

Capítulo II

Modelos Promedios Euler–Lagrange de los Convertidores DC–DC.

En este segundo capítulo presentamos la aportación de un modelaje Lagrangiano, quien establece las características físicas relevantes de los modelos promedios de los convertidores de potencia DC–DC. En particular, demostramos que los modelos promedios tradicionales de los convertidores “boost”, “buck-boost” y “buck” son sistemas de Euler–Lagrange.

La aproximación consiste primero en establecer los parámetros de Euler–Lagrange del circuito eléctrico asociado a la topología correspondiente a cada una de las dos posibles posiciones del interruptor. Esta consideración inmediatamente nos conduce a observar que algunos de los parámetros de Euler–Lagrange permanecen invariantes con respecto a la posición del interruptor, mientras que otros son verdaderamente modificados. A partir de este hecho el modelo promedio puede ser obtenido mediante la modulación de los términos que son variables, y que pertenecen a los parámetros de Euler–Lagrange involucrados, a través de la razón de trabajo actuante. Los modelos promedios obtenidos coinciden, enteramente, con los conocidos *modelos de estado promedio* en convertidores de potencia DC–DC, introducidos por Middlebrook y Cuk [32, 41], y con los *modelos de frecuencia de conmutación infinita*, derivados por Sira-Ramírez [50]. Al final estas similitudes y/o consideraciones se describen ya que tienen una consecuencia inmediata en la selección correcta de una apropiada filosofía de diseño del controlador, así como, para incluir las características dinámicas del interruptor.

□ □ □

1 Generalidades respecto a los Circuitos de Euler-Langrage.

Empezaremos el trabajo del modelaje Lagrangiano presentando algunas generalidades respecto a los circuitos eléctricos de Euler-Langrage (el lector se puede referir al libro de *Meisel* [39], donde el tópico es tratado con detalle).

La dinámica de Euler-Langrage de un circuito eléctrico, que no contiene acoplamientos magnéticos entre sus diferentes componentes, es clásicamente caracterizada por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales no-lineales:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} + \mathcal{F}_q \quad (1.1)$$

donde \dot{q} representa el vector de flujos de corrientes y q sus integrales temporales, o cargas eléctricas. El vector de cargas eléctricas se constituye por las *Coordenadas Generalizadas* que describen el circuito, y se asume que consta de n componentes, representadas por q_1, \dots, q_n . Sea la función escalar \mathcal{L} el *Lagrangiano* del sistema, definido como la diferencia entre la *co-energía magnética* del circuito, denotada por $\mathcal{T}(\dot{q}, q)$, y la *energía del campo eléctrico*, representada por $\mathcal{V}(q)$, ésto es:

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = \mathcal{T}(\dot{q}, q) - \mathcal{V}(q) \quad (1.2)$$

donde la función $\mathcal{D}(\dot{q})$ es la *cofunción de disipación de Rayleigh* del sistema. Para finalizar el vector denominado $\mathcal{F}_q = (\mathcal{F}_{q_1}, \dots, \mathcal{F}_{q_n})$ representa los componentes ordenados del conjunto de las *funciones forzantes generalizadas*, o *fuentes de voltaje*, asociadas con las coordenadas generalizadas.

Así, las ecuaciones del circuito eléctrico son generalmente descritas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} + \mathcal{F}_q \quad (1.3)$$

De ahora en adelante, haremos referencia al conjunto de funciones $(\mathcal{T}, \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{F})$ como los parámetros Euler-Lagrange del circuito [43], y simplemente representaremos al circuito Σ mediante la cuadrúpla ordenada:

$$\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{F}) \quad (1.4)$$

□ □ □

2 Convertidor “Boost”.

En esta sección se describirá a través de consideraciones dinámicas de Euler-Lagrange el modelo promedio PWM del convertidor “boost”. Demostraremos que, para este caso en particular, la *cofunción de disipación de Rayleigh* es modificada

por la acción del interruptor a través del suministro de la corriente de entrada. Donde estas "inyecciones de amortiguamiento" suceden en una forma *modulada*, ya que involucran períodos de tiempo directamente referidos al valor muestreado de la *función de razón de trabajo*. A través de esta aproximación se puede aportar un modelo promedio PWM simplemente al multiplicar las "inyecciones de amortiguamiento" por un factor modulador que solamente involucre la función de razón de trabajo. Este proceso de modulación debe ser efectuado en una forma *consistente*, es decir, bajo condiciones hipotéticas de saturación de la razón de trabajo para cualquier límite físicamente permisible, bajo, o alto, han de restablecerse las cofunciones originales de disipación, correspondiente en este caso, a las dos topologías eléctricas intervinientes.

2.1 Modelo Regulado por Conmutación.

Considerese el convertidor "boost", regulado mediante conmutación, de la figura 2.1.

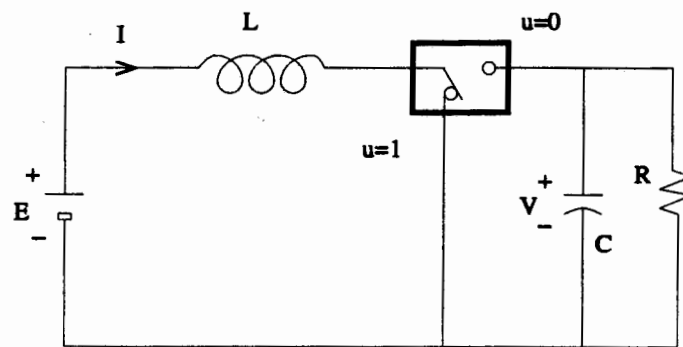


Figura 2.1: Circuito Convertidor "Boost".

Las ecuaciones diferenciales que describen el circuito son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(1-u)\frac{1}{L}x_2 + \frac{E}{L} \\ \dot{x}_2 &= (1-u)\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde las variables x_1 y x_2 representan la corriente del inductor y el voltaje de salida en el capacitor, respectivamente. La variable de control u denota la función de la posición del interruptor y adopta valores en el conjunto discreto $\{0, 1\}$.

Política de Control PWM

La política de modulación de ancho de pulso PWM regula la función de la posición del interruptor u , y ésta puede ser especificada de la manera siguiente:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t_k \leq t < t_k + \mu(t_k)T \\ 0 & \text{para } t_k + \mu(t_k)T \leq t < t_k + T \end{cases}$$

$$t_{k+1} = t_k + T \quad ; \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

donde t_k representa un instante de muestreo; el parámetro T es el período fijo de muestreo, también llamado el *ciclo de trabajo*; los valores muestreados del vector de estado $x(t)$ del convertidor son denotados por $x(t_k)$. La función, $\mu(\cdot)$, es la *función de razón de trabajo* (ver figura 2.2). Se ha demostrado que tal función actúa ciertamente como una entrada externa de control en el modelo promedio PWM del convertidor (vea Sira-Ramírez [50]), donde el valor de la razón de trabajo, $\mu(t_k)$, determina, en cada instante de muestreo, t_k , el tiempo del ancho del pulso en “uno” lógico como $\mu(t_k) T$ (durante este lapso de tiempo el interruptor permanece fijo en la posición representada por $u = 1$) y el resto de tiempo del periodo correspondiente permanece en un “cero” lógico. Resulta evidente que la función de relación de trabajo, $\mu(\cdot)$, se encuentra limitada al intervalo cerrado $[0, 1]$ de la recta real.

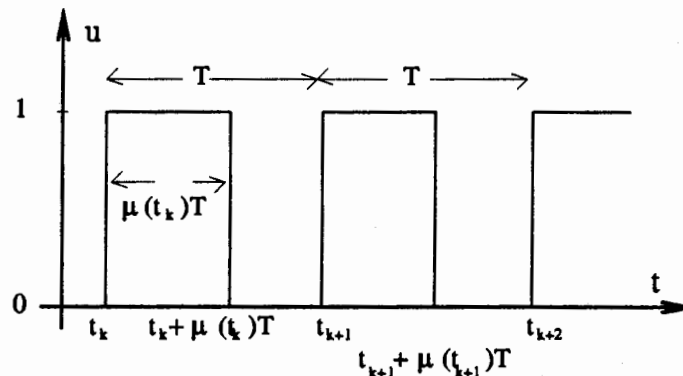


Figura 2.2: Función de Posición del Interruptor mediante una Política PWM.

2.2 Formulación de Lagrange, Modelo Promedio PWM.

A continuación para la formulación de la dinámica de Lagrange se considerará, en forma separada los dos circuitos asociados con cada una de las dos posibles posiciones del interruptor regulador, a fin de obtener mayor información sobre los efectos físicos de la acción del interruptor en término de los parámetros de Euler-Lagrange. En orden de emplear la notación estandar, reescribimos la corriente de entrada x_1 en función de la derivada de la carga eléctrica circulante (q_L), como \dot{q}_L . También el voltaje del capacitor x_2 debe ser escrito como q_C/C , donde q_C es la carga eléctrica almacenada en el capacitor de salida.

Considerando entonces $u = 1$, se obtienen dos circuitos desacoplados, tal como

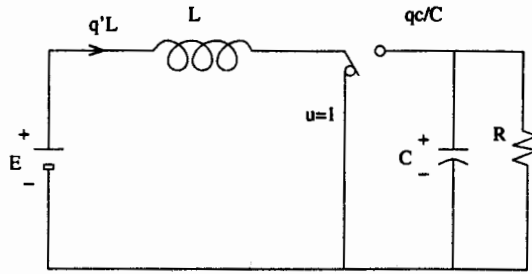


Figura 2.3: Circuito Convertidor "Boost" ($u = 1$).

se muestra en la figura 2.3, y en donde su correspondiente formulación de la dinámica de Lagrange es elaborada a continuación. Definimos $\mathcal{T}_1(\dot{q}_L)$ y $\mathcal{V}_1(q_C)$ como la co-energía magnética y la energía del campo eléctrico del circuito, respectivamente. Denotamos por $\mathcal{D}_1(\dot{q}_C)$ la cofunción de disipación de Rayleigh del circuito. Estas magnitudes son obtenidas como se expone seguidamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1(\dot{q}_L) &= \frac{1}{2} L \dot{q}_L^2 ; \quad \mathcal{V}_1(q_C) = \frac{1}{2C} q_C^2 \\ \mathcal{D}_1(\dot{q}_C) &= \frac{1}{2} R [-\dot{q}_C]^2 ; \quad \mathcal{F}_{q_L} = E ; \quad \mathcal{F}_{q_C} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde \mathcal{F}_{q_L} y \mathcal{F}_{q_C} son las *funciones de fuerzas generalizadas* asociadas con las coordenadas q_L y q_C , respectivamente.

Evidentemente, las ecuaciones de Euler-Lagrange vinculadas con estas definiciones conducen a las ecuaciones (2.1), con $u = 1$; esto puede ser verificado a través del uso directo de las ecuaciones (1.2), ó (1.3), en el conjunto de parámetros de Euler-Lagrange dados en (2.3).

Considerando ahora el hecho de $u = 0$, el circuito resultante se muestra en la

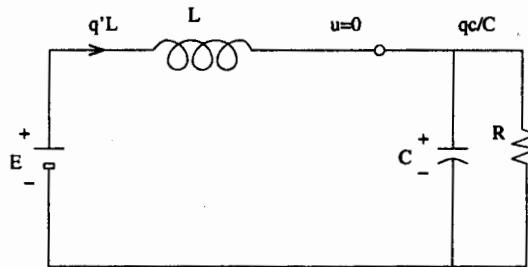


Figura 2.4: Circuito Convertidor "Boost" ($u = 0$).

figura 2.4, y la formulación de su dinámica de Lagrange es desarrollada en forma similar al caso anterior. Definimos $\mathcal{T}_0(\dot{q}_L)$ y $\mathcal{V}_0(q_C)$ como la co-energía magnética y la energía del campo eléctrico del circuito, respectivamente. Denotamos por $\mathcal{D}_0(\dot{q}_L, \dot{q}_C)$ la cofunción de disipación de Rayleigh del circuito. Los resultados a las anteriores consideraciones son las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0(\dot{q}_L) &= \frac{1}{2} L \dot{q}_L^2 ; \quad \mathcal{V}_0(q_C) = \frac{1}{2C} q_C^2 \\ \mathcal{D}_0(\dot{q}_L, \dot{q}_C) &= \frac{1}{2} R (\dot{q}_L - \dot{q}_C)^2 ; \quad \mathcal{F}_{q_L} = E ; \quad \mathcal{F}_{q_C} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde, como antes, \mathcal{F}_{q_L} y \mathcal{F}_{q_C} son las *funciones de fuerzas generalizadas* asociadas con las coordenadas q_L and q_C , respectivamente.

Resulta claro que la aplicación de las definiciones dadas en (2.4) a la ecuación general de Euler-Lagrange (1.3) nos lleva a las ecuaciones (2.1), con $u = 0$, ésto puede ser verificado fácilmente.

Los parámetros de Euler-Lagrange de los dos circuitos, generados por los diferentes valores de posición del interruptor, resultan en idénticas funciones de co-energía magnética, energías de campo eléctrico y funciones forzantes. La acción de conmutación solamente modifica la cofunción de disipación de Rayleigh entre los valores $\mathcal{D}_0(\dot{q}_C)$ y $\mathcal{D}_1(\dot{q}_L, \dot{q}_C)$. Por lo tanto, la *estructura de disipación* del sistema es lo único directamente afectado por la función de posición del interruptor u .

Note, que de acuerdo a la política de conmutación PWM dada en (2.2), sobre cada intervalo de muestreo de período T , la cofunción de disipación de Rayleigh $\mathcal{D}_1(\dot{q}_C)$ es válida unicamente una fracción del período de muestreo dada por $\mu(t_k)$ mientras $\mathcal{D}_0(\dot{q}_L, \dot{q}_C)$ permanece vigente el resto del período, es decir, una porción del período de muestreo igual a $(1 - \mu(t_k))$.

Existen una gran variedad de formas en las cuales podríamos proponer un valor promedio de la cofunción de disipación de Rayleigh para el circuito de la forma (2.1), bajo la consideración de la política de conmutación de la forma (2.2). Una posible vía es proponer el siguiente conjunto de parámetros Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\mu(\dot{q}_L) &= \frac{1}{2} L \dot{q}_L^2 ; \quad \mathcal{V}_\mu(q_C) = \frac{1}{2C} q_C^2 \\ \mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L, \dot{q}_C) &= \frac{1}{2} R [(1 - \mu)\dot{q}_L - \dot{q}_C]^2 ; \quad \mathcal{F}_{q_L}^\mu = E ; \quad \mathcal{F}_{q_C}^\mu = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Observe que en los casos donde μ toma los valores extremos de saturación $\mu = 1$, ó $\mu = 0$, recobramos, respectivamente, las cofunciones de disipación $\mathcal{D}_1(\dot{q}_C)$ en (2.3) y $\mathcal{D}_0(\dot{q}_L, \dot{q}_C)$ en (2.4) y a partir de la cofunción de disipación promedio planteada $\mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L, \dot{q}_C)$. Similarmente, tal condición de "consistencia" se verifica por notar que:

$$\mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L, \dot{q}_C)|_{\mu=0} = \mathcal{D}_0(\dot{q}_L, \dot{q}_C) ; \quad \mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L, \dot{q}_C)|_{\mu=1} = \mathcal{D}_1(\dot{q}_C)$$

También, es fácil ver que la cofunción de disipación promedia de Rayleigh propuesta satisface una importante condición de acotamiento de la forma:

$$\min \{ \mathcal{D}_0(\dot{q}_L, \dot{q}_C), \mathcal{D}_1(\dot{q}_C) \} < \mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L, \dot{q}_C) < \max \{ \mathcal{D}_0(\dot{q}_L, \dot{q}_C), \mathcal{D}_1(\dot{q}_C) \}$$

para cualquier μ que pertenezca al intervalo abierto $(0,1)$.

Por lo tanto, $\mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L, \dot{q}_C)$ puede ser considerada como un promedio vía PWM de la cofunción de disipación, $\mathcal{D}_1(\dot{q}_C)$ y $\mathcal{D}_0(\dot{q}_L, \dot{q}_C)$.

Notamos que la función de Lagrange, asociada con los parámetros de Euler-Lagrange promedios ya definidos, permanece invariante con respecto a la posición del interruptor. No obstante, a objeto de mantener la consistencia en la notación empleada, denotaremos ésto por:

$$\mathcal{L}_\mu = \mathcal{T}_\mu(\dot{q}_L) - \mathcal{V}_\mu(q_C) = \frac{1}{2} L \dot{q}_L^2 - \frac{1}{2C} q_C^2 \quad (2.6)$$

Entonces, procedemos, usando las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.3), para obtener las ecuaciones diferenciales que definen el modelo promedio PWM correspondiente a los parámetros promedios de Euler-Lagrange propuestos en (2.5). Tales ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\partial \dot{q}_L} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\partial q_L} &= -\frac{\partial \mathcal{D}_\mu}{\partial \dot{q}_L} + \mathcal{F}_{q_L}^\mu \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\partial \dot{q}_C} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\partial q_C} &= -\frac{\partial \mathcal{D}_\mu}{\partial \dot{q}_C} + \mathcal{F}_{q_C}^\mu \end{aligned} \quad (2.7)$$

La evaluación de (2.7) resulta en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} L\ddot{q}_L &= -(1-\mu)R[(1-\mu)\dot{q}_L - \dot{q}_C] + E \\ \frac{q_C}{C} &= R[(1-\mu)\dot{q}_L - \dot{q}_C] \end{aligned} \quad (2.8)$$

el cual puede ser reescrito, después de sustituir la segunda ecuación de (2.8) en la primera, como:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_L &= -(1-\mu)\frac{q_C}{LC} + \frac{E}{L} \\ \dot{q}_C &= -\frac{1}{RC}q_C + (1-\mu)\dot{q}_L \end{aligned} \quad (2.9)$$

Empleando $z_1 = \dot{q}_L$ y $z_2 = q_C/C$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -(1-\mu)\frac{1}{L}z_2 + \frac{E}{L} \\ \dot{z}_2 &= (1-\mu)\frac{1}{C}z_1 - \frac{1}{RC}z_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde hemos denotado por z_1 y z_2 los *valores promedios* de la corriente de entrada y del voltaje de salida del capacitor, respectivamente, del convertidor "boost" regulado mediante PWM. Establecemos esta distinción con respecto a las variables no promediadas x_1 y x_2 de forma tal que las variables de estado asociadas con el modelo promedio PWM no sean erróneamente confundidas con las variables *efectivas* del circuito.

Note que la dinámica promedio propuesta coincide con el modelo de estado promedio desarrollado por Middlebrook y Cuk [41], y por Cuk [32], y con el modelo de frecuencia de conmutación infinita, encontrado en Sira-Ramírez [50]. Para obtener el modelo promedio (2.10), uno simplemente reemplaza la función de posición del interruptor, u , en (2.1) por la función de la razón de trabajo μ y las variables efectivas de estado x_1 , x_2 por sus valores promedios, z_1 , z_2 .

Para facilidad se empleará la siguiente representación matricial de (2.10):

$$\mathcal{D}_B \dot{z} - (1-\mu)\mathcal{J}_B z + \mathcal{R}_B z = \mathcal{E}_B \quad (2.11)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_B &= \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} ; & \mathcal{J}_B &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \\ \mathcal{R}_B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix} ; & \mathcal{E}_B &= \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Concluiremos esta sección con la observación de que, como hemos esperado, la dinámica promedio del circuito (2.11) satisface la siguiente ecuación de balance de energía:

$$\underbrace{H(t) - H(0)}_{\text{energía almacenada}} + \underbrace{\frac{1}{RC^2} \int_0^t q_C^2(\tau) d\tau}_{\text{energía disipada}} = \underbrace{\int_0^t \dot{q}_L(\tau) d\tau}_{\text{energía suministrada}}$$

donde $H(t) = (z^T \mathcal{D} z)/2 = \mathcal{T}_\mu + \mathcal{V}_\mu$ es la *energía total* del modelo promedio del circuito. Esto se obtiene tomando la derivada con respecto al tiempo de $H(t)$ a lo largo de las trayectorias de (2.11) y notando que \mathcal{J}_B es una matriz anti-simétrica. Es importante hacer notar que la ecuación de balance de energía también revela que las “fuerzas” $(1 - \mu)\mathcal{J}_B z$, que aparecen en (2.11) no efectúan trabajo alguno.

2.3 Realización del Modelo Promedio Ideal PWM.

Es fácil visualizar que el modelo promedio (2.10) tiene una interpretación en la teoría de circuitos al permitir, que la magnitud $(1 - \mu)z_2$ en la primera ecuación, represente una *fuerza de voltaje controlada* y que el valor $(1 - \mu)z_1$, en la segunda ecuación, se asuma como una *fuerza de corriente controlada*.

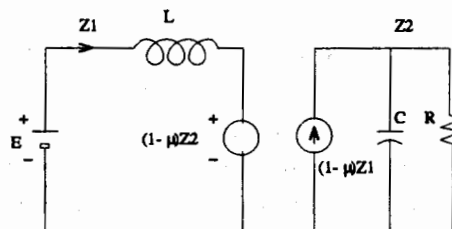


Figura 2.5: Circuito Equivalente del Modelo Promedio PWM del Convertidor “Boost”.

La figura 2.5 se presenta el circuito ideal equivalente que describe el modelo promedio PWM. En él podemos observar que un “cuadripólo” efectúa la conexión entre los circuitos de “entrada” y “salida”, y efectivamente reemplaza, en una forma promedio, el dispositivo de conmutación. Los siguientes párrafos demuestran la naturaleza de *transformador ideal* de tal cuadripólo.

Considere el cuadripólo aislado constituido por las fuentes ideales controladas, como se muestra en la figura 2.6.

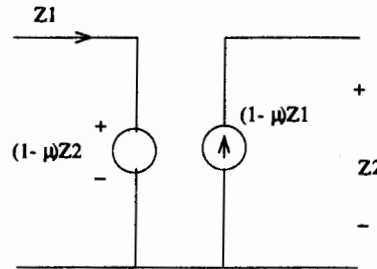


Figura 2.6: Transformador Ideal que Representa la Función Promedio PWM de Posición del Interruptor.

Note que la potencia de entrada (promedio) al cuadripólo, expresada como el producto de la corriente de entrada promedio z_1 por el voltaje promedio de entrada, $(1 - \mu)z_2$, está dada por:

$$P_{\text{entrada}} = \underbrace{z_1}_{\text{corriente de entrada}} \underbrace{(1 - \mu)z_2}_{\text{voltaje de entrada}} \quad (2.13)$$

Por otro lado, la potencia de salida (promedio) entregada por el cuadripólo, escrita como el producto de la corriente de salida promedio, $(1 - \mu)z_1$, por el voltaje de salida, z_2 , y es:

$$P_{\text{salida}} = \underbrace{(1 - \mu)z_1}_{\text{corriente de salida}} \underbrace{z_2}_{\text{voltaje de salida}} \quad (2.14)$$

en otras palabras, el cuadripólo es un dispositivo ideal de transferencia de potencia (promedio) que satisface:

$$P_{\text{entrada}} = P_{\text{salida}} \quad (2.15)$$

donde el voltaje de entrada promedio al cuadripolo, $(1 - \mu)z_2$, está amplificado al valor z_2 en la salida, mientras que la corriente de entrada al cuadripólo, z_1 , es atenuada al valor $(1 - \mu)z_1$ en la salida. Así el dispositivo de conmutación ha sido efectivamente reemplazado por un *transformador ideal* con una *razón de cambio* dada por $(1 - \mu)$.

2.4 Algunos Puntos Relevantes.

Finalizamos esta sección estableciendo tres hechos de suma importancia. Primero que todo, es bien conocido que la representación diferencial de entrada-salida del modelo promedio PWM del convertidor "boost" claramente resulta en un sistema de fase no-mínima cuando la salida a regular es referida al voltaje promedio de salida en el capacitor. En otras palabras, la *dinámica de los ceros* asociada con el punto de equilibrio, físicamente posible, de tal variable de salida es inestable. Segundo, la representación de entrada-salida que se obtiene cuando tomamos como salida la

corriente promedio de entrada, resulta en un sistema localmente de fase mínima. Finalmente, establecemos que dado un valor de equilibrio del voltaje promedio de salida, digamos V_d , este corresponde a un único punto de equilibrio, I_d , de la corriente promedio de entrada. Estos factores son relevantes para la justificación del esquema de regulación retroalimentada *indirecta* representado en tres de los seis siguientes capítulos.

Consideremos primero el caso donde el voltaje promedio de salida del capacitor z_2 es visto como la salida del modelo promedio PWM (2.10). Una correcta eliminación de z_1 del conjunto de ecuaciones diferenciales (2.10) conlleva a la siguiente representación diferencial no lineal de entrada-salida:

$$\ddot{z}_2 + \left(\frac{1}{RC} + \frac{\dot{\mu}}{1-\mu} \right) \dot{z}_2 + \frac{1}{LC} \left[(1-\mu)^2 + \frac{L}{R} \frac{\dot{\mu}}{1-\mu} \right] z_2 = (1-\mu) \frac{E}{LC} \quad (2.16)$$

La “dinámica de los ceros” en el punto de equilibrio $z_2 = V_d$, asociada con esta representación entrada-salida, se obtiene al tomar $\dot{z}_2 = 0$ y $\ddot{z}_2 = 0$ (ver Fliess [35]). La ecuación diferencial resultante describe la “dinámica remanente” de la función de razón de trabajo μ :

$$\dot{\mu} = \frac{R(1-\mu)^2}{LV_d} [E - (1-\mu)V_d] \quad (2.17)$$

Los puntos de equilibrio de (2.17) están dados por:

$$\mu = 1 \quad ; \quad \mu = 1 - \frac{E}{V_d} \quad (2.18)$$

El valor de equilibrio $\mu = U = 1 - E/V_d$ tiene un sentido físico, proporcionando $V_d > E$. Este hecho confirma el carácter “amplificador” del convertidor “boost”. Sin embargo, el diagrama de fase de la ecuación (2.17), expuesto en la figura 2.7 revela la inestabilidad de este valor de equilibrio.

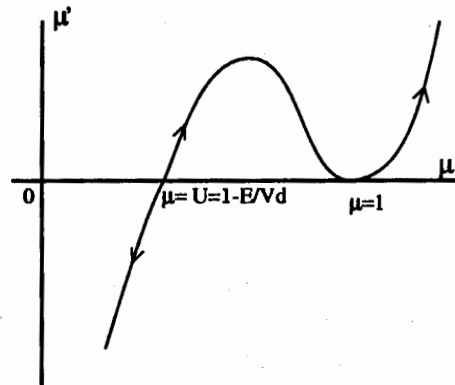


Figura 2.7: Dinámica de los Ceros del Convertidor “Boost”, al Tomar Como Salida al Voltaje Promedio.

Concluimos que el modelo promedio PWM del convertidor "boost", con el voltaje promedio del capacitor z_2 representando a la salida, es un *sistema de fase no-mínima*.

Considerando ahora la salida del circuito dada por la corriente promedio de entrada, z_1 . Obtenemos la siguiente representación entrada-salida para el sistema promedio:

$$\dot{z}_1 + \left(\frac{1}{RC} + \frac{\dot{\mu}}{1-\mu} \right) z_1 + \left[(1-\mu)^2 \frac{1}{LC} \right] z_1 = \frac{E}{L} \left(\frac{1}{RC} + \frac{\dot{\mu}}{1-\mu} \right) \quad (2.19)$$

La "dinámica de los ceros" en el punto de equilibrio $z_1 = I_d$, asociada con la representación anterior, viene dada por:

$$\dot{\mu} = \frac{1-\mu}{RCE} [(1-\mu)^2 RI_d - E] \quad (2.20)$$

donde sus puntos de equilibrio son:

$$\mu = 1 \quad ; \quad \mu = 1 - \sqrt{\frac{E}{RI_d}} \quad ; \quad \mu = 1 + \sqrt{\frac{E}{RI_d}} \quad (2.21)$$

El valor de equilibrio, $\mu = U = 1 - \sqrt{E/RI_d}$, físicamente admisible, permite que RI_d , el voltaje en estado estacionario a través de la resistencia de carga, satisfaga $RI_d > E$, lo cual ratifica, una vez más, el carácter "amplificador" del convertidor "boost". La figura 2.8 muestra el diagrama de fase de la ecuación (2.20), donde se puede observar que este punto de equilibrio es localmente estable. Esto nos lleva a deducir que esta representación de entrada-salida constituye un *sistema de fase mínima*.

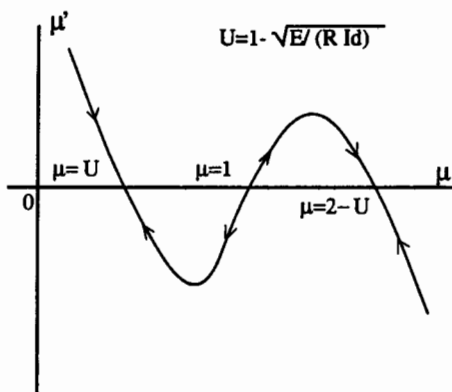


Figura 2.8: Dinámica de los Ceros del Convertidor "Boost", al Tomar Como Salida a la Corriente Promedio.

Seguidamente estableceremos la relación existente entre el equilibrio del voltaje promedio de salida y la corriente promedio de entrada. Para ello asumimos una razón de trabajo constante $\mu = U$. Es fácil conseguir, a partir del modelo promedio PWM en (2.10), que los correspondientes valores de equilibrio para la corriente

promedio de entrada, denotada por I_d , y el voltaje promedio de salida, denotado por V_d , están dados por:

$$I_d = \frac{E}{(1-U)^2 R} \quad ; \quad V_d = \frac{E}{1-U} \quad (2.22)$$

En adelante, dado un valor de equilibrio deseado V_d para el voltaje de salida, el cual corresponde a una magnitud constante de la razón de trabajo $\mu = U$, el *único* punto de equilibrio para la correspondiente corriente promedio de entrada es:

$$I_d = \frac{V_d}{R(1-U)} = \frac{1}{RE} V_d^2 \quad (2.23)$$

Esto significa que si deseamos regular z_2 a un punto de equilibrio V_d el cual corresponde a un valor conocido en estado estacionario U de la función de la razón de trabajo μ , entonces, tal regulación puede efectuarse en forma *indirecta* a través de la estabilización de la corriente de entrada promedio z_1 al valor de equilibrio I_d calculado de (2.23).

□ □ □

3 Convertidor “Buck-Boost”.

En esta sección se describirá, empleando los formalismos Lagrangianos, el modelo promedio PWM para el caso del convertidor “buck-boost”. Se mostrará que la cofunción de disipación de Rayleigh y una de las *funciones forzantes externas*, asociada con una coordenada generalizada particular del circuito, son afectadas por la acción de conmutación, mientras el resto de los parámetros de Euler-Lagrange permanecen totalmente invariantes. Los parámetros promedios de Euler-Lagrange correspondientes son planteados utilizando, nuevamente, la función de razón de trabajo como una función de modulación. Este procedimiento da lugar a una cofunción de disipación Rayleigh promedio, similar a la obtenida en el caso del convertidor “boost”, y a una fuente externa de voltaje promedio cuya amplitud es modulada por la razón de trabajo.

3.1 Modelo Regulado mediante Conmutación.

Consideremos el circuito del convertidor “buck-boost” regulado mediante un interruptor, que se muestra en la figura 2.9.

Las ecuaciones diferenciales que describen el circuito están dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (1-u) \frac{1}{L} x_2 + u \frac{E}{L} \\ \dot{x}_2 &= -(1-u) \frac{1}{C} x_1 - \frac{1}{RC} x_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde x_1 y x_2 representan, respectivamente, la corriente de entrada en el inductor y el voltaje de salida en el capacitor. La cantidad positiva E es el valor constante

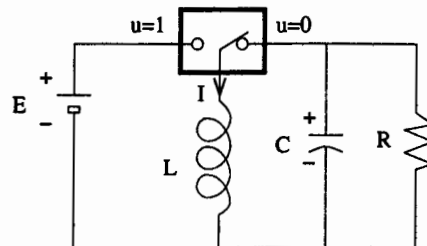


Figura 2.9: Circuito Convertidor "Buck-Boost".

de la fuente externa de voltaje. La variable u indica la posición del conmutador que actúa como una entrada de control tomando valores en el conjunto discreto $\{0, 1\}$. Asumimos que una política de regulación PWM de la forma (2.2) determina la posición del interruptor como una función del tiempo.

3.2 Formulación de Lagrange, Modelo Promedio PWM.

Como en el caso previo, analizamos, en forma individual, los parámetros de Euler-Lagrange de los dos circuitos asociados con cada uno de las dos posibles posiciones del interruptor regulador.

Consideremos entonces, el caso cuando $u = 1$. Los parámetros de Euler-Lagrange del circuito resultante estan dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1(\dot{q}_L) &= \frac{1}{2} L \dot{q}_L^2 ; \quad \mathcal{V}_1(q_C) = \frac{1}{2C} q_C^2 \\ \mathcal{D}_1(\dot{q}_C) &= \frac{1}{2} R [-\dot{q}_C]^2 ; \quad \mathcal{F}_{q_L}^1 = E ; \quad \mathcal{F}_{q_C}^1 = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Cuando $u = 0$, los correspondientes parámetros de Euler-Lagrange son entonces los siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0(\dot{q}_L) &= \frac{1}{2} L \dot{q}_L^2 ; \quad \mathcal{V}_0(q_C) = \frac{1}{2C} q_C^2 \\ \mathcal{D}_0(\dot{q}_L, \dot{q}_C) &= \frac{1}{2} R (-\dot{q}_L - \dot{q}_C)^2 ; \quad \mathcal{F}_{q_L}^0 = 0 ; \quad \mathcal{F}_{q_C}^0 = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Los parámetros de Euler-Lagrange de los dos circuitos, generados por las diferentes posiciones del interruptor, poseen idénticas funciones de coenergía magnética y energía de campo eléctrico. Vemos que la acción de conmutación varía la cofunción de disipación de Rayleigh entre los valores $\mathcal{D}_0(\dot{q}_C)$ y $\mathcal{D}_1(\dot{q}_L, \dot{q}_C)$, así como también la función forzante externa, asociada con la coordenada generalizada q_L , entre las magnitudes $\mathcal{F}_{q_L}^1 = E$ y $\mathcal{F}_{q_L}^0 = 0$. Por lo tanto, la estructura de disipación y la fuerza forzante de entrada al sistema, son los únicos parámetros de Euler-Lagrange afectado por la posición del conmutador. La variación de estos parámetros necesita

ser promediada cuando el circuito experimenta una política de regulación PWM de la forma (2.2).

Empleando los mismos argumentos, expuestos en las secciones previas, procedemos a definir los parámetros promedios de Euler-Lagrange de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\mu(\dot{q}_L) &= \frac{1}{2} L \dot{q}_L^2 ; \quad \mathcal{V}_\mu(q_C) = \frac{1}{2C} q_C^2 \\ \mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L, \dot{q}_C) &= \frac{1}{2} R [-(1-\mu)\dot{q}_L - \dot{q}_C]^2 ; \quad \mathcal{F}_{q_L}^\mu = \mu E ; \quad \mathcal{F}_{q_C}^\mu = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Observe que en este casos cuando μ adopta los valores extremos físicamente permisibles $\mu = 1$ y $\mu = 0$, recuperamos, de la cofunción de disipación promedio de Rayleig propuesta en (3.4), las cofunciones de disipación encontradas en (3.2) y (3.3), respectivamente. Similarmente, las funciones forzantes externas consideradas en (3.2) y (3.3) son inmediatamente obtenidas de (3.4) cuando permitimos que μ tome los valores $\mu = 1$ y $\mu = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L, \dot{q}_C)$ y $\mathcal{F}_{q_L}^\mu$ pueden ser considerados como parámetros promedios PWM de Euler-Lagrange de los dos circuitos participantes.

La función de Lagrange, asociada con los parámetros promedios Euler-Lagrange previamente definidos, viene dada por:

$$\mathcal{L}_\mu = \mathcal{T}_\mu(\dot{q}_L) - \mathcal{V}_\mu(q_C) = \frac{1}{2} L \dot{q}_L^2 - \frac{1}{2C} q_C^2 \quad (3.5)$$

Las ecuaciones diferenciales que definen el modelo promedio PWM del convertidor "buck-boost" se consiguen al utilizar los parámetros promedios de Euler-Lagrange propuestos en (3.4) y la función de Lagrange (3.5) dentro el conjunto de las ecuaciones dinámicas de Euler-Lagrange (1.3). Las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned} L\ddot{q}_L &= (1-\mu)R[-(1-\mu)\dot{q}_L - \dot{q}_C] + \mu E \\ \frac{q_C}{C} &= R[-(1-\mu)\dot{q}_L - \dot{q}_C] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Las ecuaciones (3.6) pueden ser reescritas como,

$$\begin{aligned} \ddot{q}_L &= (1-\mu)\frac{q_C}{LC} + \mu\frac{E}{L} \\ \dot{q}_C &= -\frac{1}{RC}q_C - (1-\mu)\dot{q}_L \end{aligned} \quad (3.7)$$

Usando, como antes, $z_1 = \dot{q}_L$ y $z_2 = q_C/C$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (1-\mu)\frac{1}{L}z_2 + \mu\frac{E}{L} \\ \dot{z}_2 &= -(1-\mu)\frac{1}{C}z_1 - \frac{1}{RC}z_2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde z_1 y z_2 denotan la corriente de entrada promedio y el voltaje de salida promedio en el capacitor, respectivamente, del convertidor "buck-boost" regulado mediante PWM .

El modelo promedio (3.8) se obtiene simplemente al reemplazar la función de posición del interruptor, u , en (3.1) por la razón de trabajo μ y las variables de estado x_1, x_2 por sus valores promedios z_1, z_2 .

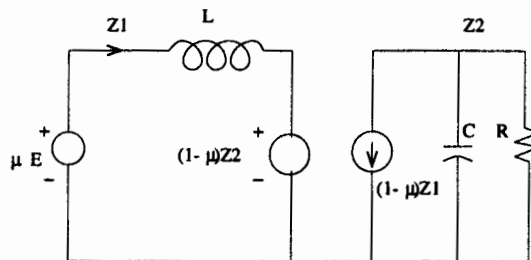


Figura 2.10: Circuito Equivalente del Modelo Promedio PWM del Convertidor "Buck-Boost".

La figura 2.10 representa el circuito equivalente a la dinámica del modelo promedio PWM del convertidor "buck-boost". Con respecto al circuito convertidor original, el dispositivo de conmutación es sustituido por un transformador ideal, el cual posee un voltaje de entrada polarizado en *inversa* y una fuente de voltaje variable en el tiempo cuya amplitud es modulada por la función de razón de trabajo.

Utilizaremos la siguiente representación matricial de (3.8):

$$\mathcal{D}_{BB}\dot{z} + (1 - \mu)\mathcal{J}_{BB}z + \mathcal{R}_{BB}z = \mu\mathcal{E}_{BB} \quad (3.9)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{BB} &= \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} ; & \mathcal{J}_{BB} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \\ \mathcal{R}_{BB} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix} ; & \mathcal{E}_{BB} &= \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.3 Algunos Puntos Relevantes.

En forma semejante al caso del convertidor "boost", uno puede fácilmente establecer el carácter de fase no-mínima del modelo promedio PWM del convertidor "buck-boost" cuando se toma el voltaje promedio en el capacitor z_2 como la salida del sistema. Por el contrario, cuando la salida del sistema es referida a la corriente promedio de entrada del inductor, z_1 , el sistema resultante se distingue por ser localmente de fase mínima.

Dada una función de razón de trabajo constante $\mu = U$, es fácilmente deducible de las ecuaciones del modelo promedio PWM en (3.8) que los correspondientes

valores de equilibrio para la corriente promedio de entrada, denotada por I_d , y el voltaje promedio de salida, V_d , vienen dados por las siguientes expresiones:

$$I_d = \left[\frac{U}{(1-U)^2} \right] \frac{E}{R} ; \quad V_d = - \left(\frac{U}{1-U} \right) E \quad (3.11)$$

Esto significa que, dependiendo del valor particular de la función de razón de trabajo en estado estacionario, U , el convertidor "buck-boost" puede desempeñar, en régimen estacionario, el papel de "amplificador" o "atenuador", pero con la característica de inversión de polaridad en la carga.

A partir de (3.11) encontramos que, dado un valor de equilibrio deseado, V_d , para el voltaje de salida, el cual está ligado a un valor constante de la función de razón de trabajo $\mu = U$, entonces el *único* valor de equilibrio para la correspondiente corriente promedio de entrada, I_d , está dado por:

$$I_d = - \frac{V_d}{R(1-U)} = \left(\frac{V_d}{RE} - \frac{1}{E} \right) V_d \quad (3.12)$$

Esto nos indica que si nosotros deseamos regular z_2 para alcanzar un valor de equilibrio V_d el cual es conocido y corresponde a un valor de estado estable U de la función de razón de trabajo μ , entonces, la regulación puede establecerse *indirectamente* mediante la conducción de la corriente promedio de entrada z_1 al correspondiente valor de equilibrio I_d calculado de (3.12).

□ □ □

4 Convertidor "Buck".

A objeto de ser breves resumiremos todas las formulas relevantes y ecuaciones que conllevan al modelo promedio PWM del convertidor "buck", a través de la formulación de Euler-Lagrange. En este caso, las formulas presentadas muestran que únicamente la función forzante externa es modificada bajo la acción de conmutación mientras el resto de los parámetros de Euler-Lagrange no son afectados por los cambios de la topología en el circuito. Este hecho resulta en una función forzante externa promedio constituida por una función forzante variante en el tiempo modulada por la razón de trabajo.

Modelo del Convertidor "Buck"

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{L}x_2 + u\frac{E}{L} \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Parámetros de Euler-Lagrange del Convertidor "Buck" cuando ($u = 1$).

$$\mathcal{T}_1(\dot{q}_L) = \frac{1}{2} L \dot{q}_L^2 ; \quad \mathcal{V}_1(q_C) = \frac{1}{2C} q_C^2$$

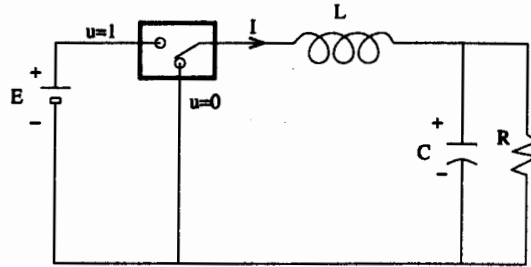


Figura 2.11: Circuito Convertidor "Buck".

$$\mathcal{D}_1(\dot{q}_C) = \frac{1}{2}R(\dot{q}_L - \dot{q}_C)^2 ; \mathcal{F}_{q_L}^1 = E ; \mathcal{F}_{q_C}^1 = 0 \quad (4.2)$$

Parámetros de Euler-Lagrange del Convertidor "Buck"
cuando ($u = 0$).

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0(\dot{q}_L) &= \frac{1}{2}L\dot{q}_L^2 ; \mathcal{V}_0(q_C) = \frac{1}{2C}q_C^2 \\ \mathcal{D}_0(\dot{q}_L, \dot{q}_C) &= \frac{1}{2}R(\dot{q}_L - \dot{q}_C)^2 ; \mathcal{F}_{q_L}^0 = 0 ; \mathcal{F}_{q_C}^0 = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Política de Regulación PWM para la Función de Posición del Interruptor, Convertidor "Buck".

$$u = \begin{cases} 1 & \text{for } t_k \leq t < t_k + \mu(t_k)T \\ 0 & \text{for } t_k + \mu(t_k)T \leq t < t_k + T \end{cases} \quad (4.4)$$

$$t_{k+1} = t_k + T ; k = 0, 1, \dots$$

Parámetros Promedios PWM de Euler-Lagrange.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\mu(\dot{q}_L) &= \frac{1}{2}L\dot{q}_L^2 ; \mathcal{V}_\mu(q_C) = \frac{1}{2C}q_C^2 \\ \mathcal{D}_\mu(\dot{q}_L, \dot{q}_C) &= \frac{1}{2}R[\dot{q}_L - \dot{q}_C]^2 ; \mathcal{F}_{q_L}^\mu = \mu E ; \mathcal{F}_{q_C}^\mu = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Lagrangiano para el Modelo Promedio PWM, Convertidor "Buck".

$$\mathcal{L}_\mu = \mathcal{T}_\mu(\dot{q}_L) - \mathcal{V}_\mu(q_C) = \frac{1}{2}L\dot{q}_L^2 - \frac{1}{2C}q_C^2 \quad (4.6)$$

Modelo Promedio PWM, Convertidor "Buck"

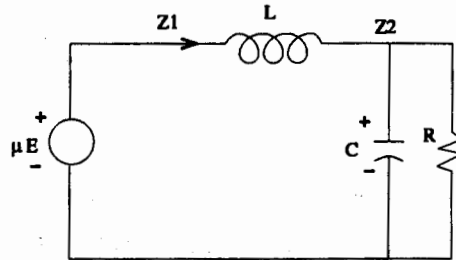


Figura 2.12: Circuito Equivalente del Modelo Promedio PWM del Convertidor "Buck".

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\frac{1}{L}z_2 + \mu \frac{E}{L} \\ \dot{z}_2 &= \frac{1}{C}z_1 - \frac{1}{RC}z_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Modelo Promedio PWM en Notación Matricial.

$$\mathcal{D}_b \dot{z} + (\mathcal{J}_b + \mathcal{R}_b) z = \mu \mathcal{E}_b \quad (4.8)$$

donde,

$$\mathcal{D}_b = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} ; \quad \mathcal{J}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathcal{R}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix} ; \quad \mathcal{E}_b = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Representación Promedio Entrada-Salida, Convertidor "Buck" (salida = z_2 , salida de fase mínima).

$$\ddot{z}_2 + \frac{1}{RC}\dot{z}_2 + \frac{1}{LC}z_2 = \mu \frac{E}{LC} \quad (4.10)$$

Punto de Equilibrio Constante

$$\mu = U ; \quad z_2 = V_d = UE \quad (4.11)$$

Representación de Entrada-Salida Convertidor "Buck" (salida = z_1).

$$\ddot{z}_1 + \frac{1}{RC}\dot{z}_1 + \frac{1}{LC}z_1 = \frac{E}{L} \left(\dot{\mu} + \frac{1}{RC}\mu \right) \quad (4.12)$$

Punto de Equilibrio Constante.

$$\mu = U \quad ; \quad z_1 = I_d = U \frac{E}{R} \quad (4.13)$$

Dinámica de Ceros Asociada a la Corriente Promedio de Entrada.

$$\dot{\mu} = -\frac{1}{RC} \left(\mu - \frac{RI_d}{E} \right) \quad (4.14)$$

En resumen se ha propuesto y demostrado que los modelos tradicionales de estado promedio, o modelos de frecuencia de conmutación infinita, de convertidores de potencia DC-DC son sistemas de Euler-Lagrange, para un conjunto razonable de parámetros promedios de Euler-Lagrange. Los modelos promedios PWM derivados fueron interpretados en términos de las realizaciones ideales del circuito incluyendo fuentes internas controladas y entradas externas moduladas. También se puede observar la característica de fase no mínima que presentan los convertidores "boost" y "buck-boost" cuando se considera como salida el voltaje en el capacitor.

□ □ □