostració, posarem condició inicial d'ordre només ε^2 tot i que el Lema 4.4 diu que la condició inicial de $\partial_x\Psi^-$ és d'ordre $\varepsilon^2 + \varepsilon^{4-4\gamma}$. Per aplicar-ho després a $\partial_x\Psi^-$, imposarem que $\gamma < 1/2$, amb la qual cosa $4-4\gamma > 2$ i estarem en les hipòtesis formulades.*

Teorema 4.9. *Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \sigma < \sigma_0$, $0 < \mu \le \mu_0$, $1/3 < \gamma < 1$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, $x^* \in \Gamma^{u(1)}_{\gamma,+}$ i $g^*(\tau)$ analítica a $\mathbb{T}_{\sigma_0}$ tal que $|g^*(\tau)| \le c_0\,\varepsilon^2$, existeix I_{x^*} una banda horitzontal finita centrada a $\Im m\, x = \Im m\, x^*$ i d'amplada $\varepsilon^{3\gamma-1}$ tal que l'Equació (4.23) té una única solució 2π-periòdica en τ i analítica $\Phi(x,\tau)$ definida a $I_{x^*} \times \mathbb{T}_\sigma$ i tal que $\Phi(x^*,\tau) = g^*(\tau)$. A més,*

$$\forall (x,\tau) \in I_{x^*} \times \mathbb{T}_\sigma, \quad |\Phi(x,\tau)| \le 2c_0\,\varepsilon^2$$

i

$$\mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+} \subset \bigcup_{x^* \in \Gamma^{u(1)}_{\gamma,+}} I_{x^*}.$$

Demostració. Recordem que $0 < \beta_1 < \beta_1^{(i)} < \pi/2$ i, per tant, en qualsevol moment farem servir que $\sin \beta_1^{(i)} > \sin \beta_1$.

Buscarem la solució de l'Equació (4.23) a partir del mètode de les corbes característiques que pot trobar-se, per exemple, a [J82]. Per a $x^* \in \Gamma^{u(2)}_{\gamma,+}$ fixat, busquem funcions

$$x(t,s),\ \tau(t,s)\ \text{ i }\ \overline{\Phi}(t,s) \tag{4.32}$$

2π-periòdiques en $s \in \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i $0 \le t \le T$ per a certa T, solucions del sistema d'equacions diferencials ordinàries:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t x = 1 - A^-(x,\tau) - 2B^-(x,\tau)\overline{\Phi} \\ \partial_t \tau = 1 \\ \partial_t \overline{\Phi} = \partial_x A^-(x,\tau)\overline{\Phi} + \partial_x B^-(x,\tau)\overline{\Phi}^2 + \partial_x C^-(x,\tau) \end{array}\right. \tag{4.33}$$

amb condicions inicials

$$\left\{\begin{array}{l} x(0,s) = x^* \\ \tau(0,s) = s \\ \overline{\Phi}(0,s) = g^*(s) \end{array}\right. \tag{4.34}$$

on sabem que $\forall s \in \mathbb{T}_{\sigma_0}$, $|g^*(s)| \le c_0\varepsilon^2$. Directament, ja veiem que $\tau = t + s$.

Per tal de poder usar les fites del Lema 4.2, haurem de controlar el domini de t a l'interval $[0,T]$ on definim

$$T := \text{mín}\{-2\,\Re e\, x^*, -\Re e\, x^* - \frac{1}{\tan\beta_1}\,\Im m\, x^*\}. \tag{4.35}$$

Fixada una $s \in \mathbb{C}$, la teoria d'equacions diferencials ordinàries ens assegura l'existència local i unicitat de solucions analítiques de (4.33) al voltant del punt $(t_0, x_0, \tau_0, \overline{\Phi}_0) = (0, x^*, s, g^*(s))$. La dependència analítica respecte s de les condicions inicials també ens dóna l'analiticitat de les solucions respecte aquesta variable. Les solucions trobades poden anar continuant-se canviant el punt inicial adequadament per tal de tenir-les definides a tot el domini desitjat. A més, però, ens interessa tenir fites de les solucions, per tant, les construirem com a límits de successions.

Per tal de facilitar els càlculs, farem el canvi $X(t,s) = x(t,s) - t - x^*$ i $V(t,s) = \overline{\Phi}(t,s) - g^*(s)$. No obstant el canvi fet a $X(t,s)$, per a que les fórmules no quedin molt llargues, en el arguments de les funcions seguirem usant $x(t,s)$. Així doncs, el sistema a resoldre és:

$$\begin{cases} \partial_t X = -A^-(x, t+s) - 2B^-(x, t+s)(g^*(s) + V) \\ \partial_t V = \partial_x A^-(x, t+s)(g^*(s) + V) + \partial_x B^-(x, t+s)(g^*(s) + V)^2 + \partial_x C^-(x, t+s) \end{cases} \tag{4.36}$$

amb condicions inicials

$$\begin{cases} X(0,s) = 0 \\ V(0,s) = 0 \end{cases}$$

Resoldrem aquest sistema per iteracions. Introduïm doncs l'espai de funcions de Banach amb el qual treballarem

$$\chi = \{U = (X,V) \mid U : [0,T] \times \mathbb{T}_{\sigma_0} \to \mathbb{C}^2 \ 2\pi\text{-periòdica en } s, \text{ analítica i } \|U\|_* < \infty\} \tag{4.37}$$

amb la norma

$$\|U\|_* = \text{màx}\,\{\|\mathrm{X}\|, \|\mathrm{V}\|\}\,, \tag{4.38}$$

on definirem les normes de X i de V de manera adequada per tal d'equilibrar-les amb el mateix pes i aprofitar al màxim les seves propietats. Així doncs, primer estudiarem com es comporten X i V.

Prendrem l'aproximació inicial com:

$$\begin{cases} X^0(t,s) = 0 \,(\Rightarrow x^0(t,s) = t + x^*) \\ V^0(t,s) = \displaystyle\int_0^t \partial_x C^-(r + x^*, r+s)\,dr \end{cases} \tag{4.39}$$

i definim les corresponents iteracions com

$$\begin{aligned} X^{k+1}(t,s) &= -\int_0^t A^-(x^k(r,s), r+s)\,dr - 2\int_0^t B^-(x^k(r,s), r+s)\left(g^*(s) + V^k(r,s)\right)\,dr, \\ V^{k+1}(t,s) &= \int_0^t \partial_x A^-(x^k(r,s), r+s)\,(g^*(s) + V^k(r,s))\,dr + \\ &\quad + \int_0^t \partial_x B^-(x^k(r,s), r+s)(g^*(s) + V^k(r,s))^2\,dr + \int_0^t \partial_x C^-(x^k(r,s), r+s)\,dr, \end{aligned} \tag{4.40}$$

on denotem $x^k(r,s) = r + x^* + X^k(r,s)$.

Si definim

$$k_1 := (1+h_1)\tilde{c} \quad \text{i} \quad k_2 := (1-h_1)\tilde{a},$$

fixem-nos que, per ser x^* un punt de $\Gamma^{u(1)}_{\gamma,+}$,

$$\Re e\, x^* \leq 0, \qquad \Im m\, x^* \leq -k_1 \ln(1/\varepsilon), \qquad |x^*| = k_2 \varepsilon^{1-\gamma},$$

per tant, $\forall\, t \in [0,T]$, podrem fer servir el Lema 4.7. A més, tal i com ja es veia a la Figura 4.5, comprovarem que $\forall r \in [0,t]$ els punts $r + x^*$ estan al domini $\mathcal{D}^{u(1)}_{\varepsilon,+} \subset \tilde{\mathcal{D}}^u_{\varepsilon,+}$ definit a (4.3):

1. $r \in \mathbb{R}$ i $\Re e\, x^* \leq \Re e(r + x^*) \leq -\Re e\, x^* \;\Rightarrow\; |r + x^*| \leq |x^*| = k_2\varepsilon^{\gamma-1}$.
2. $\Im m\,(r + x^*) = \Im m\, x^* \leq -k_1 \ln(1/\varepsilon)$.
3. per altra banda, usant que

$$r \leq t \leq T \leq -\Re e\, x^* - \frac{1}{\tan\beta_1^{(1)}}\,\Im m\, x^*$$

tenim que $\Im m\, x^* \leq -\tan\beta_1^{(1)}(r + \Re e\, x^*)$ i per tant,

$$\Im m\,(r + x^*) = \Im m\, x^* \leq -\tan\beta_1^{(1)}(r + \Re e\, x^*) = -\tan\beta_1^{(1)}\,\Re e(r + x^*).$$

Les condicions 1, 2 i 3 asseguren que $\forall r \in [0, t]$, $r + x^* \in \mathcal{D}^{u(1)}_{\varepsilon,+}$, així doncs, en aquests punts podrem usar el Lema 4.2 posant $i = 1$.

De la definició (4.39), usant la fita per a $\partial_x C^-$ del Lema 4.2 i la fórmula (4.28) del Lema 4.7 amb $n = -2$:

$$|V^0(t, s)| \leq C'_C\varepsilon^2 K|t + x^*|^{-1} \leq c_1\,\varepsilon^2|t + x^*|^{-1} \tag{4.41}$$

on s'ha definit

$$c_1 := 8C'_C K.$$

A més, com que $r + x^* \in \mathcal{D}^{u(1)}_{\varepsilon,+}$, sabem que $|r + x^*|^{-1} \leq k_1^{-1}\ln^{-1}(1/\varepsilon)$ i, per tant, si ε és prou petit, podem considerar la fita

$$|g^*(s) + V^0(r, s)| \leq c_0\varepsilon^2 + c_1\varepsilon^2|r + x^*|^{-1} \leq 2c_0\varepsilon^2. \tag{4.42}$$

Per a $X^1(t, s)$, de (4.40) i usant les corresponents fites del Lema 4.2 per a A^- i B^-:

$$\begin{aligned}|X^1(t, s)| \leq &\int_0^t |A^-(r + x^*, r + s)|\, dr + 2\int_0^t |B^-(r + x^*, r + s)| \cdot |g^*(s) + V^0(r, s)|\, dr \leq \\ \leq &C_A\varepsilon^{2\gamma}\int_0^t dr + 4C_B c_0\varepsilon^2\int_0^t |r + x^*|^2\, dr.\end{aligned}$$

La fórmula del Lema 4.7 per a $n = 0, 2$ ens permetrà trobar el resultat final:

$$|X^1(t, s)| \;\leq\; C_A\varepsilon^{2\gamma}K\varepsilon^{\gamma-1} + 4C_B c_0\varepsilon^2 K\varepsilon^{3(\gamma-1)} \leq (C_A + 4C_B c_0\,)\,K\varepsilon^{3\gamma-1} \leq \rho_0\varepsilon^{3\gamma-1}$$

on la constant ρ_0 està definida com:

$$\rho_0 := (C_A + 9C_B c_0)K. \tag{4.43}$$

Per a $V^1(t, s)$ seguirem el mateix procés, de (4.40):

$$\begin{aligned}|V^1(t, s)| \leq &\int_0^t |\partial_x A^-(r + x^*, r + s)| \cdot |g^*(s) + V^0(r, s)|\, dr + \\ &+ \int_0^t |\partial_x B^-(r + x^*, r + s)| \cdot |g^*(s) + V^0(r, s)|^2\, dr + \int_0^t |\partial_x C^-(r + x^*, r + s)|\, dr\end{aligned} \tag{4.44}$$

i usant fites del Lema 4.2 per a $\partial_x A^-$, $\partial_x B^-$ i $\partial_x C^-$, i el resultat (4.42),

$$|V^1(t,s)| \le \int_0^t C'_A \varepsilon^{1+\gamma} 2c_0\,\varepsilon^2\,dr + \int_0^t C'_B |r+x^*|(2c_0\,\varepsilon^2)^2\,dr + \int_0^t C'_C \varepsilon^2 |r+x^*|^{-2}\,dr \le$$

$$\le 2C'_A c_0 \varepsilon^2 \varepsilon^{1+\gamma} \int_0^t dr + 4C'_B c_0^2 \varepsilon^4 \int_0^t |r+x^*|\,dr + C'_C \varepsilon^2 \int_0^t |r+x^*|^{-2}\,dr.$$

Ara la fórmula del Lema 4.7 haurem d'usar-la ara per als valors $n=-2,0,1$:

$$\begin{aligned}|V^1(t,s)| \le\,& 2C'_A c_0 \varepsilon^2 \varepsilon^{1+\gamma} K \varepsilon^{2(\gamma-1)} |t+x^*|^{-1} + 4C'_B c_0^2 \varepsilon^4 K \varepsilon^{3(\gamma-1)} |t+x^*|^{-1} + \\ &+ C'_C\,\varepsilon^2 K |t+x^*|^{-1} = \\ =& \Big(2C'_A c_0 + 4C'_B c_0^2\Big) K \varepsilon^{3\gamma-1} \varepsilon^2 |t+x^*|^{-1} + C'_C K \varepsilon^2 |t+x^*|^{-1}\end{aligned}$$

on, per ser $\gamma > 1/3$, si ε és prou petit,

$$|V^1(t,s)| \le \frac{1}{2}\,c_1 \varepsilon^2 |t+x^*|^{-1} + C'_C K\,\varepsilon^2 |t+x^*|^{-1}$$

i com que $c_1 = 8C'_C K$, podem dir que $C'_C K \le c_1/2$ i d'aquí finalment

$$|V^1(t,s)| \le c_1 \varepsilon^2 |t+x^*|^{-1}.$$

Fixem-nos que, com que la tercera integral de (4.44) correspon precisament al que hem definit com $V^0(t,s)$, d'aquests càlculs també en deduïm que

$$|V^1(t,s) - V^0(t,s)| \le \frac{1}{2}\,c_1 \varepsilon^2 |t+x^*|^{-1},$$

resultat que usarem més endavant.

Vistes les mides dels primers iterats de les dues funcions, decidim usar les normes

$$\|X\| := \sup_{t\in[0,T]} |X(t,s)|, \qquad \|V\| := \sup_{t\in[0,T]} \left\{ |t+x^*| \varepsilon^{3\gamma-3} |V(t,s)| \right\}. \tag{4.45}$$

Així doncs, usant (4.41) i les fites per a X^1 i V^1 trobades, obtenim els resultats

$$\|X^0\| = 0, \quad \|V^0\| \le \sup_{t\in[0,T]} \left\{ |t+x^*| \varepsilon^{3\gamma-3} c_1 \varepsilon^2 |t+x^*|^{-1} \right\} \le c_1 \varepsilon^{3\gamma-1},$$

$$\|X^1\| = \rho_0 \varepsilon^{3\gamma-1}, \quad \|V^1\| \le \sup_{t\in[0,T]} \left\{ |t+x^*| \varepsilon^{3\gamma-3} c_1 \varepsilon^2 |t+x^*|^{-1} \right\} \le c_1 \varepsilon^{3\gamma-1}, \tag{4.46}$$

$$\|V^1 - V^0\| \le \sup_{t\in[0,T]} \left\{ |t+x^*| \varepsilon^{3\gamma-3} \frac{1}{2}\,c_1 \varepsilon^2 |t+x^*|^{-1} \right\} \le \frac{1}{2}\,c_1 \varepsilon^{3\gamma-1}. \tag{4.47}$$

Demostrarem ara per inducció que

$$\|X^k\| \le \rho_0 \varepsilon^{3\gamma-1}, \qquad \|V^k\| \le c_1 \varepsilon^{3\gamma-1}.$$

De les hipòtesis d'inducció, podem dir que $|X^k(r,s)| \le \rho_0 \varepsilon^{3\gamma-1}$ i que $|V^k(t,s)| \le c_1 \varepsilon^2 |t+x^*|^{-1}$. La primera conseqüència és que, si ε és prou petit, podem considerar una fita com la (4.42):

$$\left| g^*(s) + V^k(r,s) \right| \le c_0 \varepsilon^2 + c_1 \varepsilon^2 |t+x^*|^{-1} \le 2c_0 \varepsilon^2; \tag{4.48}$$

i la segona conseqüència és que,

$$|x^k(r,s)| = |r + x^* + X^k(r,s)| \le |r+x^*| + \rho_0 \varepsilon^{3\gamma-1}$$

d'on, pel fet que $r + x^* \in \mathcal{D}^{u(1)}_{\varepsilon,+}$, podrem comprovar que $x^k(r,s) \in \mathcal{D}^{u(0)}_{\varepsilon,+} = \tilde{\mathcal{D}}^u_{\varepsilon,+}$:

1. $|x^k(r,s)| \leq (1-h_1)\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1} + \rho_0\varepsilon^{3\gamma-1}$.
   Si ε és suficientment petit, $\rho_0\varepsilon^{3\gamma-1} = \rho_0\varepsilon^{2\gamma}\varepsilon^{\gamma-1} \leq h_1\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1}$, aleshores
$$|x^k(r,s)| \leq (1-h_1)\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1} + h_1\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1} = \tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1}.$$

2. $\Im m\left(x^k(r,s)\right) = \Im m\, x^* + \Im m(X^k(r,s) \leq -(1+h_1)\tilde{c}\ln(1/\varepsilon) + \rho_0\varepsilon^{3\gamma-1}$,
   per tant, com abans, si ε és suficientment petit, $\rho_0\varepsilon^{3\gamma-1} \leq h_1\tilde{c}\ln(1/\varepsilon)$ i aleshores
$$\Im m\left(x^k(r,s)\right) \leq -\tilde{c}\ln(1/\varepsilon).$$

3. per a l'última condició, recordem que només pretenem que $x^k(r,s)$ estigui per sota la recta que passa per l'origen i té pendent $-\tan\beta_1^{(1)}$ amb $\beta_1^{(1)} > \beta_1$. Però ja sabem que $r + x^*$ està per sota la recta que passa per l'origen i té pendent $-\tan\beta_1$, i ara estem suposant que $|X^k(r,s)| \leq \rho_0\varepsilon^{3\gamma-1}$, per tant, el nostre objectiu s'aconsegueix sempre que ε sigui prou petit.

Podem doncs usar el Lema 4.2 per als punts $x^k(r,s) = r + x^* + X^k(r,s) \in \tilde{\mathcal{D}}^u_{\varepsilon,+}$:
$$|X^{k+1}(t,s)| \leq \int_0^t C_A\varepsilon^{2\gamma}\,dr + 2\int_0^t C_B|x^k(r,s)|^2\left|g^*(s) + V^k(r,s)\right|\,dr,$$
Com que $\Im m(r+x^*) \leq -k_1\ln(1/\varepsilon)$ i $|X^k(r,s)| \leq \rho_0\varepsilon^{3\gamma-1}$, usarem el Lema 4.6 per substituir $x^k(r,s)$ a la segona integral: $|x^k(r,s)| = |r + x^* + X^k(r,s)| \leq \frac{3}{2}|r+x^*|$. A més, usant (4.48),
$$\begin{aligned}|X^{k+1}(t,s)| &\leq \int_0^t C_A\varepsilon^{2\gamma}\,dr + 2\int_0^t C_B\frac{9}{4}|r+x^*|^2 2c_0\,\varepsilon^2\,dr = \\ &= C_A\varepsilon^{2\gamma}\int_0^t dr + 9C_Bc_0\,\varepsilon^2\int_0^t |r+x^*|^2\,dr\end{aligned}$$
i, per les fórmules del Lema 4.7 amb $n = 0, 2$:
$$|X^{k+1}(t,s)| \leq C_A\varepsilon^{2\gamma}K\varepsilon^{\gamma-1} + 9C_Bc_0\,\varepsilon^2K\varepsilon^{3\gamma-3} = \left(C_A + 9C_Bc_0\right)K\varepsilon^{3\gamma-1} \leq \rho_0\varepsilon^{3\gamma-1}.$$

Seguirem el mateix procés per trobar $\|V^k\|$. Per les fites del Lema 4.2 per a ∂_xA^-, ∂_xB^- i ∂_xC^-:
$$\begin{aligned}|V^{k+1}(t,s)| \leq &\int_0^t C'_A\varepsilon^{1+\gamma}\left|g^*(s) + V^k(r,s)\right|\,dr + \\ &+ \int_0^t C'_B|x^k(r,s)|\left|g^*(s) + V^k(r,s)\right|^2\,dr + \int_0^t C'_C\varepsilon^2|x^k(r,s)|^{-2}\,dr,\end{aligned}$$
tornarem a utilitzar ara la fita (4.48) i, del Lema 4.6, a més d'usar que $|x^k(r,s)| \leq \frac{3}{2}|r+x^*|$, ens interessa també l'altra desigualtat, $|x^k(r,s)|^{-1} \leq 2|r+x^*|^{-1}$,
$$\begin{aligned}|V^{k+1}(t,s)| \leq &C'_A\varepsilon^{1+\gamma}\int_0^t 2c_0\,\varepsilon^2\,dr + C'_B\int_0^t \frac{3}{2}|r+x^*|\left(2c_0\,\varepsilon^2\right)^2\,dr + C'_C\varepsilon^2\int_0^t 4|r+x^*|^{-2}\,dr = \\ =&2C'_Ac_0\varepsilon^{1+\gamma}\varepsilon^2\int_0^t 1\,dr + 6C'_Bc_0^2\varepsilon^4\int_0^t |r+x^*|\,dr + 4C'_C\varepsilon^2\int_0^t |r+x^*|^{-2}\,dr\end{aligned}$$

i, per les fórmules del Lema 4.7 amb $n=-2,0,1$:

$$\begin{aligned}|V^{k+1}(t,s)| \leq & 2C'_A c_0 \varepsilon^{1+\gamma}\varepsilon^2 K\varepsilon^{2(\gamma-1)}|t+x^*|^{-1} + 6C'_B c_0^2 \varepsilon^4 K \varepsilon^{3(\gamma-1)}|t+x^*|^{-1} + \\ & + 4C'_C \varepsilon^2 K|t+x^*|^{-1} = \\ = & \big(2C'_A c_0 + 6C'_B c_0^2\big) K\varepsilon^{3\gamma-1}\varepsilon^2|t+x^*|^{-1} + 4C'_C K\varepsilon^2|t+x^*|^{-1}\end{aligned}$$

on, per ser $\gamma > 1/3$, si ε és prou petit,

$$|V^{k+1}(t,s)| \leq \frac{1}{2}\, c_1\varepsilon^2|t+x^*|^{-1} + 4C'_C K\,\varepsilon^2|t+x^*|^{-1}$$

i com que $c_1 = 8C'_C K$, podem dir que $4C'_C K \leq c_1/2$ i d'aquí finalment

$$|V^{k+1}(t,s)| \leq c_1\varepsilon^2|t+x^*|^{-1} \quad \Rightarrow \|V^{k+1}\| \leq c_1\varepsilon^{3\gamma-1}.$$

Cal veure ara la convergència d'aquestes iteracions. Usant la fórmula (4.40) de la X^k,

$$\begin{aligned}X^{k+1}(t,s) - X^k(t,s) = & -\int_0^t \big(A^-(x^k(r,s),r+s) - A^-(x^{k-1}(r,s),r+s)\big)\, dr- \\ & - 2\int_0^t B^-(x^k(r,s),r+s)\,\big(g^*(s)+V^k(r,s)\big)\, dr+ \\ & + 2\int_0^t B^-(x^{k-1}(r,s),r+s)\,\big(g^*(s)+V^{k-1}(r,s)\big)\, dr = \\ = & -\int_0^t \big(A^-(x^k(r,s),r+s) - A^-(x^{k-1}(r,s),r+s)\big)\, dr- \\ & - 2\int_0^t \big(B^-(x^k(r,s),r+s) - B^-(x^{k-1}(r,s),r+s)\big)\big(g^*(s)+V^k(r,s)\big)\, dr+ \\ & + 2\int_0^t B^-(x^{k-1}(r,s),r+s)\,\big(V^{k-1}(r,s)-V^k(r,s)\big)\, dr,\end{aligned}$$

on tornarem a fer servir la fita (4.48).

Sigui $\hat{x}(r,s) = r + x^* + \rho X^k(r,s) + (1-\rho)X^{k-1}(r,s)$ per a un cert $\rho \in (0,1)$, aleshores pel Teorema del Valor Mitjà i les fites dels Lemes 4.2 i 4.6,

$$\begin{aligned}|A^-(x^k(r,s),r+s) - A^-(x^{k-1}(r,s),r+s)| \leq & |\partial_x A^-(\hat{x}(r,s),r+s)|\cdot|X^k(r,s)-X^{k-1}(r,s)| \leq \\ \leq & C'_A\varepsilon^{1+\gamma}\cdot\|X^k - X^{k-1}\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|B^-(x^k(r,s),r+s) - B^-(x^{k-1}(r,s),r+s)| \leq & |\partial_x B^-(\hat{x}(r,s),r+s)|\cdot|X^k(r,s)-X^{k-1}(r,s)| \leq \\ \leq & C'_B|\hat{x}(r,s)|\cdot\|X^k - X^{k-1}\| \leq C'_B\frac{3}{2}|r+x^*|\cdot\|X^k-X^{k-1}\|,\end{aligned}$$

$$|B^-(x^{k-1}(r,s),r+s)| \leq C_B|x^{k-1}(r,s)|^2 \leq C_B\left(\frac{3}{2}|r+x^*|\right)^2 = C_B\frac{9}{4}|r+x^*|^2.$$

Per altra banda, recordem que la definició (4.45) de la norma per a V ens permet assegurar que:

$$\big|V^{k-1}(r,s) - V^k(r,s)\big| \leq \|V^k - V^{k-1}\|\cdot|r+x^*|^{-1}\varepsilon^{3-3\gamma}. \tag{4.49}$$

Substituint a l'expressió de $X^{k+1}(t,s) - X^k(t,s)$ totes aquestes fites trobades,

$$\begin{aligned}|X^{k+1}(t,s) - X^k(t,s)| \leq & C'_A\varepsilon^{1+\gamma}\int_0^t 1\,dr\cdot\|X^k - X^{k-1}\| + \\ & + 2C'_B\int_0^t \frac{3}{2}|r+x^*|2c_0\varepsilon^2\,dr\cdot\|X^k - X^{k-1}\| + \\ & + 2C_B\int_0^t \frac{9}{4}|r+x^*|^2|r+x^*|^{-1}\varepsilon^{3-3\gamma}\,dr\cdot\|V^k - V^{k-1}\|\end{aligned}$$

i, usant els resultats del Lema 4.7 per a les integrals amb $n = 0, 1$,

$$\begin{aligned}|X^{k+1}(t,s) - X^k(t,s)| \leq & \left(C'_A\varepsilon^{1+\gamma}K\varepsilon^{\gamma-1} + 6C'_Bc_0\,\varepsilon^2K\varepsilon^{2(\gamma-1)}\right)\cdot\|X^k - X^{k-1}\| + \\ & + \frac{9}{2}\,C_B\varepsilon^{3-3\gamma}K\varepsilon^{2\gamma-2}\cdot\|V^k - V^{k-1}\| \leq \\ \leq & \left(C'_A + 6C'_Bc_0\right)K\varepsilon^{2\gamma}\cdot\|X^k - X^{k-1}\| + \frac{9}{2}\,C_BK\varepsilon^{1-\gamma}\cdot\|V^k - V^{k-1}\|.\end{aligned}$$

Pel fet que $3\gamma - 1 > 0$, sabem que $2\gamma > 1 - \gamma$ i aleshores existeix una constant a_1 tal que

$$\|X^{k+1} - X^k\| \leq a_1\varepsilon^{1-\gamma}\left(\|X^k - X^{k-1}\| + \|V^k - V^{k-1}\|\right). \tag{4.50}$$

Cal estudiar ara la diferència $V^{k+1} - V^k$. Usant també el Teorema del Valor Mitjà:

$$\begin{aligned}&|V^{k+1}(t,s) - V^k(t,s)| \leq \\ &\leq \int_0^t |\partial_x^2 A^-(\hat{x}(r,s), r+s)|\cdot|X^k(r,s) - X^{k-1}(r,s)|\cdot|g^*(s) + V^k(r,s)|\,dr + \\ &\quad + \int_0^t |\partial_x A^-(x^{k-1}(r,s), r+s)|\cdot|V^k(r,s) - V^{k-1}(r,s)|\,dr + \\ &\quad + \int_0^t |\partial_x^2 B^-(\hat{x}(r,s), r+s)|\cdot|X^k(r,s) - X^{k-1}(r,s)|\cdot|g^*(s) + V^k(r,s)|^2\,dr + \\ &\quad + \int_0^t |\partial_x B^-(x^{k-1}(r,s), r+s)|\cdot|2g^*(s) + V^k(r,s) + V^{k-1}(r,s)|\cdot|V^k(r,s) - V^{k-1}(r,s)|\,dr + \\ &\quad + \int_0^t |\partial_x^2 C^-(\hat{x}(r,s), r+s)|\cdot|X^k(r,s) - X^{k-1}(r,s)|\,dr.\end{aligned}$$

Pels resultats dels Lemes 4.2 i 4.6:

$$|\partial_x^2 A^-(\hat{x}(r,s), r+s)| \leq C''_A\varepsilon^2,$$

$$|\partial_x A^-(x^{k-1}(r,s), r+s)| \leq C'_A\varepsilon^{1+\gamma},$$

$$|\partial_x^2 B^-(\hat{x}(r,s), r+s)| \leq C''_B,$$

$$|\partial_x B^-(x^{k-1}(r,s), r+s)| \leq C'_B|x^{k-1}(r,s)| \leq C'_B\frac{3}{2}|r+x^*|,$$

$$|\partial_x^2 C^-(\hat{x}(r,s), r+s)| \leq C''_C\varepsilon^2|\hat{x}(r,s)|^{-3} \leq C''_C\varepsilon^2 8|r+x^*|^{-3}$$

i tornant a usar que $\left|g^*(s)+V^k(r,s)\right| \le c_0\varepsilon^2 + c_1\varepsilon^2|t+x^*|^{-1} \le 2c_0\varepsilon^2$ i (4.49),

$$\begin{aligned}
|V^{k+1}(t,s)-V^k(t,s)| \le & \int_0^t C''_A\varepsilon^2\|X^k-X^{k-1}\|2c_0\varepsilon^2\,dr+\\
&+\int_0^t C'_A\varepsilon^{1+\gamma}\|V^k-V^{k-1}\|\cdot|r+x^*|^{-1}\varepsilon^{3-3\gamma}\,dr+\\
&+\int_0^t C''_B\|X^k-X^{k-1}\|(2c_0\varepsilon^2)^2\,dr+\\
&+\int_0^t C'_B\frac{3}{2}|r+x^*|4c_0\varepsilon^2\|V^k-V^{k-1}\|\cdot|r+x^*|^{-1}\varepsilon^{3-3\gamma}\,dr+\\
&+\int_0^t C''_C\varepsilon^2 8|r+x^*|^{-3}\|X^k-X^{k-1}\|\,dr.
\end{aligned}$$

Gràcies al Lema 4.7 podem obtenir fites de les integrals implicades en aquesta expressió posant $n=-3,-1,0$:

$$\begin{aligned}
|V^{k+1}(t,s)-V^k(t,s)| \le & 2C''_Ac_0\varepsilon^4\,\|X^k-X^{k-1}\|K\varepsilon^{2(\gamma-1)}|t+x^*|^{-1}+\\
&+C'_A\varepsilon^{4-2\gamma}\|V^k-V^{k-1}\|K\ln(1/\varepsilon)\varepsilon^{\gamma-1}|t+x^*|^{-1}+\\
&+4C''_Bc_0^2\varepsilon^4\|X^k-X^{k-1}\|K\varepsilon^{2(\gamma-1)}|t+x^*|^{-1}+\\
&+6C'_Bc_0\varepsilon^{5-3\gamma}\|V^k-V^{k-1}\|K\varepsilon^{2(\gamma-1)}|t+x^*|^{-1}+\\
&+8C''_C\varepsilon^2\|X^k-X^{k-1}\|K|t+x^*|^{-2},
\end{aligned}$$

finalment, usant $|t+x^*|^{-1} \le k_1^{-1}\ln^{-1}(1/\varepsilon)$ a l'últim terme i treient factor comú $\varepsilon^2|t+x^*|^{-1}$ a tots els termes:

$$\begin{aligned}
&|V^{k+1}(t,s)-V^k(t,s)| \le\\
&\quad\le \Big(2C''_Ac_0\varepsilon^{2\gamma}+4C''_Bc_0^2\varepsilon^{2\gamma}+8C''_Ck_1^{-1}\ln^{-1}(1/\varepsilon)\Big)K\,\|X^k-X^{k-1}\|\varepsilon^2|t+x^*|^{-1}+\\
&\quad+\big(C'_A\ln(1/\varepsilon)+6C'_Bc_0\big)K\varepsilon^{1-\gamma}\|V^k-V^{k-1}\|\varepsilon^2|t+x^*|^{-1}.
\end{aligned}$$

Així doncs, existeix una constant a_2 tal que

$$|t+x^*|\varepsilon^{3\gamma-3}|V^{k+1}(t,s)-V^k(t,s)| \le a_2\varepsilon^{3\gamma-1}\left(\|X^k-X^{k-1}\|+\|V^k-V^{k-1}\|\right)$$

i per tant,

$$\|V^{k+1}-V^k\| \le a_2\varepsilon^{3\gamma-1}\left(\|X^k-X^{k-1}\|+\|V^k-V^{k-1}\|\right). \tag{4.51}$$

Estem ara en condicions de demostrar la convergència de $U^{k+1}(t,s)=\big(X^{k+1}(t,s),V^{k+1}(t,s)\big)$. Sigui $b_1=\text{màx}\,\{\rho_0,\mathrm{c}_1/2\}$ i $b_2=2\text{màx}\,\{\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2\}$, aleshores per (4.46) i (4.47):

$$\|U^1-U^0\|_* = \text{màx}\left\{\|\mathrm{X}^1\|,\|\mathrm{V}^1-\mathrm{V}^0\|\right\} = \text{màx}\left\{\rho_0\varepsilon^{3\gamma-1},\frac{1}{2}\mathrm{c}_1\varepsilon^{3\gamma-1}\right\} = \mathrm{b}_1\varepsilon^{3\gamma-1}$$

Sigui $\kappa=\text{mín}\{1-\gamma,3\gamma-1\}>0$, aleshores per (4.50) i (4.51):

$$\begin{aligned}
\|U^{k+1}-U^k\|_* &= \text{màx}\left\{\|\mathrm{X}^{k+1}-\mathrm{X}^k\|,\|\mathrm{V}^{k+1}-\mathrm{V}^k\|\right\} \le\\
&\le \frac{1}{2}b_2\varepsilon^\kappa\left(\|X^k-X^{k-1}\|+\|V^k-V^{k-1}\|\right) \le b_2\varepsilon^\kappa\|U^k-U^{k-1}\|_*
\end{aligned}$$

Per tant, la successió $\{U^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ és convergent a l'espai χ i existeixen X i V analítiques tals que

$$X = \lim_k X^k, \qquad V = \lim_k V^k.$$

Tenim doncs demostrada l'existència de les funcions (4.32) solució analítica de les Equacions (4.33):

$$x(t,s) = t + x^* + X(t,s) \qquad \text{i} \qquad \overline{\Phi}(t,s) = g^*(s) + V(t,s).$$

D'aquí, per (4.48), deduïm que:

$$|\overline{\Phi}(t,s)| \leq 2c_0\varepsilon^2.$$

Pel que fa a $x(t,s)$, com que $|X(t,s)| \leq \rho_0\varepsilon^{3\gamma-1}$,

$$|\Im m\, x(t,s) - \Im m\, x^*| \leq \rho_0\varepsilon^{3\gamma-1}$$

és a dir, que existeix I_{x^*} una banda complexa centrada a $\Im m\, x = \Im m\, x^*$ i d'amplada $\rho_0\varepsilon^{3\gamma-1}$ tal que $x(t,s) \in I_{x^*}$, i ja hem vist durant la demostració que $x^k(t,s) \in \tilde{\mathcal{D}}^u_{\varepsilon,+}$, per tant, també $x(t,s) \in \tilde{\mathcal{D}}^u_{\varepsilon,+}$.

Observi's que, si agafem la variable t a I_γ, una banda complexa d'amplada $\varepsilon^{3\gamma-1}$, tot es faria igual usant un lema anàleg al 4.7 i aleshores tindríem definides les funcions $x(t,s)$ i $\overline{\Phi}(t,s)$ per a t a la banda complexa I_γ.

Per finalitzar la demostració del teorema, cal veure que, fixat $(x,\tau) \in \mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+}$, podem obtenir $t = \mathcal{T}(x,\tau)$ i $s = \mathcal{S}(x,\tau)$ a partir de

$$\left.\begin{aligned} x(t,s) =& t + x^* + X(t,s) = x \\ \tau(t,s) =& t + s = \tau \end{aligned}\right\}.$$

De la segona equació, sabem que $s = \tau - t$ i ho posem a la primera equació:

$$t + x^* + X(t,\tau - t) = x,$$

que podem escriure com:

$$t = x - x^* - X(t,\tau - t)$$

i considerar el corresponent problema de punt fix. Després d'un procés iteratiu semblant al que acabem de fer, arribaríem a la conclusió que existeix una solució $\mathcal{T}(x,\tau)$ analítica a $\mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$. En aquest procés, es necessita comprovar la condició que $\partial_t X(t,\tau-t) - \partial_s X(t,\tau-t)$ és petit, però $X(t,s) = x(t,s) - t - x^*$, l'equació de (4.33) per a $x(t,s)$ i les fites del Lema 4.2 ens hi ajudaran:

$$\begin{aligned} |\partial_t X(t,\tau-t) - \partial_s X(t,\tau-t)| =& |\partial_t x(t,\tau-t) - 1 - \partial_s X(t,\tau-t)| \leq \\ \leq& |A^-(x(t,\tau-t),\tau)| + 2|B^-(x(t,\tau-t),\tau)| \cdot |\overline{\Phi}(t,\tau-t)| + |\partial_s X(t,\tau-t)| \leq \\ \leq& C_A\varepsilon^{2\gamma} + 2C_B\left((1-h_2)\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1}\right)^2 2c_0\varepsilon^2 + |\partial_s X(t,\tau-t)|. \end{aligned}$$

Ara bé, com que $|X(t,s)| \leq \rho_0\varepsilon^{3\gamma-1}$, per tenir una fita de $\partial_s X$ emprarem el Teorema de Cauchy:

$$|\partial_s X(t,s)| \leq \frac{\rho_0}{\sigma_0 - \sigma}\,\varepsilon^{3\gamma-1}, \forall s \in \mathbb{T}_\sigma \text{ amb } 0 < \sigma < \sigma_0$$

(fixem-nos que, com que $X(t,s)$ és 2π-periòdica respecte s, només cal reduir el domini de $\Im m\, s$). Així doncs,

$$|\partial_t X(t,\tau-t) - \partial_s X(t,\tau-t)| \le \left(C_A\varepsilon^{1-\gamma} + 4C_B(1-h_2)^2\tilde{a}^2\, c_0\varepsilon^{1-\gamma} + \frac{\rho_0}{\sigma_0-\sigma}\right)\varepsilon^{3\gamma-1},$$

amb la qual cosa ja hem acabat.

Finalment, $\mathcal{S}(x,\tau) = \tau - \mathcal{T}(x,\tau)$ i obtindríem la solució $\Phi(x,\tau) = \overline{\Phi}(\mathcal{T}(x,\tau), \mathcal{S}(x,\tau))$ del problema de Cauchy plantejat inicialment, que evidentment verifica la mateixa fita que $\overline{\Phi}$. ■

Estem ara en condicions de demostrar l'existència de solució a $\mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_\sigma$ de l'Equació (4.16). A (4.15) vam definir la funció

$$\Psi^-(x,\tau) = \overline{\psi}^-(x+R^-(x,\tau),\tau) = \left(\overline{\phi}^- - \overline{\phi}_0^-\right)(x+R^-(x,\tau),\tau),$$

on

$$\overline{\phi}^-(z,\tau) = \varepsilon T^-(\varepsilon z + i\pi/2, \tau) - \varepsilon^2\mu\frac{2}{\cosh^2(\varepsilon z + i\pi/2)}\cos\tau$$

i les seves derivades sabem que existeixen a la zona matching $z \in \mathcal{D}^{u(1)}_{\gamma,\delta_1,+}$ per a qualsevol $\tau \in \mathbb{T}_{\sigma_0}$ gràcies al Teorema 2.1. Per altra banda,

$$\overline{\phi}_0^-(z,\tau) = \phi_0^-(z,\tau) + 2\mu\cos\tau z^{-2}$$

també existeix, junt amb els seves derivades, al mateix domini gràcies al Corol·lari 3.30.

Qualsevol punt $x^* \in \Gamma^{u(1)}_{\gamma,+}$, pel canvi $z = x + R^-(x,\tau)$ definit al Lema 4.2 passa a un $z^*(\tau) \in \mathcal{D}^{u(1)}_{\gamma,\delta_1,+}$ que està al domini outer, per tant, coneixem $\Psi^-(x^*,\tau) = \overline{\psi}^-(z^*(\tau),\tau)$ i les seves derivades a través del Teorema 2.1. A partir d'aquests x^*, trobarem la continuació analítica de $\Psi^-(x,\tau)$ a tot $\mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+}$.

Ja vam comentar a l'Observació 4.8 que la condició $\gamma < 1/2$ és, en aquest moment, purament arbitrària.

Corol·lari 4.10. *Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \sigma < \sigma_0$, $0 < \mu \le \mu_0$, $1/3 < \gamma < 1/2$ i $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, la funció $\Psi^-(x,\tau)$ definida a (4.15) amb valors coneguts a $\Gamma^{u(1)}_{\gamma,+} \times \mathbb{T}_\sigma$, té continuació analítica a $\mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_\sigma$. A més, es compleix que*

$$\forall (x,\tau) \in \mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_\sigma, \quad |\partial_x \Psi^-(x,\tau)| \le 2c_0\,\varepsilon^2 \tag{4.52}$$

Demostració. Prop de qualsevol $(x^*,\tau) \in \Gamma^{u(1)}_{\gamma,+} \times \mathbb{T}_\sigma$, el Teorema 4.5 ens assegura l'existència i unicitat local de solució 2π-periòdica en τ i analítica de l'equació (4.23) amb condició inicial $\partial_x\Psi^-(x^*,\tau)$ fixada. Però, per a cada $(x^*,\tau) \in \Gamma^{u(1)}_{\gamma,+} \times \mathbb{T}_\sigma$, el Lema 4.4 ens diu que, si $0 \le \gamma < 1/2$, $\partial_x\Psi^-$ té la propietat $|\partial_x\Psi^-(x^*,\tau)| \le c_0\varepsilon^2$, per tant, el Teorema 4.9 ens dóna l'existència de solució $\Phi^-(x,\tau)$ 2π-periòdica en τ i analítica de l'Equació (4.23) amb la condició inicial $\Phi^-(x^*,\tau) = \partial_x\Psi^-(x^*,\tau)$ i definida a tota una banda horitzontal finita centrada a $\Im m\, x = \Im m\, x^*$. Combinant aquests dos resultats i constatant que la funció $\partial_x\Psi^-(x,\tau)$ satisfà l'Equació (4.23), podem assegurar que aquesta funció $\Phi^-(x,\tau)$ és la continuació analítica de $\partial_x\Psi^-(x,\tau)$ a tot $\mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+}$.

Per l'analiticitat de $\partial_x\Psi^-(x,\tau)$, podem recuperar la funció $\Psi^-(x,\tau)$ a partir de la seva derivada i d'un punt $x^*\in\Gamma^{u(1)}_{\gamma,+}$:

$$\forall(x,\tau)\in\mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+}\times\mathbb{T}_\sigma,\quad \Psi^-(x,\tau)=\Psi^-(x^*,\tau)+\int_{x^*}^{x}\partial_y\Psi^-(y,\tau)\,dy.$$

A més, segons el Teorema 4.9, sempre que $1/3<\gamma<1$,

$$\forall(x,\tau)\in\mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+}\times\mathbb{T}_\sigma,\quad |\partial_x\Psi^-(x,\tau)|\le 2c_0\,\varepsilon^2. \qquad\blacksquare$$

També ens interessarà tenir informació de $\partial_x^2\Psi^-(x,\tau)$, funció que satisfà l'equació obtinguda derivant l'Equació (4.23):

$$\begin{aligned}\partial_\tau\Theta+\left(1-A^-(x,\tau)-2B^-(x,\tau)\partial_x\Psi^-\right)\partial_x\Theta = \;&\big(2\partial_xA^-(x,\tau)+4\partial_xB^-(x,\tau)\,\partial_x\Psi^-\big)\Theta+\\ &+2B^-(x,\tau)\,\Theta^2+\\ &+\partial_x^2A^-(x,\tau)\,\partial_x\Psi^-+\partial_x^2B^-(x,\tau)\,\left(\partial_x\Psi^-\right)^2+\\ &+\partial_x^2C^-(x,\tau).\end{aligned}\tag{4.53}$$

Teorema 4.11. *Existeix $\varepsilon_0>0$ tal que, per a qualssevol $0<\sigma<\sigma_0$, $0<\mu\le\mu_0$, $1/3<\gamma<1/2$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, $x^*\in\Gamma^{u(1)}_{\gamma,+}$ i $g^*(\tau)$ analítica a $\mathbb{T}_{\sigma_0}$ tal que $|g^*(\tau)|\le c_0\left(\varepsilon^3+\varepsilon^{5-5\gamma}\right)$, existeix I_{x^*} una banda horitzontal finita centrada a $\Im m\,x=\Im m\,x^*$ i d'amplada $\varepsilon^{3\gamma-1}$ tal que l'Equació (4.53) té una única solució 2π-periòdica en τ i analítica $\Theta(x,\tau)$ definida a $I_{x^*}\times\mathbb{T}_\sigma$ i tal que $\Theta(x^*,\tau)=g^*(\tau)$. A més,*

$$\forall(x,\tau)\in I_{x^*}\times\mathbb{T}_\sigma,\quad |\Theta(x,\tau)|\le 2c_0\frac{\varepsilon^2}{\ln^2(1/\varepsilon)}$$

i

$$\mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+}\subset\bigcup_{x^*\in\Gamma^{u(1)}_{\gamma,+}} I_{x^*}.$$

Demostració. Pel mateix procés que es va fer al Teorema 4.9, pot arribar-se al resultat de l'enunciat. Donada $T>0$, busquem funcions

$$x(t,s),\ \tau(t,s)\ \text{ i }\ \overline{\Theta}(t,s)\tag{4.54}$$

2π-periòdiques en $s\in\mathbb{T}_{\sigma_0}$, $0\le t\le T$ i solucions del sistema d'equacions diferencials ordinàries:

$$\begin{cases}\partial_t x=1-A^-(x,\tau)-2B^-(x,\tau)\,\partial_x\Psi^-(x,\tau)\\ \partial_t\tau=1\\ \partial_t\overline{\Theta}=\big(2\partial_xA^-(x,\tau)+4\partial_xB^-(x,\tau)\,\partial_x\Psi^-(x,\tau)\big)\overline{\Theta}+2B^-(x,\tau)\,\overline{\Theta}^2+\\ \qquad+\partial_x^2A^-(x,\tau)\,\partial_x\Psi^-(x,\tau)+\partial_x^2B^-(x,\tau)\,\big(\partial_x\Psi^-(x,\tau)\big)^2+\partial_x^2C^-(x,\tau)\end{cases}\tag{4.55}$$

amb condicions inicials

$$\begin{cases}x(0,s)=x^*\\ \tau(0,s)=s\\ \overline{\Theta}(0,s)=g^*(s)\ \text{amb}\ |g^*(s)|\le c_0\big(\varepsilon^3+\varepsilon^{5-5\gamma}\big).\end{cases}\tag{4.56}$$

Les dues primeres equacions de (4.55) són exactament les mateixes que (4.33) però ara coneixem $\partial_x\Psi^-(x,\tau)$ gràcies al Teorema 4.9, per tant ja en sabem l'existència de solucions i les seves propietats.

La tercera equació és del mateix tipus que la tercera de (4.33) però canvien els coeficients, dels quals tenim informació gràcies al Lema 4.2 i al Teorema 4.9. Pel mateix procés que s'ha fet al Teorema 4.9, trobaríem que la norma infinit de la solució d'aquesta equació estaria dominada per la primera iteració del procés, que seria:

$$g^*(\tau) + \int_0^t \partial_x^2 A^-(x,\tau)\,\partial_x\Psi^-(x,\tau) + \partial_x^2 B^-(x,\tau)\,\big(\partial_x\Psi^-(x,\tau)\big)^2 + \partial_x^2 C^-(x,\tau)\,dr$$

on s'ha de substituir (x,τ) per $(r+x^*, r+s)$ dins la integral. Ja sabem que la condició inicial g^* és d'ordre $\varepsilon^3+\varepsilon^{5-5\gamma}$. Per altra banda, el Lema 4.2 ens dóna les fites de les funcions $\partial_x^2 A^-$, $\partial_x^2 B^-$ i $\partial_x^2 C^-$ al domini $\mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+}\times\mathbb{T}_{\sigma_0}$, i de (4.52) sabem que per a $0<\sigma<\sigma_0$ i $\forall(x,\tau)\in\mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+}\times\mathbb{T}_{\sigma}$, $\quad |\partial_x\Psi^-(x,\tau)|\le 2c_0\,\varepsilon^2$. Així doncs,

$$\left|\int_0^t \partial_x^2 A^-(x,\tau)\,\partial_x\Psi^-(x,\tau)\,dr\right| \le \int_0^t C''_A\varepsilon^2 2c_0\varepsilon^2\,dr \le 2C''_A c_0\varepsilon^4 2(1-h_2)\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1},$$

$$\left|\int_0^t \partial_x^2 B^-(x,\tau)\big(\partial_x\Psi^-(x,\tau)\big)^2\,dr\right| \le \int_0^t C''_B(2c_0\varepsilon^2)^2\,dr \le 4C''_B c_0^2\varepsilon^4 2(1-h_2)\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1},$$

$$\left|\int_0^t \partial_x^2 C^-(x,\tau)\,dr\right| \le \int_0^t C''_C\varepsilon^2|r+x^*|^{-3}\,dr$$

i el Lema 4.7 ens proporciona la fita de l'última integral:

$$\left|\int_0^t \partial_x^2 C^-(x,\tau)\,dr\right| \le C''_C\varepsilon^2 K|t+x^*|^{-2} \le C''_C K(1+h_2)^{-2}\tilde{c}^{-2}\ln^{-2}(1/\varepsilon)\varepsilon^2.$$

Aleshores,

$$\int_0^t \partial_x^2 A^-(x,\tau)\,\partial_x\Psi^-(x,\tau)\,dr + \int_0^t \partial_x^2 B^-(x,\tau)\big(\partial_x\Psi^-(x,\tau)\big)^2\,dr = O(\varepsilon^{3+\gamma})$$

i

$$\int_0^t \partial_x^2 C^-(x,\tau)\,dr = O(\varepsilon^2\ln^{-2}(1/\varepsilon)).$$

Està clar que $\varepsilon^{3+\gamma}<\varepsilon^3$ i, si ε és prou petit, $\varepsilon^3<\varepsilon^2\ln^{-2}(1/\varepsilon)$; així doncs,

$$\forall(x,\tau)\in\mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+}\times\mathbb{T}_\sigma,\quad \Theta(x,\tau) = O\big(\varepsilon^{5-5\gamma}\big) + O\big(\varepsilon^2\ln^{-2}(1/\varepsilon)\big),$$

però $\gamma<1/2<3/5$, per tant, $\varepsilon^{5-5\gamma}\le\varepsilon^2\ln^{-2}(1/\varepsilon)$, per tant, arribem a la conclusió que:

$$\forall(x,\tau)\in\mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+}\times\mathbb{T}_\sigma,\quad |\Theta(x,\tau)|\le 2c_0\frac{\varepsilon^2}{\ln^2(1/\varepsilon)}. \qquad \blacksquare$$

Com abans, el que realment ens interessa és el següent resultat:

Corol·lari 4.12. *Existeix* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que, per a qualssevol* $0 < \sigma < \sigma_0$, $0 < \mu \le \mu_0$, $1/3 < \gamma < 1/2$ *i* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, *la funció* $\Psi^-(x,\tau)$ *definida al Corol·lari 4.10 compleix que*

$$\forall (x,\tau) \in \mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_\sigma, \quad |\partial_x^2 \Psi^-(x,\tau)| \le 2c_0 \frac{\varepsilon^2}{\ln^2(1/\varepsilon)}. \tag{4.57}$$

Demostració. La funció $\partial_x^2\Psi^-(x,\tau)$ és solució de (4.53) i el Lema 4.4 ens dóna la seva condició inicial $\forall (x^*,\tau) \in \Gamma^{u(1)}_{\gamma,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$: $|\partial_x^2\Psi^-(x^*,\tau)| \le c_0\left(\varepsilon^3 + \varepsilon^{5-5\gamma}\right)$. Així doncs, per unicitat, ha de coincidir amb les solucions trobades al Teorema 4.11 per a cada $x^* \in \Gamma^{u(1)}_{\gamma,+}$. Per tant, sempre que $1/3 < \gamma < 1/2$,

$$\forall (x,\tau) \in \mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_\sigma, \quad |\partial_x^2 \Psi^-(x,\tau)| \le 2c_0 \frac{\varepsilon^2}{\ln^2(1/\varepsilon)}. \qquad \blacksquare$$

4.6 Demostració del Teorema 4.1.

Per (4.11) i (4.15), tenim que:

$$\overline{\phi}^-(z,\tau) - \overline{\phi}_0^-(z,\tau) = \Psi^-(z + S^-(z,\tau),\tau),$$

per tant, la relació entre $\phi^- - \phi_0^-$ i Ψ^- és:

$$\begin{aligned}\phi^-(z,\tau) - \phi_0^-(z,\tau) =& \overline{\phi}^-(z,\tau) - \overline{\phi}_0^-(z,\tau) + \varepsilon^2\mu\varphi(\varepsilon z + i\pi/2)\cos\tau + 2\mu\cos\tau\, z^{-2} = \\ =& \Psi^-(z + S^-(z,\tau),\tau) + \varepsilon^2\mu\varphi(\varepsilon z + i\pi/2)\cos\tau + 2\mu\cos\tau\, z^{-2}\end{aligned}$$

on $\varphi(u) = 2/\cosh^2 u$ i, del Corol·lari 3.48, sabem que $S^-(z,\tau) = O(z^{-1})$. D'aquí obtenim:

$$\begin{aligned}\partial_z\big(\phi^- - \phi_0^-\big)(z,\tau) =& \partial_x\Psi^-(z + S^-(z,\tau),\tau)\big(1 + \partial_z S^-(z,\tau)\big) + \\ &+ \varepsilon^3\mu\varphi'(\varepsilon z + i\pi/2)\cos\tau - 4\mu\cos\tau\, z^{-3},\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\partial_z^2\big(\phi^- - \phi_0^-\big)(z,\tau) =& \partial_x^2\Psi^-(z + S^-(z,\tau),\tau)\big(1 + \partial_z S^-(z,\tau)\big)^2 + \\ &+ \partial_x\Psi^-(z + S^-(z,\tau),\tau)\partial_z^2 S^-(z,\tau) + \\ &+ \varepsilon^4\mu\varphi''(\varepsilon z + i\pi/2)\cos\tau + 12\mu\cos\tau\, z^{-4}.\end{aligned}$$

Un cop coneixem les fites (4.52) i (4.57) de $\partial_x^j\Psi^-$ per a $j = 1, 2$, podem passar aquesta informació a $\partial_z^j\big(\phi^- - \phi_0^-\big)$ a través del canvi $x = z + S^-(z,\tau)$ donat pel Lema 4.2. Aquest mateix lema ens assegura que, si $(z,\tau) \in \mathcal{D}^{u(3)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$, aleshores $x = z + S^-(z,\tau) \in \mathcal{D}^{u(2)}_{\varepsilon,+}$ i, per tant, podem usar els resultats (4.52) i (4.57). Però, si prenem $\tilde{a} = \overline{a}/(1 - h_3)$ i $\tilde{c} = c/(1 + h_3)$, el domini $\mathcal{D}^{u(3)}_{\varepsilon,+}$ és en realitat $\mathcal{D}^{u}_{\varepsilon,+}$.

Els resultats finals que propugna el Teorema 4.1 segueixen de la constatació que sempre els últims termes juguen un paper secundari: $\forall z \in \mathcal{D}^u_{\varepsilon,+}$

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\varphi(\varepsilon z + i\pi/2)\cos\tau + 2\cos\tau\, z^{-2} &= O(\varepsilon^2), \\ \varepsilon^3\varphi'(\varepsilon z + i\pi/2)\cos\tau - 4\cos\tau\, z^{-3} &= O(\varepsilon^{3+\gamma}), \\ \varepsilon^4\varphi''(\varepsilon z + i\pi/2)\cos\tau + 12\cos\tau\, z^{-4} &= O(\varepsilon^4).\end{aligned}$$

Capítol 5

Estudi de la diferència entre varietats.

Vam veure a la Secció 1.4 que l'estudi de $T^+ - T^-$ és essencial per arribar a conclusions sobre el trencament de separatrius. El tractament de $T^+ - T^-$ com a solució d'una determinada equació ens donarà la informació que necessitem.

5.1 Variables de redreçament de flux.

El Teorema 2.1 ens va donar l'existència i analiticitat de les funcions $T^\pm$ als respectius dominis outer $D_\gamma^{u,s}$ de la variable u indicats a la Figura 5.1. Per altra banda, el Teorema 4.1

Figura 5.1: Dominis outer D_γ^u i D_γ^s.

ens va donar les continuacions analítiques de $T^\pm$ als respectius dominis inner $D_\varepsilon^{u,s}$, dels quals indiquem D_ε^u a la Figura 5.2, amb $\overline{a} > a$. De manera que, per a la variable u, tenim definida la funció T^- al domini connex $D^u = D_\gamma^u \cup D_\varepsilon^u$ (respectivament T^+ a D^s), on s'ha triat $\overline{a}$ tal que el segment vertical $i] - \pi/2 + c\varepsilon \ln(1/\varepsilon), \pi/2 - c\varepsilon \ln(1/\varepsilon)[$ estigui contingut a D^u.

Com que pretenem fer un estudi de la diferència $T^+ - T^-$, haurem de restringir el domini de la variable u a la intersecció $D^u \cap D^s$.

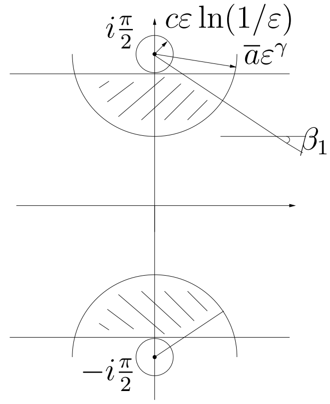


Figura 5.2: Domini inner, D^u_ε.

La següent proposició ens diu de quina equació és solució la diferència $T^+ - T^-$.

Proposició 5.1. *Si $T^\pm(u,\tau)$ són funcions analítiques als dominis respectius $D^{u,s} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i són solució de l'Equació (1.45), aleshores l'operador*

$$\mathcal{L}_\varepsilon := \varepsilon^{-1}\partial_\tau + \left[\frac{\cosh^2 u}{8}\left(\partial_u T^+ + \partial_u T^-\right)\right]\partial_u \tag{5.1}$$

té coeficients analítics en les variables $(u,\tau) \in \left(D^u \cap D^s\right) \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i la funció

$$\Delta T := T^+ - T^- \tag{5.2}$$

és solució de

$$\mathcal{L}_\varepsilon \Delta T = 0. \tag{5.3}$$

Demostració. Sabent que les funcions $T^\pm(u,\tau;\mu,\varepsilon)$ són solució de l'Equació (1.45), només cal fer una resta:

$$\varepsilon^{-1}\partial_\tau T^+ + \frac{\cosh^2 u}{8}\left(\partial_u T^+\right)^2 + \varphi(u)(\mu\sin\tau - 1) = 0$$
$$\varepsilon^{-1}\partial_\tau T^- + \frac{\cosh^2 u}{8}\left(\partial_u T^-\right)^2 + \varphi(u)(\mu\sin\tau - 1) = 0$$

$$\varepsilon^{-1}\partial_\tau \Delta T + \frac{\cosh^2 u}{8}\left(\partial_u T^+ + \partial_u T^-\right)\partial_u \Delta T = 0.$$

Els Teoremes 2.1 i 4.1 ens donen l'analiticitat de les funcions $T^\pm$ a $D^u \cap D^s$. ■

Tenint en compte que, per a $\mu = 0$, $\partial_u T^\pm(u,\tau) = T_0'(u) = 4/\cosh^2 u$ i aleshores l'operador $\mathcal{L}_\varepsilon$ és exactament $\varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_u$, l'objectiu és intentar redreçar $\mathcal{L}_\varepsilon$ per a $\mu \neq 0$ però no necessàriament petit. El resultat principal d'aquest capítol està recollit en el següent Teorema, que serà demostrat a la Secció 5.4 després d'una primera aproximació trobada a la Secció 5.3.

De fet, per a la variable u només ens caldrà un domini que contingui el segment de l'eix imaginari $i]-\pi/2 + c\varepsilon\ln(1/\varepsilon), \pi/2 - c\varepsilon\ln(1/\varepsilon)[$, per tant podem reduir el $D^u \cap D^s$, en concret, considerarem el domini rombe $D \subset (D^u \cap D^s)$ que indiquem a la Figura 5.3 i que sovint ens interessarà separar-lo en la seva part outer $D_o \subset \left(D^u_\gamma \cap D^s_\gamma\right)$ i la seva part inner $D_i \subset (D^u_\varepsilon \cap D^s_\varepsilon)$, que a la vegada podem separar en la zona propera a $i\pi/2$ i la propera a $-i\pi/2$, $D_{i,+}$ i $D_{i,-}$ respectivament.

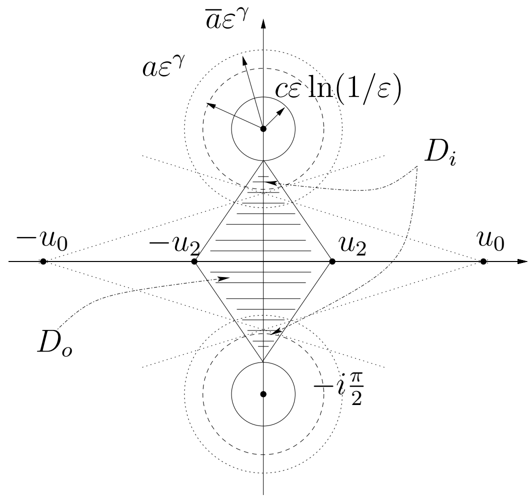


Figura 5.3: Domini $D = D_o \cup D_i \subset (D^u \cap D^s)$, on $D_i = D_{i,+} \cup D_{i,-}$.

Siguin $\tilde{D}^{(1)} \subset \tilde{D} \subset D$ dominis amb la mateixa geometria que D però amb els paràmetres lleugerament canviats. Observem a la Figura 5.3 que $D \cap \mathbb{R} = (-u_2, u_2)$, anàlogament definim $\tilde{u}_2$ i v_2 tals que $\tilde{u}_2 < v_2 < u_2$ i $\tilde{D}^{(1)} \cap \mathbb{R} = (-\tilde{u}_2, \tilde{u}_2)$ i $\tilde{D} \cap \mathbb{R} = (-v_2, v_2)$.

Teorema 5.2. *Existeix* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que, per a qualssevol* $0 < \sigma < \sigma_0$, $0 < \mu \leq \mu_0$, $1/3 < \gamma < 1/2$ *i* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, *existeix* $\mathcal{U}(v, \tau; \mu, \varepsilon)$ *real-analítica a* $\tilde{D} \times \mathbb{T}_\sigma$, *tal que el canvi*

$$(u, \tau) = (v + \mathcal{U}(v, \tau; \mu, \varepsilon), \tau)$$

conjuga l'operador $\mathcal{L}_\varepsilon$ *definit a (5.1) amb el redreçat*

$$L_\varepsilon := \varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_v.$$

A més, existeixen α_u *i* $\nu_0 > 0$ *tals que*

$$\begin{array}{llll} \forall (v,\tau) \in \tilde{D}_o \times \mathbb{T}_\sigma, & v + \mathcal{U}(v,\tau;\mu,\varepsilon) \in D_o & i & |\partial_v^j \mathcal{U}(v,\tau;\mu,\varepsilon)| \leq \alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0 - j\gamma}, \\ \forall (v,\tau) \in \tilde{D}_{i,\pm} \times \mathbb{T}_\sigma, & v + \mathcal{U}(v,\tau;\mu,\varepsilon) \in D_{i,\pm} & i & |\partial_v^j \mathcal{U}(v,\tau;\mu,\varepsilon)| \leq \alpha_u \varepsilon^{1-j}(\ln(1/\varepsilon))^{-1-j}. \end{array}$$

Gràcies a aquest canvi, la Proposició 5.1 ens permet assegurar que $\Delta T(v+\mathcal{U}(v, \tau; \mu, \varepsilon), \tau; \mu, \varepsilon)$ s'anul·la sota l'efecte de l'operador L_ε, fet que serà el punt de partida del capítol següent, on veurem que, en aquesta situació, $\Delta T(u, \tau; \mu, \varepsilon)$ està determinada per la seva restricció, pel que fa a la variable u, a un interval vertical de $\Re e\, u = 0$.

També serà necessari conèixer el canvi invers del donat al Teorema 5.2, però només ens caldrà tenir-lo a un interval de $\mathbb{R}$, per tant, ens centrarem a la zona outer, en concret a un domini $\tilde{D}^{(1)}_o \subset \tilde{D}_o$ del qual usarem més endavant que $\tilde{D}^{(1)}_o \cap \mathbb{R} = (-\tilde{u}_2, \tilde{u}_2)$.

Teorema 5.3. *Existeix* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que, per a qualssevol* $0 < \sigma < \sigma_0$, $0 < \mu \leq \mu_0$, $1/3 < \gamma < 1/2$ *i* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, *existeix* $\mathcal{V}(u, \tau; \mu, \varepsilon)$ *real-analítica a* $\tilde{D}_o^{(1)} \times \mathbb{T}_\sigma$, *tal que*

$$(v, \tau) = (u + \mathcal{V}(u, \tau; \mu, \varepsilon), \tau)$$

és el canvi invers del donat al Teorema 5.2.

A més, existeixen α_v *i* $\nu_0 > 0$ *tals que*

$$\forall (u, \tau) \in \tilde{D}_o^{(1)} \times \mathbb{T}_\sigma, \quad u + \mathcal{V}(u, \tau; \mu, \varepsilon) \in \tilde{D}_o \quad i \quad |\partial_v^j \mathcal{V}(u, \tau; \mu, \varepsilon)| \leq \alpha_v \varepsilon^{1+\nu_0 - j\gamma}.$$

Tot aquest capítol està dedicat a la demostració d'aquests dos teoremes.

Igual que ja vam fer al Capítol 2, quan ens convingui usarem les funcions

$$Q^\pm = \mu^{-1}\big(T^\pm - T_0 - \varepsilon T_1\big)$$

definides a (2.4) en lloc de $T^\pm$. També cal recordar que no indicarem la dependència de les funcions respecte els paràmetres μ i ε.

5.2 Dominis de treball i lema de conjugació.

Si ens interessa separar-nos una certa distància suficientment petita de la frontera del domini, podem considerar el nou domini expressat de la mateixa manera que l'inicial, però canviant alguns paràmetres. Aquesta operació haurem de fer-la tant a la zona outer com a la zona inner. Vegem quina notació usarem i quina és la manera de passar d'un domini a l'altre.

Al Teorema 5.2 arribarem a D després de diferents ampliacions, per tant, haurem de començar en un domini reduït $D^{(i)}$. Considerem

$$D_\gamma^{u(2)} \subset D_\gamma^{u(1)} \subset D_\gamma^{u(0)} = D_\gamma^u, \tag{5.4}$$

amb les mateixes constants ε, γ i β_0 que D_γ^u però fent els següents canvis als paràmetres a, u_0 i u_1:

$$\begin{aligned} a^{(i)} &= a^{(i-1)} + (h_i - h_{i-1})a = (1 + h_i)a \quad \text{per a} \quad 0 \leq h_{i-1} < h_i < 1, \\ u_0^{(i)} &= u_0^{(i-1)} - \frac{(h_i - h_{i-1})a\varepsilon^\gamma}{\sin\beta_0}, \\ u_1^{(i)} &= u_1^{(i-1)} - \frac{(h_i - h_{i-1})a\varepsilon^\gamma}{\sin\beta_0}. \end{aligned}$$

Aquests canvis permeten assegurar que

$$\forall u \in D_\gamma^{u(i)}, \quad d\left(u, \partial D_\gamma^{u(i-1)}\right) > (h_i - h_{i-1})a\varepsilon^\gamma,$$

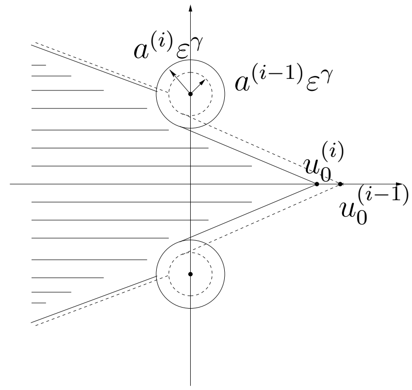


Figura 5.4: Dominis $D_\gamma^{u(i)} \subset D_\gamma^{u(i-1)}$.

que també podem expressar com que

$$\{u \in \mathbb{C} \,|\, d\left(u, D_\gamma^{u(i)}\right) < (h_i - h_{i-1})a\varepsilon^\gamma\} \subset D_\gamma^{u(i-1)}.$$

$\|\cdot\|^{(i)}$ serà la notació per a qualsevol norma $\|\cdot\|$ sobre funcions amb el domini $D_\gamma^{u(i)}$ per a la variable u.

Tal i com acabem de fer per a D_γ^u, també ens interessarà reduir inicialment el domini $D_{\varepsilon,+}^u$. Definim ara per a la variable u els dominis $D_{\varepsilon,+}^{u(i)}$ per a $0 \le h_i < 1$:

$$D_{\varepsilon,+}^{u(i)} := \{u \in \mathbb{C};\, |u - i\pi/2| < (1-h_i)\overline{a}\varepsilon^\gamma,\, \Im m\, u < \pi/2 - (1+h_i)c\varepsilon\ln(1/\varepsilon),\, |\arg(u - i\pi/2)| > \beta_1^{(i)}\},$$

on recordem que, per passar de $D_{\varepsilon,+}^{u(i-1)}$ a $D_{\varepsilon,+}^{u(i)}$ amb un canvi ε^ω-proper a la identitat (per a $\omega > 1$), l'angle $\beta_1^{(i)}$ s'autoregula de manera que l'última condició del domini es compleixi automàticament. Observem que, si $h_{i-1} < h_i$, aleshores $D_{\varepsilon,+}^{u(i)} \subset D_{\varepsilon,+}^{u(i-1)}$.

Si es pren $\overline{a}$ prou gran, els dominis $D_\gamma^{u(i)}$ i $D_{\varepsilon,+}^{u(i)}$ se segueixen solapant després d'un nombre finit de reduccions.

El següent lema ens caracteritza el tipus de canvi que estem buscant i serà usat en diverses ocasions:

Lema 5.4. *Per a qualsevol $A(u,\tau)$, si la funció $g(v,\tau)$ és una solució de l'equació*

$$L_\varepsilon g(v,\tau) = A(g(v,\tau),\tau),$$

el canvi de variables $u = g(v,\tau)$ conjuga l'operador

$$\varepsilon^{-1}\partial_\tau + A(u,\tau)\partial_u$$

amb el redreçat $L_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_v$.

Demostració. Donada qualsevol funció $h(u,\tau)$, sigui $\hat{h}(v,\tau)=h(g(v,\tau),\tau)$. Aleshores,

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1}\partial_\tau\hat{h}(v,\tau) &= \varepsilon^{-1}\partial_u h(g(v,\tau),\tau)\cdot\partial_\tau g(v,\tau)+\varepsilon^{-1}\partial_\tau h(g(v,\tau),\tau),\\ \partial_v\hat{h}(v,\tau) &= \partial_u h(g(v,\tau),\tau)\cdot\partial_v g(v,\tau).\end{aligned}$$

Per tant, sumant les dues expressions i reagrupant termes,

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1}\partial_\tau\hat{h}(v,\tau)+\partial_v\hat{h}(v,\tau) &= \varepsilon^{-1}\partial_\tau h\big(g(v,\tau),\tau\big)+\\ &+ \left[\varepsilon^{-1}\partial_\tau g(v,\tau)+\partial_v g(v,\tau)\right]\cdot\partial_u h\big(g(v,\tau),\tau\big)=\\ &= \varepsilon^{-1}\partial_\tau h\big(g(v,\tau),\tau\big)+A(g(v,\tau),\tau)\cdot\partial_u h\big(g(v,\tau),\tau\big).\end{aligned}$$

Així doncs, h és solució de

$$\varepsilon^{-1}\partial_\tau h+A(u,\tau)\partial_u h=0$$

si i només si $\hat{h}$ és solució de $L_\varepsilon\hat{h}=0$. ∎

Les funcions que faran el paper de $A(u,\tau)$ seran analítiques i 2π-periòdiques en τ.

5.3 Primera aproximació del canvi $\mathcal{U}$.

L'operador $\mathcal{L}_\varepsilon$ pot separar-se en una primera part

$$\mathcal{L}_\varepsilon^- := \varepsilon^{-1}\partial_\tau+\left[\frac{\cosh^2 u}{4}\,\partial_u T^-\right]\partial_u, \tag{5.5}$$

on no intervé T^+ i una segona part on només intervé la diferència entre T^+ i T^-

$$\left[\frac{\cosh^2 u}{8}\,\left(\partial_u T^+-\partial_u T^-\right)\right]\partial_u,$$

o sigui que

$$\mathcal{L}_\varepsilon=\mathcal{L}_\varepsilon^-+\left[\frac{\cosh^2 u}{8}\left(\partial_u T^+-\partial_u T^-\right)\right]\partial_u. \tag{5.6}$$

Per altra banda, usant la funció Q^- definida a (2.4), podem escriure:

$$\partial_u T^-(u,\tau)=T_0'(u)+\varepsilon\partial_u T_1(u,\tau)+\mu\partial_u Q^-(u,\tau)=\frac{4}{\cosh^2 u}-\varepsilon\mu 4\frac{\tanh u}{\cosh^2 u}\cos\tau+\mu\partial_u Q^-(u,\tau)$$

i aleshores l'operador $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ passa a

$$\mathcal{L}_\varepsilon^-=\varepsilon^{-1}\partial_\tau+\left[1-\varepsilon\mu\tanh u\cos\tau+\frac{\cosh^2 u}{4}\,\mu\partial_u Q^-\right]\partial_u. \tag{5.7}$$

Però, del Teorema 2.1 podem deduir que a $D_\gamma^u\times\mathbb{T}_{\sigma_0}$

$$1-\varepsilon\mu\tanh u\cos\tau+\frac{\cosh^2 u}{4}\,\mu\partial_u Q^-=1+O(\mu\varepsilon^{1-\gamma})$$

i

$$\cosh^2 u\left(\partial_u T^+-\partial_u T^-\right)=O(\mu\varepsilon^{1-\gamma});$$

per tant, de (5.7),

$$\mathcal{L}_\varepsilon^- = \varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_u + O(\mu\varepsilon^{1-\gamma})\partial_u$$

i de (5.6),

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon^- + O(\mu\varepsilon^{1-\gamma})\partial_u.$$

Així doncs, sembla lògic fer un primer pas de $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ a $L_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_u$ a tot el domini $\tilde{D}$ i després usar-lo, com a primera aproximació, per trobar a la Secció 5.4 el canvi final de $\mathcal{L}_\varepsilon$ a L_ε. El primer canvi s'obté a les següents dues subseccions i la notació dels dominis està l'explicada a (5.4).

Segons el Lema 5.4, el canvi $g(v,\tau)$ que busquem és solució de l'equació en derivades parcials

$$\left(\varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_v\right)g(v,\tau) = A(g(v,\tau),\tau),$$

amb $A(u,\tau) = \frac{\cosh^2 u}{4}\,\partial_u T^-(u,\tau)$. Si uséssim el mètode de les corbes característiques explicat al Capítol 4, hauríem de buscar funcions

$$v(r,s),\ \tau(r,s)\ \text{ i }\ \overline{g}(r,s) = g(v(r,s),\tau(r,s)) \tag{5.8}$$

solucions del sistema d'equacions diferencials ordinàries:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_r v = 1 \\ \partial_r \tau = \varepsilon^{-1} \\ \partial_r \overline{g} = A(\overline{g}(r,s),\tau(r,s)) \end{array}\right. \tag{5.9}$$

amb condicions inicials qualssevol

$$\left\{\begin{array}{l} v(0,s) = v_0 \\ \tau(0,s) = s \\ \overline{g}(0,s) = g(v_0,s) \end{array}\right.$$

Està clar que $v(r,s) = v_0 + r$ i que $\tau(r,s) = s + \varepsilon^{-1}r$, per tant,

$$\overline{g}(r,s) = g(v_0 + r, s + \varepsilon^{-1}r)$$

però, invertint, també tenim que $r = v - v_0$ i $s = \tau + \varepsilon^{-1}(v_0 - v)$, la qual cosa porta a:

$$g(v,\tau) = \overline{g}(v - v_0, \tau + \varepsilon^{-1}(v_0 - v)).$$

Finalment, de la tercera equació de (5.9) obtindríem:

$$\overline{g}(r,s) = \overline{g}(0,s) + \int_0^r A(\overline{g}(\xi,s), s + \varepsilon^{-1}\xi)\,d\xi,$$

o sigui que, en variables (v,τ) tenim:

$$g(v,\tau) = g(v_0,\tau) + \int_0^{v-v_0} A(g(v_0+\xi, \tau + \varepsilon^{-1}(v_0 - v) + \varepsilon^{-1}\xi), \tau + \varepsilon^{-1}(v_0 - v) + \varepsilon^{-1}\xi)\,d\xi,$$

i fent el canvi $t = v_0 - v + \xi$,

$$g(v,\tau) = g(v_0,\tau) + \int_{v_0 - v}^{0} A(g(v+t, \tau + \varepsilon^{-1}t), \tau + \varepsilon^{-1}t)\,dt. \tag{5.10}$$

En el cas que això tingui sentit, buscarem els canvis tals que $\lim_{v\to-\infty} g(v,\tau) = 0$, per tant, la fórmula (5.10) quedarà:

$$g(v,\tau) = \int_{-\infty}^{0} A(g(v+t,\tau+\varepsilon^{-1}t),\tau+\varepsilon^{-1}t)\,dt,$$

problema que interpretarem com la resolució d'un punt fix.

Comencem situant-nos al domini $D_\gamma^{u(2)}$ per trobar, a la Proposició 5.8, una primera expressió analítica del canvi; després, a través de la zona matching, farem la seva continuació analítica a $D_\varepsilon^{u(2)}$ per acabar tenint-lo definit a tot $D^{u(2)}$ tal i com s'indicarà al Teorema 5.14.

5.3.1 El canvi a la zona outer.

Ens interessa reduir el domini inicial D_γ^u a $D_\gamma^{u(2)}$ per tal que amb les dues ampliacions necessàries pel procés ens quedem finalment a D_γ^u. Definim l'àlgebra de Banach:

$$\mathcal{X}_{\sigma_0}^{(i)} := \{g_2(w,\tau) \mid g_2 : D_\gamma^{u(i)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ real-analítica i } \|g_2\|_\infty^{(i)} < \infty\}, \tag{5.11}$$

on la bola de radi r la notarem per $\mathcal{B}(r) := \{g_2 \in \mathcal{X}_{\sigma_0}^{(i)} \text{ tq } \|g_2\|_\infty^{(i)} \le r\}$.

Lema 5.5. *Siguin $c_0 > 0$, $f_2(\tau)$ la funció obtinguda al Lema 2.11, $g_0 = 1 + \mu < f_2 > \in \mathbb{R}$ i $g_1(\tau)$ tal que $\varepsilon^{-1}g_1'(\tau) = \mu f_2(\tau) - \mu < f_2 >$ i $< g_1 >= 0$. Aleshores, $\exists\, 0 < h_1 < 1$ i $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tals que, per a qualssevol $0 < \mu \le \mu_0$, $0 \le \gamma < 2/3$, $(w,\tau) \in D_\gamma^{u(1)}$, $g_2 \in \mathcal{B}\big(c_0\mu\varepsilon^{2-2\gamma}\big) \subset \mathcal{X}_{\sigma_0}^{(1)}$ i $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, es compleix que*

$$g(w,\tau) = g_0 w + g_1(\tau) + g_2(w,\tau) \in D_\gamma^u.$$

Demostració. Per comprovar que si $(w,\tau) \in D_\gamma^{u(1)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i $\|g_2\|_\infty^{(1)} \le c_0\mu\varepsilon^{2-2\gamma}$, aleshores $g(w,\tau) = g_0 w + g_1(\tau) + g_2(w,\tau) \in D_\gamma^u$, usarem l'expressió alternativa d'un domini del tipus D_γ^u que es pot trobar a l'Apèndix A.2:

$$\begin{aligned} D_\gamma^u =& \{w \in \mathbb{C} \mid |\Im m\, w| < \tan\beta_0(u_0 - \Re e\, w)\} \cup \\ & \cup \{w \in \mathbb{C} \mid \Re e\, w < -a\varepsilon^\gamma \sin\beta_0,\ \tan\beta_0(u_0 - \Re e\, w) < |\Im m\, w| < \tan\beta_0(u_1 - \Re e\, w), \\ & \quad |w \pm i\pi/2| > a\varepsilon^\gamma\}. \end{aligned}$$

Per a la primera part del domini, demostrarem

$$|\Im m(g(w,\tau))| < \tan\beta_0\,(u_0 - \Re e(g(w,\tau))) \tag{5.12}$$

i per a la segona part, només demostrarem

$$|g(w,\tau) \pm i\pi/2| > a\varepsilon^\gamma; \tag{5.13}$$

la resta de condicions es demostrarien de manera similar a la (5.12).

Recordem que a la definició dels dominis (5.4) es va establir la relació entre els paràmetres dels dos dominis: $u_0^{(1)} = u_0 - h_1 a\varepsilon^\gamma/\sin\beta_0$.

Segons les definicions de g_0 i $g_1(\tau)$, i pel Lema 2.11, si $g_2 \in \mathcal{B}(c_0\mu\varepsilon^{2-2\gamma})$ i $\mu\varepsilon^2$ és suficientment petit, llavors

$$\begin{array}{c} g_0 \geq 1-\alpha_1\mu\varepsilon^2 \geq 1/2, \\ |g_0| \leq 1+\mu|<f_2>| \Rightarrow 1-|g_0| \geq -\alpha_1\mu\varepsilon^2 \\ |g_0-1| \leq \alpha_1\mu\varepsilon^2, \\ |g_1(\tau)+g_2(w,\tau)| \leq \alpha_1\mu\varepsilon^3 + c_0\mu\varepsilon^{2-2\gamma} \leq (\alpha_1+c_0)\mu\varepsilon^{2-2\gamma}. \end{array} \tag{5.14}$$

Usant aquestes desigualtats i que, si $w \in D_\gamma^{u(1)}$ es compleix que

$$|\Im m\, w| < \tan\beta_0(u_0^{(1)} - \Re e\, w) \qquad \text{i} \qquad |w \pm i\pi/2| > (1+h_1)a\varepsilon^\gamma,$$

podem arribar a les condicions (5.12) i (5.13).

Comencem per la (5.12):

$$\begin{aligned} |\Im m(g(w,\tau))| &\leq g_0|\Im m\, w| + |\Im m(g_1(\tau)+g_2(w,\tau))| < \\ &< g_0\tan\beta_0(u_0^{(1)} - \Re e\, w) + (\alpha_1+c_0)\mu\varepsilon^{2-2\gamma} = \\ &= \tan\beta_0 u_0^{(1)} + (g_0-1)\tan\beta_0 u_0^{(1)} - g_0\tan\beta_0\,\Re e\, w + (\alpha_1+c_0)\mu\varepsilon^{2-2\gamma} \leq \\ &\leq \tan\beta_0\left(u_0 - \frac{h_1 a\varepsilon^\gamma}{\sin\beta_0}\right) + (g_0-1)\tan\beta_0 u_0^{(1)} - \tan\beta_0\,\Re e(g_0 w) + \\ &\quad +(\alpha_1+c_0)\mu\varepsilon^{2-2\gamma} = \\ &= \tan\beta_0 u_0 - \tan\beta_0\frac{h_1 a\varepsilon^\gamma}{\sin\beta_0} + (g_0-1)\tan\beta_0 u_0^{(1)} - \\ &\quad -\tan\beta_0\,\Re e(g(w,\tau)) + \tan\beta_0\,\Re e(g_1(\tau)+g_2(w,\tau)) + (\alpha_1+c_0)\mu\varepsilon^{2-2\gamma} \end{aligned}$$

i reagrupant termes,

$$\begin{aligned} |\Im m(g(w,\tau))| &\leq \tan\beta_0\,(u_0 - \Re e(g(w,\tau))) + \\ &+\tan\beta_0\left(-\frac{h_1 a\varepsilon^\gamma}{\sin\beta_0} + (g_0-1)u_0^{(1)} + \Re e(g_1(\tau)+g_2(w,\tau)) + \frac{\alpha_1+c_0}{\tan\beta_0}\mu\varepsilon^{2-2\gamma}\right) \leq \\ &\leq \tan\beta_0\,(u_0 - \Re e(g(w,\tau))) + \\ &+\tan\beta_0\left(-\frac{h_1 a\varepsilon^\gamma}{\sin\beta_0} + \alpha_1\mu\varepsilon^2 u_0^{(1)} + (\alpha_1+c_0)\left(1+\frac{1}{\tan\beta_0}\right)\mu\varepsilon^{2-2\gamma}\right) \leq \\ &\leq \tan\beta_0\,(u_0 - \Re e(g(w,\tau))) + \\ &+\tan\beta_0\varepsilon^\gamma\left(-\frac{h_1 a}{\sin\beta_0} + \left[\alpha_1\varepsilon^{2\gamma}u_0^{(1)} + (\alpha_1+c_0)\left(1+\frac{1}{\tan\beta_0}\right)\right]\mu\varepsilon^{2-3\gamma}\right). \end{aligned}$$

Ara bé, si $\mu\varepsilon^{2-3\gamma}$ és prou petit per tal que

$$\left[\alpha_1 u_0^{(1)} + (\alpha_1+c_0)\left(1+\frac{1}{\tan\beta_0}\right)\right]\mu\varepsilon^{2-3\gamma} < \frac{h_1 a}{\sin\beta_0},$$

aleshores

$$|\Im m(g(w,\tau))| < \tan\beta_0\,(u_0 - \Re e(g(w,\tau))).$$

Pel que fa a la condició (5.13), farem servir de moment la 3a i 4a desigualtats de (5.14):

$$\begin{aligned} |g(w,\tau) \pm i\pi/2| &\geq |g_0|\cdot|w \pm i\pi/2| - |g_0-1|\pi/2 - (\alpha_1+c_0)\mu\varepsilon^{2-2\gamma} > \\ &> |g_0|(1+h_1)a\varepsilon^\gamma - \alpha_1\mu\varepsilon^2\pi/2 - (\alpha_1+c_0)\mu\varepsilon^{2-2\gamma} = \\ &= a\varepsilon^\gamma + \left[|g_0|h_1 - \left(1-|g_0| + \frac{\alpha_1\pi/2}{a}\mu\varepsilon^{2-\gamma} + \frac{\alpha_1+c_0}{a}\mu\varepsilon^{2-3\gamma}\right)\right]a\varepsilon^\gamma \end{aligned}$$

i, si $\mu\varepsilon^{2-3\gamma}$ és prou petit per tal que, per exemple,

$$\alpha_1\mu\varepsilon^2 + \frac{\alpha_1\pi/2}{a}\,\mu\varepsilon^{2-\gamma} + \frac{\alpha_1 + c_0}{a}\,\mu\varepsilon^{2-3\gamma} < 1/4,$$

aleshores, per la 1a i 2a desigualtats de (5.14), existeix $1/2 < h_1 < 1$ tal que

$$\frac{1}{|g_0|}\left(1 - |g_0| + \frac{\alpha_1\pi/2}{a}\mu\varepsilon^{2-\gamma} + \frac{\alpha_1 + c_0}{a}\mu\varepsilon^{2-3\gamma}\right) < 2\frac{1}{4} < h_1$$

i finalment,

$$|g(w,\tau) \pm i\pi/2| > a\varepsilon^\gamma. \qquad \blacksquare$$

Lema 5.6. *Sigui $h(w,\tau)$ analítica a $D^{u(1)}_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i tal que $\exists\, s > 0$ amb $\|h \cdot e^{-sw}\|^{(1)}_\infty < \infty$. L'operador $\mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon$ definit a (2.11) com*

$$\mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon(h)(w,\tau) = \int_{\mathbb{R}^-} h(w+t, \tau + \varepsilon^{-1}t)\,dt$$

té les següents propietats:

1. *és lineal.*
2. *$L_\varepsilon \circ \mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon = Id$.*
3. *$\|\mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon(h)\|^{(1)}_\infty \leq \dfrac{1}{s}\,e^{su^{(1)}_0}\,\|h \cdot e^{-sw}\|^{(1)}_\infty$.*
4. *si $h \in \mathcal{X}^{(1)}_{\sigma_0}$, $\mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon(h)$ també ho és.*

Demostració. La demostració del primer apartat és evident i la del segon anàloga a la del Lema 2.8. Pel que fa al tercer apartat,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon(h)(w,\tau)| &= \left|\int_{-\infty}^0 h(w+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\cdot e^{-s(w+t)}\cdot e^{s(w+t)}\,dt\right| \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^0 \left|h(w+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\cdot e^{-s(w+t)}\right|\cdot e^{s(\Re e\, w+t)}\,dt \leq \\
&\leq \|h\cdot e^{-sw}\|^{(1)}_\infty e^{s\,\Re e\, w}\int_{-\infty}^0 e^{st}\,dt \leq \|h\cdot e^{-sw}\|^{(1)}_\infty e^{s\,\Re e\, w}\frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Si $w \in D^{u(1)}_\gamma$, aleshores $\Re e\, w < u^{(1)}_0$ i arribem al resultat de l'enunciat.

Pel que fa a l'últim apartat, només ens queda comprovar que $\mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon(h)$ és real analítica. Usant que les funcions reals-analítiques estan caracteritzades pel Principi de Reflexió en un domini complex que contingui un interval de la recta real i que sigui simètric respecte l'eix real, és immediat veure que $\mathcal{G}^{\rm o}_\varepsilon(h)$ ho compleix suposant-ho cert per a h. $\blacksquare$

Lema 5.7. *Siguin $c_0 > 0$, $f_2(\tau)$ la funció obtinguda al Lema 2.11, $g_0 = 1 + \mu < f_2 >\in \mathbb{R}$ i $g_1(\tau)$ tal que $\varepsilon^{-1} g_1'(\tau) = \mu f_2(\tau) - \mu < f_2 >$ i $< g_1 >= 0$. Aleshores, existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \mu \le \mu_0$, $0 \le \gamma < 1/2$ i $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, l'operador*

$$G(g_2, w, \tau) := \frac{1}{4}\cosh^2 u\, \mu \partial_u Q^-(u,\tau) - \varepsilon\mu \tanh u \cos\tau - \mu f_2(\tau)\Big|_{u = g_0 w + g_1(\tau) + g_2(w,\tau)}$$

definit $\forall\, g_2 \in \mathcal{B}\big(c_0 \mu \varepsilon^{2-2\gamma}\big) \subset \mathcal{X}_{\sigma_0}^{(1)}$ i $\forall\,(w,\tau) \in D_\gamma^{u(1)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$, té les següents propietats:

1. *$G(g_2, \cdot, \cdot) \in \mathcal{X}_{\sigma_0}^{(1)}$.*
2. *Sigui $\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}$ l'operador definit a (2.11), aleshores $\exists K_1, K_2$ tals que*
   a. $\|\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}\big(G(g_2,\cdot,\cdot)\big)\|_\infty^{(1)} \le \frac{1}{2} K_1 \mu \varepsilon^{2-2\gamma}$.
   b. $\|\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}\big(G(g_2,\cdot,\cdot) - G(g_2',\cdot,\cdot)\big)\|_\infty^{(1)} \le K_2 \mu \varepsilon^{1-2\gamma} \|g_2 - g_2'\|_\infty^{(1)}$.

Demostració. En el decurs de la demostració usarem el Lema 5.5, que ens permet assegurar que, sempre que $g_2 \in \mathcal{B}(c_0 \mu\varepsilon^{2-2\gamma}) \subset \mathcal{X}_{\sigma_0}^{(1)}$ i $(w,\tau) \in D_\gamma^{u(1)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$,

$$g(w,\tau) = g_0 w + g_1(\tau) + g_2(w,\tau) \in D_\gamma^u.$$

Si tornem a usar la notació

$$\mu Q^-(u,\tau) = T^-(u,\tau) - T_0(u) - \varepsilon T_1(u,\tau),$$

els Teoremes 2.1 i 2.3 asseguren respectivament que, si $\mu\varepsilon^{1-\gamma}$ és prou petit,

$$\forall (u,\tau) \in D_\gamma^u \times \mathbb{T}_{\sigma_0}, \quad \left|\frac{1}{4}\cosh^2 u\, \mu\partial_u Q^-(u,\tau)\right| \le \frac{1}{4} b_0 \mu \varepsilon^{2-2\gamma}, \tag{5.15}$$

i, si $\mu\varepsilon$ és prou petit,

$$\forall (u,\tau) \in \{\Re e\, u < -U\} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}, \quad \left|\frac{1}{4}\cosh^2 u\, \mu\partial_u Q^-(u,\tau) - \mu f_2(\tau)\right| \le k_1 \mu\varepsilon^2 e^{2\,\Re e\, u} \tag{5.16}$$

on $U > 0$ prou gran.

Si $g_2 \in \mathcal{X}_{\sigma_0}^{(1)}$, tot el que intervé a la definició de $G(g_2, w, \tau)$ és real-analític i 2π-periòdic en τ. El Lema 5.5 enuncia que si $g_2 \in \mathcal{B}\big(c_0\mu\varepsilon^{2-2\gamma}\big)$, aleshores $g_0 w + g_1(\tau) + g_2(w,\tau) \in D_\gamma^u$; podem doncs usar la informació del Lema 2.11 i l'Apartat 2 del Lema 2.4: si $\mu\varepsilon^{1-\gamma}$ és prou petit,

$$\forall \tau \in \mathbb{T}_{\sigma_0}, \quad |\mu f_2(\tau)| \le \mu\alpha_1 \varepsilon^2,$$

$$\forall (u,\tau) \in D_\gamma^u \times \mathbb{T}_{\sigma_0}, \quad |\varepsilon\mu \tanh u \cos\tau| \le \varepsilon\mu C \varepsilon^{-\gamma} e^{\sigma_0};$$

que, juntament amb (5.15), permet arribar a $\|G(g_2,\cdot,\cdot)\|_\infty^{(1)} < \infty$.

Per calcular

$$\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}\big(G(g_2,w,\tau)\big) = \int_{\mathbb{R}^-} G(g_2, w+t, \tau + \varepsilon^{-1}t)\, dt$$

més còmodament, separem $G(g_2, w, \tau)$ en dues parts més senzilles:

$$\begin{aligned} G_1(g_2, w, \tau) &:= \frac{1}{4}\cosh^2\big(g_0 w + g_1(\tau) + g_2(w,\tau)\big)\,\mu\partial_u Q^-\big(g_0 w + g_1(\tau) + g_2(w,\tau),\tau\big) - \mu f_2(\tau),\\ G_2(g_2, w, \tau) &:= \varepsilon\mu\tanh\big(g_0 w + g_1(\tau) + g_2(w,\tau)\big)\cos\tau; \end{aligned}$$

que treballarem de manera diferent per les seves particulars característiques.

Segons les definicions de g_0 i $g_1(\tau)$, i pel Lema 2.11, si $g_2 \in \mathcal{B}(c_0\mu\varepsilon^{2-2\gamma})$ i $\mu\varepsilon^2$ és suficientment petit,

$$\begin{gathered} g_0 \geq 1 - \alpha_1\mu\varepsilon^2 \geq 1/2,\\ \frac{1}{2g_0}\,e^{2g_0u_0} = \frac{1}{2g_0}\,e^{2u_0}(1 + O(\mu\varepsilon^2)) \leq 2e^{2u_0},\\ |g_1(\tau) + g_2(w,\tau)| \leq \alpha_1\mu\varepsilon^3 + c_0\mu\varepsilon^{2-2\gamma} \leq (\alpha_1 + c_0)\mu\varepsilon^{2-2\gamma}, \end{gathered} \tag{5.17}$$

propietats que farem servir sovint en el decurs de la demostració.

De cara a fitar l'operador $\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_{\varepsilon}$, separarem la integral en dues parts: una primera on $\Re e\, g(w,\tau) < -U$ i l'altra on $\Re e\, g(w,\tau) \geq -U$.

Si $w \in D^{u(1)}_{\gamma} \cap \{\Re e\, w < -3U\}$ i $\tau \in \mathbb{T}_{\sigma_0}$, aleshores $g(w,\tau) \in D^u_\gamma \cap \{\Re e\, w < -U\}$. Efectivament: si ε és prou petit,

$$(\alpha_1 + c_0)\mu\varepsilon^{2-2\gamma}/g_0 - U < 0$$

i, per tant, usant la primera i terecera desigualtats de (5.17),

$$\begin{aligned} \Re e\, g(w,\tau) = \Re e\,\big(g_0 w\big) + \Re e\,\big(g_1(\tau) + g_2(w,\tau)\big) &\leq g_0\,\Re e\, w + (\alpha_1 + c_0)\mu\varepsilon^{2-2\gamma} < \\ < g_0\big(-3U + (\alpha_1 + c_0)\mu\varepsilon^{2-2\gamma}/g_0\big) &< -2g_0 U < -U. \end{aligned}$$

Així doncs, gràcies a (5.16), si $w \in D^{u(1)}_{\gamma} \cap \{\Re e\, w < -3U\}$ i $\tau \in \mathbb{T}_{\sigma_0}$,

$$|G_1(g_2, w, \tau)| = \left|\frac{1}{4}\cosh^2 u\,\mu\partial_u Q^-(u,\tau)\Big|_{u=g(w,\tau)} - \mu f_2(\tau)\right| \leq k_1\mu\varepsilon^2 e^{2\,\Re e\, g(w,\tau)},$$

i com que, segons la tercera desigualtat de (5.17),

$$e^{2\,\Re e\, g(w,\tau)} = e^{2g_0\,\Re e\, w} e^{\Re e\,\left(g_1(\tau) + g_2(w,\tau)\right)} = e^{2g_0\,\Re e\, w}\big(1 + O(\mu\varepsilon^{2-2\gamma})\big), \tag{5.18}$$

aleshores, si $w \in D^{u(1)}_{\gamma} \cap \{\Re e\, w < -3U\}$, $\exists \overline{k}_1$ tal que

$$|G_1(g_2, w, \tau)| \leq \overline{k}_1\mu\varepsilon^2 e^{2g_0\,\Re e\, w}.$$

Gràcies a la tercera desigualtat de (5.17), si $\Re e\, g(w,\tau) \geq -U$, aleshores

$$1 < e^{2\,\Re e\, g(w,\tau) + 2U} = e^{2g_0\,\Re e\, w} e^{\Re e\,\left(g_1(\tau) + g_2(w,\tau)\right)} e^{2U} = e^{2g_0\,\Re e\, w}\big(1 + O(\mu\varepsilon^{2-2\gamma})\big)e^{2U}. \tag{5.19}$$

Per altra banda, i sempre que $g(w,\tau) \in D^u_\gamma$, la desigualtat (5.15) i el Lema 2.11 ens permeten assegurar que $\exists k_2$ tal que

$$|G_1(g_2, w, \tau)| \leq \frac{1}{4}\|\mu\partial_u Q^-\|_{2,\sigma_0} + \mu\|f_2\|_\infty \leq \frac{1}{4}\,b_0\mu\varepsilon^{2-2\gamma} + \mu\alpha_1\varepsilon^2 \leq k_2\mu\varepsilon^{2-2\gamma}, \tag{5.20}$$

que segons (5.19), per al domini de w on $\Re e\, g(w,\tau) \geq -U$ pot escriure's com:

$$|G_1(g_2,w,\tau)| \leq \overline{k}_2 \mu\varepsilon^{2-2\gamma} e^{2g_0\,\Re e\, w}.$$

Amb tota aquesta informació, podem aplicar l'Apartat 3 del Lema 5.6 amb $s = 2g_0 > 0$, les desigualtats de (5.17) i les fites de $G_1(g_2,\cdot,\cdot)$ trobades:

$$\left\|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(G_1(g_2,\cdot,\cdot)\big)\right\|^{(1)}_\infty \leq \frac{1}{2g_0}\, e^{2g_0 u_0^{(1)}} \|G_1(g_2,\cdot,\cdot)\cdot e^{-2g_0 w}\|^{(1)}_\infty \leq 2e^{2u_0^{(1)}} \text{màx}\left\{\overline{\mathrm{k}}_1, \overline{\mathrm{k}}_2\right\}\mu\varepsilon^{2-2\gamma}. \quad (5.21)$$

Pel que fa a $G_2(g_2,w,\tau)$, com que el tenim de manera explícita, usarem el Teorema del Valor Mitjà:

$$\tanh\big(g_0 w + g_1(\tau) + g_2(w,\tau)\big) = \tanh\big(g_0 w\big) + \frac{1}{\cosh^2\big(g_\delta(w,\tau)\big)}\big(g_1(\tau) + g_2(w,\tau)\big)$$

on $g_\delta(w,\tau) = g_0 w + \delta g_1(\tau) + \delta g_2(w,\tau)$ per a un cert $\delta \in (0,1)$. Així doncs, tenim $\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(G_2(g_2,w,\tau)\big)$ separada en dues parts. Per calcular-ne la primera:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(\varepsilon\mu\tanh(g_0 w)\cos\tau\big) &= \varepsilon\mu \int_{\mathbb{R}^-} \tanh\big(g_0(w+t)\big)\cos(\tau + \varepsilon^{-1}t)\,dt = \\ &= \varepsilon\mu \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^-} \tanh\big(g_0(w+t)\big)\Big(e^{i\tau}e^{i\varepsilon^{-1}t} + e^{-i\tau}e^{-i\varepsilon^{-1}t}\Big)\,dt \end{aligned}$$

farem un canvi de camins d'integració, passant de $\mathbb{R}^-$ a les semirrectes d'inclinació $\mp\beta_0/2$. Tenint en compte les següents propietats:

$\forall\,\tau \in \mathbb{T}_{\sigma_0}, \quad |e^{\pm i\tau}| \leq e^{\sigma_0}$,
pel Lema 2.4: $\forall\,u \in D^u_\gamma, \quad |\tanh u| \leq C\varepsilon^{-\gamma}$,
$\left|e^{\pm i\varepsilon^{-1}se^{\mp\beta_0/2}}\right| = e^{\varepsilon^{-1}s\sin(\beta_0/2)}$,

i que, usant el Lema 5.5, $g_0(w+t) \in D^u_\gamma$, arribem a

$$\left|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(\varepsilon\mu\tanh(g_0 w)\cos\tau\big)\right| \leq \varepsilon\mu e^{\sigma_0} C\varepsilon^{-\gamma}\int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon^{-1}s\sin(\beta_0/2)}\,ds = \varepsilon^{2-\gamma}\mu\frac{e^{\sigma_0}C}{\sin(\beta_0/2)}. \quad (5.22)$$

Per al segon terme

$$\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\left(\varepsilon\mu\frac{g_1(\tau) + g_2(w,\tau)}{\cosh^2\big(g_\delta(w,\tau)\big)}\cos\tau\right), \quad (5.23)$$

on la funció $\cosh^{-2} u$ l'haurem de tractar diferent segons estiguem prop o lluny del pol $i\pi/2$. Segons el Lema 5.5, $g_\delta(w+t,\tau+\varepsilon^{-1}t) = g_0\cdot(w+t) + O(\mu\varepsilon^{2-2\gamma}) \in D^u_\gamma$ amb $g_0 = 1 + O(\mu\varepsilon^2)$, d'on podem assegurar que existeix un $t_0 \leq 0$ tal que $\forall w \in D^{u(1)}_\gamma$ i $\forall t \leq t_0$ es té $\Re e\,\big(g_\delta(w+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\big) \leq -U$; per a algunes w, tindrem el cas que si $\forall t > t_0$, aleshores $\Re e\,\big(g_\delta(w+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\big) > -U$. De les dues fites següents, farem servir la que convingui a $u \in D^u_\gamma$ segons sigui el cas:

$$\begin{aligned} &\text{si } \ \Re e\, u \leq -U < 0, \quad |\cosh u|^{-1} \leq \frac{2}{1-e^{-2U}}e^{\Re e\, u}, \\ &\text{si } \ -U < \Re e\, u < u_0, \quad |\cosh u|^{-1} \leq k_2|u - i\pi/2|^{-1} \leq k_2 a^{-1}\varepsilon^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Per als altres factors que intervenen a (5.23), també en tenim fites: com que $\tau+\varepsilon^{-1}t \in \mathbb{T}_{\sigma_0}$, aleshores $|\cos(\tau+\varepsilon^{-1}t)| \le e^{\sigma_0}$, i per a $g_1(\tau)+g_2(w,\tau)$ usarem la tercera desigualtat de (5.17).

Així doncs,

$$\left|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\left(\varepsilon\mu\frac{g_1(\tau)+g_2(w,\tau)}{\cosh^2\big(g_\delta(w,\tau)\big)}\,\cos\tau\right)\right| \le \varepsilon\mu(\alpha_1+c_0)\mu\varepsilon^{2-2\gamma}e^{\sigma_0}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{|\cosh^2\big(g_\delta(w+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\big)|}\,dt \le$$
$$\le (\alpha_1+c_0)\mu^2\varepsilon^{3-2\gamma}e^{\sigma_0}\left(\int_{-\infty}^{t_0}\frac{4}{(1-e^{-2U})^2}\,e^{2\,\Re e\,\big(g_\delta(w+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\big)}\,dt+\int_{t_0}^{0}k_2^2a^{-2}\varepsilon^{-2\gamma}\,dt\right). \tag{5.24}$$

Com que ja hem vist que $\Re e\,\big(g_\delta(w+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\big) < -U$ per a $t<t_0$, la primera integral està fitada; per tant, la segona integral és la que marca la mida d'aquest terme, $O(\varepsilon^{3-4\gamma})$, amb la qual cosa, junt amb (5.22), podem establir la següent fórmula: si $0<\mu\le\mu_0$, per a una certa constant C_1,

$$\|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(G_2(g_2,\cdot,\cdot)\big)\|^{(1)}_\infty \le C_1\mu\big(\varepsilon^{2-\gamma}+\varepsilon^{3-4\gamma}\big). \tag{5.25}$$

Així doncs, segons el resultats (5.21) i (5.25) i que $0\le\gamma<1/2$, $\exists K_1$ tal que:

$$\|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(G(g_2,\cdot,\cdot)\big)\|^{(1)}_\infty \le \|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(G_1(g_2,\cdot,\cdot)\big)\|^{(1)}_\infty + \|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(G_2(g_2,\cdot,\cdot)\big)\|^{(1)}_\infty \le \frac{1}{2}\,K_1\mu\varepsilon^{2-2\gamma}.$$

Pel que fa a les diferències $G_i(g_2,w,\tau)-G_i(g_2',w,\tau)$, seguirem la mateixa estratègia que per a $G_i(g_2,w,\tau)$ i també usarem la notació $\hat g(w,\tau)=g_0w+g_1(\tau)+\hat g_2(w,\tau)$.

Les derivades de G_1 i G_2 respecte la seva primera variable seran:

$$\begin{aligned}
\partial_1G_1(g_2,w,\tau) &= \frac{1}{4}\,\partial_u\left(\cosh^2 u\,\mu\partial_uQ^-(u,\tau)-\mu f_2(\tau)\right)\Big|_{u=g_0w+g_1(\tau)+g_2(w,\tau)} = \\
&= \frac{1}{2}\tanh u\cosh^2 u\,\mu\partial_uQ^-(u,\tau)+\frac{1}{4}\cosh^2 u\,\mu\partial_u^2Q^-(u,\tau)\Big|_{u=g_0w+g_1(\tau)+g_2(w,\tau)}, \\
\partial_1G_2(g_2,w,\tau) &= \varepsilon\mu\cos\tau\cosh^{-2}\left(g_0w+g_1(\tau)+g_2(w,\tau)\right),
\end{aligned}$$

on podrem tornar a fer servir els Teoremes 2.1 i 2.3.

Segons el Teorema del Valor Mitjà i el Teorema 2.3, si $g(w,\tau)\in D^u_\gamma\cap\{\Re e\,u<-U\}$ i $\mu\varepsilon$ és prou petit:

$$\begin{aligned}
|G_1(g_2,w,\tau)-G_1(g_2',w,\tau)| &\le \int_0^1|\partial_1G_1(g_2+t(g_2-g_2'),w,\tau)|\,dt\cdot|g_2(w,\tau)-g_2'(w,\tau)| \le \\
&\le \int_0^1 k_1\mu\varepsilon^2e^{2\,\Re e\,\left(g_0w+g_1(\tau)+g_2(w,\tau)+t(g_2-g_2')(w,\tau)\right)}\,dt\cdot|g_2(w,\tau)-g_2'(w,\tau)|\,,
\end{aligned}$$

on podem aplicar altra vegada la propietat (5.18):

$$|G_1(g_2,w,\tau)-G_1(g_2',w,\tau)| \le \overline{k}_1\mu\varepsilon^2\|g_2-g_2'\|^{(1)}_\infty e^{2g_0\,\Re e\,w}.$$

Per altra banda, el Teorema 2.1 i el Lema 2.4 ens permeten assegurar que:

$$\begin{aligned}
|G_1(g_2,w,\tau)-G_1(g_2',w,\tau)| &\le \|\partial_1G_1(\hat g_2,\cdot,\cdot)\|^{(1)}_\infty\cdot|g_2(w,\tau)-g_2'(w,\tau)| \le \\
&\le \left(\frac{1}{2}\|\tanh u\|_\infty\|\mu\partial_uQ^-\|_{2,\sigma_0}+\frac{1}{4}\|\mu\partial_u^2Q^-\|_{2,\sigma_0}\right)|g_2(w,\tau)-g_2'(w,\tau)| \le \\
&\le \left(\frac{1}{2}\,C\varepsilon^{-\gamma}b_0\mu\varepsilon^{2-2\gamma}+\frac{1}{4}\,b_0\mu\varepsilon^{2-3\gamma}\right)|g_2(w,\tau)-g_2'(w,\tau)|\,.
\end{aligned}$$

I, altra vegada usant la propietat (5.19), si $g(w,\tau) \in D^u_\gamma \cap \{\Re e\, u \geq -U\}$, $\exists k_1'$ tal que

$$|G_1(g_2,w,\tau) - G_1(g_2',w,\tau)| \leq k_1'\mu\varepsilon^{2-3\gamma}\|g_2 - g_2'\|^{(1)}_\infty e^{2g_0\,\Re e\, w}.$$

Així doncs, podem assegurar que $\forall\,(w,\tau) \in D^{u(1)}_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$,

$$|G_1(g_2,w,\tau) - G_1(g_2',w,\tau)| \leq \text{màx}\left\{\overline{\mathrm{k}}_1, \mathrm{k}_1'\right\}\mu\varepsilon^{2-3\gamma}\|\mathrm{g}_2 - \mathrm{g}_2'\|^{(1)}_\infty \mathrm{e}^{2\mathrm{g}_0\,\Re\mathrm{e}\,\mathrm{w}}.$$

L'Apartat 3 del Lema 5.6 amb $s = 2g_0 > 0$ ens permet arribar a l'expressió:

$$\left\|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(G_1(g_2,\cdot,\cdot) - G_1(g_2',\cdot,\cdot)\big)\right\|^{(1)}_\infty \leq \frac{1}{2g_0}\, e^{2g_0u_0^{(1)}}\|\big(G_1(g_2,\cdot,\cdot) - G_1(g_2',\cdot,\cdot)\big)\cdot e^{-2g_0w}\|^{(1)}_\infty,$$

però aplicant les desigualtats de (5.17) i la fita de $G_1(g_2,\cdot,\cdot) - G_1(g_2',\cdot,\cdot)$ trobada,

$$\left\|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(G_1(g_2,\cdot,\cdot) - G_1(g_2',\cdot,\cdot)\big)\right\|^{(1)}_\infty \leq 2e^{2u_0^{(1)}}\text{màx}\left\{\overline{\mathrm{k}}_1, \mathrm{k}_1'\right\}\mu\varepsilon^{2-3\gamma}\|\mathrm{g}_2 - \mathrm{g}_2'\|^{(1)}_\infty. \tag{5.26}$$

Per a la diferència de G_2 farem servir la pròpia definició de l'operador $\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon$ i el Teorema del Valor Mitjà, on la funció $\hat{g}_2$ serà $g_2 + \delta(g_2' - g_2)$ per a un cert $\delta \in (0,1)$ i aleshores $\hat{g}(w,\tau) = g_0w + g_1(\tau) + \hat{g}_2(w,\tau)$:

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(G_2(g_2,\cdot,\cdot) - G_2(g_2',\cdot,\cdot)\big)(w,\tau)\right| &\leq \int_{-\infty}^0 \left|\big(G_2(g_2,\cdot,\cdot) - G_2(g_2',\cdot,\cdot)\big)(w+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\right| dt \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^0 \left|\partial_1 G_2(\hat{g}_2, w+t, \tau+\varepsilon^{-1}t)\right| \cdot \|g_2 - g_2'\|^{(1)}_\infty\, dt \leq \\
&\leq \varepsilon\mu\int_{-\infty}^0 \left|\cosh\big(\hat{g}(w+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\big)\right|^{-2}|\cos(\tau+\varepsilon^{-1}t)|\, dt \cdot \|g_2 - g_2'\|^{(1)}_\infty,
\end{aligned}$$

i fent el mateix raonament que a (5.24), obtindríem la fita:

$$\left\|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(G_2(g_2,\cdot,\cdot) - G_2(g_2',\cdot,\cdot)\big)\right\|^{(1)}_\infty \leq \varepsilon\mu e^{\sigma_0}C\varepsilon^{-2\gamma}\|g_2 - g_2'\|^{(1)}_\infty. \tag{5.27}$$

Finalment, segons els resultats (5.26) i (5.27), $\exists K_2$ tal que

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(G(g_2,\cdot,\cdot) - G(g_2',\cdot,\cdot)\big)\|^{(1)}_\infty \leq \\
&\quad \leq \|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(G_1(g_2,\cdot,\cdot) - G_1(g_2',\cdot,\cdot)\big)\|^{(1)}_\infty + \|\mathcal{G}^{\mathrm{o}}_\varepsilon\big(G_2(g_2,\cdot,\cdot) - G_2(g_2',\cdot,\cdot)\big)\|^{(1)}_\infty \leq \\
&\quad \leq 2e^{2u_0^{(1)}}\text{màx}\left\{\overline{\mathrm{k}}_1, \mathrm{k}_1'\right\}\mu\varepsilon^{2-3\gamma}\|\mathrm{g}_2 - \mathrm{g}_2'\|^{(1)}_\infty + \mathrm{C}\mu\varepsilon^{1-2\gamma}\mathrm{e}^{\sigma_0}\|\mathrm{g}_2 - \mathrm{g}_2'\|^{(1)}_\infty \leq \\
&\quad \leq K_2\mu\varepsilon^{1-2\gamma}\|g_2 - g_2'\|^{(1)}_\infty
\end{aligned}$$

on s'ha suposat que $0 \leq \gamma < 1$. ∎

Tenim ara tota la informació necessària per poder demostrar el primer resultat pel que fa al canvi de variables.

Proposició 5.8. *Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \mu \leq \mu_0$, $0 \leq \gamma < 1/2$ i $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, existeixen $0 < h_2 < 1$ i $\mathcal{C}^-(w,\tau)$ real-analítica a $D^{u(2)}_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$, tals que el canvi $u = w + \mathcal{C}^-(w,\tau)$ conjuga l'operador $\mathcal{L}^-_\varepsilon$ definit a (5.7) amb el redreçat L_ε.*

A més, existeix $\alpha_2 > 0$ tal que

$$\forall(w,\tau) \in D^{u(2)}_\gamma \times \mathbb{T}_{\sigma_0}, \quad w + \mathcal{C}^-(w,\tau) \in D^u_\gamma \ i$$

$$|\mathcal{C}^-(w,\tau)| \leq \alpha_2\mu\varepsilon^2|w| + \alpha_2\mu\varepsilon^{2-2\gamma}, \quad |\partial_w\mathcal{C}^-(w,\tau)| \leq \alpha_2\mu\varepsilon^{2-3\gamma}, \quad |\partial^2_w\mathcal{C}^-(w,\tau)| \leq \alpha_2\mu\varepsilon^{2-4\gamma}.$$

Demostració. Sigui $0 < h_1 < 1$ la constant donada al Lema 5.5 i farem tota la demostració per a $w \in D_\gamma^{u(1)}$. Serà només al final, per la restricció d'aplicar la desigualtat de Cauchy, que haurem de reduir el domini $D_\gamma^{u(1)}$ i tots els resultats seran vàlids per a $w \in D_\gamma^{u(2)}$.

En el cas de l'operador $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ definit a (5.7), la funció $A(u,\tau)$ del Lema 5.4 es correspondria amb l'expressió $1 + \dfrac{\cosh^2 u}{4}\,\mu\partial_u Q^-(u,\tau) - \varepsilon\mu \tanh u \cos\tau$. Així doncs, el canvi $u = g(w,\tau)$ que conjuga $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ amb L_ε ha de complir l'equació:

$$L_\varepsilon g(w,\tau) = 1 + \frac{\cosh^2(g(w,\tau))}{4}\,\mu\partial_u Q^-(g(w,\tau),\tau) - \varepsilon\mu\tanh(g(w,\tau))\cos\tau. \tag{5.28}$$

El Teorema 2.3 ens assegura que la funció f_2 obtinguda al Lema 2.11 és tal que, si $\Re e\, u < -U$, aleshores

$$1 + \frac{\cosh^2 u}{4}\,\mu\partial_u Q^-(u,\tau) = 1 + \mu f_2(\tau) + O(\mu\varepsilon^2),$$

per tant, i com que volem $g(w,\tau)$ 2π-periòdica en τ, proposem a tot el domini $D_\gamma^{u(1)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ el canvi

$$u = g(w,\tau) = w + (g_0 - 1)w + g_1(\tau) + g_2(w,\tau), \tag{5.29}$$

on $g_0 = 1 + \mu < f_2 >$ i $g_1(\tau)$ és la funció tal que $\varepsilon^{-1}g_1'(\tau) = \mu f_2(\tau) - \mu < f_2 >$ i $< g_1 >= 0$, per la qual cosa, estarem sota les hipòtesis del Lema 5.7. A més, recordem que, segons el Lema 2.11, g_0 i $g_1(\tau)$ tenen les fites:

$$|g_0 - 1| \le \mu\alpha_1\varepsilon^2, \qquad |g_1(\tau)| \le \mu\varepsilon\alpha_1\varepsilon^2 = \alpha_1\mu\varepsilon^3. \tag{5.30}$$

Amb aquest canvi de variables proposat, l'Equació (5.28) ens porta a una equació per a la funció g_2:

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon\big(g_0 w + g_1(\tau) + g_2(w,\tau)\big) &= 1 + \frac{\cosh^2(g(w,\tau))}{4}\,\mu\partial_u Q^-(g(w,\tau),\tau) - \varepsilon\mu\tanh(g(w,\tau))\cos\tau\\
g_0 + \varepsilon^{-1}g_1'(\tau) + L_\varepsilon g_2(w,\tau) &= 1 + \frac{\cosh^2(g(w,\tau))}{4}\,\mu\partial_u Q^-(g(w,\tau),\tau) - \varepsilon\mu\tanh(g(w,\tau))\cos\tau\\
1 + \mu f_2(\tau) + L_\varepsilon g_2(w,\tau) &= 1 + \frac{\cosh^2(g(w,\tau))}{4}\,\mu\partial_u Q^-(g(w,\tau),\tau) - \varepsilon\mu\tanh(g(w,\tau))\cos\tau\\
L_\varepsilon g_2(w,\tau) &= G(g_2,w,\tau)
\end{aligned}$$

on G és l'operador definit al Lema 5.7. Per resoldre aquesta equació, usarem l'operador $\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}$ definit a (2.11) i resoldrem

$$g_2(w,\tau) = \mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}\big(G(g_2,w,\tau)\big)$$

buscant un punt fix de l'operador:

$$\mathcal{F}(g_2) := \mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}\big(G(g_2,\cdot,\cdot)\big). \tag{5.31}$$

$\forall\, g_2 \in \mathcal{X}_{\sigma_0}^{(1)}$, l'Apartat 2a del Lema 5.7 ens assegura que, $\mathcal{F}(g_2) \in \mathcal{X}_{\sigma_0}^{(1)}$ i, a més, que

$$\|\mathcal{F}(0)\|_\infty^{(1)} \le \frac{1}{2}\,K_1\mu\varepsilon^{2-2\gamma}.$$

Siguin $g_2, g_2' \in \mathcal{B}\left(K_1\mu\varepsilon^{2-2\gamma}\right) \subset \mathcal{X}_{\sigma_0}^{(1)}$, aleshores, tornant a usar el Lema 5.7,

$$\|\mathcal{F}(g_2) - \mathcal{F}(g_2')\|_\infty^{(1)} = \left\|\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}\big(G(g_2,\cdot,\cdot) - G(g_2',\cdot,\cdot)\big)\right\|_\infty^{(1)} \leq K_2\mu\varepsilon^{1-2\gamma}\|g_2 - g_2'\|_\infty^{(1)}.$$

La qual cosa assegura que, si $\mu\varepsilon^{1-2\gamma}K_2 \leq 1/2$, $\mathcal{F}$ és una contracció. Per tant, el Teorema del Punt Fix ens indica que:

$$\exists!\, g_2^- \in \mathcal{B}\left(K_1\mu\varepsilon^{2-2\gamma}\right) \text{ tal que } g_2^- = \mathcal{F}(g_2^-) = \mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}\left(G(g_2^-,\cdot,\cdot)\right)$$

i, per l'Apartat 2 del Lema 5.6,

$$L_\varepsilon g_2^- = L_\varepsilon \mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{o}}\left(G(g_2^-,\cdot,\cdot)\right) = G(g_2^-,\cdot,\cdot).$$

Per tant, existeix el canvi (5.29) i podem posar-lo de la forma

$$u = w + \mathcal{C}^-(w,\tau) \text{ amb } \mathcal{C}^-(w,\tau) = \mu < f_2 > w + g_1(\tau) + g_2^-(w,\tau),$$

des d'on, com que $g_2 \in \mathcal{B}\left(K_1\mu\varepsilon^{2-2\gamma}\right)$ i (5.30), en trobem la fita que enunciava el Teorema:

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}^-(w,\tau)| &\leq \mu| < f_2 > | \cdot |w| + |g_1(\tau)| + |g_2^-(w,\tau)| \leq \\ &\leq \alpha_1\mu\varepsilon^2|w| + \alpha_1\mu\varepsilon^3 + K_1\mu\varepsilon^{2-2\gamma} \leq \alpha_1\mu\varepsilon^2|w| + (\alpha_1 + K_1)\mu\varepsilon^{2-2\gamma}. \end{aligned}$$

I usant les desigualtats de Cauchy per reducció del domini a, per exemple, $D_\gamma^{u(2)}$ també obtenim els fites de les seves derivades. Pel fet que $D_\gamma^{u(2)} \subset D_\gamma^{u(1)}$, podem donar tots els resultats a $D_\gamma^{u(2)}$.

Per últim, que $w + \mathcal{C}^-(w,\tau) \in D_\gamma^{u(2)}$ ens ho assegura el Lema 5.5. ■

5.3.2 El canvi a la zona inner.

A partir del resultat de la Proposició 5.8, buscarem la continuació analítica respecte w de la funció $\mathcal{C}^-$ a $D_{\varepsilon,+}^u$ i a $D_{\varepsilon,-}^u$, resultat que pot trobar-se al Teorema 5.14. Farem només la demostració a $D_{\varepsilon,+}^u$, essent totalment anàloga per a $D_{\varepsilon,-}^u$. També en aquest cas haurem de reduir el domini inicial, situant-nos a $D_{\varepsilon,+}^{u(3)}$ per tal d'obtenir els resultats finals a $D_{\varepsilon,+}^u$.

Pretenem trobar a $D_{\varepsilon,+}^u$ un canvi $u = g(w,\tau)$ tal que conjugui l'operador definit a (5.5):

$$\mathcal{L}_\varepsilon^- = \varepsilon^{-1}\partial_\tau + \left[\frac{\cosh^2 u}{4}\,\partial_u T^-\right]\partial_u, \tag{5.32}$$

amb el redreçat $L_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_w$, o sigui, que segons els Lema 5.4 ha de ser solució de

$$L_\varepsilon g(w,\tau) = \frac{\cosh^2(g(w,\tau))}{4}\,\partial_u T^-(g(w,\tau),\tau)$$

i del qual, gràcies a la Proposició 5.8, en coneixem els seus valors a qualsevol $w^* \in D_\gamma^{u(2)}$. En particular, als w^* tals que $|w^* - i\pi/2| = (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma$.

Farem ara el canvi de funció $T^-(u,\tau) = \varepsilon^{-1}\phi^-(\varepsilon^{-1}(u - i\pi/2),\tau)$ i volem evidenciar l'aproximació a $D_{\varepsilon,+}^u$ de la funció ϕ^- per la ϕ_0^-, estudiada al Capítol 3 com a solució de l'Equació

Inner. El coeficient de l'operador $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ pot escriure's aleshores com:

$$\begin{aligned}\frac{\cosh^2 u}{4}\,\partial_u T^-(u,\tau) = & \frac{\cosh^2 u}{4\varepsilon^2}\,\left(\partial_z\phi^-(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau)-\partial_z\phi_0^-(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau)\right)+\\ &+\left(\frac{\cosh^2 u}{4\varepsilon^2}+\frac{(u-i\pi/2)^2}{4\varepsilon^2}\right)\partial_z\phi_0^-(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau)-\\ &-\frac{(u-i\pi/2)^2}{4\varepsilon^2}\,\partial_z\phi_0^-(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau).\end{aligned} \tag{5.33}$$

El Corol·lari 3.48 assegura que existeix una funció R^- tal que el canvi $z = x + R^-(x,\tau)$ conjuga el camp

$$\partial_\tau - \frac{1}{4}\,z^2\partial_z\phi_0^-(z,\tau)\partial_z$$

amb el camp redreçat $\partial_\tau + \partial_x$. Per altra banda, recordem que la variable inner z i la outer u estaven lligades per $z = \varepsilon^{-1}(u - i\pi/2)$ i, per tant, sembla natural relacionar la variable inner x amb una variable outer, que anomenarem s, considerant $x = \varepsilon^{-1}(s - i\pi/2)$. Així doncs, farem servir un primer canvi

$$s \mapsto u = s + \varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(s - i\pi/2),\tau)$$

i el composarem amb un segon canvi

$$w \mapsto s = w + \varepsilon R_1(w,\tau)$$

de manera que el canvi final

$$w \mapsto s = w + \varepsilon R_1(w,\tau) \mapsto u = w + R_1(w,\tau) + \varepsilon R^-\Big(\varepsilon^{-1}\big(w + R_1(w,\tau) - i\pi/2\big),\tau\Big)$$

aconsegueixi el nostre objectiu de conjugar $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ amb L_ε.

Cal definir l'espai de la funció R_1 que busquem. $\forall 0 < \sigma < \sigma_0$ definim les àlgebres de Banach:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_\sigma^{(i)} := \{R_1(w,\tau) \mid R_1 : D_{\varepsilon,+}^{u(i)} \times \mathbb{T}_\sigma \longrightarrow \mathbb{C}\ \text{real sobre els reals,}\ C^\infty\ \text{respecte}\ w\ \text{per}\\ \text{línies horitzontals i}\ \|R_1\|_\infty^{(i)} < \infty\},\end{aligned} \tag{5.34}$$

on la bola de radi r la notarem per $\mathcal{B}(r) := \{R_1 \in \mathcal{Y}_\sigma^{(i)}$ tq $\|R_1\|_\infty^{(i)} \le r\}$.

Per tal que el canvi final sigui continuació analítica del $\mathcal{C}^-$ trobat a $D_\gamma^{u(2)}$, caldrà que aquesta funció R_1 compleixi una condició inicial fixada. Amb el següent lema veurem que això és possible.

Lema 5.9. *Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \mu \le \mu_0$, $0 \le \gamma < 1/2$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ i $\forall\, w^*$ tal que $|w^* - i\pi/2| = (1-h_2)\bar{a}\varepsilon^\gamma$, existeix $R_1(w^*,\cdot)$ real-analítica a $\mathbb{T}_{\sigma_0}$ solució de l'equació implícita:*

$$R_1(w^*,\tau) = \mathcal{C}^-(w^*,\tau) - \varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(w^* + R_1(w^*,\tau) - i\pi/2),\tau), \tag{5.35}$$

on $\mathcal{C}^-$ és la funció donada per la Proposició 5.8 i R^- la funció donada pel Corol·lari 3.48.

A més, existeix $c_0 > 0$ tal que

$$\|R_1(w^*,\cdot)\|_\infty \le c_0\varepsilon^{2-2\gamma}.$$

Demostració. Definim primer l'espai de funcions on busquem solucions de l'Equació (5.35):

$$\mathcal{R}^* = \{R_1(w^*,\cdot) : \mathbb{T}_{\sigma_0} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ real-analítica i } \|R_1(w^*,\cdot)\|_\infty < \infty\}.$$

Considerant l'operador $\mathcal{F} : \mathcal{R}^* \longrightarrow \mathcal{R}^*$ definit com:

$$\mathcal{F}(R_1) = \mathcal{C}^-(w^*,\cdot) - \varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(w^* + R_1(w^*,\cdot) - i\pi/2),\cdot),$$

plantegem el problema com la resolució d'un punt fix. De les funcions que hi intervenen tenim la següent informació:

1. la Proposició 5.8, assegura que $\exists\, \alpha_2$ tal que $\forall (w,\tau) \in D_\gamma^{u(2)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$,

$$|\mathcal{C}^-(w,\tau)| \le \alpha_2\mu\varepsilon^2|w| + \alpha_2\mu\varepsilon^{2-2\gamma};$$

2. $\forall\,(s,\tau) \in D_{\varepsilon,+}^{u(1)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$, el Corol·lari 3.48 ens permet dir que $\exists\, d$ tal que la funció R^- compleix:

$$|R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau)| \le d\,\varepsilon|s-i\pi/2|^{-1} \quad \text{i} \quad |\partial_x R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau)| \le d\,\varepsilon^2|s-i\pi/2|^{-2}.$$

Com que w^* és tal que $|w^* - i\pi/2| = (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma$, sabem per la construcció dels dominis que vam fer, que $w^* \in D_{\varepsilon,+}^{u(1)}$, però a més que $w^* \in D_\gamma^{u(2)}$. De manera anàloga a com es farà amb tot detall al Lema 5.10, pot demostrar-se que, si $R_1(w^*,\cdot) \in \mathcal{B}\big(c_0\varepsilon^{2-2\gamma}\big) \subset \mathcal{R}^*$ i $\gamma < 1/2$, aleshores $w^* + R_1(w^*,\tau) \in D_{\varepsilon,+}^{u(1)}$, però també $w^* + R_1(w^*,\tau) \in D_\gamma^{u(2)}$; a més, $\exists\, \delta_2 \in (0,1)$ tal que $(1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma(1-\delta_2) \le |w^* + R_1(w^*,\tau)| \le (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma(1+\delta_2)$. Podrem doncs aplicar les fites de les funcions $\mathcal{C}^-$ i R^- que acabem d'indicar tant al punt w^* com al $w^* + R_1(w^*,\tau)$.

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(0)\|_\infty \le& \|\mathcal{C}^-(w^*,\cdot)\|_\infty + \varepsilon\|R^-(\varepsilon^{-1}(w^* - i\pi/2),\cdot)\|_\infty \le \\
\le& \,\alpha_2\mu\varepsilon^2|w^*| + \alpha_2\mu\varepsilon^{2-2\gamma} + \varepsilon d\,\varepsilon|w^* - i\pi/2|^{-1} \le \\
\le& \,\alpha_2\mu\varepsilon^2\big((1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma + \pi/2\big) + \alpha_2\mu\varepsilon^{2-2\gamma} + d\,\varepsilon^{2-\gamma}(1-h_2)^{-1}\overline{a}^{-1} = \\
=& \big(\alpha_2\mu\big((1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma + \pi/2\big)\varepsilon^{2\gamma} + \alpha_2\mu + d\,(1-h_2)^{-1}\overline{a}^{-1}\varepsilon^\gamma\big)\varepsilon^{2-2\gamma}.
\end{aligned}$$

Per tant, $\exists\, c_0$ tal que

$$\|\mathcal{F}(0)\|_\infty \le \frac{1}{2}\,c_0\varepsilon^{2-2\gamma}.$$

$\forall\, R_1(w^*,\cdot), R_1'(w^*,\cdot) \in \mathcal{B}\big(c_0\varepsilon^{2-2\gamma}\big) \subset \mathcal{R}^*$, sigui $\hat{R}_1(w^*,\cdot) = (1-t)R_1(w^*,\cdot) + tR_1'(w^*,\cdot)$ per a una certa $t \in (0,1)$, aleshores utilitzarem el Teorema del Valor Mitjà:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(R_1) - \mathcal{F}(R_1')\|_\infty \le& \,\varepsilon\|R^-(\varepsilon^{-1}(w^* + R_1(w^*,\cdot) - i\pi/2),\cdot) - R^-(\varepsilon^{-1}(w^* + R_1'(w^*,\cdot) - i\pi/2),\cdot)\|_\infty \le \\
\le& \,\varepsilon\|\partial_x R^-(\varepsilon^{-1}(w^* + \hat{R}_1(w^*,\cdot) - i\pi/2),\cdot)\|_\infty\varepsilon^{-1}\|R_1(w^*,\cdot) - R_1'(w^*,\cdot)\|_\infty \le \\
\le& \,d\varepsilon^{2-2\gamma}(1-h_2)^{-2}\overline{a}^{-2}(1-\delta_2)^{-2}\|R_1(w^*,\cdot) - R_1'(w^*,\cdot)\|_\infty.
\end{aligned}$$

Així doncs, existeix una única funció $R_1(w^*,\cdot) \in \mathcal{B}\big(c_0\varepsilon^{2-2\gamma}\big) \subset \mathcal{R}^*$ tal que és solució de l'Equació (5.35). ■

Lema 5.10. *Siguin $c_0 > 0$, $\omega > 1$ i R^- la funció definida al Corol·lari 3.48. Aleshores, $\exists 0 < h_1 < h_2 < 1$ i $\exists \varepsilon_0 > 0$ tals que, per a qualssevol $0 < \mu \leq \mu_0$, $0 \leq \gamma < 1$, $(w,\tau) \in D^{u(2)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$, $R_1 \in \mathcal{B}\big(c_0\varepsilon^\omega\big) \subset \mathcal{Y}^{(2)}_{\sigma_0}$ i $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, es compleix que*

$$w + R_1(w,\tau) \in D^{u(1)}_{\varepsilon,+},$$
$$u = w + \varepsilon R^-\big(\varepsilon^{-1}\big(w + R_1(w,\tau) - i\pi/2\big),\tau\big) + R_1(w,\tau) \in D^u_{\varepsilon,+}.$$

A més, si $|w^* - i\pi/2| = (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma$, aleshores per a cert $0 < \delta_2 < 1$

$$(1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma(1-\delta_2) \leq |w^* + R_1(w^*,\tau)| \leq (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma(1+\delta_2).$$

Demostració. Usant la notació

$$s = w + R_1(w,\tau), \tag{5.36}$$

si $s \in D^{u(1)}_{\varepsilon,+}$, el Corol·lari 3.48 ens permet dir que $\exists\, d$ tal que la funció R^- compleix:

$$|R^-(\varepsilon^{-1}(s - i\pi/2),\tau)| \leq d\,\varepsilon|s - i\pi/2|^{-1} < d\,(1+h_1)^{-1}c^{-1}(\ln(1/\varepsilon))^{-1}.$$

Com que $\gamma < 1 < \omega$, és possible prendre h_1 tal que, si ε és suficientment petit,

$$h_1 := \text{màx}\left\{\frac{\mathrm{c_0}\varepsilon^{\omega-\gamma}}{\mathrm{\overline{a}}}, \frac{\mathrm{c_0}\varepsilon^{\omega-1}}{\mathrm{c}\ln(1/\varepsilon)}, \frac{\mathrm{d}\varepsilon^{1-\gamma}}{\mathrm{\overline{a}c}\ln(1/\varepsilon)}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}^2\ln^2(1/\varepsilon)}\right\} < 1/2$$

i $h_2 = 2h_1 < 1$.

$\forall\,(w,\tau) \in D^{u(2)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ podem comprovar fàcilment que $s \in D^{u(1)}_{\varepsilon,+}$:

$$\begin{aligned}|s - i\pi/2| &\leq |w - i\pi/2| + |R_1(w,\tau)| < (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma + c_0\varepsilon^\omega = \left(1 - h_2 + \frac{c_0}{\overline{a}}\,\varepsilon^{\omega-\gamma}\right)\overline{a}\varepsilon^\gamma \leq \\ &\leq (1 - h_2 + h_1)\,\overline{a}\varepsilon^\gamma = (1-h_1)\overline{a}\varepsilon^\gamma\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\Im m(s - i\pi/2) &\leq \Im m(w - i\pi/2) + \Im m\, R_1(w,\tau) \leq -(1+h_2)c\varepsilon\ln(1/\varepsilon) + c_0\varepsilon^\omega \leq \\ &\leq -\left(1 + h_2 - \frac{c_0\varepsilon^{\omega-1}}{c\ln(1/\varepsilon)}\right)c\varepsilon\ln(1/\varepsilon) \leq -\,(1 + h_2 - h_1)\,c\varepsilon\ln(1/\varepsilon) = \\ &= -\,(1+h_1)\,c\varepsilon\ln(1/\varepsilon).\end{aligned}$$

Seguint amb la notació (5.36), cal ara comprovar que $u = s + \varepsilon R^-\big(\varepsilon^{-1}(s - i\pi/2),\tau\big) \in D^u_{\varepsilon,+}$:

$$\begin{aligned}|u - i\pi/2| &\leq |s - i\pi/2| + \varepsilon|R^-(\varepsilon^{-1}(s - i\pi/2),\tau)| \leq (1-h_1)\overline{a}\varepsilon^\gamma + \varepsilon d\,(1+h_1)^{-1}c^{-1}(\ln(1/\varepsilon))^{-1} \leq \\ &\leq \left(1 - h_1 + \frac{d\varepsilon^{1-\gamma}}{\overline{a}c\ln(1/\varepsilon)}\right)\overline{a}\varepsilon^\gamma \leq \overline{a}\varepsilon^\gamma\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\Im m(u - i\pi/2) &= \Im m(s - i\pi/2) + \varepsilon\,\Im m\, R^-(\varepsilon^{-1}(s - i\pi/2),\tau) \leq \\ &\leq -(1+h_1)c\varepsilon\ln(1/\varepsilon) + \varepsilon d\,(1+h_1)^{-1}c^{-1}(\ln(1/\varepsilon))^{-1} \leq \\ &\leq -\left(1 + h_1 - \frac{d}{c^2\ln^2(1/\varepsilon)}\right)c\varepsilon\ln(1/\varepsilon) \leq -c\varepsilon\ln(1/\varepsilon).\end{aligned}$$

Queda només demostrar les propietats de $w^* + R_1(w^*,\tau)$, on usarem que si ε és prou petit, $\delta_2 = \frac{c_0}{(1-h_2)\overline{a}}\,\varepsilon^{\omega-\gamma} < 1$:

1.
$$
\begin{aligned}
|w^*+R_1(w^*,\tau)-i\pi/2| &\leq |w^*-i\pi/2|+|R_1(w^*,\tau)| \leq (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma + c_0\varepsilon^\omega = \\
&= (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma + (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma c_0\varepsilon^\omega \frac{1}{(1-h_2)\overline{a}}\,\varepsilon^{-\gamma} \leq \\
&= (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma\left(1+\frac{c_0}{(1-h_2)\overline{a}}\,\varepsilon^{\omega-\gamma}\right) = (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma(1+\delta_2).
\end{aligned}
$$

2.
$$
\begin{aligned}
|w^*+R_1(w^*,\tau)-i\pi/2| &\geq |w^*-i\pi/2|-|R_1(w^*,\tau)| \geq (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma - c_0\varepsilon^\omega = \\
&= (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma\left(1-\frac{c_0}{(1-h_2)\overline{a}}\,\varepsilon^{\omega-\gamma}\right) = (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma(1-\delta_2).
\end{aligned}
$$

■

Lema 5.11. *Sigui* $f \in \mathcal{Y}_{\sigma_0}^{(2)}$ *i* $\forall\, w \in D_{\varepsilon,+}^{u(2)}$ *sigui* w^* *tal que* $\Re e\, w^* < 0$, $\Im m\, w^* = \Im m\, w$ *i* $|w^*-i\pi/2| = (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma$. *Aleshores, l'operador* $\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{i}}$ *definit com*

$$
\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{i}}(f)(w,\tau) := \int_{w^*-w}^{0} f(w+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\,dt \tag{5.37}
$$

té les següents propietats:

1. *és lineal.*
2. $L_\varepsilon \circ \mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{i}} = Id$.
3. $\left\|\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{i}}(f)\right\|_\infty^{(2)} < 2(1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma \|f\|_\infty^{(2)}$.
4. $\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{i}}(f) \in \mathcal{Y}_{\sigma_0}^{(2)}$.

Demostració. El primer apartat és evident. Per al segon apartat, observem que, fixada una alçada v, $\forall\, w$ tal que $\Im m\, w = v$, la corresponent w^* és constant. Per tant

$$
\begin{aligned}
\left(\varepsilon^{-1}\partial_\tau+\partial_w\right)&\int_{w^*-w}^{0} f(w+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\,dt = \\
&= \int_{w^*-w}^{0}\left(\varepsilon^{-1}\partial_\tau+\partial_w\right) f(w+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\,dt + f(w^*,\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)) = \\
&= \int_{w^*-w}^{0}\frac{d}{dt}\,f(w+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\,dt + f(w^*,\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)) = \\
&= f(w,\tau) - f(w^*,\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)) + f(w^*,\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)) = f(w,\tau)
\end{aligned}
$$

i així queda demostrada. Pel que fa al tercer apartat, usarem que $|w-i\pi/2| < (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma$ i $|w^*-i\pi/2| = (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma$:

$$
|\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{i}}(f)(w,\tau)| \leq \left|\int_{w^*-w}^{0} f(w+t,\tau+\varepsilon^{-1}t)\,dt\right| \leq \|f\|_\infty^{(2)}|w^*-w| < \|f\|_\infty^{(2)} 2(1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma.
$$

Finalment, per les característiques de la funció f i el resultat que acabem de veure, el quart apartat és obvi. ■

Les notacions

$$\begin{aligned} \psi^-(z,\tau) :=&\phi^-(z,\tau) - \phi_0^-(z,\tau), \\ Y^-(u,\tau) :=& \left(\frac{\cosh^2 u}{4\varepsilon^2} + \frac{(u-i\pi/2)^2}{4\varepsilon^2}\right) \partial_z\phi_0^-\big(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau\big), \\ X^-(u,\tau) :=& \frac{(u-i\pi/2)^2}{4\varepsilon^2}\,\partial_z\phi_0^-\big(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau\big), \end{aligned} \tag{5.38}$$

ens permeten escriure el coeficient de l'operador $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ d'una manera molt més curta i pràctica per manipular que la donada a (5.33):

$$\frac{\cosh^2 u}{4}\,\partial_u T^-(u,\tau) = \frac{\cosh^2 u}{4\varepsilon^2}\,\partial_z\psi^-\big(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau\big) + Y^-(u,\tau) - X^-(u,\tau). \tag{5.39}$$

Un cop expressat l'operador $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ en la forma més adequada, podem treballar-hi amb més detall.

Lema 5.12. *Siguin $c_0>0$, $\omega>1$ i R^- la funció definida al Corol·lari 3.48. Aleshores, $\exists\,\varepsilon_0>0$ tal que, per a qualssevol $1/3<\gamma<1/2$, $0<\mu\le\mu_0$, $0<\sigma<\sigma_0$ i $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, l'operador*

$$\begin{aligned} F_1(R_1,w,\tau) :=& \frac{1}{1+\partial_x R^-\big(\varepsilon^{-1}(w+R_1(w,\tau)-i\pi/2),\tau\big)}\cdot \\ &\cdot\left(\frac{\cosh^2 u}{4}\,\partial_u T^-\big(u,\tau\big) + X^-(u,\tau)\right)\Big|_{u=w+\varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(w+R_1(w,\tau)-i\pi/2),\tau)+R_1(w,\tau)} \end{aligned}$$

definit $\forall\,(w,\tau)\in D^{u(2)}_{\varepsilon,+}\times\mathbb{T}_{\sigma_0}$ i $\forall\,R_1\in\mathcal{B}\big(c_0\varepsilon^\omega\big)\subset\mathcal{Y}_\sigma^{(2)}$, té les següents propietats:

1. *$F_1(R_1,\cdot,\cdot)\in\mathcal{Y}_\sigma^{(2)}$.*
2. *$\exists K_3,K_4$ tal que*
   - **a.** $\|F_1(R_1,\cdot,\cdot)\|_\infty^{(2)}\le K_3\varepsilon^{2\gamma}$.
   - **b.** $\|F_1(R_1,\cdot,\cdot)-F_1(R_1',\cdot,\cdot)\|_\infty^{(2)}\le K_4\varepsilon^{2\gamma-1}\ln^{-2}(1/\varepsilon)\|R_1-R_1'\|_\infty^{(2)}$.

Demostració. Quan convingui i per simplificar les fórmules, usarem la notació

$$s = w+R_1(w,\tau),\qquad s' = w+R_1'(w,\tau). \tag{5.40}$$

Si $R_1\in\mathcal{Y}_\sigma^{(2)}$, per les característiques de les funcions que hi intervenen, $F_1(R_1,\cdot,\cdot)$ és real sobre els reals i 2π-periòdica en τ i respecte w és C^∞ per línies horitzontals. Només queda comprovar que té norma fitada.

Segons (5.39), usant la notació (5.40), podem escriure

$$\begin{aligned} F_1(R_1,w,\tau) =& \frac{1}{1+\partial_x R^-\big(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau\big)}\cdot \\ &\cdot\left(\frac{\cosh^2 u}{4\varepsilon^2}\,\partial_z\psi^-\big(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau\big) + Y^-(u,\tau)\right)\Big|_{u=s+\varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau)}. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Recordem que si $s \in D^{u(1)}_{\varepsilon,+}$, aleshores $x = \varepsilon^{-1}(s - i\pi/2) \in \mathcal{D}^{u(1)}_{\varepsilon,+}$ i que, gràcies al Corol·lari 3.48, $\forall\,(x,\tau) \in \mathcal{D}^{u(1)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_\sigma$ de la funció R^- sabem que

$$R^-(x,\tau) = O(x^{-1}). \tag{5.42}$$

Així doncs podem considerar que el factor $1/\left(1 + \partial_x R^-(\varepsilon^{-1}(s - i\pi/2),\tau)\right)$ està fitat.

Pel Lema 5.10, sabem que si $(w,\tau) \in D^{u(2)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i $R_1 \in \mathcal{B}\big(c_0\varepsilon^\omega\big)$, aleshores $s = w + R_1(w,\tau) \in D^{u(1)}_{\varepsilon,+}$ i $u = s + \varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(s - i\pi/2),\tau) \in D^u_{\varepsilon,+}$; a més, $|u - i\pi/2| \le \overline{a}\varepsilon^\gamma$. Com que

$$\frac{\cosh^2 u}{4\varepsilon^2} = \frac{(u - i\pi/2)^2}{4\varepsilon^2}\left(-1 + O\big((u - i\pi/2)^2\big)\right),$$

aleshores tenim

$$\begin{aligned} \frac{\cosh^2 u}{4\varepsilon^2} &= O(\varepsilon^{2\gamma-2}), \\ \frac{\cosh^2 u}{4\varepsilon^2} + \frac{(u - i\pi/2)^2}{4\varepsilon^2} &= O(\varepsilon^{-2}(u - i\pi/2)^4). \end{aligned} \tag{5.43}$$

A més, si $u \in D^u_{\varepsilon,+}$, aleshores $z = \varepsilon^{-1}(u - i\pi/2) \in \mathcal{D}^u_{\varepsilon,+}$ i al Corol·lari 3.30 podem trobar informació de la funció ϕ_0^-:

$$\partial_z\phi_0^-(z,\tau) = z^{-2}\left(4 + O(z^{-1})\right),$$

que podem traspassar a la funció Y^- definida a (5.38):

$$Y^-(u,\tau) = O(\varepsilon^{-2}(u - i\pi/2)^4) \cdot O(\varepsilon^2(u - i\pi/2)^{-2}) = O((u - i\pi/2)^2) = O(\varepsilon^{2\gamma}). \tag{5.44}$$

Per altra banda, (5.43) i el Teorema 4.1 ens permeten arribar a una fita del primer terme de (5.41):

$$\frac{\cosh^2 u}{4\varepsilon^2}\,\partial_z\psi^-\big(\varepsilon^{-1}(u - i\pi/2),\tau\big) = O(\varepsilon^{2\gamma-2})O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^{2\gamma}) \tag{5.45}$$

Recollint els resultats (5.42), (5.44) i (5.45), $\exists\,K_3$ tal que

$$\|F_1(R_1,\cdot,\cdot)\|^{(2)}_\infty \le K_3\varepsilon^{2\gamma}.$$

Així doncs, $F_1(R_1,\cdot,\cdot) \in \mathcal{Y}^{(2)}_\sigma$ i tenim també demostrat l'Apartat 2a.

Pel que fa a l'Apartat 2b, usarem el Teorema del Valor Mitjà a $F_1(R_1,w,\tau) - F_1(R_1',w,\tau)$:

$$F_1(R_1,w,\tau) - F_1(R_1',w,\tau) = \int_0^1 \partial_1 F_1\big(R_1 + t(R_1 - R_1'),w,\tau\big)\,dt \cdot \big(R_1(w,\tau) - R_1'(w,\tau)\big),$$

per tant necessitarem una fita de $\partial_1 F_1(R_1,w,\tau)$. Seguint amb la notació de (5.41), estudiarem per separat la derivada de cadascun dels termes, que de manera breu podem escriure usant la variable intermitja $s = w + R_1(w,\tau)$ com:

$$\begin{aligned} \partial_1 F_1(R_1,w,\tau) = {} & \partial_s\left(\frac{1}{1 + \partial_x R^-\big(\varepsilon^{-1}(s - i\pi/2),\tau\big)}\right)\left(\frac{\cosh^2 u}{4\varepsilon^2}\,\partial_z\psi^- + Y^-\right)\Bigg|_{u=s+\varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau)} \\ & + \frac{1}{1 + \partial_x R^-\big(\varepsilon^{-1}(s - i\pi/2),\tau\big)}\,\partial_s\left(\frac{\cosh^2 u}{4\varepsilon^2}\,\partial_z\psi^-\right)\Bigg|_{u=s+\varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau)} + \\ & + \frac{1}{1 + \partial_x R^-\big(\varepsilon^{-1}(s - i\pi/2),\tau\big)}\,\partial_s Y^-\big(s + \varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(s - i\pi/2),\tau),\tau\big). \end{aligned} \tag{5.46}$$

El Corol·lari 3.48 ens dóna la següent informació de la funció $R^- \ \forall\,(x,\tau) \in \mathcal{D}^{u(1)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_\sigma$:

$$\partial_x R^-(x,\tau) = O(x^{-2}) = O\big(\ln^{-2}(1/\varepsilon)\big), \quad \partial_x^2 R^-(x,\tau) = O(x^{-3}) = O\big(\ln^{-3}(1/\varepsilon)\big).$$

Per tant,

$$\partial_s\left(\frac{1}{1+\partial_x R^-\big(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau\big)}\right) = \frac{\varepsilon^{-1}\partial_x^2 R^-\big(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau\big)}{(1+\partial_x R^-\big(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau\big))^2} = O\big(\varepsilon^{-1}\ln^{-3}(1/\varepsilon)\big),$$

i junt amb (5.44) i (5.45), arribem a la conclusió que el primer terme de $\partial_1 F_1(R_1,w,\tau)$ és $O\big(\varepsilon^{2\gamma-1}\ln^{-3}(1/\varepsilon)\big)$.

Usant (5.43), que $\sinh(i\pi/2) \neq 0$ i el Teorema 4.1, tenim una fita del segon terme de $\partial_1 F_1(R_1,w,\tau)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+\partial_x R^-\big(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau\big)}\cdot\partial_s\left(\frac{\cosh^2 u}{4\varepsilon^2}\,\partial_z\psi^-(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau)\Big|_{u=s+\varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau)}\right) = \\
&\quad = \frac{\cosh u\sinh u}{2\varepsilon^2}\,\partial_z\psi^-(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau)\Big|_{u=s+\varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau)} + \\
&\quad + \frac{\cosh^2 u}{4\varepsilon^2}\,\varepsilon^{-1}\partial_z^2\psi^-(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau)\Big|_{u=s+\varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau)} = \\
&\quad = O(\varepsilon^{\gamma-2})O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^{2\gamma-2})\varepsilon^{-1}O(\varepsilon^2\ln^{-2}(1/\varepsilon)) = O(\varepsilon^\gamma) + O(\varepsilon^{2\gamma-1}\ln^{-2}(1/\varepsilon)) = \\
&\quad = O(\varepsilon^{2\gamma-1}\ln^{-2}(1/\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Finalment, l'últim terme de $\partial_1 F_1(R_1,w,\tau)$ és senzillament:

$$\partial_u Y^-(s+\varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau),\tau)$$

i (5.44) ens diu que, per a $u = s+\varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau) \in D^u_{\varepsilon,+}$,

$$\partial_u Y^-(u,\tau) = O(u-i\pi/2) = O(\varepsilon^\gamma).$$

Recollint tota aquesta informació, obtenim:

$$\begin{aligned}
\partial_1 F_1(R_1,w,\tau) =& O\big(\varepsilon^{2\gamma-1}\ln^{-3}(1/\varepsilon)\big) + O(\varepsilon^{2\gamma-1}\ln^{-2}(1/\varepsilon)) + O(\varepsilon^\gamma) = \\
=& O\big(\varepsilon^{2\gamma-1}\ln^{-2}(1/\varepsilon)\big).
\end{aligned}$$

Arribem doncs a la conclusió que $\exists\, K_4$ tal que

$$\|F_1(R_1,\cdot,\cdot) - F_1(R_1',\cdot,\cdot)\|^{(2)}_\infty \leq K_4\varepsilon^{2\gamma-1}\ln^{-2}(1/\varepsilon)\|R_1 - R_1'\|^{(2)}_\infty. \qquad \blacksquare$$

Gràcies a aquests resultats, podem demostrar la següent proposició.

Proposició 5.13. *Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \sigma < \sigma_0$, $0 < \mu \leq \mu_0$, $1/3 < \gamma < 1/2$ i $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, existeixen $0 < h_1 < h_2 < 1$ i $R_1^- \in \mathcal{Y}^{(2)}_\sigma$ solució de l'equació*

$$L_\varepsilon R_1(w,\tau) = F_1(R_1,w,\tau) \tag{5.47}$$

amb la condició inicial implícita $\forall w^*$ tal que $|w^* - i\pi/2| = (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma$:

$$R_1(w^*,\tau) = \mathcal{C}^-(w^*,\tau) - \varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(w^* + R_1(w^*,\tau) - i\pi/2),\tau), \tag{5.48}$$

on $\mathcal{C}^-$ és la funció donada per la Proposició 5.8 i R^- la funció donada pel Corol·lari 3.48.

A més, existeix $c_0 > 0$ tal que

$$\|R_1^-\|^{(2)}_\infty \leq c_0\big(\varepsilon^{3\gamma} + \varepsilon^{2-2\gamma}\big).$$

Demostració. Siguin $0 < h_1 < h_2 < 1$ les constants donades al Lema 5.10 i considerarem sempre $w \in D^{u(2)}_{\varepsilon,+}$.

En el decurs de tota la demostració, $w^* = w^*(w)$ en el sentit que $\forall\, w \in D^{u(2)}_{\varepsilon,+}$, considerem w^* com el punt tal que $\Im m\, w^* = \Im m\, w$, $\Re e\, w^* < 0$ i $|w^* - i\pi/2| = (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma$, la qual cosa implica, per la pròpia construcció de $D^{u(2)}_{\varepsilon,+}$ que vam fer, que $w^* \in D^{u(2)}_{\gamma}$.

Per resoldre l'Equació (5.47), usarem l'operador $\mathcal{G}^{\mathrm{i}}_\varepsilon$ definit a (5.37) i bucarem un punt fix de l'operador:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(R_1)(w,\tau) :=&\mathcal{G}^{\mathrm{i}}_\varepsilon\big(F_1(R_1,\cdot,\cdot)\big)(w,\tau) + \mathcal{C}^-\big(w^*, \tau + \varepsilon^{-1}(w^*-w)\big) - \\ &- \varepsilon R^-\big(\varepsilon^{-1}(w^* + R_1(w^*,\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)) - i\pi/2), \tau + \varepsilon^{-1}(w^*-w)\big).\end{aligned} \tag{5.49}$$

Per l'Apartat 1 del Lema 5.12 i el 4 del Lema 5.11, si $R_1 \in \mathcal{Y}^{(2)}_\sigma$, aleshores $\mathcal{F}(R_1) \in \mathcal{Y}^{(2)}_\sigma$. Comprovarem ara que podem aplicar el Teorema del Punt Fix a aquest operador $\mathcal{F}$. Com que l'Apartat 4 del Lema 5.11 ens permet dir que

$$\|\mathcal{G}^{\mathrm{i}}_\varepsilon\big(F_1(0,\cdot,\cdot)\big)\|^{(2)}_\infty \leq 2(1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma \|F_1(0,\cdot,\cdot)\|^{(2)}_\infty,$$

aleshores, de (5.49), tenim que $\forall\,(w,\tau) \in D^{u(2)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_\sigma$

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}(0)(w,\tau)| \leq& 2(1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma\|F_1(0,\cdot,\cdot)\|^{(2)}_\infty + |\mathcal{C}^-(w^*,\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w))| + \\ &+ \varepsilon|R^-(\varepsilon^{-1}(w^* + R_1(w^*,\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)) - i\pi/2), \tau + \varepsilon^{-1}(w^*-w))|,\end{aligned}$$

on tenim una fita de cadascun dels tres termes:

1. per l'Apartat 2a del Lema 5.12, $\|F_1(0,\cdot,\cdot)\|^{(2)}_\infty \leq K_3\varepsilon^{2\gamma}$
2. com que $w^* \in D^{u(2)}_\gamma$ i $\tau + \varepsilon^{-1}(w^*-w) \in \mathbb{T}_\sigma$, per la Proposició 5.8, sabem que
$$\begin{aligned}|\mathcal{C}^-(w^*,\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w))| \leq& \alpha_2\mu\varepsilon^2|w^*| + \varepsilon^{2-2\gamma} \leq \\ \leq& \alpha_2\mu\big(\varepsilon^{2\gamma}\big((1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma + \pi/2\big) + 1\big)\varepsilon^{2-2\gamma}\end{aligned}$$
3. el Lema 5.10 i les propietats de R^- que dóna el Corol·lari 3.48 ens permeten dir que
$$R^-\Big(\varepsilon^{-1}(w^* + R_1(w^*,\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)) - i\pi/2), \tau + \varepsilon^{-1}(w^*-w)\Big) = O(\varepsilon^{1-\gamma}).$$

Arribem doncs a la conclusió que:

$$|\mathcal{F}(0)(w,\tau)| = O(\varepsilon^{3\gamma}) + O(\varepsilon^{2-2\gamma}) + O(\varepsilon^{2-\gamma}),$$

o sigui, que $\exists\, c_0$ tal que

$$\|\mathcal{F}(0)\|^{(2)}_\infty \leq \frac{1}{2}\, c_0\big(\varepsilon^{3\gamma} + \varepsilon^{2-2\gamma}\big).$$

Com que estem suposant que $1/3 < \gamma < 1/2$, aleshores $3\gamma > 1$ i $2 - 2\gamma > 1$, per tant, $\forall\, R_1, R_1' \in \mathcal{B}\Big(c_0\big(\varepsilon^{3\gamma} + \varepsilon^{2-2\gamma}\big)\Big)$ podem usar els Lemes 5.11 i 5.12, arribant a:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(R_1) - \mathcal{F}(R_1')\|^{(2)}_\infty \leq& 2(1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma\|F_1(R_1,\cdot,\cdot) - F_1(R_1',\cdot,\cdot)\|^{(2)}_\infty \leq \\ \leq& 2(1-h_2)\overline{a}K_4\varepsilon^{3\gamma-1}\ln^{-2}(1/\varepsilon)\|R_1 - R_1'\|^{(2)}_\infty.\end{aligned}$$

La qual cosa assegura que, si $2(1-h_2)\overline{a}K_4\varepsilon^{3\gamma-1} \leq 1/2$, $\mathcal{F}$ és una contracció de $\mathcal{B}\Big(c_0\big(\varepsilon^{3\gamma}+\varepsilon^{2-2\gamma}\big)\Big)$ en ella mateixa. Per tant, el Teorema del Punt Fix ens indica que:

$$\exists!\, R_1^- \in \mathcal{B}\Big(c_0\big(\varepsilon^{3\gamma}+\varepsilon^{2-2\gamma}\big)\Big) \text{ tal que } R_1^- = \mathcal{F}(R_1^-)$$

i detallant la part de la dreta:

$$\begin{aligned} R_1^-(w,\tau) =& \mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{i}}\big(F_1(R_1^-,\cdot,\cdot)\big)(w,\tau) + \mathcal{C}^-\big(w^*,\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)\big) - \\ &- \varepsilon R^-\big(\varepsilon^{-1}(w^*+R_1^-(w^*,\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)) - i\pi/2), \tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)\big), \end{aligned}$$

la qual cosa, i també gràcies a la pròpia definició de l'operador $\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{i}}$ que té per conseqüència $\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{i}}\big(f\big)(w^*,\tau) = 0$, ens porta a que R_1^- compleix la condició (5.48) de l'enunciat.

Aplicant ara l'operador L_ε a $R_1^- = \mathcal{F}(R_1^-)$ i segons la definició (5.49) de $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon R_1^-(w,\tau) =& L_\varepsilon\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{i}}\big(F_1(R_1^-,\cdot,\cdot)\big)(w,\tau) + L_\varepsilon\mathcal{C}^-(w^*,\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)) - \\ &- \varepsilon L_\varepsilon R^-\Big(\varepsilon^{-1}(w^*+R_1^-(w^*,\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)) - i\pi/2), \tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)\Big). \end{aligned} \tag{5.50}$$

El Lema 5.11 assegura que $L_\varepsilon\mathcal{G}_\varepsilon^{\mathrm{i}}(\big(F_1(R_1^-,\cdot,\cdot)\big) = F_1(R_1^-,\cdot,\cdot)$, per tant, per tal que R_1^- sigui efectivament solució de l'Equació (5.47), només queda comprovar que els altres dos termes de (5.50) s'anul·len, però observem que donada $f(\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w))$ qualsevol,

$$\big(\varepsilon^{-1}\partial_\tau+\partial_w\big)f(\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)) = \varepsilon^{-1}f'(\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)) - \varepsilon^{-1}f'(\tau+\varepsilon^{-1}(w^*-w)) = 0.$$

Per tant, hem acabat la demostració. ■

Teorema 5.14. *Sigui R^- la funció definida al Corol·lari 3.48. Aleshores, $\exists\,\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $1/3 < \gamma < 1/2$, $0 < \mu \leq \mu_0$, $0 < \sigma < \sigma_0$ i $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, existeixen $0 < h_1 < h_2 < h_3 < 1$ i $\mathcal{C}^-(w,\tau)$ real-analítica a $D^{u(3)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$, tal que el canvi $u = w + \mathcal{C}^-(w,\tau)$ conjuga l'operador $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ definit a (5.5) amb el redreçat $L_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_w$.*

A més, existeix α_3 tal que

1. $\forall (w,\tau) \in D_\gamma^{u(3)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$, $\quad w + \mathcal{C}^-(w,\tau) \in D_\gamma^u \quad$ *i* $\quad |\mathcal{C}^-(w,\tau)| \leq \alpha_3\mu\varepsilon^2|w| + \alpha_3\mu\varepsilon^{2-2\gamma}$, $|\partial_w\mathcal{C}^-(w,\tau)| \leq \alpha_3\mu\varepsilon^{2-3\gamma}$, $\quad |\partial_w^2\mathcal{C}^-(w,\tau)| \leq \alpha_3\mu\varepsilon^{2-4\gamma}$.
2. $\forall (w,\tau) \in D_{\varepsilon,\pm}^{u(3)} \times \mathbb{T}_\sigma$, $\quad w + \mathcal{C}^-(w,\tau) \in D_{\varepsilon,\pm}^u \quad$ *i* $\quad |\partial_w^j\mathcal{C}^-(w,\tau)| \leq \alpha_3\varepsilon^{1-j}(\ln(1/\varepsilon))^{-1-j}$.

Demostració. El canvi a $D_\gamma^{u(3)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0} \subset D_\gamma^{u(2)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ ja el tenim per la Proposició 5.8. A $D_\varepsilon^{u(3)} \times \mathbb{T}_\sigma$, obtindrem el canvi a partir del $\mathcal{C}^-(w,\tau)$ trobat a la Proposició 5.8 usant la tècnica de matching: ja vam explicar que buscarem $R_1^-(w,\tau)$ tal que

$$u = g(w,\tau) = w + \varepsilon R^-\big(\varepsilon^{-1}(w+R_1^-(w,\tau) \mp i\pi/2), \tau\big) + R_1^-(w,\tau) \tag{5.51}$$

conjugui $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ amb L_ε a D_ε^u i compleixi la condició

$$\mathcal{C}^-(w^*,\tau) = \varepsilon R^-\big(\varepsilon^{-1}(w^*+R_1^-(w^*,\tau) \mp i\pi/2), \tau\big) + R_1^-(w^*,\tau)$$

on els punts w^* resultaran estar al domini outer. Farem només el cas $D_{\varepsilon,+}^{u(3)}$ i el $D_{\varepsilon,-}^{u(3)}$ es faria anàlogament.

Siguin $0 < h_1 < h_2 < 1$ les constants donades al Lema 5.10 i farem tota la demostració per a $w \in D^{u(2)}_{\varepsilon,+}$. Serà només al final, per la restricció d'aplicar la desigualtat de Cauchy, que haurem de reduir al domini $D^{u(3)}_{\varepsilon,+}$ i tots els resultats seran vàlids per a $w \in D^{u(3)}_{\varepsilon,+}$.

En el decurs de tota la demostració, $w^* = w^*(w)$ en el sentit que $\forall\, w \in D^{u(2)}_{\varepsilon,+}$, considerem w^* com el punt tal que $\Im m\, w^* = \Im m\, w$, $\Re e\, w^* < 0$ i $|w^* - i\pi/2| = (1-h_2)\overline{a}\varepsilon^\gamma$, la qual cosa implica, per la pròpia construcció de $D^{u(2)}_{\varepsilon,+}$ que vam fer, que $w^* \in D^{u(2)}_{\gamma}$.

Quan convingui i per simplificar les fórmules, usarem la notació

$$s = w + R_1(w,\tau), \quad \partial_\tau s = \partial_\tau R_1(w,\tau), \quad \partial_w s = 1 + \partial_w R_1(w,\tau).$$

Segons el Corol·lari 3.48, $\forall\,(x,\tau) \in \mathcal{D}^{u(1)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_\sigma$ la funció $R^-(x,\tau)$ és solució de l'Equació (3.91), que podem escriure com

$$\partial_\tau R^-(x,\tau) + \partial_x R^-(x,\tau) + 1 = -\frac{z^2}{4}\, \partial_z \phi_0^-(z,\tau)\Big|_{z=x+R^-(x,\tau)}. \tag{5.52}$$

El Lema 5.10 ens assegura que $\forall\,(w,\tau) \in D^{u(2)}_{\varepsilon,+} \times \mathbb{T}_\sigma$, aleshores $s = w + R_1(w,\tau) \in D^{u(1)}_{\varepsilon,+}$ i $u = s + \varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(s - i\pi/2),\tau) \in D^u_{\varepsilon,+}$ o, el que és el mateix, $\forall\, x = \varepsilon^{-1}(s - i\pi/2) \in \mathcal{D}^{u(1)}_{\varepsilon,+}$, aleshores $z = \varepsilon^{-1}(u - i\pi/2) = x + R^-(x,\tau) \in \mathcal{D}^u_{\varepsilon,+}$. Substituint a l'Equació (5.52) les variables inner x i z per les seves variables outer s i u, obtenim:

$$\begin{aligned}
&\partial_\tau R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau) + \partial_x R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau) + 1 = \\
&\qquad = -\frac{(u-i\pi/2)^2}{4\varepsilon^2}\, \partial_z \phi_0^-(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau)\Big|_{u=s+\varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau)}
\end{aligned}$$

que, usant la notació (5.38), podem reescriure com:

$$\partial_\tau R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau)+\partial_x R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau)+1 = -X^-(s+\varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau),\tau). \tag{5.53}$$

Segons el Lema 5.4, hem de trobar el canvi (5.51) com a solució de

$$L_\varepsilon g(w,\tau) = \frac{1}{4}\cosh^2 u\, \partial_u T^-\big(u,\tau\big)\Big|_{u=g(w,\tau)} \tag{5.54}$$

on, usant l'operador F_1 definit al Lema 5.12, la part dreta correspon a

$$\Big(\partial_x R^-\big(\varepsilon^{-1}(w+R_1(w,\tau)-i\pi/2),\tau\big)+1\Big)\cdot F_1(R_1,w,\tau) - X^-\left(g(w,\tau),\tau\right)$$

i la part esquerra és, segons (5.51) i usant l'Equació (5.53) que verifica R^-:

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon g(w,\tau) =& \big(\varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_w\big)\Big(w + \varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(w+R_1^-(w,\tau)-i\pi/2),\tau)\Big) + L_\varepsilon R_1^-(w,\tau) = \\
=& \partial_x R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau)\cdot\varepsilon^{-1}\partial_\tau R_1^-(w,\tau) + \partial_\tau R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau) + \\
&+ 1 + \partial_x R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau)\cdot\big(1+\partial_w R_1^-(w,\tau)\big) + \\
&+ L_\varepsilon R_1^-(w,\tau) = \\
=& \big(\partial_x R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau)+1\big)\, L_\varepsilon R_1^-(w,\tau) + \\
&+ \partial_\tau R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau) + \partial_x R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau) + 1 = \\
=& \big(\partial_x R^-(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau)+1\big)\, L_\varepsilon R_1^-(w,\tau) - X^-\left(s+\varepsilon R^-\big(\varepsilon^{-1}(s-i\pi/2),\tau\big),\tau\right).
\end{aligned}$$

Per tant, en realitat estem buscant una solució de:

$$L_\varepsilon R_1(w,\tau) = F_1(R_1,w,\tau)$$

amb la condició inicial implícita:

$$R_1(w^*,\tau) = \mathcal{C}^-(w^*,\tau) - \varepsilon R^-(\varepsilon^{-1}(w^* + R_1(w^*,\tau) - i\pi/2),\tau).$$

Però aquesta funció és precisament l'obtinguda a la Proposició 5.13.

A la Proposició 5.8 vam trobar $w+\mathcal{C}^-(w,\tau)$ solució de (5.54) analítica a $D_\gamma^{u(2)}\times\mathbb{T}_{\sigma_0}$ i ara hem trobat $g(w,\tau) = w+\varepsilon R^-\big(\varepsilon^{-1}(w+R_1^-(w,\tau)-i\pi/2),\tau\big)+R_1^-(w,\tau)$ solució de (5.54) continuació de $w+\mathcal{C}^-(w,\tau)$ a $D_\varepsilon^{u(2)}\times\mathbb{T}_\sigma$ i que és C^∞ respecte w per línies horitzontals. Les dues són doncs solució de la mateixa equació en derivades parcials i la segona és la continuació analítica de la primera, per tant, en realitat tenim un únic canvi analític $w+\mathcal{C}^-(w,\tau)$ a $\left(D_\gamma^{u(2)}\cup D_\varepsilon^{u(2)}\right)\times\mathbb{T}_\sigma$, amb la característica que

$$\forall\,(w,\tau)\in D_\varepsilon^{u(2)}\times\mathbb{T}_\sigma,\ \mathcal{C}^-(w,\tau) = \varepsilon R^-\big(\varepsilon^{-1}(w+R_1^-(w,\tau)\mp i\pi/2),\tau\big)+R_1^-(w,\tau).$$

Queda només arribar a les fites enunciades. El Lema 5.10 assegura que si $(w,\tau)\in D_{\varepsilon,+}^{u(2)}\times\mathbb{T}_\sigma$, aleshores $w+R_1^-(w,\tau)\in D_{\varepsilon,+}^{u(1)}$ i, per tant, $|w+R_1^-(w,\tau)-i\pi/2|\geq(1+h_1)c\varepsilon\ln(1/\varepsilon)$, la qual cosa, junt amb les propietats de la funció R^- donades al Corol·lari 3.48, ens permet dir que:

$$|R^-\big(\varepsilon^{-1}(w+R_1^-(w,\tau)-i\pi/2),\tau\big)|\leq d\frac{1}{\varepsilon^{-1}|w+R_1^-(w,\tau)-i\pi/2|}\leq d\frac{1}{(1+h_1)c}(\ln(1/\varepsilon))^{-1}$$

Per altra banda, la Proposició 5.13 assegura que

$$|R_1^-(w,\tau)|\leq c_0\big(\varepsilon^{3\gamma}+\varepsilon^{2-2\gamma}\big) = c_0\varepsilon\big(\varepsilon^{3\gamma-1}+\varepsilon^{1-2\gamma}\big)$$

on, pel fet que $1/3<\gamma<1/2$, tenim que $3\gamma-1>0$ i $1-2\gamma>0$. A més, és molt fàcil demostrar (com es veu a l'Apèndix A.5) que $\forall\,r>0$, $\exists\,k_0$ tal que $\forall\,\varepsilon\in(0,1)$

$$\varepsilon^r\leq k_0(\ln(1/\varepsilon))^{-1}$$

per tant, $|R_1^-(w,\tau)|\leq c_0\varepsilon k_0(\ln(1/\varepsilon))^{-1}$. Així doncs, la fita per a $\mathcal{C}^-$ quan $(w,\tau)\in D_{\varepsilon,+}^{u(2)}\times\mathbb{T}_\sigma$ és

$$|\mathcal{C}^-(w,\tau)|\leq\varepsilon d\frac{1}{(1+h_1)c}(\ln(1/\varepsilon))^{-1}+c_0\varepsilon k_0(\ln(1/\varepsilon))^{-1} = \left(\frac{d}{(1+h_1)c}+c_0k_0\right)\varepsilon(\ln(1/\varepsilon))^{-1}.$$

I usant les desigualtats de Cauchy per reducció del domini a, per exemple, $D_{\varepsilon,+}^{u(3)}$ també obtenim els fites de les seves derivades. Pel fet que $D_{\varepsilon,+}^{u(3)}\subset D_{\varepsilon,+}^{u(2)}$, els resultats podem donar-los tots a $D_{\varepsilon,+}^{u(3)}$.

Finalment, que $w+\varepsilon R^-\big(\varepsilon^{-1}(w+R_1^-(w,\tau)-i\pi/2),\tau\big)+R_1^-(w,\tau)\in D_{\varepsilon,+}^u$ ens ho assegura el Lema 5.10. ■

5.4 Demostració del Teorema 5.2.

A partir del canvi donat al Teorema 5.14 que conjuga $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ amb $\varepsilon^{-1}\partial_\tau+\partial_w$, podrem demostrar l'existència del canvi anunciat al Teorema 5.2 que conjugui $\mathcal{L}_\varepsilon$ amb $\varepsilon^{-1}\partial_\tau+\partial_v$.

Recordem que l'operador $\mathcal{L}_\varepsilon$ definit a (5.1) podem separar-lo en dues parts:

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon^- + \left[\frac{\cosh^2 u}{8}\left(\partial_u T^+(u,\tau) - \partial_u T^-(u,\tau)\right)\right]\partial_u.$$

on $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ està definit a (5.5). Per tant, el canvi $u = w + \mathcal{C}^-(w,\tau)$ trobat al Teorema 5.14 i definit a tot $D^{u(3)}$ conjuga $\mathcal{L}_\varepsilon$ amb

$$\varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_w + H(w,\tau)\partial_w = \varepsilon^{-1}\partial_\tau + \Big(1 + H(w,\tau)\Big)\partial_w, \tag{5.55}$$

on s'ha considerat la funció

$$H(w,\tau) := \frac{1}{1+\partial_w\mathcal{C}^-(w,\tau)}\left[\frac{\cosh^2 u}{8}\left(\partial_u T^+(u,\tau) - \partial_u T^-(u,\tau)\right)\right]_{\big| u=w+\mathcal{C}^-(w,\tau)}. \tag{5.56}$$

Hem de buscar ara un nou canvi $w = v + \mathcal{C}(v,\tau)$ que conjugui l'operador (5.55) amb $\varepsilon^{-1}\partial_\tau+\partial_v$, per tant, segons el Lema 5.4, la funció $\mathcal{C}$ haurà de ser solució de l'equació:

$$\big(\varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_v\big)\mathcal{C}(v,\tau) = H(v+\mathcal{C}(v,\tau),\tau). \tag{5.57}$$

El canvi final que conjugui $\mathcal{L}_\varepsilon$ amb $\varepsilon^{-1}\partial_\tau+\partial_v$ serà la composició dels dos trobats, és a dir,

$$u = v + \mathcal{C}(v,\tau) + \mathcal{C}^-\big(v+\mathcal{C}(v,\tau),\tau\big) = v + \mathcal{U}(v,\tau).$$

Així doncs, el domini de v haurà d'estar adequadament reduït en relació al de u. A partir dels dominis obtinguts al Teorema 5.14, definim $D^{u(3)} = D^{u(3)}_\gamma \cup D^{u(3)}_{\varepsilon,\pm}$, l'anàleg $D^{s(3)}$ i el domini $D^{(3)}$ tindrà la mateixa geometria que el D de la Figura 5.3 però tal que $D^{(3)} \subset \big(D^{u(3)}\cap D^{s(3)}\big)$. Per a una h_4 tal que $0<h_3<h_4<1$, definim el domini

$$D^{(4)} = D^{(4)}_o \cup D^{(4)}_i$$

de manera que tingui la mateixa geometria que D de la Figura 5.3, però amb $D^{(4)}\subset D^{(3)}$, és a dir, la unió dels dos indicats a la Figura 5.5 com la part ratllada. Bàsicament, les propietats que ens interessaran d'ells són, en primer lloc, que $D^{(4)}_o \cap D^{(4)}_i \neq \varnothing$, gràcies a la condició que vam imposar $a<\overline{a}$, i en segon lloc, la seva distància als punts $\pm i\pi/2$: amb $0<h_3<h_4<1$

si $v\in D^{(4)}_o$, aleshores $|v\pm i\pi/2| > (1+h_4)a\varepsilon^\gamma$,
si $v\in D^{(4)}_i$, aleshores $|v\pm i\pi/2| < (1-h_4)\overline{a}\varepsilon^\gamma$ i $|v\pm i\pi/2| > (1+h_4)c\varepsilon\ln(1/\varepsilon)$.

El canvi que busquem estarà definit a $D^{(4)}\times\mathbb{T}_\sigma$, cal doncs definir l'espai adequat de funcions:

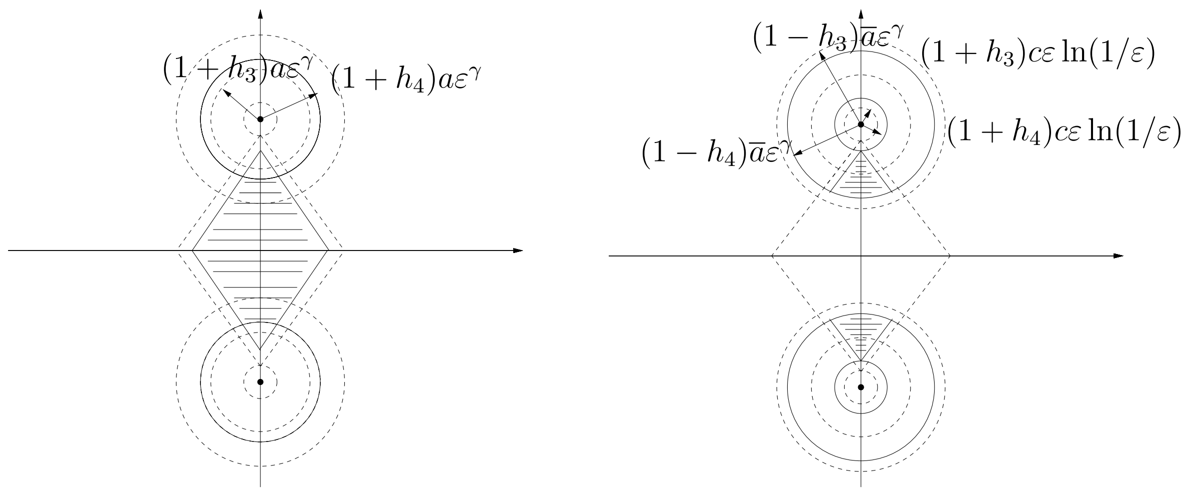


Figura 5.5: Dominis $D_o^{(4)} \subset D_o^{(3)} \subset D_o$ i $D_i^{(4)} \subset D_i^{(3)} \subset D_i$.

$\forall 0 < \sigma \leq \sigma_0$ definim les àlgebres de Banach:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\infty,\sigma}^{(4)} :=& \{\mathcal{C}(v,\tau) \mid \mathcal{C} : D^{(4)} \times \mathbb{T}_\sigma \longrightarrow \mathbb{C} \text{ real-analítica i } \|\mathcal{C}\|_\infty^{(4)} < \infty\}, \\ \mathcal{Z}_{1,\sigma}^{(4)} :=& \{\mathcal{C}(v,\tau) \mid \mathcal{C} : D^{(4)} \times \mathbb{T}_\sigma \longrightarrow \mathbb{C} \text{ real-analítica i } \|\mathcal{C}\|_{1,\sigma}^{(4)} < \infty\}, \end{aligned} \tag{5.58}$$

on la norma $\|\cdot\|_{1,\sigma}$ ja s'havia definit a (2.1) i la bola de radi r en qualsevol dels dos espais la notarem per $\mathcal{B}(r) := \{\mathcal{C} \in \mathcal{Z}_\cdot^{(4)} \text{ tq } \|\mathcal{C}\|_\cdot^{(4)} \leq r\}$.

Lema 5.15. *Siguin $c_0 > 0$, $\omega > 1$ i $\mathcal{C}^-$ la funció definida al Teorema 5.14. Aleshores, $\exists\, 0 < h_3 < h_4 < 1$ i $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tals que, per a qualssevol $0 < \mu \leq \mu_0$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ i $\mathcal{C} \in \mathcal{B}\big(c_0\varepsilon^\omega\big) \subset \mathcal{Z}_{\infty,\sigma_0}^{(4)}$, es compleix que*

$$\forall\,(v,\tau) \in D_o^{(4)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}, \begin{cases} w = v + \mathcal{C}(v,\tau) \in D_o^{(3)}, \\ u = v + \mathcal{C}(v,\tau) + \mathcal{C}^-\big(v + \mathcal{C}(v,\tau),\tau\big) \in D_o, \end{cases}$$

$$\forall\,(v,\tau) \in D_i^{(4)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}, \begin{cases} w = v + \mathcal{C}(v,\tau) \in D_i^{(3)}, \\ u = v + \mathcal{C}(v,\tau) + \mathcal{C}^-\big(v + \mathcal{C}(v,\tau),\tau\big) \in D_i, \end{cases}$$

Demostració. Prenem h_3 com la constant obtinguda al Teorema 5.14, on se'ns assegura que $\forall\, w = v + \mathcal{C}(v,\tau) \in D_o^{(3)}$ aleshores $u = v + \mathcal{C}(v,\tau) + \mathcal{C}^-\big(v + \mathcal{C}(v,\tau),\tau\big) \in D_o$. O sigui, que si demostrem que $\forall\,(v,\tau) \in D_o^{(4)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$, es compleix que $w \in D_o^{(3)}$, haurem acabat.

Busquem ara h_4 tal que $h_3 < h_4 < 1$ i, si $(v,\tau) \in D_o^{(4)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$, aleshores $w = v + \mathcal{C}(v,\tau) \in D_o^{(3)}$. L'existència d'aquesta h_4 s'obté de manera anàloga als Lemes 5.5 i 5.10.

El cas dels dominis inner D_i és anàleg. ∎

L'operador del lema següent, així com l'estudi de les seves propietats ja es pot trobar al treball [Sa01].

Lema 5.16. *Sigui* $\rho^* = \pi/2 - (1+h_4)c\varepsilon\ln(1/\varepsilon)$. $\forall f \in \mathcal{Z}^{(4)}_{1,\sigma_0}$ *definim l'operador* $\mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}$ *usant la sèrie de Fourier de* f*:*

$$\mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)^{[k]}(v) := \begin{cases} \displaystyle\int_{-i\rho^*}^{v} e^{ik\varepsilon^{-1}(t-v)} f^{[k]}(t)\,dt, & si\ k<0 \\ \displaystyle\int_0^v f^{[k]}(t)\,dt, & si\ k=0 \\ \displaystyle -\int_v^{i\rho^*} e^{ik\varepsilon^{-1}(t-v)} f^{[k]}(t)\,dt, & si\ k>0, \end{cases} \tag{5.59}$$

aleshores $\mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}$ *té les següents propietats:*

1. *és lineal.*
2. $L_\varepsilon \circ \mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*} = Id$*, on recordem que* $L_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_v$.
3. *si* ε *és prou petit, aleshores* $\exists\, A_3$ *tal que* $\|\mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)\|^{(4)}_{\infty,\sigma_0} < A_3|\ln\big(\varepsilon\ln(1/\varepsilon)\big)| \cdot \|f\|^{(4)}_{1,\sigma_0}$.
4. $\mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f) \in \mathcal{Z}^{(4)}_{\infty,\sigma_0}$.

Demostració. El primer apartat és evident. Per al segon apartat, observem que

$$L_\varepsilon \mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)(v,\tau) = \big(\varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_v\big)\mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)(v,\tau) = \sum_k (\varepsilon^{-1}ik + \partial_v)\mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)^{[k]}(v)e^{ik\tau},$$

però segons la definició (5.59), $\partial_v \mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)^{[0]}(v) = f^{[0]}(v)$ i per a $k \neq 0$, farem el cas $k<0$ i l'altre és anàleg:

$$\partial_v \mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)^{[k]}(v) = \int_{-i\rho^*}^{v} (-ik\varepsilon^{-1}) e^{ik\varepsilon^{-1}(t-v)} f^{[k]}(t)\,dt + f^{[k]}(v) = -ik\varepsilon^{-1}\mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)^{[k]}(v) + f^{[k]}(v).$$

Així doncs, $\forall\, k$

$$(\varepsilon^{-1}ik + \partial_v)\mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)^{[k]}(v) = f^{[k]}(v),$$

amb la qual cosa queda demostrat que $L_\varepsilon \circ \mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*} = \mathrm{Id}$.

A l'hora de calcular la integral, sempre considerarem com a camí d'integració la recta que uneix els dos punts donats com a límits d'integració, ja que així es compleix que $-k\,\Im m(t-v) \leq 0$ i podem deduir que:

$$\forall\, k, \quad |e^{ik\varepsilon^{-1}(t-v)}| = e^{-k\varepsilon^{-1}\,\Im m(t-v)} \leq 1.$$

Farem només el cas $k<0$ i els altres són totalment anàlegs. Així doncs, el camí d'integració serà l'indicat a la Figura 5.6: la línia recta de $-i\rho^*$ a v.

$$|\mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)^{[k]}(v)| \leq \left|\int_{-i\rho^*}^{v} |f^{[k]}(t)|\,dt\right| \leq \|f^{[k]}\cdot\cosh t\|_\infty \left|\int_{-i\rho^*}^{v} \frac{1}{|\cosh t|}\,dt\right| \leq \|f^{[k]}\|_1 \left|\int_{-i\rho^*}^{v} \frac{1}{|\cosh t|}\,dt\right|$$

La funció $|\cosh t|^{-1}$ té pols simples a $\pm i\pi/2$; això ens porta a separar la integral en dues parts, segons si $\Im m\,t > 0$ o si $\Im m\,t \leq 0$, posant en evidència en cadascuna d'elles la part

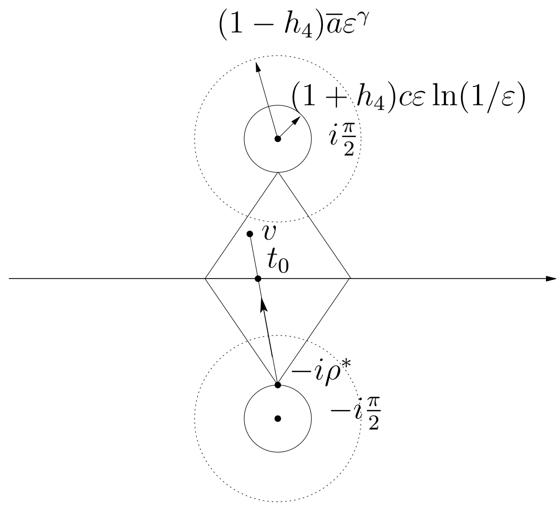


Figura 5.6: Camí d'integració.

principal de la funció. Si $\Im m\, v > 0$, sigui t_0 el punt del camí d'integració tal que $\Im m\, t_0 = 0$ i per les propietats (34) i (35) donades a l'Apèndix A.4, podem assegurar que:

$$\begin{aligned} \left|\int_{-i\rho^*}^{v} \frac{1}{|\cosh t|}\, dt\right| &\leq k_2 \left|\int_{-i\rho^*}^{t_0} \frac{1}{|t+i\pi/2|}\, dt + \int_{t_0}^{v} \frac{1}{|t-i\pi/2|}\, dt\right| \leq \\ &\leq K \sup_{t\in[-i\rho^*,t_0]} |\ln|t+i\pi/2|| + K \sup_{t\in[t_0,v]} |\ln|t-i\pi/2|| \end{aligned} \tag{5.60}$$

per a una certa constant $K > 0$. Si $\Im m\, v \leq 0$, el procés serà el mateix però només hi haurà una integral i és del mateix tipus que la primera.

El punt dels camins d'integració més proper a $-i\pi/2$ és $-i\rho^*$ i els més allunyats poden ser els vèrtexs del rombe que estan a l'eix real $(\pm x, 0)$ amb x fitada per una certa $x_0 > 0$, per tant,

$$(1+h_4)c\varepsilon\ln(1/\varepsilon) \leq |t+i\pi/2| \leq \sqrt{x_0^2+\pi^2/4}$$

i el mateix s'obté per a $|t-i\pi/2|$. Això vol dir que

$$\sup_{t\in[-i\rho^*,t_0]} |\ln|t+i\pi/2|| + \sup_{t\in[t_0,v]} |\ln|t-i\pi/2|| = 2\mathrm{màx}\left\{\left|\ln\left((1+\mathrm{h}_4)\mathrm{c}\varepsilon\ln(1/\varepsilon)\right)\right|, \ln\sqrt{\mathrm{x}_0^2+\pi^2/4}\right\}.$$

Així doncs, arribem a la conclusió que, si ε és prou petit, aleshores $|\ln\big((1+h_4)c\varepsilon\ln(1/\varepsilon)\big)|$ és prou gran per poder assegurar que $\exists A_3$ tal que

$$\left|\int_{-i\rho^*}^{v} \frac{1}{|\cosh t|}\, dt\right| \leq A_3 |\ln\big(\varepsilon\ln(1/\varepsilon)\big)|.$$

Pel que fa a l'últim apartat, el que acabem de demostrar ens dóna una fita de $\|\mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)\|_{\infty,\sigma}^{(4)}$ i per a la real-analiticitat usarem que les funcions reals-analítiques estan caracteritzades pel Principi de Reflexió:

$$f(\overline{x},\overline{y}) = \overline{f(x,y)},$$

que, en el cas que f sigui periòdica en y, la seva sèrie de Fourier ens permet expressar-ho com

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \forall\, x \in \mathbb{C}, \quad \overline{f^{[k]}(x)} = f^{[-k]}(\overline{x}),$$

d'on podem observar que, $\forall\, s \in (0,1)$ i $\forall\, v \in \mathbb{C}$,

$$\overline{f^{[k]}(v + s(i\rho^* - v))} = f^{[-k]}(\overline{v} - s(i\rho^* + \overline{v})). \tag{5.61}$$

Cal demostrar doncs que $\forall\, v \in \mathbb{C}$ es compleix $\overline{\mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)^{[k]}(v)} = \mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)^{[-k]}(\overline{v})$. Ho farem només per a $k > 0$ i els altres casos serien anàlegs. A la integral (5.59) farem el canvi $t = v + s(i\rho^* - v)$ per tal de tenir el camí real i poder passar la conjugació dins l'integrand:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)^{[k]}(v)} &= -\overline{\int_v^{i\rho^*} e^{ik\varepsilon^{-1}(t-v)} f^{[k]}(t)\, dt} = -\overline{(i\rho^* - v)}\overline{\int_0^1 e^{ik\varepsilon^{-1}s(i\rho^*-v)} f^{[k]}(v + s(i\rho^* - v))\, ds} = \\ &= (\overline{v} + i\rho^*) \int_0^1 e^{-ik\varepsilon^{-1}s(-i\rho^*-\overline{v})} \overline{f^{[k]}(v + s(i\rho^* - v))}\, ds = \\ &= (\overline{v} + i\rho^*) \int_0^1 e^{-ik\varepsilon^{-1}s(-i\rho^*-\overline{v})} f^{[-k]}(\overline{v} - s(i\rho^* + \overline{v}))\, ds,\end{aligned}$$

fent ara el canvi $t = \overline{v} - s(i\rho^* + \overline{v})$,

$$\overline{\mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)^{[k]}(v)} = -\int_{\overline{v}}^{-i\rho^*} e^{-ik\varepsilon^{-1}(t-\overline{v})} f^{[-k]}(t)\, dt = \mathcal{G}_\varepsilon^{\rho^*}(f)^{[-k]}(\overline{v}). \qquad \blacksquare$$

Lema 5.17. *Siguin $c_0 > 0$, $\omega > 1$ i H la funció definida a (5.56). Aleshores, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $1/3 < \gamma < 1/2$, $0 < \mu \le \mu_0$, $0 < \sigma < \sigma_0$ i $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, l'operador*

$$F_2(\mathcal{C}, v, \tau) := H(v + \mathcal{C}(v,\tau), \tau)$$

definit $\forall\, (v,\tau) \in D^{(4)} \times \mathbb{T}_\sigma$ i $\forall\, \mathcal{C} \in \mathcal{B}\big(c_0\varepsilon^\omega\big) \subset \mathcal{Z}_{\infty,\sigma}^{(4)}$, té les següents propietats:

1. *$F_2(\mathcal{C}, \cdot, \cdot) \in \mathcal{Z}_{1,\sigma}^{(4)}$.*
2. *$\exists K_5, K_6$ i $\nu_2 > 0$ tals que*
   - **a.** $\|F_2(\mathcal{C}, \cdot, \cdot)\|_{1,\sigma}^{(4)} \le \frac{1}{2} K_5\Big(\varepsilon^{2-2\gamma} + \varepsilon^{3\gamma} + \varepsilon^{1+c} \ln^3(1/\varepsilon)\Big)$.
   - **b.** $\|F_2(\mathcal{C}, \cdot, \cdot) - F_2(\mathcal{C}', \cdot, \cdot)\|_{1,\sigma}^{(4)} \le K_6 \varepsilon^{\nu_2} \|\mathcal{C} - \mathcal{C}'\|_\infty^{(4)}$.

Demostració. El primer apartat, quant a la periodicitat i la real-analiticitat, es basa en les propietats de les funcions que intervenen a la definició de F_2 i quedarà totalment demostrat quan es vegi l'apartat 2a.

En el decurs d'aquesta demostració usarem diverses característiques de les funcions $\cosh v$ i $\mathcal{C}^-$ que tot seguit detallem.

Segons les propietats (33), (34) i (35),

$$\begin{aligned}&\forall\, v \in D_{\varepsilon,\pm}^{u(i)}, |\cosh v| \le k_1 |v \mp i\pi/2| \le k_1(1 - h_i)\overline{a}\varepsilon^\gamma, \\ &\forall\, v \in D_{\varepsilon,\pm}^{u(i)}, |\cosh v|^{-1} \le k_2 |v \mp i\pi/2|^{-1} \le k_2(1 + h_i)^{-1} c^{-1}\varepsilon^{-1}\ln^{-1}(1/\varepsilon), \\ &\forall\, v \in D_\gamma^{u(i)}, |\cosh v|^{-1} \le k_2 |v \pm i\pi/2|^{-1} \le k_2(1 + h_i)^{-1} a^{-1}\varepsilon^{-\gamma}.\end{aligned} \tag{5.62}$$

I per altra banda,

$$\forall\, v \quad \text{tal que} \quad -u_0 \leq \Re e\, v \leq u_0, \quad \text{sabem que} \quad |\sinh v|, |\cosh v| \leq e^{u_0}. \tag{5.63}$$

Sovint, i per facilitar l'escriptura de les fórmules, usarem la notació

$$w = v + \mathcal{C}(v,\tau) \quad \text{i} \quad u = w + \mathcal{C}^-(w,\tau) = v + \mathcal{C}(v,\tau) + \mathcal{C}^-(v + \mathcal{C}(v,\tau),\tau),$$

on veiem que, per les hipòtesis sobre $\mathcal{C}$ i el Teorema 5.14, u és ε-proper a v, per tant seria fàcil demostrar que existeix una constant $M_1 > 0$ tal que

$$\left| \frac{\cosh v}{\cosh u} \right| \leq M_1, \tag{5.64}$$

relació que farem servir en el decurs de la demostració diverses vegades.

Per a la demostració de l'Apartat 2a necessitem fitar l'expressió:

$$\begin{aligned} F_2(\mathcal{C},v,\tau) &= H(v+\mathcal{C}(v,\tau),\tau) = \\ &= \frac{1}{1+\partial_w \mathcal{C}^-(w,\tau)} \left[\frac{\cosh^2 u}{8} \big(\partial_u T^+ - \partial_u T^-\big)(u,\tau) \right]_{\big| u = w + \mathcal{C}^-(w,\tau)}. \end{aligned}$$

Usant el Teorema 5.14, $|\partial_w \mathcal{C}^-(w,\tau)| \leq \ln^{-2}(1/\varepsilon)$, per tant, podem assegurar que $\exists\, M_2$ tal que

$$\forall\,(w,\tau) \in D^{(3)} \times \mathbb{T}_\sigma, \quad \left| \frac{1}{1+\partial_w \mathcal{C}^-(w,\tau)} \right| \leq M_2. \tag{5.65}$$

Pel que fa al segon factor de $F_2(\mathcal{C},v,\tau)$, haurem de diferenciar en quin domini està la variable u.

A D_o separarem $\partial_u T^+ - \partial_u T^-$ en dues parts, tenint en compte que sabem que la part principal de $T^\pm(u,\tau)$ és $T_0(u) + \varepsilon T_1(u,\tau)$:

$$\partial_u T^+ - \partial_u T^- = \big(\partial_u T^+ - T_0' - \varepsilon \partial_u T_1\big) - \big(\partial_u T^- - T_0' - \varepsilon \partial_u T_1\big) = \partial_u Q^+ - \partial_u Q^-. \tag{5.66}$$

Segons el Teorema 2.1, a $D_o \times \mathbb{T}_\sigma$

$$\big\|\cosh^2 u \big(\partial_u T^+ - \partial_u T^-\big)\big\|_\infty \leq \|\partial_u Q^+\|_{2,\sigma_0} + \|\partial_u Q^-\|_{2,\sigma_0} \leq 2 b_0 \mu \varepsilon^{2-2\gamma}, \tag{5.67}$$

per tant, com que segons el Lema 5.15 sempre que $(v,\tau) \in D_o^{(4)} \times \mathbb{T}_\sigma$ podem assegurar que $w = v + \mathcal{C}(v,\tau) \in D_o^{(3)}$ i $u = w + \mathcal{C}^-(w,\tau) \in D_o$, arribem al resultat:

$$\forall\,(v,\tau) \in D_o^{(4)} \times \mathbb{T}_\sigma, \quad |F_2(\mathcal{C},v,\tau) \cdot \cosh v| \leq \left\| \frac{1}{1+\partial_w \mathcal{C}^-} \right\|_\infty^{(3)} \frac{1}{8} 2 b_0 \mu \varepsilon^{2-2\gamma} \|\cosh v\|_\infty^{(4)}$$

i ara, usant (5.63) i (5.65), a $D_o^{(4)} \times \mathbb{T}_\sigma$

$$\|F_2(\mathcal{C},\cdot,\cdot) \cdot \cosh v\|_\infty^{(4)} \leq M_2 \frac{1}{8} 2 b_0 \mu \varepsilon^{2-2\gamma}\, e^{u_0}. \tag{5.68}$$

A $D_i = D_{i,+} \cup D_{i,-}$, la diferència $\partial_u T^+ - \partial_u T^-$ la separarem d'una altra manera: fent el canvi $T^\pm(u,\tau) = \varepsilon^{-1}\phi^\pm(\varepsilon^{-1}(u \mp i\pi/2),\tau)$ i sabent que la part principal de $\phi^\pm$ correspon a $\phi_0^\pm$. Només farem el cas de la part $D_{i,+}$:

$$\begin{aligned}\big(\partial_u T^+ - \partial_u T^-\big)(u,\tau) =& \varepsilon^{-2}\big(\partial_z\phi^+ - \partial_z\phi_0^+\big)(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau) - \\ &- \varepsilon^{-2}\big(\partial_z\phi^- - \partial_z\phi_0^-\big)(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau) + \\ &+ \varepsilon^{-2}\big(\partial_z\phi_0^+ - \partial_z\phi_0^-\big)(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau).\end{aligned} \tag{5.69}$$

Segons les fites (5.62) per a $\cosh^3 u$, el Teorema 4.1 i el Corol·lari 3.30, a $D_{i,+}\times\mathbb{T}_\sigma$

$$\big\|\cosh^3 u\big(\partial_u T^+ - \partial_u T^-\big)\big\|_\infty \le k_1^3\overline{a}^3\varepsilon^{3\gamma}\varepsilon^{-2}\,2d_0\varepsilon^2 + k_1^3|u-i\pi/2|^3\varepsilon^{-2}d_1 e^{\varepsilon^{-1}\Im m(u-i\pi/2)},$$

on és important observar que si $\Im m\, z<0$, la funció $|z|^3e^{\Im m\, z}$ té el seu valor màxim en el punt on $\Im m\, z$ sigui el més gran possible; en el nostre cas, $z=\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2)$ i el valor més gran de $\Im m\, z$ és $-c\ln(1/\varepsilon)$, per tant

$$|u-i\pi/2|^3\varepsilon^{-2}e^{\varepsilon^{-1}\Im m(u-i\pi/2)} = \varepsilon|z|^3e^{\Im m\, z} \le \varepsilon c^3\ln^3(1/\varepsilon)\varepsilon^c, \tag{5.70}$$

la qual cosa ens permet dir que $\exists\, M_3$ tal que a $D_{i,+}\times\mathbb{T}_\sigma$

$$\big\|\cosh^3 u\big(\partial_u T^+ - \partial_u T^-\big)\big\|_\infty \le k_1^3\overline{a}^3 2d_0\varepsilon^{3\gamma} + k_1^3c^3d_1\varepsilon^{1+c}\ln^3(1/\varepsilon) \le M_3\Big(\varepsilon^{3\gamma}+\varepsilon^{1+c}\ln^3(1/\varepsilon)\Big). \tag{5.71}$$

Per tant, com que segons el Lema 5.15 sempre que $(v,\tau)\in D_{i,+}^{(4)}\times\mathbb{T}_\sigma$ podem assegurar que $w\in D_{i,+}^{(3)}$ i $u\in D_{i,+}$, aleshores

$$\forall\,(v,\tau)\in D_{i,+}^{(4)}\times\mathbb{T}_\sigma,\quad |F_2(\mathcal{C},v,\tau)\cdot\cosh v| \le \left\|\frac{1}{1+\partial_w\mathcal{C}^-}\right\|_\infty^{(3)}\frac{1}{8}M_3\Big(\varepsilon^{3\gamma}+\varepsilon^{1+c}\ln^3(1/\varepsilon)\Big)\left\|\frac{\cosh v}{\cosh u}\right\|_\infty^{(4)}$$

i ara, usant (5.62), (5.64) i (5.65),

$$\forall\,(v,\tau)\in D_{i,+}^{(4)}\times\mathbb{T}_\sigma,\quad |F_2(\mathcal{C},\cdot,\cdot)\cdot\cosh v| \le M_2\frac{1}{8}M_3\Big(\varepsilon^{3\gamma}+\varepsilon^{1+c}\ln^3(1/\varepsilon)\Big)M_1. \tag{5.72}$$

Per (5.68) i (5.72), si $0<\mu\le\mu_0$, podem assegurar finalment que: $\exists\, M_4$ tal que

$$\|F_2(\mathcal{C},\cdot,\cdot)\cdot\cosh v\|_\infty^{(4)} \le M_4\Big(\varepsilon^{2-2\gamma}+\varepsilon^{3\gamma}+\varepsilon^{1+c}\ln^3(1/\varepsilon)\Big),$$

que, tenint en compte la propietat (2.2), que dóna la igualtat d'ordre entre les normes $\|\cdot\cosh v\|_\infty$ i $\|\cdot\|_{1,\sigma}$, ens permet arribar al resultat de l'Apartat 2a: $\exists\, K_5$ tal que

$$\|F_2(\mathcal{C},\cdot,\cdot)\|_{1,\sigma}^{(4)} \le \frac{1}{2}K_5\Big(\varepsilon^{2-2\gamma}+\varepsilon^{3\gamma}+\varepsilon^{1+c}\ln^3(1/\varepsilon)\Big).$$

Per demostrar l'Apartat 2b, usarem el Teorema del Valor Mitjà: sigui $\mathcal{C}_t = t\mathcal{C}+(1-t)\mathcal{C}'$ per a una certa $t\in(0,1)$, llavors

$$\begin{aligned}(F_2(\mathcal{C},v,\tau)-F_2(\mathcal{C}',v,\tau))\cdot\cosh v &= (H(v+\mathcal{C}(v,\tau),\tau)-H(v+\mathcal{C}'(v,\tau),\tau))\cdot\cosh v = \\ &= \int_0^1 \partial_w H(v+\mathcal{C}_t(v,\tau),\tau)\,dt\cdot\cosh v\cdot(\mathcal{C}(v,\tau)-\mathcal{C}'(v,\tau))\end{aligned} \tag{5.73}$$

amb

$$\begin{aligned}\partial_w H(w,\tau) = & \frac{-\partial_w^2 \mathcal{C}^-(w,\tau)}{(1+\partial_w \mathcal{C}^-(w,\tau))^2}\left[\frac{\cosh^2 u}{8}\big(\partial_u T^+ - \partial_u T^-\big)(u,\tau)\right]_{\big| u=w+\mathcal{C}^-(w,\tau)} + \\ & + \left[\frac{\sinh u \cosh u}{4}\big(\partial_u T^+ - \partial_u T^-\big)(u,\tau)\right]_{\big| u=w+\mathcal{C}^-(w,\tau)} + \\ & + \left[\frac{\cosh^2 u}{8}\big(\partial_u^2 T^+ - \partial_u^2 T^-\big)(u,\tau)\right]_{\big| u=w+\mathcal{C}^-(w,\tau)} .\end{aligned}$$

Considerarem cada terme per separat i estudiarem una fita de $\partial_w H(v+\mathcal{C}_t(v,\tau),\tau)\cdot\cosh v$ segons el domini de v.

Començarem primer situant-nos a la zona outer i, per tant, tenint en compte la separació (5.66). Sabem pel Lema 5.15 que $\forall\, v \in D_o^{(4)}$, $w = w_t = v + \mathcal{C}_t(v,\tau) \in D_o^{(3)}$ i $u = u_t = w + \mathcal{C}^-(w,\tau) \in D_o$; per tant, ho usarem en qualsevol moment.

Utilitzant (5.65), (5.67) i les fites de la derivada segona de $\mathcal{C}^-$ del Teorema 5.14:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{-\partial_w^2 \mathcal{C}^-(w,\tau)}{(1+\partial_w \mathcal{C}^-(w,\tau))^2}\right|\left|\frac{\cosh^2 u}{8}\big(\partial_u T^+ - \partial_u T^-\big)(u,\tau)_{\big| u=w+\mathcal{C}^-(w,\tau)}\right| \leq \\ &\qquad \leq \alpha_3 \mu \varepsilon^{2-4\gamma} M_2^2 \frac{1}{8}\, 2 b_0 \mu \varepsilon^{2-2\gamma} \leq \alpha_3 \mu^2 M_2^2 \frac{1}{4}\, b_0 \varepsilon^{4-6\gamma}.\end{aligned}$$

Així, per fitar el primer terme de $\partial_w H(w,\tau)\cdot\cosh v$ només cal multiplicar aquesta fita que acabem de trobar per e^{u_0}, segons indica (5.63).

Per al segon terme de $\partial_w H(w,\tau)\cdot\cosh v$, usarem (5.63), (5.64) i el mateix resultat del Teorema 2.1 d'abans:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\sinh u \cosh u}{4}\,\big(\partial_u T^+ - \partial_u T^-\big)(u,\tau)_{\big| u=w+\mathcal{C}^-(w,\tau)}\cdot\cosh v\right| \leq \\ &\qquad \leq \left|\frac{\cosh v}{\cosh u}\right|\,\left|\frac{\sinh u}{4}\right|\,\left|\cosh^2 u\big(\partial_u T^+ - \partial_u T^-\big)(u,\tau)_{\big| u=w+\mathcal{C}^-(w,\tau)}\right| \leq \\ &\qquad \leq M_1 \frac{e^{u_0}}{4}\, 2 b_0 \mu \varepsilon^{2-2\gamma}.\end{aligned}$$

Pel que fa al tercer terme de $\partial_w H(w,\tau)\cdot\cosh v$, (5.63) i el Teorema 2.1 ens tornen a donar el resultat:

$$\left|\frac{\cosh^2 u}{8}\big(\partial_u^2 T^+ - \partial_u^2 T^-\big)(u,\tau)_{\big| u=w+\mathcal{C}^-(w,\tau)}\cdot\cosh v\right| \leq \frac{1}{8} 2 b_0 \mu \varepsilon^{2-3\gamma} e^{u_0}.$$

Així doncs, recollint aquests tres últims resultats, arribem a la conclusió que $\exists\, M_5$ tal que

$$\forall\,(v,\tau) \in D_o^{(4)} \times \mathbb{T}_\sigma, \quad |\partial_w H(v+\mathcal{C}_t(v,\tau),\tau)\cdot\cosh v| \leq M_5 \varepsilon^{2-3\gamma}. \tag{5.74}$$

Analitzem ara $\partial_w H\cdot\cosh v$ a $D_{i,+}$ (un procés anàleg es pot fer per a $D_{i,-}$) tenint en compte que $\forall\,(v,\tau) \in D_{i,+}^{(4)} \times \mathbb{T}_\sigma$, sabem pel Lema 5.15 que $w = w_t = v + \mathcal{C}_t(v,\tau) \in D_{i,+}^{(3)}$ i $u = u_t = w + \mathcal{C}^-(w,\tau) \in D_{i,+}$.

A (5.71) ja havíem demostrat que a $D_{i,+} \times \mathbb{T}_\sigma$:

$$\| \cosh^3 u\big(\partial_u T^+ - \partial_u T^-\big)\|_\infty \leq M_3\Big(\varepsilon^{3\gamma} + \varepsilon^{1+c}\ln^3(1/\varepsilon)\Big)$$

i això ens permet fitar el primer terme de $\partial_w H \cdot \cosh v$, usant a més (5.64), (5.65) i la fita del Teorema 5.14 per a $\partial_w^2 \mathcal{C}^-$:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{-\partial_w^2\mathcal{C}^-(w,\tau)}{(1+\partial_w\mathcal{C}^-(w,\tau))^2}\frac{\cosh^2 u}{8}\big(\partial_u T^+ - \partial_u T^-\big)(u,\tau)_{\big|u=w+\mathcal{C}^-(w,\tau)}\cdot\cosh v\right| = \\
&\quad = \frac{1}{8}\left|\frac{\cosh v}{\cosh u}\right| \frac{|\partial_w^2\mathcal{C}^-(w,\tau)|}{|1+\partial_w\mathcal{C}^-(w,\tau)|^2}\left|\cosh^3 u\big(\partial_u T^+ - \partial_u T^-\big)(u,\tau)_{\big|u=w+\mathcal{C}^-(w,\tau)}\right| \leq \\
&\quad \leq \frac{1}{8} M_1\alpha_3\varepsilon^{-1}\ln^{-3}(1/\varepsilon) M_2^2 M_3\Big(\varepsilon^{3\gamma}+\varepsilon^{1+c}\ln^3(1/\varepsilon)\Big) \leq \\
&\quad \leq \frac{1}{8} M_1\alpha_3 M_2^2 M_3\Big(\varepsilon^{3\gamma-1}\ln^{-3}(1/\varepsilon)+\varepsilon^{c}\Big).
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Per al segon terme de $\partial_w H \cdot \cosh v$, farem un raonament anàleg al fet a (5.71), arribant al resultat:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\sinh u \cosh u}{4}\big(\partial_u T^+ - \partial_u T^-\big)(u,\tau)_{\big|u=w+\mathcal{C}^-(w,\tau)}\cdot\cosh v\right| \leq \\
&\quad \leq \frac{|\sinh u|}{4}\left|\frac{\cosh v}{\cosh u}\right|\left|\cosh^2 u\big(\partial_u T^+ - \partial_u T^-\big)(u,\tau)_{\big|u=w+\mathcal{C}^-(w,\tau)}\right| \leq \\
&\quad \leq \frac{e^{u_0}}{4} M_1 M_3\Big(\varepsilon^{2\gamma}+\varepsilon^{c}\ln^2(1/\varepsilon)\Big).
\end{aligned} \tag{5.76}$$

Finalment, per al tercer terme de $\partial_w H \cdot \cosh v$, també faríem un raonament anàleg al fet a (5.71) però ara intervindrien les fites de les derivades segones obtingudes al Teorema 4.1 i al Corol·lari 3.30 i tindríem en compte que $\partial_u^2 T^\pm(u,au) = \varepsilon^{-3}\partial_z^2\phi^\pm(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau)$; així, a $D_{i,+}\times\mathbb{T}_\sigma$,

$$\Big\|\cosh^3 u\big(\partial_u^2 T^+ - \partial_u^2 T^-\big)\Big\|_\infty \leq k_1^3\overline{a}^3\varepsilon^{3\gamma}\varepsilon^{-3}\,2d_0\frac{\varepsilon^2}{\ln^2(1/\varepsilon)} + k_1^3|u-i\pi/2|^3\varepsilon^{-3}d_1 e^{\varepsilon^{-1}\,\Im m(u-i\pi/2)},$$

i, igual que a (5.70),

$$|u-i\pi/2|^3\varepsilon^{-3}e^{\varepsilon^{-1}\,\Im m(u-i\pi/2)} = |z|^3 e^{\Im m\, z} \leq c^3\ln^3(1/\varepsilon)\varepsilon^c.$$

Per tant, $\exists\, M_6$ tal que

$$\|\cosh^3 u\big(\partial_u^2 T^+ - \partial_u^2 T^-\big)\|_\infty \leq M_6\Big(\varepsilon^{3\gamma-1}\ln^{-2}(1/\varepsilon)+\varepsilon^c\ln^3(1/\varepsilon)\Big),$$

per arribar a la fita definitiva per a aquest tercer terme:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\cosh^2 u}{8}\big(\partial_u^2 T^+ - \partial_u^2 T^-\big)(u,\tau)_{\big|u=w+\mathcal{C}^-(w,\tau)}\cdot\cosh v\right| = \\
&\quad = \frac{1}{8}\left|\frac{\cosh v}{\cosh u}\right|\left|\cosh^3 u\big(\partial_u^2 T^+ - \partial_u^2 T^-\big)(u,\tau)_{\big|u=w+\mathcal{C}^-(w,\tau)}\right| \leq \\
&\quad \leq \frac{1}{8}M_1 M_6\Big(\varepsilon^{3\gamma-1}\ln^{-2}(1/\varepsilon)+\varepsilon^c\ln^3(1/\varepsilon)\Big).
\end{aligned} \tag{5.77}$$

A partir de les fites (5.75), (5.76) i (5.77) trobades, podem ara arribar a una per a tota l'expressió $\partial_w H \cdot \cosh v$: existeix una constant M_7 tal que

$$\forall\,(v,\tau) \in D^{(4)}_{i,+} \times \mathbb{T}_\sigma, \quad |\partial_w H(v+\mathcal{C}_t(v,\tau),\tau)\cdot\cosh v| \le M_7\big(\varepsilon^{3\gamma-1}\ln^{-2}(1/\varepsilon)+\varepsilon^c\ln^3(1/\varepsilon)\big). \quad (5.78)$$

Així doncs, tenim una fita de $\partial_w H(v+\mathcal{C}_t(v,\tau),\tau)\cdot\cosh v$ a tot el domini $D^{(4)}\times\mathbb{T}_\sigma$: la informació de (5.74) i (5.78), ens permet assegurar existeix una constant M_8 tal que $\forall\,(v,\tau)\in D^{(4)}\times\mathbb{T}_\sigma$,

$$|\partial_w H(v+\mathcal{C}_t(v,\tau),\tau)\cdot\cosh v| \le M_8\big(\varepsilon^{2-3\gamma}+\varepsilon^{3\gamma-1}\ln^{-2}(1/\varepsilon)+\varepsilon^c\ln^3(1/\varepsilon)\big),$$

per tant, com que $1/3<\gamma<1/2$, hi ha una $\nu_2>0$ tal que, simplificant aquesta fita, podem donar-la com:

$$|\partial_w H(v+\mathcal{C}_t(v,\tau),\tau)\cdot\cosh v| \le M_8\varepsilon^{\nu_2}. \quad (5.79)$$

Finalment, segons la propietat (2.2),

$$\|F_2(\mathcal{C},\cdot,\cdot)-F_2(\mathcal{C}',\cdot,\cdot)\|^{(4)}_{1,\sigma} \le q_{\sigma_0-\sigma}\|\,(F_2(\mathcal{C},\cdot,\cdot)-F_2(\mathcal{C}',\cdot,\cdot))\cdot\cosh v\|^{(4)}_\infty,$$

per tant, l'expressió (5.73) es converteix en:

$$\|F_2(\mathcal{C},\cdot,\cdot)-F_2(\mathcal{C}',\cdot,\cdot)\|^{(4)}_{1,\sigma} \le q_{\sigma_0-\sigma}\|\partial_w H(v+\mathcal{C}_t(v,\tau),\tau)\cdot\cosh v\|^{(4)}_\infty\cdot\|\mathcal{C}-\mathcal{C}'\|^{(4)}_\infty$$

i el resultat (5.79) ens porta al que volíem per a l'Apartat 2b. ■

Amb els Lemes 5.15, 5.16 i 5.17 i el Teorema 5.14, tenim totes les eines necessàries per demostrar el Teorema 5.2.

Demostració del Teorema 5.2. Per resoldre l'Equació (5.57), plantejarem un problema de punt fix a partir dels operadors $\mathcal{G}^{\rho^*}_\varepsilon$ definit al Lema 5.16 i F_2 definit al Lema 5.17: definim l'operador

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) := \mathcal{G}^{\rho^*}_\varepsilon(F_2(\mathcal{C},\cdot,\cdot))$$

i demostrarem que té un punt fix $\mathcal{C}\in\mathcal{B}(c_0\varepsilon^\omega)\subset\mathcal{Z}^{(4)}_{\infty,\sigma}$ per a una certa $\omega>1$.

Els Lemes 5.16 i 5.17 ens permeten assegurar que existeix c_0 tal que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(0)\|^{(4)}_\infty \le&\|\mathcal{F}(0)\|^{(4)}_{\infty,\sigma} = \|\mathcal{G}^{\rho^*}_\varepsilon(F_2(0,\cdot,\cdot))\|^{(4)}_{\infty,\sigma} \le A_3|\ln\big(\varepsilon\ln(1/\varepsilon)\big)|\cdot\|F_2(0,\cdot,\cdot)\|^{(4)}_{1,\sigma}\le\\ &\le A_3|\ln\big(\varepsilon\ln(1/\varepsilon)\big)|\cdot\frac{1}{2}K_5\Big(\varepsilon^{2-2\gamma}+\varepsilon^{3\gamma}+\varepsilon^{1+c}\ln^3(1/\varepsilon)\Big)\le\frac{1}{2}\,c_0\,\varepsilon\,m(\varepsilon),\end{aligned}$$

on s'ha definit $m(\varepsilon)=|\ln\big(\varepsilon\ln(1/\varepsilon)\big)|\cdot\Big(\varepsilon^{1-2\gamma}+\varepsilon^{3\gamma-1}+\varepsilon^c\ln^3(1/\varepsilon)\Big)$ que, gràcies al fet que $1/3<\gamma<1/2$ i la informació de l'Apèndix A.5, podem assegurar que està fitada per una potència positiva de ε d'exponent ν_0 on

$$0<\nu_0<\text{mín}\{1-2\gamma,3\gamma-1,c\}; \quad (5.80)$$

així doncs $\varepsilon\,m(\varepsilon)=O(\varepsilon^{1+\nu_0})$.

Veurem ara que $\mathcal{F}$ és una contracció a $\mathcal{B}(\alpha_0\varepsilon^{1+\nu_0})$: $\forall\,\mathcal{C},\mathcal{C}'\in\mathcal{B}(\alpha_0\varepsilon^{1+\nu_0})$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(\mathcal{C})-\mathcal{F}(\mathcal{C}')\|^{(4)}_\infty \le&\|\mathcal{F}(\mathcal{C})-\mathcal{F}(\mathcal{C}')\|^{(4)}_{\infty,\sigma} = \|\mathcal{G}^{\rho^*}_\varepsilon(F_2(\mathcal{C},\cdot,\cdot)-F_2(\mathcal{C}',\cdot,\cdot))\|^{(4)}_{\infty,\sigma}\le\\ &\le A_3|\ln\big(\varepsilon\ln(1/\varepsilon)\big)|\cdot\|F_2(\mathcal{C},\cdot,\cdot)-F_2(\mathcal{C}',\cdot,\cdot)\|^{(4)}_{1,\sigma}\le\\ &\le A_3|\ln\big(\varepsilon\ln(1/\varepsilon)\big)|K_6\varepsilon^{\nu_2}\|\mathcal{C}-\mathcal{C}'\|^{(4)}_\infty.\end{aligned}$$

Com que per a qualsevol $\nu_2 > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\nu_2} \ln\big(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)\big) = 0,$$

si ε és suficientment petit, $\mathcal{F}$ és una contracció d'una certa bola $\mathcal{B}(c_0\varepsilon^{1+\nu_0}) \subset \mathcal{Z}^{(4)}_{\infty,\sigma}$ en ella mateixa. Per tant, el Teorema del Punt Fix assegura que:

$$\exists!\, \mathcal{C} \in \mathcal{B}(c_0\varepsilon^{1+\nu_0}) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{F}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$

L'Apartat 2 del Lema 5.16 ens permet arribar a una solució de (5.57) i, per tant, tenir el canvi $u = v + \mathcal{U}(v,\tau)$ amb

$$\mathcal{U}(v,\tau) = \mathcal{C}(v,\tau) + \mathcal{C}^-(v + \mathcal{C}(v,\tau), \tau).$$

Queda només calcular la fita de la funció $\mathcal{U}$; les de les seves derivades s'obtindran reduint el domini i usant les desigualtats de Cauchy.

Segons el Lema 5.15, com que $|\mathcal{C}(v,\tau)| \leq c_0\varepsilon^{1+\nu_0}$,

$$(v,\tau) \in D_o^{(4)} \times \mathbb{T}_{\sigma_0} \Rightarrow w = v + \mathcal{C}(v,\tau) \in D_o^{(3)} \subset D_\gamma^u$$

i aleshores el Teorema 5.14 ens assegura que $|\mathcal{C}^-(w,\tau)| \leq \alpha_3\mu\varepsilon^2|w| + \alpha_3\mu\varepsilon^{2-2\gamma}$. Però pel fet que $w \in D_o^{(3)}$, sabem que $|w|$ està fitada, per exemple per K, i aleshores:

$$\forall\,(v,\tau) \in D_o^{(4)} \times \mathbb{T}_\sigma, \quad |\mathcal{U}(v,\tau)| \leq c_0\varepsilon^{1+\nu_0} + \alpha_3\mu\varepsilon^{2-2\gamma}\big(\varepsilon^{2\gamma}K + 1\big),$$

però, tenint en compte la relació de $1+\nu_0$ amb $2-2\gamma$ donada per (5.80),

$$\forall\,(v,\tau) \in D_o^{(4)} \times \mathbb{T}_\sigma, \quad |\mathcal{U}(v,\tau)| \leq \big(c_0 + \alpha_3\mu(K+1)\big)\varepsilon^{1+\nu_0}.$$

Per altra banda, segons el Lema 5.15,

$$(v,\tau) \in D_i^{(4)} \times \mathbb{T}_\sigma \Rightarrow w = v + \mathcal{C}(v,\tau) \in D_i^{(3)} \subset D_\varepsilon^u$$

i aleshores el Teorema 5.14 ens assegura que $|\mathcal{C}^-(w,\tau)| \leq \alpha_3\varepsilon(\ln(1/\varepsilon))^{-1}$. Per tant, arribem a la conclusió que

$$\forall\,(v,\tau) \in D_i^{(4)} \times \mathbb{T}_\sigma, \quad |\mathcal{U}(v,\tau)| \leq c_0\varepsilon^{1+\nu_0} + \alpha_3\varepsilon(\ln(1/\varepsilon))^{-1} \leq (\alpha_3 + c_0)\varepsilon(\ln(1/\varepsilon))^{-1}$$

Per tal d'obtenir les fites de les derivades respecte v, reduïm el domini a $D^{(5)} = D_o^{(5)} \cup D_i^{(5)}$ tal i com s'ha fet abans, respectant que $D_o^{(5)} \cap D_i^{(5)} \neq \varnothing$, de manera que finalment ens quedem en un domini $\tilde{D} = \tilde{D}_o \cup \tilde{D}_i$ on $\tilde{D}_o = D_o^{(5)}$ i $\tilde{D}_i = D_i^{(5)}$. ■

5.5 Demostració del Teorema 5.3.

Pretenem que el canvi $(v,\tau) = \big(u + \mathcal{V}(u,\tau),\tau\big)$ sigui l'invers de $(u,\tau) = \big(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau\big)$, és a dir, la imatge del punt $(u + \mathcal{V}(u,\tau),\tau)$ per $\mathrm{Id} + (\mathcal{U},0)$ coincideixi amb (u,τ):

$$\big(\mathrm{Id} + (\mathcal{U},0)\big)(u + \mathcal{V}(u,\tau),\tau) = (u,\tau) \Leftrightarrow u + \mathcal{V}(u,\tau) + \mathcal{U}(u + \mathcal{V}(u,\tau),\tau) = u,$$

amb la qual cosa arribem a la condició per a $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V}(u,\tau) = -\mathcal{U}(u + \mathcal{V}(u,\tau),\tau).$$

A partir del Teorema 5.2, demostrarem l'existència de $\mathcal{V}$ com a punt fix d'un cert operador funcional.

La funció $\mathcal{U}$ està definida a $\tilde{D}_o$, per tant, haurem de considerar $u \in \tilde{D}_o^{(1)} \subset \tilde{D}_o$ per tal que $u + \mathcal{V}(u,\tau) \in \tilde{D}_o$ per a $\mathcal{V}$ en una certa bola de l'espai

$$\mathcal{Z}_\sigma^{(1)} := \{\mathcal{V}(u,\tau) \mid \mathcal{V} : \tilde{D}_o^{(1)} \times \mathbb{T}_\sigma \longrightarrow \mathbb{C} \text{ real-analítica i } \|\mathcal{V}\|_\infty^{(1)} < \infty\},$$

que $\forall 0 < \sigma \leq \sigma_0$ pot demostrar-se que és una àlgebra de Banach.

El Teorema 5.2 estableix l'existència d'unes constants $\alpha_u > 0$ i $\nu_0 > 0$, que farem servir per fitar les possibles funcions $\mathcal{V}$: per a qualsevol $\mathcal{V} \in \mathcal{B}\left(2\alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0}\right) \subset \mathcal{Z}_\sigma^{(1)}$ definim l'operador

$$\mathcal{F}(\mathcal{V}) := -\mathcal{U} \circ (\mathrm{Id} + \mathcal{V}, \mathrm{Id}).$$

Com que $\tilde{D}_o^{(1)} \subset \tilde{D}_o$, segons la informació que tenim de la funció $\mathcal{U}$ pel Teorema 5.2, $\forall\, \mathcal{V} \in \mathcal{B}\left(2\alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0}\right) \subset \mathcal{Z}_\sigma^{(1)}$, $\mathcal{F}(\mathcal{V}) \in \mathcal{Z}_\sigma^{(1)}$, i a més,

$$\|\mathcal{F}(0)\|_\infty^{(1)} = \|\mathcal{U}\|_\infty^{(1)} \leq \alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0}.$$

Siguin $\mathcal{V}, \mathcal{V}' \in \mathcal{B}\left(2\alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0}\right)$ i $\mathcal{V}_t = \mathcal{V} + t\mathcal{V}'$ per a alguna $t \in (0,1)$, aleshores, tornant a usar el Teorema 5.2 pel que fa a la fita de $\partial_v \mathcal{U}$,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(\mathcal{V}) - \mathcal{F}(\mathcal{V}')\|_\infty^{(1)} =& \|\mathcal{U} \circ (\mathrm{Id} + \mathcal{V}, \mathrm{Id}) - \mathcal{U} \circ (\mathrm{Id} + \mathcal{V}', \mathrm{Id})\|_\infty^{(1)} \leq \\ \leq& \|\partial_v \mathcal{U} \circ (\mathrm{Id} + \mathcal{V}_t, \mathrm{Id})\|_\infty^{(1)} \|\mathcal{V} - \mathcal{V}'\|_\infty^{(1)} \leq \alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0-\gamma} \|\mathcal{V} - \mathcal{V}'\|_\infty^{(1)}.\end{aligned}$$

La qual cosa assegura que, si $\alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0-\gamma} \leq 1/2$, $\mathcal{F}$ és una contracció. Per tant, el Teorema del Punt Fix ens indica que:

$$\exists!\, \mathcal{V} \in \mathcal{B}\left(2\alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0}\right) \subset \mathcal{Z}_\sigma^{(1)} \text{ tal que } \mathcal{V} = \mathcal{F}(\mathcal{V}) = -\mathcal{U} \circ (\mathrm{Id} + \mathcal{V}, \mathrm{Id}).$$

D'aquesta relació entre les funcions $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ podem treure també les relacions entre les seves derivades:

$$\partial_u \mathcal{V}(u,\tau) = -\partial_v \mathcal{U}\left(u + \mathcal{V}(u,\tau),\tau\right) \cdot \left(1 + \partial_u \mathcal{V}(u,\tau)\right),$$

$$\partial_u^2 \mathcal{V}(u,\tau) = -\partial_v^2 \mathcal{U}\left(u + \mathcal{V}(u,\tau),\tau\right) \cdot \left(1 + \partial_u \mathcal{V}(u,\tau)\right)^2 - \partial_v \mathcal{U}\left(u + \mathcal{V}(u,\tau),\tau\right) \cdot \partial_u^2 \mathcal{V}(u,\tau)$$

des d'on

$$\partial_u \mathcal{V}(u,\tau) = -\frac{\partial_v \mathcal{U}\left(u + \mathcal{V}(u,\tau),\tau\right)}{1 + \partial_v \mathcal{U}\left(u + \mathcal{V}(u,\tau),\tau\right)},$$

$$\partial_u^2 \mathcal{V}(u,\tau) = -\frac{\partial_v^2 \mathcal{U}\left(u+\mathcal{V}(u,\tau),\tau\right)\cdot\left(1+\partial_u\mathcal{V}(u,\tau)\right)^2}{1+\partial_v\mathcal{U}\left(u+\mathcal{V}(u,\tau),\tau\right)}$$

i les fites que tenim de $\mathcal{U}$ i les seves derivades ens permetran acabar la demostració: si ε és prou petit per tal que $\alpha_u\varepsilon^{1+\nu_0-\gamma} < 1/2$,

$$|\partial_u\mathcal{V}(u,\tau)| \leq \frac{|\partial_v\mathcal{U}\left(u+\mathcal{V}(u,\tau),\tau\right)|}{1-|\partial_v\mathcal{U}\left(u+\mathcal{V}(u,\tau),\tau\right)|} \leq \frac{\alpha_u\varepsilon^{1+\nu_0-\gamma}}{1-\alpha_u\varepsilon^{1+\nu_0-\gamma}} \leq 2\alpha_u\varepsilon^{1+\nu_0-\gamma},$$

$$|\partial_u^2\mathcal{V}(u,\tau)| \leq \frac{|\partial_v^2\mathcal{U}\left(u+\mathcal{V}(u,\tau),\tau\right)|\cdot|1+\partial_u\mathcal{V}(u,\tau)|^2}{1-|\partial_v\mathcal{U}\left(u+\mathcal{V}(u,\tau),\tau\right)|} \leq \frac{\alpha_u\varepsilon^{1+\nu_0-2\gamma}4}{1-\alpha_u\varepsilon^{1+\nu_0-\gamma}} \leq 8\alpha_u\varepsilon^{1+\nu_0-2\gamma}.$$

Capítol 6

Mesura de la separació de separatrius.

6.1 Introducció.

Aquest capítol està dedicat a la demostració del Teorema 1.2, que es basa en l'aproximació de $\Delta T = T^+ - T^-$ per la funció $F(u,\tau;\mu)$ definida com:

$$\begin{aligned} F(u,\tau;\mu) :=& \varepsilon^{-1} f_0^{[i]}(\mu) e^{-\varepsilon^{-1}\pi/2} 2i \sin(\tau - \varepsilon^{-1}u) = \\ =& \varepsilon^{-1} f_0^{[i]}(\mu) \left[e^{i\tau} e^{-i\varepsilon^{-1}(u - i\pi/2)} - e^{-i\tau} e^{i\varepsilon^{-1}(u+i\pi/2)} \right], \end{aligned} \tag{6.1}$$

essent $f_0^{[i]}(\mu) = -2\pi i\mu + O(\mu^3)$ obtinguda al Teorema 3.28 gràcies a l'estudi de l'Equació Inner des del punt de vista ressorgent.

L'eina bàsica per al nostre objectiu serà el següent lema.

Lema 6.1. *Sigui $\psi(v,\tau)$ analítica a $]-ir_0, ir_0[\times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i solució de l'equació en derivades parcials*

$$\left(\varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_v\right)\psi = 0. \tag{6.2}$$

Aleshores, ψ es pot estendre analíticament a $\{|\Im m\, v| < r_0\} \times \mathbb{T}_{\sigma_0}$, el seu valor mitjà $<\psi>= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(v,\tau)\, d\tau$ no depèn de v.

A més, si per a $0 < r < r_0$ i $0 < \sigma < \sigma_0$

$$M_r = \underset{(v,\tau)\in[-ir,ir]\times\overline{\mathbb{T}}_\sigma}{màx} |\partial_v^2 \psi(v,\tau)|$$

i ε és prou petit, aleshores es verifica que:

$$\forall\, (v,\tau) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}_\sigma, \quad \left\{ \begin{array}{l} |\partial_v^2\psi(v,\tau)| \le 4M_r e^{-\varepsilon^{-1}r}, \\ |\partial_v\psi(v,\tau)| \le \varepsilon 4M_r e^{-\varepsilon^{-1}r}, \\ |\psi(v,\tau) - <\psi>| \le \varepsilon^2 4M_r e^{-\varepsilon^{-1}r}. \end{array} \right.$$

Demostració. Per la periodicitat de ψ respecte τ, podem treballar amb els seus coeficients de Fourier respecte aquesta variable. La independència respecte v de $\psi^{[0]} =<\psi>$ ve donada per la pròpia Equació (6.2):

$$\left(\varepsilon^{-1}\partial_\tau + \partial_v\right)\sum_k \psi^{[k]}(v)e^{ik\tau} = \sum_k \left[\left(\varepsilon^{-1}ik + \frac{d}{dv}\right)\psi^{[k]}(v)\right]e^{ik\tau} = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall\, k,\ \left(\varepsilon^{-1}ik + \frac{d}{dv}\right)\psi^{[k]}(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dv}\,\psi^{[0]}(v) = 0.$$

Per ser ψ solució de l'Equació (6.2), sabem que existeix una funció $\Psi(t)$ tal que

$$\psi(v,\tau) = \Psi(\tau - \varepsilon^{-1}v), \tag{6.3}$$

de la qual cosa en deduïm que $\Psi(t) = \psi(0,t)$ i, per tant, Ψ és analítica a $|\Im m\, t| < \sigma_0$ i 2π-periòdica, propietats que ens donen l'extensió de l'analiticitat de ψ a qualsevol v tal que $|\Im m\, v| < r_0$:

$$\psi(v,\tau) = \Psi(\tau - \varepsilon^{-1}\,\Re e\, v - i\varepsilon^{-1}\,\Im m\, v) = \psi(i\,\Im m\, v, \tau - \varepsilon^{-1}\,\Re e\, v),$$

però $(i\,\Im m\, v, \tau - \varepsilon^{-1}\,\Re e\, v) \in]-ir_0, ir_0[\times \mathbb{T}_{\sigma_0}$ i l'enunciat deia que ψ era analítica en aquest domini.

De (6.3), si desenvolupem en sèrie de Fourier, en treiem la següent relació:

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \psi^{[k]}(v) = \Psi^{[k]}e^{-ik\varepsilon^{-1}v} \tag{6.4}$$

I per als coeficients de Fourier de les derivades respecte la variable v, com que

$$\partial_v\psi(v,\tau) = -\varepsilon^{-1}\Psi'(\tau - \varepsilon^{-1}v) \quad \text{i} \quad \partial_v^2\psi(v,\tau) = \varepsilon^{-2}\Psi''(\tau - \varepsilon^{-1}v)$$

tenim que:

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^*, \quad \frac{d}{dv}\,\psi^{[k]}(v) = -i\frac{k}{\varepsilon}\,\Psi^{[k]}e^{-ik\varepsilon^{-1}v} \tag{6.5}$$

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^*, \quad \frac{d^2}{dv}\,\psi^{[k]}(v) = -\frac{k^2}{\varepsilon^2}\,\Psi^{[k]}e^{-ik\varepsilon^{-1}v} \tag{6.6}$$

i la segona fórmula pot reescriure's com:

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^*, \quad \Psi^{[k]} = -\frac{\varepsilon^2}{k^2}\,e^{ik\varepsilon^{-1}v}\frac{d^2}{dv}\,\psi^{[k]}(v). \tag{6.7}$$

Per altra banda, els coeficients de Fourier de la funció $\partial_v^2\psi(v,\tau)$ poden calcular-se com:

$$\frac{d^2}{dv}\,\psi^{[0]}(v) = 0,$$
$$\frac{d^2}{dv}\,\psi^{[k]}(v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\partial_v^2\psi(v,\tau)e^{-ik\tau}\,d\tau, \qquad k \neq 0$$

i per a qualsevol $0 < r < r_0$ i $k \neq 0$, tenint en compte que $\partial_v^2\psi(v,\tau)$ és analítica a $]-ir_0, ir_0[\times\mathbb{T}_{\sigma_0}$ i 2π-periòdica en τ, podem canviar el camí d'integració movent-lo a alçada $\pm i\sigma$ amb $0 < \sigma < \sigma_0$ (prendrem $i\sigma$ si $k < 0$ i $-i\sigma$ si $k > 0$): $\forall v \in [-ir, ir]$,

$$\left|\frac{d^2}{dv}\,\psi^{[k]}(v)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\partial_v^2\psi(v,\tau\pm i\sigma)e^{-ik(\tau\pm i\sigma)}\right|\,d\tau \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M_r e^{\pm k\sigma}\,d\tau = M_r e^{-|k|\sigma}.$$

O sigui que, fixada $0 < r < r_0$, obtenim una fita per a tots els coeficients de Fourier de $\partial_v^2\psi$:

$$\forall\, k^* \in \mathbb{Z}, \forall\, v \in [-ir, ir], \qquad \left|\frac{d^2}{dv}\,\psi^{[k]}(v)\right| \le M_r e^{-|k|\sigma}. \tag{6.8}$$

Això ens porta, amb la informació de (6.7), a una fita per a $\Psi^{[k]}$ amb $k \neq 0$: si $k > 0$ considerarem $v = ir$ i si $k < 0$, $v = -ir$

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^*, \quad |\Psi^{[k]}| = \frac{\varepsilon^2}{k^2}\, e^{-k\varepsilon^{-1}\Im m(\pm ir)}\left|\frac{d^2}{dv}\,\psi^{[k]}(\pm ir)\right| \le \frac{\varepsilon^2}{k^2}\, e^{-|k|\varepsilon^{-1}r} M_r e^{-|k|\sigma} \tag{6.9}$$

que podem posar a (6.6) per obtenir: $\forall\, k \in \mathbb{Z}^*$

$$\left|\frac{d^2}{dv}\,\psi^{[k]}(v)\right| \le\; e^{-|k|\varepsilon^{-1}r} M_r e^{-|k|\sigma} |e^{-ik\varepsilon^{-1}v}| = M_r e^{-|k|\sigma} e^{\varepsilon^{-1}(k\,\Im m\, v - |k| r)}.$$

Tenint en compte que, sigui qui sigui la variable x,

$$\begin{aligned} &\text{per a } k > 0, \quad -k|\,\Im m\, x| \le k\,\Im m\, x \le k|\,\Im m\, x|,\\ &\text{per a } k < 0, \quad k|\,\Im m\, x| \le k\,\Im m\, x \le -k\,|\,\Im m\, x|, \end{aligned}$$

deduïm que, en qualsevol cas, $-|k|\,|\,\Im m\, x| \le k\,\Im m\, x \le |k|\,|\,\Im m\, x|$. Usant-ho per a la variable v:

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^*, \quad \left|\frac{d^2}{dv}\,\psi^{[k]}(v)\right| \le M_r e^{-|k|\sigma} e^{|k|\varepsilon^{-1}\left(|\,\Im m\, v| - r\right)}.$$

I ara ho usarem per a la variable τ:

$$\begin{aligned} |\partial_v^2\psi(v,\tau)| &\le \sum_{k\neq 0}\left|\frac{d^2}{dv}\,\psi^{[k]}(v)\right| e^{-k\,\Im m\,\tau} \le M_r \sum_{k\neq 0} e^{-|k|\sigma} e^{|k|\varepsilon^{-1}\left(|\,\Im m\, v| - r\right)} e^{-k\,\Im m\,\tau} \le\\ &\le M_r \sum_{k\neq 0} e^{|k|\left(|\,\Im m\,\tau| - \sigma\right)} e^{|k|\varepsilon^{-1}\left(|\,\Im m\, v| - r\right)} = 2M_r \sum_{k>0}\left(e^{|\,\Im m\,\tau| - \sigma + \varepsilon^{-1}\left(|\,\Im m\, v| - r\right)}\right)^k, \end{aligned}$$

sèrie que és convergent si $|\,\Im m\,\tau| < \sigma < \sigma_0$ i $|\,\Im m\, v| \le r < r_0$. Així doncs, hem trobat una fita explícita per a $\partial_v^2\psi(v,\tau)$:

$$|\partial_v^2\psi(v,\tau)| \le 2M_r \frac{e^{|\,\Im m\,\tau| - \sigma + \varepsilon^{-1}\left(|\,\Im m\, v| - r\right)}}{1 - e^{|\,\Im m\,\tau| - \sigma + \varepsilon^{-1}\left(|\,\Im m\, v| - r\right)}}.$$

Però, si $\tau \in \mathbb{T}_\sigma$, $v \in \mathbb{R}$ i ε és prou petit, observem que:

$$e^{|\,\Im m\,\tau| - \sigma} < 1 \qquad \text{i} \qquad e^{|\,\Im m\,\tau| - \sigma + \varepsilon^{-1}\left(|\,\Im m\, v| - r\right)} < e^{-\varepsilon^{-1}r} \le 1/2$$

i, mantenint al numerador el terme $e^{-\varepsilon^{-1}r}$, arribem a la fita de l'enunciat:

$$\forall\,(v,\tau) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}_\sigma, \quad |\partial_v^2\psi(v,\tau)| \le 4M_r e^{-\varepsilon^{-1}r}.$$

Finalment, si posem la fita (6.9) a les expressions (6.4) i (6.5), $\forall\, k \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned} \left|\psi^{[k]}(v)\right| &\le \frac{\varepsilon^2}{k^2}\, e^{-|k|\varepsilon^{-1}r} M_r e^{-|k|\sigma} |e^{-ik\varepsilon^{-1}v}| = \frac{\varepsilon^2}{k^2}\, M_r e^{-|k|\sigma} e^{\varepsilon^{-1}(k\,\Im m\, v - |k| r)},\\ \left|\frac{d}{dv}\,\psi^{[k]}(v)\right| &\le \frac{\varepsilon}{|k|} e^{-|k|\varepsilon^{-1}r} M_r e^{-|k|\sigma} |e^{-ik\varepsilon^{-1}v}| = \frac{\varepsilon}{|k|} M_r e^{-|k|\sigma} e^{\varepsilon^{-1}(k\,\Im m\, v - |k| r)}. \end{aligned}$$

i seguint el mateix procés del càlcul de la sèrie de Fourier, obtindríem:

$$\forall\,(v,\tau)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}_\sigma,\quad |\psi(v,\tau)-<\psi>|\leq\varepsilon^2 4M_r e^{-\varepsilon^{-1}r}\quad \text{i}\quad |\partial_v\psi(v,\tau)|\leq\varepsilon 4M_r e^{-\varepsilon^{-1}r}.\qquad\blacksquare$$

Aquesta és una versió del Lema 4.1 que es va donar a [Sa01] i que era ja una versió dels Lemes 3 i 4 de [DGJS97], on generalitzaven al cas quasiperiòdic el donat a [L84] sobre funcions periòdiques.

A partir de les aproximacions de les varietats invariants trobades als Teoremes 2.1 i 4.1 i dels canvis de variables recollits als Teoremes 5.2 i 5.3, el Lema 6.1 ens permetrà tenir a $\mathbb{R}$ una fita de $\Delta T - F$ exponencialment petita respecte el paràmetre ε.

Tornarem a obviar la dependència de les funcions respecte els paràmetres μ i ε per simplificar les fórmules.

6.2 Aproximació de la diferència de varietats invariants.

Si usem la notació:

$$\Delta\phi_0(z,\tau)=\big(\phi_0^+-\phi_0^-\big)(z,\tau),$$

el Corol·lari 3.30 i un estudi anàleg prop de $-\pi/2$, indiquen que els termes dominants de

$$\partial_u^j\Delta\phi_0\big(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau\big)+\partial_u^j\Delta\phi_0\big(\varepsilon^{-1}(u+i\pi/2),\tau\big)$$

són $\varepsilon\partial_u^j F(u,\tau)$, on F s'ha definit a (6.1).

Usant el canvi $u=v+\mathcal{U}(v,\tau)$ donat pel Teorema 5.2, podem expressar $\Delta T-F$ en funció de dos termes ben diferenciats:

$$\big(\Delta T-F\big)(v+\mathcal{U}(v,\tau),\tau)=\psi_1(v,\tau)+\psi_2(v,\tau),\tag{6.10}$$

on l'estudi de les funcions

$$\begin{aligned}\psi_1(v,\tau)&:=\Delta T(v+\mathcal{U}(v,\tau),\tau)-F(v,\tau)\\ \psi_2(v,\tau)&:=F(v,\tau)-F(v+\mathcal{U}(v,\tau),\tau)\end{aligned}$$

ens portarà als següents resultats.

Proposició 6.2. *Sigui $\mu_0>0$ fixada. Existeix $\varepsilon_0>0$ tal que, per a qualssevol $0<\mu\leq\mu_0$ i $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$, la funció ψ_1 és solució de l'Equació (6.2). A més, per a qualsevol $0<\tilde{c}<1$, existeix una constant $\alpha_1>0$ tal que $<\psi_1>=O(\mu\varepsilon^2)$ i $\forall\,(v,\tau)\in\mathbb{R}^2$,*

$$\begin{aligned}|\psi_1(v,\tau)-<\psi_1>|&\leq\varepsilon^{-1}\alpha_1\left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)}+\mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right)e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}},\\ |\partial_v\psi_1(v,\tau)|&\leq\varepsilon^{-2}\alpha_1\left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)}+\mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right)e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}},\\ |\partial_v^2\psi_1(v,\tau)|&\leq\varepsilon^{-3}\alpha_1\left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)}+\mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right)e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Postposem la seva demostració a la següent secció.

A la funció ψ_2 només intervé la F avaluada en dos punts diferents, així doncs, per arribar al següent resultat es tractarà d'aplicar el Teorema del valor mitjà.

Proposició 6.3. *Sigui $\mu_0 > 0$ fixada. Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \mu \leq \mu_0$ i $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, existeixen constants v_2, α_2 i $\nu_0 > 0$ tals que $\forall\,(v,\tau) \in (-v_2, v_2) \times \mathbb{R}$,*

$$\left|\partial_v^j \psi_2(v,\tau)\right| \leq \varepsilon^{-j-1}\alpha_2 |f_0^{[i]}(\mu)| \varepsilon^{\nu_0} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}$$

on $f_0^{[i]}(\mu) = -2\pi i\mu + O(\mu^3)$ analítica.

També deixem la seva demostració per a més endavant, en concret per a la Secció 6.4.

Per a $(u,\tau) \in (-\tilde{u}_2, \tilde{u}_2) \times \mathbb{R}$, amb el següent teorema volem recollir el resultat principal d'aquest capítol, que estableix que $\partial_u^j F(u,\tau)$ domina l'expressió $\partial_u^j \Delta T(u,\tau)$.

Teorema 6.4. *Sigui $\mu_0 > 0$ fixada. Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a qualssevol $0 < \mu \leq \mu_0$, $0 < \tilde{c} < 1$ i $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, existeixen constants $\tilde{u}_2$ i C_0 tals que $\forall (u,\tau) \in (-\tilde{u}_2, \tilde{u}_2) \times \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned}
|\Delta T(u,\tau) - B(\mu,\varepsilon) - F(u,\tau)| &\leq C_0 \varepsilon^{-1} \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}, \\
|\partial_u \Delta T(u,\tau) - \partial_u F(u,\tau)| &\leq C_0 \varepsilon^{-2} \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}, \\
\left|\partial_u^2 \Delta T(u,\tau) - \partial_u^2 F(u,\tau)\right| &\leq C_0 \varepsilon^{-3} \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}},
\end{aligned}$$

on $B(\mu,\varepsilon) =< \Delta T(v + \mathcal{U}(v,\tau), \tau) >= O(\mu\varepsilon^2)$ analítica.

Demostració. Fixada $\sigma_0 > 0$, per a qualsevol $0 < \sigma < \sigma_0$, el Teorema 5.2 ens dóna l'existència d'un canvi $u = v + \mathcal{U}(v,\tau)$ a un domini $(v,\tau) \in \tilde{D} \times \mathbb{T}_\sigma$ tal que $\tilde{D} \cap \mathbb{R} = (-v_2, v_2)$.

Per altra banda, el Teorema 5.3 ens assegura que existeix un domini $\tilde{D}_o^{(1)} \times \mathbb{T}_\sigma$ tal que $\tilde{D}_o^{(1)} \cap \mathbb{R} = (-\tilde{u}_2, \tilde{u}_2)$ i on està definit el canvi real-analític per a $u \in \tilde{D}_o^{(1)}$, $v = u + \mathcal{V}(u,\tau)$, que és invers del $u = v + \mathcal{U}(v,\tau)$ i que, $\forall\,(u,\tau) \in (-\tilde{u}_2, \tilde{u}_2) \times \mathbb{R}$, es té que $v \in (-v_2, v_2)$. Per tant, a partir de la informació de les Proposicions 6.2 i 6.3, coneixerem $\partial_u^j\left(\Delta T(u,\tau) - F(u,\tau)\right)$ per a $(u,\tau) \in (-\tilde{u}_2, \tilde{u}_2) \times \mathbb{R}$.

Sigui $B(\mu,\varepsilon) :=< \Delta T(v + \mathcal{U}(v,\tau), \tau)>$ que, per la definició de ψ_1 que hem fet, és $<\psi_1>$, aleshores la primera desigualtat és gairebé immediata:

$$\begin{aligned}
|\Delta T(u,\tau) - B(\mu,\varepsilon) - F(u,\tau)| &= |\psi_1(u + \mathcal{V}(u,\tau),\tau) - <\psi_1> + \psi_2(u + \mathcal{V}(u,\tau),\tau)| \leq \\
&\leq \varepsilon^{-1}\alpha_1 \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} + \varepsilon^{-1}\alpha_2 |f_0^{[i]}(\mu)| \varepsilon^{\nu_0} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}},
\end{aligned}$$

d'on, recordant que $f_0^{[i]}(\mu) = -2\pi i\mu + O(\mu^3)$ analítica i considerant $\varepsilon^{\nu_0} = o(\ln^{-1}(1/\varepsilon))$, podem deduir que existeix una constant c_1 tal que

$$|\Delta T(u,\tau) - B(\mu,\varepsilon) - F(u,\tau)| \leq \varepsilon^{-1} c_1 \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu \frac{1}{\ln(1/\varepsilon)} \right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}.$$

Per a la segona desigualtat, usarem la fita de $\partial_u \mathcal{V}(u,\tau)$ que establíem al Teorema 5.3: $|1+\partial_u \mathcal{V}(u,\tau)| \leq 1+\alpha_v \varepsilon^{1+\nu_0-\gamma}$, per tant,

$$\begin{aligned}|\partial_u \Delta T(u,\tau) - \partial_u F(u,\tau)| &= |\partial_v \psi_1(u+\mathcal{V}(u,\tau),\tau) + \partial_v \psi_2(u+\mathcal{V}(u,\tau),\tau)| \cdot |1+\partial_u \mathcal{V}(u,\tau)| \leq \\ &\leq \varepsilon^{-2}\left[\alpha_1\left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right) + \alpha_2 |f_0^{[i]}(\mu)|\varepsilon^{\nu_0}\right] e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \cdot (1+\alpha_v)\end{aligned}$$

i traient factor comú ε^{-2}, existeix una constant c_2 tal que

$$|\partial_u \Delta T(u,\tau) - \partial_u F(u,\tau)| \leq \varepsilon^{-2} c_2 \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}.$$

Finalment, per a la tercera desigualtat, incorporem l'ús de la fita de $\partial_u^2 \mathcal{V}(u,\tau)$ donada pel Teorema 5.3: $|\partial_u^2 \mathcal{V}(u,\tau)| \leq \alpha_v \varepsilon^{1+\nu_0-2\gamma}$, per tant,

$$\begin{aligned}\left|\partial_u^2 \Delta T(u,\tau) - \partial_u^2 F(u,\tau)\right| &= \left|\partial_v^2 \psi_1(u+\mathcal{V}(u,\tau),\tau) + \partial_v^2 \psi_2(u+\mathcal{V}(u,\tau),\tau)\right| \cdot |1+\partial_u \mathcal{V}(u,\tau)|^2 + \\ &+ |\partial_v \psi_1(u+\mathcal{V}(u,\tau),\tau) + \partial_v \psi_2(u+\mathcal{V}(u,\tau),\tau)| \cdot |\partial_u^2 \mathcal{V}(u,\tau)| \leq \\ &\leq \varepsilon^{-3}\left[\alpha_1\left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right) + \alpha_2 |f_0^{[i]}(\mu)|\varepsilon^{\nu_0}\right] e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \cdot (1+\alpha_v)^2 + \\ &+ \varepsilon^{-2}\left[\alpha_1\left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right) + \alpha_2 |f_0^{[i]}(\mu)|\varepsilon^{\nu_0}\right] e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \cdot \alpha_v\end{aligned}$$

i traient ara factor comú la potència ε^{-3}, existeix una constant c_3 tal que

$$\left|\partial_u^2 \Delta T(u,\tau) - \partial_u^2 F(u,\tau)\right| \leq \varepsilon^{-3} c_3 \left(\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)} + \mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right) e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}.$$

Definint $C_0 = \text{màx}\{\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \mathrm{c}_3\}$, arribem a les expressions anunciades. ∎

6.3 Demostració de la Proposició 6.2.

Fixada $\sigma_0 > 0$, en tota la demostració, σ serà qualsevol valor de l'interval $(0,\sigma_0)$.

Prenem el domini $D = D_o \cup D_i$ com el que pot veure's a la Figura 6.1, on $D_o \subset \left(D_\gamma^u \cap D_\gamma^s\right)$ i $D_i \subset (D_\varepsilon^u \cap D_\varepsilon^s)$, i seguint amb la notació del Capítol 5, prenem $\tilde{D}$ un domini amb la mateixa geometria que D tal que $\tilde{D} \subset D$ i que també podem separar en la seva part outer $\tilde{D}_o \subset D_o$ i la seva part inner $\tilde{D}_i \subset D_i$. Fixem-nos que l'únic que haurem de canviar són els paràmetres a i c que passarien a $\tilde{a} = (1-\tilde{h})a$ i $\tilde{c} = (1+\tilde{h})c$ per a una $0 < \tilde{h} < 1$. Recordem que podíem prendre qualsevol $0 < c < 1$ i, per tant, $\tilde{c}$ és qualsevol constant de l'interval (0,1).

Definim $r_0 = \pi/2 - \tilde{c}\varepsilon\ln(1/\varepsilon)$ i observi's que $(-ir_0, ir_0) \subset \tilde{D}$.

Per la Proposició 5.1 i el Teorema 5.2, si $(v,\tau) \in \tilde{D} \times \mathbb{T}_\sigma$, aleshores $\Delta T(v+\mathcal{U}(v,\tau),\tau)$ és solució de l'Equació (6.2) i per tant, segons el Lema 6.1, el seu valor mitjà és independent de v. Si prenem v tal que $v+\mathcal{U}(v,\tau) \in D_o \subset D_\gamma^u$ amb $\gamma = 0$, pel Teorema 2.1, sabem que

$$|\Delta T(v+\mathcal{U}(v,\tau),\tau)| \leq 2b_0\, \mu\varepsilon^2$$

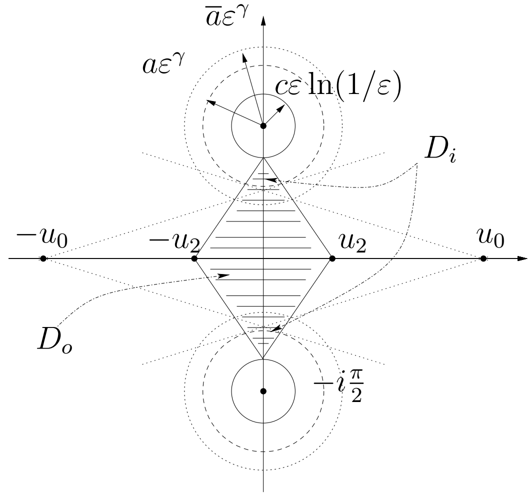


Figura 6.1: Domini $D = D_o \cup D_i$, on $D_i = D_{i,+} \cup D_{i,-}$.

i, per tant,

$$< \Delta T(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau)> = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta T(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau)\,d\tau = O(\mu\varepsilon^2).$$

Per altra banda, la funció

$$F(v,\tau) = \varepsilon^{-1} f_0^{[i]}(\mu)\left[e^{i\tau}e^{-i\varepsilon^{-1}(v-i\pi/2)} - e^{-i\tau}e^{i\varepsilon^{-1}(v+i\pi/2)}\right],$$

té valor mitjà zero i també és solució de l'Equació (6.2); efectivament, només cal observar que

$$\partial_v F(v,\tau) = \varepsilon^{-1} f_0^{[i]}(\mu)\left[-i\varepsilon^{-1}e^{i\tau}e^{-i\varepsilon^{-1}(v-i\pi/2)} - i\varepsilon^{-1}e^{-i\tau}e^{-i\varepsilon^{-1}(v+i\pi/2)}\right] = -\varepsilon^{-1}\partial_\tau F(v,\tau).$$

Així doncs, la funció $\psi_1(v,\tau) = \Delta T(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau) - F(v,\tau)$ és solució de l'Equació (6.2) i la seva mitjana verifica:

$$\psi_1^{[0]} = < \psi_1(v,\tau)> = < \Delta T(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau) > = O(\mu\varepsilon^2).$$

A més, pel Teorema 5.2, ψ_1 està definida i és analítica quan $v \in (-ir_0, ir_0) \subset \tilde{D}$.

El Teorema 5.2 assegura que si $v \in \tilde{D}_o$, aleshores $v + \mathcal{U}(v,\tau) \in D_o \subset \left(D^u_\gamma \cap D^s_\gamma\right)$; també que si $(v,\tau) \in \tilde{D}_{i,+} \times \mathbb{T}_\sigma$, aleshores $v + \mathcal{U}(v,\tau) \in D_{i,+} \subset \left(D^u_{\varepsilon,+} \cap D^s_{\varepsilon,+}\right)$. Aquests dos resultats seran usats al llarg de tota la demostració, encara que no se'n faci referència explícitament.

Per tal de poder aplicar el Lema 6.1 a la funció ψ_1, necessitem calcular una fita de $\partial_v^2\psi_1$ al segment $(-ir_0, ir_0)$. Observi's que:

$$\partial_v\psi_1(v,\tau) = \partial_u\Delta T(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau)\cdot(1 + \partial_v\mathcal{U}(v,\tau)) - \partial_v F(v,\tau),$$

i per tant,

$$\begin{aligned}\partial_v^2\psi_1(v,\tau) =& \partial_u^2\Delta T(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau)\cdot(1 + \partial_v\mathcal{U}(v,\tau))^2 + \\ &+ \partial_u\Delta T(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau)\cdot\partial_v^2\mathcal{U}(v,\tau) - \partial_v^2 F(v,\tau).\end{aligned}$$

O sigui, que també hi intervindran les fites de $\partial_v \mathcal{U}(v,\tau)$ i $\partial_v^2 \mathcal{U}(v,\tau)$ donades pel Teorema 5.2: existeixen α_u i $\nu_0 > 0$ tals que

$$\text{a } (v,\tau) \in \tilde{D}_o \times \mathbb{T}_\sigma, \quad |\partial_v^j \mathcal{U}(v,\tau)| \leq \alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0 - j\gamma}, \tag{6.11}$$

$$\text{a } (v,\tau) \in \tilde{D}_{i,\pm} \times \mathbb{T}_\sigma, \quad |\partial_v^j \mathcal{U}(v,\tau)| \leq \alpha_u \frac{\varepsilon^{1-j}}{\ln^{1+j}(1/\varepsilon)}. \tag{6.12}$$

Dels capítols anteriors coneixem fites de

$$\partial_u^j \left(T^\pm - T_0 - \varepsilon T_1^\pm\right), \quad \partial_z^j \left(\phi^\pm - \phi_0^\pm\right) \quad \text{i} \quad \partial_z^j \left(\phi_0^+ - \phi_0^-\right),$$

per tant, es tracta de posar $\partial_v \psi_1$ en funció d'aquests termes segons el domini on estiguem.

Comencem suposant que $v \in \tilde{D}_o$ i després ja ens ocuparem del cas $v \in \tilde{D}_i$. L'aproximació de $T^\pm$ en aquesta zona outer serà amb $T_0 + \varepsilon T_1$:

$$\begin{aligned}\Delta T(v+\mathcal{U}(v,\tau),\tau) =& T^+(v+\mathcal{U}(v,\tau),\tau) - T_0(v+\mathcal{U}(v,\tau)) - \varepsilon T_1(v+\mathcal{U}(v,\tau),\tau) - \\ & - \left(T^-(v+\mathcal{U}(v,\tau),\tau) - T_0(v+\mathcal{U}(v,\tau)) - \varepsilon T_1(v+\mathcal{U}(v,\tau),\tau)\right) = \\ =& Q^+(v+\mathcal{U}(v,\tau),\tau) - Q^-(v+\mathcal{U}(v,\tau),\tau).\end{aligned}$$

A més, que $v \in \tilde{D}_o$, implica que $0 < \Im m\, v < \pi/2 - \tilde{a}\varepsilon^\gamma$ o bé $-\pi/2 + \tilde{a}\varepsilon^\gamma < \Im m\, v < 0$, i centrant-nos en el primer cas (l'altre és totalment anàleg):

$$\begin{aligned}&-\varepsilon^{-1}\left(\Im m\, v + \pi/2\right) = -\varepsilon^{-1}\Im m\, v - \varepsilon^{-1}\pi/2 < -\varepsilon^{-1}\pi/2 \leq -\varepsilon^{-1}\pi/2 \leq -\varepsilon^{\gamma-1}\pi/2, \\ &\varepsilon^{-1}\left(\Im m\, v - \pi/2\right) < -\tilde{a}\varepsilon^{\gamma-1}\end{aligned}$$

per tant, si definim $a_0 = \text{mín}\{\tilde{a}, \pi/2\} > 0$,

$$e^{\varepsilon^{-1}\Im m(v - i\pi/2)} + e^{-\varepsilon^{-1}\Im m(v+i\pi/2)} \leq 2e^{-a_0\varepsilon^{\gamma-1}}, \tag{6.13}$$

fita que usarem en diverses ocasions.

Com que $u = v + \mathcal{U}(v,\tau) \in D_o \subset \left(D_\gamma^u \cap D_\gamma^s\right)$, pels resultats obtinguts al Teorema 2.1 i usant que $\cosh^{-1} u$ té un zero simple a $i\pi/2$ (vegi's l'expressió (34) de l'Apèndix A.4), podem assegurar que:

$$|\partial_u \Delta T(u,\tau)| \leq 2b_0\mu\varepsilon^{2-2\gamma}|\cosh u|^{-2} \leq 2b_0\mu\varepsilon^{2-2\gamma}k_2^2|u - i\pi/2|^{-2} \leq 2b_0\mu k_2^2\varepsilon^{2-4\gamma} \tag{6.14}$$

i anàlegament,

$$|\partial_u^2 \Delta T(u,\tau)| \leq 2b_0\mu k_2^2 \varepsilon^{2-5\gamma}. \tag{6.15}$$

Per altra banda,

$$\partial_v^2 F(v,\tau) = \varepsilon^{-3} f_0^{[i]}(\mu)\left[-e^{i\tau}e^{-i\frac{v-i\pi/2}{\varepsilon}} + e^{-i\tau}e^{i\frac{v+i\pi/2}{\varepsilon}}\right],$$

on podem fer servir la fita (6.13) i obtenir:

$$|\partial_v^2 F(v,\tau)| \leq \varepsilon^{-3} 2|f_0^{[i]}(\mu)|e^{\sigma_0}e^{-a_0\varepsilon^{\gamma-1}}.$$

Per tant, d'aquest resultat junt amb de les fites (6.15), (6.11) i (6.14), podem assegurar que:

$$\begin{aligned}|\partial_v^2\psi_1(v,\tau)| \leq & 2b_0\mu k_2^2\varepsilon^{2-5\gamma}\left(1+\alpha_u\varepsilon^{1+\nu_0-\gamma}\right)+ \\ & + 2b_0\mu k_2^2\varepsilon^{2-4\gamma}\alpha_u\varepsilon^{1+\nu_0-2\gamma}+\varepsilon^{-3}2|f_0^{[i]}(\mu)|e^{\sigma_0}e^{-a_0\varepsilon^{\gamma-1}}.\end{aligned}$$

Així doncs, i recordant que $f_0^{[i]}(\mu)=O(\mu)$ analítica, existeix una constant M_1 tal que:

$$\forall\,(v,\tau)\in\left(\tilde{D}_o\cap(-ir_0,ir_0)\right)\times\mathbb{T}_{\sigma_0},\quad |\partial_v^2\psi_1(v,\tau)|\leq\varepsilon^{-3}M_1\mu\left[\varepsilon^{5-5\gamma}+e^{-a_0\varepsilon^{\gamma-1}}\right]. \tag{6.16}$$

Si, per contra, $v\in\tilde{D}_{i,+}$ (el cas $v\in\tilde{D}_{i,-}$ es faria anàlogament), usem l'escalat $T^{\pm}(u,\tau)=\varepsilon^{-1}\phi^{\pm}(\varepsilon^{-1}(u-i\pi/2),\tau)$ i expressem $\varepsilon\psi_1$ com:

$$\begin{aligned}\varepsilon\psi_1(v,\tau)=&\Delta\phi\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)-\Delta\phi_0\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)+ \\ &+\Delta\phi_0\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)-\varepsilon F(v,\tau)= \\ =&\big(\phi^+-\phi_0^+\big)\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)-\big(\phi^--\phi_0^-\big)\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)+ \\ &+\Delta\phi_0\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)-\varepsilon F(v,\tau),\end{aligned}$$

d'on traiem que:

$$\begin{aligned}\varepsilon^3\partial_v^2\psi_1(v,\tau)=&\partial_z^2(\phi^+-\phi_0^+)\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)\cdot(1+\partial_v\mathcal{U}(v,\tau))^2+ \\ &+\varepsilon\partial_z(\phi^+-\phi_0^+)\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)\cdot\partial_v^2\mathcal{U}(v,\tau)- \\ &-\partial_z^2\big(\phi^--\phi_0^-\big)\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)\cdot(1+\partial_v\mathcal{U}(v,\tau))^2+ \\ &-\varepsilon\partial_z\big(\phi^--\phi_0^-\big)\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)\cdot\partial_v^2\mathcal{U}(v,\tau)+ \\ &+\partial_z^2\Delta\phi_0\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)\cdot(1+\partial_v\mathcal{U}(v,\tau))^2-\varepsilon^3\partial_v^2F(v,\tau)+ \\ &+\varepsilon\partial_z\Delta\phi_0\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)\cdot\partial_v^2\mathcal{U}(v,\tau),\end{aligned} \tag{6.17}$$

on cal fer un estudi detallat de cada terme.

Com que $v+\mathcal{U}(v,\tau)\in D_{i,+}\subset\big(D_{\varepsilon,+}^u\cap D_{\varepsilon,+}^s\big)$, aleshores $z=\varepsilon^{-1}\big(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2\big)\in\mathcal{D}_{\varepsilon,+}^u\cap\mathcal{D}_{\varepsilon,+}^s$, amb la qual cosa podem utilitzar el Teorema 4.1, que, juntament amb (6.12), ens dóna les primeres fites buscades:

$$\left|\partial_z^2\big(\phi^\pm-\phi_0^\pm\big)\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)\cdot(1+\partial_v\mathcal{U}(v,\tau))\right|\leq d_0\frac{\varepsilon^2}{\ln^2(1/\varepsilon)}(1+\alpha_u), \tag{6.18}$$

$$\left|\varepsilon\partial_z\big(\phi^\pm-\phi_0^\pm\big)\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)\cdot\partial_v^2\mathcal{U}(v,\tau)\right|\leq\varepsilon d_0\varepsilon^2\alpha_u\frac{1}{\varepsilon\ln^3(1/\varepsilon)}=\frac{d_0\alpha_u\varepsilon^2}{\ln^3(1/\varepsilon)}. \tag{6.19}$$

Per a les dues últimes línies de l'expressió (6.17), usant el Corol·lari 3.30, sabem que per a qualssevol $0<\mu\leq\mu_0$ i $1<a_1<2$,

$$\begin{aligned}\partial_z\Delta\phi_0(z,\tau)=&-if_0^{[i]}(\mu)e^{i\tau}e^{-iz}\cdot(1+O(|z|^{-2}))+O\left(\mu e^{a_1\Im m\,z}\right), \\ \partial_z^2\Delta\phi_0(z,\tau)=&-f_0^{[i]}(\mu)e^{i\tau}e^{-iz}\cdot(1+O(|z|^{-3}))+O\left(\mu e^{a_1\Im m\,z}\right),\end{aligned} \tag{6.20}$$

però en aquest cas, $|z|^{-1}=O(\ln^{-1}(1/\varepsilon))$ i $\Im m\,z=\varepsilon^{-1}\Im m\,(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2)<-\tilde{c}\ln(1/\varepsilon)$, per tant, podem usar que

$$e^{a_1\Im m\,z}<e^{-a_1\tilde{c}\ln(1/\varepsilon)}=\varepsilon^{a_1\tilde{c}}. \tag{6.21}$$

Col·locant-ho tot al seu lloc,

$$\begin{aligned}
&\partial_z^2\Delta\phi_0\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)\cdot(1+\partial_v\mathcal{U}(v,\tau))^2-\varepsilon^3\partial_v^2F(v,\tau)=\\
&\quad=\left[f_0^{[i]}(\mu)e^{i\tau}e^{-i\frac{v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2}{\varepsilon}}\big(1+O(\ln^{-3}(1/\varepsilon)\big)+O\left(\mu\varepsilon^{a_1\tilde c}\right)\right](1+\partial_v\mathcal{U}(v,\tau))^2+\\
&\quad+f_0^{[i]}(\mu)\left[-e^{-i\tau}e^{-i\frac{v-i\pi/2}{\varepsilon}}+e^{-i\tau}e^{i\frac{v+i\pi/2}{\varepsilon}}\right]=\\
&\quad=f_0^{[i]}(\mu)e^{i\tau}e^{-i\frac{v-i\pi/2}{\varepsilon}}\left(e^{-i\frac{\mathcal{U}(v,\tau)}{\varepsilon}}\big(1+O(\ln^{-3}(1/\varepsilon)\big)(1+\partial_v\mathcal{U}(v,\tau))^2-1\right)+\\
&\quad+f_0^{[i]}(\mu)e^{-i\tau}e^{i\frac{v+i\pi/2}{\varepsilon}}+O\left(\mu\varepsilon^{a_1\tilde c}\right)(1+\partial_v\mathcal{U}(v,\tau))^2.
\end{aligned}$$

Ara bé, segons les fites (6.12), $\partial_v\mathcal{U}(v,\tau)=O(\ln^{-2}(1/\varepsilon))$, o sigui que

$$\begin{aligned}
\big(1+O(\ln^{-3}(1/\varepsilon))\big)(1+\partial_v\mathcal{U}(v,\tau))^2=&(1+\partial_v\mathcal{U}(v,\tau))^2+O(\ln^{-3}(1/\varepsilon))(1+\partial_v\mathcal{U}(v,\tau))^2\\
=&1+O(\ln^{-2}(1/\varepsilon)),
\end{aligned}$$

i per tant,

$$e^{-i\frac{\mathcal{U}(v,\tau)}{\varepsilon}}\big(1+O(\ln^{-3}(1/\varepsilon))\big)(1+\partial_v\mathcal{U}(v,\tau))^2-1=e^{-i\frac{\mathcal{U}(v,\tau)}{\varepsilon}}-1+e^{-i\frac{\mathcal{U}(v,\tau)}{\varepsilon}}O(\ln^{-2}(1/\varepsilon)),$$

però del Teorema 5.2 es té que $\varepsilon^{-1}\mathcal{U}(v,\tau)=O(\ln^{-1}(1/\varepsilon))$, amb la qual cosa

$$e^{-i\frac{\mathcal{U}(v,\tau)}{\varepsilon}}-1=O(\ln^{-1}(1/\varepsilon)). \tag{6.22}$$

D'aquí,

$$\begin{aligned}
&\partial_z^2\Delta\phi_0\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)\cdot(1+\partial_v\mathcal{U}(v,\tau))^2-\varepsilon^3\partial_v^2F(v,\tau)=\\
&\quad=f_0^{[i]}(\mu)e^{i\tau}e^{-i\frac{v-i\pi/2}{\varepsilon}}O(\ln^{-1}(1/\varepsilon))+f_0^{[i]}(\mu)e^{-i\tau}e^{i\frac{v+i\pi/2}{\varepsilon}}+O\left(\mu\varepsilon^{a_1\tilde c}\right).
\end{aligned}$$

Pel que fa a les dues exponencials, senzillament usarem en quin domini tenim la variable v: que $v\in\tilde D_{i,+}$ implica les propietats $0<\Im m\, v<\pi/2-\tilde c\varepsilon\ln(1/\varepsilon)$, per tant,

$$\begin{aligned}
\Re e\left(-i\tfrac{v-i\pi/2}{\varepsilon}\right)=&\frac{\Im m\, v-\pi/2}{\varepsilon}\le-\tilde c\ln(1/\varepsilon)\quad \text{i}\\
\Re e\left(i\tfrac{v+i\pi/2}{\varepsilon}\right)=&-\frac{\Im m\, v+\pi/2}{\varepsilon}\le-\frac{\pi}{2\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

O sigui, que

$$\left|e^{-i\frac{v-i\pi/2}{\varepsilon}}\right|\le\varepsilon^{\tilde c}\qquad\text{i}\qquad\left|e^{i\frac{v+i\pi/2}{\varepsilon}}\right|\le e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}. \tag{6.24}$$

Afegint a tot això que $f_0^{[i]}(\mu)$ és analítica d'ordre μ i que $a_1>1$, arribem a la conclusió que existeix una constant k_0 tal que

$$\left|\partial_z^2\Delta\phi_0\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau-i\pi/2),\tau\big)(1+\partial_v\mathcal{U}(v,\tau))^2-\varepsilon^3\partial_v^2F(v,\tau)\right|\le k_0\mu\left(\frac{\varepsilon^{\tilde c}}{\ln(1/\varepsilon)}+e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}\right). \tag{6.25}$$

Seguint un procés totalment anàleg al que acabem de fer i tenint en compte l'expressió (6.20) i les fites (6.22), (6.24) i (6.12), obtindríem que existeix una constant k_1 tal que

$$|\varepsilon\partial_z\Delta\phi_0\big(\varepsilon^{-1}(v+\mathcal{U}(v,\tau)-i\pi/2),\tau\big)\cdot\partial_v^2\mathcal{U}(v,\tau)|\leq\varepsilon k_1\varepsilon^{\tilde{c}}\alpha_u\frac{1}{\varepsilon\ln^3(1/\varepsilon)}=k_1\alpha_u\frac{\varepsilon^{\tilde{c}}}{\ln^3(1/\varepsilon)}.$$

Posant aquesta última fita junt amb les (6.18), (6.19) i (6.25) a l'expressió (6.17), podem assegurar que existeix M_2 tal que:

$$\forall\,(v,\tau)\in\left(\tilde{D}_i\cap(-ir_0,ir_0)\right)\times\mathbb{T}_\sigma,\quad|\partial_v^2\psi_1(v,\tau)|\leq\varepsilon^{-3}M_2\left[\frac{\varepsilon^2}{\ln^2(1/\varepsilon)}+\mu\left(\frac{\varepsilon^{\tilde{c}}}{\ln(1/\varepsilon)}+e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}\right)\right].\tag{6.26}$$

Així doncs, dels resultats (6.16) i (6.26), existeix M_3 tal que $\forall\,(v,\tau)\in(-ir_0,ir_0)\times\mathbb{T}_\sigma$,

$$|\partial_v^2\psi_1(v,\tau)|\leq M_3\varepsilon^{-3}\left[\frac{\varepsilon^2}{\ln^2(1/\varepsilon)}+\mu\left(\varepsilon^{5-5\gamma}+\frac{\varepsilon^{\tilde{c}}}{\ln(1/\varepsilon)}+e^{-a_0\varepsilon^{\gamma-1}}\right)\right].$$

Aplicant el Lema 6.1 a la funció ψ_1, a $\mathbb{R}\times\mathbb{T}_\sigma$ aquesta fita queda multiplicada pel factor $4\varepsilon^{-\tilde{c}}e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}$, obtenint el resultat:

$$|\partial_v^2\psi_1(v,\tau)|\leq 4M_3\varepsilon^{-3}\left[\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)}+\mu\left(\varepsilon^{5-5\gamma-\tilde{c}}+\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}+\varepsilon^{-\tilde{c}}e^{-a_0\varepsilon^{\gamma-1}}\right)\right]e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}},$$

que simplificant termes d'ordre més gran, queda com:

$$\forall\,(v,\tau)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}_\sigma,\quad|\partial_v^2\psi_1(v,\tau)|\leq\ \alpha_1\varepsilon^{-3}\left[\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)}+\mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right]e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}.$$

Conseqüentment,

$$\forall\,(v,\tau)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}_\sigma,\quad|\partial_v\psi_1(v,\tau)|\leq\ \alpha_1\varepsilon^{-2}\left[\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)}+\mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right]e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}},$$

$$\forall\,(v,\tau)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}_\sigma,\quad|\psi_1(v,\tau)-<\psi_1>|\leq\ \alpha_1\varepsilon^{-1}\left[\frac{\varepsilon^{2-\tilde{c}}}{\ln^2(1/\varepsilon)}+\mu\frac{1}{\ln(1/\varepsilon)}\right]e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}.$$

6.4 Demostració de la Proposició 6.3.

El Teorema 5.2 ens donarà les fites que necessitem de la funció $\mathcal{U}(v,\tau)$ per a qualsevol $(v,\tau)\in(-v_2,v_2)\times\mathbb{R}$:

$$|\partial_v^j\mathcal{U}(v,\tau)|\leq\alpha_u\varepsilon^{1+\nu_0-j\gamma}.\tag{6.27}$$

De la funció $F(u,\tau)$, com que la tenim definida de manera explícita a (6.1), podrem calcular les seves derivades explícitament:

$$\partial_u^jF(u,\tau)=i^j\varepsilon^{-j-1}f_0^{[i]}(\mu)\left[(-1)^je^{i\tau}e^{-i\frac{u-i\pi/2}{\varepsilon}}-e^{-i\tau}e^{i\frac{u+i\pi/2}{\varepsilon}}\right].$$

Si les avaluem a qualsevol $u \in \mathbb{R}$, usarem que

$$\left| e^{\pm i \frac{u \pm i\pi/2}{\varepsilon}} \right| = e^{\mp \frac{\Im m\, u}{\varepsilon}} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} = e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}$$

per arribar a:

$$\forall\, (u,\tau) \in \mathbb{R}^2, \quad |\partial_u^j F(u,\tau)| \leq \varepsilon^{-j-1} |f_0^{[i]}(\mu)| 2e^{\sigma_0} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}. \tag{6.28}$$

Comencem usant el Teorema del Valor Mitjà per donar una expressió de $\psi_2(v,\tau)$:

$$\psi_2(v,\tau) = F(v,\tau) - F(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau) = \partial_u F(v + t\mathcal{U}(v,\tau),\tau) \cdot \mathcal{U}(v,\tau),$$

expressió que només volem estudiar per a $v \in (-v_2, v_2) \subset \mathbb{R}$ i, en aquest cas, $v + t\mathcal{U}(v,\tau) \in \mathbb{R}$, amb la qual cosa, usant (6.27) i (6.28),

$$|\psi_2(v,\tau)| \leq \varepsilon^{-1} |f_0^{[i]}(\mu)| 2e^{\sigma_0} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \alpha_u \varepsilon^{\nu_0}.$$

Pel que fa a les derivades de $\psi_2(v,\tau)$, usarem el Teorema del Valor Mitjà de manera anàloga:

$$\begin{aligned}
\partial_v \psi_2(v,\tau) =& \partial_u F(v,\tau) - \partial_u F(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau) \cdot (1 + \partial_v \mathcal{U}(v,\tau)) = \\
=& \partial_u F(v,\tau) - \partial_u F(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau) - \partial_u F(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau) \cdot \partial_v \mathcal{U}(v,\tau) = \\
=& \partial_u^2 F(v + t\mathcal{U}(v,\tau),\tau) \cdot \mathcal{U}(v,\tau) - \partial_u F(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau) \cdot \partial_v \mathcal{U}(v,\tau)
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\partial_v^2 \psi_2(v,\tau) =& \partial_u^2 F(v,\tau) - \partial_u^2 F(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau) \cdot (1 + \partial_v \mathcal{U}(v,\tau))^2 - \partial_u F(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau) \partial_v^2 \mathcal{U}(v,\tau) = \\
=& \partial_u^2 F(v,\tau) - \partial_u^2 F(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau) - \\
& - \partial_u^2 F(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau)\, (2 + \partial_v \mathcal{U}(v,\tau))\, \partial_v \mathcal{U}(v,\tau) - \partial_u F(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau) \partial_v^2 \mathcal{U}(v,\tau) = \\
=& \partial_u^3 F(v + t\mathcal{U}(v,\tau),\tau) \cdot \mathcal{U}(v,\tau) - \\
& - \partial_u^2 F(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau)\, (2 + \partial_v \mathcal{U}(v,\tau))\, \partial_v \mathcal{U}(v,\tau) - \\
& - \partial_u F(v + \mathcal{U}(v,\tau),\tau) \partial_v^2 \mathcal{U}(v,\tau).
\end{aligned}$$

Usant les fites de (6.27) i (6.28) que pertoquen a aquestes expressions i recordant que $\gamma < 1$, arribem a:

$$\begin{aligned}
|\partial_v \psi_2(v,\tau)| \leq& \varepsilon^{-3} |f_0^{[i]}(\mu)| 2e^{\sigma_0} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \cdot \alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0} + \varepsilon^{-2} |f_0^{[i]}(\mu)| 2e^{\sigma_0} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \cdot \alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0-\gamma} = \\
=& \left(\varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-1-\gamma}\right) |f_0^{[i]}(\mu)| 2e^{\sigma_0} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \cdot \alpha_u \varepsilon^{\nu_0} \leq \varepsilon^{-2} 4e^{\sigma_0} \alpha_u |f_0^{[i]}(\mu)| e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \varepsilon^{\nu_0}, \\
|\partial_v^2 \psi_2(v,\tau)| \leq& \varepsilon^{-4} |f_0^{[i]}(\mu)| 2e^{\sigma_0} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \cdot \alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0} + \\
& + \varepsilon^{-3} |f_0^{[i]}(\mu)| 2e^{\sigma_0} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} (2 + \alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0-\gamma}) \cdot \alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0-\gamma} + \\
& + \varepsilon^{-2} |f_0^{[i]}(\mu)| 2e^{\sigma_0} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \cdot \alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0-2\gamma} \leq \\
\leq& \left(\varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-2-\gamma}(2 + \alpha_u \varepsilon^{1+\nu_0-\gamma}) + \varepsilon^{-1-2\gamma}\right) |f_0^{[i]}(\mu)| 2e^{\sigma_0} e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \cdot \alpha_u \varepsilon^{\nu_0} \leq \\
\leq& \varepsilon^{-3} (4 + \alpha_u) 2e^{\sigma_0} \alpha_u |f_0^{[i]}(\mu)| e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}} \varepsilon^{\nu_0}.
\end{aligned}$$

Prenent $\alpha_2 = (4 + \alpha_u) 2e^{\sigma_0} \alpha_u$, s'obtenen els resultats enunciats.

Apèndixs.

A.1 Demostració de la Proposició 1.5.

Quan es parli d'unicitat, s'entén que és llevat de signe i de constant additiva que pot dependre del paràmetre μ.

Substituint la sèrie $\sum_{n\geq 0} \mathsf{T}_n(q,\tau;\mu)\varepsilon^n$ a l'Equació de Hamilton-Jacobi (1.26):

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\partial_\tau \mathsf{T}_n\varepsilon^n &+ \frac{1}{2}\varepsilon\left(\partial_q\mathsf{T}_0\right)^2+\partial_q\mathsf{T}_0\sum_{n\geq 1}\partial_q\mathsf{T}_n\varepsilon^{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1,n_2\geq 1}}\partial_q\mathsf{T}_{n_1}\partial_q\mathsf{T}_{n_2}\varepsilon^{n+1}+\\ &+\varepsilon(-1+\cos q)+\varepsilon\mu(1-\cos q)\sin\tau=0.\end{aligned}$$

Fem el canvi $q/2=\zeta$ i $\tilde{\mathsf{T}}_n(\zeta,\tau,\mu)=\mathsf{T}_n(2\zeta,\tau,\mu)$ i igualem potències de ε:

$$\begin{aligned}\partial_\tau\tilde{\mathsf{T}}_0 &= 0\\ \partial_\tau\tilde{\mathsf{T}}_1 &= -\frac{1}{8}\left(\partial_\zeta\tilde{\mathsf{T}}_0\right)^2+1-\cos(2\zeta)-\mu(1-\cos(2\zeta))\sin\tau\\ \partial_\tau\tilde{\mathsf{T}}_2 &= -\frac{1}{4}\partial_\zeta\tilde{\mathsf{T}}_0\partial_\zeta\tilde{\mathsf{T}}_1\\ \forall n\geq 3,\ \partial_\tau\tilde{\mathsf{T}}_n &= -\frac{1}{4}\partial_\zeta\tilde{\mathsf{T}}_0\partial_\zeta\tilde{\mathsf{T}}_{n-1}-\frac{1}{8}\sum_{\substack{n_1+n_2=n-1\\ n_1,n_2\geq 1}}\partial_\zeta\tilde{\mathsf{T}}_{n_1}\partial_\zeta\tilde{\mathsf{T}}_{n_2}.\end{aligned}$$

Cada equació es pot resoldre en $\tilde{\mathsf{T}}_n$, perquè la banda dreta depèn únicament del conjunt $\{\tilde{\mathsf{T}}_0,\tilde{\mathsf{T}}_1,\ldots,\tilde{\mathsf{T}}_{n-1}\}$, i quedarà completament determinada imposant la condició de periodicitat en τ per a $\tilde{\mathsf{T}}_{n+1}$:

$$<\partial_\tau\tilde{\mathsf{T}}_{n+1}>=0$$

on $<f>=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta,\tau,\mu)\,d\tau$ i, per tant, dependrà de (ζ,μ) tot i que no ho indiquem explícitament.

La separatriu del pèndol no pertorbat, $\tilde{\mathsf{T}}_0(\zeta)=4(1-\cos\zeta)$, és l'única funció que satisfa les equacions:

$$\begin{aligned}&\partial_\tau\tilde{\mathsf{T}}_0=0,\\ &<\partial_\tau\tilde{\mathsf{T}}_1>=-\frac{1}{8}\left(\partial_\zeta\tilde{\mathsf{T}}_0\right)^2+1-\cos(2\zeta)=0.\end{aligned}$$

L'equació de $\tilde{\mathsf{T}}_1$ també té una única solució 2π-periòdica amb la condició $< \partial_\tau \tilde{\mathsf{T}}_2 >= 0$:

$$\partial_\tau \tilde{\mathsf{T}}_1 = -\mu(1-\cos(2\zeta))\sin\tau \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathsf{T}}_1(\zeta,\tau,\mu) = 2\mu\sin^2\zeta\cos\tau + < \tilde{\mathsf{T}}_1 > (\zeta,\mu)$$

on $< \tilde{\mathsf{T}}_1 >$ es tal que:

$$< \partial_\tau \tilde{\mathsf{T}}_2 >=< -\frac{1}{4}\partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_0 \partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_1 >= -\sin\zeta \frac{d}{d\zeta} < \tilde{\mathsf{T}}_1 >= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\zeta} < \tilde{\mathsf{T}}_1 >= 0.$$

Pel que fa a $\tilde{\mathsf{T}}_2(\zeta,\tau)$, com que $\partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_0(\zeta) = 4\sin\zeta$ i $\partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_1(\zeta,\tau) = 4\mu\sin\zeta\cos\zeta\cos\tau$,

$$\partial_\tau \tilde{\mathsf{T}}_2 = -4\mu\sin^2\zeta\cos\zeta\cos\tau \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathsf{T}}_2(\zeta,\tau,\mu) = -4\mu\sin^2\zeta\cos\zeta\sin\tau + < \tilde{\mathsf{T}}_2 > (\zeta,\mu),$$

on $< \tilde{\mathsf{T}}_2 >$ la triem tal que $< \partial_\tau \tilde{\mathsf{T}}_3 >= 0$, per tant,

$$\begin{aligned} < \partial_\tau \tilde{\mathsf{T}}_3 > &= -\sin\zeta \frac{d}{d\zeta} < \tilde{\mathsf{T}}_2 > -\frac{1}{8} < (\partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_1)^2 > \\ &= -\sin\zeta \frac{d}{d\zeta} < \tilde{\mathsf{T}}_2 > -\frac{1}{8} < 16\mu^2\sin^2\zeta\cos^2\zeta\cos^2\tau >= \\ &= -\sin\zeta \frac{d}{d\zeta} < \tilde{\mathsf{T}}_2 > -\mu^2\sin^2\zeta\cos^2\zeta = 0 \Rightarrow \quad \frac{d}{d\zeta} < \tilde{\mathsf{T}}_2 > (\zeta,\mu) = -\mu^2\sin\zeta\cos^2\zeta. \end{aligned}$$

Per a $i = 1, 2$, definim els espais

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i \;=\; & \{ f(\zeta,\tau) \,|\, \text{polinomis trigonomètrics en } \tau \text{ amb coeficients que són polinomis} \\ & \text{trigonomètrics en } \zeta \text{ amb factor comú } \sin^i\zeta \}, \end{aligned}$$

les funcions dels quals es pot comprovar fàcilment que compleixen les següents propietats:

1. Si $f, g \in \mathcal{F}_i$, aleshores $f + g \in \mathcal{F}_i$ i $< f >\in \mathcal{F}_i$ i $\int f(\zeta,\tau)\,d\tau - < \int f(\zeta,\tau)\,d\tau >\in \mathcal{F}_i$.
2. Si $f, g \in \mathcal{F}_1$, aleshores $f \cdot g \in \mathcal{F}_2$.
3. Si $f \in \mathcal{F}_2$, aleshores $\partial_\zeta f \in \mathcal{F}_1$ i $f/\sin\zeta \in \mathcal{F}_1$.

Observem que $\partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_0$, $\partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_1$ i $\partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_2$ són de $\mathcal{F}_1$ i demostrarem per inducció que $\partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_n$ també. Amb això arribarem doncs a la conclusió que

$$\partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_n(\zeta,\tau,\mu) = 0 \quad \text{per a} \quad \zeta = 0, \pi.$$

L'equació de $\tilde{\mathsf{T}}_n$ és

$$\partial_\tau \tilde{\mathsf{T}}_n = -\sin\zeta \partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_{n-1} - \frac{1}{8} \sum_{\substack{n_1 + n_2 = n-1 \\ n_1, n_2 \geq 1}} \partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_{n_1} \partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_{n_2},$$

que a la dreta només hi té una suma de productes de dos factors $\partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_m$ per a $m < n$, suposats de $\mathcal{F}_1$, per tant $\partial_\tau \tilde{\mathsf{T}}_n \in \mathcal{F}_2$ i d'aquí $\tilde{\mathsf{T}}_n - < \tilde{\mathsf{T}}_n >\in \mathcal{F}_2$. En conseqüència, $\partial_\zeta \left(\tilde{\mathsf{T}}_n - < \tilde{\mathsf{T}}_n > \right) \in \mathcal{F}_1$.

Per altra banda, s'imposa la condició:

$$< \partial_\tau \tilde{\mathsf{T}}_{n+1} >= -\sin\zeta < \partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_n > -\frac{1}{8} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1,n_2\geq 1}} < \partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_{n_1} \partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_{n_2} >= 0,$$

per tant, com que cada terme de la suma és $< \partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_{n_1} \partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_{n_2} >\in \mathcal{F}_2$, s'obté que

$$< \partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_n >= -\frac{1}{8\sin\zeta} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1,n_2\geq 1}} < \partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_{n_1} \partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_{n_2} > \in \mathcal{F}_1,$$

amb la qual cosa arribem a:

$$\partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_n = \partial_\zeta \left(\tilde{\mathsf{T}}_n - < \tilde{\mathsf{T}}_n > \right) + < \partial_\zeta \tilde{\mathsf{T}}_n >\in \mathcal{F}_1.$$

A.2 Dominis outer.

Al domini outer D^u_γ només volem considerar punts que ens permetin fer integrals impròpies per sobre de camins inclinats un cert angle sense passar per l'interior dels cercles $|u \pm i\pi/2| \leq a\varepsilon^\gamma$.

Siguin $\varepsilon \in (0,1)$, $a \in (0,\pi/4)$, $\gamma \in [0,1)$ i $u_0 > 0$ fixats. L'angle $\beta_0 \in (0,\pi/2)$ és tal que les rectes $u = u_0 + te^{\pm i\beta_0}$ siguin tangents, en un punt amb part real negativa, als cercles $|u \pm i\pi/2| = a\varepsilon^\gamma$ respectivament. El paràmetre $u_1 > u_0$ es tria de manera que les rectes $u = u_1 + te^{\pm i\beta_0}$ passin pels punts $-a\varepsilon^\gamma \mp i\pi/2$ respectivament. Tot seguit donem la relació entre totes aquestes constants.

El punt de tangència és $(-a\varepsilon^\gamma \sin\beta_0, \pm\pi/2 \mp a\varepsilon^\gamma \cos\beta_0)$. La recta que passa per $(u_0, 0)$ i té pendent $\mp \tan\beta_0$ té equació

$$y = \mp \tan\beta_0 (x - u_0)$$

i, si volem que passi pel punt de tangència,

$$\begin{aligned}
\pm\frac{\pi}{2} \mp a\varepsilon^\gamma \cos\beta_0 &= \mp \tan\beta_0(-a\varepsilon^\gamma \sin\beta_0 - u_0) \\
-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\tan\beta_0} + a\varepsilon^\gamma \frac{\cos^2\beta_0}{\sin\beta_0} &= -a\varepsilon^\gamma \sin\beta_0 - u_0 \\
u_0 &= -a\varepsilon^\gamma \sin\beta_0 + \frac{\pi}{2}\frac{1}{\tan\beta_0} - a\varepsilon^\gamma \frac{\cos^2\beta_0}{\sin\beta_0} \\
u_0 &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\tan\beta_0} - a\varepsilon^\gamma \frac{1}{\sin\beta_0}.
\end{aligned}$$

Pel que fa al valor u_1, pretenem que les rectes $y = \mp \tan\beta_0(x - u_1)$ passin per $-a\varepsilon^\gamma \mp i\pi/2$, per tant, s'han de complir les dues condicions següents:

$$\begin{cases} -a\varepsilon^\gamma = u_1 + t\cos\beta_0 \\ -\pi/2 = t\sin\beta_0 \end{cases}$$

que finalment porten a $u_1 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\tan\beta_0} - a\varepsilon^\gamma > u_0$.

En el domini D^u_γ volem considerar dos tipus de punts:

- els $u = u_0 + te^{\pm i\beta}$, $\forall \beta \in [0,\beta_0)$ i $t \in \mathbb{R}^-$, o sigui, els marcats a la Figura 2, que també

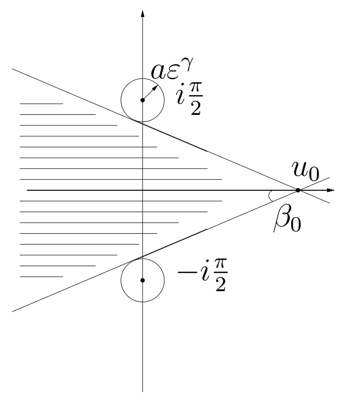


Figura 2: Primera part del domini D^u_γ.

poden donar-se com
$$\{u \in \mathbb{C} \,|\quad |\arg(u-u_0)| > \pi - \beta_0\}$$
o
$$\begin{aligned}&\{u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < u_0,\, \tan\beta_0(x-u_0) < y < -\tan\beta_0(x-u_0)\} = \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R} \,|\, -\tan\beta_0(u_0-x) < y < \tan\beta_0(u_0-x)\} = \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R} \,|\, |y| < \tan\beta_0(u_0-x)\}.\end{aligned}$$

- els $u = u_1 + te^{\pm i\beta}$, $\forall \beta \in [0,\beta_0)$ i $t \in \mathbb{R}^-$, però amb les restriccions $|u \pm i\pi/2| > a\varepsilon^\gamma$, $|\arg(u-u_0)| \leq \pi - \beta_0$ i $\Re e\, u < -a\varepsilon^\gamma \sin\beta_0$. Només estaríem afegint els marcats a la Figura 3, i que poden escriure's com

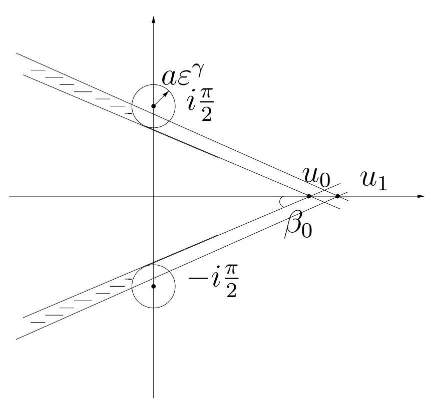


Figura 3: Segona part del domin D^u_γ.

$$\{u \in \mathbb{C} \,|\quad |u \pm i\pi/2| > a\varepsilon^\gamma,\, \Re e\, u < -a\varepsilon^\gamma \sin\beta_0,\, |\arg(u-u_1)| > \pi - \beta_0,\, |\arg(u-u_0)| \leq \pi - \beta_0\}$$

o

$$\{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -a\varepsilon^\gamma \sin\beta_0,\ \tan\beta_0(u_0-x) < |y| < \tan\beta_0(u_1-x),\ |u \pm i\pi/2| > a\varepsilon^\gamma\}.$$

A.3 Dominis inner.

A l'hora de construir la regió inner, voldrem que la intersecció de la recta $\arg(u-u_0) = \pi-\beta_0$ amb l'eix imaginari sigui un punt iz_0 del cercle centrat a $i\pi/2$ i de radi $\overline{a}\varepsilon^\gamma$, tal i com es veu a la Figura 4.

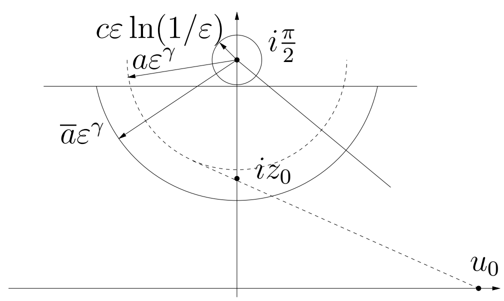


Figura 4: Relació entre el domini inner i el domini outer.

La recta $\arg(u-u_0) = \pi-\beta_0$ pot donar-se com $y = -\tan\beta_0(x-u_0)$ si notem $u = x+iy$, per tant, $z_0 = \tan\beta_0 \cdot u_0$ i sabem que $z_0 > 0$. Ara bé, segons l'expressió de u_0 trobada a l'Apèndix A.2,

$$0 < z_0 = \tan\beta_0 \cdot u_0 = \frac{\pi}{2} - a\varepsilon^\gamma \frac{1}{\cos\beta_0},$$

per tant, si volem que $z_0 > \pi/2 - \overline{a}\varepsilon^\gamma$, $\overline{a}$ haurà de complir que

$$\frac{a}{\cos\beta_0} < \overline{a}. \tag{29}$$

A més, observem que, del fet que $z_0 > 0$ podem deduir que

$$\frac{a}{\cos\beta_0} < \frac{\pi}{2\varepsilon^\gamma}. \tag{30}$$

També hem de tenir especial cura que la $\overline{a}$ triada compleixi la condició

$$\frac{\pi}{2} - \overline{a}\varepsilon^\gamma > 0 \Rightarrow \overline{a} < \frac{\pi}{2\varepsilon^\gamma} \tag{31}$$

Les dues condicions (29) i (31) que tenim sobre $\overline{a}$ són compatibles gràcies a (30).

Evidentment aribem a la mateixa conclusió si imposem que el punt $-iz_0$ d'intersecció de la recta $\arg(u-u_0) = \pi+\beta_0$ amb l'eix imaginari estigui dins els cercle centrat a $-i\pi/2$ i de radi $\overline{a}\varepsilon^\gamma$.

A.4 Demostració del Lema 2.4.

Les funcions $|\cosh u|$ i $|\cosh u|^{-1}$ són $i\pi$-periòdiques, per tant, només cal estudiar-les a la banda $\mathbb{R} \times [0, \pi]$. Considerem aquesta banda com a unió de dues parts: una part fitada, $[-v_0, u_0] \times [0, \pi]$, i una de no fitada, $(-\infty, -v_0] \times [0, \pi]$, amb una $v_0 > 0$ qualsevol, que nosaltres considerarem lluny del punt $i\pi/2$ quan apliquem aquest lema posteriorment.

A $(-\infty, -v_0] \times [0, \pi]$, $\cosh u$ és analítica i no hi té cap zero,

$$\cosh u = \frac{e^{2u}+1}{2}\, e^{-u} \Rightarrow \begin{cases} |\cosh u| \leq \frac{e^{-2v_0}+1}{2}\, e^{-\Re e\, u} \leq e^{-\Re e\, u}. \\ |\cosh u|^{-1} \leq \frac{2}{1-e^{2\Re e\, u}}\, e^{\Re e\, u} \leq \frac{2}{1-e^{-2v_0}}\, e^{\Re e\, u}. \end{cases} \tag{32}$$

Per la $i\pi$-periodicitat, aquestes desigualtats són certes $\forall u$ tal que $\Re e\, u \leq -v_0$.

La funció $\cosh u$ és analítica a $[-v_0, u_0] \times [0, \pi]$ i només hi té un zero simple a $i\pi/2$, per tant,

$$\exists k_1 > 0,\ \forall u \in [-v_0, u_0] \times [0, \pi],\ \left|\frac{\cosh u}{u - i\pi/2}\right| \leq k_1, \text{ és a dir } \quad |\cosh u| \leq k_1 |u - i\pi/2|. \tag{33}$$

$$\exists k_2 > 0,\ \forall u \in [-v_0, u_0] \times [0, \pi],\ \left|\frac{u - i\pi/2}{\cosh u}\right| \leq k_2, \text{ és a dir } \quad |\cosh u|^{-1} \leq k_2 |u - i\pi/2|^{-1}. \tag{34}$$

Per la $i\pi$-periodicitat,

$$\forall u \in [-v_0, u_0] \times [-\pi, 0],\ |\cosh u| \leq k_1 |u + i\pi/2| \text{ i } |\cosh u|^{-1} \leq k_2 |u + i\pi/2|^{-1}. \tag{35}$$

Podem ja tenir les desigualtats dels dos primers apartats. De (32), si $\Re e\, u \leq -U < 0$,

$$|\tanh u| \leq \frac{|\sinh u|}{|\cosh u|} \leq \frac{e^{2\Re e\, u}+1}{2}\, e^{-\Re e\, u} \frac{2}{1-e^{-2U}}\, e^{\Re e\, u} \leq \frac{e^{-2U}+1}{1-e^{-2U}} = (\tanh U)^{-1}. \tag{36}$$

Per a la segona desigualtat, també combinarem les fites de $\sinh u$ i $\cosh u$ tal i com acabem de fer en aquest últim resultat, però haurem de considerar dos casos diferenciats:

- quan $u \in [-\infty, -v_0] \times [0, \pi]$, en què usarem directament (36) amb $U = v_0$:

$$|\tanh u| \leq (\tanh v_0)^{-1} \leq (\tanh v_0)^{-1} \varepsilon^{-\gamma}$$

- quan $u \in [-v_0, u_0] \times [0, \pi]$, en què usarem (34) i que $|u - i\pi/2|^{-1} < a^{-1}\varepsilon^{-\gamma}$:

$$|\tanh u| \leq \frac{e^{2\Re e\, u}+1}{2}\, e^{-\Re e\, u} k_2 a^{-1} \varepsilon^{-\gamma} \leq \frac{e^{2u_0}+1}{2}\, e^{v_0} k_2 a^{-1} \varepsilon^{-\gamma}$$

La conclusió és doncs que $\exists\, c_0 = \text{màx}\left\{(\tanh \mathrm{v}_0)^{-1}, \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{u}_0}+1}{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{v}_0} \mathrm{k}_2 \mathrm{a}^{-1}\right\}$ tal que $\forall u \in D^u_\gamma$

$$|\tanh u| \leq c_0 \varepsilon^{-\gamma} \tag{37}$$

Per a l'Apartat 3, de (32),

$$\int_{-\infty}^{-U} |\cosh u|^{-n}\, du \leq \left(\frac{2}{1-e^{-2U}}\right)^n \int_{-\infty}^{-U} e^{n\,\Re e\, u}\, du = \left(\frac{2}{1-e^{-2U}}\right)^n \frac{1}{n}\, e^{-nU} = \frac{1}{n \sinh^n U}.$$

Passem ara a l'Apartat 4, on haurem de separar el domini D^u_γ en una part fitada, $D^u_\gamma \cap \{-v_0 \le \Re e\, u < u_0\}$, on $v_0 > 0$ és tal que en aquest conjunt $|\Im m\, u| \le \pi$, i una part no fitada, $D^u_\gamma \cap \{u \in \mathbb{C} \mid \Re e\, u < -v_0\}$. Farem només el cas $0 \le \Im m\, u \le \pi$ i anàlogament es faria el cas $-\pi \le \Im m\, u < 0$. Observem primer que $\exists K > 1$ tal que a la part fitada s'hi compleix que $a\varepsilon^\gamma < |u \pm i\pi/2| \le K$.

- Si $\Re e\, u < -v_0$,

$$\int_{-\infty}^{u} |\cosh\zeta|^{-2}\, d\zeta = \int_{-\infty}^{\Re e\, u} |\cosh(t + i\,\Im m\, u)|^{-2}\, dt \le \int_{-\infty}^{-v_0} |\cosh(t + i\,\Im m\, u)|^{-2}\, dt$$

  i ara podem usar el resultat de l'Apartat 3 amb $U = v_0 > 0$:

$$\int_{-\infty}^{-v_0} |\cosh(t + i\,\Im m\, u)|^{-2}\, dt \le \frac{1}{2\sinh^2 v_0}.$$

- Si $-v_0 \le \Re e\, u < u_0$, separarem la integral en una d'impròpia, on usarem el resultat anterior, i una altra integral, on usarem (34),

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{u} |\cosh\zeta|^{-2}\, d\zeta &= \int_{-\infty}^{-v_0} |\cosh(t + i\,\Im m\, u)|^{-2}\, dt + \int_{-v_0}^{\Re e\, u} |\cosh(t + i\,\Im m\, u)|^{-2}\, d\zeta \le \\ &\le \frac{1}{2\sinh^2 v_0} + k_2^2 \int_{-v_0}^{\Re e\, u} |t + i\,\Im m\, u - i\pi/2|^{-2}\, dt\end{aligned}$$

  Per a la integral que queda, usarem les expressions obtingudes a [DS92]:

$$\int_{-v_0}^{\Re e\, u} |t + i\,\Im m\, u - i\pi/2|^{-2}\, dt \le 2 \sup_{t \in [-v_0, \Re e\, u]} |t + i\,\Im m\, u - i\pi/2|^{-1} \le 2a^{-1}\varepsilon^{-\gamma},$$

  la qual cosa ha estatpossible perquè recordem que $\forall\, t \in [-v_0, \Re e\, u]$ sempre s'hi complirà que $a\varepsilon^\gamma < |t + i\,\Im m\, u - i\pi/2|$.

Per tant,

$$\forall u \in D^u_\gamma,\ \int_{-\infty}^{u} |\cosh\zeta|^{-2}\, d\zeta \le \frac{1}{2\sinh^2 v_0} + k_2^2 2a^{-1}\varepsilon^{-\gamma} \le \left(\frac{1}{2\sinh^2 v_0} + k_2^2 2a^{-1}\right)\varepsilon^{-\gamma}.$$

Finalment, per a les últimes desigualtats de l'enunciat també haurem de separar el domini. Considerem $\beta \in [0, \beta_0/2]$ i sabem que $\forall \xi \in \mathbb{R}^-$, $u + \xi e^{\pm i\beta} \in D^u_\gamma$ i $\Re e(u + \xi e^{\pm i\beta}) \le \Re e\, u < u_0$. Però per fitar $\dfrac{\cosh u}{\cosh(u + \xi e^{\pm i\beta})}$, hem de discriminar segons $\Re e\, u$:

- si $\Re e\, u < -v_0$, aleshores $\Re e(u + \xi e^{\pm i\beta}) \le -v_0$, per tant, de (32)

$$\left|\frac{\cosh u}{\cosh(u + \xi e^{\pm i\beta})}\right| \le e^{-\Re e\, u} \frac{2}{1 - e^{-2v_0}}\, e^{\Re e(u + \xi e^{\pm i\beta})} \le \frac{2}{1 - e^{-2v_0}}\, e^{\xi\cos\beta}.$$

  Per a la desigualtat de l'Apartat 5, només ens cal usar que $e^{\xi\cos\beta} \le 1$ (fixem-nos que $\cos\beta \ge 0$ i $\xi < 0$) i arribem a una constant. Per a la desigualtat integral,

$$\int_{-\infty}^{0} \left|\frac{\cosh u}{\cosh(u + \xi e^{\pm i\beta})}\right|^2 d\xi \le \int_{-\infty}^{0} \frac{4}{(1 - e^{-2v_0})^2}\, e^{2\xi\cos\beta}\, d\xi = \frac{4}{2\cos\beta(1 - e^{-2v_0})^2}$$

i, com que $0 \leq \beta \leq \beta_0/2$, $\cos\beta \geq \cos(\beta_0/2)$, amb la qual cosa

$$\int_{-\infty}^{0} \left| \frac{\cosh u}{\cosh(u + \xi e^{\pm i\beta})} \right|^2 d\xi \leq \frac{2}{\cos(\beta_0/2)(1 - e^{-2v_0})^2}.$$

- si $-v_0 \leq \Re e\, u < u_0$, farem només el cas $0 \leq \Im m\, u \leq \pi$ i a $[-\pi, 0]$ es fa anàlogament. Alguns $u + \xi e^{\pm i\beta}$ tindran part real a $[-v_0, u_0)$ però d'altres la tindran a $(-\infty, -v_0)$ i els hem de tractar diferent, en qualsevol cas però recordem que $|u - i\pi/2| < K$.

  - si $\Re e(u + \xi e^{\pm i\beta}) < -v_0$, de (33) i (32),

$$\left| \frac{\cosh u}{\cosh(u + \xi e^{\pm i\beta})} \right| \leq k_1 |u - i\pi/2| \frac{2}{1 - e^{-2v_0}}\, e^{\Re e(u+\xi e^{\pm i\beta})} \leq k_1 K \frac{2}{1 - e^{-2v_0}}\, e^{\Re e(u+\xi e^{\pm i\beta})}.$$

Com abans, per arribar a la desigualtat de l'Apartat 5, posem una fita de l'exponencial:

$$\frac{2}{1 - e^{-2v_0}}\, e^{\Re e(u+\xi e^{\pm i\beta})} \leq \frac{2}{1 - e^{-2v_0}}\, e^{-v_0} = \frac{1}{\sinh v_0}.$$

I per a la integral, aquest cas correspon als valors de ξ tals que $\Re e\, u + \xi \cos\beta < -v_0$, és a dir, $\xi < -(v_0 + \Re e\, u)/\cos\beta = \xi_0$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\xi_0} \left| \frac{\cosh u}{\cosh(u + \xi e^{\pm i\beta})} \right|^2 d\xi &\leq \int_{-\infty}^{\xi_0} k_1^2 K^2 \frac{4}{(1 - e^{-2v_0})^2}\, e^{2\,\Re e\, u + 2\xi\cos\beta}\, d\xi \leq \\
&\leq k_1^2 K^2 \frac{4}{(1 - e^{-2v_0})^2}\, e^{2\,\Re e\, u} \int_{-\infty}^{\xi_0} e^{2\xi\cos\beta}\, d\xi \leq \\
&\leq k_1^2 K^2 \frac{4}{(1 - e^{-2v_0})^2}\, e^{2\,\Re e\, u} \frac{1}{2\cos\beta}\, e^{2\xi_0\cos\beta} = \\
&= k_1^2 K^2 \frac{4}{(1 - e^{-2v_0})^2}\, e^{2\,\Re e\, u} \frac{1}{2\cos\beta}\, e^{-2v_0 - 2\,\Re e\, u},
\end{aligned}$$

per tant,

$$\int_{-\infty}^{\xi_0} \left| \frac{\cosh u}{\cosh(u + \xi e^{\pm i\beta})} \right|^2 d\xi \leq k_1^2 K^2 \frac{1}{2\cos(\beta_0/2)(\sinh v_0)^2}. \tag{38}$$

  - si $\Re e(u + \xi e^{\pm i\beta}) \in [-v_0, u_0)$, haurem de diferenciar els casos en què $\Im m(u + \xi e^{\pm i\beta}) > 0$ o < 0. Per a la semirecta $r_{-\beta} = \{u + \xi e^{-i\beta},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^-\}$, sabem que $\Im m(u + \xi e^{-i\beta}) \geq \Im m\, u > 0$ i, usant la notació de la Figura 5,

$$|u + \xi e^{-i\beta} - i\pi/2| \ \geq d(r_{-\beta}, i\pi/2) = |u - i\pi/2| \sin\alpha \geq |u - i\pi/2| \sin(\overline{\beta}_0 - \beta). \tag{39}$$

Com que $\overline{\beta}_0 - \beta \geq \overline{\beta}_0 - \dfrac{\beta_0}{2} = \dfrac{\overline{\beta}_0 - \beta_0}{2} + \dfrac{\overline{\beta}_0}{2} \geq \dfrac{\overline{\beta}_0}{2}$, aleshores $\sin(\overline{\beta}_0 - \beta) \geq \sin(\overline{\beta}_0/2)$. Per tant, i usant (33) i (34),

$$\left| \frac{\cosh u}{\cosh(u + \xi e^{-i\beta})} \right| \leq k_1 k_2 \frac{|u - i\pi/2|}{|u + \xi e^{-i\beta} - i\pi/2|} \leq k_1 k_2 \frac{1}{\sin(\overline{\beta}_0/2)}.$$

En canvi, per a la semirecta $r_\beta = \{u + \xi e^{i\beta},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^-\}$, sabem que $|u + \xi e^{i\beta} - i\pi/2| \geq |u - i\pi/2|$ però hi ha punts amb part imaginària negativa que haurem de comparar amb $-i\pi/2$.

Si $0 \le \Im m(u+\xi e^{i\beta}) \le \pi$, usant (33) i (34),

$$\left|\frac{\cosh u}{\cosh(u+\xi e^{i\beta})}\right| \le k_1 k_2 \frac{|u-i\pi/2|}{|u+\xi e^{i\beta}-i\pi/2|} \le k_1 k_2.$$

Si $-\pi \le \Im m(u+\xi e^{i\beta}) < 0$, de (33) i (35),

$$\left|\frac{\cosh u}{\cosh(u+\xi e^{i\beta})}\right| \le k_1 k_2 \frac{|u-i\pi/2|}{|u+\xi e^{i\beta}+i\pi/2|},$$

però per a $-i\pi/2$ tenim una relació anàloga a (39) i, com que $|u-i\pi/2| \le K$ i $|u+i\pi/2| \ge \pi/2$, aleshores,

$$\left|\frac{\cosh u}{\cosh(u+\xi e^{i\beta})}\right| \le k_1 k_2 \frac{|u-i\pi/2|}{|u+i\pi/2|\sin(\overline{\beta}_0/2)} \le k_1 k_2 \frac{2K}{\pi \sin(\overline{\beta}_0/2)} \le k_1 k_2 \frac{K}{\sin(\overline{\beta}_0/2)}.$$

Així doncs, tant pel cas $r_{-\beta}$ com per al r_β,

$$\left|\frac{\cosh u}{\cosh(u+\xi e^{i\beta})}\right| \le k_1 k_2 \frac{K}{\sin(\overline{\beta}_0/2)}.$$

I pel que fa a la integral, aquest cas correspon als valors de ξ tals que $-v_0 \le \Re e\, u + \xi\cos\beta < u_0$, és a dir, $\xi_0 = -(v_0 + \Re e\, u)/\cos\beta \le \xi < (u_0 - \Re e\, u)/\cos\beta$. Com que en aquests moments $\Re e\, u < u_0$, l'extrem superior és positiu i només ens interessen $\xi < 0$:

$$\begin{aligned}\int_{\xi_0}^{0} \left|\frac{\cosh u}{\cosh(u+\xi e^{\pm i\beta})}\right|^2 d\xi \quad &\le \quad \int_{\xi_0}^{0} k_1^2 k_2^2 \frac{K^2}{\sin^2(\overline{\beta}_0/2)}\, d\xi = k_1^2 k_2^2 \frac{K^2}{\sin^2(\overline{\beta}_0/2)}(-\xi_0) = \\ &= \quad k_1^2 k_2^2 \frac{K^2}{\sin^2(\overline{\beta}_0/2)} \frac{v_0 + \Re e\, u}{\cos\beta}\end{aligned}$$

per tant,

$$\int_{\xi_0}^{0} \left|\frac{\cosh u}{\cosh(u+\xi e^{\pm i\beta})}\right|^2 d\xi \le k_1^2 k_2^2 \frac{K^2(v_0+u_0)}{\sin^2(\overline{\beta}_0/2)\cos(\beta_0/2)}. \tag{40}$$

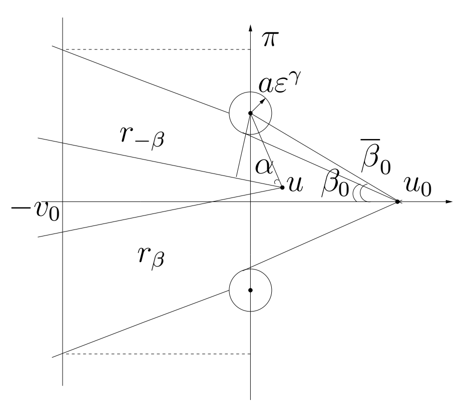


Figura 5: Camins inclinats angle $0 \le \beta \le \beta_0/2$.

Així doncs, $\forall u \in D^u_\gamma$, $\exists c_1 > 0$ tal que

$$\left|\frac{\cosh u}{\cosh(u + \xi e^{\pm i\beta})}\right| \leq c_1,$$

i, de (38) i (40),

$$\int_{-\infty}^{0} \left|\frac{\cosh u}{\cosh(u + \xi e^{\pm i\beta})}\right|^2 d\xi \leq c_1.$$

Amb $C = \text{màx}\left\{\mathrm{c}_0,\ \dfrac{1}{2\sinh^2 \mathrm{v}_0} + \mathrm{k}_2^2 2\mathrm{a}^{-1},\ \mathrm{c}_1\right\}$, tenim tots els resultats que s'enunciaven.

A.5 Límits.

Aquí farem comparacions entre potències, logaritmes i exponencials. S'entén que totes les constants que hi intervenen són qualssevol positives.

La demostració de

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{s_0} \ln(1/\varepsilon) = 0$$

es fa senzillament aplicant la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{s_0} \ln(1/\varepsilon) = \lim_{x\to+\infty} x^{-s_0} \ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{s_0}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{s_0 x^{s_0-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{s_0 x^{s_0}} = 0.$$

De manera anàloga,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{s_0} \ln\big(\varepsilon \ln(1/\varepsilon)\big) = 0 :$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{s_0} \ln\big(-\varepsilon\ln\varepsilon\big) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln\big(-\varepsilon\ln\varepsilon\big)}{\varepsilon^{-s_0}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\frac{-\ln\varepsilon - 1}{-\varepsilon\ln\varepsilon}}{-s_0\varepsilon^{-s_0-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{\varepsilon^{s_0}}{-s_0} + \frac{\varepsilon^{s_0}}{-s_0\ln\varepsilon}\right) = 0.$$

Volem ara arribar al resultat:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} e^{-C\varepsilon^{-s_1}} \varepsilon^{-s_0} \ln(1/\varepsilon) = 0.$$

Caldrà aplicar en aquest cas la regla de L'Hôpital diverses vegades.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} e^{-C\varepsilon^{-s_1}} \varepsilon^{-s_0} \ln(1/\varepsilon) = \lim_{x\to+\infty} e^{-Cx^{s_1}} x^{s_0} \ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^{Cx^{s_1}} x^{-s_0}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{e^{Cx^{s_1}}\big(Cs_1 x^{s_1-1} x^{-s_0} - s_0 x^{-s_0-1}\big)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{s_0}}{e^{Cx^{s_1}}\big(Cs_1 x^{s_1} - s_0\big)}.$$

Fixem-nos que $F(x) = e^{Cx^{s_1}}\big(Cs_1 x^{s_1} - s_0\big)$ amb $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \infty$ té la propietat que $F'(x) = \big(F(x) + s_1\big)Cs_1 x^{s_1-1}$, per tant,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{s_0}}{F(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{s_0 x^{s_0-1}}{\big(F(x)+s_1\big)Cs_1 x^{s_1-1}} = \frac{s_0}{Cs_1} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{s_0-s_1}}{F(x)+s_1}.$$

Si $s_0 \leq s_1$, ja hem acabat i el límit dóna 0. Si $js_1 < s_0 < (j+1)s_1$ per a certa $j \in \mathbb{N}^*$, hem de continuar aplicant L'Hôpital i després de j vegades més,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{s_0}}{F(x)} = \frac{s_0(s_0-1)\cdots(s_0-j)}{(Cs_1)^{j+1}} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{s_0-(j+1)s_1}}{F(x)+s_1} = 0.$$

Bibliografia

[Ar64] V.I: Arnold. *Instability of dynamical systems with several degree of freedom*. Doklady Akad Nauk SSSR. (1964), 156(1), 581-585.

[B94] W. Balser. *From Divergent Power Series to Analytic Functions*. Lecture Notes in Mathematics, 1592. Springer-Verlag (1994).

[BM99] W. Balser and M. Miyake. *Summability of formal solutions of certain partial differential equations*. Acta Sci. Math. (1999) 65, 543–551.

[Bir27] G.D. Birkhoff. *Dynamical Systems*. Providence, RI: AMS Publications. (1927).

[BO91] A. Benseny and C. Olivé. *High precision angles between invariant manifolds for radpidly forced hamiltonian systems*. In [PSiSo93]. (1993), 315-319.

[BSaSV98] C. Bonet, D. Sauzin, T.M. Seara and M. València. *Adiabatic invariant of the harmonic oscillator, complex matching and resurgence methods*. SIAM J. Math. Anal. (1998), 29 (6), 1335-1360.

[C89] B. Candelpergher. *Une introduction à la résurgence*. Gazette des Mathématiciens, Paris. (1989), 42, 36–64.

[CNP93a] B. Candelpergher, J.C. Nosmas and F. Pham. *Premiers pas en calcul étranger*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble. (1993), 1, 201–224.

[CNP93b] B. Candelpergher, J.C. Nosmas, F. Pham, *Approche de la résurgence*, Actualités Math. Hermann, París, 1993.

[Che] A. Chenciner. *Extrémales: dynamique et géométrie*. Llibre en fase de preparació.

[Ch98] V.L. Chernov. *On separatrix splitting of some quadratic area-preserving maps of the plane*. Regular and Chaotic Dynamics. (1998), 3(1), 49-65.

[DS92] A. Delshams and T.M. Seara. *An asymptotic expresion for the splitting of separatrices of rapidly forced pendulum*. Commun. Math. Phys. (1992), 150, 433-463.

[DGJS97] A. Delshams, V. Gelfreich, A. Jorba and T.M. Seara. *Exponentially small splitting of separatrices under fast quasiperiodic forcing*. Comm. Math. Phys. (1997), 189, 35-71.

[DS96] A. Delshams and T.M. Seara. *Splitting of separatrices in Hamiltonian systems with one and a half degrees of freedom*. Math. Phys. Electron. J. (1997), 3(4), 1-40.

[DR96] A. Delshams and R. Ramírez-Ros. *Poincaré-Melnikov-Arnold method for analytic planar maps*. Nonlinearity. (1996), 9(1), 1-26.

[DR97] A. Delshams and R. Ramírez-Ros. *Melnikov potential for exact symplectic maps*. Comm. Math. Phys. (1997), 190, 213-245.

[DR98] A. Delshams and R. Ramírez-Ros. *Exponentially small splitting of separarices for perturbed integrable standard-like maps*. J. Nonlinear Sci. (1998), 8, 317-352.

[Eca81] J. Écalle. *Les fonctions résurgentes*. Publ. Math. d'Orsay, Université Paris-Sud. (1981-1985), 3 vol.

[Eca92a] J. Écalle. *Singularités non abordables par la géométrie*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble. (1992), 52, 73–164.

[Eca92b] J. Écalle. *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. Actualités Math., Hermann, Paris. (1992).

[Eca93] J. Écalle. *Six lectures on Transseries, Analysable Functions and the Constructive Proof of Dulac's conjecture*. D.Schlomiuk (ed.), Bifurcations and Periodic Orbits of Vector Field. Kluwer Ac. Publishers. (1993), 75–184.

[EKS93] J.A. Ellison, M. Kummer and A.W. Sáenz. *Transcendentally small transversality on the rapidly forced pendulum*. J. Dynamics Diffe. Eq. (1993), 5(2), 241-277.

[FS96] B. Fiedler and J. Scheurle. *Discretization of homoclinic orbits, rapid forcing and "invisible" chaos*. Mem. Amer. Math. Soc. (1996), 119(570), viii + 79.

[FoSi90] E. Fontich and C. Simó. *The splitting of separatrices for analytic diffeomorphisms*. Ergodic Th. and Dyn. Sys. (1990), 10, 295-318.

[Fo93] E. Fontich. *Exponentially small upper bounds for the splitting of separatrices for high frequency periodic perturbations*. Nonlinear Analysis, Th., Met. and App. (1993), 20(6), 733-744.

[Fo95] E. Fontich. *Rapidly forced planar vectors fields and splitting of separatrices*. J. Differential Equations. (1995), 119(2), 310-335.

[Ga94] G. Gallavotti. *Twistless KAM tori, quasi flat homoclinic intersections and other cancellations in the perturbation series of certain completely integrable hamiltonian systems. A review.* Rev. Math. Phys. (1994), 6(3), 343-411.

[G93] V.G. Gelfreich. *Separatrices splitting for the rapidly forced pendulum.* In: S. Kuksin, V.F. Lazutkin and J. Pöschel, eds., Proc. Dynam. Syst. Semester. Held in St Petersburg, 1991. Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart. (1993), 47-67.

[GLT91] V.G. Gelfreich, V.F. Lazutkin and M.B. Tabanov. *Exponentially small splitting in hamiltonian systems*. Chaos. (1991), 1(2) 137-142.

[GLS94] V.G. Gelfreich, V.F. Lazutkin and N.V. Svanidze. *A refined formula for the separatrix splitting for the standard map*. Physica D. (1994), 71, 82-101.

[G95] V.G. Gelfreich. *Melnikov method and exponentially small splitting of separatrices.* Physics D. (1997), 101, 227-248.

[G96] V.G. Gelfreich. *Conjugation to a shift and the splitting of invariant manifolds*. Appl. Math. (1996), 24(2), 127-140.

[G97] V. Gelfreich. *Reference systems for splitting of separatrices*. Nonlinearity. (1997), 10, 175-193.

[G99] V. Gelfreich. *A proof of the exponentially small transversality of the separatrices for the standard map*. Comm.Math.Phys. (1999), 201(1), 155-216.

[GSa01] V.G. Gelfreich and D. Sauzin. *Borel summation and splitting of separatrices for the Hénon map*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble. (2001), 51(2), 1001-1055.

[GuH83] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Appl. Math. Sciences vol. 42, Berlin, Heildelberg, New York: Springer. (1983).

[GlPB89] M.L. Glasser, V.G. Papageorgiou and T.C. Bountis. *Melnikov's function for two-dimensional mappings*. SIAM J. Appl. Math. (1989), 49(3), 692-703.

[HM93] V. Hakim and K. Mallick. *Exponentially small splitting of separatrices, matching in the complex plane and Borel summation*. Nonlinearity. (1993) 6, 57-70.

[He76] M. Hénon, *A two-dimensional mappings with a strange attractor*. Comm. Math. Phys. (1976), 50, 69-77.

[HoMSc88] P. Holmes, J. Marsden and J. Scheurle. *Exponentially small splittings of separatrices with applications to KAM theory and degenerate bifurcations*. Contemporary Mathematics AMS. (1988), 81, 213-244.

[J82] F. John, *Partial Differential Equations*. Appl. Math. Sciences vol. 1, Berlin, Heildelberg, New York: Springer. (1982).

[KSe91] D. Kruskal and H. Segur. *Asymptotics beyond all orders in a model of crystal growth*. Studies in Appl. Math. (1991), 85, 129-181.

[L84] V.F. Lazutkin. *Splitting of separatrices for standard Chirikov's mapping*. Preprint, VINITI, 6372-84. (1984).

[L88] V.F. Lazutkin. *Splitting of complex separatrices*. Func. Anal. and Appl. (1988), 22, 154-156.

[LScT89] V.F. Lazutkin, I.G. Schachmannski, M.B. Tabanov. *Splitting of separatrices for standard and semistandard mappings*. Physica D. (1989), 40, 235-248.

[L91] V.F. Lazutkin. *Resurgent approach to the separatrices splitting*. In [PSiSo93]. (1993), 163-176.

[LoMSa03] P. Lochak, J.-P. Marco and D. Sauzin. *On the Splitting of Invariant Manifolds in Multidimensional Near-Integrable Hamiltonian Systems*. Memoirs of the Amer. Math. Soc. (2003), 163 (no.775), viii+145pp.

[McM71] E.M. MacMillan. *A problem in the stability of periodic systems*. In: E. Brittin and H. Odabasi, eds. Topics in Modern Physics, a Tribute to E.V. Condon. Colorado Assoc. Univ. Press, Boulder, CO. (1971), 219-244.

[Mal95] B. Malgrange. *Sommation des séries divergentes*. Exp. Math. (1995), 13, 163–222.

[Me63] V.K. Melnikov. *On the stability of the center for time periodic perturbations*. Trans. Moscow Math. Soc. (1963), 12, 1-57.

[Ne84] A.I. Neishtadt. *The separation of motions in systems with rapidly rotating phase*. J. Appl. Math. Mech. (1984), 48(2), 133-139.

[OS99] C. Olivé and T. M. Seara. *Matching complejo y resurgencia en el problema de la escisión de separatrices*. Actas CEDYA99. (1999), 419–426.

[OSaS01] C. Olivé, D. Sauzin and T. M. Seara. *Resurgencia ecuacional en el estudio de una ecuación de Hamilton-Jacobi*. Actas CEDYA01. (2001), format electrònic.

[OSaS03] C. Olivé, D. Sauzin and T. M. Seara. *Resurgence in a Hamilton-Jacobi equation*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble. (2003), 53(4), 1185-1235.

[OSaS05] C. Olivé, D. Sauzin and T. M. Seara. *Two Examples of Resurgence*. Contemporary Mathematics. (2005), 373, 355-371.

[Pha88] F. Pham. *Résurgence d'un thème de Huygens-Fresnel*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (1988), 68, 77–90.

[Pha89] F. Pham. *Fonctions résurgentes implicites*. C. R. Académie des Sciences Paris. (1989), 309, 999–1001.

[Po93] H. Poincaré. *Les méthode nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthier-Villar, París. (1893) vol.2.

[PSiSo93] C. Perelló, C. Simó and J. Solà-Morales, eds., International Conference on Differential Equations, Equadiff91. Held in Barcelona, 1991. World Scientific, Singapore. (1993).

[RW98] M. Rudnev and S. Wiggins. *Existence of exponentially small separatrix splittings and homoclinic connections between whiskered tori in weakly hyperbolic near-integrable hamiltonian systems*. Physica D. (1998), 114, 3–80.

[Sa95] D. Sauzin. *Résurgence paramétrique et exponentielle petitesse de l'écart des séparatrices du pendule rapidement forcé*. Ann.Ins.Fourier, Grenoble. (1995), 45(2), 453-511.

[Sa01] D. Sauzin. *A new method for measuring the splitting of invariant nmanifolds*. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., Paris. (2001), 34, 159-221.

[Sc89] J. Scheurle. *Chaos in a rapidly forced pendulum equation*. Contemporary Mathematics AMS. (1989), 97, 411-419.

[Sei94] J. Seimenis, ed. *Hamiltonian Mechanics: integrability and chaotic behaviour*. Nato Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys. Held in Torun, Polland, 1993. (1994), 331.

[Si90] C. Simó. Comunicació privada.

[Si94] C. Simó. *Averaging under fast quasiperiodic forcing*. Seimenis [Sei94]. (1994), 13-34.

[StSh96] B.Y. Sternin, V.E. Shatalov, *Borel-Laplace Transform and Asymptotic Theory*, CRC Press. (1996).

[Su89] Y.B. Suris. *Integrable mappings of the standard type*. Func. Anal. Appl. (1989), 23, 74-76.

[Su94] Y.B. Suris. *On the complex separatrices of some standard-like maps*. Nonlinearity. (1994), 7, 1225-1236.

[T96] D.V. Treschev. *An averaging method for hamiltonian systems, exponentially close to integrable ones*. Chaos. (1996), 6(1), 6-14.

[T97] D.V. Treschev. *Separatrix splitting for a pendulum with rapidly oscillating suspension point*. Russ. J. Math. Phys. (1997), 5 (1), 63-98.