

UNIVERSITAT POLITECNICA DE CATALUNYA
E.T.S.E.I.B.

DISEÑOS FACTORIALES FRACCIONALES.
APLICACION AL CONTROL DE CALIDAD
MEDIANTE EL DISEÑO DE PRODUCTOS Y
PROCESOS

Javier Tort-Martorell Llabrés

Diciembre, 1985

ESCOLA TECNICA SUPERIOR D'ENGINYERS INDUSTRIALS DE BARCELONA
UNIVERSITAT POLITECNICA DE CATALUNYA

DISENOS FACTORIALES FRACCIONALES.
APLICACION AL CONTROL DE CALIDAD
MEDIANTE EL DISEÑO DE PRODUCTOS Y
PROCESOS

Tesis doctoral presentada por Javier Tort-Martorell Llabrés
para la obtención del grado de Doctor Ingeniero Industrial.

Director:

Dr. Albert Prat Bartés

Catedrático de Universidad.

Director del departamento de Tècniques Quantitatives de
Gestió de la E.T.S.E.I.B.

BARCELONA, Diciembre 1985.

AGRADECIMIENTOS

AGRADECIMIENTOS

La realización de esta tesis ha sido posible gracias a la colaboración de muchas personas e instituciones.

A la Fundació del Congrés de Cultura Catalana y a la CIRIT (Comissió Interdepartamental para la Recerca i la Innovació Tecnològica de la Generalitat de Catalunya) debo mi estancia de tres años en la University of Wisconsin-Madison donde me formé estadísticamente e inicié en parte esta investigación.

Al Profesor William Hunter debo mi interés por el diseño de experimentos y la proyección de diseños factoriales fraccionales.

Las simulaciones llevadas a cabo en el Capitulo 3 han sido en parte posibles gracias a una ayuda del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de la Generalitat de Catalunya.

A todos los compañeros del Departament de Tècniques Quantitatives de Gestió les agradezco sus constantes ayudas ánimos y comprensión.

Agradezco a Pía Margarit y Montse Ybarra la dedicación en su batalla contra mis manuscritos y el editor de textos.

Mención aparte en mis agradecimientos corresponde a mi director de tesis, Albert Prat que desde que me inició en el interés por la estadística ha sido además de un excelente director y maestro, un amigo.

A todos, muchas gracias.

INDICE

INDICE

AGRADECIMIENTOS.....I

INDICE.....III

CAPITULO 1. Introducción.....1

1.1	La calidad un problema de diseño.....	2
1.1.1	Planteo del problema.....	2
1.1.2	Ingenieria de la calidad.....	3
1.1.3	Optimización del sistema.....	4
1.1.4	Clasificación de los problemas de diseño....	6
1.1.5	Experimentación secuencial.....	7
1.2	Diseños factoriales.....	9
1.2.1	Descripción. Ventajas sobre variar una variable cada vez.....	9
1.2.2	Diseños factoriales a dos niveles.....	12
1.3	Diseños fraccionales.....	15
1.3.1	Motivación.....	15
1.3.2	Fraccionales con las variables a dos niveles.....	16
1.3.2.1	Construcción. Generadores.....	16
1.3.2.2	Relación de definición. Patrón. de confusión.....	17
1.3.2.3	Resolución. Aberración.....	18
1.3.3	Orthogonal Arrays. Relación con diseños factoriales fraccionales.....	20

1.4 Breve repaso al estado de la cuestión.....	22
1.5 Objetivos de la tesis y organización de la misma.....	24
<u>CAPITULO 2.</u> Diseños con óptimas propiedades proyectivas...	26
2.1 Teoria de la proyección.....	27
2.2 Proyección y resolución.....	29
2.3 Asumciones al proyectar un diseño.....	30
2.4 Diseños con mejor proyección.....	31
2.4.1 Importancia de los conocimientos previos al experimento.....	32
2.4.2 Selección del diseño.....	33
2.4.3 Ejemplo.....	34
2.5 Notación.....	38
2.6 Propiedades de las relaciones de definición.....	40
2.7 Algoritmo.....	46
2.7.1 Utilidad y propiedades.....	46
2.7.2 Desarrollo.....	47
2.7.3 Ejemplo.....	51
2.8 Consideraciones.....	56
2.9 Conclusiones.....	57

.

CAPITULO 3. Diseños para el estudio de efectos sobre la dispersión.....58

3.1 Introducción.....59

3.2 Homocedasticidad en el cálculo de efectos sobre el nivel de respuesta.....67

3.3 Réplicas. Factores ruido.....70

 3.3.1 Réplicas genuinas.....70

 3.3.2 Réplicas obtenidas por proyección.....70

 3.3.3 Réplicas obtenidas a través de factores ruido.....72

 3.3.3.1 Descripción, importancia y utilidad.....72

 3.3.3.2 Influencia en los resultados.....73

3.4 Método de Taguchi.....75

 3.4.1 Descripción.....75

 3.4.2 Estadísticos a estudiar.....77

 3.4.3 Significación de los efectos.....78

 3.4.4 Comentarios.....81

3.5 Nuevo método.....85

 3.5.1 Descripción.....85

 3.5.2 Estadísticos a estudiar.....86

 3.5.3 Significación de los efectos.....87

 3.5.3.1 Distribución del log s.....88

 3.5.3.2 Varianza del log s. Tablas.....91

 3.5.3.3 Distribución de las combinaciones lineales del log s.....92

 3.5.4 Aplicación al diseño de experimentos.....94

3.5.5 Conclusiones y comentarios.....	96
3.6 Efectos sobre la dispersión cuando no se dispone de réplicas. Método de Box y Meyer.....	99
3.7 Conclusiones.....	100
 <u>CAPITULO 4.</u> Aplicación de las técnicas propuestas en el capítulo 3 a un caso real.....	101
4.1 Planteo del problema.....	102
4.2 Solución obtenida por Pnadke et al (1983) siguiendo el método de Taguchi.....	106
4.3 Solución según el nuevo método propuesto en el capítulo 3.....	111
4.4 Comparación de resultados y conclusiones.....	118
 <u>APENDICE 1</u>	121
A.1 Programa para la asignación de variables a factores de forma que se obtenga la mejor proyección.....	122
 <u>APENDICE 2</u>	137
A.2 Obtención de la esperanza matemática y la varianza de S.....	138

APENDICE 3.....140

A.3 Justificación de la aproximación

$V(\log s) = 1/2(n-1)$141

BIBLIOGRAFIA.....142

CAPITULO 1

1.1 LA CALIDAD UN PROBLEMA DE DISEÑO

1.1.1 Planteo del problema

La principal razón tecnológica para el éxito japonés en producir alta calidad a bajo coste es el énfasis que ponen en la optimización del diseño del producto y del diseño del proceso productivo. Esa optimización se consigue a través de la experimentación, más concretamente a través de la utilización de unas técnicas muy eficientes de experimentación.

Siguiendo a Ishikawa (1984) se puede dividir la evolución del control de calidad en tres generaciones (ver figura 1.1)

- 1.- Inspección
- 2.- Control de procesos de fabricación
- 3.- Mejoras en el diseño de productos y procesos

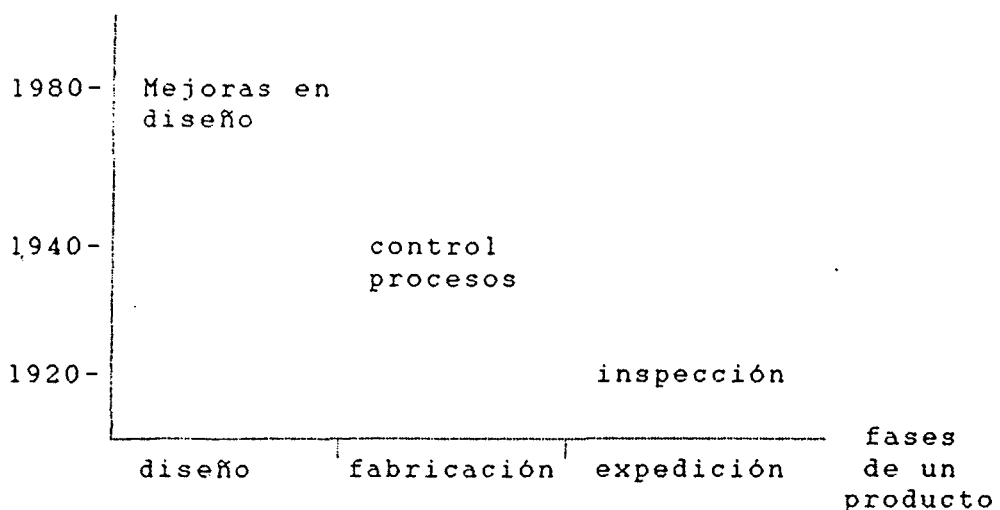


Figura 1.1: Evolución de la calidad.

La inspección separa los productos defectuosos antes de que lleguen al consumidor, pero no mejora la calidad del producto.

El control de procesos reduce los problemas de fabricación, pero cuesta dinero.

Las mejoras en los diseños de los procesos pueden reducir los problemas de fabricación sin aumentar los costos. Y las mejoras en el diseño de los productos haciéndolos insensibles a las variaciones ambientales, deterioro por envejecimiento e imperfecciones de

fabricación, aumentan la calidad del producto sin aumentar su coste.

Estos métodos fueron desarrollados en las décadas de los cincuenta y sesenta por G. Taguchi (Taguchi 1976, 1977, 1980) para producir alta calidad a partir de unas condiciones de post-guerra, materia prima de baja calidad, utillaje obsoleto y/o en males condiciones y un número escaso de ingenieros bien preparados. Actualmente, estos métodos se utilizan en Japón de modo rutinario, a pesar de haber cambiado las circunstancias.

1.1.2 Ingeniería de la calidad

Los japoneses cuantifican la calidad, en un sentido muy amplio, como la pérdida total infringida a la sociedad a partir del momento en que el consumidor adquiere un producto. Esta pérdida puede ser debida a efectos secundarios indeseables, a mal funcionamiento, a deterioro, etc.

Me voy a concentrar en las pérdidas debidas a variaciones con respecto al valor objetivo. Por ejemplo, el nivel de amplificación de un teléfono público puede variar de invierno a verano, puede ser diferente de un teléfono a otro, puede deteriorarse con el tiempo, etc.

En general, el funcionamiento de un producto está influenciado por una serie de factores llamados ruido. Hay tres tipos de ruido:

- Externo: Hay muchos como: nivel de utilización, temperatura, humedad, polvo, vibraciones, errores humanos al operar el producto, etc.

- Imperfecciones en la fabricación: variación entre una unidad y otra, de los parámetros del producto. Esto es inevitable en los procesos productivos. Por ejemplo el valor especificado para una resistencia puede ser 100 Kohms pero en una unidad determinada instalar una de 101 kohms.

- Deterioro: A medida que pasa el tiempo los valores de los componentes de un producto pueden ir variando lo que produce irregularidades en el funcionamiento global.

Una manera de reducir la variación es limitar o eliminar los factores ruido. En el ejemplo del teléfono esto implicaría reducir el rango de temperaturas en el que se puede utilizar, reducir las tolerancias durante la producción, etc. Todas ellas son maneras costosas de reducir la variación.

Existe otro sistema más barato; situar los valores de las componentes (factores de control, se fijan sus valores

en la etapa de diseño) de tal manera que se minimice la sensibilidad al ruido. Esto se consigue explotando la no-linealidad en las relaciones entre los factores de control, el ruido y las variables respuesta.

Nótese que en la fase de diseño se puede conseguir que un producto sea robusto (poco sensible) con respecto a las tres clases de ruido descritas, mientras que durante la fabricación sólo se puede reducir la variación debida a imperfecciones en la fabricación.

Así pues la calidad de un producto es principalmente responsabilidad de los diseñadores, y no exclusivamente de los encargados de la fabricación.

El diseño de un producto o un proceso productivo consta de tres fases: 1) diseño del sistema, 2) diseño de los parámetros u optimización del sistema, 3) diseño de tolerancias. El diseño del sistema, consiste en llegar a un producto que funcione bien y sea susceptible de ser producido o a un proceso que funcione eficientemente y se pueda implementar. En el diseño de parámetros se especifican los niveles de los factores de control que minimizan la sensibilidad a todos los ruidos, en esta fase se utilizan unas tolerancias amplias para que el coste de producción resulte bajo. Si con el diseño de parámetros no se ha conseguido reducir lo suficiente la variación entonces en la fase de diseño de tolerancias, estas se reducen selectivamente basándose en su coste y efectividad.

Tradicionalmente los esfuerzos se han concentrado en el diseño del sistema, que requiere innovación e ingeniería, y en el diseño de tolerancias. Y se ha ignorado el diseño de parámetros, que es fundamental para obtener productos de alta calidad a bajo coste.

1.1.3 Optimización del sistema

Las figura 1.2 representa un producto, o proceso productivo, o incluso un negocio, con los diferentes tipos de factores que afectan la respuesta.

Los factores que afectan la respuesta se pueden dividir en tres casos:

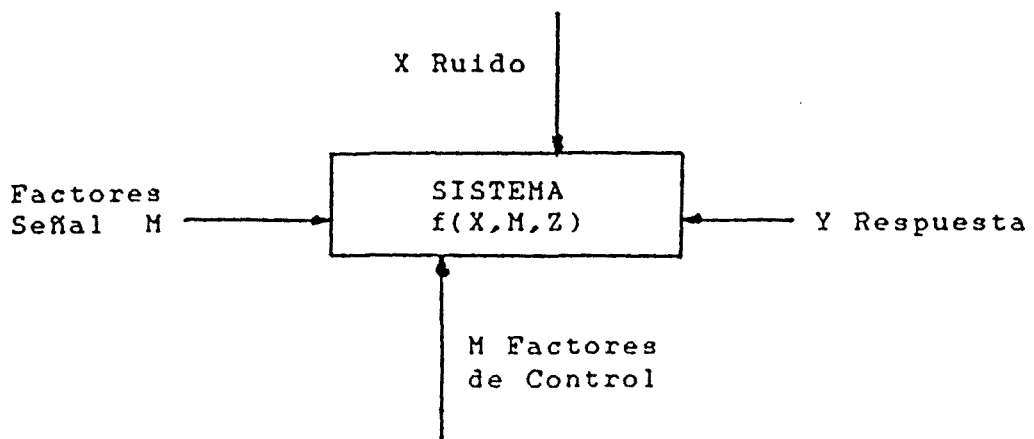


Figura 1.2: Diferentes tipos de factores que afectan la respuesta.

- Factores señal(M): Factores que controla el usuario para obtener la actuación deseada. Por ejemplo el ángulo de giro en un volante es un factor señal para el sistema de dirección de un coche.

- Factores de control (z): Son los parámetros del producto, su valor y sus tolerancias se fijan en la fase de diseño, son por tanto responsabilidad del diseñador. El objetivo del diseñador debe ser encontrar los "mejores" valores para estos factores, de ellos depende la calidad y el correcto funcionamiento del producto. Ejemplos: valor de una resistencia, número de dientes de un engranaje, etc. en productos; mientras que en procesos ejemplos típicos serían concentración, presión, etc. El significado de mejor puede ser diferente según los objetivos, en un proceso se puede por ejemplo desear maximizar la pureza manteniendo los costes o minimizar los costes manteniendo la pureza.

- Ruido (x): Son los factores incontrolables.

Influencian la respuesta, y sus niveles cambian de un producto a otro y con el tiempo. Sólo se pueden conocer las características estadísticas del ruido, pero no sus valores.

La función f denota la influencia de los tres tipos de factores en la respuesta.

$$Y = f(x, u, z) \quad (1.1)$$

Conceptualmente la función f consta de dos partes:

1) $g(z, u)$ parte predecible y deseable.

2) $e(x,z,u)$ parte impredecible e indeseable.

Así:

$$Y = g(z,u) + e(x,z,u) \quad (1.2)$$

Si se desea una relación lineal entre Y y M , será una función lineal de M . Todos los términos no lineales estarían incluidos en e , ecuación (1.2).

El objetivo del diseño es maximizar la parte predecible y minimizar la impredecible.

La estrategia de optimización es la siguiente, se comienza seleccionando la respuesta y los tres tipos de factores (señal, control y ruido). Luego utilizando un diseño factorial fraccional o un orthogonal array se selecciona un conjunto de n valores para los factores de control (combinación de los distintos niveles de cada factor) y se simula el ruido y el rango de los factores control para cada experimento elemental. Se evalúa la respuesta. El proceso se repite hasta que se han realizado los n experimentos elementales. El siguiente paso es analizar los efectos sobre el nivel y sobre la variabilidad de cada uno de los factores de control, seleccionar los niveles óptimos de los factores de control y realizar un nuevo experimento para comprobar los resultados. Si la comprobación es satisfactoria se da por finalizada la optimización, en caso contrario hay que reanalizar los datos y/o comenzar un nuevo ciclo.

1.1.4 Clasificación de los problemas de diseño.

La gran variedad de problemas de diseño hace imposible una clasificación exhaustiva, las siguientes categorías proporcionan sin embargo una primera clasificación. Aunque hay algunas diferencias en el tratamiento estadístico de cada uno de estos grupos las técnicas utilizadas son en general las mismas con pequeñas variaciones.

En primer lugar los problemas de diseño se subdividen en dinámicos y estáticos dependiendo de la existencia o no de factores señal. Estos dos grandes grupos pueden a su vez subdividirse en varios.

- Estáticos: se caracterizan por la ausencia de factores señal y se dividen:

a) Respuesta lo menor posible: La respuesta es positiva y el valor deseado es cero. Ejemplos: La polución de una planta, las pérdidas de corriente en un circuito impreso, etc.

b) Respuesta en el valor deseado: Se desea que la respuesta tenga un determinado valor con la menor variabilidad posible. Ejemplos: diámetro de un eje, corriente de salida de un transformador.

c) Respuesta lo mayor posible: No se desea un valor particular, sino el más alto alcanzable. Ejemplos: dureza de un material.

- Dinámicos: Se caracterizan por la presencia de factores señas. Se dividen en:

a) Continuo-Continuo. El factor señal y la respuesta son continuos. Ejemplos: Voltímetro, dirección de un automóvil.

b) Continuo-discreto. El factor señal es continuo y la respuesta discreta. Ejemplos: Termostato.

c) Discreto-Continuo. El factor señal es discreto y la respuesta es continua.

d) Discreto-Discreto. El factor señal y la respuesta son discretos. Ejemplo: Comunicaciones entre ordenadores.

Estas tres últimas categorías tienen un tratamiento estadístico algo distinto de las anteriores y los métodos propuestos en esta tesis no son en general aplicables.

1.1.5 Experimentación secuencial.

Es conveniente tener en cuenta que en los problemas de diseño intervendrán, en general, un gran número de factores susceptibles de afectar varias respuestas de interés.

De hecho al realizar un experimento lo que se pretende es investigar superficies de respuesta. La investigación se realiza a base de situar puntos experimentales, en los que se medirá la respuesta, en una zona supuestamente de interés. A primera vista puede parecer razonable investigar de golpe todos los rangos de todos los factores. Este sistema es ineficiente ya que para aplicarlo habría que conocer: a) qué variables son las más importantes. b) qué rangos de las variables hay que estudiar. c) en qué métrica hay que medir las variables y las respuestas, etc.

La situación plantea la paradoja de que el mejor momento para diseñar un experimento es cuando este ya se ha realizado y se pueden contestar las preguntas antes planteadas.

La figura 1.3 muestra una superficie de respuesta representada por curvas de nivel. Imagínese que se dispone de un número limitado de puntos a situar en el gráfico antes de conocer las curvas, lo mejor es colocar una porción de ellos (se suele recomendar una cuarta parte) al principio, obtener una burda representación parcial de las curvas y basándose en ella colocar nuevos puntos.

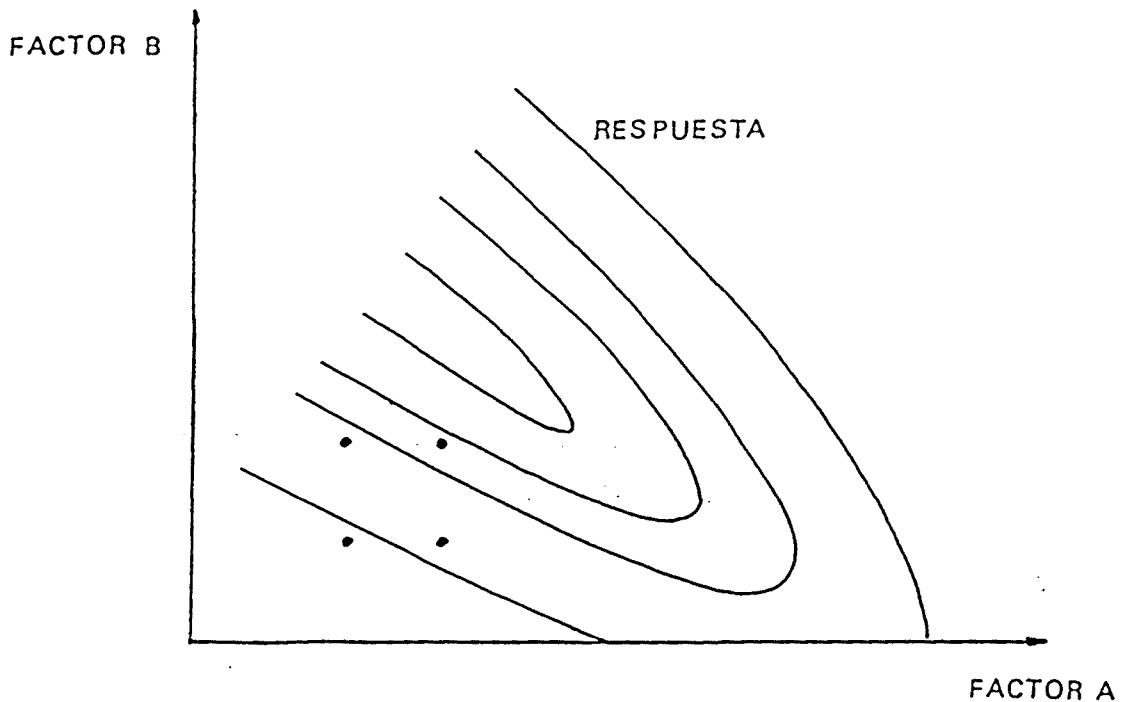


Figura 1.3: Superficie de respuesta, con puntos de un primer diseño factorial para investigarla.

La forma más eficiente de atacar los problemas de diseño es por tanto planteando una estrategia sucesional. Utilizar orthogonal arrays o diseños saturados para sondear el mayor número de variables posible e ir procediendo con nuevos experimentos a medida que los resultados son analizados. Esta estrategia permite utilizar los conocimientos adquiridos en experimentos anteriores al diseñar nuevos experimentos. Es pues lo más parecido a diseñar el experimento cuando ya se conocen los resultados.

Las técnicas de experimentación más empleadas en problemas de diseño industrial son los llamados diseños factoriales, diseños factoriales fraccionales y las orthogonal arrays (de las cuales los factoriales fraccionales son un caso particular).

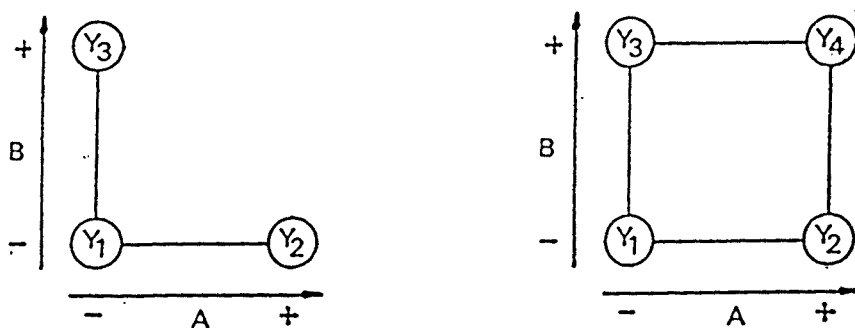
1.2 DISEÑOS FACTORIALES.

1.2.1 Descripción. Ventajas sobre variar una variable cada vez

Al experimentar lo que pretende el investigador es hallar los efectos que tienen varias variables sobre una o más respuestas.

Tradicionalmente se ha seguido la estrategia de mantener fijas todas las variables menos una cuyo nivel se variaba. Se identificaba el nivel más conveniente de esta variable y se fijaba, procediendo a variar por turno cada una de las restantes.

Frente a esta estrategia los diseños factoriales consisten en experimentar en todas las combinaciones posibles de todas las variables a todos los niveles. Un diseño factorial para experimentar con K variables cada una a l niveles se denota K^l y requiere K^l experimentos. La figura 1.4 muestra las dos estrategias aplicadas a un ejemplo que representa el caso más simple de querer estudiar dos variables (A y B) a dos niveles (alto y bajo, representados por + y -).



A	B	Respuesta	Ejem.
-	-	Y ₁	58
+	-	Y ₂	54
-	+	Y ₃	56

A	B	Respuesta	Ejem.
-	-	Y ₁	58
+	-	Y ₂	54
-	+	Y ₃	56
+	+	Y ₄	63

a) estrategia tradicional b) diseño factorial (2^2)

Figura 1.4: Comparación de la estrategia tradicional y la factorial.

Veamos como se calcularían en los dos casos los efectos de las variables A y B.

a) Estrategia tradicional

$$\begin{aligned} \text{efecto (A)} &= y_2 - y_1 = 54 - 58 = -4 \\ \text{efecto (B)} &= y_3 - y_1 = 56 - 54 = -2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Interpretación: El efecto de cambiar A del nivel bajo al nivel alto es reducir la respuesta en 4 unidades. El efecto de cambiar B de - a + es reducir la respuesta en 2 unidades.

b) Diseño factorial:

$$\text{efecto (A)} = \frac{y_4 + y_2}{2} - \frac{y_3 + y_1}{2} = 1.5 \quad (1.4)$$

$$\text{efecto (B)} = \frac{y_4 + y_3}{2} - \frac{y_2 + y_1}{2} = 3.5$$

$$\text{efecto interacción (AB)} = \frac{y_4 - y_3}{2} - \frac{y_2 - y_1}{2} = 5.5 \quad (1.5)$$

Interpretación: Existe interacción entre A y B, esto es, el efecto de B depende del nivel de A, (cuando A está a nivel bajo el efecto de B es -2 y cuando A está nivel alto el efecto de B es +9). Y análogamente el efecto de A depende del nivel B. Cuando existe interacción los efectos principales no se pueden interpretar por separado, hay que recurrir a una interpretación conjunta.

Hasta ahora se ha supuesto que los valores hallados en cada experimento eran los verdaderos valores, sin embargo debido al error experimental, estos valores fluctúan. Aunque se repitiese el experimento con exactamente los mismo valores nunca se obtendría las mismas respuestas.

Tanto la estrategia tradicional como la factorial permiten estimar los efectos de las variables sobre la respuesta, y dependiendo de el número de niveles se podrá detectar si sus efectos son lineales (2 niveles), cuadráticos (3 niveles), cúbicos (4 niveles), etc.

Sin embargo las ventajas de los diseños factoriales son muchas:

- Permiten estimar las interacciones entre variables. En el ejemplo de la figura 1.2 b) se ve como al añadir un experimento en los niveles A+ y B+ se ha podido detectar que el efecto de B depende del nivel de A y viceversa. En el caso a) esta interacción pasaba desapercibida.

- Proporcionan estimaciones más fiables ya que el efecto de

cada variable se obtiene como un promedio de su efecto a diferentes niveles de las demás.

- Proporcionan estimaciones más eficientes, en un diseño con k variables a dos niveles el número de experimentos requerido por la estrategia tradicional (replicando puntos) para proporcionar la misma precisión que el diseño factorial está en la relación de $(k+1)/2$.

Demostración: Considérese como ejemplo el caso de la figura 1.4, donde (a) es la estrategia tradicional y (b) es un diseño factorial.

Sean k = número de variables
 r = número de réplicas en la estrategia tradicional
 r' = número de réplicas en el diseño factorial.

El número de experimentos necesarios siguiendo la estrategia tradicional es

$$n_{\text{exp. trad.}} = (k+1)r \quad (1.6)$$

con una variancia para el efecto estimado T de

$$\text{var}(T)_{\text{trad.}} = \frac{\sigma^2}{r} + \frac{\sigma^2}{r} = \frac{2\sigma^2}{r} \quad (1.7)$$

El número de experimentos necesarios siguiendo el diseño factorial es:

$$n_{\text{exp. fact.}} = 2^k r' \quad (1.8)$$

con una variancia para el efecto estimado T de

$$\text{var}(T)_{\text{fact.}} = \frac{\sigma^2}{2^k r' / 2} + \frac{\sigma^2}{2^k r' / 2} = \frac{4\sigma^2}{2^k r' / 2} \quad (1.9)$$

Para obtener la misma precisión (igualando 1.7 y 1.9)

$$\frac{2\sigma^2}{r} = \frac{4\sigma^2}{2^k r'} \quad (1.10)$$

$$\text{de donde } \frac{r}{r'} = 2^{k-1} \quad (1.11)$$

Utilizando (1.6), (1.8) y (1.11) se obtiene que la relación entre el número de experimentos en la estrategia tradicional y la factorial es:

$$\frac{n_2 \text{ exp trad.}}{n_2 \text{ exp fact.}} = \frac{r(k+1)}{r'2^k} = \frac{k+1}{2} \quad (1.12)$$

Obsérvese que para $k=5$ (es muy frecuente investigar con un número de variables incluso superior a 5) el número de experimentos para obtener la misma precisión está en la relación 3/1 es decir un 150% mayor utilizando la estrategia tradicional que la factorial.

1.2.2 Diseños factoriales a dos niveles

Un diseño factorial completo 2^k requiere experimentar en todas las combinaciones de los dos niveles de cada una de las k variables. Si la variable es cuantitativa los dos niveles serán el alto y el bajo, si es cualitativa cada nivel corresponderá a un tipo.

Los experimentos elementales que componen el diseño se especifican utilizando la notación que se ilustra en la tabla 1.1 para los ocho experimentos que componen un diseño factorial 2^3 .

experimento elemental	Factores		
	1	2	3
1	-	-	-
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	-
5	-	-	+
6	+	-	+
7	-	+	+
8	+	+	+

Tabla 1.1: Matriz de diseño de un 2^3

El orden en el que aparecen los experimentos en la tabla 1.1 se denomina orden estándar y es el habitualmente utilizado para escribir el diseño. Sin embargo conviene tener presente que para llevar a cabo el experimento, es de suma importancia aleatorizar el orden de ejecución de los experimentos elementales para protegerse de la posible influencia de factores desconocidos y por tanto incontrolados.

En la notación de la tabla 1.1, las variables se identifican por números a los que llamaré factores y los dos niveles de cada uno por un signo menos o un signo más, su conjunto constituye la matriz de diseño. Ello permite representar geoméricamente el diseño. Por ejemplo (figura 1.5) el diseño factorial 2^3 proporciona los ocho vértices de un cubo en tres dimensiones.

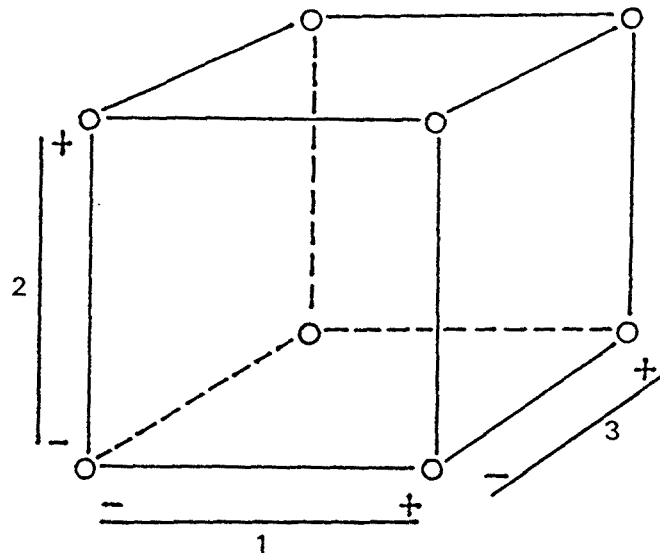


Figura 1.5: Representación geométrica de un diseño 2^3 .

El conjunto de experimentos elementales se denomina matriz de diseño. Para un factorial 2^k la matriz de diseño contiene k columnas y 2^k filas.

Si se asume que las observaciones son independientes y tienen la misma variancia, los diseños factoriales 2^k proporcionan estimaciones, independientes y con mínima variancia, de la media general y de 2^{k-1} efectos que son:

k	efectos principales
$\binom{k}{2}$	interacciones de 2 factores
$\binom{k}{3}$	interacciones de 3 factores
.	.
.	.
$\binom{k}{k}=1$	interacciones de k factores

Las estimaciones de los efectos se pueden obtener por medio del Algoritmo de Yates (1937) o del Algoritmo de los signos (Box y Hunter, 1961) en el que la estimación del efecto (ij...k) se obtiene como la suma de productos entre los elementos de la respuesta (y) y los correspondientes elementos de la columna ij...k de la matriz de diseño y dividiendo por 2^{k-1}

$$\text{efecto (ij...k)} = \frac{\sum y\{ij...k\}}{2^{k-1}} \quad (1.13)$$

cada efecto estimado tiene una variancia

$$\text{Variancia(efecto)} = \frac{4\sigma^2}{N} \quad (1.14)$$

donde σ^2 es la variancia de las observaciones individuales.

Los diseños factoriales con las variables a dos niveles resultan de particular importancia por varias razones.

1) Requieren relativamente pocos experimentos por cada factor estudiado. No permiten explorar exhaustivamente toda la región de interés, pero indican tendencias y direcciones prometedoras para nuevos experimentos (estrategia secuencial).

2) Se pueden aumentar fácilmente para formar diseños compuestos (estrategia secuencial). (Box y Wilson, 1951. Box 1954. Myers 1976).

3) Forman la base para los diseños factoriales fraccionales con las variables a dos niveles (ver sección 1.3.2).

4) Pueden ser utilizados como bloques para la construcción de diseños más complejos.

5) La interpretación de los resultados producidos por estos diseños se puede realizar prácticamente a base de sentido común y aritmética elemental.

1.3 DISEÑOS FACTORIALES FRACCIONALES

1.3.1 Motivación

Al aumentar el número de variables bajo estudio con un diseño factorial 2^k , el número de experimentos aumenta geométricamente. Así, si el número de variables (K) es grande, el número de experimentos necesarios será 2^k y permitirán estudiar 2^k efectos lo cual no significa que todos ellos sean de interés.

La idea es realizar sólo una fracción de los experimentos que requeriría un factorial completo. Ello implicará que sólo se podrá esrimar una fracción de los efectos (se pueden estimar tantos efectos como experimentos se realizan).

Este ahorro en el número de experimentos a realizar con la consiguiente reducción en la información obtenida se puede justificar de tres maneras diferentes, todas ellas relacionadas con el postulado del "effect sparsity" (Box y Mayer 1984). Un problema muy común en general, y más en la industria es hallar entre un gran número de variables las pocas que afectan la respuesta apreciablemente. Es decir, entre esas variables habrán unas pocas que serán activas y el resto serán esencialmente inertes.

Las tres justificaciones son:

a) Cuando se realiza un diseño factorial completo 2^k se pueden estimar interacciones de hasta R factores. En la práctica existe una cierta jerarquía en términos de magnitud, los efectos principales tienden a ser mayores que las interacciones de dos factores, que a su vez tienden a ser mayores que las de tres factores etc. Cuando las variables son cuantitativas los efectos principales y las interacciones se pueden asociar con la expansión en serie de Taylor de la función respuesta. Ignorar las interacciones de tres factores correspondería a ignorar los términos de tercer orden en la serie de Taylor.

Es pues cierto que a partir de cierto punto las interacciones tienden a ser despreciables.

b) En algunas circunstancias, (ver por ejemplo Davis 1954) conocimientos físicos o prácticos sobre el sistema que se investiga implican que "a priori" sólo parezca posible que existan algunas de las interacciones. La dificultad estriba, en muchas ocasiones, en escoger que interacciones parecen importantes. En realidad el investigador puede justificadamente argumentar que si necesita un experimento para determinar que efectos principales son importantes, no

es lógico que se espere de él que sepa qué interacciones (efectos de segundo orden) son factibles.

c) Otra justificación, a mi modo de ver, la mejor y de ahí la importancia del capítulo II de esta tesis, es la de la proyección (secciones 2.1 y 2.2).

Supóngase que de los R factores considerados sólo unos pocos cuya identidad se desconoce, sean activos (proporcionen efectos principales o interacciones entre ellos). Argumentando como (Box y Hunter 1961) un diseño que permita estudiar esos d factores sería un fraccional de resolución R = d + 1. De hecho si las variables son asignadas utilizando cuidadosamente los conocimientos previos al experimento (Capítulo II) un diseño de resolución menor puede ser suficiente.

1.3.2 Fraccionales con las variables a dos niveles

1.3.2.1 Construcción. Generadores.

Supóngase que se desea estudiar los efectos de siete variables y que se decide utilizar un diseño factorial a dos niveles. El número de experimentos necesario sería $2^7 = 128$, si sólo se pueden costear 16 experimentos elementales, habría que decidir cuales de los 128 experimentos inicialmente posibles se realizan, de forma que la pérdida de información sea lo menos perjudicial posible.

Para ello se realizará un experimento factorial fraccional 2^{7-3} . Nótese que $2^{7-3} = 16$ que es el número de experimentos que se deseaba realizar.

Para construir un diseño con estas características se parte de un diseño 2^4 y se asignan los tres factores restantes a interacciones. Esto se ha realizado en el diseño 2^4 de la Tabla 1.2

Si por ejemplo se asignan los factores 5, 6 y 7 a las interacciones 123, 234 y 134 se obtendrá el diseño 2^{7-3} deseado, y los generadores del mismo serán:

$$\begin{aligned} 5 &= 123 \\ 6 &= 234 \\ 7 &= 134 \end{aligned} \quad (1.15)$$

El hecho de haber escogido estos generadores implica que al realizar cada experimento elemental los niveles de los factores 5, 6 y 7 se escogerán tal como indican los signos de las columnas 123, 234 y 134.

El realizar esta asignación introduce una confusión en los efectos estimados. Este hecho se discute en la sección siguiente, 1.3.2.2. Hay patrones de confusión más favorables

que otros, y por tanto la asignación de factores a interacciones debe realizarse con cuidado.

exp.	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	5	7	6	1234
1	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+
2	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	-
3	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-
4	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	+
5	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-
6	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	+	+
7	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+
8	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-
9	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-
10	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+
11	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+
12	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	-	-	-
13	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+
14	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-
15	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	-
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Tabla 1.2: Matriz de diseño de un 2^{7-3} a partir de un 2^4

1.3.2.2 Relación de definición. Patrón de confusión.

Al introducir tres generadores para obtener un diseño 2^{7-3} se ha, obviamente, introducido una confusión entre los efectos que aparecen a ambos lados de la igualdad en cada generador. En el ejemplo (ecuación 1.15) el efecto del factor 5 se está estimando conjuntamente con el de la interacción triple 123, el del 6 con el de la interacción 234 y el del 7 con el de la 134.

Nótese (tabla 1.2) que la columna 5 y la 123 tienen los mismos signos (de hecho son la misma columna) y por tanto al aplicar el algoritmo de Box, Hunter y Hunter (1978) se obtiene el mismo efecto estimado en ambos casos. Lo mismo sucede con las columnas 6 y 234 y las 7 y 134.

Sin embargo no son los únicos efectos confundidos ya que (ver tabla 1.2) las columnas formadas al multiplicar los signos de las columnas 1235, 2346 y 1347 están íntegramente constituidas por signos +. Si llamamos I (identidad) a las columnas formadas únicamente por + tendremos que

$$I = 1235 = 2346 = 1347 \quad (1.16)$$

Si además se tiene en cuenta que al multiplicar entre

si dos columnas formadas por signos + se obtiene una nueva columna formada integralmente por signos +. A partir de (1.16) se puede obtener, por multiplicación entre ellos la relación (1.17) de todos los efectos estimados por la columna I.

$$I = 1235 = 2346 = 1347 = 1456 = 2457 = 1267 = 3567 \quad (1.17)$$

Esta relación (1.17) se denomina relación de definición, ya que es la que define totalmente las confusiones que se han introducido en el diseño.

Multiplicando por 1 todas las palabras (miembros de la relación de definición se obtienen todos los efectos confundidos con el efecto principal del factor 1. Multiplicando por 2 se obtienen todos los efectos confundidos con el efecto principal del factor 2 etc. Procediendo así, se puede obtener el patrón de confusión (relación de todas las confusiones introducidas en el diseño) del diseño factorial fraccional. La Tabla 1.3 muestra el patrón de confusión para los efectos principales del diseño 2^{7-3} con generadores dados por (1.15) y relación de definición por (1.17). Análogamente se podría obtener el patrón para las interacciones de todo tipo.

$l_1 \rightarrow$ media +1235+2346+1347+1456+2457+1267+3567
 $l_2 \rightarrow$ 1+235+347+456+267+12346+12457+13567
 $l_3 \rightarrow$ 2+135+346+457+167+12347+12456+2567
 $l_4 \rightarrow$ 3+125+246+147+567+13456+23457+12367
 $l_5 \rightarrow$ 4+236+137+156+257+12345+18467+34567
 $l_6 \rightarrow$ 5+123+146+247+367+23456+13457+12567
 $l_7 \rightarrow$ 6+234+145+127+357+12356+13467+24567
 $l_8 \rightarrow$ 7+134+245+126+356+12357+23467+14567

Tabla 1.3 Patrón de confusión (efectos principales) para un diseño 2^{7-3} .

Como se puede ver en este caso los efectos principales están confundidos con interacciones de tercer y quinto orden, sin embargo las interacciones de segundo orden están confundidas entre ellas.

Este es el patrón de confusión más favorable que se puede obtener para un diseño 2^{7-3} . Como se ha visto el patrón de confusión depende integralmente de los generadores y por tanto su elección debe ser hecha cuidadosamente.

1.3.2.3 Resolución. Aberración.

Tanto la resolución como la aberración son medidas de la bondad del patrón de confusión introducido al fraccionar el diseño.

Siempre que sea posible será deseable que los efectos de bajo orden (efectos principales e interacciones de dos

factores) estén confundidos con efectos de un orden lo mayor posible.

La resolución se define como la longitud de la palabra más corta de la relación definición (Box y Hunter 1961). En general un diseño de resolución R es aquel en que ningún efecto de p-factores está confundido con otro de menos de R-p factores. La resolución de un diseño se denota por el número romano adecuado, añadido como un subíndice. El ejemplo de las secciones 1.3.2.1 y 1.3.2.2 era pues un 2^{7-3}_{IV} . Es pues evidente que lo deseable es tener una resolución lo mayor posible. La resolución alcanzable está limitada por el número de factores y el grado de fraccionamiento del diseño.

La aberración viene definida por el número de veces que aparecen palabras de la misma longitud en la relación de definición. Así es deseable que el número de palabras de longitud R (las que marcan la resolución) sea lo menor posible, y dentro de ese mínimo que aparezcan las menos posibles de longitud R+1, etc.

Ejemplo: los siguientes son dos diseños factoriales fraccionales 2^{7-2}_{IV}

	Diseño A	Diseño B
Generadores	6=123,7=145	6=1234,7=1235
Relación de definición	I=1236=1457 =234567	I=12346=12357 =4567
Interacciones de dos factores confundidas entre sí	12+36 13+26 14+57 15+47 16+23 17+45	45+67 46+67 47+56

Como se puede ver los dos diseños son de resolución IV pero el B tiene un patrón de confusión más favorable ya que sólo posee una palabra de longitud cuatro frente a las dos que posee el diseño A.

Fries y Hunter (1980) proporcionan un algoritmo para la obtención de diseños con mínima aberración.

Así pues, es conveniente utilizar diseños con máxima resolución y mínima aberración ya que con el mismo número de experimentos elementales proporcionan una mayor cantidad de información útil.

1.3.3 Orthogonal arrays. Relación con diseños factoriales fraccionales.

Desde la publicación de "Off-line Quality Control" (Taguchi 1979) se habla frecuentemente de orthogonal arrays.

Las orthogonal arrays no son más que matrices de diseño (ver sección 1.2.1) de experimentos factoriales altamente fraccioandos. Precisamente por ser diseños factoriales son ortogonales, es decir que proporcionan estimaciones de los efectos que son independientes entre sí.

Para diseños con los factores a dos niveles las orthogonal arrays conocidas (Taguchi 1964) coinciden o con los diseños factoriales fraccionales (que proporcionan todas las matrices de diseño ortogonales para un número de experimentos que sea igual a 2^k , con $k=1,2,3,\dots$) o con los diseños Plakett y Burman (1946) (que proporcionan todas las matrices de diseño ortogonales para números de experimentos que sean múltiplo de 4).

Para diseños con los factores a tres niveles las orthogonal arrays conocidas también coinciden con los diseños factoriales fraccionales.

Su verdadero interés estriba en las orthogonal arrays para diseños mixtos, es decir diseños con factores a dos y tres niveles mezclados. Existen varios métodos para, a partir de diseños con las variables a dos niveles y diseños con las variables a tres, obtener diseños mixtos (Addelman, 1962, Connor y Young, 1961). Pero algunas orthogonal arrays de las propuestas por Taguchi (1964) permiten reducir (con respecto a los métodos anteriores) el número de experimentos necesarios para estudiar el mismo número de factores.

Por ejemplo la L_{18} (Tabla 1.4) permite estudiar 7 factores a 3 niveles y 1 factor a 2 niveles con 18 experimentos. Por supuesto sólo permite la estimación de los efectos principales. La realización de un factorial completo requeriría 4734 experimentos y la realización del plan propuesto por Connor y Young requeriría 243 experimentos. Por supuesto estas dos últimas alternativas permitirían la estimación de todas o una parte de las interacciones.

Cond. exp.	Factores							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	3	3	3	3	3	3
4	1	2	1	1	2	2	3	3
5	1	2	2	2	3	3	1	1
6	1	2	3	3	1	1	2	2
7	1	3	1	2	1	3	2	3
8	1	3	2	3	2	1	3	1
9	1	3	3	1	3	2	1	2
10	2	1	1	3	3	2	2	1
11	2	1	2	1	1	3	3	2
12	2	1	3	2	2	1	1	3
13	2	2	1	2	3	1	3	2
14	2	2	2	3	1	2	1	3
15	2	2	3	1	2	3	2	1
16	2	3	1	3	2	3	1	2
17	2	3	2	1	3	1	2	3
18	2	3	3	2	1	2	3	1

Tabla 1.4: Orthogonal array L_{18} para estudiar 7 factores a tres niveles (2,3,4,5,6,7,8) y un factor a dos niveles (1).

El mayor inconveniente de los orthogonal arrays es que no siguen ninguna ley de formación conocida y por lo tanto sólo existen para números de factores y combinaciones de niveles determinados.

1.4 BREVE REPASO AL ESTADO DE LA CUESTION

Desde los trabajos de Sir Ronald Fisher en los años 30 que significaron el inicio del área del diseño de experimentos se ha evolucionado mucho, a pesar de ser un área de conocimientos relativamente nueva.

Se comenzó diseñando experimentos para estudiar el efecto de los factores sobre el nivel medio de una respuesta y sucesivamente se fueron introduciendo los conceptos de bloque, interacción, cuadrados latinos y greco-latinos, diseños factoriales, fraccionales, diseños compuestos, métodos de superficie de respuesta, experimentos con mezclas, experimentos para modelos no-lineales, por citar algunos entre los más relevantes.

Actualmente las áreas de investigación más prometedoras y en las que más esfuerzo se está invirtiendo en todo el mundo son:

a) El diseño de experimentos en la práctica.

Este campo viene a significar el contrapunto al interés despertado en los años 70 por los llamados "diseños óptimos" que lo son en la teoría matemática, pero de muy difícil aplicación práctica.

Se están produciendo avances en la planificación de diseños con múltiples objetivos (Box y Draper (1975), Herzberg (1982)). Y en el desarrollo de una nueva mentalidad al planificar los experimentos (Hahn (1982)), se hace incipiente en la necesidad de aprovechar todos los conocimientos, sobre el sistema investigado, que se posea antes de comenzar la experimentación, y obtener un buen diseño al unir estos conocimientos con la teoría estadística. En este área cabe encuadrar el capítulo 2 de esta tesis donde se propone un método (en forma de algoritmo) para asignar las variables del experimento a los factores del diseño de forma que si las conjeturas "a priori" se ven confirmadas, el investigador no se vea penalizado en la fase de análisis.

b) Diseñar con ayuda del ordenador.

El enorme aumento en capacidad y en disponibilidad de potentes ordenadores a bajo coste está llevando al desarrollo de programas interactivos para ayudar en el diseño de experimentos. Sin embargo todavía está lejos la aparición de un sistema experto interactivo que pueda substituir al estadístico en su ayuda al experimentador.

El algoritmo propuesto en el capítulo 2 de esta tesis está implementado en un programa de ordenador, que podría ser de gran utilidad integrado en un paquete de las

características antes mencionadas.

c) Estudio de efectos sobre la dispersión.

La utilización de diseños factoriales para estudiar los efectos sobre la dispersión además de sobre el nivel medio de respuesta no es nueva en Japón, donde Taguchi lo introdujo hace ya varios años. La publicación de "Off-line Quality Control" (1979) en inglés ha despertado gran interés en occidente y actualmente un gran número de investigadores Phadke et al (1982,1984), Box y Meyers (1984,1985) está involucrado en corregir y mejorar los métodos un tanto empíricos de Taguchi, así como en investigar nuevas maneras de detectar los efectos de la dispersión. El capítulo 3 de esta tesis es una contribución a la detección de efectos sobre la dispersión.

Hay varios campos más dentro del diseño de experimentos que despiertan gran interés en los medios investigadores como diseños para la experimentación secuencial, diseños casi ortogonales y diseños supersaturados entre otros.

1.5 OBJETIVOS DE LA TESIS Y ORGANIZACION DE LA MISMA

El objetivo primordial de esta tesis es profundizar en la aplicación de los diseños factoriales en las etapas de diseño de productos y procesos para conseguir mejorar la calidad.

En la sección 1.1 se ha visto la importancia del diseño de experimentos en la obtención de productos de calidad, y de procesos capaces de producir calidad. El resto del Capítulo 1 es una introducción a la técnica del diseño de experimentos.

Desde 1961, año en que se publicó un artículo de Box y Hunter es conocida la propiedad proyectiva de los diseños factoriales. Entendiéndose por proyección la reducción del diseño original a uno con un menor número de variables y con una estructura de alias más favorable, obtenido al descartar las variables no significativas del diseño original. Como quiera que industrialmente es muy frecuente investigar un gran número de factores en busca de los (generalmente) pocos que afectan la respuesta apreciablemente, la idea de proyección tiene gran interés.

El Capítulo 2 propone un algoritmo implementado en un programa de ordenador que dado el diseño a utilizar y los conocimientos del investigador previos al experimento asigna las variables físicas del experimento a los factores del diseño, de forma que si las sospechas (conocimientos previos) del investigador eran ciertas, este se vea recompensado con el mejor diseño proyección posible.

La utilización del algoritmo propuesto permite un máximo aprovechamiento de los recursos dedicados a experimentar, ya que a través de una óptima asignación de variables a factores, se consigue obtener el máximo de información útil de cada experimento.

Para el diseño de productos y procesos de calidad es imprescindible no solamente que éstos operen al nivel deseado, sino que además deben hacerlo con la mínima variabilidad posible.

Para poder juzgar la influencia de los factores en la variabilidad de la respuesta es imprescindible disponer de réplicas, y como se ve en el capítulo 3 una de las maneras de obtenerlas es por proyección.

También en el Capítulo 3 se revisan los sistemas conocidos hasta ahora para estudiar los efectos de los factores sobre la variabilidad y se propone un nuevo sistema con la gran ventaja de proporcionar una distribución de referencia teórica para juzgar la significación. Además el

nuevo sistema es más sensible que los hasta ahora conocidos y tiene en cuenta el número de réplicas realizado.

En el capítulo 4 se compara el nuevo sistema con el empleado por Phadke et al (método de Taguchi) en un estudio destinado a mejorar el proceso de fabricación de circuitos impresos.

CAPITULO 2

2. DISEÑOS CON OPTIMAS PROPIEDADES PROYECTIVAS

2.1 TEORIA DE LA PROYECCION

Un problema industrial muy corriente es tratar de encontrar entre los muchos factores que pueden afectar a una respuesta, cuales son los (en general pocos) que la afectan apreciablemente. La idea es similar a la que motiva el uso de los diagramas de Pareto o diagramas A B C en control de calidad. Box (1984) lo resume en lo que llama el postulado del "effect sparsity" (escasez de efectos) que afirma que solo una pequeña parte de las variables serán "activas", mientras el resto serán esencialmente "inertes".

Para el estudio de estas situaciones se utilizan diseños altamente fraccionados o saturados u otras "orthogonal arrays" (Tippet(1934), Finney(1945), Plackett y Burman(1946), Rao (1947), Box y Hunter (1961), Taguchi y Wu (1980) que permiten estudiar un gran número de variables en relativamente pocos experimentos. Naturalmente, esto se traduce en un patrón de confusión que no permite diferenciar los efectos entre sí. Especialmente grave es no poder diferenciar los efectos principales de las interacciones de segundo orden.

Se ha visto en el Capítulo 1 que hay tres justificaciones posible para la utilización de diseños factoriales fraccionales, todas ellas basadas en el principio del effect sparsity. De las tres la generalmente reconocida como la mejor es la proyección y es en ella que se va a profundizar en este Capítulo 2.

Para ver con más detalle la idea de proyección, supóngase que de los K factores considerados solo un subconjunto pequeño de tamaño (d) desconocido, cuya identidad también es desconocida serán activos (producirán efectos principales e interacciones) y que los restantes $k-d$ serán inertes.

En estos casos, si se trabaja con un diseño fraccional con las variables a dos niveles (Box y Hunter 1961) y al analizar los resultados se comprueba que varios factores son inertes, el diseño resultante en los factores activos puede tener un patrón de confusión más favorable que el diseño original.

Como ilustración veamos el caso de un diseño 2^{3-1}_{III}

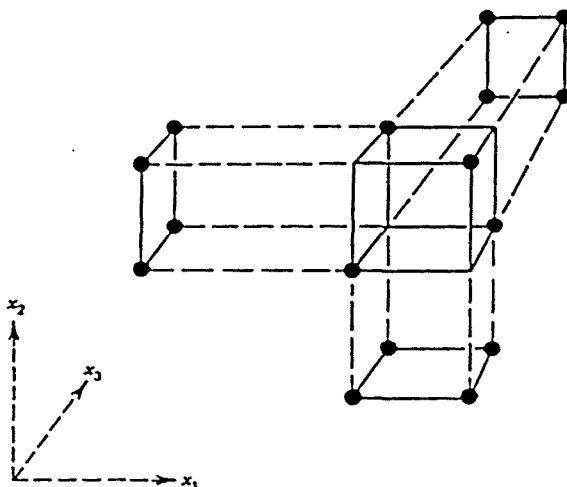


Figura 2.1 Proyección de un 2^{3-1}_{III} en tres 2^2 .

Si el número total de variables considerado es tres, pero se puede suponer que no más de dos resultarán activas, entonces (Figura 2.1) el diseño proporciona factoriales 2^2 completos en cualquier pareja de dos variables.

El efecto de borrar un factor inerte sobre la relación de definición es, el de eliminar todas las palabras en las que aparecía ese factor (Box y Hunter 1961). Así pues en el 2^{3-1}_{III} la relación de definición era $I=123$ y al eliminar cualquier factor, la relación de definición desaparece, indicando que el diseño es un factorial completo.

En general al proyectar se pueden obtener diseños factoriales fraccionales (replicados o no) o diseños factoriales completos (replicados o no) dependiendo del diseño de partida y de las variables que resulten inertes.

2.2 PROYECCION Y RESOLUCION

En los diseños factoriales fraccionales a dos niveles, es claro (Box y Hunter 1961) que los diseños de resolución R se proyectan como factoriales completos en cualquier subconjunto de $(R-1)$ variables. Esto es así ya que cada palabra de la relación de definición contiene como mínimo R factores. Así por ejemplo, un diseño saturado 2^{12-11}_{III} se proyecta como un factorial completo (2^2) replicado 4 veces en cualquiera de los 105 posibles subconjuntos de dos variables.

De hecho es posible ir más allá ya que este mismo diseño se proyecta como un factorial completo (2^3) replicado en 420 de los 455 subconjuntos posibles de tres variables y como un factorial completo (2^4) en 840 de los 1365 subconjuntos posibles de 4 variables. El hecho es general y queda plasmado en el siguiente lema.

Lema: los diseños factoriales fraccionales 2^{k-p-R} se pueden proyectar como factoriales completos en algunos subconjuntos de $R+1$ factores donde $l=k-p-R$.

El número de estos subconjuntos depende de la estructura de alias y no parece seguir ninguna ley.

Demostración:

Por la forma de obtención de los diseños 2^{k-p} , asignar los p factores a columnas de la matriz de diseño producidas al multiplicar subconjuntos de las $k-p$ columnas correspondientes a los factores iniciales (interacciones), es claro que siempre será posible obtener un factorial completo al eliminar los p factores añadidos (proyectar sobre los $k-p$ iniciales).

Como $l=k-p-R$

$$R+1=R+k-p-R=k-p \quad (2.1)$$

Queda por tanto demostrada la existencia de un subconjunto de factores; el que existan más viene condicionado por los generadores del diseño, aunque la relación no es en este punto clara.

2.3 ASUMCIONES AL PROYECTAR UN DISEÑO

Al proyectar un diseño altamente fraccionado se está asumiendo que los factores cuyo efecto principal no es importante no interactúan con los demás. Recuérdese que las interacciones están (en general) confundidas con los efectos principales, y por lo tanto se está obligado a admitir que son indistinguibles del ruido sin ningún tipo de comprobación si se quiere eliminar ese factor.

Nótese que la suposición de que las interacciones son despreciables si el efecto principal lo es, está en general justificada por dos motivos. Primero porque la experiencia lo confirma y en segundo lugar porque para que un efecto principal no aparezca como importante, y alguna interacción de dos factores en la que esté involucrado sí, ha de ocurrir que el efecto sea exactamente igual (+ - ruido) y de sentido contrario en los dos niveles del otro factor. La Figura 2.2 representa la situación.

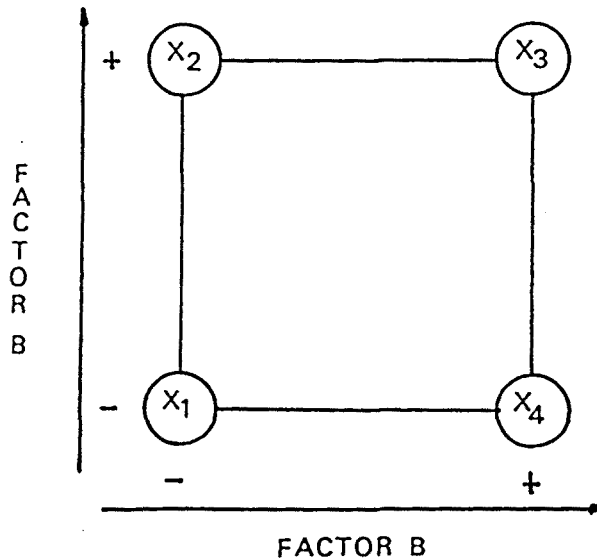


Figura 2.2: Diseño 2^2

x_1 : representa la media de las respuestas cuando A está a nivel bajo y B a nivel bajo.

x_2 : representa la media de las respuestas cuando A está a nivel bajo y B a nivel alto

x_3 : representa la media de las respuestas cuando A está a nivel alto y B a nivel bajo

x_4 : representa la media de las respuestas cuando A está a nivel alto y B a nivel alto

Los efectos de B y AB son:

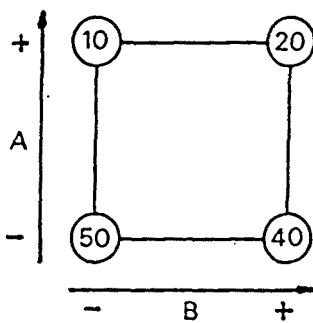
$$\text{efecto (B)} = \frac{x_3 + x_4 - x_1 - x_2}{2} \quad (2.2)$$

$$\text{efecto (AB)} = \frac{x_1 + x_4 - x_2 - x_3}{2}$$

De donde se deduce que para que el efecto de B sea cero y el de AB no:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 - x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - x_4 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ejemplo:



en este caso aplicando (2.2):

$$\text{efecto (A)} = \frac{10+20-50-40}{2} = -30$$

$$\text{efecto (B)} = \frac{40+20-50-10}{2} = 0$$

$$\text{efecto (AB)} = \frac{50+20-10-40}{2} = 10$$

Este es un caso realmente raro, y sucederá en contadísimas situaciones. Ya es poco corriente que el efecto de una variable cambie de signo al cambiar el nivel de otra, pero que estos efectos de signo contrario se compensen será algo realmente excepcional.

Por otra parte solo se requeriría añadir dos experimentos elementales para aclarar la situación de si la interacción es realmente importante o la importancia de ese efecto se debe a algún otro factor con el que esté confundida. La realización de dos experimentos en los niveles A(-) B(-) y A(+) B(+) manteniendo todos los demás factores constantes será suficiente para aclarar la ambigüedad. La adición de experimentos elementales para resolver ambigüedades, es un tema importante. Más información se puede hallar en Box, Hunter y Hunter (1981), y Daniel (1976).

2.4 DISEÑOS CON MEJOR PROYECCION

2.4.1 Importancia de los conocimientos previos al experimento

La proyección de un diseño fraccional está directamente ligada a las variables que resultan inertes después de un primer análisis de los datos recogidos en el experimento.

Si no se poseen conocimientos sobre el sistema que se está investigando, previos al experimento, los diseños con óptimas propiedades proyectivas serán aquellos que, sean cuales sean las variables que resulten no significativas (inertes), al proyectar sobre las restantes produzcan diseños lo menos fraccionados posible y con máxima resolución y mínima aberración.

En general, desgraciadamente, no existen diseños con propiedades proyectivas uniformes, es decir, diseños tales que para cualquiera de los posibles subconjuntos ($\binom{K}{M}$) de n variables (n puede tomar valores entre 1 y k) que resulten inertes los diseños proyección obtenidos sean iguales. Habrá, pues, subconjuntos que producirán diseños proyección mejores (menos fraccionados o con mayor resolución o menor aberración) que otros. Por ejemplo un diseño 2^{5-2}_{III} con generadores $I=123=145$ tiene máxima resolución y mínima aberración (veremos que los diseños con máxima resolución y mínima aberración son los que tienen propiedades proyectivas más uniformes). Si dos variables resultasen inertes, de los diez posibles subconjuntos de dos variables, ocho producirían una proyección que sería un factorial completo 2^3 y dos producirían una proyección que serían fraccional 2^{3-1}_{III} (ver Tabla 2.1).

Relación de definición $I=123=145=2345$

Grupos de dos factores inertes	Tipo de diseño proyección obtenido al proyectar
12	2^3
13	2^3
14	2^3
15	2^3
23	2^{3-1}
24	2^3
25	2^3
34	2^3
35	2^3
45	2^{3-1}

Tabla 2.1 Diseños proyección obtenida al hallar dos factores inertes en un diseño 2^{5-2}

Así, pues, es muy importante si se poseen conocimientos previos utilizarlos al asignar las variables de la investigación a los factores del diseño. En el ejemplo, si se hubiese sabido, gracias a experiencia del pasado o conocimientos teóricos, qué dos variables era más probable que fuesen inertes se deberían haber asignado a cualquiera de los grupos (12,13,14,15,24,25,34,35) (con preferencia a los grupos que contienen el factor 1, ya que siempre que el 1 resulte inerte se habrán eliminado las dos palabras más cortas.) que son los que producen diseños 2^3 completos.

2.4.2 Selección del diseño

Diseñar un experimento teniendo presente la proyección que se obtendrá al detectar factores inertes es un problema complejo. El mejor diseño sólo se podría obtener una vez se conociese que variables son inertes, y esto sólo sucede cuando ya se ha realizado el experimento. Por tanto el problema es un círculo vicioso.

Diseño nº	Diseño original	Reso- lución	Rel. def:	Resolución diseño proyección*						
				1	2	3	4	5	6	7
I=123										
1	2^{7-2}_{III}	III	=14567 =234567	VI	V	V	III	III	III	III
I=1234										
2	2^{7-2}_{III}	IV	=1567 =234567	VI	IV	IV	IV	IV	IV	IV
I=1234										
3	$2^{7-2}_{IV}^{**}$	IV	=12567 =34567	V	V	V	V	IV	IV	IV

* El diseño proyectado al borrar un factor es siempre un 2^{4-1} . Lo que cambia con el factor es la resolución.

** Este diseño tiene mínima aberración. Como puede verse en la relación de definición tiene una sola palabra de longitud 4.

Tabla 2.2: Comparación de proyecciones de tres diseños 2^{7-2}

Los diseños con máxima resolución y mínima aberración son los que tienen unas propiedades proyectivas más uniformes, lo cual no quiere decir que en todos los casos sean mejores.

Como ilustración voy a comparar tres diseños 2^{7-2} , uno de resolución tres, otro de resolución IV sin mínima aberración, y el otro de resolución IV con mínima aberración (máxima resolución y mínima aberración) (ver Tabla 2.2)

En la Tabla 2.2 se aprecia claramente que el diseño 3 es el que produce proyecciones más similares, y el 1 más diversas. Se pueden relacionar los diseños proyectados obtenidos con el nivel de conocimientos previos necesarios para aprovecharlos. Para que fuese adecuada la utilización del diseño 1 (2^{7-2}_{III}) se requerirían unos conocimientos a priori muy fuertes, tener la casi certeza de que el factor 1 es inerte y de que los factores 4,5,6 y 7 son activos, de lo contrario se acabaría con un diseño de resolución III. Por contra si se utiliza el diseño 3 (2^{7-2}_{IV}), los conocimientos a priori siguen siendo útiles, ya que se intentará asignar las variables con mayor probabilidad de resultar inertes a 1,2,3 y 4, para obtener un diseño de resolución V, pero en caso de que no sea así se obtendría un diseño de resolución IV.

En el caso de que las suposiciones basadas en conocimientos a priori sean equivocadas, los diseños con máxima resolución y mínima aberración son los que producen mejores proyecciones.

2.4.3 Ejemplo

Supóngase que se desean estudiar los efectos de 7 variables en una respuesta. Se designan las variables por A,B,C,D,E,F y G, y se cree que las variables D,E y F son las que tienen más posibilidades de afectar a la respuesta (fundamento: investigaciones previas, conocimientos teóricos, etc). En una primera fase se decide realizar un experimento 2^{7-4}_{III} . La Tabla 2.3 detalla el experimento y un conjunto de resultados hipotéticos. Estos resultados se han construido en base al siguiente modelo, los efectos principales de D,E y F son respectivamente 1,2 y 3 y la interacción EF es 2.6 todos los restantes efectos son cero. A los ocho verdaderos valores se les ha añadido un valor normal con $\mu=0$ y $\sigma=1$ para simular el ruido.

A	B	C	D	E	F	G	Respuesta verdadera	N(0,1)	Respuesta observada
1	2	3	4	5	6	7			
-	-	-	+	+	+	-	48.6	0.1	48.7
+	-	-	-	-	+	+	37.4	-1.2	36.2
-	+	-	-	+	-	+	35.4	0.9	36.3
+	+	-	+	-	-	-	38.6	-0.8	37.8
-	-	+	+	-	-	+	38.6	-0.2	38.4
+	-	+	-	+	-	-	35.4	-0.9	34.5
-	+	+	-	-	+	-	37.4	-1.6	35.8
+	+	+	+	+	+	+	48.6	0.1	48.7

Tabla 2.3. Experimento y resultados

Los efectos calculados a partir de la respuesta observada son:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= -0.25 \pm .35 \\
 l_2 &= 0.10 \pm .35 \\
 l_3 &= -0.20 \pm .35 \\
 l_4 &= 3.85 \pm .35 \\
 l_5 &= 2.50 \pm .35 \\
 l_6 &= 2.80 \pm .35 \\
 l_7 &= 0.35 \pm .35
 \end{aligned}
 \quad \sigma(\text{efecto}) = \sqrt{1/8} = .35$$

donde cada efecto l_i estima:

$$\begin{aligned}
 l_1 &\rightarrow A + BD + CE + GF \\
 l_2 &\rightarrow B + AC + CF + EG \\
 l_3 &\rightarrow C + AE + BF + DG \\
 l_4 &\rightarrow D + AB + CG + EF \\
 l_5 &\rightarrow E + AC + BG + DF \\
 l_6 &\rightarrow F + BC + AG + DE \\
 l_7 &\rightarrow G + CD + BE + AF
 \end{aligned}$$

Se llegaría pues a la conclusión de que D,E y F son las únicas variables activas.

Si se proyecta el diseño sobre DEF se obtendría el diseño de la Tabla 2.4:

D	E	F	Resp.		D	E	F	
+	+	+	48.7		-	-	+	36.2, 35.8
-	-	+	36.2	Reordenando	+	-	-	37.8, 38.4
-	+	-	36.3	----->	-	+	-	36.3, 34.5
+	-	-	37.8	y agrupando	+	+	+	48.7, 48.7
+	-	-	38.4					
-	+	-	34.5					
-	-	+	35.8					
+	+	+	48.7					

Tabla 2.4 Diseño proyectado

Un 2⁷-factorial replicado que permite estimar:

media + efecto (DEF) = 39.55
 efecto (D) + efecto (EF) = 3.85
 efecto (E) + efecto (DF) = 2.50 $\sigma(\text{efecto}) = .35$
 efecto (F) + efecto (DE) = 2.80

Queda claro que no se ha ganado nada al proyectar, las confusiones entre D, E y F son las mismas que antes y por tanto se han estimado los mismos efectos.

Veamos que hubiese pasado si se hubiesen asignado los factores D y B a las columnas 2 y 4 en lugar de a las 4 y 2 como anteriormente (Tabla 2.5).

A	D	C	B	E	F	G	Respuesta verdadera	N(0,1)	Respuesta observada
1	2	3	4	5	6	7			
-	-	-	+	+	+	-	41.4	-0.1	41.3
+	-	-	-	-	+	+	37.4	0.8	38.2
-	+	-	-	+	-	+	37.4	0.1	37.5
+	+	-	+	-	-	-	33.4	-0.2	33.2
-	-	+	+	-	-	+	36.6	0.9	37.5
+	-	+	-	+	-	-	40.6	-1.6	39.0
-	+	+	-	-	+	-	44.6	-0.3	44.3
+	+	+	+	+	+	+	48.6	-0.8	47.8

Tabla 2.5 Experimento y resultados

Estos datos han sido generados con el mismo modelo que antes. Los efectos calculados a partir de la respuesta observada son:

$l_1 = -0.30 + .35$	$l_1 \rightarrow (A+BD+CE+FG)$
$l_2 = 0.85 + .35$	$l_2 \rightarrow (D+AB+CF+EG)$
$l_3 = 0.10 + .35$	$l_3 \rightarrow (C+AE+DF+BG)$
$l_4 = 2.30 + .35$	$l_4 \rightarrow (B+AD+CG+EF)$
$l_5 = 1.55 + .35$	$l_5 \rightarrow (E+AC+DG+BF)$
$l_6 = 3.05 + .35$	$l_6 \rightarrow (F+CD+AG+BE)$
$l_7 = 0.40 + .35$	$l_7 \rightarrow (G+BC+ED+AF)$

Dados los conocimientos previos del investigador, una conclusión provisional podría ser que en efecto, D, E y F son las únicas variables activas. El diseño proyectado sería en este caso el de la Tabla 2.6.

D	E	F	Resp.		D	E	F	Resp.
-	+	+	41.3		-	-	-	37.5
-	-	+	38.2		+	-	-	33.2
+	+	-	37.5		-	+	-	39.0
+	-	-	33.2	Reordenando	+	+	-	37.5
-	-	-	37.5	----->	-	-	+	38.2
-	+	-	39.0		+	-	+	44.3
+	-	+	44.3		-	+	+	41.3
+	+	+	47.8		+	+	+	47.8

Tabla 2.6 Diseño proyectado

Un factorial completo, que permite estimar todos los efectos, incluidas las interacciones de dos factores. Así:

efecto (D) = 0.85 ± 0.35
 efecto (E) = 1.55 ± 0.35
 efecto (F) = 3.05 ± 0.35
 efecto (DE) = 0.40 ± 0.35
 efecto (DF) = 0.10 ± 0.35
 efecto (EF) = 2.30 ± 0.35
 efecto(DEF) = -0.30 ± 0.35

Se comprueba que las tres variables de las que se sospechaba, tienen efectos principales. Además hay interacción entre E y F. Nótese que de los tres efectos principales, el D es el más pequeño y no el mayor como indicaba, incorrectamente, el análisis del primer diseño. Todas estas conclusiones son correctas, pero como todavía resta alguna ambigüedad el investigador puede decidir realizar algún experimento confirmativo.

Este ejemplo muestra que a pesar de que el diseño original era el mismo en los dos casos (2^{7-4}_{III} con mínima aberración) el segundo era mejor, se proyectaba en un factorial completo en las variables de interés (2^3) mientras que el primero solo proporcionaba un 2^{3-1} replicado.

La idea es que los conocimientos previos a la realización del experimento se deben utilizar en la etapa de diseño, de manera que si las conjeturas iniciales resultan ciertas, el investigador pueda obtener la máxima información en la fase de análisis.

El capítulo presente de esta tesis propone un método implementado en un programa de ordenador para el aprovechamiento de la información previa al experimento en la obtención de diseños con óptimas propiedades proyectivas.

2.5 NOTACION

Resulta conveniente para obtener una mayor claridad y concisión en las explicaciones posteriores definir una matriz de ceros y unos que representará la relación de definición de los diseños factoriales fraccionales.

Cada fila representará una palabra, cada columna un factor. Un uno significa que ese factor esta presente en esa palabra, un cero que esta ausente.

Ejemplo: Supóngase un diseño 2^{7-3}_{III} con generadores 5=234, 6=134, 7=123. La relación de definición sería:

I = 1237 = 2345 = 1346 (generadores)
 = 1457 = 2467 = 1256 (Productos de dos generadores)
 = 3567 (Productos de tres generadores)

En la notación matricial sería:

palabras	factores							
	1	2	3	4	5	6	7	
1	1	1	1	0	0	0	1	--- 1237
2	0	1	1	1	1	0	0	--- 2345
3	1	0	1	1	0	1	0	--- 1346
4	1	0	0	1	1	0	1	--- 1457
5	0	1	0	1	0	1	1	--- 2467
6	1	1	0	0	1	1	0	--- 1256
7	0	0	1	0	1	1	1	--- 3567

Obsérvese como la fila 7 (palabra 7) tiene unos en las columnas 3, 5, 6, y 7 indicando que esos son los factores que contienen la séptima palabra (producto de tres generadores).

Esta notación tiene la ventaja de proporcionar un sistema facil de obtener la relación de definición a partir de los generadores. Se trata simplemente de hacer las sumas en sentido binario de todas las combinaciones posibles de generadores. El metodo es facilmente implementable en ordenador.

Así en el ejemplo, las tres primeras palabras son los generadores, la cuarta es la suma de la primera y la segunda:

	1	2	3	4	5	6	7
palabra 1	1	1	1	0	0	0	1
+ palabra 2	0	1	1	1	1	0	0
palabra 4	1	0	0	1	1	0	1

La quinta, la suma de la primera y la tercera, etc.

2.6 PROPIEDADES DE LAS RELACIONES DE DEFINICIÓN

A continuación enuncio cuatro propiedades de las relaciones de definición, que han sido de utilidad en la elaboración del algoritmo para obtener diseños proyección. Las tres primeras son bien conocidas, y su demostración se puede hallar en la bibliografía. Para la tercera propiedad (c) he incluido una demostración mucho más corta y clara que la conocida hasta ahora. La cuarta propiedad es una condición necesaria y suficiente para que una matriz de ceros y unos sea una relación de definición según la notación definida en 2.5. Esta propiedad es nueva por lo que incluyo su demostración. Como se verá más adelante, el hecho de que sea necesaria resulta útil para obtener diseños proyección, la suficiencia no resulta de inmediata aplicación en esta tesis pero abre un campo de investigación muy prometedor en la búsqueda de diseños con máxima resolución y mínima aberración al comparar las relaciones de definición con los diseños en bloques incompletos balanceados.

a) Los diseños con máxima resolución y mínima aberración contienen todos los factores en la relación de definición (Fries y Hunter 1980). En la notación del apartado anterior sería equivalente a decir que no hay columnas enteramente formadas por ceros.

b) Los diseños 2^{k-r} contienen 2^r-1 palabras en su relación de definición (2^r si consideramos la identidad como una palabra). Esta se deduce inmediatamente del hecho de que el número de generadores es p y se multiplican entre ellos de todas las maneras posibles para obtener la relación de definición.

c) Cada factor forma parte de 2^{r-1} palabras. Una demostración mucho más sencilla que la hasta ahora conocida (Burton y Connor 1957) se basa en la propiedad proyectiva de los diseños factoriales fraccionales (Box y Hunter 1961).

Con base en la propiedad anterior, se puede afirmar que:

- Un diseño 2^{k-r} tiene 2^r-1 palabras en la relación de definición.
- Un diseño $2^{(k-1)-(r-1)}$ tiene $2^{r-1}-1$ palabras en la relación de definición.

Considérese que el diseño $2^{(k-1)-(p-1)}$ se ha obtenido por proyección a partir del diseño 2^{k-p} . La relación de definición del diseño proyectado se obtiene eliminando todas las palabras de la relación de definición del diseño original en las que aparecía el factor que se ha eliminado al proyectar.

Esto es:

$$2^{p-1} - (2^{p-1}-1) = 2^{p-1} \quad (2.4)$$

Nota: Al proyectar un diseño 2^{k-p} por eliminación de un factor solo se pueden obtener diseños $2^{(k-1)-(p-1)}$ o diseños $2^{(k-1)-p}$. Estos últimos sólo en el caso de que el factor que se elimina no este incluido en la relación de definición (propiedad a).

d) Para que un conjunto de 2^{p-1} palabras formen una relación de definición de un diseño 2^{k-p} es condición necesaria y suficiente que cualquier conjunto de dos factores aparezcan siempre juntos en las mismas palabras, o bien que aparezcan juntos en 2^{p-2} palabras y no aparezca ninguno de los dos en $2^{p-2}-1$ palabras.

En la notación de la sección 2.5 esta propiedad se expresaría: Una condición necesaria y suficiente para que una matriz compuesta por ceros y unos, con 2^{p-1} filas y K columnas sea una relación de definición de un diseño 2^{k-p} es que cualquier conjunto de dos columnas sea tal que: o bien las dos columnas son iguales, o bien tienen 2^{p-2} unos y $2^{p-2}-1$ ceros en la misma fila.

Como he mencionado anteriormente esta propiedad es nueva, y por tanto incluyo su demostración en detalle.

Demostración:

Veamos que la condición es necesaria.

Si se proyecta (en el sentido de Box-Hunter 1961) eliminando un factor de un diseño 2^{k-p} ese diseño se convierte en un $2^{(k-1)-(p-1)}$ (o en un $2^{(k-1)-p}$ replicado, esto solo en el caso de que ese factor no aparezca en la relación de definición) en los restantes factores.

¿Qué se ha hecho al proyectar?, se han borrado todas las palabras en las que intervenía ese factor. En la notación matricial se han borrado la columna correspondiente a ese factor y todas las filas en las que ese factor tenía un 1.

En lo sucesivo, sin pérdida de generalidad, consideraré que todos los factores aparecen en la relación de definición.

Un diseño $2^{(k-1)-(p-1)}$ tiene $2^{p-1}-1$ palabras en la relación de definición y cada factor aparece en 2^{p-2} palabras.

Supóngase que el diseño $2^{(k-1)-(p-1)}$ se ha obtenido por proyección, entonces el factor que se ha eliminado para proyectar aparecía en la misma palabra que cualquiera de los otros en

$$2^{p-1}-2^{p-2} = 2(2^{p-2}) - 2^{p-2} = 2^{p-2} \text{ ocasiones}$$

o en

$2^{p-1}-0 = 2^{p-1}$ en caso de que hubiese un factor que interviniese en exactamente las mismas palabras que el factor eliminado.

Con esto queda demostrado que el número de unos en la misma posición entre dos columnas es necesariamente 2^{p-2} ó 2^{p-1} .

Veamos que dado cualquier subconjunto de dos factores, el número de palabras en las que no aparece ninguno de los dos es $2^{p-2}-1$ ó $2^{p-1}-1$ caso de que un factor intervenga en exactamente las mismas palabras que el otro.

Partiendo de un diseño 2^{k-p} , se proyecta eliminando cualquier factor y se obtiene un $2^{(k-1)-(p-1)}$, proyectando de nuevo eliminando otro factor y obtiene un $2^{(k-2)-(p-2)}$.

El diseño 2^{k-p} tiene 2^p-1 palabras en la relación de definición.

El diseño $2^{(k-1)-(p-1)}$ tiene $2^{p-1}-1$ palabras en la relación de definición.

El diseño $2^{(k-2)-(p-2)}$ tiene $2^{p-2}-1$ palabras en la relación de definición.

Las $2^{p-2}-1$ palabras de la relación de definición del diseño $2^{(k-2)-(p-2)}$ provienen de palabras en las que no intervenían los dos factores eliminados.

Suficiente: Lo voy a demostrar por inducción, utilizando la notación de la sección 2.5.

La condición se cumple para $p=1$. Sea un diseño 2^{k-1} , tendrá una sola fila en la matriz relación de definición. Si se obliga a que todos los factores intervengan en la relación de definición (lo podemos hacer sin pérdida de generalidad) la matriz será:

1	2	3	4	k
1	1	1	1	1	.	.	.	1

donde cualquier grupo de dos factores aparece siempre junto en las mismas palabras (la única).

Supóngase que sucede para p . Sea un diseño 2^{k-p} , su relación de definición será una matriz $(2^p-1) \times k$ donde cualquier subconjunto de dos columnas tienen 2^{p-2} unos y $2^{p-2}-1$ ceros en la misma posición.

Veamos qué sucede para $p+1$. El diseño $2^{k-(p+1)}$ tiene una matriz relación de definición de tamaño $(2^{p+1}-1) \times k$. Supóngase que se obtiene esa matriz añadiendo un generador a la matriz relación de definición del diseño 2^{k-p} y multiplicándolo por todas las palabras (sumándolo en base dos a todas las filas) de la matriz. En efecto de este modo se obtendrían las $2^{p+1}-1$ palabras:

2^p-1	del diseño 2^{k-p}
1	nuevo generador
2^p-1	productos del nuevo generador por las 2^p-1
	del diseño 2^{k-p}

Total	$2^{p+1}-1$ palabras en nueva relación de definición.

Cójase cualquier subgrupo de dos columnas del diseño 2^{k-p} , por definición tendrán 2^{p-2} y $2^{p-2}-1$ ceros en la misma posición.

En estas dos columnas el nuevo generador puede tener 00 ó 11 ó 01.

- 1er caso 00:

Al sumar 0 a cada elemento del diseño original se obtienen 2^p-1 elementos exactamente iguales que los 2^p-1 originales. Esto será cierto para ambas columnas con lo que se tiene:

diseño 2^{k-p}	2^{p-2} unos en la misma posición $2^{p-2}-1$ ceros en la misma posición
generador	1 cero en la misma posición
producto	2^{p-2} unos en la misma posición $2^{p-2}-1$ ceros en la misma posición
Total	<hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> 2^{p-1} unos en la misma posición $2^{p-1}-1$ ceros en la misma posición

- 2o Caso 11:

Al sumar módulo dos 1 a cada elemento del diseño original se obtienen 2^{p-1} elementos que serán 0 donde antes era 1 y 1 donde antes era 0. Esto será cierto para ambas columnas con lo que se tiene:

diseño 2^{k-p}	2^{p-2} unos en la misma posición
	$2^{p-2}-1$ ceros en la misma posición
generador	1 uno en la misma posición
producto	2^{p-2} ceros en la misma posición
	$2^{p-2}-1$ unos en la misma posición
Total	<hr/> 2^{p-1} unos en la misma posición
	$2^{p-1}-1$ ceros en la misma posición

- 3er Caso 01:

En este caso una columna producto es la repetición de la del diseño 2^{k-p} y la otra es con los ceros y unos cambiados.

Estas dos columnas en el diseño original no coincidían en:

$2^{p-1} - [2^{p-2} + 2^{p-2}-1] = 2^{p-1}$ filas de las cuales 2^{p-2} eran unos y 2^{p-2} eran ceros ya que el número total de unos es 2^{p-1} (ver propiedades) y tenía en la misma posición 2^{p-2} por lo que $2^{p-1}-2^{p-2} = 2^{p-2}$. Similarmente con los ceros, tenía $2^{p-1}-1$ ceros y tenía en la misma posición $2^{p-2}-1$ por lo que $(2^{p-1}-1)-(2^{p-2}-1) = 2^{p-2}$.

Al cambiar los ceros por unos y viceversa en una columna, los números dejarán de coincidir en las posiciones en que lo hacían y coincidirán en los 2^{p-2} unos y 2^{p-2} ceros en que antes no coincidían

diseño 2^{k-p}	2^{p-2} unos en la misma posición
	$2^{p-2}-1$ ceros en la misma posición
generador	0 1 en la misma posición
producto	2^{p-2} unos en la misma posición
	2^{p-2} ceros en la misma posición
Total	<hr/> 2^{p-1} unos en la misma posición
	$2^{p-1}-1$ ceros en la misma posición

Con lo que queda demostrado que en cualquiera de los tres casos posibles cada dos columnas del diseño $2^{k-(p+1)}$ tiene 2^{p-1} unos y $2^{p-1}-1$ ceros en la misma posición.

2.7 ALGORITMO

2.7.1 Utilidad y propiedades

El proceso de diseñar un experimento requiere siempre de la unión de los conocimientos del investigador sobre el sistema y del estadístico sobre diseños, estructuras de alias, etc.

El tipo de diseño (número de factores, niveles, grado de fraccionamiento, etc.) está en gran medida condicionado por circunstancias físicas y debe surgir de la colaboración entre el estadístico y el investigador. A continuación el estadístico sugerirá un diseño que cumpliendo lo anterior tenga una serie de características deseables. Si el diseño escogido es un 2^{k-p} una de esas características será, en general, la máxima resolución y mínima aberración. He señalado ya que esto es conveniente no sólo por la mejor estructura de alias sino también por proporcionar proyecciones más uniformes.

Podría creerse que con la elección del diseño finalizaría la etapa de diseño propiamente dicha, pero todavía faltaría un último paso, asignar las variables físicas a los factores (columnas de la matriz de diseño). En este paso la interacción entre el estadístico y el investigador es crítica.

Este algoritmo consigue que dado un diseño 2^{k-p} en el que por tanto intervienen K factores asignar las K variables de forma que si los conocimientos del investigador previos al experimento resultan ciertos este se vea compensado con un diseño proyección lo más favorable posible, es decir con la máxima resolución y la mínima aberración posibles.

El algoritmo (implementado en programas de ordenador que están a disposición de los interesados proporciona una secuencia de factores a los que se deben asignar las variables en orden de menos a más importantes, según los conocimientos "a priori".

El algoritmo funciona con cualquier diseño factorial fraccional con las variables a dos niveles, aunque como ya hemos visto los diseños con máxima resolución y mínima aberración son los más adecuados para proyectar. Garantiza que si las l variables que resultan no significativas al analizar el diseño habían sido asignadas a los l primeros factores proporcionados por el algoritmo se obtendrá un diseño que tendrá resolución máxima y aberración mínima entre todos los que se podrían obtener al proyectar el diseño original sobre $R-l$ variables. También garantiza que si las l variables están entre las presuntas "a priori" nunca se obtendrá un fraccional replicado (aunque en este

pero puede que exista otro $2^{(n-1)-(r-1)}$ obtenido por proyección con mejor resolución o aberración). Si l es mayor que p siempre se obtendrán diseños factoriales completos replicados.

2.7.2 Desarrollo

La figura 2.3 contiene el diagrama de flujo del algoritmo. Las casillas están numeradas. A continuación se detallan los pasos, utilizando la notación introducida en la sección 2.5.

1.- Hallar la matriz relación de definición:

A partir de los generadores, expresados en forma de una matriz con p filas (generadores) y k columnas (factores) formada por ceros y unos.

A base de sumar binariamente todas las combinaciones posibles de esas p filas se obtiene la matriz de $(2^p-1) \times k$ que representa la relación de definición.

2.- Sumar las filas:

Sumar algebraicamente (en base 10) los ceros y unos de cada fila para hallar la longitud de cada una de las palabras de la relación de definición.

3.- Ver si todas las columnas suman lo mismo.

Si todas las filas suman lo mismo, como todas las columnas deben sumar lo mismo (propiedad de las relaciones de definición) al eliminar cualquier factor se elimina el mismo número de palabras cortas. Por tanto ir a 12.

Si no todas las columnas suman lo mismo ir a 5.

4.- Ordenar las filas de menor a mayor suma de modo que la palabra más corta quede en la fila 1 y la más larga en la 2^p-1 .

5.- Detectar que columnas tienen más unos en las filas con mínima suma.

Se trata de ver que factores intervienen en el mayor número de palabras cortas.

Eliminando uno de ellos obtendríamos el diseño con mayor resolución y menor aberración posible ya que habríamos eliminado el mayor número posible de palabras cortas de la relación de definición.

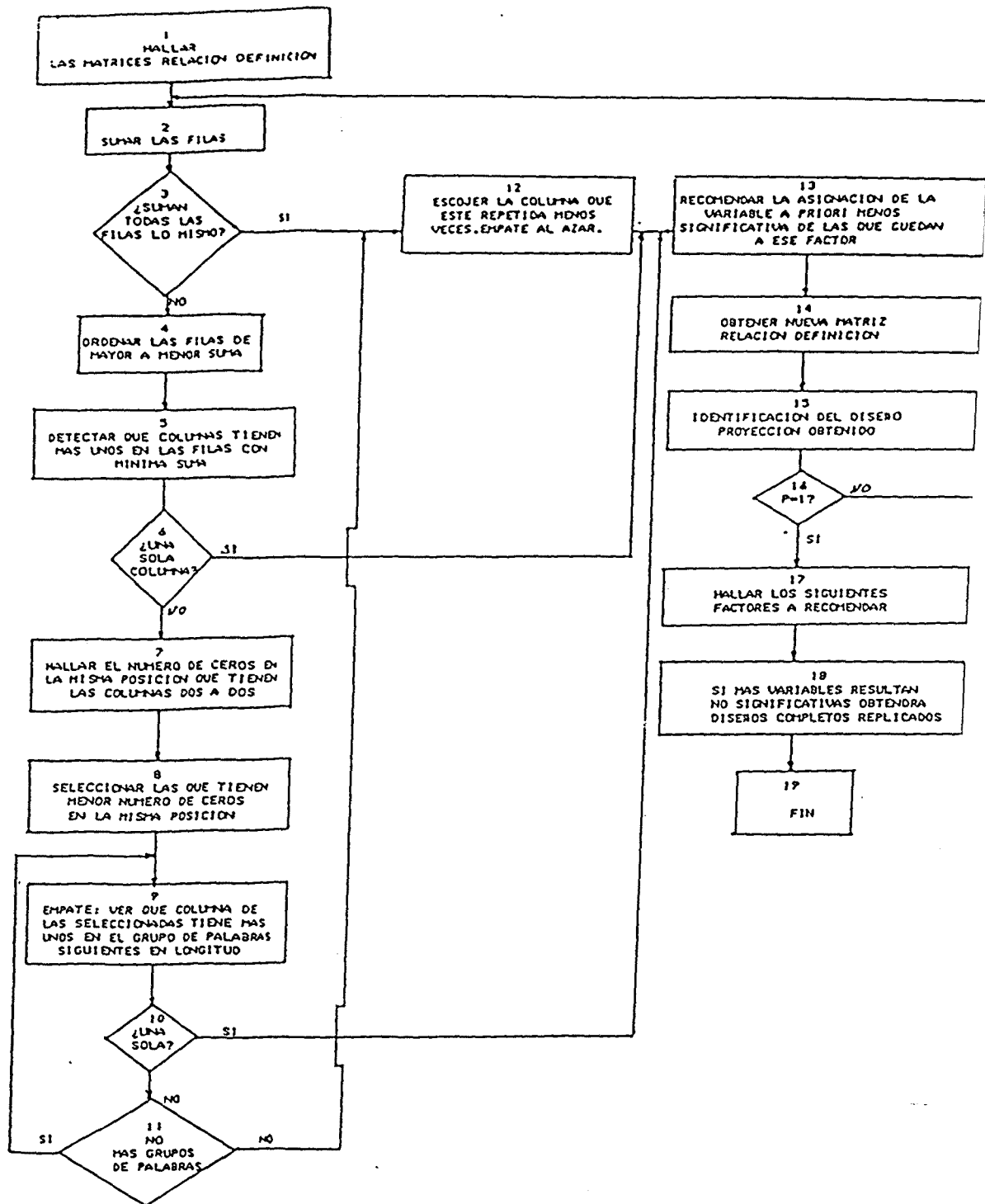


Figura 2.3. Diagrama de flujo del algoritmo.

Si el factor es único, debe ser elegido (paso 6) si hay varios hay que ver cual de ellos es mejor (pasos 7,8, y 9).

- 6.- Ver si la columna (factor) que tiene más unos en las filas con menor suma es única.

Si lo es ir a 13.

Si no lo es ir a 7.

- 7.- Hallar el número de ceros en la misma posición que tienen las columnas dos a dos en las palabras más cortas.

En este paso se averigua cual de las columnas que tenían mayor número de unos en las palabras más cortas es mejor eliminar primero.

La mejor columna es aquella que al ser eliminada produzca una relación de definición que contenga una columna con más unos en las palabras más cortas.

Se escogen, por tanto, las columnas con menor número de ceros en la misma posición (mayor número de unos en posiciones diferentes).

Nótese que las columnas escogidas (siempre serán como mínimo dos) siempre estarán entre las que tienen mayor número de unos en las palabras más cortas, pero hay que mirar los ceros que tienen en la misma posición con todas las columnas.

- 8.- Seleccionar las columnas que tienen el menor número de ceros en la misma posición.

Esto producirá que al eliminarse una de esas columnas (en 9 y 10 se decide cual) el diseño obtenido sea el mejor preparado para una nueva proyección.

- 9,10,11.- Detectar que columna de las seleccionadas tiene más unos en el conjunto de palabras que siguen en longitud.

Estos pasos están destinados a minimizar la aberración. Encontrar la columna que elimina más palabras cortas y por tanto menos largas. Asimismo ayuda a que los diseños de futuras proyecciones tengan mayor resolución.

Si al llegar a un conjunto de palabras, hay una sola columna con mayor número de unos ir a 13

Si el número de unos de varias columnas es el mismo en

todas los conjuntos de palabras ir a 12.

- 12.- Escoger la columna que esté repetida menos veces.

Al llegar aquí se tiene un conjunto de columnas igualmente buenas para ser eliminadas. El nuevo criterio para elegir una es que las columnas estén repetidas lo mínimo posible.

Ello minimiza el riesgo de que si un factor inesperado resulta inerte el diseño proyección sea un fraccional replicado.

Si están repetidas el mismo número de veces las columnas son equivalentes (en cuanto a proyección) y se escoge una al azar.

- 13.- Recomendar la asignación de la variable menos significativa (presumiblemente) de las que quedan al factor detectado.

- 14.- Obtener la matriz relación de definición del diseño proyección obtenido al eliminar esa variable.

La matriz se obtiene borrando de la matriz anterior la columna elegida y todas las filas en las que esta columna tenía unos (Box Hunter 1961).

- 15.- Identificación del diseño proyección obtenido.

Se halla la nueva K (número de factores que restan). La nueva p, grado de fraccionamiento. Y la resolución.

- 15.- ¿Es el diseño obtenido un 2^{k-1} ?

Si lo es ir a 17.

Si no lo es ir a 2 (recomenzar).

- 17.- Hallar los factores siguientes a recomendar.

Al llegar aquí $p=1$ y por tanto sólo resta por recomendar una variable que puede ser una cualquiera de las que aparecen en la única palabra que resta de la relación de definición.

- 18.- Señalar que a partir de entonces si más variables resultan no significativas se obtendrán diseños completos replicados.

- 19.- FIN

El algoritmo se completa con un programa que una vez realizado el experimento y averiguado qué factores son realmente inertes proporciona el diseño proyección y su relación de definición.

2.7.3 Ejemplo

Como ejemplo veamos un 2^{9-4}_{III} con generadores $G=123$, $G=145$, $G=678$ y $G=269$. Este diseño no es el de máxima resolución, pero resulta conveniente como ejemplo ya que es un diseño relativamente pequeño, pero que cubre la mayor parte de los pasos del algoritmo.

Pasos 1, 2 y 3: Hallar la matriz relación de definición, sumar las filas y ver si todas suman lo mismo. Ver tabla 2.7.

factores palabras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Suma de las filas
Generadores	1	1	1	0	0	0	0	0	0	3
	1	0	0	1	1	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	1	1	1	0	3
	0	1	0	0	0	1	0	0	1	3
Productos de dos	0	1	1	1	1	0	0	0	0	4
	1	1	1	0	0	1	1	1	0	6
Generadores	1	0	1	0	0	1	0	0	1	4
	1	0	0	1	1	1	1	1	0	6
Productos de tres	1	1	0	1	1	1	0	0	1	6
	0	1	0	0	0	0	1	1	1	4
Generadores	0	1	1	1	1	1	1	1	0	7
	0	0	1	1	1	1	0	0	1	5
Producto de cuatro Generadores	1	0	1	0	0	0	1	1	1	5
	1	1	0	1	1	0	1	1	1	7
	0	0	1	1	1	0	1	1	1	6

Tabla 2.7: Matriz relación de definición de un diseño 2^{9-4}

Pasos 4 y 5: Ordenar las filas menor a mayor suma y detectar las columnas con más unos en las filas con menor suma. Ver tabla 2.8.

factores palabras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Suma de las filas
	1	1	1	0	0	0	0	0	0	3
	1	0	0	1	1	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	1	1	1	0	3
	0	1	0	0	0	1	0	0	1	3
	0	1	1	1	1	0	0	0	0	4
	1	0	1	0	0	1	0	0	1	4
	0	1	0	0	0	0	1	1	1	4
	0	0	1	1	1	1	0	0	1	5
	1	0	1	0	0	0	1	1	1	5
	1	1	1	0	0	1	1	1	0	6
	1	0	0	1	1	1	1	1	0	6
	1	1	0	1	1	1	0	0	1	6
	0	0	1	1	1	0	1	1	1	6
	0	1	1	1	1	1	1	1	0	7
	1	1	0	1	1	0	1	1	1	7

Tabla 2.8: Matriz relación de definición con las filas ordenadas de menor a mayor

Las columnas 1, 2 y 6 tienen dos unos en las filas con suma 3. El resto tienen un solo uno.

Paso 6 ¿Una sola columna?

No, ir a 7.

Paso 7 y 8: Hallar el número de ceros en la misma posición que tienen las columnas dos a dos, en las filas con mínima suma. Y seleccionar las que tienen menor número de ceros. Ver tablas 2.9 y 2.10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1

Tabla 2.9: Palabras de longitud tres

Factores	Factores								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	/	1	2	2	2	0	1	1	1
2		/	2	2	1	1	1	1	2
3			/	2	2	1	2	2	2
4				/	3	1	2	2	2
5					/	2	2	2	2
6						/	2	2	2
7							/	3	2
8								/	2
9									/

Tabla 2.10: Número de ceros en común en las palabras de longitud tres entre los factores dos a dos.

Las columnas 1 y 6 no tienen ningún cero en la misma posición y por tanto entre ellas ha de estar la elegida.

Obsérvese que si se eliminan los factores 1 y 6 desaparecen todas las palabras de longitud tres, cosa que no sucede con ninguna otra combinación de dos factores.

Pasos 9, 10 y 11: Ver que columna de las seleccionadas tiene más unos en los conjuntos de palabras siguientes en longitud. Ver tablas 2.11 y 2.12.

Como empatan en todos los conjuntos de palabras ir a 12.

1	6	longitud	factor	
			long.	
0	0			
1	1	4		
0	0			
0	1			
1	0	5	4	1 1
1	1			
1	1	6	5	1 1
1	1			
0	0		6	3 3
0	1			
1	0	7	7	1 1

Tabla 2.11: Comparación de los factores 1 y 6.

Tabla 2.12: Número de unos en las palabras con la misma longitud

Paso 12: Escoger la columna que esté repetida menos veces.

Como puede verse en la matriz relación de definición inicial, ninguna de las dos columnas está repetida. Por tanto, se escoge una al azar. Por ejemplo la 1.

Paso 13: Se recomienda que se asigne la variable previsiblemente menos significativa al factor 1.

Paso 14: Obtención de la matriz relación de definición del diseño resultante. Ver tabla 2.13.

	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1

Tabla 2.13: Relación de definición del diseño 2^{6-3}_{III} resultante

Paso 15: Identificación del diseño obtenido.

Hay 8 factores

Hay 7 palabras en la relación de definición

Hay 2 palabras de longitud 3

Por tanto es un 2_{III}^{6-3}

Paso 16: $p=3$ por tanto, habría que ir a 2.

Prosiguiendo el algoritmo indicaría que se asignasen las variables a los factores tal como indica la tabla 2.14.

Si se hubiesen asignado las variables presumiblemente menos significativas a por ejemplo 3,4 y 5 en lugar de a 1,6 y 2 y las sospechas iniciales hubiesen resultado ciertas, se habría obtenido un 2^{6-2}_{III} replicado en lugar de un 2^{6-1}_{VI} . Con la consiguiente y notable pérdida en el patrón de confusión.

variables en orden de significación a priori	factor	diseño obtenido si esa variable y todas las anteriores resultan inertes
menos	1	2^{10-3} III
siguiente	6	2^{7-2} IV
siguiente	2	2^{6-1} VI
siguientes	a cualquiera de 3,4,5,7, 8 y 9	2^5

Tabla 2.14: Asignación de variables a factores de acuerdo con el algoritmo

2.8 CONSIDERACIONES

Sin utilizar el algoritmo podría ser que al obtener dos factores no significativos el diseño proyección fuese un fraccional replicado. Veamos porque, utilizando de nuevo la notación matricial.

El número de columnas diferentes (con 0 y 1) que se pueden obtener cumpliendo la condición d) del apartado cuatro es $2^n - 1$ por tanto siempre que en un diseño se cumpla $k > 2^n - 1$ habrán columnas repetidas. La supresión de dos columnas repetidas produce un fraccional replicado.

En el caso de que $k \leq 2^n - 1$ no se puede asegurar cual es el número mínimo de factores que hay que eliminar para correr el riesgo de obtener fraccionales replicados. Lo que si es seguro, es que ese riesgo existirá cuando el número de factores eliminados l sea tal que cumpla que

$$k - l > 2^n - 1 - l \quad (2.5)$$

Aún partiendo de un diseño con máxima resolución y mínima aberración, no se puede garantizar que al eliminar el mejor factor posible el diseño proyectado tenga máxima resolución y mínima aberración.

2.9. CONCLUSIONES

En la industria es muy frecuente utilizar diseños altamente fraccionados. Entonces resulta muy importante utilizar los conocimientos "a priori" en la fase de diseño (asignar las variables a los factores) de modo que si las conjeturas iniciales resultan ciertas el experimentador no se vea penalizado en la fase de análisis.

El algoritmo propuesto resuelve la asignación de las variables del experimento a los factores del diseño para el caso de diseños factoriales con los factores a dos niveles (2^k -E).

CAPITULO 3

3.1 INTRODUCCION

En la sección 1.1 se ha visto que actualmente la calidad es un problema de diseño y que como señalan Taguchi y Phadke (1984) la causa tecnológica más importante para explicar la alta calidad y el bajo coste de los productos japoneses hay que buscarla en el énfasis dado a la optimización del diseño de productos y procesos y a las herramientas estadísticas de experimentación y simulación empleadas en dicha optimización.

Como señala Taguchi (1980), los costes que un producto causa a la sociedad una vez en servicio son proporcionales a la variabilidad de las características funcionales del mismo. Un producto de calidad es aquel en que las características funcionales se mantienen en el valor deseado y con mínima variabilidad. Siguiendo esta idea una medida del grado de variación en el funcionamiento es la pérdida esperada. Supóngase que Y es el valor de la característica funcional de interés y que el valor objetivo es T . El valor de Y se puede desviar de T en cada unidad de producto concreto. En términos estadísticos Y es una variable aleatoria, con una distribución de probabilidad. Las variaciones de Y causan pérdidas al usuario del producto.

Si se supone que estas pérdidas son una función cuadrática (figura 3.1). La función de pérdidas cuadrática más sencilla sería:

$$l(Y) = K(Y-T)^2 \quad (3.1)$$

La esperanza matemática de (3.1) con respecto a la distribución de Y proporciona la pérdida esperada

$$L = E(l(Y)) = K(E(Y-T)^2) \quad (3.2)$$

Como quiera que la distribución de Y tendrá una media (\bar{n}) que puede o no coincidir con el valor objetivo y una desviación tipo σ , la pérdida esperada será proporcional al error medio cuadrático

$$L = K(M.S.E.) = (\sigma^2 + (\bar{n}-T)^2) K \quad (3.3)$$

Es por ello que el producto infringe menos pérdidas (tiene más calidad) cuando $\bar{n} = T$ y σ es lo menor posible.

También se ha discutido (sección 1.1) que a la variabilidad se la denomina ruido y que en el funcionamiento de un producto actúan varios tipos de ruido.

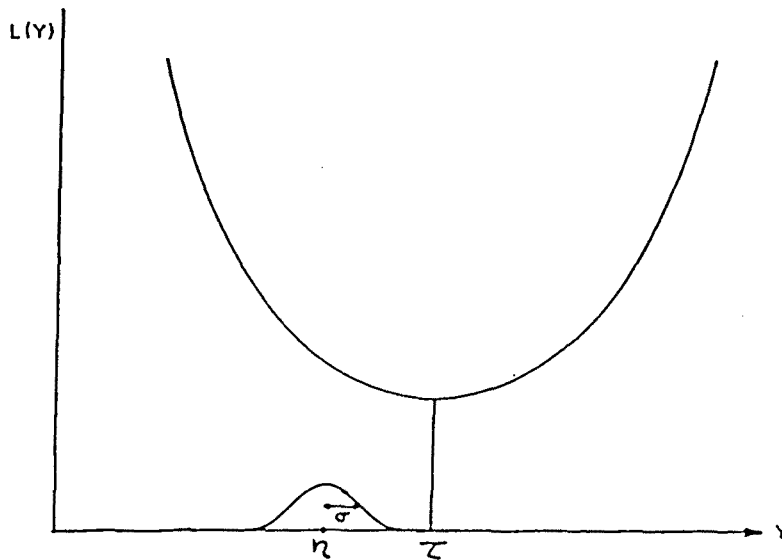


Figura 3.1: Función de pérdidas

Intentar eliminar las causas de los diversos tipos de ruido es un problema si no imposible si muy costoso. Existe otro sistema más barato : Situar los valores de los factores de control (se fijan en la etapa de diseño) de tal manera que se minimice la sensibilidad al ruido. Esto se consigue hallando la influencia de cada factor en la variabilidad de la respuesta.

Supóngase que la respuesta de interés (y) depende de dos variables, x una variable que se puede controlar (factor de control) y de z una variable que no se puede controlar (factor ruido).

$$y = f(x, z) \quad (3.4)$$

Si ahora se realiza un experimento situando el valor de la variable x a dos niveles (x^- y x^+) y se observa la respuesta, la variabilidad de la misma a los dos niveles de x depende enormemente de la forma de f . Supónganse los siguientes ejemplos

a) El nivel de y depende del nivel de x , pero la variabilidad de y no depende de x .

Esto sucedería si por ejemplo:

$$y = ax + z \quad (3.5)$$

donde a : constante
 x : variable de control que toma dos valores x^- y x^+
 z : variable aleatoria, $Z \sim N(0, \sigma^2)$

Entonces

$$\begin{aligned} E(y) &= a x \\ V(y) &= \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

El experimentador observaría teóricamente que x afecta al nivel de y pero no a su variabilidad, queda reflejado en la figura 3.2

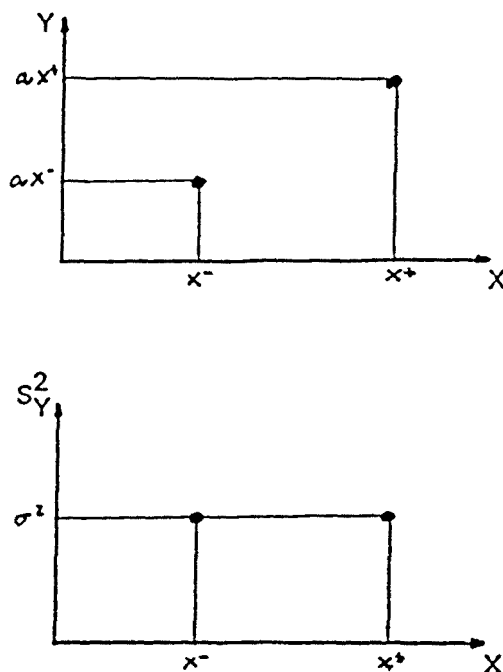


Figura 3.2: Resultado teórico del experimento cuando $y = ax + z$

b) La variabilidad de y depende del nivel de x pero el nivel de y no.

Esto sucedería si por ejemplo:

$$y = a x z - a x \quad (3.7)$$

donde a : constante
 x : variable de control que toma dos valores x^- y x^+
 z : variable aleatoria $N(1, \sigma^2)$

Entonces:

$$\begin{aligned} E(Y) &= a x E(Z) - a x = 0 \\ V(Y) &= a^2 x^2 \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

El experimentador observaría teóricamente que x afecta a la variabilidad pero no al nivel, queda reflejado en la figura 3.3

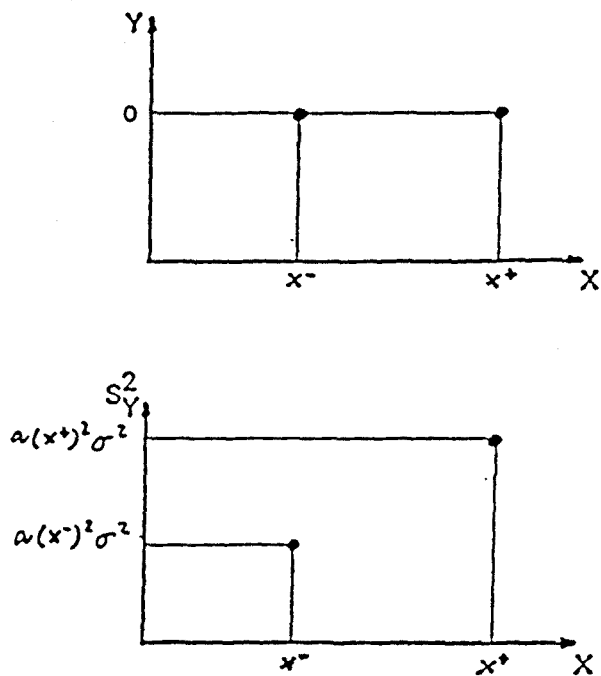


Figura 3.3 Resultado teórico del experimento cuando $y = axz - ax$

c) El nivel y la variabilidad de y dependen del nivel de x .

Esto sucedería si por ejemplo

$$y = a x z + a x \quad (3.9)$$

donde a : constante
 x : variable de control que toma dos valores x^- y x^+
 z : variable aleatoria $Z \sim N(0, \sigma^2)$

Entonces

$$\begin{aligned} E(y) &= ax E(Z) + ax = ax \\ V(y) &= a^2 x^2 V(Z) = a^2 x^2 \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

El experimentador observaría teóricamente que x afecta al nivel y a la variabilidad de la respuesta, queda reflejado en la figura 3.4

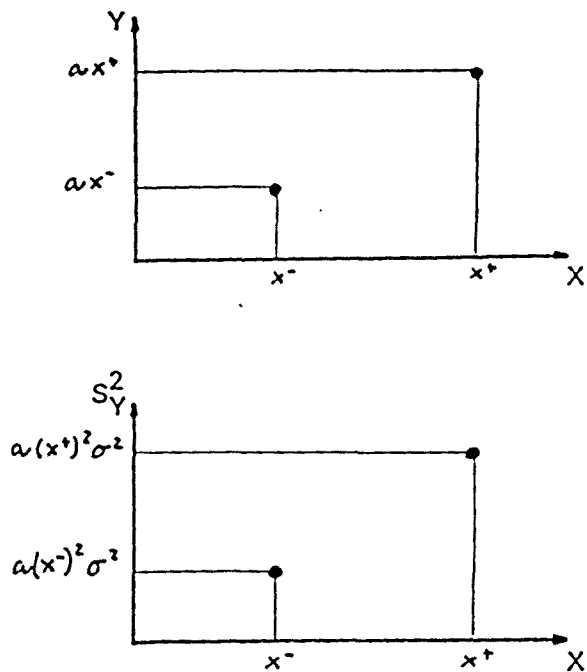


Figura 3.4 Resultado teórico del experimento cuando $y = axz + ax$

Los tres casos anteriores eran suponiendo que los valores x^- y x^+ eran constantes, se podían fijar con precisión. Supóngase que esto no es así, sino que son variables aleatorias, cabría también entonces distinguir varios casos: que por ejemplo la variabilidad de x sea la misma en los dos niveles

$$\begin{aligned} x^- &\sim N(\mu_1, \sigma^2) \\ x^+ &\sim N(\mu_2, \sigma^2) \end{aligned}$$

Si la respuesta depende de x en forma lineal

$$y = a x \quad (3.11)$$

entonces

$$\begin{aligned} E(y) &= a E(x) \\ V(y) &= a^2 \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Con lo que el experimentador observaría teóricamente que la variable x afecta el nivel pero no la variabilidad. Figura 3.5

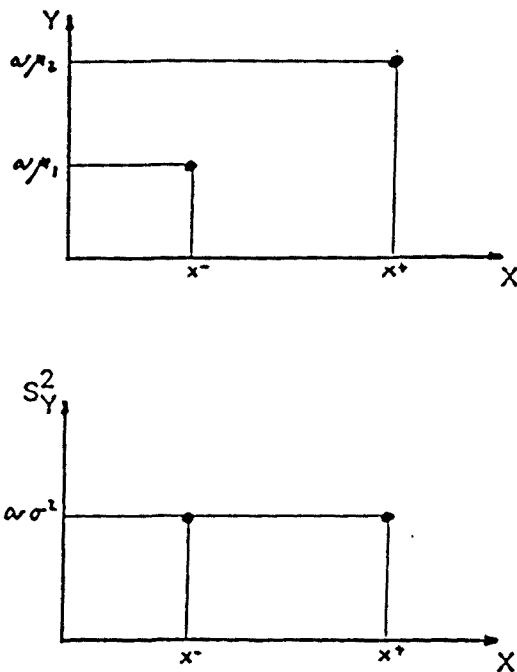


Figura 3.5 Resultado teórico del experimento cuando $y = ax$

Obsérvese que lo que observa el experimentador es igual al caso (a) anterior.

Sin embargo si la relación entre x e y fuese cuadrática

$$y = a x^2 \quad (3.13)$$

entonces

$$\begin{aligned} E(y) &= a E(x^2) \\ &= a(\sigma^2 + \mu^2) \end{aligned} \quad (3.14)$$

con $\mu = \mu_1$ para x^- y $\mu = \mu_2$ para x^+

ya que $((x-\mu)/\sigma)^2$ sigue una distribución de chi-cuadrado con un grado de libertad, por tanto

$$E(x-\mu/\sigma)^2 = 1 \quad (3.15)$$

de donde

$$E(x^2) = \sigma^2 + \mu^2 \quad (3.16)$$

y para la varianza

$$\begin{aligned} V(y) &= a^2 V(x^2) \\ &= 2\sigma^4 + 4\mu^2\sigma^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

con $\mu = \mu_1$ para x^- y $\mu = \mu_2$ para x^+ ya que

$$V(x-\mu/\sigma) = 2 \quad (3.18)$$

$$\text{de donde } V(x^2) = 2\sigma^4 + 4\mu^2\sigma^2 \quad (3.19)$$

El experimentador observaría teóricamente que x afecta tanto al nivel como a la variabilidad de Y . Figura 3.6

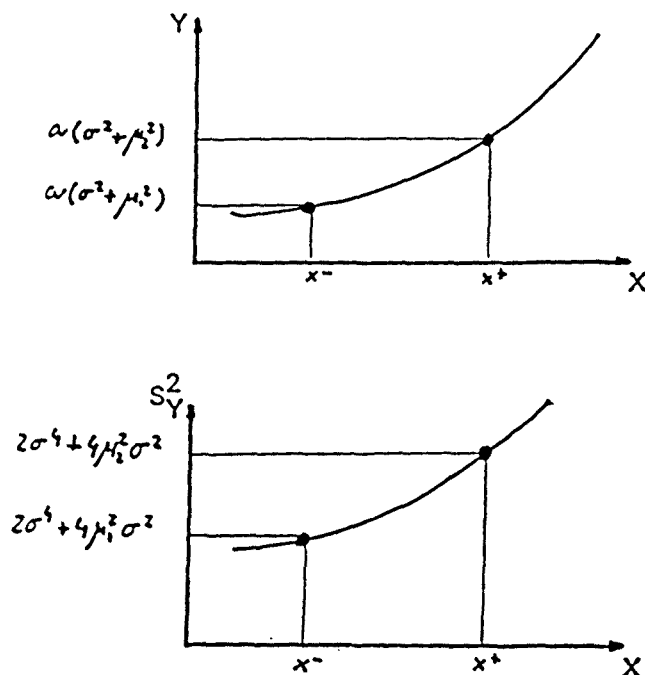


Figura 3.6 Resultado del experimento cuando $y = ax^2$

Obsérvese que es similar al caso c anterior.

También se podría dar el caso de que la variabilidad de x fuese diferente a nivel bajo que a nivel alto, esto es frecuente en aparatos de medida. Y entonces también se podría considerar que el efecto de x sobre el nivel fuese lineal o cuadrático etc.

Se pueden dar diversas combinaciones de los casos anteriores, y además téngase presente que, en general, las funciones serán mucho más complicadas y englobarán varios factores de control (x) y varios factores ruido (z).

Con esto queda claro que cuando en lo sucesivo hable de factores que afectan la variabilidad, hay que entender que la respuesta tiene diferente variabilidad en los distintos niveles del factor, pero ello es como consecuencia de las relaciones entre el factor, el ruido y la respuesta y no

porque el factor "per se" haga cambiar la variabilidad.

En el momento de diseñar un producto o proceso hay que decidir el valor de un gran número de variables (ejemplos: a) en un sistema electrónico hay que decidir valores de resistencias, condensadores, transistores, etc. b) en sistemas mecánicos hay que decidir longitudes, diámetros, materiales, etc.) y hay que tener en cuenta como cada uno de ellos afecta a:

- i) el nivel de la respuesta
- ii) la variabilidad de la respuesta

Siempre con el objetivo de conseguir diseñar un producto que opere en el valor deseado y con la mínima variabilidad posible.

La utilización en la industria de diseños factoriales, para detectar cómo las variables afectan al nivel de la respuesta, aunque no masiva comienza a ser habitual (Para ello han tenido que transcurrir 50 años desde que R. A. Fisher (1922 y 1926) y F. Yates (1937) los introdujeron).

Taguchi (1979) introdujo el estudio de los efectos sobre la variabilidad de la respuesta, y su método está siendo utilizado con gran éxito en la industria japonesa. En este capítulo propongo un método más eficiente que el de Taguchi para estudiar estos efectos.

3.2 HOMOCEASTICIDAD EN EL CALCULO DE LOS EFECTOS SOBRE EL NIVEL DE RESPUESTA

Siempre que se aplica el método de los mínimos cuadrados ordinarios para ajustar un modelo lineal (en los parámetros) del tipo siguiente:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i \quad (3.20)$$

Se está asumiendo implícitamente que los errores (ϵ_i) son independientes y si además se realizan pruebas F se asume que siguen una ley Normal con media cero y varianza constante σ^2 . A esta última condición de que la varianza sea constante se le llama homocedasticidad de los errores.

La homocedasticidad en los errores es un reflejo de la estabilidad de la varianza de la variable dependiente (y) en el rango de las variables independientes (x).

Si se aplica el método de los mínimos cuadrados ordinarios a datos que no cumplen la condición de homocedasticidad, las estimaciones de los parámetros siguen siendo insesgadas, pero no tendrán mínima varianza.

Frente a este problema hay dos soluciones:

a) Aplicar los mínimos cuadrados generalizados. Es un método que tiene en cuenta en la estimación que las varianzas no son constantes y proporciona estimaciones de los parámetros que son insesgadas y con mínima varianza. Una buena discusión sobre el tema aparece en Draper y Smith (1981).

b) Transformar la variable independiente. Mediante una transformación se puede frecuentemente solventar el problema y conseguir que la variable transformada $Z = f(y)$ tenga varianza constante. (Box, Hunter y Hunter 1978, Draper y Smith 1982, Box y Cox 1964).

En particular y en el caso más frecuente de que la desviación tipo de y , σ_y , sea proporcional a alguna potencia de su media μ

$$\sigma_y = K\mu^\alpha \quad (3.21)$$

se puede conseguir estabilizar la varianza mediante una transformación del tipo

$$Z = y^\lambda \quad (3.22)$$

donde se debe escoger adecuadamente según el valor de α

Considérese la figura 3.7 donde y es la variable original, Z la variable transformada y σ_y , σ_z representan

sus respectivas desviaciones tipo

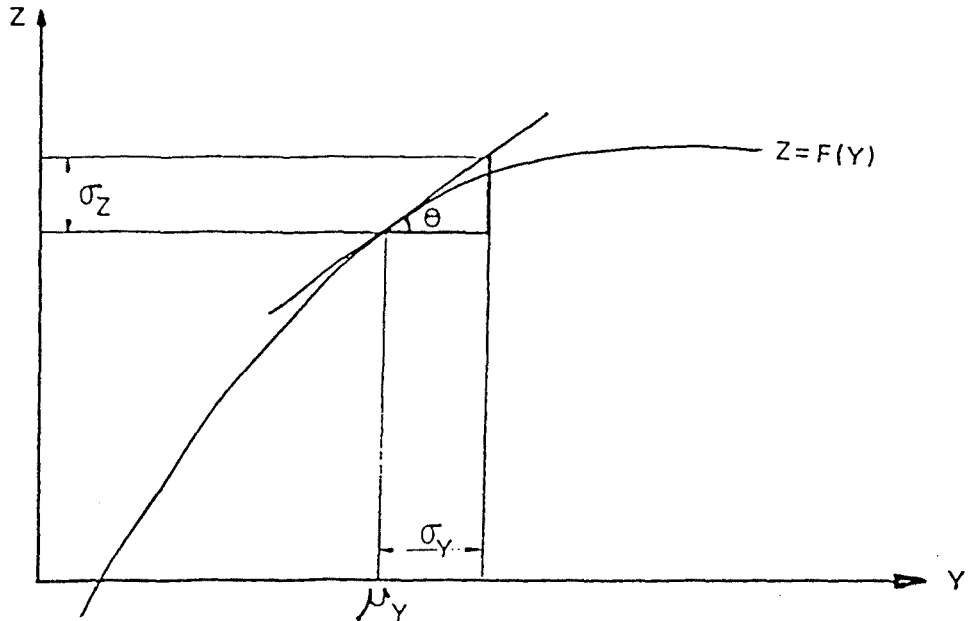


Figura 3.7: Efecto sobre la variabilidad de transformación $Z=f(y)$

En primera aproximación lineal, a partir de la figura 3.7 se ve que

$$\sigma_z = \sigma_y \operatorname{tg} \theta = \sigma_y f'(\mu_y) \quad (3.23)$$

utilizando las igualdades (3.22) y (3.23)

$$\sigma_z = \sigma_y \mu^{-\alpha} \quad (3.24)$$

y sustituyendo (3.21) se obtiene que

$$\sigma_z = K \mu^{\alpha-1} \quad (3.25)$$

con lo que, si se escoge

$$\lambda = 1 - \alpha \quad \text{para } \alpha = 1$$

transformación log para $\alpha = 1$

Se obtiene una varianza constante e igual a

$$\begin{aligned} \sigma_z &= K & \text{para } \alpha &= 1 \\ \sigma_z &= K & \text{para } \alpha &= 1 \end{aligned}$$

Existen diversos métodos (gráficos, máximo verosímiles, etc) para estimar α y obtener consecuentemente λ .

El caso del diseño de experimentos no es una excepción y como quiera que al estimar los efectos (por el método que sea) de hecho se está ajustando un modelo por mínimos cuadrados, es conveniente tener presente la necesidad de realizar una transformación cuando la varianza de la respuesta no sea constante.

En este capítulo se estudia la utilización de diseños factoriales para determinar los efectos de los factores sobre la dispersión. Es por ello que aunque se haga una transformación para estabilizar la varianza en el estudio del efecto de los factores sobre la media, para estudiar la variabilidad hay que estudiar los datos sin transformar.

3.3 REPLICAS. FACTORES RUIDO.

Para poder estudiar los efectos de los factores sobre la variabilidad es necesario tener datos sobre la variabilidad de la respuesta en cada punto experimental, y esto se consigue por medio de réplicas.

Esta afirmación es, en principio, cierta a pesar de que recientemente Box y Meyer (1985) han propuesto un método que se comenta en la sección 3.6, que permite obtener una primera estimación (a nivel de sondeo) de los efectos sobre la dispersión aún sin disponer de réplicas.

A continuación expongo varios métodos de obtener estas réplicas, discutiendo sus ventajas e inconvenientes.

3.3.1 Réplicas genuinas

Es la manera ideal de estudiar los efectos de los factores sobre la variabilidad.

Por réplicas genuinas se entiende repetir varias veces un experimento en las mismas condiciones experimentales, de manera que estas repeticiones permitan estimar la desviación tipo en esa condición experimental. La aleatorización del orden de realización de los experimentos asegura, en general, que las réplicas sean genuinas.

Las réplicas permiten calcular:

- La media de la respuesta en cada condición experimental.
- La desviación tipo de la respuesta en cada condición experimental.

La media de la respuesta, permite determinar los efectos de las variables sobre el nivel, y la desviación tipo (secciones 3.4 y 3.5) permite determinar los efectos sobre la variabilidad.

Las réplicas genuinas proporcionan la mejor estimación de los efectos sobre la variabilidad. Sin embargo, para diseñar un producto o proceso que funcione en las condiciones deseadas con mínima variabilidad, puede que las réplicas genuinas no sean suficiente y haya que recurrir a los factores ruido (sección 3.3.3).

3.3.2 Réplicas obtenidas por proyección

En el capítulo 2 se ha discutido la propiedad proyectiva de los diseños factoriales. Se ha visto como si se detectaban factores que no afectaban la respuesta (factores inertes) se podía proyectar el diseño sobre los

restantes factores y obtener así un nuevo diseño con menor grado de fraccionamiento y/o replicado.

En el capítulo 2 se consideraban factores inertes los que no afectan al nivel de la respuesta; el concepto de factor inerte se puede generalizar a aquellos factores que no afectan en modo alguno a la respuesta, es decir, a los que no afectan ni al nivel ni a la variabilidad.

Si se pudiese en un diseño sin réplicas detectar factores inertes, luego por proyección se podría obtener un diseño replicado que permitiese detectar efectos sobre la variabilidad. Queda pues planteada la paradoja de tener que hallar qué factores son inertes (no afectan ni al nivel ni a la variabilidad) para poder obtener réplicas que permitan estimar efectos sobre la variabilidad. Frente a ella hay dos soluciones:

a) Utilizar el método propuesto por Box y Meyer (1985) descrito en la sección 3.6

Este método permite haciendo uso del principio del "effect sparsity" hallar en primera aproximación efectos sobre la variabilidad. En concreto permite detectar que factores son, con mayor probabilidad inertes, y a partir de ellos obtener el diseño proyección. Si realmente hay pocos factores no-inertes (effect sparsity) el diseño proyección será casi invariablemente un factorial completo replicado. A partir del cual se podrán estimar con mucha mayor precisión los factores que afectan la variabilidad. Siempre y cuando los factores sobre los que se haya proyectado sean realmente inertes, cosa que en todo caso requeriría una comprobación. Así pues el método a seguir sería:

1. Llevar a cabo el experimento (presumiblemente un factorial altamente fraccionado y sin replicar).
2. Estimar efectos sobre la media.
3. Estimar efectos sobre la variabilidad por el método de Box y Meyer.
4. Detectar factores inertes y si conviene realizar experimentos adicionales para comprobar que lo son.
5. Obtener el diseño proyección y si se obtiene un diseño replicado estimar los efectos sobre la variabilidad siguiendo el método descrito en el apartado 3.5.

Es obvio que el número de experimentos requerido para obtener las réplicas por proyección es muy inferior al que sería necesario para obtener réplicas genuinas, a pesar de los experimentos de comprobación.

b) Obtener dos réplicas del experimento para conseguir así una primera estimación de los efectos de los factores sobre la variabilidad y poder detectar los factores

prosumiblemente inertes. Se requeriría de nuevo una comprobación y el resto del método seguiría exactamente igual que en el caso a.

3.3.3 Réplicas obtenidas a través de factores ruido

Este sistema de obtener réplicas es una idea muy interesante propuesta por Taguchi (1979), y cuya utilidad práctica e influencia en los resultados son un tema de gran controversia [J. U. Lucas (1985), R. G. Easterling (1985), R. A. Freund (1985), J. J. Piguatiello y J. S. Ramberg (1985)]. Los dos subapartados que siguen son una serie de ideas algunas originales y otras recogidas de las fuentes anteriores y por supuesto de Taguchi, sobre este controvertido tema.

3.3.3.1 Descripción, importancia y utilidad.

Al diseñar un producto, el ideal sería encontrar valores de las variables (componentes) que afectan su funcionamiento que hagan que este funcione al nivel deseado y con la mínima variabilidad posible. Si además se puede conseguir esto con componentes de baja calidad, es decir con componentes que tengan una gran variabilidad alrededor de su valor nominal, se habrá conseguido crear un producto de alta calidad a partir de componentes de baja calidad.

Se ha visto en la sección 3.1 como los factores de control, dependiendo de la relación entre X e Y, los factores ruido y su propia variabilidad, podían afectar la variabilidad de la respuesta.

Taguchi propone incluir en el experimento una simulación del ruido. Para ello divide los factores en dos grupos, factores de control y factores ruido, los factores ruido pueden incluir además factores de control (representaría el caso de que un factor control variase alrededor de los niveles fijados) y entonces diseña un experimento para los factores de control. Con la particularidad de que para cada condición experimental de este diseño realiza un nuevo diseño con los factores ruido. Mide la respuesta y considera todas las respuestas obtenidas en el diseño de los factores ruido como réplicas de la condición experimental correspondiente del diseño de los factores de control. La metodología de experimentación queda representada en el ejemplo de la Figura 3.8

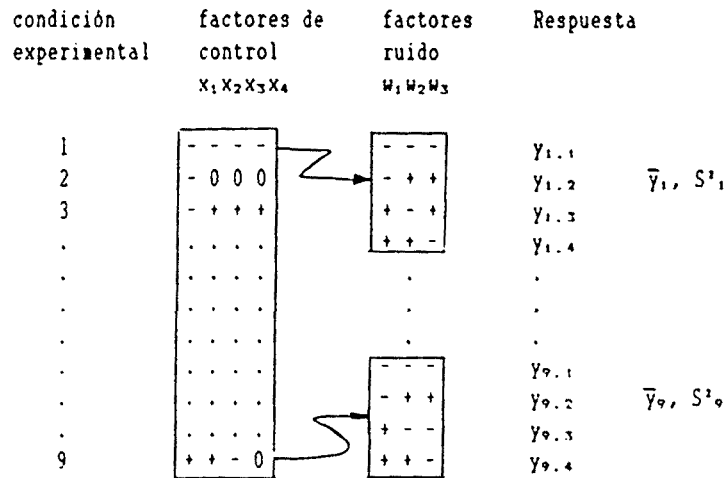


Figura 3.8: Ejemplo de un diseño incorporando los factores ruido.

La idea es pues simular el ruido de manera que se puedan diseñar productos más insensibles al mismo. Según Taguchi el método es especialmente útil para obtener productos finales de alta calidad a partir de componentes de baja calidad (alta variabilidad).

En mi opinión lo que hace el método es exagerar la variabilidad de los factores ruido para permitir una mejor detección de sus efectos. El peligro más evidente es el que se subestima el efecto de los ruidos no incluidos en el diseño. Por otro lado una de las ventajas de la idea es que al exagerar el ruido con un menor número de experimentos se puede estudiar el efecto del ruido producido por los factores considerados como tales, el problema es que si se incluyen muchos factores ruido el número de experimentos puede fácilmente ser enorme y si sólo se incluyen unos pocos nos hallamos ante el peligro descrito anteriormente.

3.3.3.2 Influencia en los resultados

A pesar de que el método no ha sido todavía exhaustivamente estudiado está claro que puede influenciar los resultados de varias formas.

En la sección anterior he apuntado el peligro de subestimar los efectos de los factores ruido no incluidos en el diseño.

Robert Easterling (1985) se pregunta, con justicia, que está midiendo la desviación tipo si las réplicas se han obtenido por este procedimiento.

Pignatiello y Ramberg (1985) publican un ejemplo en el que analizan los efectos sobre la variabilidad y el nivel de

una respuesta de cuatro factores B,C,D, y E y obtienen las réplicas con un factor ruido, O. Su diseño está representado en la figura 3.9.

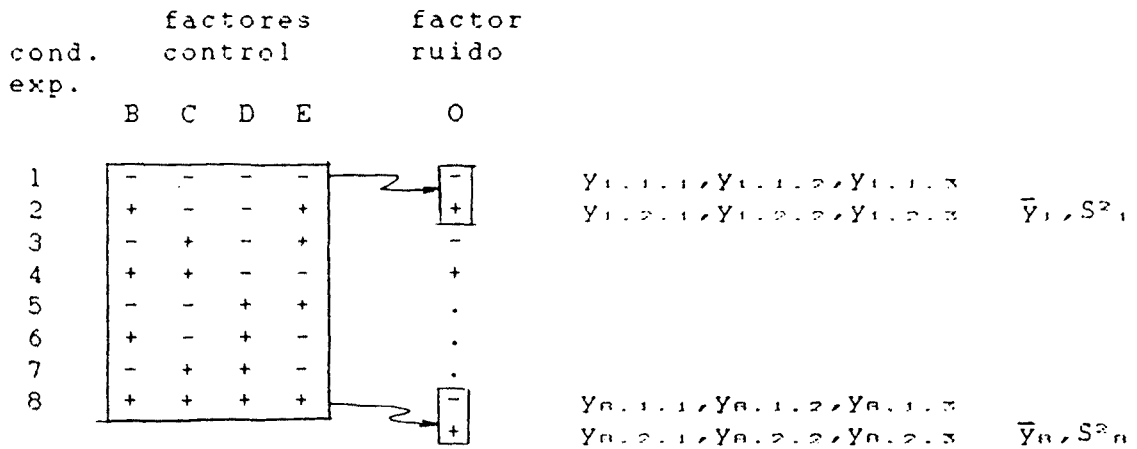


Figura 3.9: Ejemplo de Piguatiello y Ramberg.

Así pues lo que hacen es replicar cada condición experimental. (incluyendo el factor ruido, O) tres veces.

Pues bien al analizar los resultados obtienen lo siguiente:

a) Analizando las seis observaciones como si fuesen seis réplicas de un diseño 2^{4-1} en los factores B,C,D y E resulta:

Factores que afectan el nivel: B,C,E.
Factores que afectan la variabilidad: C,D,CD.

b) Analizándolo como si fuese un 2^{5-1} en los factores B,C,D,E y O replicado tres veces, resulta:

Factores que afectan el nivel: B,C,CD,E.
Factores que afectan la variabilidad: B,DO,BCO.

con lo cual es claro que estas pseudo-réplicas obtenidas al simular el ruido introducen una confusión de efectos considerable en el diseño. Un primer estudio sobre la naturaleza de las confusiones entre los efectos sobre el nivel y los efectos sobre la variabilidad aparece en Box y Meyer (1985).

3.4 METODO DE TAGUCHI

3.4.1 Descripción

El método de Taguchi para identificar los valores de los factores de control que optimizan el diseño se puede sumarizar en los cinco puntos siguientes:

a) Identificación de los factores de control, factores ruido y de sus niveles.

El diseñador del producto debe identificar las variables que presumiblemente afectan más a las características de interés, a qué niveles está previsto situarlas y qué otros niveles pueden resultar adecuados.

A continuación el diseñador debe identificar los factores ruido, que son los que se sospecha que influyen más en la variabilidad de las características de interés y decidir entre que niveles de estos factores ruido se desea que el producto sea insensible.

b) Construcción de las matrices de diseño (para los factores de control y para los factores ruido) y planificación del experimento.

Dependiendo de los objetivos del experimento Taguchi recomienda analizar diversas respuestas (ver sección 3.4.2). En ocasiones la respuesta a estudiar puede influir en el diseño escogido.

Taguchi (1976, 1977) recomienda la utilización de orthogonal arrays (sección 1.3.3) saturadas (solo permiten la estimación de efectos principales) como matrices de diseño. Rao (1947) creó la teoría general de las orthogonal arrays, Raghavarao (1971) proporciona diversos métodos para su construcción y Taguchi (1960) y Kackar (1982) proporcionan catálogos de las más utilizadas.

Taguchi recomienda la utilización de tres niveles para cada factor; escogidos de tal manera que cubran una amplia región experimental. La utilización de tres niveles permite estudiar no-linealidades.

La matriz de diseño del ruido debe ser también una orthogonal array, Taguchi (1976, 1977). Si los factores ruido y sus niveles se escogen adecuadamente una orthogonal array permitirá cubrir adecuadamente el espacio experimental del ruido.

Kackar (1985) explica el método recomendado por Taguchi para la elección de los niveles de los factores ruido.

El diseño experimental completo es una combinación de los dos diseños anteriores, tal como se indica en la Figura 3.8.

c) Realización del experimento y análisis de la respuesta.

El experimento se puede llevar a cabo de dos maneras: llevando a cabo físicamente los experimentos con prototipos del producto, o con pruebas simuladas por ordenador; esto sólo se puede llevar a cabo cuando la naturaleza de la función $y=f(x,z)$ es conocida y se puede evaluar o aproximar numéricamente.

Tras la realización del experimento se analizan los resultados. En la práctica Taguchi analiza los efectos de los factores de control sobre el nivel de la respuesta y sobre algún estadístico que incluye alguna medida de variabilidad (Taguchi y Phadke, 1984). En la sección siguiente (3.4.2) se discuten estos estadísticos.

Los resultados los analiza por medio de la aplicación de los mínimos cuadrados seguidos de un análisis de la varianza para obtener la significación de los efectos (ver sección 3.4.3).

d) Obtención de los niveles óptimos de los parámetros de control.

A la vista del análisis de los resultados y de los objetivos perseguidos en el experimento se deciden los niveles de los parámetros de control, que si las elecciones de factores, niveles y suposiciones hechas en el análisis han sido correctas, resultarán ser mejores que los iniciales.

e) Confirmación de que los nuevos niveles mejoran la respuesta

Nunca es posible saber si un modelo en el que se basan el diseño y análisis de un experimento es correcto. Es por tanto necesario confirmar que los nuevos niveles mejoran la respuesta. Ello es especialmente importante si, como Taguchi, se desprecian sistemáticamente las interacciones.

La comprobación se lleva a cabo a base de realizar nuevos experimentos utilizando los niveles, presumiblemente óptimos, de las variables hallados en el experimento. Si la respuesta en estos experimentos de comprobación es efectivamente mejor que la que se obtenía inicialmente, se puede dar por finalizada la investigación. Si por contra, la respuesta no demuestra mejoría o no es todavía suficientemente buena, se debe continuar la investigación recomenzando de nuevo por el paso (a) aunque aprovechando

ahora los conocimientos obtenidos en el experimento ya realizado.

3.4.2 Estadísticos a estudiar

Taguchi recomienda estudiar para cada respuesta un estadístico que sea una función de los factores de control tal que su optimización minimice la función de pérdidas. Este estadístico se utiliza entonces para comparar los diferentes niveles de los factores de control. A estos estadísticos los llama ratios señal-ruido, y asegura haber utilizado hasta 60 tipos diferentes de ratios señal-ruido para diferentes problemas.

En los casos prácticos que ha publicado lo que hace es estudiar dos estadísticos para cada respuesta, la media y un ratio señal-ruido. Y resuelve el problema de obtener el nivel deseado con la mínima variabilidad en dos etapas:

1. Determinar más factores que afecten el ratio señal-ruido y escoger los niveles que lo maximicen.

2. Seleccionar un factor que afecte el nivel pero que tenga un efecto lo menor posible en el ratio señal-ruido, y utilizarlo para llevar la respuesta al valor objetivo.

Taguchi recomienda diferentes ratios señal-ruido para diferentes problemas, entre ellos destacan los recomendados para cuando se desea obtener una respuesta lo menor posible, lo mayor posible y con un valor determinado, todas ellas por supuesto con la menor variabilidad posible.

a) Respuesta lo menor posible

En este caso la respuesta es continua y no-negativa y el valor objetivo es cero. La función de pérdidas crece al crecer la respuesta. El estadístico recomendado es:

estadístico a estudiar: $-10 \log_{10} (\Sigma \bar{y}_i^2 / n)$

b) Respuesta lo mayor posible

En este caso la respuesta es continua y su valor deseado es el mayor alcanzable. La función de pérdidas decrece al crecer la respuesta. El estadístico recomendado es el inverso del anterior:

estadístico a estudiar: $-10 \log_{10} (\Sigma (1/\bar{y}_i^2) / n)$

c) Respuesta en un valor específico

En este caso la respuesta es también continua, el

valor deseado es uno concreto y la función de pérdidas aumenta al alejarse del valor deseado en cualquier dirección. El estadístico recomendado es:

estadístico a estudiar: $10 \log_{10}(\bar{y}^2/s^2)$

Es conveniente notar que Kackar (1985) hace una distinción, que no hace Taguchi, entre los estadísticos a estudiar cuando la media y la desviación tipo son independientes y cuando son proporcionales.

Como se ve, la teoría que sustenta la utilización de los, llamados por Taguchi, ratios señal-ruido parece basarse en el estudio de un sólo estadístico; aunque en la práctica Taguchi estudia además la media.

3.4.3 Significación de los efectos

El estudio de los efectos sobre el nivel utilizando como estadístico la media en cada condición experimental, es un tema bien estudiado.

Sin embargo, el método utilizado por Taguchi tiene algunas peculiaridades. Veamos pues como halla la significación de los efectos cuando estos son sobre el nivel y cuando son sobre el ratio señal-ruido.

a) Sobre el nivel

En lugar de estudiar si la respuesta ha cambiado significativamente al cambiar el nivel de cada factor, Taguchi estudia la significación de las sumas de cuadrados por medio de una tabla de análisis de la varianza. Los dos métodos son, por supuesto, equivalentes; aunque obtener los efectos del cambio de nivel de los factores resulta más informativo. Con este último sistema, además de saberse si un factor afecta el nivel de la respuesta, se obtiene una estimación del cambio en la respuesta al cambiar el nivel de los factores.

b) Sobre el ratio señal-ruido

Después de calcular el ratio señal-ruido para cada condición experimental siguiendo las consideraciones del apartado anterior (3.4.2) Taguchi calcula las sumas de cuadrados correspondientes a cada factor. Esto se calcula

- Factor de corrección

$$S_m = \left(\sum_i \bar{h}_i \right)^2 / n \quad (3.26)$$

- Para cada factor

$$S_F = \frac{\sum_j^k (\sum_i^m n_{ij})^2}{k} - S_m \quad (3.27)$$

- La suma de cuadrados totales es

$$S_T = \sum_i^m n_i^2 - S_m \quad (3.28)$$

- La suma de cuadrados residual es

$$S_R = S_T - (\sum F S_F) \quad (3.29)$$

donde:

- n_{ij} : ratio señal-ruido para cada condición experimental

- n : nº de condiciones experimentales

- k : nº de niveles del factor F

- n_k : n/k

- f : nº de factores

Con ello compone una tabla de análisis de la varianza como la de la tabla 3.1.

Fuente de variación	grados libertad	Suma cuadrados	Cuadrados medios	F	contribución %
F_1	$k_1 - 1$	S_{F_1}	CMF_1	CMF_1/CMR	$100(S_{F_1}/S_T)$
.
.
F_f	$k_f - 1$	S_{F_f}	CMF_f	CMF_f/CMR	$100(S_{F_f}/S_T)$
Residual	$n + f - (k_1 + \dots + k_f + 1)$	S_R	CMR		
Total	$n - 1$	S_T			

Tabla 3.1: Análisis de la varianza. Ratio señal-ruido.

En general, el número de grados de libertad residual $(n+f - (k_1 + \dots + k_r + 1))$ es muy pequeño ya que suele utilizar orthogonal arrays saturadas. Esto hace que normalmente no aparezca ningún factor significativo, con lo que se ve obligado a añadir a la suma de cuadrados residual las de los factores con menor suma de cuadrados para aumentar el número de grados de libertad residuales.

Ello tiene el reconocido riesgo de subestimar la variación residual (Draper y Smith 1982).

Con todo las dos críticas más importantes a esta forma de analizar la significación de los ratios señal-ruido son:

a) Al analizar los efectos sobre el nivel Taguchi asume que las respuestas siguen una ley Normal, más exactamente que los errores siguen una ley Normal con media cero y varianza constante.

La asunción de varianza constante es probablemente falsa (habría que aplicar mínimos cuadrados generalizados para estudiar los efectos sobre el nivel) ya que si la varianza fuese constante no tendría sentido estudiar el efecto de los factores sobre la variabilidad. Dejando esto aparte, la asunción de normalidad que si que es razonable (teorema del límite central) para las respuestas implica que el ratio señal-ruido no siga una ley normal.

Por tanto no es adecuado utilizar un análisis de la varianza y realizar pruebas F cuando se sabe que la respuesta no cumple la condición de normalidad, Taguchi conoce este problema y por tanto considera los niveles de significación de la prueba F como orientativos.

b) En el procedimiento anterior a cada condición experimental le corresponde un ratio señal-ruido, calculado con todas las réplicas disponibles.

La precisión con la que se estima este ratio es pues mayor cuanto mayor es el número de réplicas y el procedimiento descrito no tiene en absoluto en cuenta este hecho.

Supóngase como ilustración que se está estudiando un factor (A) a dos niveles y que al replicar el experimento cuatro veces se obtiene:

	-	3.2, 4, 4, 4.8
A	+	3, 4.5, 5, 5.5

los estadísticos calculados son:

nivel	media(\bar{y})	S ²	10log ₁₀ (\bar{y}^2/S^2)
-	4	.43	15.71
+	4.5	1.17	12.39

Supóngase ahora que el mismo experimento sólo se replica dos veces y se obtiene :

A	-	3.53, 4.47
	+	3.75, 5.25

los estadísticos calculados coinciden exactamente con los anteriores.

Siguiendo el método de Taguchi la suma de cuadrados del ratio señal-ruido (10log₁₀(\bar{y}^2/S^2)) sería la misma y por tanto su significación sería la misma en los dos casos,

Sin embargo, es evidente que en el primer caso la diferencia de 2.32 unidades de ratio señal-ruido entre un nivel y otro es mucho más difícil que se haya producido por azar que en el segundo.

Una idea interesante que incluye Taguchi en sus análisis es la del porcentaje de contribución. Taguchi añade una nueva columna a la tabla de análisis de la varianza (ver Tabla 3.1) en la que sitúa el porcentaje que representa la suma de cuadrados de cada factor con respecto a la suma de cuadrados total.

Según él, y a pesar de que en ninguno de sus escritos incluye una justificación parece intuitivamente correcto, es una medida de la parte de variación total causada por cada factor. Si un factor describe solamente, digamos, el 1% de la suma de cuadrados total a pesar de que su nivel de significación estadístico pueda ser alto, no se considera como un factor que influencie apreciablemente el proceso. El porcentaje de contribución cuantifica la significación "física" de cada factor, mientras que la F cuantifica la significación estadística.

3.4.4 Comentarios

Comentaré en orden los tres puntos anteriores, el método (3.4.1), los estadísticos utilizados (3.4.2) y el sistema empleado para hallar la significación de los efectos (3.4.3).

a) Método

Considerando la creciente demanda de calidad en todos los productos y a todos los niveles, es muy importante el paso dado por Taguchi al considerar la calidad como el motivo prioritario del diseño. En este sentido la idea de diseñar experimentos para estudiar efectos sobre la dispersión además de sobre el nivel es un paso muy importante para diseñar productos y procesos de calidad.

El método propuesto por Taguchi es realmente nuevo y está lleno de excelentes ideas desde el punto de vista de la ingeniería de la calidad. Entre ellas cabe destacar la idea de diseñar productos y procesos de forma que operen al valor objetivo y con mínima variabilidad, lo cual introduce el concepto de que un producto o proceso tiene tanta más calidad cuanto más cercano está al objetivo, en lugar del concepto tradicional de limitarse a estar dentro de las especificaciones.

Otras dos ideas muy importantes son las de diseñar productos insensibles a las variaciones ambientales y la de diseñar productos que transmitan a la respuesta el mínimo de variación posible de sus componentes, de manera que se puedan utilizar componentes con gran variabilidad (baratas). Detrás de estas dos ideas está la utilización de los factores ruido y como se ha visto en la sección (3.3.3) su uso implica una confusión entre los efectos sobre la media y sobre la variabilidad, (además de la confusión ya existente debida al uso de diseños saturados) que debería ser objeto de estudios más detallados.

En líneas generales el método resulta innovador, ingenioso y de una gran importancia para el diseño de productos y procesos, lo que resulta más cuestionable son las técnicas estadísticas que utiliza en su puesta en práctica. En particular el limitarse a la utilización de orthogonal arrays cuando hay una gran variedad de diseños disponibles que en ocasiones podrían adaptarse mejor a las necesidades (diseños compuestos, diseños Box-Behnken, diseños Plackett-Burman, factoriales fraccionales, diseños Addelman etc) y no explotar la naturaleza secuencial de la investigación (sección 1.1.5). Los estadísticos que utiliza y la forma de hallar su significación, tampoco me parecen los más adecuados y aparecen más ampliamente comentados a continuación.

b) Estadísticos utilizados

La utilización de ratios señal-ruido ha sido muy discutida, con opiniones a favor (Phadke 1982, Freund 1985, Kacker 1985) y en contra (Lucas 1985). Otros autores sin pronunciarse en contra opinan que su uso indiscriminado no es convincente (Box 1985, Pignatiello y Ramberg 1985).

En mi opinión, y a pesar de la justificación teórica a

base de funciones de pérdidas propuesta por Kackar (1985) su utilización no está justificada y sus resultados resultan mucho más pobres que utilizando estadísticos para el nivel (la media aritmética de las muestras) y estadísticos para la variabilidad (el logaritmo de la desviación tipo muestral). Ver el ejemplo del capítulo 4.

En particular considérese el caso en el que lo que se desea es tener la respuesta en el valor objetivo y con la mínima variabilidad posible. El estadístico señal-ruido propuesto es $10 \log_{10}(\bar{Y}^2/S^2)$. Es evidente que si a lo largo de las condiciones experimentales la desviación tipo es proporcional a la media el ratio señal-ruido propuesto permanecerá constante en todas las condiciones experimentales, con lo que se obtendría la falsa impresión de que los factores son inertes. Si se usa en conjunción con un análisis sobre la media el procedimiento no tiene en ningún caso ventaja alguna sobre estudiar la media y la desviación tipo, y en algunos casos puede tener graves inconvenientes (véase el ejemplo del capítulo 4).

La utilización del ratio $-10 \log_{10}(EY^2/u)$ en el caso de desear una respuesta lo menor posible y con la menor variabilidad, me parece adecuada si se desea estudiar un solo estadístico, ya que incluye la distancia al objetivo y la variabilidad. El procedimiento no sería correcto si se estudiase como medida de la variabilidad y se utilizase conjuntamente con la media. En cualquier caso la única ventaja que comporta su utilización con respecto a estudiar dos estadísticos (media y desviación tipo) es la reducción del número de cálculos y por contra tiene el inconveniente de asignar por sí mismo unos pesos a la proximidad del nivel al cero y a la variabilidad, que no siempre tienen porque ser los deseados, ya que en todo caso deben depender de la forma de la función de pérdidas.

La discusión del ratio señal-ruido propuesto para cuando lo que se desea es una respuesta lo mayor posible con la mínima variabilidad, es totalmente análoga a la anterior ya que lo que se realiza es la transformación inversa de los datos obtenidos.

c) Sistema empleado para hallar la significación de los efectos.

Como se ha visto en el apartado 3.4.3 el sistema tiene dos problemas fundamentales.

Primero, se trata el ratio señal-ruido como si siguiese una ley normal, aún a sabiendas de que no es cierto, lo cual hace que los niveles de significación sólo se puedan considerar orientativos. Y segundo no tiene en cuenta el número de réplicas disponibles en cada condición experimental. Con lo que se da el mismo valor a un ratio

obtenido con dos réplicas que a otro obtenido con 100.

Es interesante la idea de hallar un procedimiento para estudiar la significación física de los efectos. El procedimiento propuesto, parece basado únicamente en la experiencia, y aunque intuitivamente parece que consigue su objetivo sería conveniente investigar desde un punto de vista teórico su validez.

3.5 NUEVO METODO

3.5.1 Descripción

El método que propongo para identificar los valores de los factores de control que optimizan el diseño está inspirado en el método de Taguchi. Las diferencias más importantes respecto del mismo son los estadísticos a estudiar y la forma de hallar su significación.

Con respecto al método propiamente dicho únicamente hay tres puntos en los que considero que el propuesto por Taguchi es mejorable:

a) La utilización de orthogonal arrays. Taguchi parece ceñir sus diseños a un número limitado de orthogonal arrays, y no tiene en cuenta la gran variedad de diseños disponibles, como los ya citados Plakett-Burman (1946), diseños compuestos Box-Wilson (1951), diseños Addelman (1962), o Box-Behnken (1960) entre otros.

b) Taguchi no explota adecuadamente la naturaleza secuencial de la investigación (ver sección 1.1.5). Plantea un gran experimento al principio de la investigación en lugar de ir planteando pequeños experimentos que a medida que son analizados sirven para planificar el siguiente. Si se sigue esta estrategia secuencial, se hacen prácticamente innecesarios los experimentos confirmatorios ya que cada nuevo diseño sirve además para comprobar la veracidad de las conclusiones extraídas en el anterior.

c) El método utilizado por Taguchi se ciñe al estudio de los efectos principales, tanto lineales como cuadráticos, pero sin tener en cuenta las interacciones. En realidad, las interacciones de dos factores son efectos de segundo orden exactamente igual que los efectos cuadráticos, y por tanto, en principio, de la misma importancia. Sería, pues, conveniente utilizar diseños (si no siempre, si en muchas ocasiones) que permitan la estimación de las interacciones de posible interés.

Un punto controvertido de la metodología de Taguchi es la utilización de factores ruido. El método que propongo es aplicable tanto si las réplicas se obtienen a partir de factores ruido, como si son réplicas genuinas. En principio y mientras no se aclare en sucesivas investigaciones, la naturaleza de la confusión introducida por los factores ruido, me parece más razonable dejar que el ruido actúe naturalmente y detectar sus efectos a través de réplicas genuinas.

El método propuesto puede condensarse en los 4 puntos siguientes que deben ser considerados como un ciclo:

a) Identificación de los factores de control (y factores ruido si procede) y de sus niveles.

Si es la primera fase, habría que aprovechar todos los conocimientos disponibles para decidir con que factores experimentar y a qué niveles, y tener presente que no se debe utilizar más de un 25% de los recursos en un primer diseño.

Si ya se han analizado varios diseños hay que tener en cuenta estos resultados para decidir nuevos factores y/o niveles.

b) Construcción de la matriz del diseño y planificación del experimento.

Hay que tener en cuenta la gran variedad de diseños disponibles, y la advertencia anterior sobre las interacciones. También hay que tener en cuenta las posibilidades de aumentar diseños ya realizados (añadiendo una "star" o por "foldover") para solventar confusiones.

c) Realización del experimento y análisis de la respuesta.

El experimento se debe llevar a cabo en orden aleatorio y si no se han incluido factores ruido se debe replicar cada condición experimental. Para cada respuesta de interés hay que analizar dos estadísticos (ver sección 3.5.2).

d) Evaluación de resultados

A la vista de los análisis llevados a cabo, hay que evaluar si ya se han conseguido los resultados deseados o si es conveniente continuar investigando, en cuyo caso hay que recomenzar el ciclo por la fase a, con nuevos diseños sugeridos por la evaluación del diseño actual.

3.5.2 Estadísticos a estudiar

Para conseguir un diseño cuyas características funcionales estén en el valor deseado (sea éste el que sea) y con la menor variabilidad posible, la mejor manera es estudiar dos estadísticos para cada respuesta. Uno que mida el nivel y otro que mida dispersión.

El estadístico elegido para estudiar los efectos sobre el nivel es la media. Es lo que se ha venido haciendo tradicionalmente, y tiene muchas ventajas sobre cualquier otro método, facilidad de cálculo, facilidad de tratamiento estadístico y de cómputo de niveles de significación. Y sobre todo esto, tiene la ventaja adicional de ser un método bien conocido y probado ampliamente. En la sección 3.2 se ha visto que para poder juzgar convenientemente los efectos

sobre el nivel es necesario que la variabilidad de la respuesta sea constante. En efecto si ello no es así, y en el caso de intentar estudiar efectos sobre la variabilidad se está presumiendo que no, hay que recurrir a alguna transformación para estabilizarla, o a los mínimos cuadrados generalizados. En el bien entendido que caso de hacer una transformación, los datos transformados deben utilizarse únicamente para estudiar los efectos sobre el nivel.

Para estudiar los efectos de los factores sobre la variabilidad hay que estudiar los datos sin transformar ya que interesa detectar cualquier cambio en la variabilidad, tanto si está de alguna forma ligado a la media como si no.

La elección del estadístico para estudiar los efectos de los factores sobre la variabilidad se ha hecho teniendo en cuenta la dificultad que supone juzgar la significación cuando no se dispone de réplicas, como es el caso presente, ya que todas las réplicas disponibles se utilizan para calcular un único estadístico de dispersión.

El estadístico escogido para estudiar los efectos de los factores sobre la dispersión es el $\log(s)$ donde s es la desviación tipo de la respuesta en cada condición experimental, calculada a partir de las réplicas. Como se verá en la sección siguiente (3.5.3) la distribución de los $\log(s)$ es conocida y ello permite realizar pruebas de significación.

3.5.3 Significación de los efectos

Como se ha visto en la sección anterior (3.5.2), los estadísticos a estudiar son la media y el logaritmo de la desviación tipo de cada condición experimental.

Una vez calculados estos estadísticos para cada condición experimental, se calcularán los efectos de los factores considerando como respuestas los dos, primero uno y luego el otro. Estudiar la significación de los efectos sobre el nivel (respuesta: media aritmética de las réplicas) cuando se dispone de réplicas en un procedimiento bien conocido que se puede encontrar en cualquier escrito sobre el tema (por ejemplo Cochran y Cox 1954, Box, Hunter y Hunter 1978).

Para estudiar la significación de los efectos cuando la respuesta es el logaritmo de la desviación tipo de las réplicas, la dificultad estriba en que sólo se dispone de una observación por condición experimental y por tanto no hay forma de estimar el ruido. Sin embargo, a continuación demuestro que si las réplicas en cada condición experimental son observaciones de una ley normal (asunción razonable debido al efecto del límite central), la distribución del $\log(s)$ es conocida.

3.5.3.1 Distribución del log(s)

Supóngase que la variable aleatoria x sigue una ley normal con media μ y desviación tipo σ desconocidas, y que se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño n , entonces si se denota por s la desviación tipo muestral, es bien sabido que la variable

$$w = (n-1) \frac{s^2}{\sigma^2} \quad (3.30)$$

se distribuye según una chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad (ver por ejemplo De Groot 1975, Hogg y Craig 1978).

Despejando s en (3.30) se obtiene que

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \sqrt{w} \quad (3.31)$$

con lo que ver apéndice 2

$$E(s) = \frac{\sigma \sqrt{2} \Gamma(n/2)}{\sqrt{n-1} \Gamma(n-1/2)} = \sigma f(n) \quad (3.32)$$

y

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{\sigma^2}{n-1} \left[(n-1) - 2 \left(\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n-1/2)} \right)^2 \right] \quad (3.33) \\ &= \sigma^2 \Psi(n) \end{aligned}$$

Donde $f(n)$ y $\Psi(n)$ son función del tamaño de la muestra.

Como se ve la esperanza matemática y la varianza de s dependen de la σ , la desviación tipo desconocida de la variable aleatoria x , y de una cierta función del tamaño de la muestra.

Sin embargo, obsérvese que si se consideran conjuntamente (3.32) y (3.33) resulta que

$$V(s) = E(s)^2 g(n) \quad (3.34)$$

Donde $g(n)$ es también función del tamaño de muestra.

Por tanto está claro que la desviación tipo de la s es proporcional a su esperanza matemática. Cuando esto sucede, se ha visto en la sección 3.2 que la transformación logarítmica (\log_e) consigue estabilizar la varianza.

En este caso si se toma el $\log(s)$ su varianza se estabiliza y además resulta independiente de la σ de la variable x , ya que según (3.25)

$$V(\log s) = g(n)^2 \quad (3.35)$$

Esto es, recuperando el valor de $g(n)$:

$$V(\log s) = \frac{(n-1) \Gamma^2(n-1/2)}{2 \Gamma^2(n/2)} - 1 \quad (3.36)$$

Esto proporciona una aproximación lineal al valor de la varianza del log de s . Esta aproximación aparece tabulada en la tabla 3.2

A partir de (3.31) tomando log se obtiene:

$$\log s = \log \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \right) + \log \sqrt{w} \quad (3.37)$$

donde

n es una constante conocida

σ es una constante desconocida

w es una variable aleatoria que sigue una distribución de chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad.

La distribución del $\log(s)$, salvo por una constante que depende de la σ particular de cada caso es el logaritmo de la raíz cuadrada de una chi-cuadrado. La densidad de probabilidad de la misma se puede obtener fácilmente y llamando $y = \ln \sqrt{w}$ tiene la ecuación siguiente:

$$f(y) = \frac{2}{2^{(n-1)/2} \Gamma(n-1/2)} \exp[(n-1)y - \exp(2y)/2] \quad (3.38)$$

Su forma es ligeramente asimétrica con una cola más larga por la izquierda que por la derecha. En la figura 3.10 se pueden observar las densidades de probabilidad para muestras de tamaños 2, 10 y 40, es decir para 1, 9 y 39 grados de libertad.

Como se puede apreciar, la dispersión disminuye al aumentar los grados de libertad. Esto era de esperar ya que la desviación tipo (s) se calcula con mayor precisión cuanto mayor es el número de observaciones.

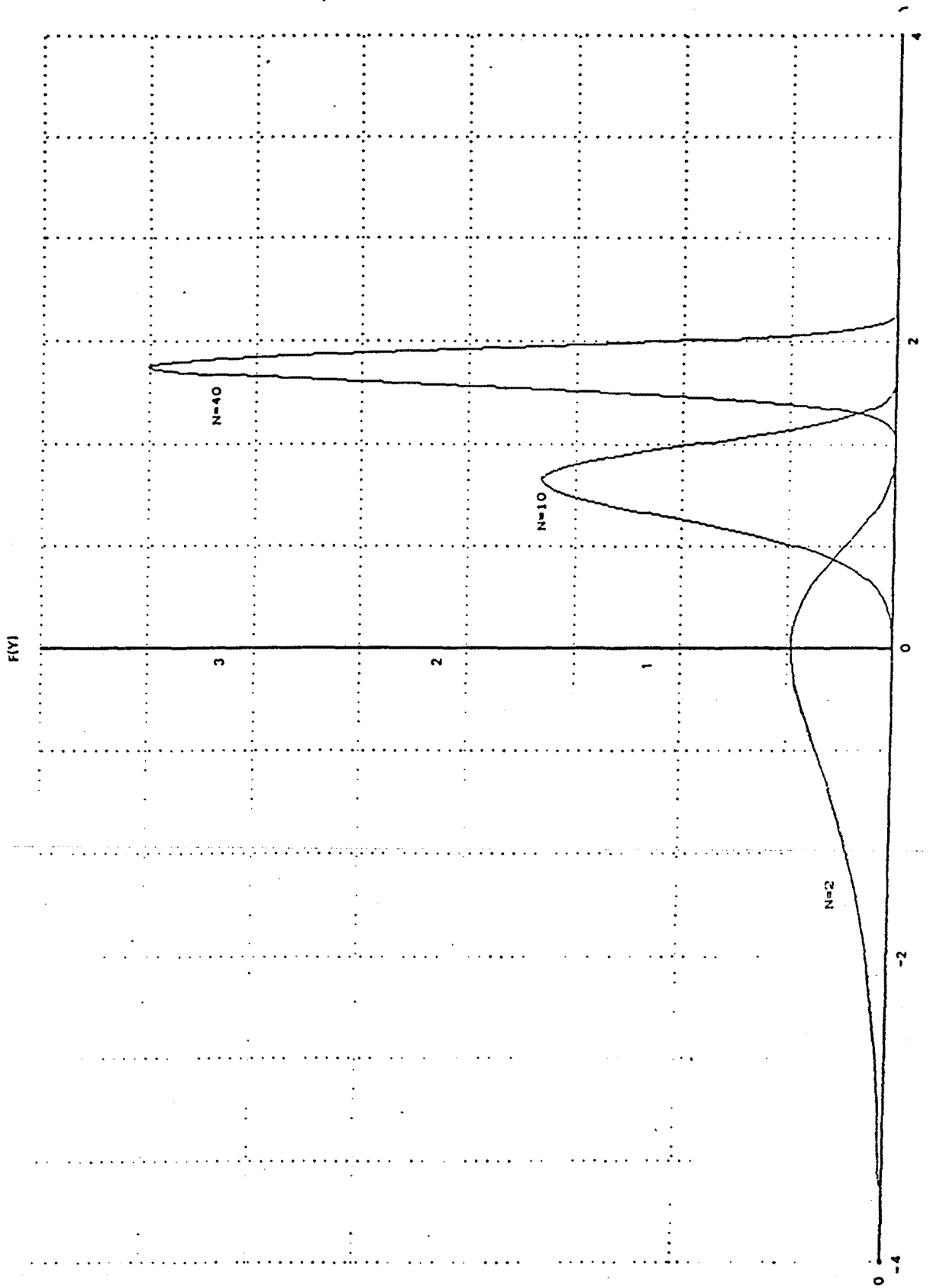


Figura 3.10. Densidades de probabilidad de la distribución de $\log(s)$ para tamaños de muestra 2, 10 y 40.

3.5.3.2 Varianza del $\log(s)$. Tablas.

Ya se ha visto con las ecuaciones (3.37) y (3.38) que la distribución del $\log(s)$ es conocida excepto por una constante que depende de σ , la desviación tipo de la población de la que se extrae la muestra. También se ha visto en el apartado anterior que se consideraba el estadístico $\log(s)$ porque su varianza no dependía de su media, ni de la σ . Ahora se puede justificar con rigor esta afirmación (antes se hizo en aproximación lineal).

Recuédese la ecuación (3.37)

$$\log s = \log \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \right) + \log \sqrt{w}$$

por tanto la varianza del $\log s$ será

$$V(\log s) = V(\log \sqrt{w}) \quad (3.39)$$

y por tanto la varianza del $\log s$ es la varianza de la distribución con densidad de probabilidad definida por la ecuación (3.38).

Desgraciadamente la función (3.38) carece de primitiva y es por tanto imposible hallar una expresión teórica de la $V(\log(s))$. Por ello hay que recurrir a las tablas, y la simulación para obtenerlas.

En este caso en lugar de recurrir a métodos numéricos de integración, he simulado una muestra de 5000 valores aleatorios provenientes de la distribución (una diferente para cada uno de los grados de libertad contemplados en la tabla 3.2) y calculado su desviación tipo. He preferido este método ya que estas muestras simuladas han servido así mismo para comprobar la rapidez de la convergencia de las combinaciones lineales de esta distribución hacia una ley normal (ver sección 3.5.3.3).

El método de simulación empleado ha sido el de Ahrens y Dieter (1974) para un grado de libertad y el de Fishman (1976) para más de un grado de libertad. Los programas se han realizado en lenguaje Turbo-Pascal sobre un IBM-PCXT y el generador de uniformes (0,1) ha sido el proporcionado por el programa, tras comprobar la aleatoriedad de la generación.

La tabla 3.2 contiene los valores de la desviación tipo del $\log(s)$, hallados por tres procedimientos diferentes. Los de la columna (simulado) están hallados por medio de la simulación que acabo de describir. los de la columna (aprox 1) están hallados por medio de la aproximación lineal

descrita en la sección 3.5.3.1 y que viene dada por la ecuación 3.30. La columna (aprox 2) es una aproximación menos buena, está justificada en el Apéndice 3 y tiene la gran ventaja de poderse recordar de memoria, ya que viene dada por:

$$V(\log s) = \frac{1}{2(n-1)} \quad (3.40)$$

y la aproximación es bastante buena.

		<u>SD (log s)</u>		
n ² obs. n	grad.lib.	Simulado	aprox 1	aprox 2
2	1	1.110	.756	.707
3	2	.645	.523	.500
4	3	.475	.422	.408
5	4	.391	.363	.354
6	5	.342	.323	.316
7	6	.318	.294	.289
8	7	.280	.272	.267
9	8	.267	.254	.250
10	9	.249	.239	.236
15	14	.197	.191	.189
20	19	.166	.163	.162
30	29	.134	.132	.131
40	39	.115	.114	.113

Tabla 3.2: Valores de la desviación tipo del log s para diversos grados de libertad

Como puede apreciarse los valores obtenidos por simulación son más altos que los obtenidos a través de las dos aproximaciones. Como quiera que las simulaciones se han hecho con 5000 valores y la mayor parte de ellas se han repetido, sus valores resultan fiables en las tres cifras decimales representadas en la tabla 3.2. Evidentemente de las dos aproximaciones la uno es la mejor, aunque la dos tiene la ventaja de su facilidad de cálculo y memorización.

3.5.3.3 Distribución de las combinaciones lineales de log s

En las secciones anteriores se ha hallado la distribución del log(s) y se han proporcionado tablas para su varianza. Todo ello para cuando las s se obtenían de muestras aleatorias simples de una ley normal.

Supóngase ahora que se dispone de N muestras alatorias simples, sin pérdida de generalidad voy a considerar que

todas ellas son del mismo tamaño n , provenientes de N leyes normales y que para cada una de ellas se calcula el $\log s$. Se obtendrá:

$\log s_1$ para la muestra proveniente de $N(\mu_1, \sigma_1)$
 $\log s_2$ para la muestra proveniente de $N(\mu_2, \sigma_2)$
 \vdots
 $\log s_N$ para la muestra proveniente de $N(\mu_N, \sigma_N)$

He demostrado que todas ellas siguen la misma distribución, cuya densidad de probabilidad viene dada por la ecuación (3.38), con $n-1$ grados de libertad.

Gracias al teorema del límite central de Lindeberg y Lévy se puede afirmar que:

$$\frac{\sum \log s_i}{N} \xrightarrow{D} N(\mu, \sigma^2_{1,08} n/N) \quad (3.41)$$

Es decir que la media aritmética de los $\log s$ converge en distribución hacia una ley normal con media la del $\log(s)$ y con varianza la del $\log(s)$ dividida por n .

En el caso del diseño de experimentos resulta de interés la distribución de los efectos, y éstos son una combinación lineal de la forma.

$$\text{efecto} = \frac{\sum \log s_i - \sum \log s_i}{N} \quad (3.42)$$

y a partir de (3.41) se comprueba fácilmente que:

$$\frac{\sum \log s_i - \sum \log s_i}{N} \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2_{1,08} n/N) \quad (3.43)$$

es decir que los efectos convergen en distribución hacia una ley normal con media 0 varianza $\sigma^2_{1,08} n/N$ donde recuérdese que $\sigma^2_{1,08} n$ es conocida y viene tabulada en la tabla 3.2.

Por tanto si en un diseño de experimentos el número de condiciones experimentales N es suficientemente grande se puede calcular sin ninguna dificultad la significación de los efectos.

El único problema que resta es el de determinar cuando N es suficientemente grande para que la ley normal proporcione una buena aproximación.

Empíricamente, y utilizando el mismo método de simulación referenciado en el apartado anterior, he hallado que para valores de $N \geq 4$ nada se opone a pensar que la distribución del estadístico obtenido es una ley normal.

Para comprobarlo he simulado cuatro grupos de cinco mil valores de la distribución de $\log(s)$ (ecuación 3.32). Sumando la primera observación de los grupos 1 y 2, restando la primera observación de los grupos 4 y 5 y dividiendo por cuatro he obtenido el primer valor (T_1) del estadístico T.

$$T_1 = \frac{\log s_{11} + \log s_{21} - \log s_{41} - \log s_{51}}{4} \quad (3.44)$$

Procediendo de igual manera para cada una de las 5000 observaciones, he obtenido 5000 valores de T_1 . El procedimiento se ha repetido para distribuciones con cada uno de los grados de libertad utilizados en la tabla.

Dividiendo las observaciones en intervalos, calculando el estadístico

$$Q = \sum \frac{[Pobs_j - Pteor_j]^2}{Pteor_j} \quad (3.45)$$

donde:

M: número de intervalos

Pobs_j: proporción observada en el intervalo j

Pteo_j: proporción teórica según una ley Normal en el intervalo j

y comparándolo con una chi-cuadrado con M-1 grados de libertad, nunca se obtienen niveles de significación inferiores al 10%, con lo que no se puede rechazar la hipótesis de normalidad. (Los grados de libertad son M-1 ya que se conoce la media y la desviación tipo de la población, son μ y σ^2).

Así pues, se puede afirmar que para $n \geq 4$ la distribución normal proporciona una buena aproximación a la distribución de los efectos calculados según la fórmula (3.42).

3.5.4 Aplicación al diseño de experimentos

Considérese la figura 3.11 que representa un experimento en el que se estudian 1 factores en N condiciones experimentales y que se replica n veces.

Cond. exp.	factor				respuesta	media	desv.tipo
	A	B	...	L			
1	-	-	-	-	$X_{11} X_{12} \dots X_{1n}$	\bar{X}_1	s_1
2	+	-	-	-	$X_{21} X_{22} \dots X_{2n}$	\bar{X}_2	s_2
3	-	+	-	-	$X_{31} X_{32} \dots X_{3n}$	\bar{X}_3	s_3
.
.
.
k	$X_{k1} X_{k2} \dots X_{kn}$	\bar{X}_k	s_k
.
.
.
N	+	+	+	+	$X_{N1} X_{N2} \dots X_{Nn}$	\bar{X}_N	s_N

Figura 3.11: Experimento con 1 factores y N condiciones experimentales replicado n veces

Si se desean hallar los efectos de los factores sobre el nivel y sobre la variabilidad, habría que calcular para cada condición experimental la media y la desviación tipo.

Para hallar los efectos sobre el nivel y hallar su significación habría que comprobar la homocedasticidad (o aplicar una transformación o mínimos cuadrados generalizados) y calcular los efectos por mínimos cuadrados y juzgar su significación gracias a las hipótesis de normalidad, independencia y a los grados de libertad extra que proporcionan las réplicas. El método es bien conocido.

Para hallar los efectos sobre la variabilidad, siguiendo el método propuesto en las secciones anteriores habría que calcular el logaritmo de las desviaciones tipo, $\log s_1, \log s_2, \dots, \log s_N$. Obsérvese que si se asume que las réplicas en cada condición experimental k siguen una ley normal con cierta media y cierta desviación tipo (μ_k, σ_k) y que son independientes, entonces $\log s_k$ sigue la distribución señalada en la ecuación (3.38). Es conveniente notar que las suposiciones necesarias, ya lo eran para calcular los efectos sobre el nivel y además son razonables pues el teorema del límite central garantiza una cierta normalidad y la aleatorización del orden de realización de los experimentos es una garantía de independencia.

Pues bien, si $\log s_k$ sigue la ley representada por la ecuación (3.38), los efectos siguen aproximadamente una ley normal con media 0 y una desviación tipo conocida, que se puede obtener a partir del número de réplicas en la tabla 3.2 dividiéndola luego por la raíz cuadrada del divisor utilizado para calcular los efectos.

Con el ejemplo de la figura 3.11, el efecto del factor A sobre la variabilidad sería:

$$\text{efecto(A)} = \frac{\sum (-1)^j \log s_i}{N/2}$$

y para juzgar su significación se buscaría en la tabla 3.2, $\sigma_{1,0,0}$ con n-1 grados de libertad. Los efectos siguen una ley normal con media 0 y desviación tipo $\sigma_{1,0,0} = (n-1)/\sqrt{N/2}$. Lo cual proporciona la distribución de referencia necesaria para hacer la prueba de hipótesis: efecto = 0. El método, como se ve, tiene la ventaja de tener en cuenta el número de réplicas que se han utilizado para calcular los efectos sobre la variabilidad. Como ilustración, considérese el ejemplo introducido en la sección 3.4.3. Se estudiaba un factor (A) a dos niveles y si se replicaba el experimento cuatro veces, se obtenía:

	-	3.2,	4.0,	4.0,	4.8
A	+	3.0,	4.5,	5.0,	5.5

y si se replicaba dos se obtenía:

	-	3.53,	4.47
A	+	3.75	5.25

los estadísticos obtenidos son en ambos casos

nivel	media	log s
-	4.0	-0.43
+	4.5	0.15

Con lo que el efecto sobre la dispersión es:

$$\text{efecto(A)} = \log s(+)-\log s(-) = 0.58$$

Ahora bien dependiendo de los grados de libertad:

$$\sigma_{1,0,0} = (3) = .475$$

$$\sigma_{1,0,0} = (1) = 1.11$$

Y como en este caso coinciden con la σ de los efectos, con cuatro réplicas el nivel de significación de la diferencia es mucho mayor que con dos, cosa que es habitual en los procedimientos estadísticos (ejemplo: t-student) y que no sucedía con el método de Taguchi.

3.5.5 Conclusiones y comentarios

El nuevo método para analizar los efectos sobre la

dispersión, propuesto en esta tesis, está basado en el método de Taguchi pero introduciendo sustanciales mejoras en los puntos más débiles. En general, la idea ha sido aprovechar las excelentes ideas de ingeniería de diseño contenidas en su método, y proponer técnicas estadísticas que sean capaces de obtener el máximo rendimiento de los experimentos llevados a cabo.

En particular las mejoras más sustanciales propuestas son:

a) El explorar la naturaleza secuencial de las investigaciones y no caer en la tentación de diseñar un experimento exhaustivo al principio de la investigación.

Ligado con ello está la libre utilización de la amplia gama de diseños de experimentos disponibles y de las posibilidades de combinarlos formando diseños más complejos.

b) Otra idea importante es la de dejar que el ruido actúe naturalmente, es decir sin utilizar factores ruido. La idea de los factores ruido es importante, pero requiere un gran número de experimentos e introduce confusiones poco estudiadas. El método propuesto que consiste en dejar que el ruido se transmita naturalmente requiere replicar, cuantas más veces mejor, los experimentos, pero el número de réplicas necesario es en general inferior al requerido cuando se utilizan factores ruido.

El uso de factores ruido es en cierto modo similar a un análisis de sensibilidad y puede en algunos casos ser interesante. El método propuesto es compatible con su utilización, aunque en general no se recomienda.

c) Estudiar sistemáticamente dos estadísticos, uno para el nivel y otro para la dispersión, con métodos claros y estadísticamente correctos para hallar su significación establece una notable mejora y una ruptura con el método de Taguchi que intenta optimizar el diseño a base de un solo estadístico que mide a un tiempo efectos sobre el nivel y sobre la dispersión.

El nuevo método es preferible en todos los casos ya que siempre proporciona una mayor información inteligible para el experimentador, y obtiene resultados mejores, especialmente cuando hay algún tipo de relación entre la media y la desviación tipo (por ejemplo si $\mu = K\sigma$). Un ejemplo donde se aprecia claramente la mejora en cantidad y calidad de la información proporcionada por el nuevo método aparece en el capítulo 4.

d) Quizá la más importante contribución del nuevo método, es la proposición de un método claro y fiable para juzgar la significación de los efectos sobre la dispersión.

El método sólo requiere que las réplicas de cada condición experimental sean variables aleatorias independientes y provenientes de una ley normal. Como se ha visto la aleatorización, permite asumir la primera suposición, y el teorema del límite central la segunda.

Como es usual en los métodos estadísticos el poder de detección aumenta con el número de observaciones.

Sería conveniente en el futuro realizar pruebas de lo sensible que es el método a la asunción de normalidad, ya que tiene una lejana semejanza con el método de Bartlett para juzgar igualdad de varianzas, y este es muy sensible a la normalidad de los datos.

3.6 EFECTOS SOBRE LA DISPERSION CUANDO NO SE DISPONE DE REPLICAS. METODO DE BOX-MEYER.

Box y Meyer (1984 y 1985) justifican a partir del principio del "effect sparsity" la utilización de diseños factoriales fraccionales sin réplicas para detectar los factores que afectan el nivel y la dispersión.

El método que proponen es iterativo y consta de cuatro pasos:

- 1.- Calcular los efectos sobre el nivel por el procedimiento abitual.
- 2.- Calcular los residuos obtenidos al sustraer los efectos considerados importantes.
- 3.- Hallar el efecto de cada factor sobre la dispersión a base de calcular la varianza muestral de los residuos cuando el factor en cuestión está a nivel alto y compararla con la varianza muestral cuando el factor está a nivel bajo utilizando una F para justificar su significación.
- 4.- Recalcular por mínimos cuadrados generalizados los efectos sobre el nivel, considerando como pesos los efectos sobre la dispersión hallados en el paso 3. Si los efectos son suficientemente próximos a los hallados en la iteración anterior parar, en caso cntrario ir a 2.

Hartley y Jayatillake (1973) demuestran que el método es máximo verosímil y convergente.

El método funciona bién únicamente en condiciones en las que realmente el número de factores que afectan la respuesta, es muy pequeño, en comparación con el número de factores estudiados; es por tanto útil en primera fase de las investigaciones donde se suele estudiar un gran número de factores. Sin embargo, el método no resulta adecuado cuando no opera el principio del effect sparsity, o cuando se quieren estimar los efectos sobre la dispersión con precisión.

3.7 CONCLUSIONES

El tema de este capítulo: diseñar productos y procesos pensando en la calidad, es un área que está despertando gran interés en todo el mundo ya que a ello se atribuye gran parte del éxito japonés en producir alta calidad a bajo coste.

Las ideas pioneras de Taguchi sobre el tema son de gran importancia y su eficacia está fuera de duda ya que ha quedado demostrada en la práctica en numerosas ocasiones. Sin embargo su método si bien es muy original e innovador desde el punto de vista de la ingeniería de diseño, contiene varios puntos mejorables en sus aspectos estadísticos.

El método propuesto en esta tesis recoge las muchas ideas buenas de Taguchi y mejora y clarifica ostensiblemente puntos que estaban poco claros o equivocados. De particular importancia son

- La aclaración sobre las posibles transmisiones del ruido y como estos podían confundirse con que los factores afecten a la variabilidad (Sección 3.1). Los factores no afectan a la variabilidad, aunque se emplee este lenguaje lo que en realidad hacen es transmitir ruido de diversas formas.
- La propuesta de estudiar dos estadísticos.
- El método teórico de gran importancia práctica para juzgar la significación de los efectos sobre la dispersión.

Actualmente se está poniendo un gran esfuerzo investigador en este campo como lo demuestra la reciente aparición de un número monográfico de la prestigiosa revista Journal of Quality Technology varias veces referenciado a lo largo del capítulo.

Atención especial merece el método recientemente (1985) propuesto por Box y Meyer que utilizado conjuntamente con la proyección (Capítulo 2) puede resultar de gran importancia práctica en la fase inicial de las investigaciones experimentales.

CAPITULO 4

4.1 PLANTEO DEL PROBLEMA

En el número de Mayo de 1983 del Bell System Technical Journal apareció un artículo de M.S. Phadke, R.N. Kacker, D.V. Speeney y M.J. Grieco describiendo un experimento llevado a cabo en el Murray Hill Integrated Circuit Design Capability Laboratory.

La investigación estaba relacionada con la fabricación de circuitos integrados. Un circuito integrado tiene una gran cantidad de pequeñas ventanillas de contacto; si éstas son demasiado pequeñas o no aparecen no se produce contacto, si por el contrario son demasiado grandes se puede producir un corto-circuito. El objetivo del estudio era minimizar la variación del tamaño de las ventanillas conservando la capacidad de ajustar su tamaño al nivel deseado en cada ocasión.

Las variables y niveles que se estudiaron fueron los que aparecen en la Tabla 4.1

	<u>Niveles</u>		
	bajo	medio	alto
A Dimensión de la máscara (mm)		2	2.5
B Viscosidad		204	206
C Velocidad de rotación (rpm)	bajo	normal	alto
D Temperatura de cocción (°C)	90	105	
E Tiempo de cocción (min.)	20	30	40
F Apertura	1	2	3
G Tiempo de exposición	-20%	normal	+20%
H Tiempo de revelado	30	45	60

Tabla 4.1: Variables y niveles en la investigación sobre circuitos impresos

Para una explicación más detallada de las variables y los niveles ver el artículo original.

En el experimento se variaron ocho factores, tres a dos niveles y cinco a tres niveles. En realidad se variaron nueve y se midieron dos respuestas, una antes de la grabación de las placas y otra después (pre-etch y post-etch). La primera respuesta, que es la que se analiza en este capítulo, se produce antes de que actúe la novena variable.

El diseño empleado se muestra en la tabla 4.2. y es la orthogonal array L_{18} de Taguchi que normalmente se utiliza para estudiar 8 factores a tres niveles (denotados por -, 0, +) y un factor a dos niveles (denotados por -, +).

experi- mento n ^o	factor								Respuesta	
	1	2	3	4	5	6	7	<u>Pre-etch</u>		
	A	BD	C	E	F	G	H	y	S _y	
1	-	-	-	-	-	-	-	2.500	0.0827	
2	-	-	0	0	0	0	0	2.684	0.1196	
3	-	-	+	+	+	+	+	2.660	0.1722	
4	-	0	-	-	0	0	+	1.962	0.1696	
5	-	0	0	0	+	+	-	1.870	0.1168	
6	-	0	+	+	-	-	0	2.584	0.1106	
7	-	+	-	0	-	+	0	2.032	0.0718	
8	-	+	0	+	0	-	+	3.267	0.2101	
9	-	+	+	-	+	0	-	2.829	0.1516	
10	+	-	-	+	+	0	0	2.660	0.1912	
11	+	-	0	-	-	+	+	3.166	0.0674	
12	+	-	+	0	0	-	-	3.323	0.1274	
13	+	0	-	0	+	-	+	2.576	0.8050	
14	+	0	0	+	-	0	-	2.308	0.0964	
15	+	0	+	-	0	+	0	2.464	0.0385	
16	+	+	-	+	0	+	-	2.667	0.0706	
17	+	+	0	0	+	-	0	3.156	0.1569	
18	+	+	+	-	-	0	+	3.494	0.0473	

Tabla 4.2. Matriz de diseño (Orthogonal array L₁₈). Respuesta media y desviación tipo.

Para adaptar el diseño a las condiciones requeridas se tratan los factores B y D, que debían ser estudiados a dos niveles cada uno, como un factor conjunto denotado por BD y asignado a los tres niveles de la columna 2 del diseño. La asignación se hizo de la manera siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 - & 0 & + \\
 B_- D_- & B_+ D_- & B_- D_+
 \end{array}$$

De forma que los efectos principales de B y D vienen dados por

$$\begin{aligned}
 B &= B_+ D_- - B_- D_- \\
 D &= B_- D_+ - B_- D_-
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Este tipo de asociación confunde los efectos principales de B y D con su interacción, es similar a la estrategia tradicional. En este caso no es grave ya que se está utilizando un diseño saturado, sólo para detectar efectos principales.

Las restantes columnas se asignaron a los factores de la forma indicada en la Tabla 4.2.

Los factores C, E, F, G, H e I se utilizaron a tres niveles para permitir detectar relaciones cuadráticas con la respuesta.

El diseño es apropiado si se asume que las interacciones son despreciables.

En este punto cabe criticar el diseño ya que no parece razonable prever la existencia de términos de segundo orden y asumir al mismo tiempo que las interacciones de dos factores son despreciables. Los dos términos son cuadráticos y parece muy difícil decidir a priori que unos son más importantes que otros.

En favor del diseño hay que anotar que se han intentado eliminar interacciones a base de escoger cuidadosamente los niveles de los factores. Por ejemplo, en este caso era claro que el tiempo de exposición iba a depender de la apertura empleada (sucede en cualquier proceso fotográfico). Es por ello que los niveles del tiempo de exposición (G) se dan en porcentajes con respecto a un tiempo normal una vez se ha fijado la apertura (F).

Los datos obtenidos aparecen en las dos columnas de la derecha de la Tabla 4.2. La primera es la media de las diferentes observaciones obtenidas en cada condición experimental y la segunda es la desviación tipo.

La respuesta de interés era en este caso el grosor de las líneas marcadas en la placa.

En 15 de las 18 condiciones experimentales se disponía de 10 observaciones de la respuesta, estas 10 observaciones se dividen en dos conjuntos de 5, provenientes de dos placas. En las tres condiciones experimentales restantes solo se disponía de una placa y por tanto de 5 observaciones.

A pesar de que existe evidencia de que hay una mayor similitud entre las observaciones procedentes de la misma placa que entre observaciones provenientes de distinta placa este efecto no se estudia en esta ocasión.

Los objetivos del experimento son minimizar la variabilidad en el tamaño de las ventanas (líneas en la placa) y hallar variables que permitan regular el tamaño sin aumentar la variabilidad.

Para ello es necesario

1) Determinar que factores afectan el nivel (tamaño de las ventanas)

2) Determinar que factores afectan la variabilidad (variación del tamaño de las ventanas)

3) Interpretar estos efectos y actuar en consecuencia.

4.2. SOLUCION OBTENIDA POR PHADKE ET AL. (1983) SIGUIENDO EL METODO DE TAGUCHI.

Phadke et al. además de analizar la respuesta grosor de las líneas antes de la grabación analizan dos más, el grosor tras la grabación y una puntuación de apertura. En la respuesta grosor en el post-etch, no aparecen efectos sobre la variabilidad con lo que no es útil como ilustración del método, y la puntuación de apertura es una variable que sigue un modelo binomial y que por tanto se debe analizar por otros métodos (o bien aplicando la transformación $y = \arcsen \sqrt{p}$ donde p es la proporción de aperturas).

Es por ello que únicamente considero la respuesta grosor de las líneas en el pre-etch.

A lo largo de todo su análisis ignoran el hecho de que hay diferentes tamaños de muestras (los experimentos 5, 15 y 18 solo tienen 5 observaciones).

a) Efectos sobre el nivel

Para su análisis calculan el espesor medio de las líneas en cada condición experimental y construyen una tabla de análisis de la varianza, para lo cual ajustan por mínimos cuadrados el modelo

$$y = \underline{x}\beta + \epsilon \quad (4.2)$$

donde

y : vector de 18 componentes conteniendo las respuestas medias

\underline{x} : matriz de diseño (18x8)

β : vector de los 8 efectos estimados
(la media A, BD, C, E, F, G, H)

ϵ : Término de error

Para construir la tabla se desglosa la suma de cuadrados correspondientes a BD en suma de cuadrados para B y para D (las fórmulas apropiadas para hacerlo se pueden encontrar en el apéndice del artículo original)

La tabla de análisis de la varianza calculada con los datos obtenidos en el experimento es la siguiente:

Fuente de variación	grados libertad	Suma cuadrados	Cuadrados medios	F
A	1	0.652	0.652	7.24
B	1	0.869	0.869	29.97
D	1	0.017	0.017	0.59
C	2	0.766	0.383	13.21
E	2	0.002	0.001	-
F	2	0.031	0.016	-
G	2	0.545	0.273	9.41
H	2	0.280	0.140	4.83
Residual	4	0.115	0.029	

Tabla 4.3: Análisis de la varianza de y.

Con lo que obtienen después de comparar con la tabla adecuada de la distribución de F que las variables significativas con una confianza del 95% son:

- A -- Dimensión de la máscara
- B -- Viscosidad
- C -- Velocidad de rotación
- G -- Tiempo de exposición

b) Efectos sobre la dispersión

Siguiendo el método de Taguchi, Phadke et al. analizan el logaritmo de la respuesta media dividida por la desviación tipo, $\log \bar{y}/s$, conocido como logaritmo del cociente señal-ruido y lo miden en decibelios.

En este caso los valores del logaritmo del cociente señal-ruido para las 18 condiciones experimentales aparecen en la Tabla 4.4.

Condición experimental	$\log \bar{y}/s$
1	1.4803
2	1.3512
3	1.1889
4	1.0632
5	1.2043
6	1.3686
7	1.4520
8	1.1917
9	1.2709
10	1.1434
11	1.6721
12	1.4165
13	1.4815
14	1.3788
15	1.8065
16	1.5775
17	1.3036
18	1.8692

Tabla 4.4: Valores del log señal/ruido para las 18 condiciones experimentales.

Procediendo de forma totalmente análoga al caso anterior calculan una tabla de análisis de la varianza, (tabla 4.5.) y advierten que para hacerlo han supuesto que el y/s se distribuye según una ley normal, aún sabiendo que ello no es totalmente cierto, y que por lo tanto consideran los niveles de significación hallados como puramente orientativos.

Fuente de variación	grados lib.	suma cuadrados	cuadrados medios	F
A	1	0.2399	0.2399	6.30
BD	2	0.0169	0.0085	-
C	2	0.0668	0.0334	-
E	2	0.0804	0.0402	1.06
F	2	0.2210	0.1105	2.90
G	2	0.0634	0.0317	-
H	2	0.0017	0.0009	-
Residual	4	0.1522	0.0381	

Tabla 4.5: Análisis de la varianza de log y/s

Como quiera que $F_{1,4} (.95) = 7.71$ y $F_{2,4} (.95) = 6.94$ no aparece ningún efecto que sea

significativo.

Como estas pruebas F son únicamente indicativas, añaden las sumas de cuadrados de los efectos menos significativos a la suma de cuadrados residual. (Con riesgo de subestimar la variabilidad del sistema) y obtienen la siguiente Tabla de análisis de la varianza (Tabla 4.6)

Fuente de variación	grados de libertad	sumas de cuadrados	cuadrados medios	F
A	1	0.2399	0.2399	9.56 *
E	2	0.0804	0.0402	1.60
F	2	0.2210	0.1105	4.40 *
Residual	12	0.3010	0.0251	

Tabla 4.6: Análisis de la varianza de log y/s combinando la suma de cuadrados residual

Como $F_{1,12}(.95) = 4.75$ y $F_{2,12}(.95) = 3.89$ los factores A, dimensión de la máscara y F apertura aparecen como significativos (aproximadamente) con una confianza del 95%.

c) Conclusiones

Tras este análisis Phadke et al (en el análisis original hay un error en las sumas de cuadrados y obtienen que las variables que afectan el nivel medio son: dimensión de la máscara (A), viscosidad (B) y velocidad de rotación (C).) llegan a la conclusión de que las variables afectan al nivel de respuesta y a la variabilidad de la forma indicada en la Tabla 4.7

Factor	nivel medio	señal/ruido
A	si	si
B	si	no
C	si	no
D	no	no
E	no	no
F	no	si
G	si	no
H	no	no

Tabla 4.7: Resumen de los efectos de los factores.

A la vista de esto utilizan las variables dimensión de la máscara (A) y apertura (F) para minimizar la variabilidad, lo cual se consigue al nivel alto de A (2.5 um de máscara) y al nivel bajo de F (1) * que son los que producen una relación señal ruido más elevada. Mantienen las variables: temperatura del horno (D), tiempo de cocción (E) y tiempo de revelado (H) a los niveles standard y utilizan la viscosidad (B), velocidad de rotación (C) y tiempo de exposición (G) para ajustar el nivel al valor deseado.

Finalmente, advierten que el experimento no permitía estimar interacciones y que por tanto es necesario realizar un experimento en las condiciones óptimas para confirmar las conclusiones.

* En realidad por razones históricas que no especifican escogen el nivel 2 de F a pesar de señalar que el experimento indica que se debe emplear el 1.

4.3 SOLUCION SEGUN EL NUEVO METODO PROPUESTO EN EL CAPITULO 3

A pesar de que el método propuesto en el capítulo 3 se refiere únicamente al cálculo de la variabilidad hay algunos puntos respecto al análisis de los efectos sobre el nivel que creo conveniente comentar.

a) Efectos sobre el nivel.

En su análisis Phadke et al ignoran por completo las réplicas para obtener una estimación de la varianza y únicamente utilizan los cuatro grados de libertad que restan en el diseño.

Si se actúa como Draper y Smith (1982) y se utilizan las réplicas para calcular una estimación del "error puro" se puede comprobar la bondad del ajuste del modelo al compararla con la estimación del "error por falta de ajuste" obtenida con los cuatro grados de libertad sobrantes en el modelo.

La suma de cuadrados debida al error puro se calcula a partir de las réplicas en un mismo punto experimental según la ecuación 4.3.

$$SC(\text{error puro}) = \sum_{j=1}^N \sum_{u=1}^{n_j} (y_{j,u} - \bar{y}_j)^2 \quad (4.3)$$

donde N es el número de condiciones experimentales y n_j es el número de réplicas en cada una de ellas. La aplicación de la ecuación 4.3 a los datos proporciona

$$SC(\text{error puro obs. indiv.}) = 2.477$$

Para observaciones individuales, con lo que para medias de 10 observaciones sería:

$$\begin{aligned} SC(\text{error puro medias}) &= \frac{SC(\text{error puro obs. indiv.})}{10} \\ &= \frac{2.477}{10} = 0.2477 \end{aligned}$$

con

$$V_{EP} = 15 \times 9 + 3 \times 4 = 147 \text{ grados de libertad}$$

ya que 15 condiciones experimentales están replicadas diez veces y 3 lo están únicamente cinco veces.

El cociente entre los cuadrados medios por falta de ajuste y por error puro proporciona una prueba F

$$F = \frac{SC(\text{falta ajuste})/V_{FA}}{SC(\text{error puro})/V_{EP}} \quad (4.4)$$

Substituyendo los valores en 4.4 se obtiene

$$F = \frac{.115/4}{.2477/147} = 17.06$$

que comparado con la distribución de la F de Snedecor con 4 y 147 grados de libertad resulta significativo con una confianza muy superior al 99%.

Con lo que hay clara evidencia de que los cuatro grados de libertad sobrantes en el modelo no están estimando el error experimental sino términos no presentes en el modelo, es decir interacciones.

Hay también evidencia de que la variación entre placas es mayor que la variación dentro de cada placa, sin embargo el estudio de este efecto queda fuera de los objetivos del experimento.

Otro aspecto ignorado en el análisis original es la división de los efectos en cuadráticos y lineales. Ya que la mayoría de los factores del diseño intervienen a tres niveles es posible y conveniente estudiar si sus efectos son cuadráticos o lineales.

Finalmente, siempre es conveniente estimar los efectos (no limitarse a la suma de cuadrados) ya que estos informan de lo que cambia la respuesta al cambiar el nivel de la variable y como quiera que a partir de la desviación tipo del error experimental se puede obtener la desviación tipo de los efectos también permiten estudiar su significación sin necesidad de recurrir a las sumas de cuadrados.

Con estas consideraciones los efectos calculados son los de la Tabla 4.9. En este caso debido a la existencia de efectos lineales y cuadráticos los efectos se han calculado utilizando la ecuación (4.5) con el objeto de igualar sus varianzas

$$b = (x'x)^{-1/2}(x'x)^{-1}x'y \quad (4.5)$$

donde b es el vector de efectos estimados x es la matriz de diseño e y es el vector de observaciones.

Con ello se consigue que $V(b) = V(Y)$ ya que la varianza de b siguiendo la ecuación 4.5 es

$$V(b) = (x'x)^{1/2}(x'x)^{-1}x'x(x'x)^{-1}(x'x)^{1/2}V(Y)$$

Como $(x'x)$ es una matriz diagonal

$$V(b) = V(Y)$$

y por tanto todos los efectos tienen la misma varianza.

Si se quiere recuperar el valor de los efectos cuando se cambia de nivel la variable hay que aplicar la ecuación (4.6)

$$\begin{aligned} \text{efecto lineal al} \\ \text{cambiar de nivel} &= 2(x'x)^{-1/2}b \\ & \hspace{15em} (4.6) \\ \text{efecto cuadrático al} \\ \text{cambiar de nivel} &= (x'x)^{-1/2}b \end{aligned}$$

Utilizando únicamente el error puro para calcular la desviación tipo de los efectos se obtiene.

$$S(\text{efecto}) = \frac{SC(\text{error puro medio})}{V_{EP}} = 0.041$$

Ya que como se ha visto anteriormente, en este caso la varianza de los efectos es igual a la varianza de las observaciones.

Factores	efecto estimado
A (lineal)	0.8075 ***
B (lineal)	-0.9300 ***
C (lineal)	0.8535 ***
C (cuadrático)	-0.1918 ***
D (lineal)	0.1300 ***
E (lineal)	0.0199
E (cuadrático)	0.0442
F (lineal)	-0.0961 **
F (cuadrático)	-0.1498 ***
G (lineal)	-1.4705 ***
G (cuadrático)	0.0652
H (lineal)	0.9398 ***
H (cuadrático)	0.2437 ***

*** efectos significativos con el 99% de confianza
 ** " " " " 95% " "

Tabla 4.9: Efectos sobre el nivel y significación

Como se puede apreciar en la Tabla 4.9 todos los factores afectan el nivel tanto de forma lineal como cuadrática (los que estaban a tres niveles) excepto el E que no afecta de forma ni lineal ni cuadrática y el G que sólo lo hace de forma lineal.

El hecho de haber encontrado casi todos los efectos significativos parece contradecir el principio del "efect sparsity" sin embargo pueden haber dos explicaciones para ello. En primer lugar podría ser que el conocimiento de los ingenieros sobre el proceso fuese bueno y que por tanto hayan escogido experimentar con las ocho variables (el proceso es muy complejo y por tanto intervienen en él un gran número de variables) que les parecían más importantes y que a la postre han resultado serlo. Y en segundo lugar se ha visto que hay interacciones importantes (aunque no se puede estimar cuales) y como los efectos principales están confundidos con las interacciones podría suceder que algunos de los efectos que parecen importantes en realidad no lo fuesen, sino que lo fuese alguna interacción confundida con ellos

b) efectos sobre la dispersión

Antes de aplicar el método expuesto en el capítulo 3 creo conveniente resaltar que como se ha visto en el apartado anterior, la variabilidad entre placas es mayor que dentro de la misma placa, y que por tanto las desviaciones tipo obtenidas para las condiciones experimentales 5, 15 y 18 (en las que sólo se disponía de una placa) es posible que estén subestimadas con respecto al resto de las condiciones experimentales.

Siguiendo el método propuesto hay que analizar el logaritmo en base e de las desviaciones tipo en cada condición. Sus valores aparecen en la Tabla 4.10

Condición experimental	log s
1	-2.4925
2	-2.1236
3	-1.7591
4	-1.7743
5	-2.2018
6	-2.1473
7	-2.6339
8	-1.5602
9	-1.8865
10	-1.6544
11	-2.6971
12	-2.0406
13	-2.4651
14	-2.3393
15	-3.2571
16	-2.6507
17	-1.8522
18	-3.0513

Tabla 4.10 Valores del log s para las 18 condiciones experimentales

Para el cálculo de las desviaciones tipo de las observaciones individuales utilizo la Tabla 3.2 con 9 grados de libertad para las 15 estimaciones de s basadas en 10 observaciones, y con 4 grados de libertad para las 3 desviaciones tipo basadas en 5 observaciones. Con lo que se obtiene

$$S_{10H} \approx (9) = 0.249$$

$$S_{10H} \approx (4) = 0.391$$

Como quiera que en todos los efectos calculados intervienen las 18 estimaciones de s, hago una media ponderada y se obtiene

$$S_{10H} \approx = \frac{15 S_{10H}^2 \approx (9) + 3 S_{10H}^2 \approx (4)}{18} = 0.275$$

Calculando los efectos de forma totalmente análoga a la anterior (ecuación 4.5) para que tengan igual variabilidad, se obtiene que la desviación tipo de los efectos (recuérdese que ahora son efectos sobre la variabilidad) es igual a la desviación tipo de las observaciones (recuérdese que ahora son desviaciones tipo). Por tanto

$$S (\text{efectos sobre log s}) = 0.275$$

Los efectos calculados según la ecuación 4.5 aparecen con su significación en la Tabla 4.11

Factores	efecto estimado
A (lineal)	-0.8125 **
B (lineal)	-0.4035
C (lineal)	-0.1417
C (cuadrático)	0.3808
D (lineal)	-0.2447
E (lineal)	0.0676 ***
E (cuadrático)	-0.5002
F (lineal)	2.0450 ***
F (cuadrático)	0.0546
G (lineal)	-1.5138 ***
G (cuadrático)	0.3531
H (lineal)	0.1871
H (cuadrático)	0.0664

*** efectos significativos con el 99% de confianza

** " " " " " " 95% " "

Tabla 4.11: Efectos sobre la variabilidad y significación.

A pesar de que el log s no sigue una ley normal al ser cada efecto una combinación lineal de 18 estimaciones, por efecto del límite central, la distribución de los efectos está muy cerca de la normalidad (capítulo 3) y por tanto he utilizado esta ley para hallar los niveles de significación.

En la Tabla 4.11 se puede observar que las variables que afectan significativamente la variabilidad de la respuesta lo hacen todas de forma lineal y son:

- A-> Dimensión de la máscara
- E-> Tiempo de cocción
- F-> Apertura
- G-> Tiempo de exposición

c) Conclusiones

Tras este análisis, la Tabla 4.12 resume los efectos de los factores sobre el nivel y sobre la variabilidad.

A la vista de la Tabla 4.12 se recomienda utilizar las variables A, B, F y G para minimizar la variabilidad. Esto se conseguiría situando

- A-> nivel alto
- E-> nivel bajo
- F-> nivel bajo
- G-> nivel alto

Y posteriormente utilizar las variables B, C, D y H para ajustar el nivel al valor deseado. Hay que tener presente que las variables C y H tienen un efecto cuadrático además del lineal.

Factor	afectan			
	nivel medio		variabilidad	
	lineal	cuadrático	lineal	cuadrático
A	si	-	si	-
B	si	-	no	-
C	si	si	no	no
D	si	-	no	-
E	no	no	si	no
F	si	si	si	no
G	si	no	si	no
H	si	si	no	no

Tabla 4.12: Cuadro resumen de efectos significativos

Obsérvese que en este caso no ha habido ningún factor inerte, cuatro factores que afectan el nivel pero no la variabilidad (los anteriormente citados B, C, D y H) y un factor que afecta la variabilidad pero no el nivel, el factor E, el resto afectan al nivel y a la variabilidad.

4.4 COMPARACION DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Para una mejor comparación en la Tabla 4.13 aparecen conjuntamente las Tablas 4.7 y 4.12 de resumen de los efectos según los dos métodos. A pesar de que hay discrepancias entre los dos análisis de los efectos sobre el nivel, como ya han sido comentadas y no forman parte específica de esta tesis me voy a limitar ahora a comparar y comentar los resultados de los análisis sobre la variabilidad.

factor	media Método Taguchi	efectos sobre variabilidad				
		Nuevo método		Método Taguchi		
		L	C	L	C	
A	si	si	-	si	si	-
B	si	si	-	no	no	-
C	si	si	si	no	no	no
D	no	si	-	no	no	-
E	no	no	no	no	si	no
F	no	si	si	si	si	no
G	si	si	no	no	si	no
H	no	si	si	no	no	no

Tabla 4.13: Comparación de resultados con los dos métodos

Obsérvese que con el método de Taguchi sólo se detectan dos factores que afectan la variabilidad (el radio señal-ruído) que son el A y el F, mientras que con el nuevo método se detectan 4 factores, los dos anteriores más el E y el G.

El método de Taguchi no ha detectado los efectos sobre la variabilidad de E y G debidos a la utilización del cociente señal-ruído.

Veamos porqué. En la Tabla 4.14 aparecen las respuestas medias y las desviaciones tipo medias para los distintos niveles de las variables A, E, F y G.

nivel factor	respuesta media			desviación tipo media		
	-	0	+	-	0	+
A	2.48		2.90	.13		.10
E	2.68	2.66	2.69	.11	.09	.14
F	2.68	2.73	2.63	.08	.12	.14
G	2.90	2.66	2.48	.13	.13	.09

Tabla 4.14: Respuestas medias y desviaciones tipo medias para los distintos niveles de las variables A, E, F y G.

Procedo a analizar cada factor por separado

a) Factor A

Obsérvese que del nivel bajo al nivel alto la respuesta media aumenta, mientras que la desviación tipo disminuye (0.03 unidades), los efectos son pues opuestos, y el cociente señal-ruido resulta significativo.

b) Factor F

La respuesta media disminuye (muy poco) con el nivel, mientras que la desviación tipo aumenta considerablemente. El cambio en variabilidad es pues muy grande y además los efectos son de nuevo opuestos, el cociente señal-ruido resulta significativo.

c) Factor E

La respuesta media permanece prácticamente constante al cambiar del nivel bajo al alto, y la variabilidad aumenta 0.03 unidades, exactamente el mismo cambio que con la variable A. En este caso el cociente señal-ruido no detecta este cambio de variabilidad ya que no está reforzado por un cambio de signo opuesto en la respuesta media.

d) Factor G

En este caso al cambiar del nivel bajo al alto la variabilidad disminuye 0.04 unidades y el método de Taguchi tampoco lo detecta ya que la respuesta media también disminuye con lo que el cociente señal-ruido permanece más o menos constante.

Es por ello que el método propuesto, analizar el log S es más eficaz para la detección de efectos sobre la variabilidad que los hasta ahora utilizados. Y ello independientemente de la relación que exista entre la variabilidad y el nivel.

Otra ventaja importante es el conocer teóricamente la distribución de log S ya que ello permite obtener los niveles de significación sin necesidad de disponer de grados de libertad extra. Además si se utilizan diseños altamente fraccionados, como en el ejemplo que nos ocupa, es muy probable que la suma de cuadrados correspondiente a esos grados de libertad esté estimando alguna interacción no incluida en el modelo en lugar de estimar el ruido.

En el apartado 4.3a se ha visto como ésto sucedía en el caso de los efectos sobre el nivel. Si se calculasen las sumas de cuadrados para el log S, se obtendría $SS_{\text{residual}} = 0.6443$ con 4 grados de libertad lo cual

produce una estimación de la desviación tipo residual $S_{res} = 0.401$ que es sensiblemente mayor que ($S_{res} = 0.275$) la obtenida por consideraciones teóricas, lo cual incita a pensar que en efecto está, como en el caso del nivel, estimando términos no incluidos en el modelo.

Así, pues, las dos ventajas fundamentales del nuevo método, propuesto en la sección 3.5, para estudiar efectos sobre la variabilidad son:

a) El log S es mucho más sensible a cambios en la variabilidad y no se ve afectado por cambios en el nivel medio.

b) Se puede deducir teóricamente la distribución del log S (sin otra asunción que las ya necesarias para el estudio de efectos sobre el nivel, observaciones normales e independientes) lo cual permite hallar niveles de significación sin necesidad de disponer de grados de libertad extra.

APENDICE 1

A.1 PROGRAMA PARA LA ASIGNACION DE VARIABLES A FACTORES DE FORMA QUE SE OBTENGA LA MEJOR PROYECCION

c ULTIMA REVISION 850516

c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c

PROGRAMA PROJ2

Si se aumenta el valor limite de p, hay que cambiar congruentemente las dimensiones de todas las variables que tienen 128. Si se aumenta el valor limite de n, hay que cambiar congruentemente las dimensiones de todas las variables que tiene 12.

Definicion de variables y dimensiones

integer*2 p,n,a,b
integer*2 dr(128,12)
integer*2 c(8,12)
character nom*6

c
c
c

Preparacion fichero (nom) para grabar deldr.

write(*,*) 'entre el nombre del experimento (6 letras)'
read(*,5) nom
5 format(a6)
open(9,file=nom,status='NEW')

c
c
c

Entrada de parametros del diseno

write (*,*) 'trabajamos con un diseno 2** $(n-p)$ '
write (*,'(a\)') ' (max 12) input n='
read (*,'(i6)') n
write (*,'(a\)') ' (max 8) input p='
read (*,'(i6)') p

c
c
c

Numero de palabras en la relacion de definicion=a.

a=(2**p)-1

c
c
c

Entrar los generadores.

c
10

write(*,10) p
format(' Entre los ',i2,' generadores.')

11

do 30 i=1,p
write(*,11) i
format (' Cuantos factores intervienen en el generador '
*,i2,'?')

12

read(*,*) if
write(*,12)if
format(' Cuales son esos ',i2,' factores ?')
read(*,*) (c(i,k),k=1,if)

```

        do 20 j=1,n
            dr(i,j)=0
20      continue
30      continue
c
c          traducir los generadores de formato BHH a 0 y 1 en dr
c
        do 100 i=1,p
            do 90 j=1,n
                dr(i,c(i,j))=1
90      continue
100     continue
c
c          Final de la entrada de datos.
c
c
c          Llamada a la subrutina defrel para calcular la rela-
c          cion de definicion.
c
        call defrel(n,a,p,dr)
c
c          Grabar el archivo 9 con la relacion de definicion.
c
                write(9,310) n,a,p
310         format(lx,i2,lx,i3,lx,i2)
                do 330 i=1,a
                    do 320 j=1,n
                        write(9,311) dr(i,j)
311         format(lx,i1,lx,\)
320         continue
                    write(9,*)
330         continue
c
c          Llamada a la rutina selecl para seleccionar los fac-
c          tores a eliminar.
c
        call selecl(p,n,a,dr)
c
c          Acabar
c
        end
c
c          Rutina defrel (calcula relacion de definicion).
c
        subroutine defrel(n,a,p,dr)
c
c          Definicion de variables.
c
        integer*2 n,a,p,w(8),dr(128,12)
c
c          Calculo de w. Determinacion de la posicion de los
c          productos de c generadores en la matriz relacion de
c          definicion (dr).
c
        w(1)=p

```

```

    if(p.eq.1) goto 9900
    do 350 i=2,p
        w(i)=w(i-1)*(p-i+1)/i
350  continue
    do 360 i=2,p
        w(i)=w(i)+w(i-1)
360  continue
c
c      Comienza el proceso de hallar la relacion de defini-
c      cion. Si se aumentase p el numero de iteraciones del
c      proceso se debe aumentar en concordancia.
c
c      Si solo hay un generador el es la rel. def.
c
    if(p.eq.1) goto 9900
c
c      productos de dos generadores.
c
    do 9000 i1=1,p-1
        do 8990 i2=i1+1,p
            w(1)=w(1)+1
            do 1000 k=1,n
                dr(w(1),k)=dr(i1,k)+dr(i2,k)
                if(dr(w(1),k).ne.2) goto 1000
                dr(w(1),k)=0
1000  continue
            if(p.eq.2) goto 8990
c
c      productos de tres generadores.
c
    do 8980 i3=i2+1,p
        w(2)=w(2)+1
        do 1010 k=1,n
            dr(w(2),k)=dr(w(1),k)+dr(i3,k)
            if(dr(w(2),k).ne.2) goto 1010
            dr(w(2),k)=0
1010  continue
        if(p.eq.3) goto 8980
c
c      productos de cuatro generadores.
c
    do 8970 i4=i3+1,p
        w(3)=w(3)+1
        do 1020 k=1,n
            dr(w(3),k)=dr(w(2),k)+dr(i4,k)
            if(dr(w(3),k).ne.2) goto 1020
            dr(w(3),k)=0
1020  continue
        if(p.eq.4) goto 8970
c
c      productos de cinco generadores.
c
        do 8960 i5=i4+1,p
            w(4)=w(4)+1

```

```

do 1030 k=1,n
  dr(w(4),k)=dr(w(3),k)+dr(i5,k)
  if(dr(w(4),k).ne.2) goto 1030
  dr(w(4),k)=0
1030    continue
        if(p.eq.5) goto 8960
c
c      productos de seis generadores.
c
do 8950 i6=i5+1,p
  w(5)=w(5)+1
  do 1040 k=1,n
    dr(w(5),k)=dr(w(4),k)+dr(i6,k)
    if(dr(w(5),k).ne.2) goto 1040
    dr(w(5),k)=0
1040    continue
        if(p.eq.6) goto 8950
c
c      productos de siete generadores.
c
do 8940 i7=i6+1,p
  w(6)=w(6)+1
  do 1050 k=1,n
    dr(w(6),k)=dr(w(5),k)+dr(i7,k)
    if(dr(w(6),k).ne.2) goto 1050
    dr(w(6),k)=0
1050    continue
        if(p.eq.7) goto 8940
c
c      productos de ocho generadores.
c
do 8930 i8=i7+1,p
  w(7)=w(7)+1
  do 1060 k=1,n
    dr(w(7),k)=dr(w(6),k)+dr(i8,k)
    if(dr(w(7),k).ne.2) goto 1060
    dr(w(7),k)=0
1060    continue
        if(p.eq.8) goto 9900
8930    continue
8940    continue
8950    continue
8960    continue
8970    continue
8980    continue
8990    continue
9000    continue
9900    write(*,*)
        write(*,*)
        write(*,*)
        return
        end
c
c  ULTIMA REVISION 850522

```

```

c
c
c
c
c      subroutine selecl
c
c      Esta subrutina selecciona filas de rd candidatas a ser
c      borradas.
c
c
c      subroutine selecl(p,n,a,dr)
c
c      Definicion de parametros
c
integer*2 p,n,on,a,oa,concol,in
integer*2 numf,numc,concep,ncc,numcer,nf,nff
integer*2 dr(128,12),odr(128,12)
integer*2 rs(128),ors(128)
integer*2 cs(12),ocs(12),ocol(12),delcol(12),concer(12)
c
c      inicilizacion de las matrices odr y ocol. Y de
c      oa,on,concol e in.
c
concol=0
in=n
5  continue
do 20 i=1,a
do 10 k=1,n
odr(i,k)=dr(i,k)
10  continue
20  continue
do 30 k=1,n
ocol(k)=k
30  continue
oa=a
on=n
c
c      inicializacion de ors (row sum) suma de filas.
c
100 continue
do 110 i=1,oa
ors(i)=0
110 continue
c
c      Calculo de la suma de filas de odr.Guardada en ors.
c
do 210 i=1,oa
do 200 k=1,on
ors(i)=ors(i)+odr(i,k)
200 continue
210 continue
c
c      Ordenar odr segun lo que suman las filas (ors)
c
istat=1
call sortl(odr,ors,oa,on)

```



```

c
c      detecta cuantas filas tienen suma minima y lo almacena
c      en numf
c
c      do 300 i=1,oa
c          if(ors(i).ne.ors(1)) goto 310
300  continue
310  numf=i-1
c
c      Inicializa ocs (col sum) suma de columnas.
c
c      do 400 k=1,on
c          ocs(k)=0
400  continue
c
c      Almacena en ocs la suma de las columnas del trozo de
c      odr que tiene minima suma de filas.
c
c      do 510 k=1,on
c          do 500 i=1,numf
c              ocs(k)=ocs(k)+odr(i,k)
500  continue
510  continue
c
c      Ordena odr segun lo que suman las columnas (del trozo
c      de odr que tiene minima suma de filas) ocs.
c
c      call sort2(odr,ocs,oa,on,ocol)
c
c      Detecta cuantas columnas tienen suma maxima y lo
c      guarda en numc
c
c      do 600 k=1,on
c          if(ocs(k).ne.ocs(1)) goto 610
600  continue
610  numc=k-1
c
c      Comprobar si numc=1. Si lo es borrar esa columna de dr
c      (rutina deldr).
c
c      if(numc.ne.1) goto 650
c      call deldr(concol,delcol,ocol(1),dr,a,n,p,in)
c
c      Si en deldr no se ha acabado el proceso. Volver a
c      empezar para detectar la siguiente columna a borrar.
c
c      goto 5
650  continue
c
c      Comprobar si todas las filas suman lo mismo (numf=oa)
c
c      if(numf.ne.oa) goto 700
c      call selec2(ocol,on,dr,a)
c      call deldr(concol,delcol,ocol(1),dr,a,n,p,in)
c      goto 5

```

```

c
c      Compara dos a dos a las columnas con maxima suma en las
c      filas con minima suma para borrar la mas conveniente
c      pensando en el futuro.
c
c      Inicializa concer a 1000, y concep a 0
c
700  continue
      concep=0
      do 710 i=1,12
          concer(i)=1000
710  continue
c
c      Bucle de comparacion.
c
      do 750 i=1,numc
          do 740 j=1,on
              if(i.eq.j) goto740
              do 730 k=1,numf
                  if((odr(k,i).ne.o).or.(odr(k,j).ne.o)) goto 730
                  concep=concep+1
730  continue
                  if(concep.gt.concer(i)) goto 735
                  concer(i)=concep
735  concep=0
740  continue
750  continue
c
c      Ordena odr por columnas segun el numero de ceros en
c      comun (del trozo de odr con minima suma de filas y
c      maxima de columnas)
c      concer.
c
      call sort4(odr,concer,oa,on,ocol)
c
c      Detecta cuantas columnas tienen numero de ceros en
c      comun minimo.
c
      do 800 k=1,on
          if(concer(k).ne.concer(1)) goto 810
800  continue
810  numcer=k-1
850  continue
c
c      Ver cuantas filas hay con la misma longitud (la si-
c      guiente a la ultima revisada.
c
      ncc=numcer
      nf=numf+1
860  continue
      do 870 i=nf,oa
          if(ors(i).ne.ors(nf)) goto 880
870  continue
880  nff=i-1
c

```

```

c          Inicializar ocs
c
do 890 k=1,ncc
    ocs(k)=0
890 continue
do 900 k=ncc+1,on
    ocs(k)=1000
900 continue
c
c          Detectar que columnas tienen mas unos en el grupo de
c          palabras seleccionadas.
c
do 920 k=1,ncc
do 910 i=1,nff
    ocs(k)=ocs(k)+odr(i,k)
910 continue
920 continue
call sort4(odr,ocs,oa,on,ocol)
do 930 k=1,on
    if(ocs(k).ne.ocs(1)) goto 940
930 continue
940 ncc=k-1
c
c          Comprobar si el numero de columnas es uno, si lo es
c          borrar esa columna.
c
if(ncc.ne.1) goto 950
call deldr(concol,delcol,ocol(1),dr,a,n,p,in)
goto 5
950 continue
c
c          Comprobar si se han mirado todas las palabras. Si si ir
c          a selec2.
c          Si no ir a nueva longitud.
c
nf=nff+1
if(nf.lt.oa) goto 860
call selec2(ocol,ncc,dr,a)
call deldr(concol,delcol,ocol(1),dr,a,n,p,in)
goto 5
return
end
c
c ULTIMA REVISION 850415
c
c
c          SUBROUTINE SELEC2
c
c          Esta rutina selecciona una columna de dr entre ocol(1) y
c          ocol(numc) que no este repetida en este grupo (fuera es
c          imposible que lo este). Si todas estan repetidas, escoge
c          la que lo esta menos veces. Si el empate persiste escoge
c          una al azar.
c          Situa la columna elegida en la posicion ocol(1).

```

```

c
subroutine selec2(ocol,numc,dr,a)
c
c      Definicion de variables.
c
integer*2 ocol(12),numc,dr(128,12),a
integer*2 equ(12),indi(12,2),min(2),conegu
c
c      inicializacion de indi y conegu
c
do 10 j=1,numc
  i=ocol(j)
  indi(j,1)=i
  indi(j,2)=0
10 continue
conegu=0
c
c      Proceso de seleccion de la columna.
c
do 100 jl=1,numc
  il=ocol(jl)
  do 50 j2=jl+1,numc
    i2=ocol(j2)
    if(conegu.eq.0) goto 35
c
c      Comprueba que no sea una columna que ya hemos detectado
c      que es igual a una anterior.
c
    do 30 l=1,conegu
      if(i2.eq.equ(l)) goto 50
30 continue
c
c      Comprueba si dos columnas son iguales.
c
35    do 40 k=1,a
      if(dr(k,il).ne.dr(k,i2)) goto 50
40    continue
c
c      Si son iguales incrementa conegu, actualiza equ e incre-
c      menta indi( ,2)
c
      conegu=conegu+1
      equ(conegu)=i2
      indi(jl,2)=indi(jl,2)+1
50 continue
c
c      Si todos los elementos de una columna son cero pone el
c      indi a 2000 para no borrarla.
c
do 55 k=1,a
  if(dr(k,il).ne.0) goto 60
55 continue
indi(jl,2)=2000
goto 100
60 indi(jl,2)=indi(jl,2)+1

```

```

100  continue
c
c
c
      do 200 i=1,numc
          if(indi(i,2).ne.0) goto 200
          indi(i,2)=1000
200  continue
      min(2)=indi(1,2)
      min(1)=indi(1,1)
      do 300 i=1,numc
          if(indi(i,2).ge.min(2)) goto 300
          min(2)=indi(i,2)
          min(1)=indi(i,1)
300  continue
      ocol(1)=min(1)
      return
      end

c
c ULTIMA REVISION 850214
c
c
c
c      subroutine deldr
c
c          Esta rutina borra una columna (ocolnum) de dr, (borra
c          esta columna y las filas donde tiene unos), halla la
c          nueva matriz dr y escribe las columnas borradas hasta
c          ahora y el diseno resultante.
c
c          subroutine deldr(concol,delcol,ocolnum,dr,a,n,ip,in)
c
c              definicion de parametros y variables.
c
c              integer*2 concol,delcol(12),odelcol(12),ocolnum,dr(128,12)
c              integer*2 a,n,dup,cona,in,p,ip,r,sdr(128),onum
c              integer*2 nconcol,lastvar(12)
c
c              inicializacion de cona.
c              actualizacion de concol,delcol
c
c              cona=0
c              call sort3(delcol,concol,odelcol)
c              onum=ocolnum
c              do 10 i=1,concol
c                  if(odelcol(i).gt.onum) goto 10
c                  onum=onum+1
10  continue
      concol=concol+1
      delcol(concol)=onum
      i=0

c
c          borrar las filas donde la columna seleccionada tiene
c          unos.
c
c

```

```

70  if(i.gt.a) goto 110
    if(dr(i,ocolnum).eq.0) goto 100
    do 90 il=i,a
      do 80 k=1,n
        dr(il,k)=dr(il+1,k)
80    continue
90    continue
    cona=cona+1
    goto 70
100  i=i+1
    goto 70
c
c    borrar la columna seleccionada
c
110  continue
    do 210 k=ocolnum,n
      do 200 i=1,a
        dr(i,k)=dr(i,k+1)
200  continue
210  continue
c
c    actualiza a y n
c
    a=a-cona
    n=n-1
c
c    calcula la resolucion
c
    do 220 i=1,a
      sdr(i)=0
220  continue
    do 240 i=1,a
      do 230 k=1,n
        sdr(i)=sdr(i)+dr(i,k)
230  continue
240  continue
    r=sdr(1)
    do 250 i=1,a
      if(r.le.sdr(i)) goto 250
      r=sdr(i)
250  continue
c
c    escribe el diseno resultante
c
    aaa=a
    p=(alog(aaa+1)/alog(2.))
    dup=((2**((in-ip)))/(2**((n-p))))-1
    write(*,300) concol
300  format(' Si sospecha que ',i2,' variables no seran ',
*      ' significativas, asignelas a:')
    do 320 i=1,concol
      write(*,310) delcol(i)
310  format(lx,i2,lx,\)
320  continue
    write(*,*)

```

```

write(*,330) n,p,r,dup
330 format(23x,i2,'-',i2,/, ' y obtendra un diseno 2      de',
*      'resolucion ',il,' duplicado ',il,' veces',/, '
*      'en las restantes variables.')
write(*,*)
write(*,*)
if(a.eq.1) goto 500
return
500 continue
nconcol=concol+1
write(*,510) nconcol
510 format(' Si sospecha que ',i2,' variables no seran significativ'
*      'as asigne la que le falta',/, ' a cualquiera de: ')
il=0
do 515 i=1,n
    if(dr(l,i).eq.0) goto 515
    il=il+1
    lastvar(il)=i
515 continue
call sort3(delcol,concol,odelcol)
do 525 i=1,concol
    do 520 j=1,il
        if(odelcol(i).gt.lastvar(j)) goto 520
        lastvar(j)=lastvar(j)+1
520 continue
525 continue
write(*,*)(lastvar(i),i=1,il)
write(*,540)
540 format(/, ' y obtendra un diseno completo en las restantes variab
*      'les.',/, ' A partir de aqui sea cual sea la variable que'
*      'resulte no significativa obtendra',/, ' siempre disenos',
*      ' completos replicados.')
stop
end

```

```

c
c ULTIMA REVISION 850415

```

```

c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c

```

Rutina SORT1 (Bubble sort)

Esta rutina ordena odr por filas segun le indica ors.
La que tiene menor suma (ors) la coloca en la primera
fila.

Variables de entrada odr,ors,oa,on.
Variables de salida odr.

```

subroutine sort1 (odr,ors,oa,on)
integer*2 odr(128,12),ors(128),b,t,c,oa,on
    b=oa-1
    c=0
10    do 100 l=1,b
        if(ors(l).le.ors(l+1)) goto 100

```

```

        t=ors(1)
        ors(1)=ors(1+1)
        ors(1+1)=t
        do 50 j=1,on
            t=odr(1,j)
            odr(1,j)=odr(1+1,j)
            odr(1+1,j)=t
50          continue
            c=1
100         continue
            b=c-1
            if(b.gt.0) goto 10
return
end

```

```

c
c ULTIMA REVISION 850415

```

```

c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c
c

```

Rutina SORT2 (Bubble sort)

Esta rutina ordena odr por columnas segun le indica ocs. La columna que tiene mayor suma (ocs) la coloca en la primera columna. Ademas cambia el orden en ocol al mismo tiempo que el de odr para conservar el numero original de la variable que corresponde a cada columna.

Variables de entrada odr ocs oa on ocol.
 Variables de salida odr,ocol.

```

subroutine sort2 (odr,ocs,oa,on,ocol)
integer*2 odr(128,12),ocs(12),b,t,c,ocol(12),oa,on
        b=on-1
110       c=0
        do 200 l=1,b
            if(ocs(l).ge.ocs(l+1)) goto 200
            t=ocs(l)
            ocs(l)=ocs(l+1)
            ocs(l+1)=t
            t=ocol(l)
            ocol(l)=ocol(l+1)
            ocol(l+1)=t
            do 150 j=1,oa
                t=odr(j,l)
                odr(j,l)=odr(j,l+1)
                odr(j,l+1)=t
150         continue
            c=1
200       continue
            b=c-1
            if(b.gt.0) goto 110
return
end

```



```

c
c ULTIMA REVISION 850415
c
c
c
c Rutina SORT3 (Bubble sort)
c
c Esta rutina ordena de menor a mayor los numeros en
c delcol y los devuelve ordenados en odelcol. concol
c contiene el numero de numeros a ordenar.
c
c

```

```

subroutine sort3 (delcol,concol,odelcol)
integer*2 delcol(12),odelcol(12),concol,b,t,c
do 5 i=1,concol
  odelcol(i)=delcol(i)
5  continue
  b=concol-1
10  c=0
  do 100 l=1,b
    if(odelcol(l).le.odelcol(l+1)) goto 100
    t=odelcol(l)
    odelcol(l)=odelcol(l+1)
    odelcol(l+1)=t
    c=l
100 continue
    b=c-1
    if(b.gt.0) goto 10
  return
end

```

```

c
c ULTIMA REVISION 850522
c
c
c
c Rutina SORT4 (Bubble sort)
c
c Esta rutina ordena odr por columnas segun le indica
c concol.
c La columna que tiene menor numero de ceros en comun
c (numcer) la coloca en la primera columna.
c Ademas cambia el orden en ocol al mismo tiempo que el
c de odr para conservar el numero original de la variable
c que corresponde a cada columna.
c
c Variables de entrada odr,numcer,oa,on,ocol.
c Variables de salida odr,ocol.
c
c

```

```

subroutine sort4 (odr,numcer,oa,on,ocol)
integer*2 odr(128,12),numcer(12),b,t,c,ocol(12),oa,on
110 b=on-1
  c=0
  do 200 l=1,b
    if(numcer(l).le.numcer(l+1)) goto 200

```

```
        t=numcer(1)
        numcer(1)=numcer(1+1)
        numcer(1+1)=t
        t=ocol(1)
        ocol(1)=ocol(1+1)
        ocol(1+1)=t
        do 150 j=1,oa
            t=odr(j,1)
            odr(j,1)=odr(j,1+1)
            odr(j,1+1)=t
150         continue
            c=1
200         continue
            b=c-1
            if(b.gt.0) goto 110
return
end
```

APENDICE 2

A.2 OBTENCION DE LA ESPERANZA MATEMATICA Y LA VARIANZA DE S.

Si se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño n tomada con media μ y desviación tipo σ .

entonces

$$w = (n-1) \frac{s^2}{\sigma^2} \quad (\text{A2.1})$$

se distribuye según una chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad. Despejando s se obtiene

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \sqrt{w} \quad (\text{A2.2})$$

Llamando $z = \sqrt{w}$ la z tiene una densidad de probabilidad

$$f(z) = \frac{1}{2^{(n-3)/2} \Gamma(n-1/2)} z^{n-2} e^{-z^2/2} \quad (\text{A2.3})$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} E(\sqrt{w}) \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \frac{1}{2^{(n-3)/2} \Gamma(n-1/2)} \int_0^{\infty} z^{n-1} e^{-z^2/2} dz \\ &= \frac{\sigma \sqrt{2} \Gamma(n/2)}{\sqrt{n-1} \Gamma(n-1/2)} \end{aligned} \quad (\text{A2.4})$$

y como

$$V(S) = E(S^2) - [E(S)]^2 \quad (\text{A2.5})$$

y análogamente se halla

$$E(S^2) = \sigma^2 \quad (\text{A2.6})$$

Sustituyendo (A2.5) y (A2.3) en (A2.4) se halla

$$V(S) = \left[(n-1) - \left(\frac{\sigma \sqrt{2} \Gamma(n/2)}{\Gamma(n-1/2)} \right)^2 \right] \frac{\sigma^2}{n-1} \quad (\text{A2.7})$$

que son las fórmulas que (3.26) y (3.27) que se quería justificar.

APENDICE 3

A.3 JUSTIFICACION DE LA APROXIMACION $V(\log s) = \frac{1}{2(n-1)}$

Se ha visto ya (Sección 3.5.3.1) que si $X \sim N(\mu, \sigma)$ y se toma una muestra aleatoria simple, entonces

$$W = (n-1) \frac{s^2}{\sigma^2} \quad (A3.1)$$

Se distribuye según X^2 con $n-1$ grados de libertad.

Con lo que

$$E(W) = (n-1)$$

$$V(W) = 2(n-1) \rightarrow DT(W) = \sqrt{2(n-1)}^{1/2} \quad (A3.2)$$

De manera que la desviación tipo depende de la media. Tal como se ha visto en la sección 3.2 aplicando la transformación raíz cuadrada se consigue estabilizar la varianza, de modo que.

$$Y = \sqrt{w} \quad (A3.3)$$

es tal que

$$V(Y) = (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2 \quad (A3.4)$$

A partir de A3.1 se obtiene que

$$S = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \sqrt{w} \quad (A3.5)$$

$$V(S) = \frac{\sigma^2}{n-1} V(\sqrt{w}) = \frac{\sigma^2}{n-1} \frac{1}{2}$$

con lo que

$$DT(S) = \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}} \quad (A3.6)$$

y como quiera que

$$E(S) = \sigma \quad (A3.7)$$

Resulta que $DT(S) = KE(S)$ con lo que como se vió en la sección 3.2 la transformación logarítmica estabiliza la

varianza y resulta

$$DT(\log S) = \frac{1}{2(n-1)} \quad (A3.8)$$

Como se ve, este resultado se ha obtenido a base de dos aproximaciones lineales.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

ADDELMAN, S. (1962), 'Orthogonal Main-Effect Plans for Asymmetrical Factorial Experiments', *Technometrics*, 4, 21-46.

AHRENS Y DIETER (1974), 'Computer Methods for Sampling from Gamma, Beta, Poisson, and Binomial Distributions', *Computing*, 12, 927.

BOX G.E.P. (1954), 'The Exploration and Exploitation of Response Surfaces: Some General Considerations and Examples', *Biometrics*, 10, 16-20.

BOX G.E.P. (1985), 'Discussion', *Journal of Quality Technology*, 17, 4, 189-190.

BOX G.E.P. Y BEHNKEN D.W. (1960), 'Some New Three Level Designs for the Study of Quantitative Variables', *Technometrics*, 2, 455-475.

BOX G.E.P. Y COX D.R. (1964), 'An Analysis of Transformations', *J.R.S.S.*, B26, 211-243.

BOX G.E.P. Y DRAPER N.R. (1969), *Evolutionary Operations*, New York: John Wiley.

BOX G.E.P. Y DRAPER N.R. (1975), 'Robust Designs', *Biometrika*, 62, 347-352.

BOX G.E.P. Y HUNTER J.S. (1961), 'Fractional Factorial Designs. Part I - II', *Technometrics*, 3, 311-351 y 449-458.

BOX G.E.P., HUNTER W.G. Y HUNTER J.S. (1978), *Statistics for Experimenters*, New York: John Wiley.

BOX G.E.P., HUNTER W.G. Y JOINER B.L. (1984), *Quality Control and Industrial Experimentation*. En preparación.

BOX G.E.P. Y MEYER R.D. (1984), 'Analizing Two Level Fractional Factorial Experiments for Possible Dispersion Effects', University of Wisconsin M.R.C. Tech. Report #2746.

BOX G.E.P. Y MEYER R.D. (1985), 'Studies in Quality Improvement I: Dispersion Effects from Fractional Designs', University of Wisconsin M.R.C. Tech. Report #2796.

- BOX G.E.P. Y WILSON K.B. (1951), 'The Experimental Attainment of Optimum Conditions', J.R.S.S., B13, 1-45.
- BURTON R.C. Y CONNOR W.S. (1957), 'On the Identity Relationship for Fractional Replicates in the 2^n Series', Ann. Math. Statist., 28, 762-767.
- COCHRAN W.G. Y COX G.M. (1954), Experimental Designs, New York: John Wiley.
- CONNOR W.S. Y YOUNG S. (1961), 'Fractional Factorial Designs for Experiments with Factors at Two and Three Levels', National Bureau of Standards, Applied Math. Series 58.
- DANIEL C. (1976), Applications of Statistics to Industrial Experimentation, New York: John Wiley.
- DAVIES O.L. (ed.) (1954), Design and Analysis of Industrial Experiments, New York: Hafner Press (MacMillan).
- DEGROOT M.H. (1975), Probability and Statistics. Addison Wesley.
- DRAPER N.R. Y SMITH H. (1982), Applied Regression Analysis (2nd ed.), New York: John Wiley.
- EASTERLING R.G. (1985), 'Discussion', Journal of Quality Technology, 17, 4, 191-192.
- FINNEY D.J. (1945), 'Fractional Replication of Factorial Arrangements', Annals of Eugenics, 12, 291-301.
- FISHER R.A. (1922), 'On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics', Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser. A, 222, 309-368.
- FISHER R.A. (1926), 'The Arrangements of Field Experiments', Journal of the Ministry of Agriculture, 33, 503-513.
- FISHMAN G.S. (1976), 'Sampling from the Gamma Distribution on a Computer', CACM, 19, 407-409.
- FRANKLIN M.F. (1984), 'Constructing Tables of Minimum Aberration p^{n-m} Designs', Technometrics, 26, 225-232.
- FREUND R.A. (1985), 'Discussion', Journal of Quality Technology, 17, 4, 193-194.
- FRIES A. Y HUNTER W.G. (1980), 'Minimum Aberration 2^{k-p} Designs', Technometrics, 22, 601-608.

- HAHN G.J. (1982), 'Design of Experiments: Industrial and Scientific Applications', Encyclopedia of Statistical Sciences (vol2), New York: John Wiley, 349-359.
- HARTLEY H.O. Y JAYATILLAKE K.S.E. (1973), 'Estimation from Linear Models with Unequal Variances', JASA, 68, 189-192.
- HERZBERG A. M. (1982), 'The Robust Design of Experiments: a Review', SERDICA, 8, 223-228.
- HOGG R.V. Y CRAIG A.T. (1978), Introduction to Mathematical Statistics (4th ed.), New York: MacMillan.
- HUNTER J.S. (1985), 'Statistical Design Applied to Product Design', Journal of Quality Technology, 17, 4, 210-221.
- HUNTER W.G. (1981), 'The Practice of Statistics: the Real World Is an Idea Whose Time Has Come', The American Statistician, 35, 72-76.
- ISHIKAWA K. (1982), Guide to Quality Control (2nd ed.), Tokyo: Assian Productivity Organization.
- ISHIKAWA K. (1984), Total Quality Control: the Japanese Way, New York: John Wiley.
- JOHN P.W.M. (1971), Statistical Design and Analysis of Experiments, New York: MacMillan.
- KACKAR R. (1982), 'Some Orthogonal Arrays for Screening Designs', ATT Technical Memorandum.
- KACKAR R. (1985), 'Off-Line Quality Control, Parameter Design and the Taguchi Method', Journal of Quality Technology, 17, 4, 176-188.
- KEMPTHORNE O. (1952), The Design and Analysis of Experiments, New York: John Wiley.
- KENNEDY W.J. Y GENTLE J. E. (1980), Statistical Computing, New York: Marce Dekker.
- LUCAS J.M. (1985), 'Discussion', Journal of Quality Technology, 17, 4, 195-197.
- MYERS R.H. (1976), Response Surface Methodology. Editado por Myers.
- PHADKE M.S. (1982-83), 'Quality Engineering Using Design of Experiments', Proceedings of the American Statistical Association (Section on Statistical Education).

PHADKE M.S., KACKAR R., SPEENEY D.V. Y GRIECO M.J. (1982), 'Off-Line Quality Control in Integrated Circuit Fabrication Using Experimental Design', The Bell System Technical Journal, 62, 1273-1309.

PIGNATIELLO J.J. Y RAMBERG J.S. (1985), 'Discussion', Journal of Quality Technology, 17, 4, 198-206.

PLAKETT R.L. Y BURMAN J.P. (1946). 'The Design of Optimum Multifactorial Experiments', Biometrika, 33, 305-325.

RAGHAVARAO D. (1971), 'Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments', New York: John Wiley.

RAO C.R. (1947), 'Factorial Experiments Derivable from Combinatorial Arrangements of Arrays', J.R.S.S., b9, 128-139.

SNEDECOR G.W. Y COCHRAN G. (1980), Statistical Methods (7th ed.), Iowa University Press.

STEINBERG D.M. Y HUNTER W.G. (1984), 'Experimental Design: Review and Comment', Technometrics, 26, 71-129 (concomentarios).

TAGUCHI G. (1960), 'Tables of Orthogonal Arrays and Linear Graphs', Rep. Stat. Appl. Res., JUSE, 7, 1-52.

TAGUCHI G. (1976-77), Experimental Design, Vol I y II, Tokyo: Marzuren.

TAGUCHI G. (1979), 'Off-Line and On-Line Quality Control Systems', Proceedings of International Conference on quality Control, Tokyo.

TAGUCHI G. Y PHADKE M.S. (1984), 'Quality Engineering Through Design Optimization', Proceedings of GLOBECOM84, Atlanta, GA.

TAGUCHI G. Y WU Y. (1980), Introduction to Off-Line Quality Control', Central Japan Quality Control Association.

YATES F. (1970), Selected Papers, New York: Hafner MacMillan.