

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

**CONTRIBUCION AL DESARROLLO
DE SISTEMAS DE CONTROL DE
ESTRUCTURAS DE EDIFICACION
MEDIANTE CABLES ACTIVOS**

Autor: Francisco López Almansa
Director: José Julián Rodellar Benedé

Barcelona, Enero de 1988

CONTROL PREDICTIVO DE ESTRUCTURAS

En el esquema de control digital de la figura 1.11 el controlador implementa un algoritmo que calcula en cada instante de muestreo k la secuencia de control $\mathbf{u}(k)$ a partir de la respuesta medida $\mathbf{x}(k)$. El objetivo de este capítulo es diseñar un algoritmo de control basado en la estrategia de control predictivo.

En el apartado 4.1 se describe la estrategia de control predictivo de forma conceptual.

En el apartado 4.2 se muestra la aplicación del control predictivo al control activo de estructuras y se formula el algoritmo de control. En dicha aplicación se considera la existencia de tiempos de retardo en el lazo de control.

En el apartado 4.3 se analiza la situación particular en que no se consideran retardos.

En el apartado 4.4 se lleva a cabo un análisis de la estabilidad del control predictivo. En dicho análisis se considera la presencia de errores de modelización para estudiar la robustez del algoritmo de control respecto de los mismos.

INDICE

4.1 Estrategia de control predictivo.	4.3
4.2 Control predictivo de estructuras.	4.3
4.3 Efecto del control en el comportamiento dinámico del sistema.	4.15
4.4 Estabilidad del control predictivo.	4.19
4.4.1 Criterios de estabilidad.	
4.4.2 Influencia de λ en la estabilidad.	
4.4.3 Ejemplos numéricos.	
4.5 Conclusiones.	4.49
Referencias.	4.51

4.1 ESTRATEGIA DE CONTROL PREDICTIVO.

Los puntos básicos para formular la estrategia de control predictivo [1-4] pueden resumirse en:

- 1) En cada instante de muestreo k se define un intervalo (horizonte) de predicción $[k, k + \lambda]$ sobre un número finito de instantes λ .
- 2) Se considera un modelo del sistema en tiempo discreto para predecir una secuencia de salidas en el intervalo de predicción en función de una secuencia de control. Dicha predicción se realiza a partir de la salida medida en el instante de muestreo k .
- 3) Se genera un par de secuencias de salida y de control tales que verifiquen un criterio de rendimiento en el intervalo de predicción.
- 4) El control que se aplica al sistema en el instante k es el primer valor de la secuencia de control obtenida en 3). El resto de la secuencia de control en $[k + 1, k + \lambda]$ no se aplica al sistema dado que el procedimiento se redefine en cada instante de muestreo k .

En el siguiente subapartado se concretan estos puntos en la formulación de una ley de control activo de estructuras.

4.2 CONTROL PREDICTIVO DE ESTRUCTURAS.

El comportamiento dinámico lineal de una estructura sometida a una excitación en presencia de unas fuerzas de control activo puede representarse en espacio de estado mediante el siguiente modelo discreto de primer orden:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k - n_r) + \mathbf{w}(k) \quad (4.1)$$

En la expresión anterior las matrices constantes \mathbf{A} y \mathbf{B} son, respectivamente, la **matriz del sistema en tiempo discreto** y la **matriz de control en tiempo discreto**. $\mathbf{x}(k)$ es el **vector de estado** en el instante k y $\mathbf{w}(k)$ es el vector que contiene las características de la excitación. $\mathbf{u}(k - n_r)$ es el vector de control generado en el instante $k - n_r$, el cual no ejerce su efecto sobre la estructura hasta el instante k , siendo el número entero n_r el **número de retardos del sistema**, es decir, el número de períodos de muestreo que transcurren desde que se ordena a los actuadores que ejerzan una acción sobre la estructura hasta que ésta acción se ejerce efectivamente debido a la inercia mecánica de los mismos. Si se llama T al **período de muestreo**, el **tiempo de respuesta** de los actuadores τ_r obedece a la siguiente expresión:

$$\tau_r = n_r T \quad (4.2a)$$

El modelo mostrado en la expresión (4.1) puede ser generado a partir del algoritmo SSP descrito en el capítulo 3 estableciendo las siguientes equivalencias entre las expresiones (3.11) y (4.1):

$$\mathbf{v}_c(k) = \mathbf{L}\mathbf{u}(k - n_r) \quad (4.2b)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_1 \mathbf{L} \quad (4.2c)$$

$\mathbf{v}_c(k)$ es el vector de control que actúa sobre la estructura en el instante k el cual es generado en el instante $k - n_r$ y consiste en n_a fuerzas cuyas características se contienen en el vector \mathbf{u} . \mathbf{L} es una matriz de dimensiones $2n \times n_a$ cuyas componentes son 0 o 1 dependiendo de la presencia o ausencia de actuadores en los distintos grados de libertad.

Las características de la respuesta de la estructura se contienen en el **vector de salida** \mathbf{y} . Los vectores de salida $\mathbf{y}(k)$ y de estado $\mathbf{x}(k)$ en un mismo instante k se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H} \mathbf{x}(k) \quad (4.3)$$

donde la matriz constante \mathbf{H} es la **matriz de salida**.

El modelo definido por (4.1) y (4.3) representa en tiempo discreto la evolución dinámica del sistema controlado y, para predecir la respuesta del sistema en el intervalo de predicción $[k, k + \lambda]$ se considera un modelo predictivo [5-7] basado en él. Dicho modelo se formula en las igualdades siguientes:

$$\hat{\mathbf{x}}(k + j | k) = \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}}(k + j - 1 | k) + \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{u}}(k - \hat{n}_r + j - 1 | k) \quad (4.4a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k + j | k) = \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{x}}(k + j | k) \quad j = 1, \dots, \lambda \quad (4.4b)$$

Los vectores $\hat{\mathbf{x}}(k + j | k)$ y $\hat{\mathbf{y}}(k + j | k)$ son, respectivamente los vectores de estado y de salida predichos en el instante k para el instante futuro $k + j$. El vector $\hat{\mathbf{u}}(k - \hat{n}_r + j - 1 | k)$ es el vector de control predicho en el instante k para el instante $k - \hat{n}_r + j - 1$, siendo \hat{n}_r el número de períodos de muestreo que se estima como tiempo de respuesta de los actuadores. k representa el instante de muestreo presente mientras que $[k, k + \lambda]$ es un intervalo de predicción ficticio en el cual el modelo (4.4) se usa para predecir una secuencia de vectores de estado $\hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k), \dots, \hat{\mathbf{x}}(k + \lambda | k)$.

El modelo predictivo (4.4) tiene una estructura similar a la de (4.1) y (4.3) aunque los valores de \mathbf{A} y de $\hat{\mathbf{A}}$, de \mathbf{B} y de $\hat{\mathbf{B}}$, de \mathbf{H} y de $\hat{\mathbf{H}}$, así como los de n_r y \hat{n}_r pueden diferir por errores de estimación. Además no se incluye la excitación exterior en la predicción puesto que sus valores en los instantes futuros son desconocidos.

El objetivo fundamental del modelo predictivo (4.4) es predecir en los instantes $k + 1, \dots, k + \lambda$ los vectores de estado $\hat{\mathbf{x}}(k + j | k)$ y de salida $\hat{\mathbf{y}}(k + j | k)$ ($j = 1, \dots, \lambda$) a partir del vector de estado real del sistema en el instante k , $\mathbf{x}(k)$. A tal efecto, el intervalo de predicción $[k, k + \lambda]$ se subdivide en los intervalos $[k, k + \mu - 1]$ y $[k + \mu, k + \lambda]$ en donde el número entero μ se define mediante

$$\lambda = \mu + \hat{n}_r \tag{4.5}$$

En la figura 4.1 se muestra un esquema del intervalo de predicción.



Figura 4.1 Intervalo temporal ficticio de predicción.

La secuencia de vectores de estado predichos $\hat{\mathbf{x}}$ proporcionada por la expresión (4.4a) se construye recurrentemente a partir del estado real del sistema en el instante inicial k :

$$\hat{\mathbf{x}}(k | k) = \mathbf{x}(k) \tag{4.6}$$

La secuencia de vectores de control predichos $\hat{\mathbf{u}}$ es igual, en los instantes previos a k , a los vectores de control \mathbf{u} aplicados en dichos instantes sobre la estructura:

$$\hat{\mathbf{u}}(k-j|k) = \mathbf{u}(k-j) \quad (j = 1, \dots, \hat{n}_r) \quad (4.7)$$

Los vectores de control $\hat{\mathbf{u}}$ correspondientes a los instantes comprendidos entre k y $k + \mu - 1$ intervienen en la predicción de $\hat{\mathbf{x}}(k+j|k)$ ($j = 1, \dots, \lambda$) mediante (4.4a) y constituyen la secuencia desconocida de vectores que verifican un criterio de rendimiento adecuado.

Los vectores de control $\hat{\mathbf{u}}$ que corresponden al intervalo $[k + \mu, k + \lambda]$ no intervienen en el modelo predictivo (4.4a) y no condicionan la predicción de $\hat{\mathbf{x}}(k+j|k)$ ($j = 1, \dots, \lambda$).

Un criterio de rendimiento para obtener el valor de la secuencia de vectores de control $\hat{\mathbf{u}}(k|k), \dots, \hat{\mathbf{u}}(k + \mu - 1|k)$ puede consistir en la minimización de la siguiente función de coste:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\lambda} [\hat{\mathbf{y}}(k+j|k) - \mathbf{y}_r(k+j|k)]^t \mathbf{Q}_j [\hat{\mathbf{y}}(k+j|k) - \mathbf{y}_r(k+j|k)] + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\mu-1} \hat{\mathbf{u}}(k+j|k)^t \mathbf{R}_j \hat{\mathbf{u}}(k+j|k) \quad (4.8)$$

donde la secuencia de vectores de salida $\mathbf{y}_r(\cdot|k)$ pertenece a una trayectoria de referencia generada en el instante k a partir de la salida real del sistema en dicho instante y la cual evoluciona en los instantes futuros hacia una consigna que en el control activo de estructuras es siempre nula. \mathbf{Q}_j ($j = 1, \dots, \lambda$) y \mathbf{R}_j ($j = 0, \dots, \mu - 1$) son matrices de peso simétricas.

La minimización de la función de coste J dada en (4.8) impone que los valores de la salida predicha estén próximos a los de la trayectoria de referencia en el interior del intervalo de predicción $[k, k + \lambda]$ limitando también los valores de los vectores $\hat{\mathbf{u}}$. La secuencia desconocida de vectores de control $\hat{\mathbf{u}}(k|k), \dots, \hat{\mathbf{u}}(k + \mu - 1|k)$ puede ser hallada minimizando el funcional J dado en (4.8) resultando ecuaciones matriciales de Riccati similares a las que se obtienen en el control óptimo descrito en el subapartado 3.3 del capítulo 1. La búsqueda de soluciones más sencillas conduce a la estrategia de pretender únicamente el ajuste entre $\hat{\mathbf{y}}$ e \mathbf{y}_r en el horizonte de predicción $k + \lambda$, en cuyo caso las matrices \mathbf{Q}_j correspondientes a los instantes anteriores al mismo pueden elegirse nulas:

$$\mathbf{Q}_1 = \dots = \mathbf{Q}_{\lambda-1} = \mathbf{0} \quad \mathbf{Q}_\lambda = \mathbf{Q} \quad (4.9)$$

Una posibilidad que permite obtener unas expresiones sencillas en la minimización de J es considerar una secuencia uniforme de los vectores de control $\hat{\mathbf{u}}(\cdot|k)$ en el intervalo $[k, k + \mu - 1]$:

$$\mathbf{u}(k) = \hat{\mathbf{u}}(k|k) = \hat{\mathbf{u}}(k+1|k) = \dots = \hat{\mathbf{u}}(k+\mu-1|k) \quad (4.10)$$

Considerando la secuencia constante mostrada en (4.10), en la minimización de J únicamente es preciso obtener el valor de un vector incógnita igual al vector de control que debe ser generado en el instante k para aproximar en el instante $k + \lambda$ la salida predicha a la salida de referencia. En el instante siguiente $k + 1$ se genera una nueva secuencia uniforme de vectores de control y se obtiene un nuevo valor $\mathbf{u}(k + 1)$ del vector de control que aproxima en el instante $k + 1$ los vectores de salida predicho y de referencia.

La sustitución de (4.9) y (4.10) en (4.8) proporciona la siguiente expresión para la función de coste J :

$$J = \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{y}}(k + \lambda | k) - \mathbf{y}_r(k + \lambda | k)]^t \mathbf{Q} [\hat{\mathbf{y}}(k + \lambda | k) - \mathbf{y}_r(k + \lambda | k)] + \frac{1}{2} \mathbf{u}(k)^t \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \quad (4.11)$$

donde

$$\mathbf{R} = \sum_{j=0}^{\mu-1} \mathbf{R}_j \quad (4.11a)$$

En la expresión (4.11) \mathbf{Q} y \mathbf{R} son matrices simétricas que ponderan en la minimización de J la influencia de la diferencia entre la respuesta predicha y la respuesta perteneciente a la trayectoria de referencia y la influencia del valor de la señal de control, respectivamente. Una matriz \mathbf{Q} de valor elevado y una matriz \mathbf{R} de valor más pequeño implica una disminución importante de la diferencia entre $\hat{\mathbf{y}}$ e \mathbf{y}_r , pero con una señal de control \mathbf{u} grande. Por el contrario, un valor alto de la matriz \mathbf{R} restringe fuertemente el valor de la señal de control y, consecuentemente, ésta no puede actuar eficazmente sobre la estructura para reducir su respuesta.

La expresión (4.11) muestra la repercusión del valor del horizonte de predicción λ en las características del control: un valor pequeño de λ supone pretender la aproximación de la respuesta al valor de referencia al cabo de poco tiempo y, por tanto, implica una acción de control enérgica con una importante disminución de la respuesta de la estructura. Por el contrario, un valor elevado de λ corresponde a un control más suave en el que únicamente se pretende la atenuación de la respuesta al cabo de un horizonte más lejano.

Para determinar el valor de $\hat{\mathbf{x}}(k + \lambda | k)$, vector de estado predicho en el instante $k + \lambda$ a partir del instante k , puede aplicarse reiteradamente la igualdad (4.4a) para $j = 1, \dots, \hat{n}_r + \mu$:

$$\hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k) = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k - \hat{n}_r)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}(k+2|k) &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - \hat{n}_r + 1) = \\
 &= \hat{\mathbf{A}}^2 \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - \hat{n}_r) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - \hat{n}_r + 1) \\
 \hat{\mathbf{x}}(k+3|k) &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k+2|k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - \hat{n}_r + 2) = \\
 &= \hat{\mathbf{A}}^3 \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}^2 \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - \hat{n}_r) + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - \hat{n}_r + 1) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - \hat{n}_r + 2) \\
 &\quad \dots\dots \\
 \hat{\mathbf{x}}(k + \hat{n}_r | k) &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k + \hat{n}_r - 1 | k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - 1) = \\
 &= \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r} \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r - 1} \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - \hat{n}_r) + \dots + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - 2) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - 1) \\
 \hat{\mathbf{x}}(k + \hat{n}_r + 1 | k) &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k + \hat{n}_r | k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) = \\
 &= \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r + 1} \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r} \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - \hat{n}_r) + \dots + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - 1) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) \\
 \hat{\mathbf{x}}(k + \hat{n}_r + 2 | k) &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k + \hat{n}_r + 1 | k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) = \\
 &= \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r + 2} \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r + 1} \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - \hat{n}_r) + \dots + \hat{\mathbf{A}}^2 \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - 1) + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) \\
 \hat{\mathbf{x}}(k + \hat{n}_r + 3 | k) &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k + \hat{n}_r + 2 | k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) = \\
 &= \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r + 3} \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r + 2} \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - \hat{n}_r) + \dots + \\
 &\quad + \hat{\mathbf{A}}^3 \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - 1) + \hat{\mathbf{A}}^2 \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) \\
 &\quad \dots\dots \\
 \hat{\mathbf{x}}(k + \hat{n}_r + \mu | k) &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k + \hat{n}_r + \mu - 1 | k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) = \\
 &= \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r + \mu} \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r + \mu - 1} \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - \hat{n}_r) + \dots + \\
 &\quad + \hat{\mathbf{A}}^\mu \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - 1) + \hat{\mathbf{A}}^{\mu - 1} \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{A}}^{\mu - 2} \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) + \dots + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k)
 \end{aligned}$$

La expresión anterior define el valor del vector de estado predicho al cabo del horizonte de predicción. Dicha expresión puede escribirse de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{x}}(k + \lambda | k) = \hat{\mathbf{T}} \mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\psi}(k) + \hat{\mathbf{Z}}_0 \mathbf{u}(k) \quad (4.12)$$

siendo

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{A}}^\lambda \quad (4.12a)$$

$$\boldsymbol{\psi}(k) = \hat{\mathbf{Z}}_1 \mathbf{u}(k - 1) + \cdots + \hat{\mathbf{Z}}_{\hat{n}_r} \mathbf{u}(k - \hat{n}_r) \quad (4.12b)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_i = \hat{\mathbf{A}}^{\mu+i-1} \hat{\mathbf{B}} \quad (i = 1, \dots, \hat{n}_r) \quad (4.12c)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_0 = (\hat{\mathbf{A}}^{\mu-1} + \hat{\mathbf{A}}^{\mu-2} + \cdots + \hat{\mathbf{A}}^2 + \hat{\mathbf{A}} + \mathbf{I}) \hat{\mathbf{B}} \quad (4.12d)$$

Las expresiones (4.12) definen el estado predicho en el instante $k + \lambda$ a partir del estado real del sistema en el instante k .

Sustituyendo (4.4a) en (4.12) se obtiene la siguiente expresión para la respuesta predicha:

$$\hat{\mathbf{y}}(k + \lambda | k) = \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{T}} \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{H}} \boldsymbol{\psi}(k) + \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0 \mathbf{u}(k) \quad (4.13)$$

El valor de $\mathbf{u}(k)$ se halla minimizando la expresión de J en (4.11) teniendo en cuenta (4.13). La optimización de J exige la anulación de su gradiente en la dirección del vector $\mathbf{u}(k)$:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}(k)} = 0 \quad (4.14)$$

El carácter de mínimo exige además que la matriz hessiana que contiene las derivadas segundas de J respecto de $\mathbf{u}(k)$ sea semidefinida positiva. Si dicha matriz hessiana es definida positiva se tiene un mínimo en sentido estricto.

Derivando la expresión (4.11) y teniendo en cuenta (4.13) se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}(k)} = (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} [\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{T}} \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{H}} \boldsymbol{\psi}(k) + \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0 \mathbf{u}(k) - \mathbf{y}_r(k + \lambda | k)] + \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \quad (4.15a)$$

Derivando nuevamente la expresión (4.15a) se obtiene el valor de la matriz hessiana:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial^2 \mathbf{u}(k)} = (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0) + \mathbf{R} \quad (4.15b)$$

A partir de las expresiones (4.14) y (4.15a) puede deducirse el valor del vector de control $\mathbf{u}(k)$ que corresponde a un extremo relativo de J :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k) &= \\ &= -[(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0) + \mathbf{R}]^{-1} \{(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t [\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{T}} \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{H}} \boldsymbol{\psi}(k) - \mathbf{y}_r(k + \lambda | k)]\} \quad (4.16) \end{aligned}$$

La expresión (4.17) tiene únicamente sentido si la matriz $(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0) + \mathbf{R}$ es inversible. Dicha matriz coincide con la matriz hessiana hallada en (4.15b) y, consecuentemente, si la matriz $(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0) + \mathbf{R}$ es definida positiva se cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes: las expresiones (4.14) y (4.15) definen unívocamente el vector de control $\mathbf{u}(k)$ correspondiente a un extremo relativo de J y puede asegurarse que dicho extremo es un mínimo en sentido estricto. Por tanto,

las matrices de peso \mathbf{Q} y \mathbf{R} deben elegirse en cada caso de forma que la matriz $(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0) + \mathbf{R}$ sea definida positiva.

Para determinar en la expresión (4.16) el valor del vector $\mathbf{u}(k)$ es preciso generar la trayectoria de referencia a la que pertenece el vector $\mathbf{y}_r(k + \lambda | k)$. La trayectoria de referencia se genera en cada instante en tiempo discreto de forma recurrente mediante un modelo de primer orden en el que no se tiene en cuenta a la perturbación exterior ya que en el contexto de la dinámica de estructuras sus valores futuros suelen ser impredecibles. La expresión iterativa que define la trayectoria de referencia generada a partir del instante k es la siguiente:

$$\mathbf{y}_r(k + j | k) = \mathbf{A}_r \mathbf{y}_r(k + j - 1 | k) \quad (4.17)$$

En la expresión anterior \mathbf{A}_r es una matriz constante (es decir, independiente de k y de j) llamada **matriz de referencia**.

La trayectoria generada en el instante k parte de la respuesta real en dicho instante $\mathbf{y}(k)$. Ello significa que en dicho instante la respuesta real del sistema (\mathbf{y}) y la perteneciente a la trayectoria de referencia (\mathbf{y}_r) son iguales:

$$\mathbf{y}_r(k | k) = \mathbf{y}(k) \quad (4.18)$$

La aplicación reiterada de (4.17) cuando $j = 1, \dots, \hat{n}_r$ teniendo en cuenta (4.18) permite obtener el valor de la respuesta de referencia en el instante $k + \lambda$:

$$\mathbf{y}_r(k + \lambda | k) = \mathbf{T}_r \mathbf{y}(k) \quad (4.19)$$

La matriz \mathbf{T}_r tiene el siguiente valor:

$$\mathbf{T}_r = \hat{\mathbf{A}}_r^\lambda \quad (4.19a)$$

Frecuentemente se considera una matriz de referencia $\mathbf{A}_r = \mathbf{0}$ de forma que se genera una trayectoria de referencia nula. Dicho caso corresponde a una acción de control intensa en la que se pretende que la respuesta predicha al cabo del horizonte de predicción se aproxime a la respuesta nula.

La sustitución del resultado (4.19) en la expresión de $\mathbf{u}(k)$ en (4.16) proporciona el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k) &= \\ &= -[(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0) + \mathbf{R}]^{-1} [(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} \hat{\mathbf{H}} (\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}_r) \mathbf{x}(k) + (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} \hat{\mathbf{H}} \boldsymbol{\psi}(k)] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Todos los elementos que intervienen en el segundo miembro de la igualdad anterior son conocidos. Teniendo en cuenta (4.12b) la expresión (4.20) puede escribirse también de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}(k) = -\hat{\mathbf{D}} \mathbf{x}(k) - \sum_{i=1}^{\hat{n}_r} \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{u}(k-i) \quad (4.21)$$

La matriz $\hat{\mathbf{D}}$ se denomina **matriz de ganancia** y tiene el siguiente valor:

$$\hat{\mathbf{D}} = [(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0) + \mathbf{R}]^{-1} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} \hat{\mathbf{H}} (\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}_r) \quad (4.21a)$$

Las matrices $\hat{\mathbf{K}}_i$ obedecen a la siguiente expresión:

$$\hat{K}_i = [(\hat{H} \hat{Z}_0)^t Q (\hat{H} \hat{Z}_0) + R]^{-1} (\hat{H} \hat{Z}_0)^t Q \hat{H} \hat{Z}_i \quad (i = 1, \dots, \hat{n}_r) \quad (4.21b)$$

Las igualdades (4.21), (4.12a), (4.12c), (4.12d) y (4.19a) definen el algoritmo de control predictivo de estructuras considerado en la presente Tesis.

4.3 EFECTO DEL CONTROL EN EL COMPORTAMIENTO DINAMICO DEL SISTEMA.

En el presente apartado se analizan las características del comportamiento dinámico de una estructura cuyo movimiento se controla mediante unas fuerzas de control activo cuyo valor se determina a partir de un algoritmo de control predictivo. Se muestra que la acción de control produce un incremento del amortiguamiento y de la rigidez de la estructura. Cuando no existe un tiempo de respuesta apreciable en los actuadores y, consecuentemente, no se consideran retardos en el modelo predictivo que simula la evolución de la estructura, es decir se toma $n_r = \hat{n}_r = 0$, el aumento de amortiguamiento y de rigidez pueden ser expresados mediante una formulación particularmente sencilla, la cual se describe en el presente apartado.

Anulando el valor de \hat{n}_r en las expresiones (4.21) se tienen los resultados que definen el algoritmo de control predictivo sin retardos:

$$\mathbf{u}(k) = -\hat{D} \mathbf{x}(k) \quad (4.22)$$

$$\hat{D} = [(\hat{H} \hat{Z}_0)^t Q (\hat{H} \hat{Z}_0) + R]^{-1} (\hat{H} \hat{Z}_0)^t Q \hat{H} (\hat{T} - T_r) \quad (4.22a)$$

Las expresiones (4.22) han sido planteadas en tiempo discreto. No obstante pueden ser también formuladas en tiempo continuo y, si bien ambas formulaciones no son equivalentes, la discrepancia entre ellas disminuye cuando se considera un valor pequeño del período de muestreo T . La igualdad (4.22) se expresa en tiempo continuo de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}(t) = -\hat{\mathbf{D}} \mathbf{x}(t) \quad (4.23)$$

La ecuación diferencial que rige en tiempo continuo la evolución dinámica de la estructura controlada activamente se formula en el capítulo 3 en la expresión (3.1):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{d}(t) = \mathbf{f}_c(t) + \mathbf{f}(t)$$

Las fuerzas de control activo que se aplican a la estructura están contenidas en el vector $\mathbf{f}_c(t)$. El valor de dichas fuerzas se determina a partir de un algoritmo de control y suele ser proporcional al valor de la señal de control:

$$\mathbf{f}_c(t) = -\mathbf{E} \mathbf{u}(t) \quad (4.24)$$

donde \mathbf{E} es una matriz constante.

A partir de (4.23) y (4.24) puede establecerse la relación entre las fuerzas de control \mathbf{f}_c y el vector de estado \mathbf{x} :

$$\mathbf{f}_c(t) = -\mathbf{E} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{x}(t) \quad (4.25)$$

El vector de estado \mathbf{x} puede contener los desplazamientos y las velocidades de los grados de libertad del modelo de la estructura. En la igualdad (3.2) se muestra la configuración del vector de estado considerada en el algoritmo SSP:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{pmatrix}$$

Mediante (3.2) y (4.25) se formula la siguiente expresión de las fuerzas de control f_c :

$$f_c(t) = -E \begin{pmatrix} \hat{D}_1 & \hat{D}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \end{pmatrix} = -E \hat{D}_1 d(t) - E \hat{D}_2 \dot{d}(t) \quad (4.26)$$

\hat{D}_1 y \hat{D}_2 son dos matrices que contienen las mitades izquierda y derecha, respectivamente de la matriz de ganancia \hat{D} :

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \hat{D}_1 & \hat{D}_2 \end{pmatrix} \quad (4.26a)$$

Sustituyendo la igualdad (4.26a) en las ecuaciones generales del movimiento (3.1) se formulan éstas en los siguientes términos:

$$M \ddot{d}(t) + C' \dot{d}(t) + K' d(t) = f(t) \quad (4.27)$$

siendo

$$C' = C + E \hat{D}_1 \quad (4.27a)$$

$$K' = K + E \hat{D}_2 \quad (4.27b)$$

La igualdad (4.27) muestra que el comportamiento dinámico de una estructura controlada activamente mediante un algoritmo predictivo en el que no se consideran retardos es aproximadamente equivalente al de una estructura no sometida a control y cuyas matrices de amortiguamiento y rigidez son C' y K' definidas, respectivamente, en (4.24a) y (4.24b). Consecuentemente, el efecto de las fuerzas de control activo sobre una estructura puede asimilarse en primera aproximación a un incremento de la rigidez

y del amortiguamiento del sistema. La exactitud de la asimilación es mayor si el período de muestreo T es pequeño.

En los capítulos 7 y 8 se presentan distintos resultados numéricos y experimentales que corroboran las conclusiones formuladas en el presente apartado para sistemas sin retardos y permiten generalizarlas a sistemas con retardos. Dichas conclusiones son también generalizables a sistemas de control en los que se utilizan estrategias de control distintas de la estrategia de control predictivo.

La ecuación (4.27) que rige el comportamiento dinámico del sistema controlado es cualitativamente equivalente a la ecuación (3.1) para $f_c = 0$ correspondiente a la evolución del sistema no sometido a ninguna acción de control. Ello significa que todos los fenómenos observados en el análisis dinámico tradicional (modos propios y frecuencias propias de vibración, resonancia, etc.) aparecen también en la evolución dinámica de las estructuras controladas activamente. En particular, aparecen nuevas frecuencias propias de vibración y existe una importante amplificación de la respuesta si la excitación entra en resonancia con las mismas.

4.4 ESTABILIDAD DEL CONTROL PREDICTIVO.

En el presente apartado se analiza la estabilidad de la ley de control predictivo. La estabilidad del lazo cerrado se estudia suponiendo que el lazo abierto (es decir, sin control) es estable. La excitación exterior no se incluye en el análisis porque sus características no modifican las condiciones de estabilidad. Se muestra en el presente apartado que, aún en presencia de errores de modelización, puede generarse un control asintótico y globalmente estable.

Cuando no se tiene en cuenta la excitación exterior, la expresión (4.1) que representa en espacio de estado la evolución dinámica de la estructura se convierte en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k - n_r) \quad (4.28)$$

En el presente apartado se estudian las condiciones de estabilidad del modelo numérico (4.28) cuando el valor del vector de control \mathbf{u} se obtiene a partir de la ley de control (4.21). En la medida en que dicho modelo representa fielmente el comportamiento dinámico de la estructura, las conclusiones elaboradas a partir de dicho modelo son extrapolables al comportamiento real del sistema.

En el subapartado 4.4.1 se muestra que las condiciones de estabilidad pueden expresarse mediante el módulo de los valores propios de una matriz. En el subapartado 4.4.2 se analiza la influencia de λ en la estabilidad concluyendo que, aún en presencia de errores de modelización, existen valores de λ que generan un control estable. En el subapartado 4.4.3 se muestran distintos ejemplos numéricos que corroboran las afirmaciones formuladas en los subapartados anteriores y permiten ampliar su contenido.

4.4.1 Criterios de estabilidad.

Se determina en el presente subapartado una condición suficiente de estabilidad del control predictivo. En el análisis se distinguen dos situaciones distintas: los casos en que no se consideran retardos ni en el modelo predictivo (4.4) ni en el modelo del sistema (4.28) (es decir, $n_r = \hat{n}_r = 0$) y los casos en que en uno o en ambos modelos se toman en consideración retardos (es decir, $n_r \neq 0$ o $\hat{n}_r \neq 0$).

Cuando no se consideran retardos en la modelización de la estructura, la ecuación (4.28) que rige su comportamiento dinámico adopta la siguiente expresión simplificada:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (4.29)$$

Si en el modelo predictivo (4.4) no se incluyen retardos, la expresión (4.22) proporciona el valor de la señal de control $\mathbf{u}(k)$ y, sustituyendo dicho valor en (4.29), se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}})\mathbf{x}(k) \quad (4.30)$$

La igualdad (4.30) simula el comportamiento dinámico del sistema controlado sin retardos y sin incluir el efecto de la excitación. Dicha expresión puede escribirse también de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) \quad (4.30a)$$

siendo

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}} \quad (4.30b)$$

La igualdad (4.30) muestra que el proceso controlado sin retardos es asintótica y globalmente estable si el módulo de los valores propios de la matriz \bar{A} es menor que la unidad.

Si se consideran retardos en el modelo predictivo o en el modelo del sistema se distinguen a su vez dos casos distintos: las situaciones en que $\hat{n}_r \leq n_r \neq 0$ y las situaciones en que $0 \neq n_r \leq \hat{n}_r$.

Cuando es $\hat{n}_r \leq n_r \neq 0$, las expresiones (4.28) y (4.21) pueden ser englobadas en el siguiente sistema ampliado:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k - \hat{n}_r + 1) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k - n_r + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ -\hat{\mathbf{D}} & -\hat{\mathbf{K}}_1 & \dots & -\hat{\mathbf{K}}_{\hat{n}_r} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k - \hat{n}_r) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k - n_r) \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

La expresión (4.31) puede plantearse en los siguientes términos:

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (4.31a)$$

Siendo $\bar{\mathbf{x}}$ un nuevo vector de estado y $\bar{\mathbf{A}}$ la siguiente matriz:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & B \\ -\hat{D} & -\hat{K}_1 & \dots & -\hat{K}_{\hat{n}_r} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31b)$$

La expresión (4.31a) muestra que, si los valores propios de la matriz \bar{A} definida en (4.31b) son menores que la unidad, el control es globalmente estable.

Si es $n_r \leq \hat{n}_r$ y n_r es distinto de cero, puede escribirse una expresión similar a (4.31):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k-n_r+1) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k-\hat{n}_r+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & B & \dots & 0 & 0 \\ -\hat{D} & -\hat{K}_1 & \dots & -\hat{K}_{n_r} & \dots & -\hat{K}_{\hat{n}_r-1} & -\hat{K}_{\hat{n}_r} \\ 0 & I & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k-n_r) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k-\hat{n}_r) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

La igualdad (4.32) puede escribirse también de la siguiente forma:

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{A}\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (4.32a)$$

\bar{x} es un nuevo vector de estado y \bar{A} es ahora la siguiente matriz:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & B & \dots & 0 & 0 \\ -\hat{D} & -\hat{K}_1 & \dots & -\hat{K}_{n_r} & \dots & -\hat{K}_{\hat{n}_r-1} & -\hat{K}_{\hat{n}_r} \\ 0 & I & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} \quad (4.32b)$$

Las igualdades (4.30a), (4.31a) y (4.32a) muestran que el lazo cerrado es globalmente estable si los valores propios de la matriz \bar{A} tienen módulo menor que la unidad. La matriz \bar{A} se define en (4.30b) si $n_r = \hat{n}_r = 0$, en (4.31b) si $\hat{n}_r \leq n_r \neq 0$ y en (4.32b) si $0 \neq n_r \leq \hat{n}_r$.

4.4.2 Influencia de λ en la estabilidad.

Se demuestra en el presente subapartado que, en general, un aumento del valor de la longitud λ del intervalo de predicción produce un incremento en la estabilidad del proceso sometido a un control predictivo en el siguiente sentido: se muestra que, aún en presencia de errores de modelización, si el proceso en lazo abierto (es decir, sin control) y el modelo predictivo son estables, cuando λ tiende a infinito los valores propios de la matriz \bar{A} tienden a valores cuyo módulo es menor que la unidad. Teniendo en cuenta las expresiones (4.30a), (4.31a) y (4.32a) que representan el comportamiento del sistema controlado, ello significa que en dicho caso el proceso en lazo cerrado (es decir, con control) tiende a ser estable.

La justificación de la anterior afirmación se desarrolla en dos fases:

- Se demuestra en primer lugar que los valores de las matrices $\hat{D}, \hat{K}_1, \dots, \hat{K}_{\hat{n}_r}$ tienden a anularse cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Consecuentemente, al determinar el límite de las matrices \bar{A} definidas en (4.30b), (4.31b) o (4.32b), se obtiene la matriz \bar{A}_0 definida, respectivamente en (4.40a), (4.40b) o (4.40c).

- Se demuestra en segundo lugar que los valores propios no nulos de las matrices $\bar{\mathbf{A}}_0$ (límites de $\bar{\mathbf{A}}$ cuando λ tiende a infinito) son también valores propios de \mathbf{A} y tienen, por tanto, módulo menor que la unidad.

En las operaciones de análisis matricial que se desarrollan en el presente subapartado se considera la siguiente norma de una matriz real genérica \mathbf{X} de dimensiones cualesquiera $s \times t$:

$$\|\mathbf{X}\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq t}} |a_{ij}| \quad \mathbf{X} \in M_{st}(\mathbf{R}) \quad (4.33)$$

Para demostrar que la matriz $\hat{\mathbf{D}}$ definida en (4.21a) tiende a anularse si λ crece indefinidamente se muestra en primer lugar que el factor $(\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}_r)$ que interviene en dicha expresión tiende a cero.

A partir de (4.12a) y teniendo en cuenta que los valores propios de $\hat{\mathbf{A}}$ tienen módulo menor que la unidad se obtiene inmediatamente el valor del límite de $\hat{\mathbf{T}}$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{T}} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{A}}^\lambda = \mathbf{0} \quad (4.34a)$$

Para determinar el valor del límite de \mathbf{T}_r debe tenerse en cuenta que la trayectoria de referencia definida en (4.17) tiende a aproximarse a la consigna que, en el contexto del control de estructuras, es siempre nula. Ello implica, a partir de las expresiones (4.19), que la matriz \mathbf{T}_r tiende a cero:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbf{T}_r = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbf{A}_r^\lambda = \mathbf{0} \quad (4.34b)$$

Los resultados (4.34) muestran que el factor $(\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}_r)$ que interviene en la expresión de la matriz de ganancia $\hat{\mathbf{D}}$ en (4.21a) tiende a anularse cuando λ crece

indefinidamente. Para poder asegurar que \hat{D} también tiende a cero es suficiente comprobar que los otros factores contenidos en el segundo miembro de la igualdad (4.21a) permanecen acotados cuando $\lambda \rightarrow \infty$. En (4.21a) intervienen, además, de \hat{T} y T_r , las matrices de peso Q y R , la matriz de salida \hat{H} y la matriz \hat{Z}_0 . Las matrices Q, R y \hat{H} son invariantes respecto de λ y la única matriz cuyo valor depende de λ es \hat{Z}_0 . En (4.12d) se muestra la expresión de \hat{Z}_0 en función de μ (quien a su vez se relaciona con λ en (4.5)). A continuación se calcula el valor del límite de \hat{Z}_0 cuando λ tiende a infinito para mostrar que dicho límite es finito y, consecuentemente, \hat{D} tiende a anularse.

Premultiplicando la expresión (4.12d) por la matriz $(I - \hat{A})$ se obtiene el siguiente resultado:

$$(I - \hat{A}) \hat{Z}_0 = (I - \hat{A}^\mu) \hat{B} \quad (4.35a)$$

La expresión (4.35a) permite obtener el valor de \hat{Z}_0 puesto que la matriz $(I - \hat{A})$ es siempre inversible. Para mostrar que dicha matriz es inversible es suficiente verificar que sus valores propios no son nulos. Por hipótesis, los valores propios de la matriz \hat{A} tienen módulo menor que la unidad y son, por tanto, distintos de 1. Los valores propios de la matriz identidad I son, evidentemente, iguales a 1 y todos los vectores no nulos son vectores propios de dicha matriz. Los vectores propios de la matriz \hat{A} lo son pues de I y los valores propios de $(I - \hat{A})$ son iguales a la diferencia entre la unidad y los valores propios de \hat{A} . De ello se deduce que dichos valores no son nulos y que la matriz $(I - \hat{A})$ es inversible. Premultiplicando la expresión (4.35a) por la matriz inversa de $(I - \hat{A})$ se obtiene el valor de \hat{Z}_0 :

$$\hat{Z}_0 = (I - \hat{A})^{-1} (I - \hat{A}^\mu) \hat{B} \quad (4.35b)$$

La igualdad (4.35b) permite obtener el valor del límite de \hat{Z}_0 cuando λ tiende a infinito. Teniendo en cuenta (4.34a) y (4.5) se llega inmediatamente al resultado siguiente:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbf{Z}_0 = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \hat{\mathbf{B}} \quad (4.36)$$

Las igualdades (4.34) y la igualdad (4.36) muestran en (4.21a) que la matriz de ganancia $\hat{\mathbf{D}}$ tiende a cero si el valor de λ aumenta indefinidamente.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \quad (4.37)$$

La igualdad (4.12c) muestra inmediatamente que:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{Z}}_i = \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, \hat{n}_r \quad (4.38)$$

Sustituyendo la expresión (4.38) en (4.21b) se obtiene el valor del límite de $\hat{\mathbf{K}}_i$ cuando λ tiende a infinito:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{K}}_i = \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, \hat{n}_r \quad (4.39)$$

Los resultados (4.37) y (4.39) ponen de manifiesto que el valor de la señal de control \mathbf{u} definida en (4.21) disminuye si λ aumenta. Dicha disminución del valor de la señal \mathbf{u} implica una acción de control menos energética.

Las expresiones (4.37) y (4.39) permiten obtener el valor del límite de la matriz $\bar{\mathbf{A}}$ (definida en (4.30b), (4.31b) o (4.32b) según los valores de n_r y \hat{n}_r) cuando λ crece indefinidamente. El valor del límite se representa en los tres casos por $\bar{\mathbf{A}}_0$.

Si $n_r = \hat{n}_r = 0$, $\bar{\mathbf{A}}$ se define en (4.30b). La expresión (4.37) muestra que:

$$\bar{\mathbf{A}}_0 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \quad (4.40a)$$

Si es $\hat{n}_r \leq n_r \neq 0$ el valor de la matriz $\bar{\mathbf{A}}$ se define en (4.31b). Mediante las expresiones (4.37) y (4.39) se determina el valor de la matriz $\bar{\mathbf{A}}_0$ límite de $\bar{\mathbf{A}}$ cuando λ tiende a infinito:

$$\bar{\mathbf{A}}_0 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.40b)$$

Cuando es $0 \neq n_r \leq \hat{n}_r$ la matriz $\bar{\mathbf{A}}$ se define en (4.32b). El límite $\bar{\mathbf{A}}_0$ de $\bar{\mathbf{A}}$ cuando λ tiende a infinito es igual a la siguiente matriz:

$$\bar{\mathbf{A}}_0 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.40c)$$

Para completar la demostración objeto del presente subapartado es necesario verificar que los valores propios no nulos de la matriz $\bar{\mathbf{A}}_0$ definida por una de las expresiones (4.40) son los valores propios no nulos de la matriz \mathbf{A} .

En el caso en que $\bar{\mathbf{A}}_0$ se define en (4.40a) ello es evidente.

Si es $\hat{n}_r \leq n_r$ la matriz $\bar{\mathbf{A}}_0$ se define en (4.40b). El polinomio característico $Q_{\bar{\mathbf{A}}_0}(t)$ de la matriz $\bar{\mathbf{A}}_0$ es igual al siguiente determinante:

$$Q_{\bar{A}_0}(t) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A} - t\mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -t\mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & -t\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (4.41a)$$

Desarrollando el determinante mostrado en (4.41a) mediante la regla de Laplace a partir de los menores de la misma dimensión que \mathbf{A} y pertenecientes a las $2n$ filas superiores de dicho determinante, se obtiene el siguiente resultado:

$$Q_{\bar{A}_0}(t) = \det(\mathbf{A} - t\mathbf{I}) \det \begin{pmatrix} -t\mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -t\mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \dots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & -t\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (4.41b)$$

puesto que, al desarrollar el determinante mostrado en (4.41a), los sumandos que no se muestran en (4.41b) son nulos ya que todos los determinantes cuyas columnas no abarcan totalmente al determinante de $(\mathbf{A} - t\mathbf{I})$ mutiplican a un menor complementario que contiene una columna de ceros. El desarrollo de la expresión (4.41b) conduce al siguiente resultado para el polinomio característico de $\bar{\mathbf{A}}_0$:

$$Q_{\bar{A}_0}(t) = (-1)^{n_a n_r} Q_{\mathbf{A}}(t) t^{n_a n_r} \quad (4.42)$$

donde n_a es el número de actuadores que aplican las fuerzas de control sobre la estructura, valor igual al número de filas de las matrices $\hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{K}}_1, \dots, \hat{\mathbf{K}}_{n_r}$.

Cuando la matriz $\bar{\mathbf{A}}_0$ se define en la igualdad (4.40c) se obtiene de forma análoga el siguiente resultado:

$$Q_{\bar{A}_0}(t) = (-1)^{n_a \hat{n}_r} Q_A(t) t^{n_a \hat{n}_r} \quad (4.43)$$

Los polinomios característicos representados en (4.42) y (4.43) muestran que los valores propios no nulos de la matriz \bar{A}_0 son también valores propios de A y tienen, por tanto, módulo menor que la unidad. La aseveración anterior finaliza la demostración desarrollada en el presente subapartado.

Las igualdades (4.40) muestran que si el proceso en lazo abierto es asintótica y globalmente estable siempre puede hallarse un valor del horizonte de predicción λ_0 de forma que para cualquier $\lambda \geq \lambda_0$ el proceso en lazo cerrado es también globalmente estable.

La propiedad anterior es cierta incluso en presencia de errores de modelización, es decir, aunque el modelo predictivo (4.4) no represente fielmente el comportamiento del sistema por existir discrepancias entre los valores de A y de \hat{A} , de B y de \hat{B} , de H y de \hat{H} y los de n_r y \hat{n}_r :

$$\hat{A} \neq A \quad \hat{B} \neq B \quad \hat{H} \neq H \quad \hat{n}_r \neq n_r \quad (4.44)$$

Únicamente es necesario que el proceso en lazo abierto sea estable, es decir que todos los valores propios de la matriz A estén en el interior del círculo unidad.

4.4.3 Ejemplos numéricos.

En el presente subapartado se describen distintas experiencias numéricas de control predictivo de un sistema mecánico con un grado de libertad para mostrar que, en dichos casos, el valor λ_0 a partir del cual el control es estable no toma valores desmesurados y corresponde a una acción de control eficaz. En la generación del modelo predictivo se hace una estimación deliberadamente errónea de las constantes dinámicas y del número de retardos del sistema.

Las constantes dinámicas de masa M , amortiguamiento C y rigidez K del sistema tienen los siguientes valores:

$$M = 2922.7 \text{ Kg} \quad C = 1579.40 \text{ N} \cdot \text{s/m} \quad K = 1389387.1 \text{ N/m} \quad (4.45)$$

En el capítulo 7 se muestran numerosos ensayos numéricos y experimentales sobre este sistema.

Las experiencias numéricas mostradas en el presente subapartado se clasifican en dos grupos: en los ensayos del primer grupo se considera la evolución del sistema en ausencia de excitación a partir de un desplazamiento inicial impuesto y en los ensayos del segundo grupo se considera la presencia de una excitación sísmica. En ambos casos existe una fuerza de control activo cuyo valor se obtiene a partir del algoritmo de control predictivo definido por (4.21).

El proceso dinámico se simula en ordenador mediante el modelo (4.1) generado a partir del algoritmo SSP descrito en el capítulo 3. El vector de estado \mathbf{x} tiene dos componentes que corresponden al desplazamiento y a la velocidad del sistema:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} d(k) \\ \dot{d}(k) \end{pmatrix} \quad (4.46a)$$

En la aplicación del algoritmo SSP se consideran los siguientes valores del período de discretización Δt y del máximo error ε admitido en la norma de la matriz \mathbf{A} :

$$\Delta t = 0.01 \text{ s} \quad \varepsilon = 0.01 \quad (4.46b)$$

Los valores anteriores corresponden a un número de términos $p = 3$ y un exponente $m = 8$ ($q = 3$) en la expresión (3.29). En el subapartado 4.1 del capítulo 7 se muestra en una situación paralela que dichos valores generan un cálculo estable y preciso en ausencia de control, lo cual permite afirmar que el proceso en lazo abierto es estable.

En el algoritmo de control predictivo se considera un período de muestreo T igual al valor del Δt utilizado en el algoritmo SSP, es decir:

$$T = 0.01 \text{ segundos} \quad (4.47a)$$

Las matrices $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ del modelo predictivo (4.4) se generan de forma análoga a las matrices del sistema \mathbf{A} y \mathbf{B} definidas en (3.11a) y (4.2c), respectivamente, aunque a partir de unos valores de M , C y K que pueden diferir de los valores reales del sistema mostrados en (4.45).

En el modelo del sistema (4.1) y en el modelo predictivo (4.4) el vector de salida (respuesta) del sistema se considera igual al vector de estado y, consecuentemente, ambas matrices de salida \mathbf{H} y $\hat{\mathbf{H}}$ son iguales a la matriz identidad, es decir:

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{I} \quad \mathbf{y}(k) = \mathbf{x}(k) \quad \hat{\mathbf{y}}(k+j|k) = \hat{\mathbf{x}}(k+j|k) \quad j = 1, \dots, \lambda \quad (4.47b)$$

La función de coste J dada por (4.11) se define a partir de los siguientes valores de las matrices de peso \mathbf{Q} y \mathbf{R} :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R = 0 \quad (4.47c)$$

La matriz R tiene en este caso las dimensiones de un valor escalar.

Se considera una una matriz de referencia $A_r = 0$ que, de acuerdo con (4.17), genera una trayectoria de referencia nula:

$$y_r(k + j | k) = 0 \quad j = 1, \dots, \lambda \quad (4.47d)$$

Consecuentemente, la salida de referencia en el horizonte de predicción también es nula:

$$y_r(k + \lambda | k) = 0 \quad (4.47e)$$

Los valores mostrados en las expresiones (4.47) definen unívocamente el algoritmo de control predictivo que se considera en las experiencias numéricas descritas en el presente subapartado.

En el subapartado 4.4.1 se afirma que las características de estabilidad del control predictivo no dependen de la perturbación exterior sino únicamente del módulo máximo de los valores propios de la matriz \bar{A} y en el subapartado 4.4.2 se afirma que aún en presencia de errores de modelización en el modelo predictivo (4.4) se puede hallar un valor λ_0 tal que para cualquier $\lambda \geq \lambda_0$ los valores propios de la matriz \bar{A} tienen módulo menor que la unidad y, consecuentemente, si el proceso en lazo abierto es estable el proceso en lazo cerrado es también estable. Para el sistema considerado en el presente subapartado se obtiene numéricamente a continuación el valor de λ_0 para diferentes valores del número de retardos del sistema n_r y del modelo predictivo \hat{n}_r y para distintos errores en la estimación de las constantes diámicas del sistema en la generación del modelo predictivo.

En la tabla 4.1 se muestra la variación respecto del parámetro μ definido por $\mu = \lambda - \hat{n}_r$ del módulo máximo de los valores propios de la matriz \bar{A} en ausencia de errores de estimación de M , C y K para distintos valores de n_r y de \hat{n}_r .

TABLA 4.1												
MODULO MAXIMO DE LOS VALORES PROPIOS DE \bar{A}												
n_r	\hat{n}_r	$\mu \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.998	0.502	0.672	0.759	0.813	0.851	0.879	0.901	0.919	0.935	
1	0	1.861	1.211	0.959	0.824	0.763	0.794	0.839	0.872	0.897	0.917	
2	0	1.760	1.338	1.151	1.039	0.961	0.904	0.863	0.845	0.863	0.890	
3	0	1.649	1.342	1.198	1.109	1.045	0.996	0.956	0.923	0.897	0.881	
1	1	0.998	0.502	0.672	0.759	0.813	0.851	0.879	0.901	0.919	0.935	
2	1	3.260	1.565	1.084	0.911	0.860	0.832	0.838	0.867	0.894	0.915	
3	1	2.801	1.191	1.095	1.029	0.979	0.941	0.909	0.886	0.876	0.888	
1	2	2.999	1.632	1.147	0.889	0.868	0.890	0.908	0.924	0.939	0.952	
2	2	0.998	0.502	0.672	0.759	0.813	0.851	0.879	0.901	0.919	0.935	
3	2	2.390	1.441	1.104	0.933	0.897	0.872	0.860	0.869	0.892	0.913	
1	3	3.066	1.768	1.317	1.071	0.907	0.918	0.931	0.944	0.956	0.967	
2	3	2.759	1.396	1.134	0.937	0.875	0.894	0.911	0.926	0.940	0.953	
3	3	0.998	0.502	0.672	0.759	0.813	0.851	0.879	0.901	0.919	0.935	

En la tabla 4.1, para cada valor de n_r y de \hat{n}_r , se representa en negrita el primer valor del módulo máximo de los valores propios de \bar{A} que es menor que la unidad. A partir de la igualdad (4.5) que relaciona los valores de λ y de μ , la tabla 4.1 muestra, para cada valor de n_r y de \hat{n}_r , el valor de λ_0 tal que, para todo $\lambda \geq \lambda_0$ el proceso en lazo cerrado es estable.

El análisis de la tabla 4.1 muestra que, en los casos en que existe discrepancia entre los valores de n_r y de \hat{n}_r , para valores pequeños de μ el módulo máximo de los valores propios de \bar{A} es mayor que la unidad pero cuando μ aumenta el valor de dicho módulo es menor que la unidad. Cuando no existe discrepancia entre n_r y \hat{n}_r los valores propios de \bar{A} tienen módulo menor que la unidad para cualquier valor de μ .

En la figura 4.2 se muestran los valores del módulo máximo de los valores propios de la matriz \bar{A} cuando $\lambda = 1, \dots, 10$ para el caso en que $n_r = 3, \hat{n}_r = 0$.

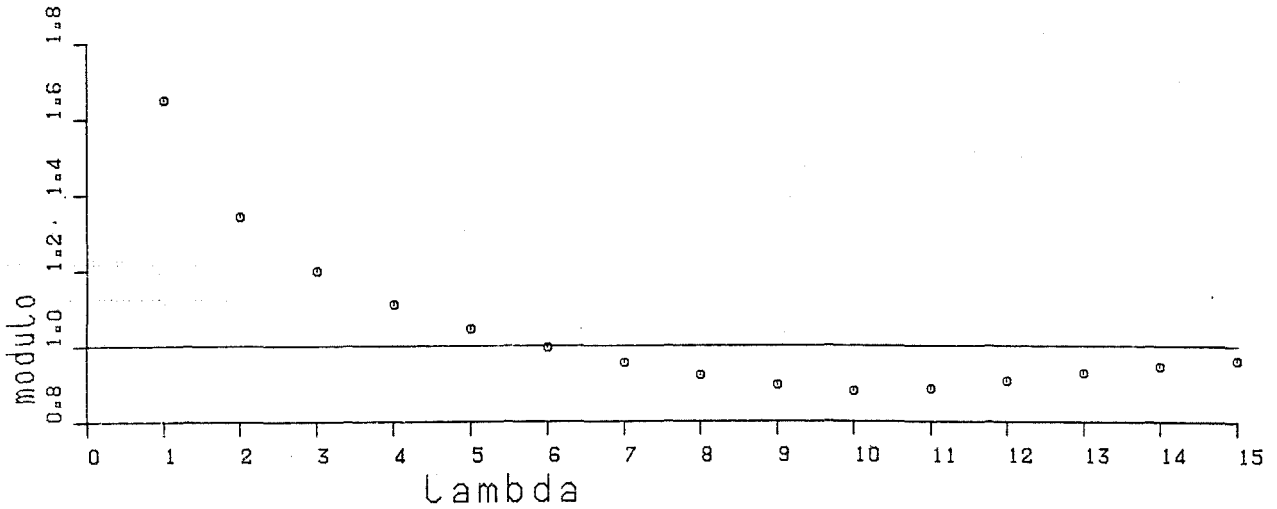


Figura 4.2 Módulo máximo de los valores propios de la matriz \bar{A} cuando $n_r = 3, \hat{n}_r = 0$.

La figura 4.2 muestra que para valores de λ iguales o superiores a 6 el módulo máximo de los valores propios de \bar{A} es menor que la unidad. Consecuentemente, para el caso considerado en la figura 4.2 el valor de λ_0 es igual a 6.

Si en el caso en que $n_r = 3, \hat{n}_r = 0$ se consideran valores de λ superiores a 10 el módulo máximo de los valores propios de \bar{A} tiende a aproximarse al valor 0.997, módulo de los valores propios de A , confirmando las conclusiones del subapartado 4.4.2.

En las experiencias numéricas descritas a continuación se comprueba que, para $n_r = 3, \hat{n}_r = 0$, los casos para valores de λ inferiores a 6 son inestables mientras que los casos correspondientes a valores de λ iguales o superiores a 6 son estables.

Se describen a continuación los ensayos del primer grupo en los que, en ausencia de excitación externa, se considera el movimiento del sistema a partir de una situación inicial impuesta consistente en un desplazamiento de 1 cm. y velocidad nula.

En la figura 4.3 se muestra la historia temporal del desplazamiento cuando no existe fuerza de control.

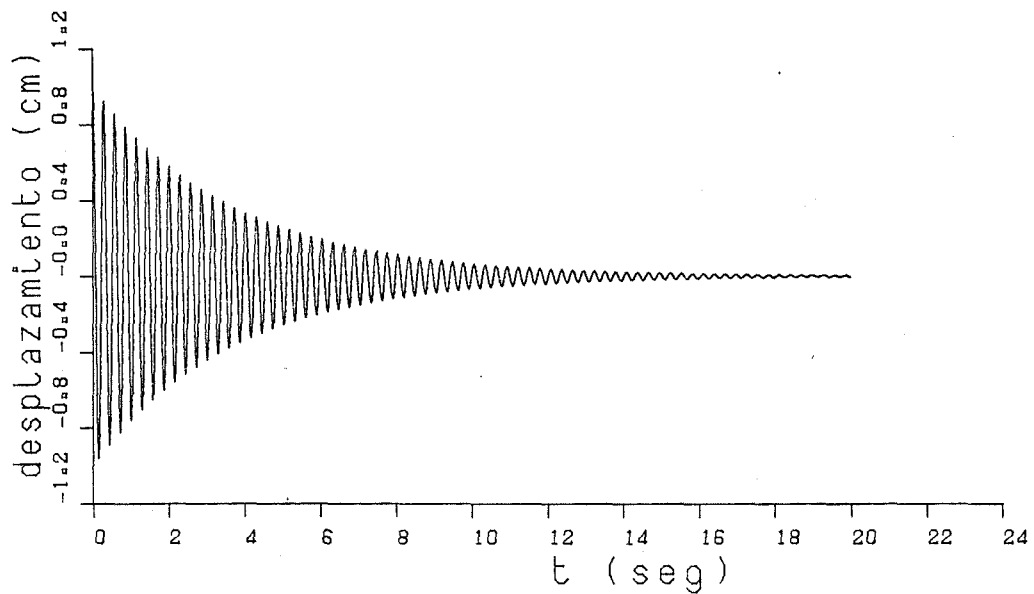


Figura 4.3 Evolución del sistema a partir de un desplazamiento inicial. Sin control.

En la figura 4.3 se aprecia que el amortiguamiento de la respuesta no controlada es muy lento.

En presencia de una fuerza de control activo calculada a partir de un algoritmo predictivo en el que se consideran valores de λ inferiores a 6 la respuesta es inestable. En las figuras 4.4a a 4.4e se representa la historia temporal del desplazamiento en dichos casos.

La comparación entre las figuras 4.4 muestra que la inestabilidad tiende a disminuir cuando λ aumenta puesto que el instante en que la respuesta crece de forma desmesurada se desplaza hacia la derecha.

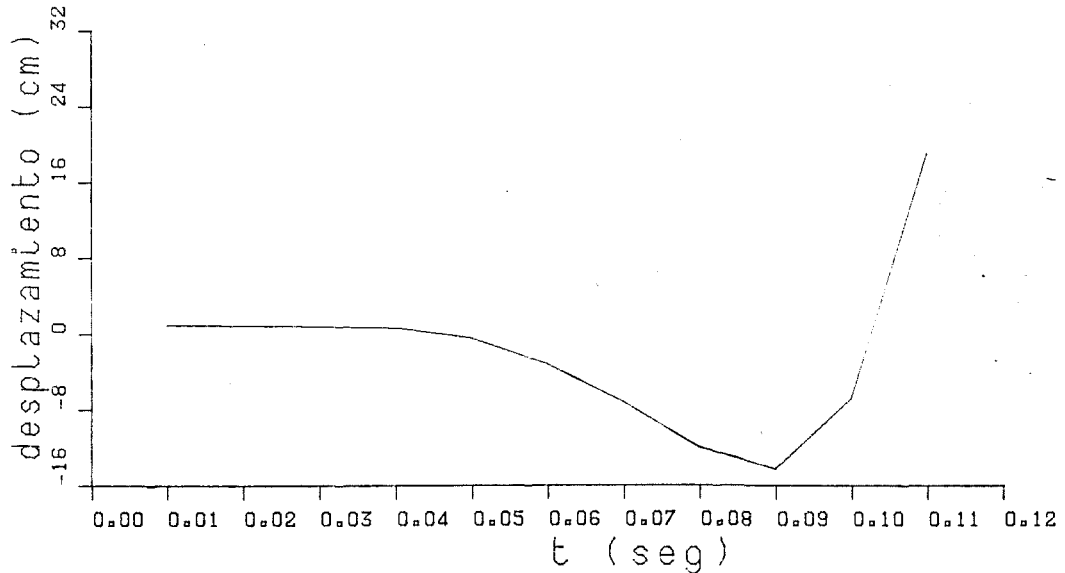


Figura 4.4a Respuesta controlada. Sin excitación. $\lambda = 1$, $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

Para valores de λ superiores a 5 la respuesta es estable. En las figuras 4.5a a 4.5f se representan historias temporales del desplazamiento y de la fuerza de control en dichos casos.

Las gráficas que muestran la historia temporal de la respuesta en las figuras 4.5 indican un amortiguamiento muy lento del movimiento en el caso $\lambda = 6$ y una atenuación cada vez más rápida para $\lambda = 7, \dots, 10$. Ello representa una acción de control más enérgica al aumentar el valor de la longitud del horizonte de predicción λ , lo cual está en contradicción con el significado de dicho parámetro, puesto que en dicho caso se pretende la atenuación de la respuesta al cabo de un horizonte más lejano y, consecuentemente, la acción de control es más suave. La justificación de la aparente contradicción anterior radica en la exagerada diferencia que existe entre el número real de retardos del sistema ($n_r = 3$) y el valor estimado en el modelo predictivo ($\hat{n}_r = 0$). El error de estimación de los retardos hace que la fuerza de control se aplique

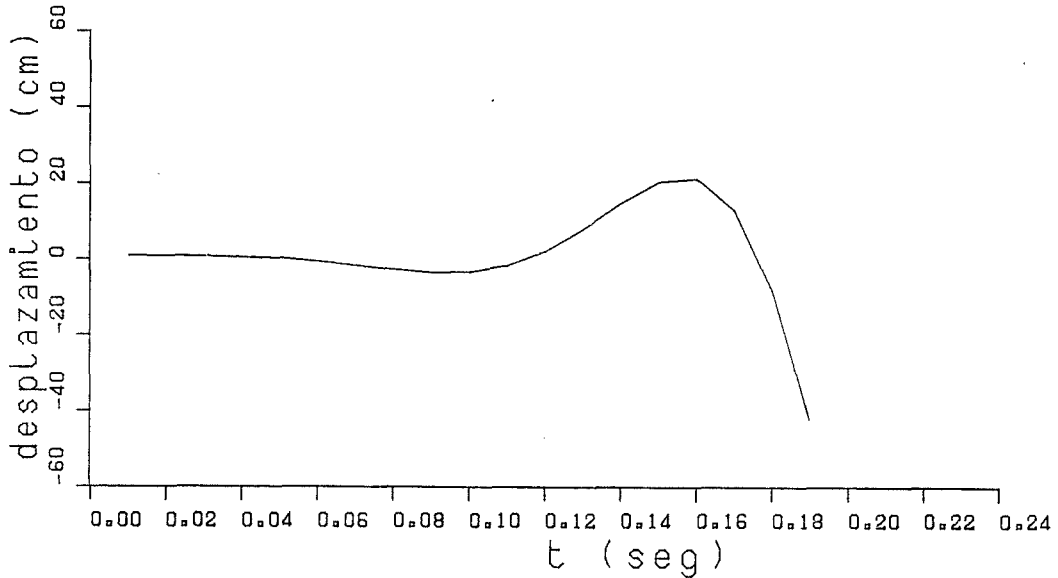


Figura 4.4b Respuesta controlada. Sin excitación. $\lambda = 2$, $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

a destiempo y que su acción pueda convertirse en desestabilizadora si se pretende una rápida atenuación de la respuesta, es decir, si λ es pequeño. Este importante efecto desestabilizador (creciente al disminuir λ) se superpone a la acción estabilizadora del control (también creciente al disminuir λ) y perturba la tendencia de la acción de control a atenuarse cuando λ aumenta. Para valores de λ superiores a 10 la inestabilidad provocada por la diferencia entre n_r y \hat{n}_r tiende a desaparecer y la acción de control es menos energética con una atenuación más lenta de la respuesta. La figura 4.5f confirma, para $\lambda = 15$ dicha aseveración.

En todos los ensayos con una acción de control estable mostrados en las figuras 4.5 el amortiguamiento de la respuesta es notoriamente más rápido que en el ensayo sin control mostrado en la figura 4.3. Consecuentemente, en dichos casos la acción de control es plenamente eficaz.

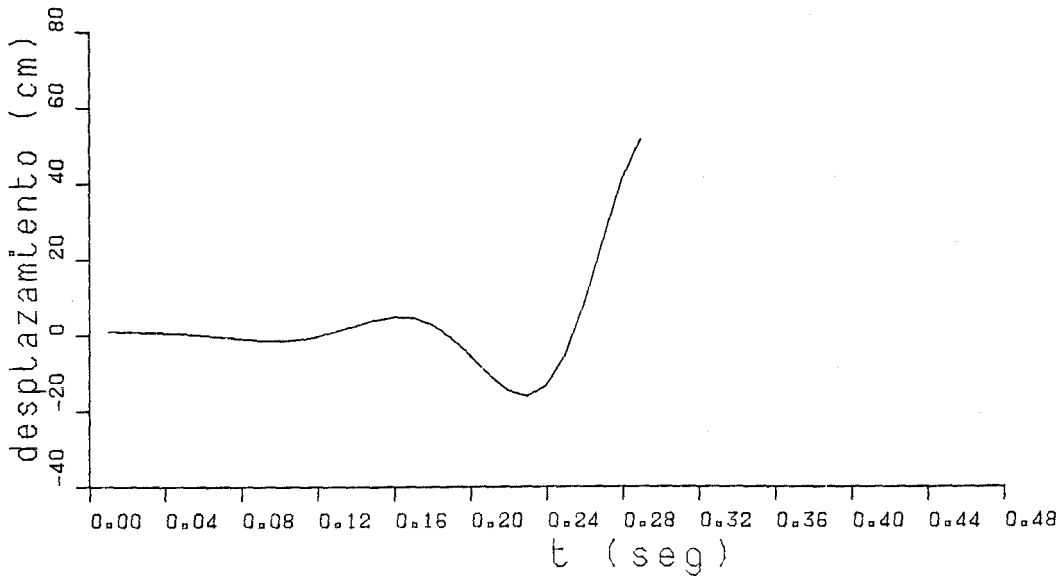


Figura 4.4c Respuesta controlada. Sin excitación. $\lambda = 3$, $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

Se describen a continuación los ensayos numéricos del segundo grupo en los que existe una excitación dinámica que proviene del acelerograma sísmico mostrado en la figura 7.8.

En la figura 4.6 se muestra la historia temporal del desplazamiento cuando no existe fuerza de control.

Cuando existe una acción de control, la respuesta es inestable para valores de λ inferiores a 6 y estable en los otros casos. En las figuras 4.7a a 4.7e se representan las respuestas controladas en los casos inestables.

La comparación entre las figuras 4.7 muestra que la inestabilidad tiende a disminuir cuando λ aumenta puesto que el instante en que la respuesta crece de forma desmesurada se desplaza hacia la derecha. En las figuras 4.4 se observaba análoga tendencia en ensayos sin excitación.

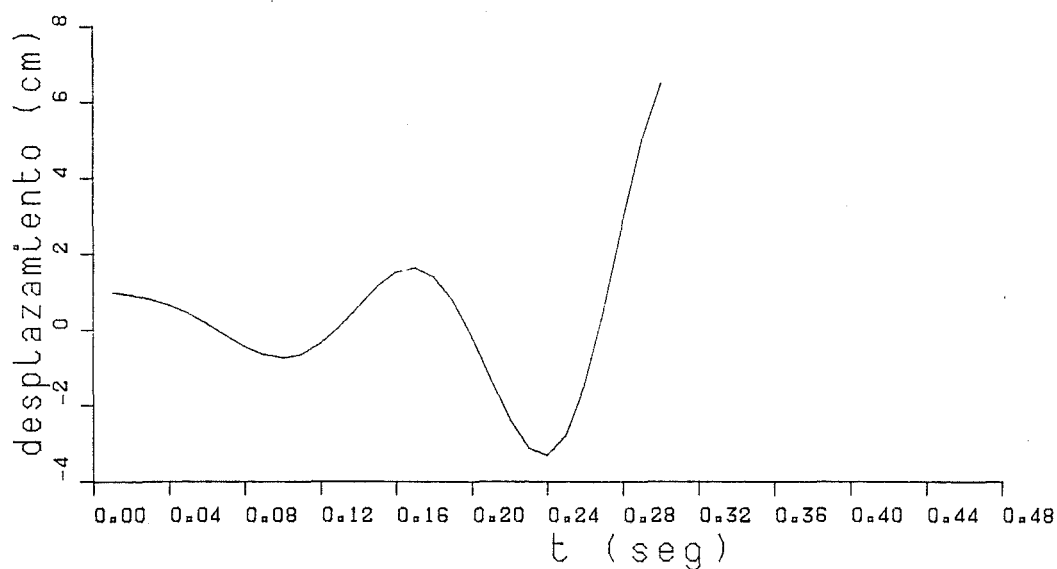


Figura 4.4d Respuesta controlada. Sin excitación. $\lambda = 4$,
 $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

Para valores de λ superiores a 5 la respuesta es estable. En las figuras 4.8a a 4.8c se representan historias temporales del desplazamiento y de la fuerza de control en dichos casos.

El menor valor de λ que proporciona una respuesta estable es el mismo en los ensayos del primer grupo en los que no existe excitación que en los ensayos del segundo grupo en los cuales se considera una excitación dinámica. Esta coincidencia confirma que la estabilidad del control predictivo no es un fenómeno relacionado con las características de la excitación sino que depende exclusivamente de los valores propios de la matriz \bar{A} .

La comparación de las historias temporales de los desplazamientos en las figuras 4.8 para $\lambda = 6, 7$ y 8 muestra que los desplazamientos en el caso $\lambda = 6$ (figura 4.8a) son mayores que en el caso $\lambda = 7$ (figura 4.8b) y éstos son a su vez menores que los correspondientes al caso para $\lambda = 8$ (figura 4.8c). Para valores de λ superiores a

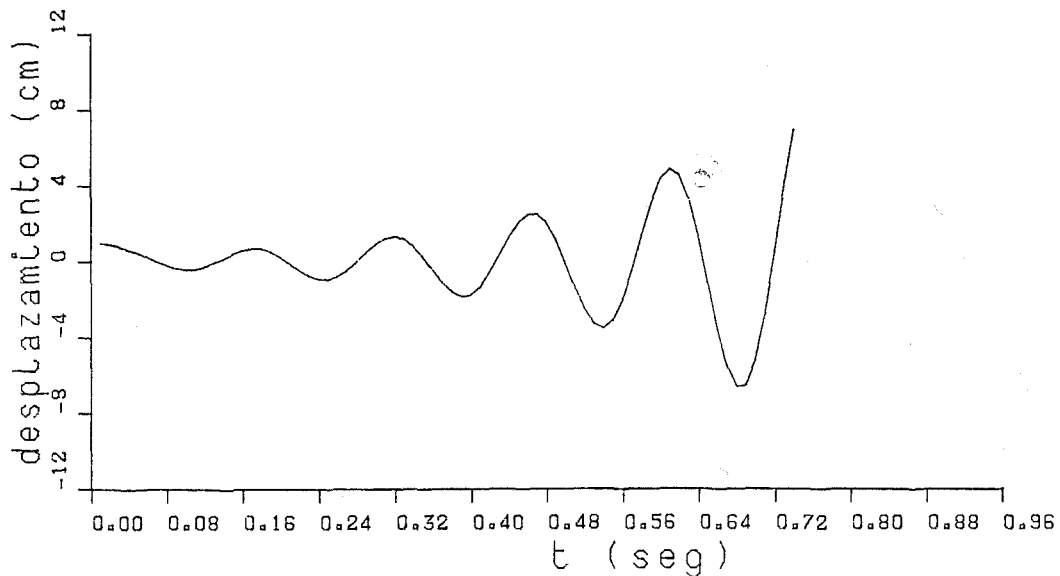


Figura 4.4e Respuesta controlada. Sin excitación. $\lambda = 5$, $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

8 la respuesta aumenta progresivamente con el valor de λ . Ello indica una tendencia similar a la apuntada en las figuras 4.5 para los ensayos sin excitación externa, es decir, para valores crecientes de λ a partir de 6 la respuesta del sistema disminuye inicialmente y posteriormente aumenta de forma continua. En el caso de ensayos con excitación dinámica se aprecia una importante diferencia con respecto a los ensayos sin excitación: la disminución inicial de la respuesta y el posterior incremento de la misma corresponden a valores de λ más pequeños. Dicha circunstancia se interpreta como una mayor atenuación de la acción de control al aumentar λ producida por el incremento del error en la predicción de la respuesta al cabo del horizonte de predicción cuando éste se aleja (por ser mayor el valor de λ) y, consecuentemente, la cantidad de perturbación exterior que no se tiene en cuenta en la predicción es mayor.

La comparación entre la respuesta incontrolada del sistema mostrada en la figura 4.6 y las respuestas del sistema sometido a una acción de control estable mostradas en

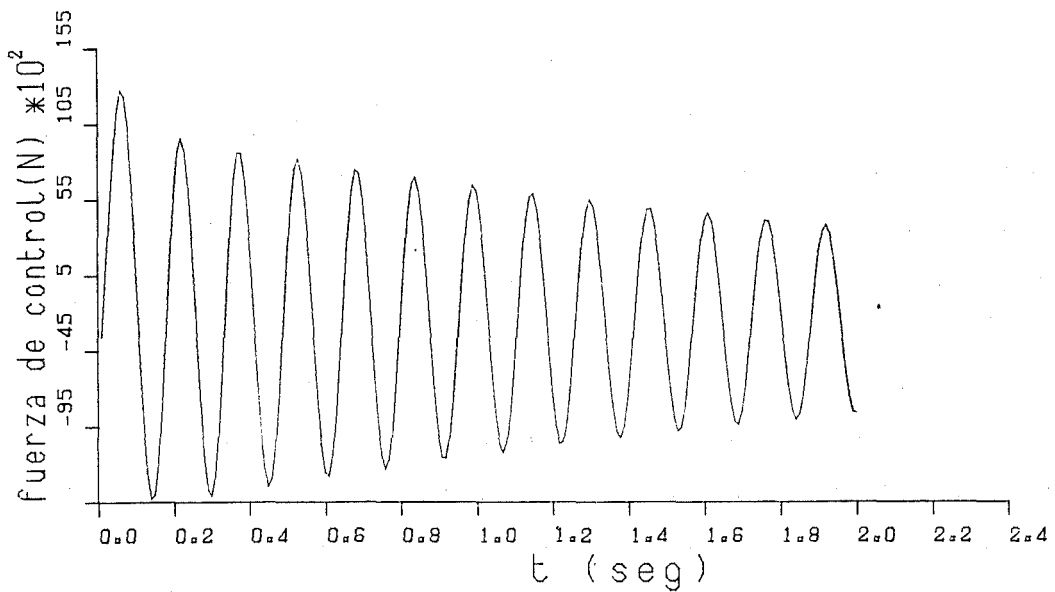
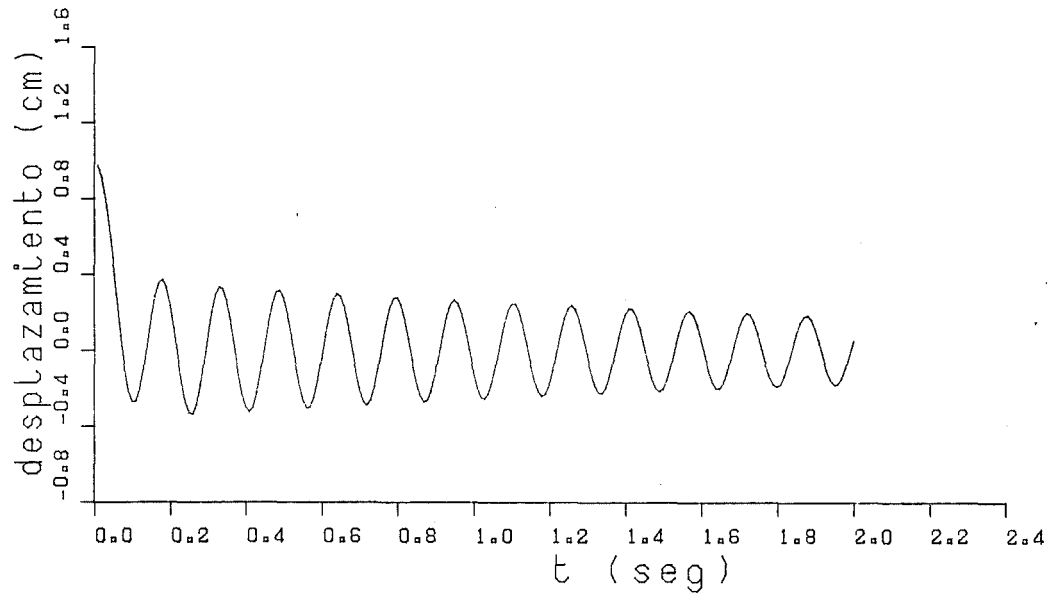


Figura 4.5a Respuesta controlada. Sin excitación. $\lambda = 6$,
 $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

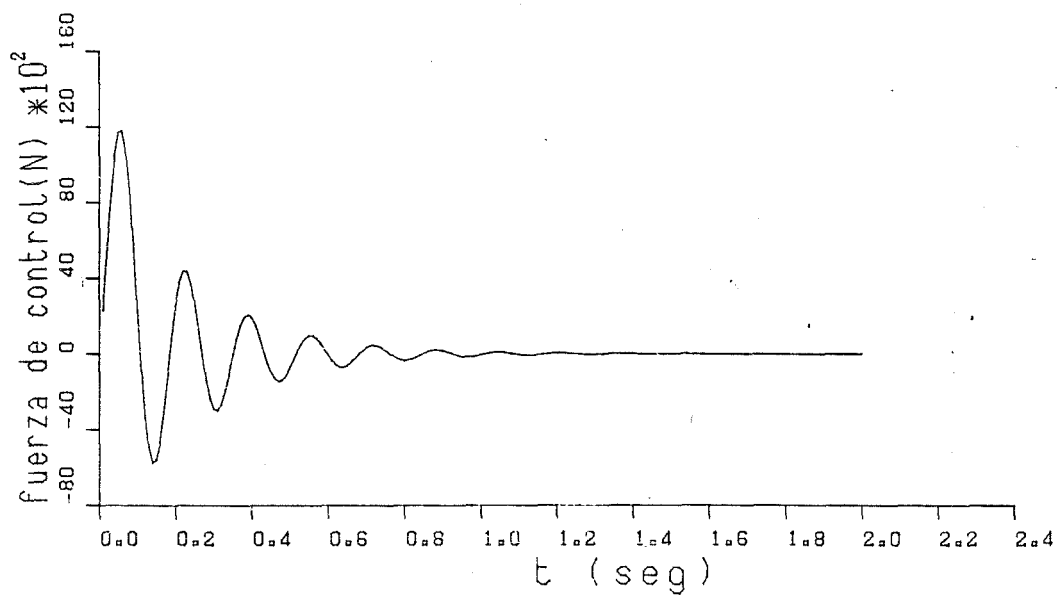
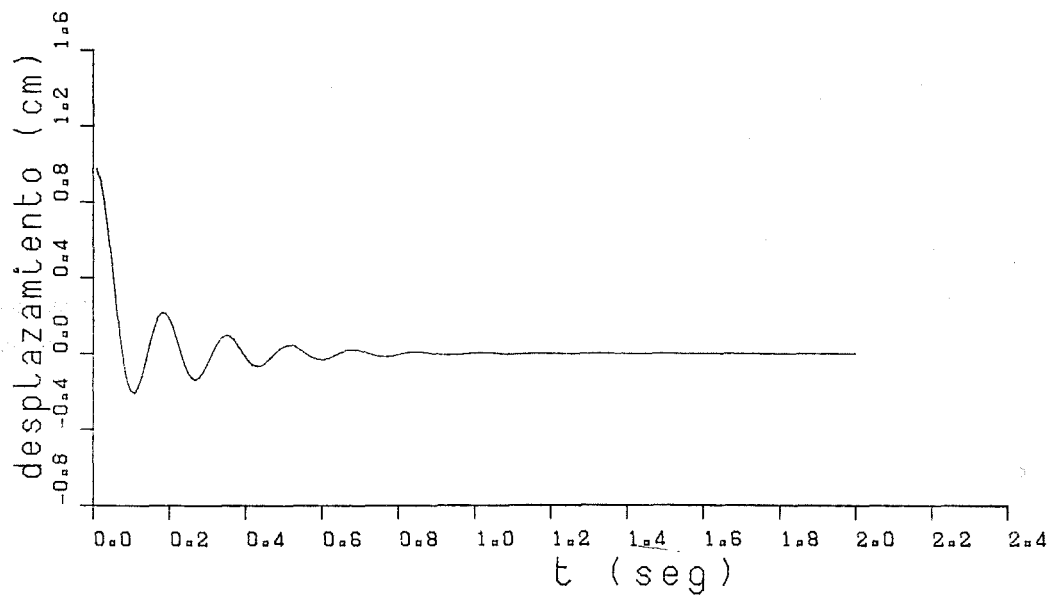


Figura 4.5b Respuesta controlada. Sin excitación. $\lambda = 7$,
 $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

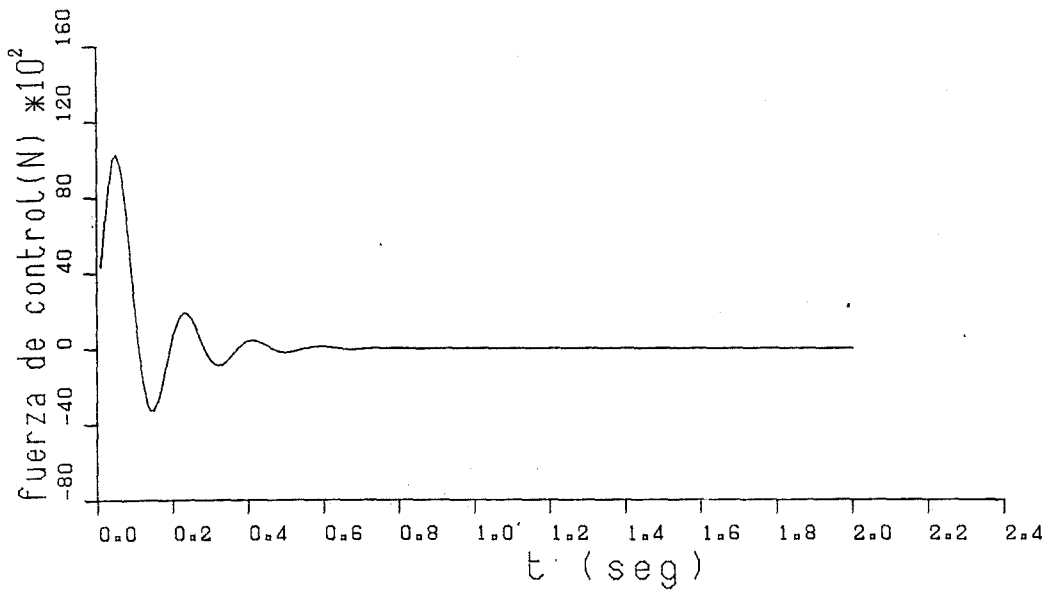
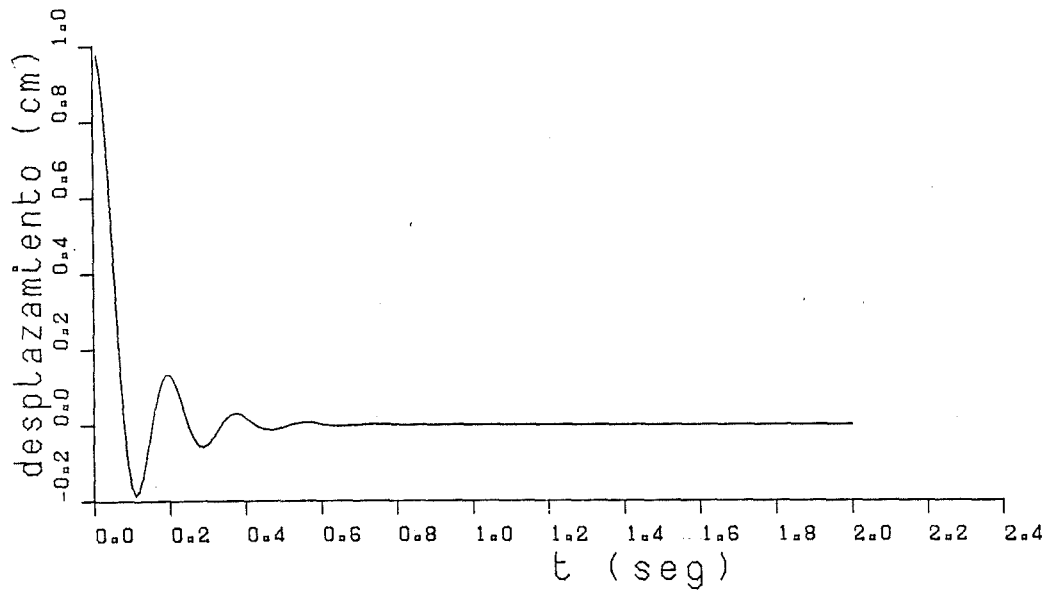


Figura 4.5c Respuesta controlada. Sin excitación. $\lambda = 8$, $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

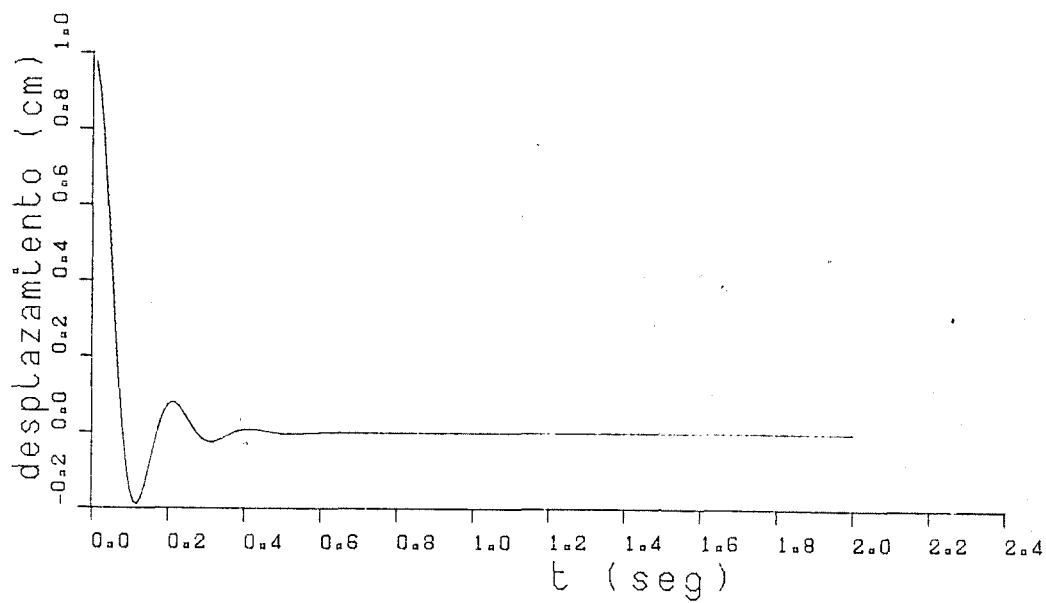
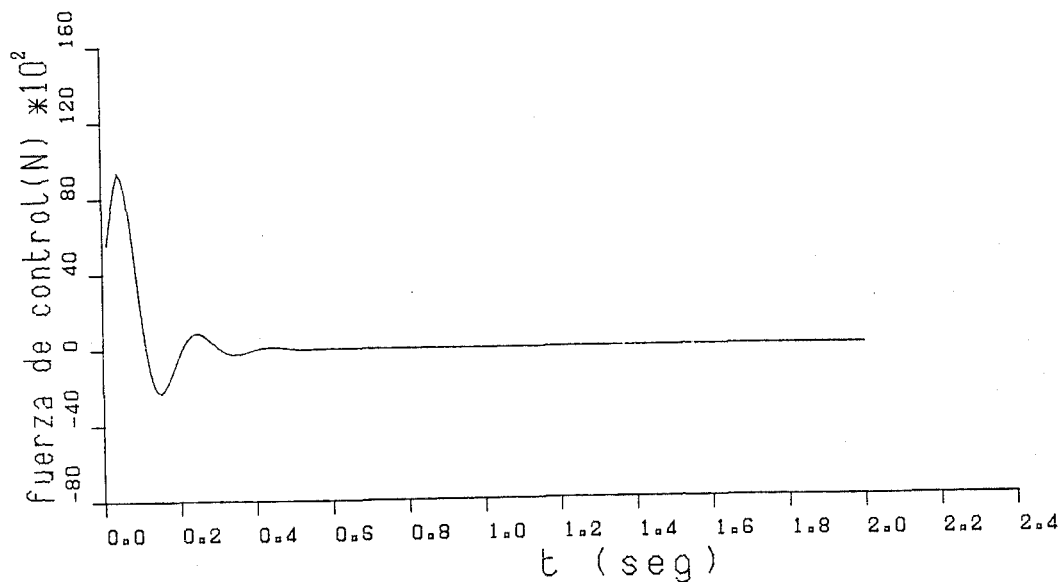


Figura 4.5d Respuesta controlada. Sin excitación. $\lambda = 9$, $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

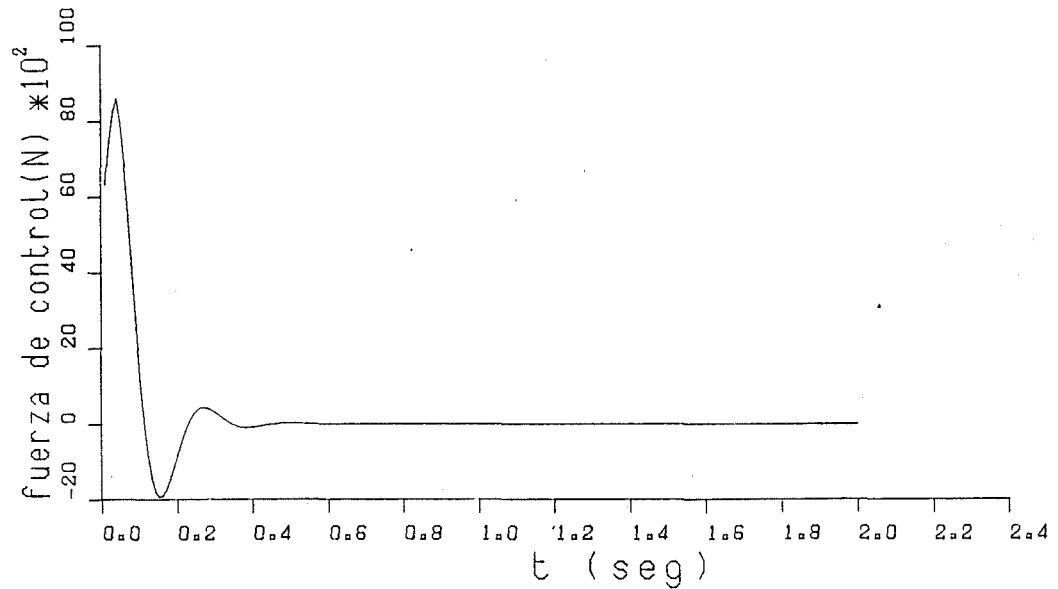
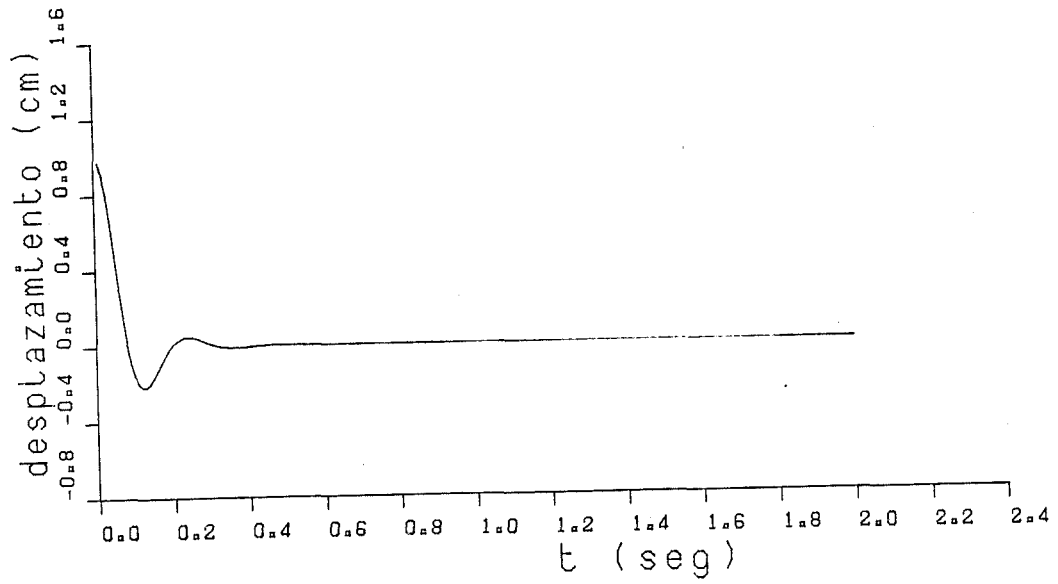


Figura 4.5e Respuesta controlada. Sin excitación. $\lambda = 10$,
 $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

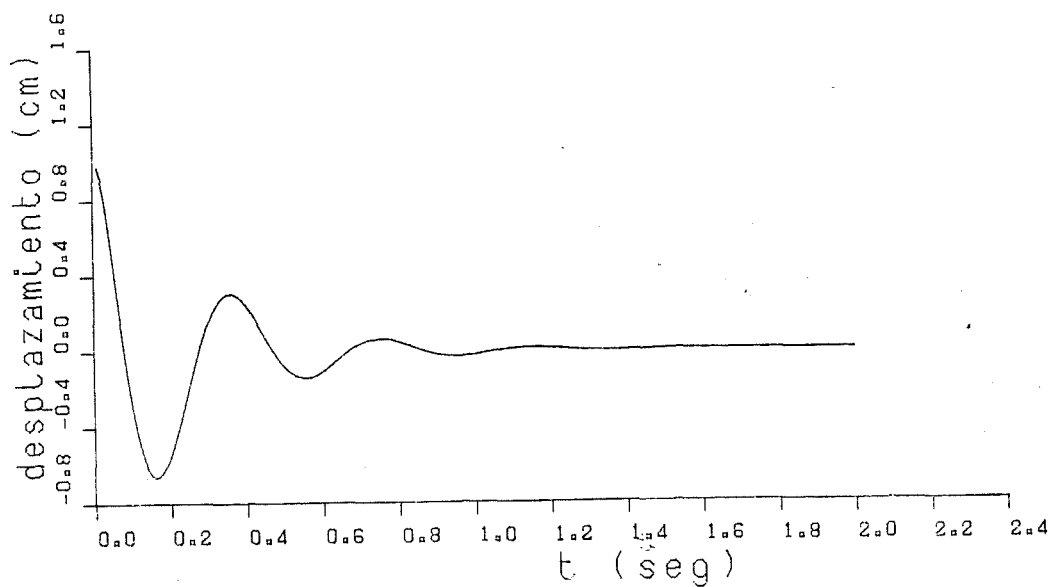
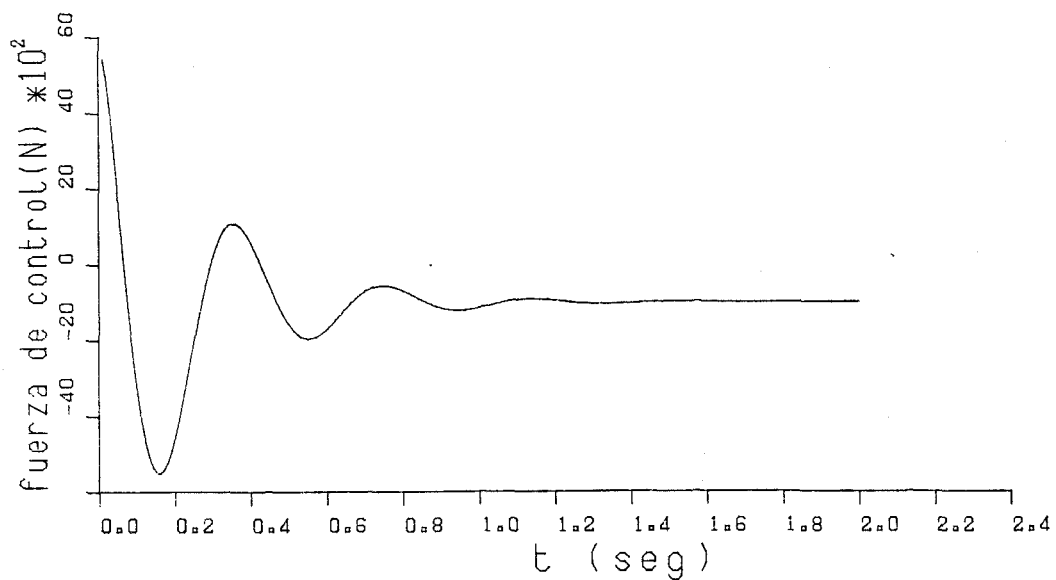


Figura 4.5f Respuesta controlada. Sin excitación. $\lambda = 15$, $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

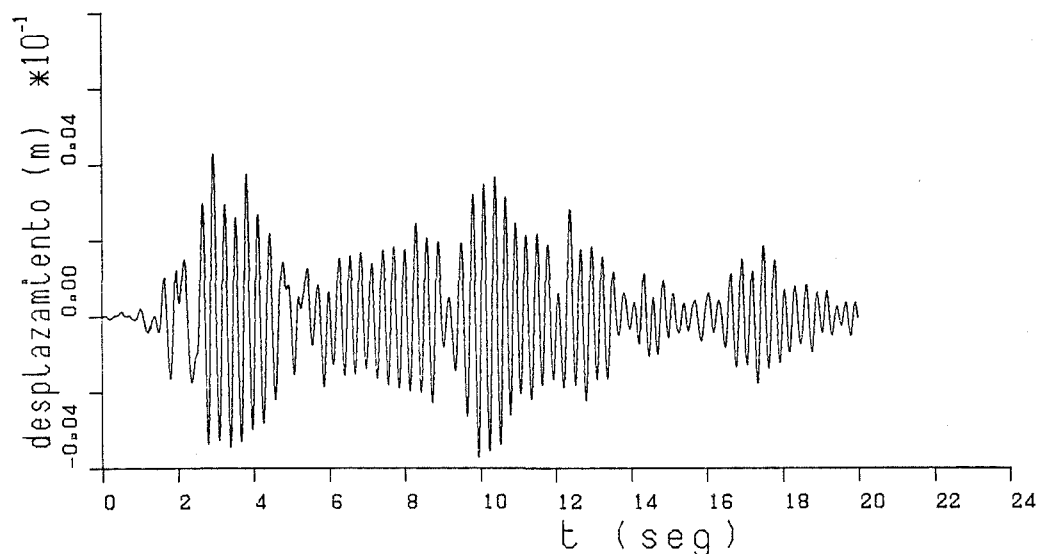


Figura 4.6 Respuesta sin control. Excitación sísmica.

las figuras 4.8 muestra que, cuando existe una excitación exterior, la acción de control es plenamente eficaz para disminuir la respuesta del sistema. Cuando λ aumenta, la desestabilización provocada por la diferencia entre n_r y \hat{n}_r disminuye y puede hallarse un valor de λ para el cual la inestabilidad es poco apreciable y sin, embargo la acción de control es aún suficientemente enérgica para lograr una importante reducción de la respuesta. En las figuras 4.8 se aprecia que cuando $\lambda = 7$ se cumplen las exigencias anteriores. Para diferencias entre n_r y \hat{n}_r no tan elevadas pueden conseguirse acciones de control estables y eficaces para valores de λ más pequeños.

En la tabla 4.2 se muestran los valores del modulo máximo de los valores propios de la matriz \bar{A} para diferentes valores de μ , de n_r y de \hat{n}_r en presencia de errores en la estimación de los parámetros dinámicos del sistema en la generación del modelo predictivo (4.4) cuando dichos errores se expresan en forma de porcentajes ΔM y $\Delta \omega$ de la masa y de la frecuencia natural de vibración del sistema, respectivamente.

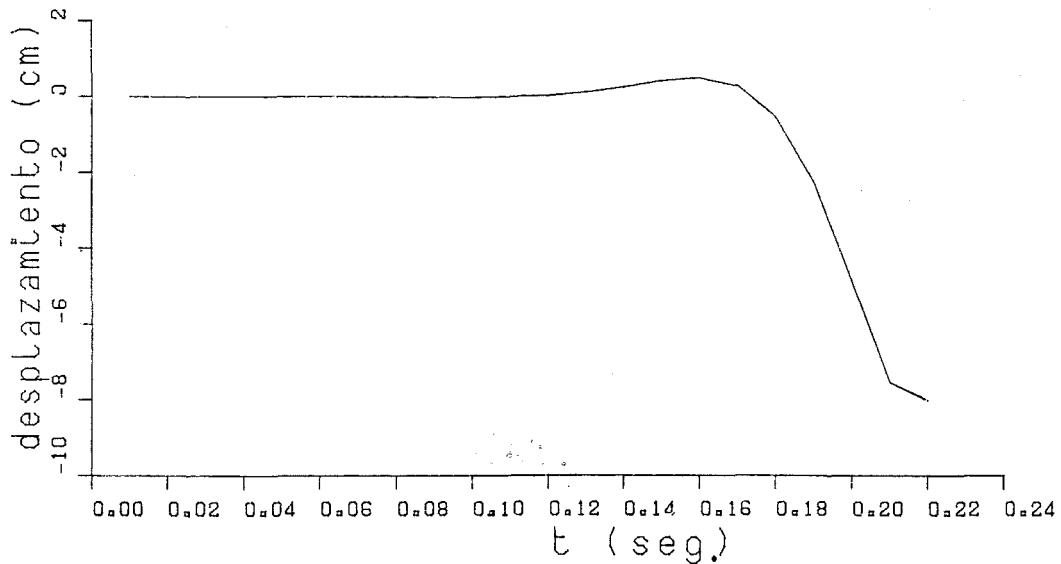


Figura 4.7a Respuesta controlada. Excitación sísmica. $\lambda = 1$, $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

La tabla 4.2 muestra que, aún en presencia de errores de modelización en el modelo predictivo (4.4), a partir de un valor de μ (y consecuentemente de λ) el módulo máximo de los valores propios de \bar{A} es menor que la unidad. En la tabla 4.2 se representan en negrita, para cada conjunto de valores de n_r , \hat{n}_r , $\Delta\omega$ y ΔM , los valores menores que la unidad que corresponden al menor valor de μ .

La comparación entre los datos contenidos en las tablas 4.1 y 4.2 muestra que los errores en la estimación del número de retardos del sistema perjudican la estabilidad del control predictivo de forma más acusada que los errores de estimación de sus parámetros dinámicos. Ello se debe a que los valores de M , C y K incorrectos únicamente producen una estimación errónea de la respuesta predicha mientras que una discrepancia entre n_r y \hat{n}_r provoca una actuación a destiempo de la fuerza de control.

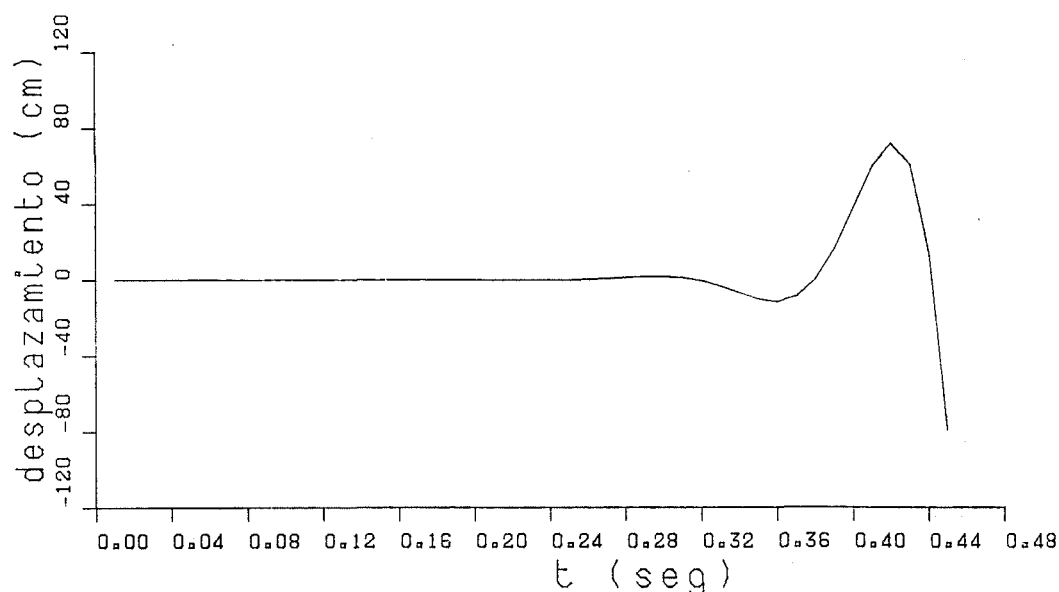


Figura 4.7b Respuesta controlada. Excitación sísmica. $\lambda = 2$, $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

4.5 CONCLUSIONES

En el presente capítulo se ha formulado un algoritmo de control predictivo para control digital activo de estructuras cuyo comportamiento dinámico pueda representarse mediante un modelo lineal. El algoritmo predictivo determina, en cada instante de muestreo k , el valor del vector de control $u(k)$ minimizando la diferencia entre la respuesta predicha en un instante futuro $k + \lambda$ por un modelo predictivo que simula el comportamiento dinámico de la estructura y la respuesta en dicho instante perteneciente a una trayectoria de referencia. Esta se toma generalmente igual a la consigna nula. En la formulación del algoritmo predictivo puede tenerse en cuenta el tiempo de respuesta de los actuadores que introduce un retardo en el lazo de control.

El valor del parámetro λ influye de forma significativa en las características del control: un valor pequeño de λ corresponde a una acción de control intensa con una

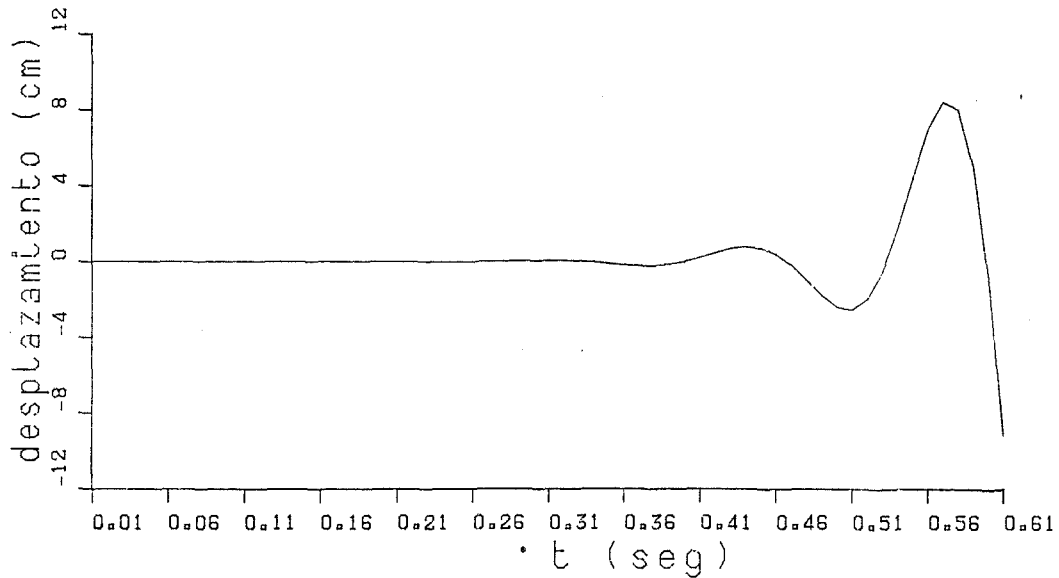


Figura 4.7c Respuesta controlada. Excitación sísmica. $\lambda = 3$, $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

notable reducción de la respuesta de la estructura mientras que un valor elevado de λ representa una acción de control menos enérgica.

Aunque las características dinámicas de la estructura y el tiempo de respuesta de los actuadores se estimen incorrectamente en el modelo predictivo, tomando valores de λ suficientemente grandes puede construirse un algoritmo de control predictivo robusto que genere un proceso en lazo cerrado estable con una acción de control eficaz capaz de reducir de forma apreciable la respuesta de la estructura.

El efecto de la acción de control puede asimilarse, en primera aproximación, a un incremento del amortiguamiento y de la rigidez de la estructura. La similitud es mayor si el tiempo de respuesta de los actuadores y el período de muestreo T son pequeños.

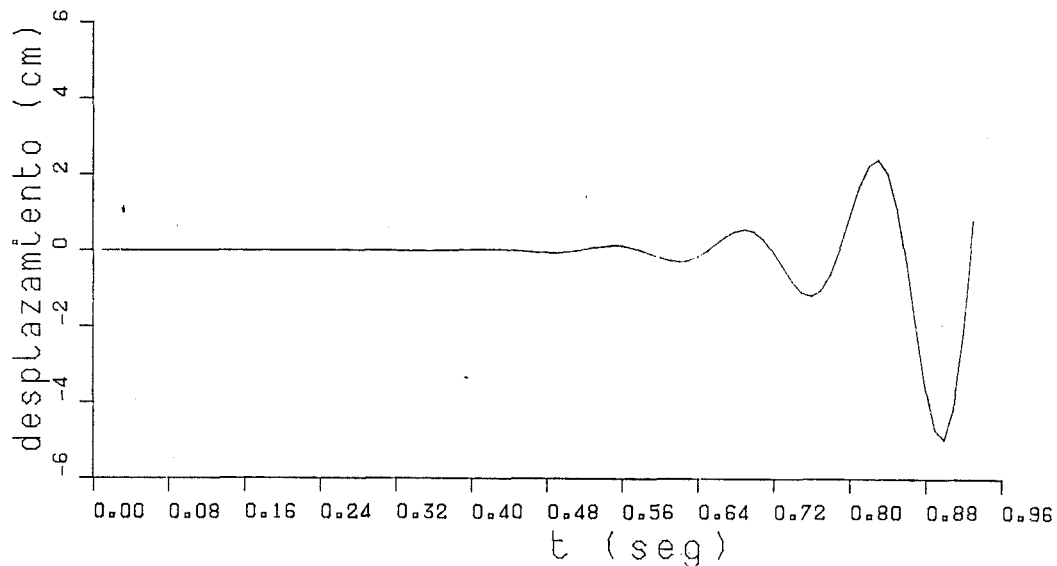


Figura 4.7d Respuesta controlada. Excitación sísmica. $\lambda = 4$,
 $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

REFERENCIAS

- 1 Martín Sánchez, J.M., "Contribución a los sistemas adaptativos con modelo de referencia a partir de la teoría de la hiperestabilidad", Tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, (1974).
- 2 Martín Sánchez, J.M., "A new solution to adaptive control", *Proc. of IEEE*, Vol. 64, N^o 8, pp. 461-464. (1976).
- 3 Martín Sánchez, J.M., "Adaptive-predictive control system (C.I.P.)", European Patent Application N^o 811026210-2206, fecha de prioridad: 7 de Abril de 1980.
- 4 Rodellar, J., "Diseño óptimo del bloque de consigna en el sistema de control adaptativo-predictivo", Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona, (1982).

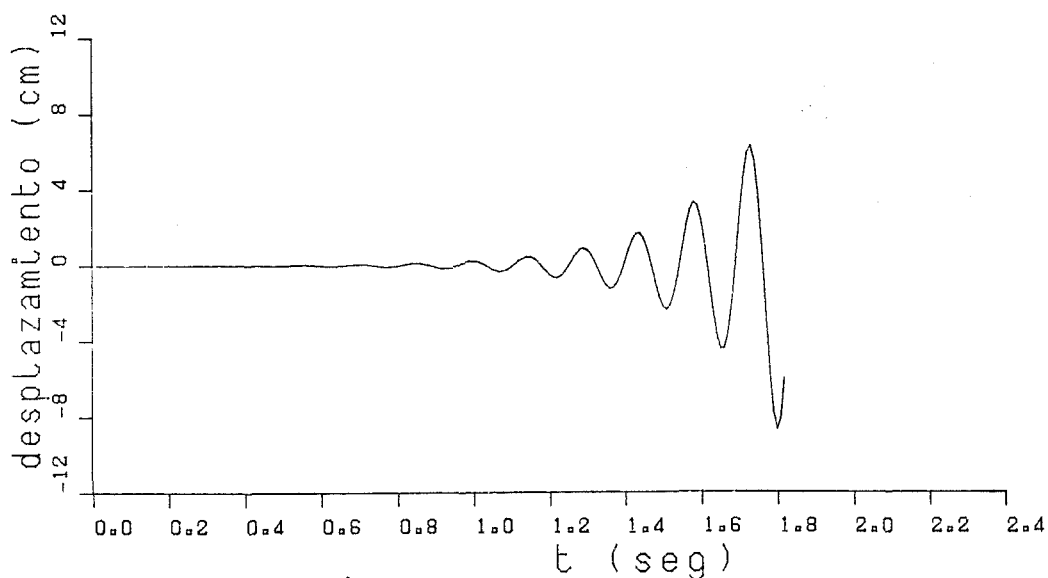


Figura 4.7e Respuesta controlada. Excitación sísmica. $\lambda = 5$,
 $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

- 5 Rodellar, J. y Barbat A.H., "Active control of building structures under measured seismic loads", *Engr. Computations*, Vol. 12, pp. 128-134, (1985).
- 6 Rodellar, J., Barbat A.H. y Martín Sánchez, J.M., "Predictive control of structures", *J. Engrg. Mechanics, Div. ASCE*, Vol. 113, N^o 6, pp. 797-812 (1987).
- 7 Rodellar, J., Chung, L.L., Soong, T.T. y Reinhorn, A.M., "Experimental digital control of structures", *J. Engrg. Mechanics, Div. ASCE*, Pendiente de publicación, (1987).

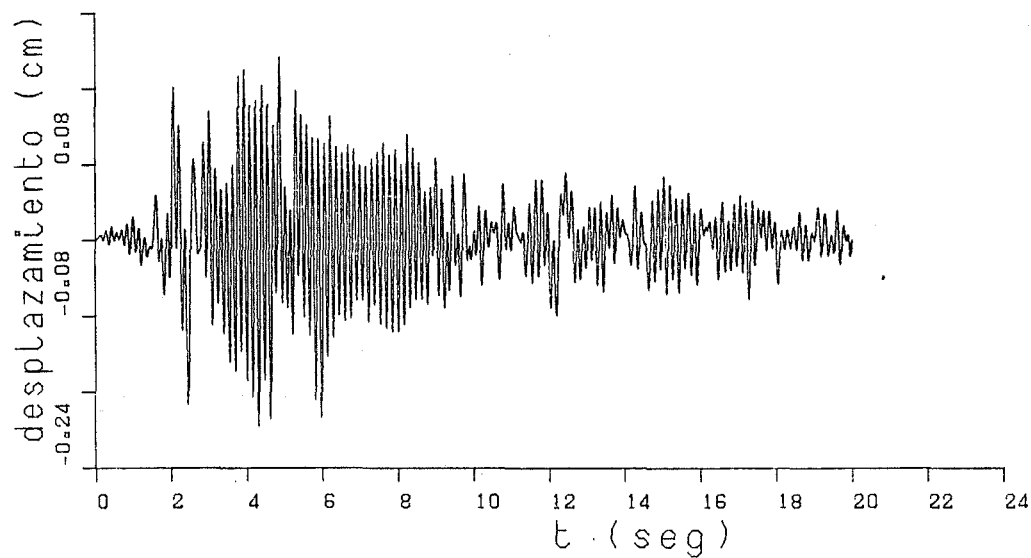
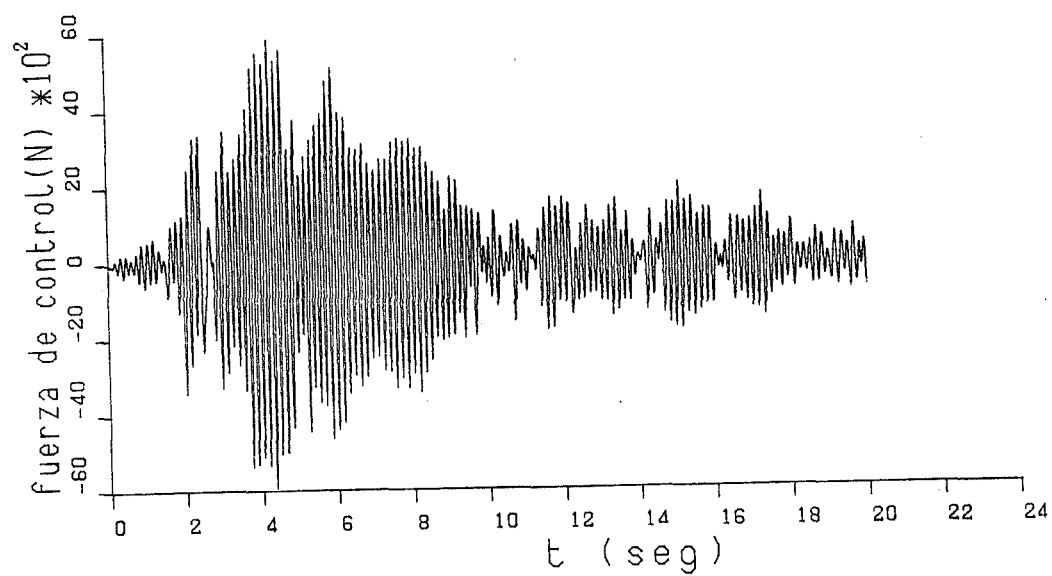


Figura 4.8a Respuesta controlada. Excitación sísmica. $\lambda = 6$, $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

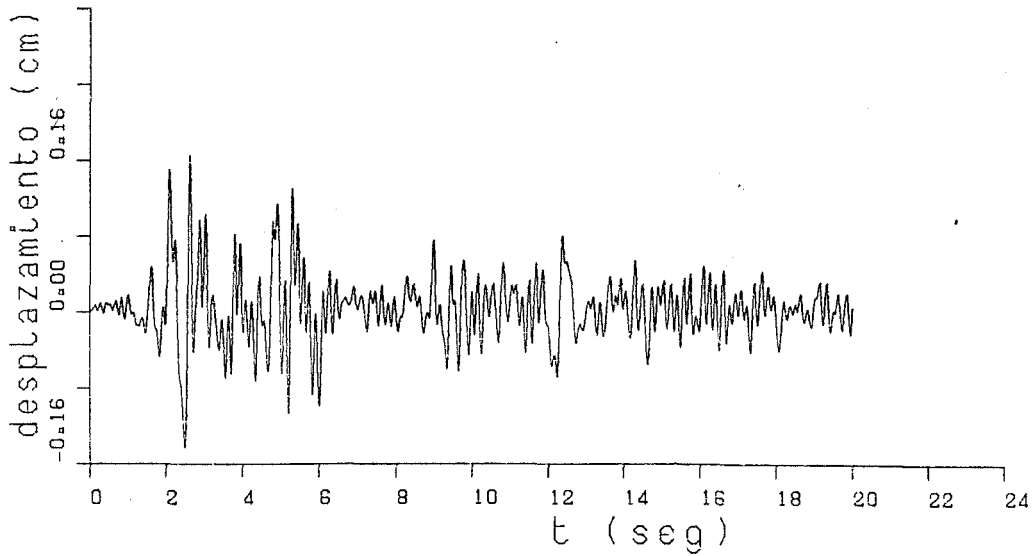
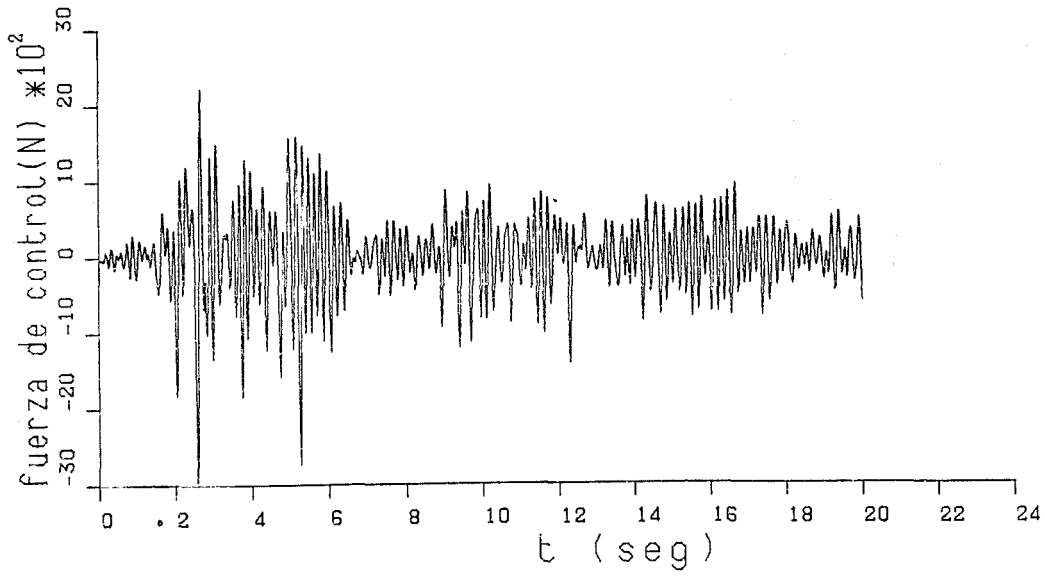


Figura 4.8b Respuesta controlada. Excitación sísmica. $\lambda = 7$, $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

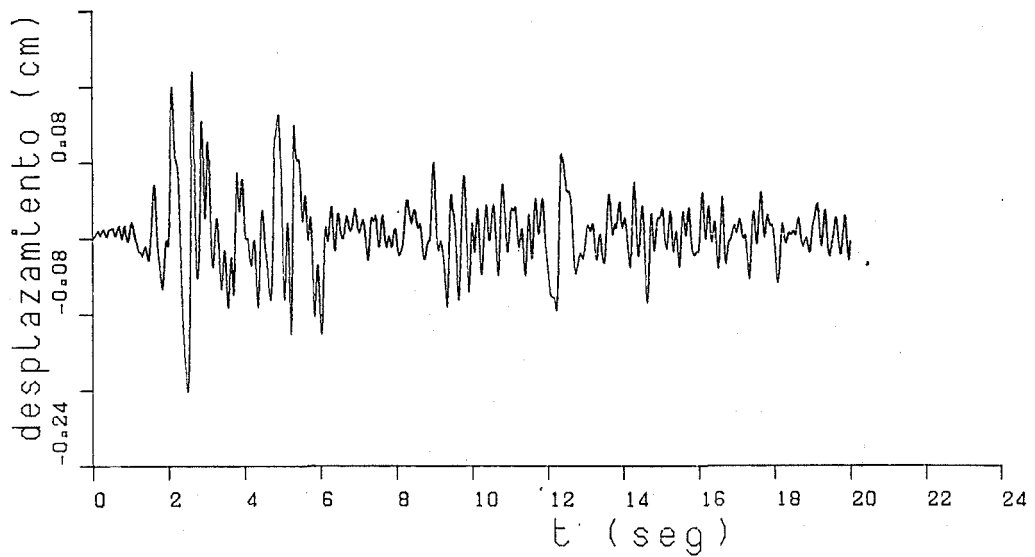
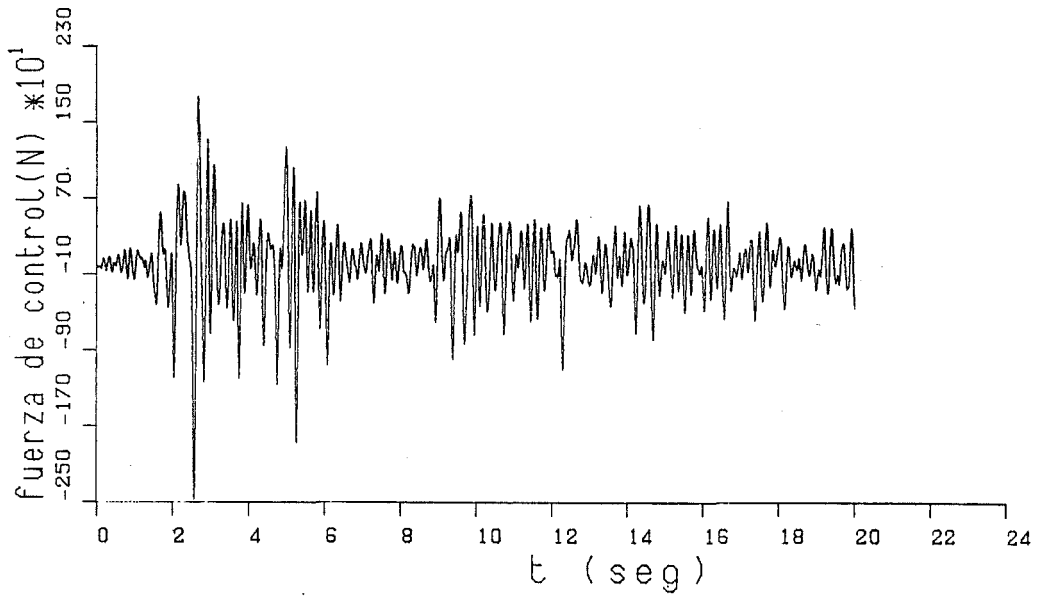


Figura 4.8c Respuesta controlada. Excitación sísmica. $\lambda = 8$, $n_r = 3$, $\hat{n}_r = 0$.

TABLA 4.2

MODULO MAXIMO DE LOS VALORES PROPIOS DE \bar{A}

n_r	\hat{n}_r	$\Delta\omega$	ΔM	$\mu \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	-20%	20%	1.71	0.32	0.58	0.70	0.77	0.81	0.84	0.87	
1	0	-20%	20%	2.01	1.31	1.03	0.88	0.79	0.74	0.77	0.82	
3	0	-20%	20%	1.71	1.39	1.24	1.15	1.09	1.04	1.00	0.97	
3	1	-20%	20%	2.78	1.24	1.14	1.08	1.03	0.99	0.96	0.93	