

## Capítulo VI

# Discretización Exacta y Diseño de Controladores para Convertidores de Potencia DC–DC Derivados.

El propósito de este capítulo es describir la aportación, en detalle, del análisis y diseño de controladores PWM para la estabilización y seguimiento de señales en los convertidores de potencia derivados DC–DC. Aproximación que se sustenta en una discretización exacta de la corriente de entrada muestreada. Actualmente existen algunas otras políticas de regulación en tiempo discreto basadas en una discretización y una linealización aproximada como las que fueron exploradas por Ehsani *et al* [33]. También existe una discretización aproximada para fuentes de potencias DC–DC en trabajos de Kassakian *et al* [38]. Otras investigaciones, pero desde un punto de vista distinto al control retroalimentado, son las de Rashid [46]. Para mayor información sobre los convertidores derivados DC–DC, el lector puede referirse a la colección, recientemente publicada, de artículos editados por Bose [30].

A continuación se presenta en la primera sección los fundamentos de la discretización exacta propuesta y la solución al problema de estabilización de la corriente de entrada, en las versiones derivadas de los convertidores “buck”, “boost” y “buck–boost”. Posteriormente se realiza el análisis y diseño de los controles para estabilizar el voltaje via Modulación de Frecuencia del Pulso (PFM). Y para finalizar el presente se hará referencia al seguimiento de señales, seleccionando para su estudio una función trapezoidal.

□ □ □

### 1 Controladores mediante un Esquema de Discretización Exacta vía PWM.

Esta sección se dedicará al estudio de los convertidores derivados DC–DC asociados con una estrategia de regulación retroalimentada PWM y sus modelos al-

canzados a través de una discretización exacta. Obtenido con éxito el esquema de control para la estabilización del voltaje de salida mediante el cálculo fuera de línea del valor del "rizo" de la corriente de entrada en estado estacionario.

### 1.1 Convertidor "Buck-Derivado".

Considere el circuito del convertidor "buck-derivado" que se muestra en la figura 6.1 (Rashid [46]).

El modelo, regulado mediante conmutación, que describe la conducta de la corriente de entrada, denotada por  $x$ , es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R}{L}x + \frac{E}{L}u \\ y &= Rx \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde  $y$  es el voltaje de salida y los parámetros  $R$ ,  $L$  y  $E$  vienen dados, respectivamente, por la resistencia de carga, la inductancia de entrada al circuito, y la fuente de voltaje constante. La variable  $u$  denota la *función de posición del interruptor* tomando valores en el conjunto discreto  $\{0, 1\}$ .

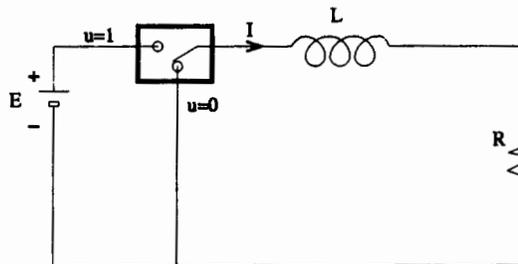


Figura 6.1: Circuito Convertidor "Buck-Derivado".

La estrategia de regulación, basada en una especificación de la función de posición del interruptor del tipo PWM, puede ser expresada (vea Sira-Ramírez *et al* 1993) como:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t_k \leq t < t_k + \mu(t_k)T \\ 0 & \text{para } t_k + \mu(t_k)T \leq t < t_k + T \end{cases} \quad (1.2)$$

$$t_{k+1} = t_k + T ; k = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $\mu(\cdot)$  es conocida como la *función de razón de trabajo*, adoptando valores en el intervalo cerrado  $[0, 1]$  de la recta real.  $T$  es el período de muestreo y  $t_k$  es el instante de muestreo. Un ejemplo típico de la función de posición de un interruptor gobernada por una política PWM es expuesta en la figura 6.2.

Puesto que la razón de trabajo  $\mu$  es determinada en línea de un modo retroalimentado, es decir, calculada como una función explícitamente dependiente del valor

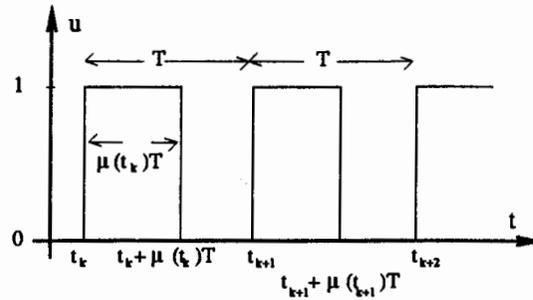


Figura 6.2: Función de Posición del Interruptor mediante una Política PWM.

muestreo de la corriente de entrada  $x(t_k)$  sobre cada instante  $t_k$ , podemos obtener valores de  $\mu$  fuera del intervalo  $[0, 1]$ . Debemos, por lo tanto, distinguir entre la *función de razón de trabajo calculada*, denotada por  $\mu_c(\cdot)$  y la *función de razón de trabajo*  $\mu(\cdot)$ . La relación entre estas variables es simplemente:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } \mu_c(t) > 1 \\ \mu_c(t) & \text{para } 0 \leq \mu_c(t) \leq 1 \\ 0 & \text{para } \mu_c(t) < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

La función de razón de trabajo es así la limitación forzada, dentro del intervalo  $[0, 1]$ , de la razón de trabajo calculada.

El convertidor “buck-derivado” debe su popular nombre de “chopper” al hecho de que la corriente de entrada se encuentra limitada al intervalo  $[0, E/R]$ , esto se puede verificar fácilmente a partir de las ecuaciones del circuito. El voltaje de salida producido por el convertidor no puede, por lo tanto, exceder el valor  $E$  de la fuente externa de voltaje.

Es ampliamente conocido que la trayectoria controlada vía PWM,  $x(t)$ , presenta un “rizo” natural, o movimiento en “zig-zag” ocasionado por las discontinuidades asociadas con la variable de entrada  $u(t)$ . En el siguiente fragmento se elabora un modelo de tiempo discreto que reproduce el valor del estado muestreado sobre cada instante  $t_k$ . Los valores del “rizo” son despreciados por tal modelo pero, ellos se pueden calcular a partir de algunas consideraciones adicionales.

### Discretización Exacta.

La naturaleza lineal de las dos posibles topologías del circuito del convertidor “buck-derivado” (1.1) nos facilita desarrollar un modelo *exacto* en tiempo discreto para la evolución del valor muestreado de la corriente de entrada en el convertidor, cuando éste se encuentra sujeto a una política de conmutación de la forma (1.2). Dado el valor de  $x$  en el instante  $t_k$ , denotado por  $x(t_k)$ , el valor de la corriente de entrada sobre el final del “pulso”, de ancho  $\mu(t_k)T$ , se encuentra después de emplear la *formula de Cauchy* como :

$$x(t_k + \mu(t_k)T) = e^{-\theta_1 \mu(t_k)T} x(t_k) + \frac{\theta_2}{\theta_1} [1 - e^{-\theta_1 \mu(t_k)T}] \quad (1.4)$$

donde los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  denotan los cocientes  $R/L$  y  $E/L$ , respectivamente.

El valor muestreado de la corriente de entrada al final del intervalo de muestreo se obtiene, luego de algunos cálculos, como:

$$x(t_k + T) = e^{-\theta_1 T} x(t_k) + \frac{\theta_2}{\theta_1} e^{-\theta_1 T} [e^{\theta_1 \mu(t_k) T} - 1] \tag{1.5}$$

Si denotamos  $\Psi_1 = e^{-\theta_1 T}$  y  $\Psi_2 = \theta_2/\theta_1$ , el modelo en tiempo discreto para la evolución de la corriente de entrada, descrito sobre los instantes de muestreo, está dado por :

$$x(t_{k+1}) = \Psi_1 x(t_k) + \Psi_1 \Psi_2 [\Psi_1^{-\mu(t_k)} - 1] \tag{1.6}$$

donde el valor de la función de razón de trabajo sobre el instante  $t_k$ ,  $\mu(t_k)$ , parece ser, efectivamente, la “entrada de control”, siendo especificada en el inicio de cada período de muestreo. El modelo en tiempo discreto para la corriente de entrada muestreada es, por lo tanto, no lineal en la nueva entrada de control,  $\mu(t_k)$ .

El único autovalor asociado con la dinámica lineal del estado muestreado, dado por  $\Psi_1$ , es evidentemente positivo y estrictamente menor que la unidad. El valor en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada, denotado por  $x_\infty^-$ , que corresponde a una razón de trabajo constante de valor  $\mu_\infty$ , se consigue a partir de (1.6), como:

$$x_\infty^- = \frac{\Psi_1 \Psi_2}{1 - \Psi_1} (\Psi_1^{-\mu_\infty} - 1) \tag{1.7}$$

El índice superior “-” en (1.7) refiere a la posición “baja” de la trayectoria en “zig-zag” parcialmente descrita por (1.6) (vea figura 6.3).

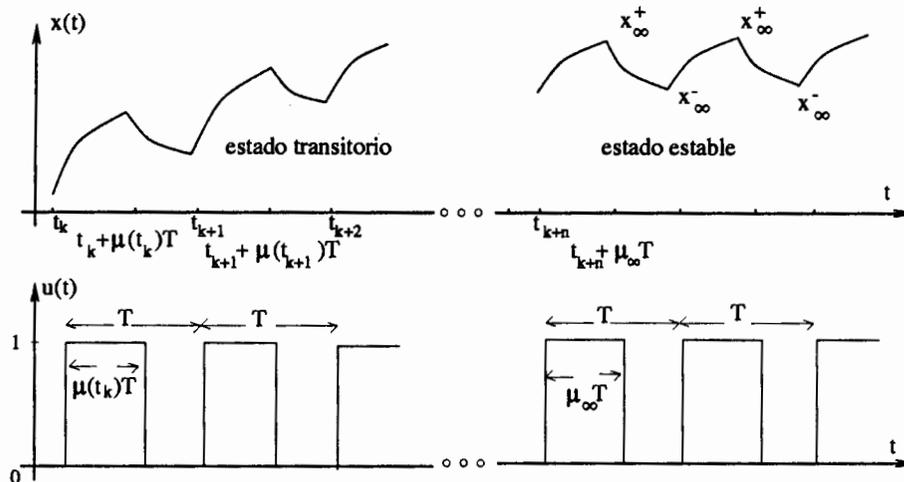


Figura 6.3: Trayectoria del Estado Controlado vía PWM.

Evidentemente, una política de regulación retroalimentada la cual especifica la función de razón de trabajo  $\mu(t_k)$  únicamente en base al estado muestreado  $x(t_k)$  no es, de forma alguna, satisfactoria. La razón para tal declaración surge del hecho que el “rizo”, inevitablemente asociado con la evolución regulada mediante conmutación de  $x(t_k)$ , no es considerado por el modelo (1.6). Uno debe también analizar los valores de  $x(t)$  sobre el final de cada pulso que ocurre dentro del período de muestreo

de longitud  $T$ . En otras palabras, es necesario tomar en cuenta el valor de  $x(t)$  en los instantes  $t = t_k + \mu(t_k)T$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$  (vease figura 6.3).

Ahora, referimos el valor de  $x$  sobre los instantes  $t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T$  y  $t_k + \mu(t_k)T$  a fin de obtener el valor de la "esquina superior" de la trayectoria en "zig-zag" de la corriente de entrada.

Usando la formula Cauchy obtenemos:

$$x(t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T) = \Psi_1^{\mu(t_{k+1})} \Psi_1^{1-\mu(t_k)} x(t_k + \mu(t_k)T) + \Psi_2(1 - \Psi_1^{\mu(t_{k+1})}) \quad (1.8)$$

El autovalor asociado con la anterior dinámica lineal de estado es, evidentemente, el producto  $\Psi_1^{\mu(t_{k+1})} \Psi_1^{1-\mu(t_k)}$ . Esta cantidad es estrictamente positiva y menor que la unidad para valores de  $\mu$  restringidos al intervalo unitario  $[0, 1]$ . La magnitud, en estado estacionario, de la "esquina superior" de la trayectoria de estado, descrito por (1.8), correspondiente a un valor constante  $\mu_\infty$  de la función de razón de trabajo, está dado por (vea figura 6.3) :

$$x_\infty^+ = \frac{\Psi_2}{1 - \Psi_1} (1 - \Psi_1^{\mu_\infty}) \quad (1.9)$$

La relación entre los valores en estado estacionario  $x_\infty^+$  y  $x_\infty^-$  puede obtenerse a partir de (1.7) y (1.9) como:

$$x_\infty^- = x_\infty^+ \Psi_1^{1-\mu_\infty} \quad (1.10)$$

puesto que  $\Psi_1$  es un número positivo estrictamente menor que 1, podemos concluir que  $x_\infty^- < x_\infty^+$  para  $\mu_\infty \in [0, 1]$ .

El "rizo" en estado estacionario, denotado por  $r_\infty$ , puede expresarse de la manera siguiente:

$$r_\infty = x_\infty^+ - x_\infty^- = \frac{\Psi_2}{1 - \Psi_1} (1 - \Psi_1^{\mu_\infty}) (1 - \Psi_1^{1-\mu_\infty}) \quad (1.11)$$

Definimos un *valor promedio en estado estacionario* para la trayectoria de la corriente de entrada como:

$$x_{av}(\infty) = x_\infty^- + \frac{1}{2} r_\infty = \frac{1}{2} (x_\infty^- + x_\infty^+) \quad (1.12)$$

Usando la expresiones (1.7) y (1.9) en (1.12) obtenemos:

$$x_{av}(\infty) = \frac{1}{2} \left( \frac{\Psi_2}{1 - \Psi_1} \right) (1 - \Psi_1^{\mu_\infty}) (1 + \Psi_1^{1-\mu_\infty}) \quad (1.13)$$

Procedemos a escribir el valor, en estado estacionario, de la trayectoria de la corriente de entrada muestreada  $x_\infty^-$ , en término de la corriente promedio de entrada en estado estacionario  $x_{av}(\infty)$ . Esta relación nos permite definir una política estabilizante de la razón de trabajo (control) en base al modelo en tiempo discreto del estado muestreado (1.6). Tal política considera apropiadamente el "rizo" asociado a la trayectoria del controlador y conduce asintóticamente la corriente promedio de entrada a un valor pre-especificado deseado en estado estacionario. Para llevar a

cabo este objetivo simplemente se elimina el valor en estado estacionario de la razón de trabajo  $\mu_\infty$  de las expresiones (1.7) y (1.13); encontrando:

$$x_\infty^- = -\Psi_2 \left[ \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2x_{av}(\infty)}{\Psi_2} \right) + \frac{\Psi_1}{1 - \Psi_1} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2x_{av}(\infty)}{\Psi_2} \right)^2 + \frac{\Psi_1}{(1 - \Psi_1)^2}} \right] \quad (1.14)$$

### Política de Control Estabilizante PWM.

El problema de estabilización para el convertidor "buck-derivado" consiste en especificar una política de regulación PWM de la forma (1.2), tal que el valor promedio en estado estacionario de la trayectoria controlada de la corriente de entrada  $x(t)$  alcance un valor constante deseado  $x_{av}(\infty) = X$ .

Entonces, es posible desarrollar una política de regulación retroalimentada estabilizante en base a los estados muestreados del modelo en tiempo discreto (1.6), al forzar a  $x(t_k)$  a estabilizarse asintóticamente al valor  $x_\infty^-$ , correspondiente a  $X$ , el cual hemos denotado por  $x_\infty^-(X)$  y reescrito como:

$$x_\infty^-(X) = -\Psi_2 \left[ \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2X}{\Psi_2} \right) + \frac{\Psi_1}{1 - \Psi_1} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2X}{\Psi_2} \right)^2 + \frac{\Psi_1}{(1 - \Psi_1)^2}} \right] \quad (1.15)$$

Imponemos al sistema muestreado controlado en lazo cerrado un comportamiento lineal y asintóticamente estable, de la forma:

$$x(t_{k+1}) = \alpha (x(t_k) - x_\infty^-(X)) + x_\infty^-(X) ; \quad |\alpha| < 1 \quad (1.16)$$

Sustituyendo el lado derecho de la expresión (1.6) en (1.16) y resolviendo para la función de razón de trabajo  $\mu(t_k)$ , obtenemos la siguiente razón de trabajo calculada :

$$\mu_c(t_k) = -\frac{1}{\ln \Psi_1} \ln \left[ 1 + \frac{(\alpha - \Psi_1) x(t_k) + (1 - \alpha) x_\infty^-(X)}{\Psi_1 \Psi_2} \right] ; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

La razón de trabajo  $\mu(t_k)$  puede ser fácilmente encontrada a partir de la expresión (1.3). La figura 6.4 expone el esquema de regulación retroalimentado PWM basado en un modelo dinámico exacto, en tiempo discreto, de la corriente de entrada muestreada.

La expresión (1.17) permite determinar la región de no-saturación de la función de razón de trabajo. Ciertamente, la doble desigualdad  $0 < \mu_c < 1$ , origina la siguiente región para el estado muestreado:

$$0 < (\alpha - \Psi_1)x(t_k) + (1 - \alpha)x_\infty^-(X) < \Psi_2(1 - \Psi_1) \quad (1.18)$$

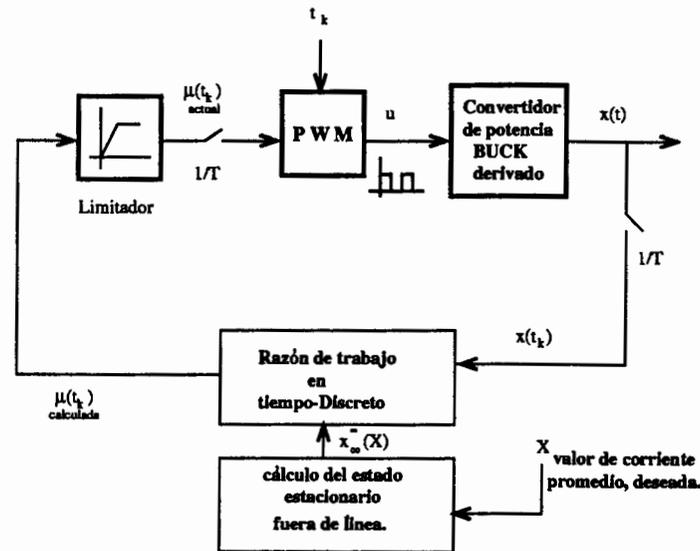


Figura 6.4: Esquema de Regulación para el Convertidor “Buck-Derivado” en Base a una Discretización Exacta.

**6 .1 Simulación.** A fin de comprobar la robustez de la política de regulación PWM previamente propuesta, se efectuaron simulaciones sobre el siguiente modelo perturbado del convertidor “buck-derivado” :

$$\dot{x} = -\frac{R}{L}x + \left(\frac{E + \nu(t)}{L}\right) u \quad (1.19)$$

donde  $\nu(t)$  es una señal de perturbación estocástica que representa un ruido aditivo, no modelado, en la fuente de voltaje. Los valores de los parámetros que definen el convertidor son los siguientes:

$$R = 2.8 \times 10^{-2} \Omega ; L = 1.0 \times 10^{-2} \text{ mH} ; E = 126 \text{ Volts}$$

El período de muestreo se escogió como  $T = 0.125 \text{ ms}$  ( $1/T = 8 \text{ KHz}$ ) y el valor deseado para la dinámica promedio fué ubicado en  $X = 1237 \text{ A}$ . El autovalor de la dinámica lineal en lazo cerrado,  $\alpha$ , se colocó en 0.3. El valor correspondiente de la corriente de entrada en estado estacionario se encontró como  $x_{\infty}^-(1237) = 1080.7 \text{ A}$ . El valor promedio requerido en estado estacionario de la corriente de entrada así como también las magnitudes  $x_{\infty}^+$  y  $x_{\infty}^-$  se mantiene dentro del rango permitido, lo cual nos garantiza que la función de razón de trabajo no se saturará.

La figura 6.5 muestra la trayectoria de la corriente de entrada, la función de razón de trabajo  $\mu(t)$  y la correspondiente función de posición del interruptor  $u(t)$  así como también la señal de perturbación  $\nu(t)$ . Se puede observar que, ante la influencia de la señal de perturbación no modelada,  $\nu(t)$ , el controlador no lineal desarrollado funciona considerablemente bien.

□ □ □

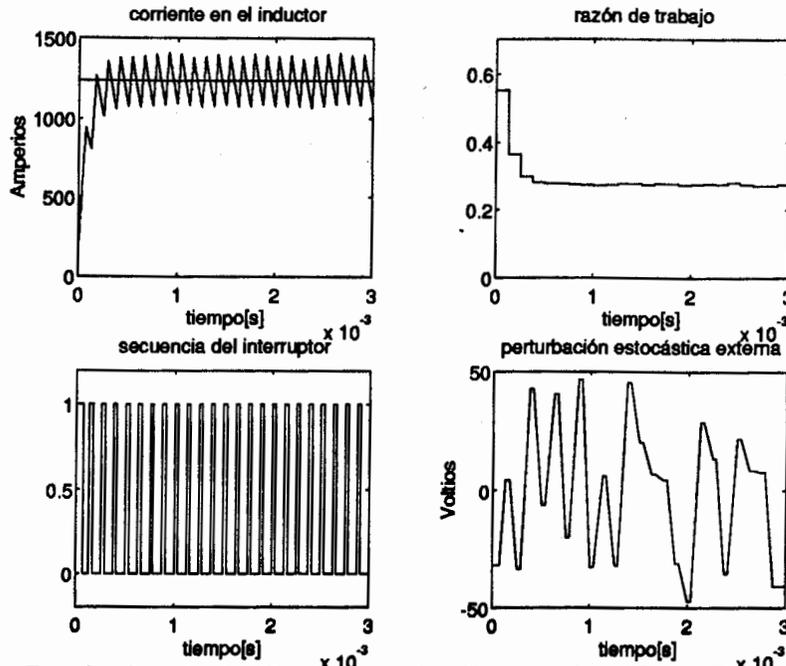


Figura 6.5: Resultados de la Simulación del Convertidor "Buck-Derivado", mediante PWM.

### 1.2 Convertidor "Boost-Derivado".

Considere el circuito del convertidor "boost-derivado" que se muestra en la figura 6.6 (vea Rashid [46]).

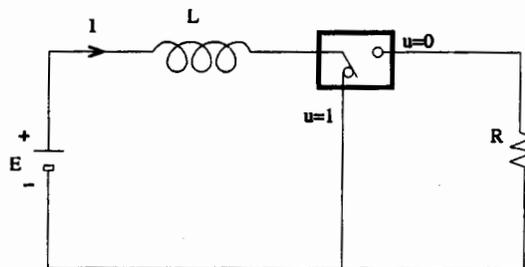


Figura 6.6: Circuito Convertidor "Boost-Derivado".

El modelo, regulado a través de conmutación, que describe el comportamiento de la corriente de entrada, denotada por  $x$ , es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R}{L}x(1-u) + \frac{E}{L} \\ y &= Rx \end{aligned} \tag{1.20}$$

donde  $y$  es el voltaje de salida y los parámetros  $R$ ,  $L$  y  $E$  vienen dados, respectivamente, por la resistencia de carga, la inductancia de entrada al circuito, y la fuente

de voltaje constante. La variable  $u$  denota la *función de posición del interruptor* la cual toma valores en el conjunto discreto  $\{0, 1\}$ .

Una estrategia de regulación, basada en una especificación de la función de posición del interruptor del tipo PWM, puede ser expresada exactamente como en (1.2).

El convertidor “boost-derivado” es popularmente conocido como el convertidor “step-up”, debido a que la corriente de entrada es, teóricamente, capaz de tomar cualquier valor dentro del intervalo  $[E/R, \infty)$ , ésto se puede verificar a partir de las ecuaciones del circuito. El voltaje de salida (positivo) producido por el convertidor no puede ser mayor que el valor  $E$  de la fuente de voltaje.

### Discretización Exacta

Dado el valor de  $x$  sobre el instante de tiempo  $t_k$ , denotado por  $x(t_k)$ , el valor de la corriente de entrada al final del “pulso”, de ancho  $\mu(t_k)T$ , es encontrado, después de emplear la *formula de Cauchy*, como:

$$x(t_k + \mu(t_k)T) = \theta_2 \mu(t_k)T + x(t_k) \quad (1.21)$$

donde, nuevamente, los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  denotan los cocientes  $R/L$  y  $E/L$ , respectivamente.

El valor muestreado de la corriente de entrada sobre el final del intervalo de muestreo, luego de algunos cálculos, se puede expresar como:

$$x(t_k + T) = e^{-\theta_1 T(1-\mu(t_k))} [\theta_2 \mu(t_k)T + x(t_k)] + \frac{\theta_2}{\theta_1} [1 - e^{\theta_1 T(1-\mu(t_k))}] \quad (1.22)$$

Si denotamos  $\Psi_1 = e^{-\theta_1 T}$ ,  $\Psi_2 = \theta_2/\theta_1$  y  $\Psi_3 = \theta_2 T$ , la dinámica en tiempo discreto para la evolución de la corriente de entrada, descrita sobre los instantes de muestreo  $t_k$ , está dada por:

$$x(t_{k+1}) = \Psi_1^{(1-\mu(t_k))} x(t_k) + \Psi_1^{(1-\mu(t_k))} [\mu(t_k)\Psi_3 - \Psi_2] + \Psi_2 \quad (1.23)$$

El modelo en tiempo discreto para la corriente de entrada muestreada es, como en el caso del convertidor “buck-derivado”, no lineal sobre la nueva entrada de control,  $\mu(t_k)$ .

Note que la cantidad  $\Psi_3 = \theta_2 T$  representa, para todos los instantes de tiempo  $t_k$ , una cota superior del “rizo” de la corriente de entrada en la bobina, en otra forma,  $x(t_k + \mu(t_k)T) - x(t_k) = \theta_2 \mu(t_k)T < \theta_2 T$ .

El autovalor, variante en el tiempo, asociado con la dinámica de estado muestreado, dado por  $\Psi_1^{(1-\mu(t_k))}$ , es evidentemente positivo y no mayor que la unidad para todos los valores de  $\mu$  restringidos al intervalo unitario  $[0, 1]$ . El valor en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada, denotado por  $x_\infty^-$ , que corresponde a una función de razón de trabajo constante  $\mu_\infty$ , se obtiene de (1.23) como:

$$x_\infty^- = \frac{\Psi_1^{(1-\mu_\infty)} [\mu_\infty \Psi_3 - \Psi_2] + \Psi_2}{1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)}} \quad (1.24)$$

Ahora podemos referir el valor de  $x$  en los instantes  $t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T$  y  $t_k + \mu(t_k)T$  a fin de obtener la "esquina superior" de la trayectoria en "zig-zag" descrita por la corriente de entrada.

Empleando la *formula de Cauchi* obtenemos:

$$x(t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T) = \Psi_1^{(1-\mu(t_k))} x(t_k + \mu(t_k)T) + \Psi_3 \mu(t_{k+1}) + \Psi_2 (1 - \Psi_1^{1-\mu(t_k)}) \quad (1.25)$$

El autovalor asociado con la anterior dinámica de estado está dado por  $\Psi_1^{(1-\mu(t_k))}$ . Esta cantidad es estrictamente positiva y menor o igual que la unidad para valores de  $\mu(t_k)$  dentro del intervalo  $[0, 1]$ . El valor en estado estacionario de la porción "superior" de la trayectoria de estado, descrita por (1.25), correspondiente a un valor constante  $\mu_\infty$  de la función de razón de trabajo, viene dado por:

$$x_\infty^+ = \frac{\mu_\infty \Psi_3 + \Psi_2 (1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)})}{1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)}} \quad (1.26)$$

Contrariamente al caso del convertidor "buck-derivado", una expresión independiente de  $\mu_\infty$  que relacione a  $x_\infty^+$  y  $x_\infty^-$ , no se puede conseguir a partir de las ecuaciones (1.24) y (1.26). Este hecho tiene una influencia directa en la imposibilidad de expresar explícitamente el valor promedio, en estado estacionario, de la corriente de entrada,  $x_{av}(\infty)$ , en términos del valor de la corriente de entrada muestreada en estado estacionario,  $x_\infty^-$ .

En base a las ecuaciones (1.24), (1.26) y al hecho que  $\Psi_1^{(1-\mu_\infty)} < 1$ , se puede confirmar que  $x_\infty^- < x_\infty^+$ , para  $\mu_\infty \in [0, 1]$ .

El "rizo" en estado estacionario, denotado por  $r_\infty$ , puede presentarse en forma similar a (1.11), pero, esta vez, en términos más simples,

$$r_\infty = x_\infty^+ - x_\infty^- = \Psi_3 \mu_\infty \quad (1.27)$$

El *valor promedio en estado estacionario* para la trayectoria de la corriente de entrada es definido, igual que antes, como:

$$x_{av}(\infty) = x_\infty^- + \frac{1}{2} r_\infty \quad (1.28)$$

Empleando la expresiones (1.24) y (1.27) en (1.28) encontramos:

$$x_{av}(\infty) = \frac{[\Psi_3 \mu_\infty (1 + \Psi_1^{(1-\mu_\infty)}) + 2\Psi_2 (1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)})]}{2(1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)})} \quad (1.29)$$

Nuevamente, es imposible expresar el valor en estado estacionario de la trayectoria muestreada de la corriente de entrada,  $x_\infty^-$ , en función de la corriente promedio de entrada  $x_{av}(\infty)$ . Por lo tanto, debemos proceder a encontrar numéricamente el valor de  $\mu_\infty$  que corresponde al valor deseado en estado estacionario de la corriente promedio de entrada  $X = x_{av}(\infty)$ . La función de razón de trabajo requerida en estado estacionario,  $\mu_\infty$ , debe ser sustituida en la expresión de la corriente de entrada muestreada en estado estacionario (1.24). Este procedimiento, efectuado

fuera de línea, conduce al valor requerido en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada,  $x_{\infty}^{-}(X)$ , a el cual la dinámica controlada exactamente discretizada (1.23) debe ser conducida, por medio de una prescripción apropiada de la función de razón de trabajo. La política de control encontrada obliga a la corriente promedio de entrada a alcanzar, en estado estacionario, el valor promedio deseado.

Hemos mostrado que la solución requerida,  $x_{\infty}^{-}(X)$ , para la corriente de entrada en estado estacionario, en términos del estado estacionario de la corriente promedio de entrada,  $x_{av}(\infty) = X$ , siempre existe, para todo  $\mu_{\infty}$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Además tal solución es única. Ciertamente, manipulando la expresión (1.29) uno obtiene la siguiente ecuación equivalente:

$$\Psi_1^{1-\mu_{\infty}} = \frac{2X - \Psi_3\mu_{\infty} - 2\Psi_2}{2X + \Psi_3\mu_{\infty} - 2\Psi_2} \quad (1.30)$$

Recordemos que tanto  $\Psi_1$  como  $\Psi_3$  son magnitudes positivas, y que  $\Psi_1 < 1$ . Consideremos ambos lados de la expresión (1.30) como funciones de  $\mu_{\infty}$ . La gráfica de la función de  $\mu_{\infty}$  situada en el lado izquierdo de (1.30) es continuamente creciente con una pendiente no-negativa y toma valores en el intervalo  $[\Psi_1, 1]$  cuando  $\mu$  varía en  $[0, 1]$ . La gráfica de la función de  $\mu_{\infty}$  de la parte derecha de (1.30), continuamente decrece con una pendiente estrictamente negativa, cuando  $\mu_{\infty}$  varía de 0 a 1, desde el valor 1 hacia la cantidad  $M = (2X - \Psi_3 - 2\Psi_2)/(2X + \Psi_3 - 2\Psi_2)$  la cual es, evidentemente, menor que la unidad. Las dos funciones, por lo tanto, se interceptan una sola vez en el intervalo  $[0, 1]$ , y por lo tanto existe una única solución para  $\mu_{\infty}$ .

### Política de Control Estabilizante Implícita PWM.

El problema de estabilización para el convertidor “boost-derivado” consiste en especificar una política de regulación PWM de la forma (1.2), tal que, el valor promedio, en estado estacionario, de la trayectoria controlada de la corriente de entrada  $x(t)$  sea igual a un valor constante deseado  $x_{av}(\infty) = X$ .

Entonces, es posible obtener, en forma implícita, una política de regulación retroalimentada estabilizante a partir del modelo en tiempo discreto (1.23) al forzar  $x(t_k)$  a estabilizarse asintóticamente alrededor del valor  $x_{\infty}^{-}$ , correspondiente a  $X$ , el cual hemos denotado por  $x_{\infty}^{-}(X)$ .

Imponemos al sistema muestreado controlado en lazo cerrado un comportamiento lineal y asintóticamente estable, de la forma:

$$x(t_{k+1}) = \alpha (x(t_k) - x_{\infty}^{-}(X)) + x_{\infty}^{-}(X) ; |\alpha| < 1 \quad (1.31)$$

Sustituyendo el lado derecho de la ecuación (1.23) en (1.31) encontramos la siguiente expresión transcendental, a partir de la cual la función de razón de trabajo calculada puede ser numéricamente obtenida para cada instante de muestreo,

$$[\Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))} - \alpha] x(t_k) + \Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))} [\mu_c(t_k)\Psi_3 - \Psi_2] + \Psi_2 - (1 - \alpha) x_{\infty}^{-}(X) = 0 \quad (1.32)$$

Reacomodando la ecuación anterior, hallamos la siguiente expresión equivalente para el controlador implícito:

$$\Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))} = \frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1-\alpha)x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2 + \mu_c(t_k)\Psi_3} \quad (1.33)$$

El lado izquierdo de la expresión varía, como función de  $\mu_c$ , de  $\Psi_1 < 1$  a 1, con  $\mu_c$  variando de 0 a 1. Para un valor dado de  $x(t_k)$ , el lado derecho de (1.33) toma valores, como función de  $\mu_c$ , en el intervalo:

$$\left[ \frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1-\alpha)x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2}, \frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1-\alpha)x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2 + \Psi_3} \right] \quad (1.34)$$

Es fácil ver que una condición necesaria y suficiente para la existencia de un punto de intersección de las gráficas de las funciones, en el intervalo  $[0, 1]$ , está dada por la condición:

$$\frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1-\alpha)x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2 + \Psi_3} < 1 \quad (1.35)$$

la cual es equivalente a :

$$x_\infty^-(X) < x(t_k) + \frac{\Psi_3}{1-\alpha} \quad (1.36)$$

Nótese que en estado estacionario, cuando  $x(t_k) = x_\infty^-(X)$  la condición (1.36) es trivialmente satisfecha, debido a la positividad de  $\Psi_3$  y al hecho de que  $|\alpha| < 1$ . El controlador implícito (1.33) conduce entonces a una solución única de la razón de trabajo  $\mu_\infty$ , la cual se encuentra en el intervalo  $[0, 1]$ . No obstante, durante la etapa transitoria, la condición (1.36) simplemente dice que el valor deseado en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada,  $x_\infty^-(X)$ , no debe exceder la corriente de entrada muestreada, sobre cualquier instante de tiempo, más el valor superior de todo el "rizo" de la corriente de entrada ( dado por  $\Psi_3 = \theta_2 T$ ), multiplicado por un factor de  $1/(1-\alpha)$ . Como se puede ver, ésta no es una condición muy restrictiva, especialmente si se escoge a  $\alpha$  positiva y no muy cercana a cero. Observe, además, que en ausencia de la condición (1.36), el controlador implícito (1.33) *siempre* arroja una solución única para  $\mu_c(t_k)$  la cual no está, necesariamente, restringida al intervalo  $[0, 1]$ .

La función de razón de trabajo puede ser encontrada a partir de la función de razón de trabajo calculada mediante el uso de la expresión (1.3).

La figura 6.7 muestra el esquema de regulación retroalimentado PWM para el convertidor "boost-derivado" basado en un modelo exacto en tiempo discreto de la corriente de entrada muestreada y el sintetizador implícito de la razón de trabajo.

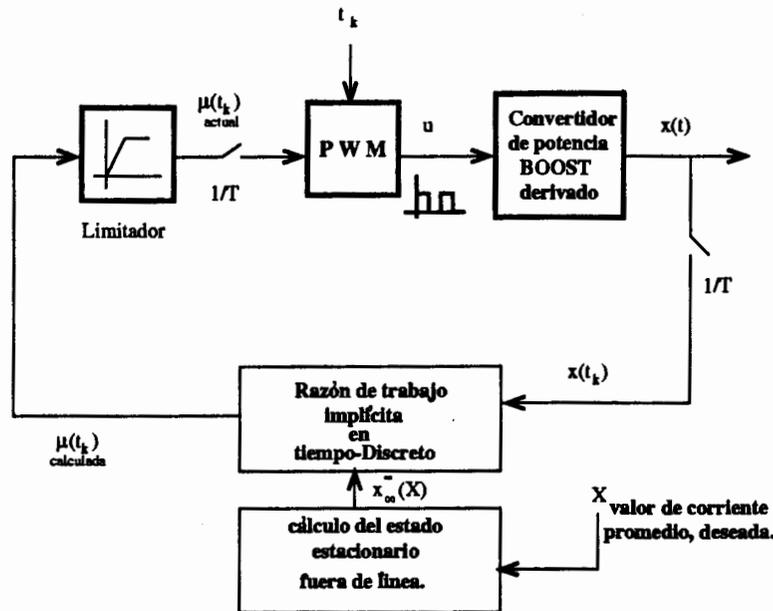


Figura 6.7: Esquema de Regulación Mediante PWM para el Convertidor “Boost-Derivado”, en base a una Discretización Exacta.

**Observación :** Controladores implícitos de la forma (1.33) demandan una solución numérica en línea de la ecuación trascendental correspondiente a la función de razón de trabajo calculada  $\mu_c(t_k)$ , una vez que el estado muestreado,  $x(t_k)$ , está disponible. El tiempo de cálculo requerido sobre cada instante de muestreo puede ser bastante significativo y de esta forma un retardo importante se introduce en la implantación de la ley de control. En las consideraciones y simulaciones llevadas a cabo en el resto de este capítulo tal retardo no es tomado en consideración y hemos asumido, por lo tanto, que uno puede determinar “casi instantáneamente” la función de razón de trabajo a partir de la expresión del controlador. Esta asunción es justificada en base a los avances significativos en los dispositivos electrónicos análogos y a la disponibilidad de rápidos coprocesadores matemáticos.

**6.2 Simulación.** A fin de probar la robustez de la política de regulación PWM previamente derivada, basada en una discretización exacta, hemos empleado el siguiente modelo perturbado del convertidor “boost-derivado” :

$$\dot{x} = -\frac{R}{L}(1-u)x + \left(\frac{E + \nu(t)}{L}\right) \quad (1.37)$$

donde  $\nu(t)$  representa una entrada de perturbación estocástica externa que afecta directamente el comportamiento del sistema a través del valor de la fuente de voltaje. Los valores de los parámetros que definen el convertidor fueron seleccionados en forma idéntica a aquellos considerados en el caso del convertidor “buck-derivado”:

$$R = 2.8 \times 10^{-2} \Omega ; L = 1.0 \times 10^{-2} \text{ mH} ; E = 126 \text{ Volts}$$

El período de muestreo se escogió como  $T = 0.125 \text{ ms}$  ( $1/T = 8 \text{ KHz}$ ) y el valor

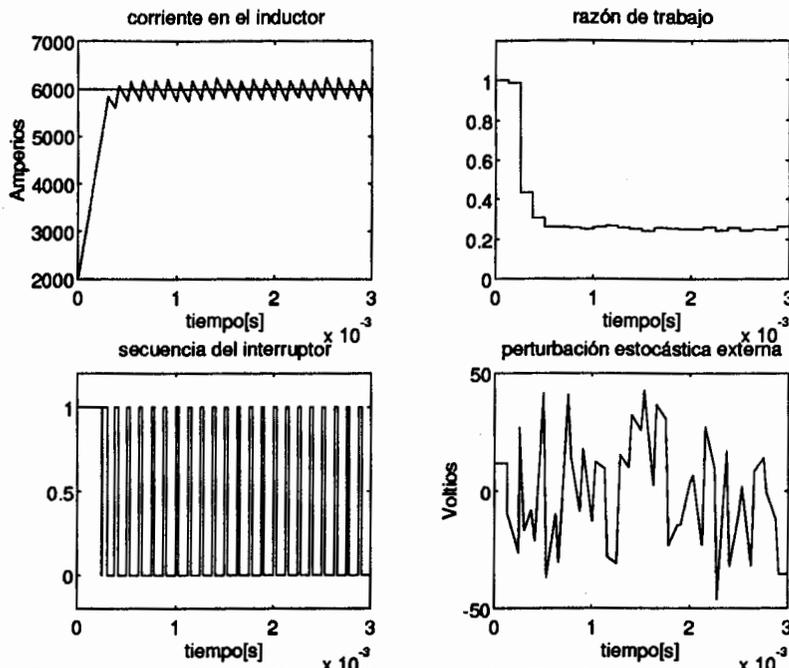


Figura 6.8: Resultados de la Simulación para la Estabilización mediante PWM, del Convertidor “Boost-Derivado”.

deseado para la dinámica promedio fué ubicado en  $X = 6000$  A. El autovalor de la dinámica lineal en lazo cerrado,  $\alpha$ , se colocó en 0.3. El valor correspondiente de la corriente de entrada en estado estacionario se encontró como  $x_{\infty}^{-}(6000) = 5804$  A. El valor promedio requerido en estado estacionario de la corriente de entrada así como también las magnitudes  $x_{\infty}^{+}$  y  $x_{\infty}^{-}$  se encuentran dentro del rango permitido lo cual nos garantiza que la función de razón de trabajo no se saturará.

La trayectoria controlada de la corriente de entrada, la función de razón de trabajo, la función de posición del interruptor  $u(t)$  y la señal de perturbación  $\nu(t)$  se exponen en la figura 6.8, donde se puede observar el funcionamiento adecuado del controlador y su robustez con respecto a la señal de perturbación no modelada.

□ □ □

### 1.3 Circuito "Buck-Boost-Derivado".

Considere el circuito del convertidor "buck-boost-derivado" que se expone en la figura 6.9 (vea Rashid [46]).

A continuación sintetizaremos todas las ecuaciones relevantes que conducen al diseño del controlador PWM estabilizante para el convertidor "buck-boost-derivado". La obtención de la función de razón de trabajo requerida está basada en un valor deseado de la corriente promedio de entrada  $X$ .

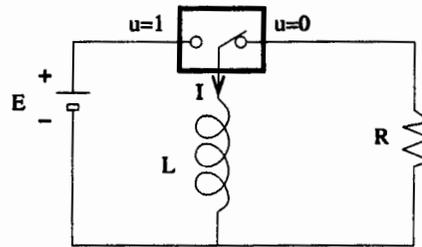


Figura 6.9: Circuito del Convertidor "Buck-Boost-Derivado".

**El modelo regulado mediante conmutación del convertidor "buck-boost-derivado".**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R}{L}(1-u)x - \frac{E}{L}u \\ &= -\theta_1(1-u)x - \theta_2u \end{aligned} \tag{1.38}$$

**Estrategia de regulación PWM para la posición del interruptor.**

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{cases} 1 & \text{para } t_k \leq t < t_k + \mu(t_k)T \\ 0 & \text{para } t_k + \mu(t_k)T \leq t < t_k + T \end{cases} \\ t_{k+1} &= t_k + T ; k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{1.39}$$

El convertidor "buck-boost-derivado" es popularmente conocido como el convertidor "step-up-down", debido al hecho que la corriente promedio de entrada es, teóricamente, capaz de alcanzar todos los valores entre 0 y  $-\infty$ .

**Discretización exacta de la dinámica regulada PWM del convertidor "buck-boost-derivado".**

$$x(t_k + \mu(t_k)T) = -\theta_2\mu(t_k)T + x(t_k) \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned} x(t_k + T) &= e^{-\theta_1 T(1-\mu(t_k))} [-\theta_2 \mu(t_k) T + x(t_k)] \\ &= \Psi_1^{(1-\mu(t_k))} x(t_k) - \Psi_1^{(1-\mu(t_k))} \Psi_3 \mu(t_k) \end{aligned} \quad (1.41)$$

**Valor en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada.**

$$x_\infty^- = -\frac{\Psi_1^{(1-\mu_\infty)} \mu_\infty \Psi_3}{1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)}} \quad (1.42)$$

**Dinámicas en tiempo discreto de las “esquinas superiores” de la trayectoria de la corriente de entrada.**

$$x(t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T) = \Psi_1^{(1-\mu(t_k))} x(t_k + \mu(t_k)T) - \Psi_3 \mu(t_{k+1}) \quad (1.43)$$

**Valor en estado estacionario de las “esquinas superiores” de la trayectoria de la corriente de entrada.**

$$x_\infty^+ = -\frac{\mu_\infty \Psi_3}{1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)}} \quad (1.44)$$

**Valor del “rizo” en estado estacionario.**

$$r_\infty = x_\infty^+ - x_\infty^- = -\Psi_3 \mu_\infty \quad (1.45)$$

**Valor promedio en estado estacionario de la trayectoria de la corriente de entrada.**

$$x_{av}(\infty) = x_\infty^- + \frac{1}{2} r_\infty = -\frac{[\Psi_3 \mu_\infty (1 + \Psi_1^{(1-\mu_\infty)})]}{2(1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)})} \quad (1.46)$$

Note que  $2X_{av} < -\Psi_3 \mu_\infty$ .

**Existencia de una función de razón de trabajo para un valor deseado de la corriente promedio de entrada en estado estacionario.**

$$\Psi_1^{(1-\mu_\infty)} = \frac{2X_{av}(\infty) + \Psi_3 \mu_\infty}{2X_{av}(\infty) - \Psi_3 \mu_\infty} \quad (1.47)$$

Una solución para  $\mu_\infty$  siempre existe en  $[0, 1]$  a partir del hecho que  $X_{av}(\infty) < 0$  y  $\Psi_3 > 0$ . Ciertamente, en el intervalo  $[0, 1]$ , el lado izquierdo de (1.47) varía desde  $\Psi_1 < 1$  a 1, mientras el lado derecho varía de 1 a la cantidad definida por,  $(2X_{av}(\infty) + \Psi_3) / (2X_{av}(\infty) - \Psi_3)$ , lo cual es menor que 1, pudiendo aún ser negativo, por virtud del hecho que  $|2X_{av}(\infty) - \Psi_3| > |2X_{av}(\infty) + \Psi_3|$ .

**Dinámica deseada en lazo cerrado (asintóticamente estable).**

$$x(t_{k+1}) = \alpha (x(t_k) - x_\infty^-(X)) + x_\infty^-(X) ; |\alpha| < 1 \quad (1.48)$$

**Sintetizador implícito de la razón de trabajo.**

$$\Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))} = \frac{\alpha x(t_k) + (1-\alpha) x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_3 \mu_c(t_k)} \quad (1.49)$$

Dado  $x(t_k)$ , existe una solución para  $\mu_c(t_k)$ , en el intervalo  $[0, 1]$  sí, y solo sí, la siguiente condición se mantiene:

$$x_\infty^-(X) < x(t_k) - \frac{\Psi_3}{1-\alpha} \quad (1.50)$$

la cual se puede interpretar en forma similar a (1.36) y es trivialmente satisfecha en estado estacionario.

**6.3 Simulación.** Simulaciones digitales fueron desarrolladas a partir del siguiente modelo perturbado del convertidor "buck-boost-derivado" conjuntamente con el sintetizador de la razón de trabajo propuesto,

$$\dot{x} = -\frac{R}{L}(1-u)x - \left(\frac{E + v(t)}{L}\right) u \quad (1.51)$$

El esquema de control retroalimentado coincide, enteramente, con el que se muestra en la figura 6.7 del convertidor "boost-derivado", con la única excepción de que la planta está ahora constituida por el convertidor de potencia "buck-boost-derivado".

Los valores de los parámetros del convertidor, del período de muestreo y del autovalor para la dinámica deseada en lazo cerrado, fueron tomados igual que en el caso previo. El valor deseado en estado estacionario para la corriente promedio de entrada se colocó en  $-1500$  A. El valor correspondiente a la corriente de entrada muestreada en estado estacionario se encontró como  $x_\infty^-(-1500) = -1304$  A. En la figura 6.10 se muestran los resultados obtenidos.

□ □ □

A lo largo de esta sección se ha observado que, la linealidad en la entrada, asociada con el tradicional modelo promedio de frecuencia infinita, es efectivamente destruida por el procedimiento de discretización exacta, no obstante, el modelo resultante aún permanece lineal en el estado. En los problemas de estabilización, excepto para el convertidor "buck-derivado", se obtiene un sintetizador de la razón de trabajo no lineal, discreto, del tipo *implícito*, es decir, sobre cada instante de muestreo, la función de razón de trabajo es dada por la solución numérica de una ecuación trascendental. Similares ecuaciones trascendentales surgen del cálculo fuera de línea de la corriente promedio de entrada deseada, en estado estacionario, en términos de la corriente de entrada muestreada en estado estacionario. Sólo para el convertidor "buck-derivado" es posible obtener una expresión explícita que relaciona la corriente promedio de entrada con los valores muestreados de la corriente de entrada.

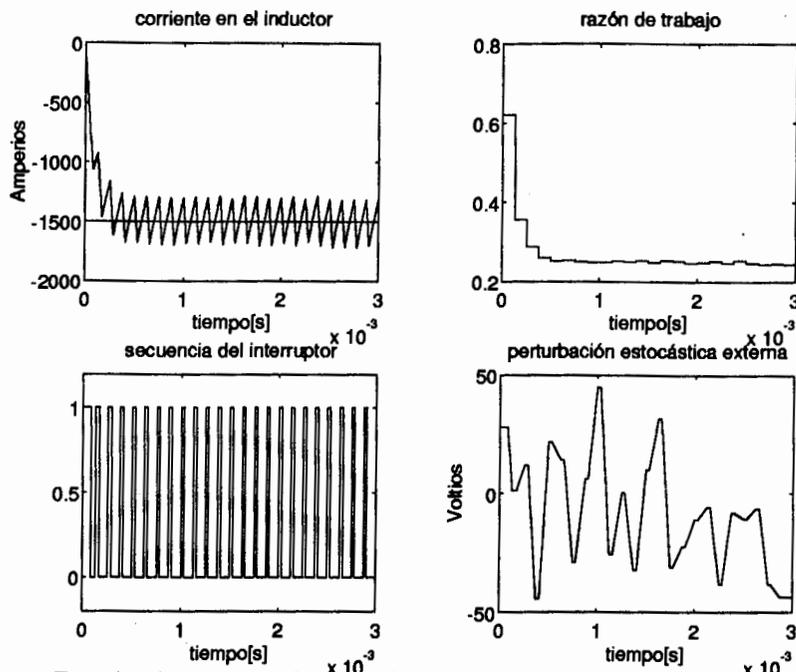


Figura 6.10: Resultados de la Simulación para la Estabilización mediante PWM del Convertidor "Buck-Boost-Derivado".

## 2 Controladores vía Modulación de Frecuencia de Pulsos.

La Modulación de Anchura de Pulso ( PWM ) constituye una estrategia de control frecuentemente empleada en la regulación de convertidores de potencia DC-DC (vea Severns y Bloom [48], Kassakian *et al* [38], y los trabajos de Sira-Ramírez y sus colaboradores [51] [55]), ella puede ser derivada tanto por el uso de los *modelos de estado promedio*, inicialmente propuesto por Cúk [32] y Middlebrook y Cúk [41], y posteriormente justificados desde un punto de vista geométrico por Sira-Ramírez en [50], o por la creación de modos deslizantes en el espacio de estado (vea [65] y Sira-Ramírez y Ilic-Spong [53] and [49], [58]). Las estrategias PWM, en tanto que son relativamente fáciles de implementar por medio de circuitos electrónicos integrados, presentan la desventaja de emplear un período de muestreo fijo:

Este hecho está asociado a dos resultados importantes:

1. La actividad de muestreo es innecesariamente rápida cuando tiene inicio el proceso en el convertidor, mientras el error es significativamente grande.
2. Imposibilidad de incrementar la frecuencia de muestreo, durante el estado estacionario de la regulación, impidiendo el beneficio de reducir el "rizo" durante esa etapa.

Es obvio que si la frecuencia de muestreo pudiese expresarse en función del error de estabilización entonces, los dos problemas anteriores serian fácilmente superados.

El control mediante Modulación de Frecuencia de Pulso ( PFM ) constituye una generalización del esquema de control a través de Modulación de Anchura de Pulso, en el cual se admite que la frecuencia de muestreo actúe como una función del error de estabilización. Como resultado, una frecuencia de muestreo baja puede ser empleada durante el tiempo en el cual el transiente exhibe un error de estabilización grande mientras, que en estado estacionario, debido a las posibilidades de usar frecuencias de muestreo altas, se puede lograr un "rizo" apropiado (reducido). El control de convertidores de potencia DC-DC a través de PFM ha sido, relativamente, poco tratado en la literatura especializada. Investigaciones pioneras sobre el control de plantas lineales con PFM son aquellas de Skoog and Blankenship [63]. En los últimos años, el tópico del control PFM, y sus ventajas, ha permanecido en el olvido, excepto por algunas contribuciones hechas por Sira-Ramírez y sus colaboradores [56] y [37].

En este capítulo trataremos de investigar que tan viable resulta el hecho de diseñar controladores PFM para la estabilización de la corriente de entrada en los, ya conocidos, *convertidores de potencia DC-DC derivados*. Esta clase de convertidores son utilizados comunmente en soldadura de alta precisión y en otras aplicaciones industriales (vea Rashid [46]). Como hemos visto en los capítulos anteriores, los convertidores derivados constituyen una versión simplificada de los convertidores de potencia DC-DC tradicionales, tales como el "buck", el "boost" y el "buck-boost", en los cuales el se ha removido el capacitor. Así, los convertidores derivados exhiben una dinámica escalar lo cual los convierte en particularmente convenientes para el diseño de políticas de control discontinuas basadas en esquemas de *discretización exacta*, en lugar de las cuestionables aproximaciones promedios (vea Sira-Ramírez *et al* [52] para el esquema en tiempo discreto regulado mediante PWM).

## 2.1 Convertidor "Buck-Derivado".

Consideremos el modelo, regulado mediante conmutación, que describe el comportamiento del convertidor "buck-derivado",

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R}{L}x + \frac{E}{L}u \\ y &= Rx \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $x$  es la corriente de entrada,  $y$  es el voltaje de salida y los parámetros  $R$ ,  $L$  y  $E$  representan, la resistencia de carga, la inductancia de entrada al circuito, y la fuente de voltaje constante. La variable  $u$  denota la *función de posición del interruptor*, y ésta toma valores en el conjunto discreto  $\{0, 1\}$ .

Una estrategia de regulación basada en una especificación del tipo PFM de la posición del conmutador, puede ser descrita (vea Sira-Ramírez [37]) por :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t_k \leq t < t_k + \mu(t_k)T(t_k) \\ 0 & \text{para } t_k + \mu(t_k)T(t_k) \leq t < t_k + T(t_k) \end{cases} \tag{2.2}$$

$$t_{k+1} = t_k + T(t_k) ; k = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $\mu(\cdot)$  es conocida como la *función de razón de trabajo*, adoptando valores en el intervalo cerrado  $[0, 1]$  de la recta real.  $T(\cdot)$  es el período de muestreo variable, denominado *función del ciclo de trabajo*, y la cual será especificada como una función dependiente del error de estabilización asociado con la corriente de entrada  $x$ , y  $t_k$  es el instante de muestreo. El comportamiento típico de un interruptor controlado por una estrategia PFM, se muestra en la figura 6.11.

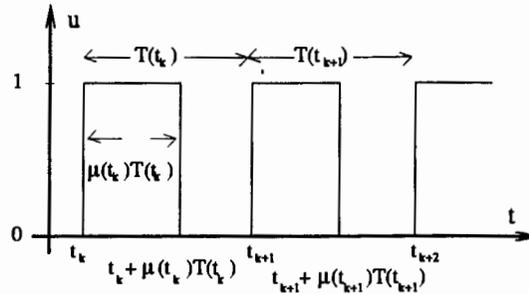


Figura 6.11: Función de Posición del Interruptor Mediante una Política PFM.

Puesto que la razón de trabajo  $\mu$  es determinada en línea de un modo retroalimentado, es decir, calculada como una función explícita dependiente del valor muestreado de la corriente de entrada  $x(t_k)$  sobre cada instante  $t_k$ , podemos obtener valores de  $\mu$  fuera del intervalo  $[0, 1]$ . En consecuencia, es necesario distinguir entre la *función de razón de trabajo calculada*, denotada por  $\mu_c(\cdot)$  y la *función de razón de trabajo*  $\mu(\cdot)$ , siendo ésta última la limitación de  $\mu_c(\cdot)$  al intervalo cerrado  $[0, 1]$ . De una manera más formal :

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } \mu_c(t) > 1 \\ \mu_c(t) & \text{para } 0 \leq \mu_c(t) \leq 1 \\ 0 & \text{para } \mu_c(t) < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

### Discretización Exacta.

El estudio de las diferentes topologías del circuito que constituye el convertidor “buck-derivado” (2.1), asociadas con cada una de las dos posibles posiciones del interruptor, nos conduce a desarrollar un modelo *exacto* en tiempo discreto que describe la evolución del valor muestreado de la corriente de entrada en el convertidor, cuando éste se encuentra sujeto a una política de conmutación de la forma (2.2).

Para el caso  $u = 1$ , dado el valor de  $x$  en el instante  $t_k$ , denotado por  $x(t_k)$ , el valor de la corriente de entrada sobre el final del “pulso”, de ancho  $\mu(t_k)T(t_k)$ , es encontrado después de emplear la *formula de Cauchy* como :

$$x(t_k + \mu(t_k)T(t_k)) = e^{-\theta_1 \mu(t_k)T(t_k)} x(t_k) + \frac{\theta_2}{\theta_1} [1 - e^{-\theta_1 \mu(t_k)T(t_k)}] \quad (2.4)$$

donde los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  denotan los cocientes  $R/L$  y  $E/L$ , respectivamente.

Para  $u = 0$ , tomando como condición inicial el valor de  $x$  en el instante de tiempo  $t_k + \mu(t_k)T(t_k)$  (2.4) y aplicando nuevamente la *formula de Cauchy*, el valor

muestreado de la corriente de entrada sobre el final del período de muestreo se obtiene como:

$$x(t_k + T(t_k)) = e^{-\theta_1 T(t_k)} x(t_k) + \frac{\theta_2}{\theta_1} e^{-\theta_1 T(t_k)} [e^{\theta_1 \mu(t_k) T(t_k)} - 1] \quad (2.5)$$

Si denotamos  $\Psi_1 = e^{-\theta_1 T}$  y  $\Psi_2 = \theta_2/\theta_1$ , el modelo en tiempo discreto para la evolución de la corriente de entrada, descrito sobre los instantes de muestreo, está dado por :

$$x(t_{k+1}) = \Psi_1^{T(t_k)} x(t_k) + \Psi_1^{T(t_k)} \Psi_2 [\Psi_1^{-\mu(t_k) T(t_k)} - 1] \quad (2.6)$$

donde el valor de la función de razón de trabajo sobre el instante  $t_k$ ,  $\mu(t_k)$ , y el período de muestreo  $T(t_k)$  se comportan como “entradas de control” las cuales deben ser especificadas en el inicio de cada período de muestreo. El modelo en tiempo discreto para la corriente de entrada muestreada es, por lo tanto, no lineal en las nuevas entrada de control,  $\mu(t_k)$  y  $T(t_k)$ . La función de razón de trabajo, como explicamos anteriormente, se encuentra restringida al intervalo  $[0, 1]$ . Uno puede también acotar la función del ciclo de trabajo a un intervalo de la forma  $[T_{\min}, T_{\max}]$  de la recta real.  $T_{\min}$  es el menor período de muestreo correspondiente a la frecuencia de muestreo más alta permisible, mientras  $T_{\max}$  es el mayor período de muestreo asociado a la frecuencia de muestreo más baja.

El único auto valor asociado con la dinámica lineal muestreada, está dado por  $\Psi_1^{T(t_k)}$ , el cual es evidentemente positivo y estrictamente menor que la unidad puesto que el período de muestreo  $T(t_k)$  es positivo para todo instante de muestreo. El sistema muestreado es por ende asintóticamente estable para valores constantes de la función de razón de trabajo  $\mu$  y del período de muestreo  $T$ . Hemos asumido, sin pérdida de generalidad, que la corriente de entrada controlada alcanza el estado estacionario cuando la mayor frecuencia de muestreo  $1/T_{\min}$  es empleada en el esquema PFM (2.2). Bajo condiciones de operación de estado estacionario la función de razón de trabajo, evidentemente, debe ser considerada como un valor constante, digamos,  $\mu_\infty$ .

El valor en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada, denotado por  $x_\infty^-$ , correspondiente a un valor constante de la función de razón de trabajo,  $\mu_\infty$ , y a la mayor frecuencia de muestreo  $1/T_{\min}$  se obtiene fácilmente a partir de (2.6) como:

$$x_\infty^- = \frac{\Psi_1^{T_{\min}} \Psi_2}{1 - \Psi_1^{T_{\min}}} (\Psi_1^{-\mu_\infty T_{\min}} - 1) \quad (2.7)$$

Tal como vimos en el sección anterior, una estrategia de regulación mediante conmutación impone sobre el estado controlado una trayectoria en “zig-zag”, debido a las discontinuidades asociadas con la variable de entrada  $u$ , que define la posición del interruptor (vea figura 6.12).

El índice superior “-” en (2.7) refiere a la posición “baja” de la trayectoria en “zig-zag” parcialmente descrita por (2.6). Resulta claro que a fin de desarrollar una política de regulación adecuada para la especificación de la razón de trabajo  $\mu(t_k)$ , es imprescindible tomar en cuenta el “rizo”, inevitablemente asociado con la evolución de  $x(t_k)$ , el cual no es considerado por el modelo (2.5). No solo se deben analizar los

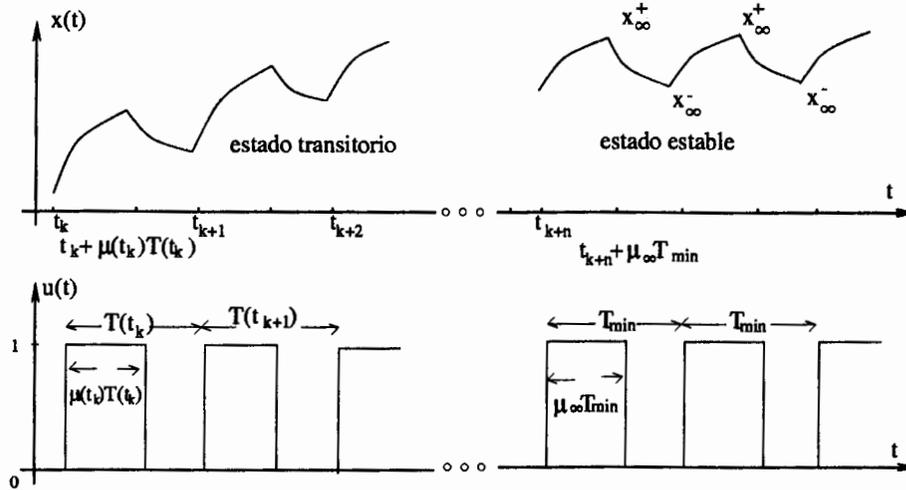


Figura 6.12: Trayectoria del Estado Controlado vía PFM

valores del estado muestreado  $x(t_k)$ , sino también los valores de  $x(t)$  en los instantes  $t = t_k + \mu(t_k)T(t_k)$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ ; (vea figura 6.12).

Ahora, referimos el valor de  $x$  sobre los instantes de tiempo  $t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T(t_{k+1})$  y  $t_k + \mu(t_k)T(t_k)$  a fin de obtener el valor de la “esquina superior” de la trayectoria en “zig-zag” de la corriente de entrada.

Usando la *formula de Cauchy* obtenemos :

$$\begin{aligned} x(t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T(t_{k+1})) &= \Psi_1^{\mu(t_{k+1})T(t_{k+1})} \Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)} x(t_k + \mu(t_k)T(t_k)) + \\ &+ \Psi_2(1 - \Psi_1^{\mu(t_{k+1})T(t_{k+1})}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

El autovalor asociado con la anterior dinámica lineal de estado es el producto

$$\Psi_1^{\mu(t_{k+1})T(t_{k+1})} \Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)}$$

el cual es positivo y menor que la unidad para valores de  $\mu$  restringidos al intervalo unitario  $[0, 1]$ . La magnitud, en estado estacionario, de la “esquina superior” de la trayectoria de estado, descrita por (2.8), correspondiente a valores constantes de la función de razón de trabajo y período de muestreo, dados respectivamente por  $\mu_\infty$  y  $T_{\min}$  (vea figura 6.12), es :

$$x_\infty^+ = \frac{\Psi_2}{1 - \Psi_1^{\mu_\infty T_{\min}}} (1 - \Psi_1^{\mu_\infty T_{\min}}) \quad (2.9)$$

Relacionando las ecuaciones (2.7) y (2.9) se puede ver que:

$$x_\infty^- = x_\infty^+ \Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}} \quad (2.10)$$

Ya que  $\Psi_1$  es un número positivo estrictamente menor que 1, podemos concluir que  $x_\infty^- < x_\infty^+$  para  $\mu_\infty \in [0, 1]$  y cualquier valor del período mínimo de muestreo  $T_{\min}$ .

El "rizo" en estado estacionario, denotado por  $r_\infty$ , se obtiene como:

$$r_\infty = x_\infty^+ - x_\infty^- = \frac{\Psi_2}{1 - \Psi_1^{T_{\min}}} (1 - \Psi_1^{\mu_\infty T_{\min}}) (1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}) \quad (2.11)$$

Podemos definir un *valor promedio en estado estacionario* para la trayectoria de la corriente de entrada en el inductor como:

$$x_{av}(\infty) = x_\infty^- + \frac{1}{2}r_\infty = \frac{1}{2}(x_\infty^- + x_\infty^+) \quad (2.12)$$

Empleando las expresiones (2.7) y (2.9) en la ecuación anterior, obtenemos:

$$x_{av}(\infty) = \frac{1}{2} \left( \frac{\Psi_2}{1 - \Psi_1} \right) (1 - \Psi_1^{\mu_\infty T_{\min}}) (1 + \Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}) \quad (2.13)$$

Procedemos a exponer el valor, en estado estacionario, de la trayectoria de la corriente de entrada muestreada  $x_\infty^-$ , en término de la corriente promedio de entrada en estado estacionario  $x_{av}(\infty)$ . Esta relación nos permite definir una política estabilizante factible de la razón de trabajo (control) en base al modelo en tiempo discreto del estado muestreado (2.5). La política retroalimentada considera apropiadamente el "rizo" asociado a la trayectoria del controlador y conduce asintóticamente la corriente promedio de entrada a un pre-especificado valor deseado en estado estacionario. Para llevar a cabo este objetivo simplemente se elimina el valor en estado estacionario de la razón de trabajo  $\mu_\infty$  de las expresiones (2.6) y (2.13); encontrándose:

$$x_\infty^- = -\Psi_2 \left[ \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2x_{av}(\infty)}{\Psi_2} \right) + \frac{\Psi_1^{T_{\min}}}{1 - \Psi_1^{T_{\min}}} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2x_{av}(\infty)}{\Psi_2} \right)^2 + \frac{\Psi_1^{T_{\min}}}{(1 - \Psi_1)^2}} \right] \quad (2.14)$$

### Una Política de Control PFM.

Observese que a partir de la ecuación (2.14) se puede obtener de manera inmediata el valor de  $x_\infty^-$  correspondiente a un valor promedio constante  $X$  de la corriente en el inductor, denotado por  $x_\infty^-(X)$ ,

$$x_\infty^-(X) = -\Psi_2 \left[ \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2X}{\Psi_2} \right) + \frac{\Psi_1^{T_{\min}}}{1 - \Psi_1^{T_{\min}}} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2X}{\Psi_2} \right)^2 + \frac{\Psi_1^{T_{\min}}}{(1 - \Psi_1)^2}} \right] \quad (2.15)$$

Una ley de control por realimentación  $\mu(t_k)$  para la estabilización puede obtenerse explícitamente a partir del modelo exacto en tiempo discreto (2.6), forzando a  $x(t_k)$  a estabilizarse asintóticamente alrededor de  $x_\infty^-(X)$ .

Imponemos al sistema muestreado, controlado en lazo cerrado, un comportamiento lineal y asintóticamente estable, basado en la dinámica del error, de la forma:

$$x(t_{k+1}) = \alpha (x(t_k) - x_\infty^-(X)) + x_\infty^-(X) ; \quad |\alpha| < 1 \quad (2.16)$$

el cual nos garantiza que el error se estabiliza asintóticamente a cero.

Resulta claro que a objeto de imponer la dinámica lineal deseada (2.16) sobre el sistema en lazo cerrado, uno cuenta con dos entradas de control  $\mu(t_k)$  y  $T(t_k)$ . Actualmente uno obtiene, después de sustituir el lado derecho de la expresión (2.5) en (2.16), una ecuación escalar la cual cuenta con las dos funciones desconocidas. Por esta razón debemos proceder a especificar una de las dos entradas de control, digamos  $T(t_k)$ , ya sea como una constante fija  $T(t_k) = T$  (lo cual reduce el esquema de control a un PWM), o como una función retroalimentada  $T(t_k) = T(x(t_k))$ . Entonces resolvemos la función de razón de trabajo  $\mu(t_k)$  en términos del período de muestreo y obtenemos la siguiente razón de trabajo calculada en función de los parámetros del sistema y del intervalo de muestreo actual,  $T(t_k)$ ,

$$\mu_c(t_k) = -\frac{1}{T(t_k)\ln\Psi_1} \ln \left[ 1 + \frac{(\alpha - \Psi_1^{T(t_k)})x(t_k) + (1 - \alpha)x_\infty^-(X)}{\Psi_1\Psi_2} \right] ;$$

$$k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

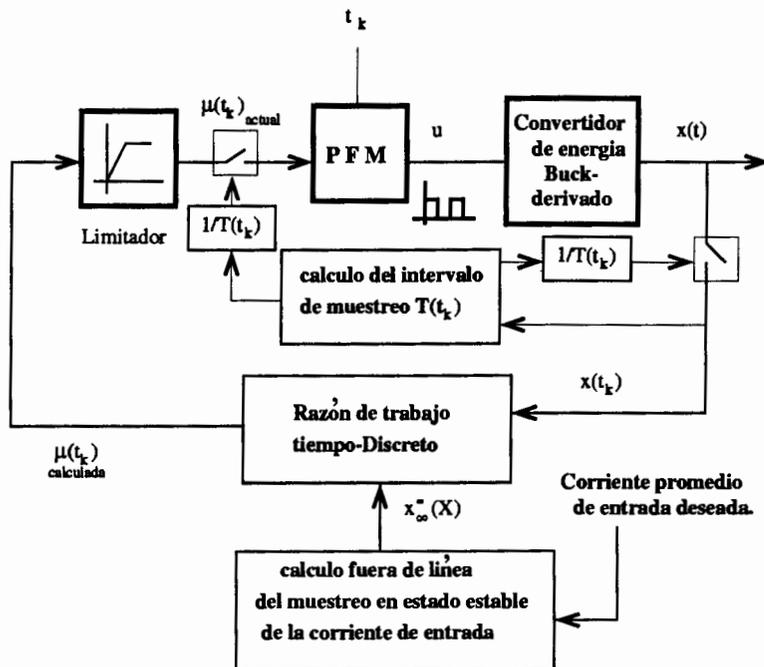


Figura 6.13: Esquema de Regulación para el Convertidor "Buck-Derivado" en Base a una Discretización Exacta PFM.

La razón de trabajo  $\mu(t_k)$  puede ser fácilmente encontrada a partir de la expresión (2.4). La figura 6.13 expone el esquema de regulación retroalimentado PFM en base a un modelo dinámico exacto, en tiempo discreto, de la corriente de entrada muestreada.

Una escogencia razonable del período de muestreo  $T(t_k)$  es en función del error

de estabilización  $e(t_k) = x(t_k) - X$ , tal como:

$$T(t_k) = \begin{cases} T_{\max} & \text{para } |e(t_k)| > \frac{1}{\rho_2} \\ T_{\min} + (T_{\max} - T_{\min}) \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \left( e(t_k) - \frac{1}{\rho_1} \right) & \text{para } \frac{1}{\rho_1} \leq |e(t_k)| \leq \frac{1}{\rho_2} \\ T_{\min} & \text{para } |e(t_k)| < \frac{1}{\rho_1} \end{cases} \quad (2.18)$$

En otras palabras el Período de muestreo también conocido como *el ciclo de trabajo* se especifica como una función retroalimentada del error de estabilización,  $e(t_k)$ , con valores constantes de saturación  $T_{\max}$ , y  $T_{\min}$ , que corresponden, respectivamente, con valores pequeños y grandes del error de estabilización. Para valores intermedios de tal error el periodo de muestreo varía de una manera proporcional a la magnitud del mismo. Las constantes  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son constantes de diseño que determinan para que valores del error se lleva a cabo la saturación así como la pendiente de la porción lineal de la función (vea Figura 6.14).

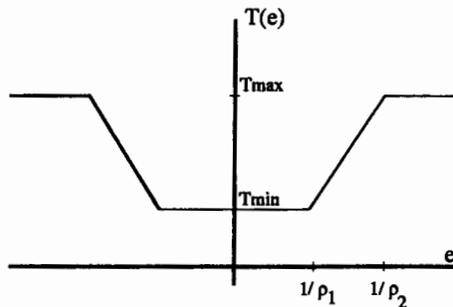


Figura 6.14: Política de Control, Ciclo de Trabajo.

La expresión (2.17) permite la determinación de la región de no-saturación de la función de razón de trabajo. Ciertamente, la doble desigualdad  $0 < \mu_c < 1$ , origina la siguiente región para el estado muestreado:

$$0 < (\alpha - \Psi_1^{T(t_k)})x(t_k) + (1 - \alpha)x_\infty(X) < \Psi_2 (1 - \Psi_1^{T(t_k)}) \quad (2.19)$$

**6 .1 Simulación.** Para probar la validez de la ley de regulación PFM en base a una discretización exacta, propuesta anteriormente, se empleó el siguiente modelo perturbado del convertidor "buck-derivado" :

$$\dot{x} = -\frac{R}{L}x + \left( \frac{E + \nu(t)}{L} \right) u \quad (2.20)$$

donde  $\nu(t)$  es una señal de perturbación estocástica generada por el computador que representa un ruido aditivo, no modelado, en la fuente de voltaje.

Para efectuar la simulación, se asignaron los siguiente valores de los parámetros:

$$R = 2.8 \times 10^{-2} \ \Omega ; \ L = 1.0 \times 10^{-2} \ \text{mH} ; \ E = 126 \ \text{Volts}$$

Los valores de saturación de la función del ciclo de trabajo se escogieron de  $T_{\min} = 0.0833 \ \text{ms}$  ( $1/T_{\min} = 12 \ \text{KHz}$ ) y  $T_{\max} = 0.250 \ \text{ms}$  ( $1/T_{\max} = 4 \ \text{KHz}$ ).

El valor deseado para la dinámica promedio fué ubicado en  $X = 1237$  A. El autovalor de la dinámica lineal en lazo cerrado,  $\alpha$ , se fijó en 0.3. Se encontró que  $x_{\infty}^{-}(1237) = 1080.7$  A.

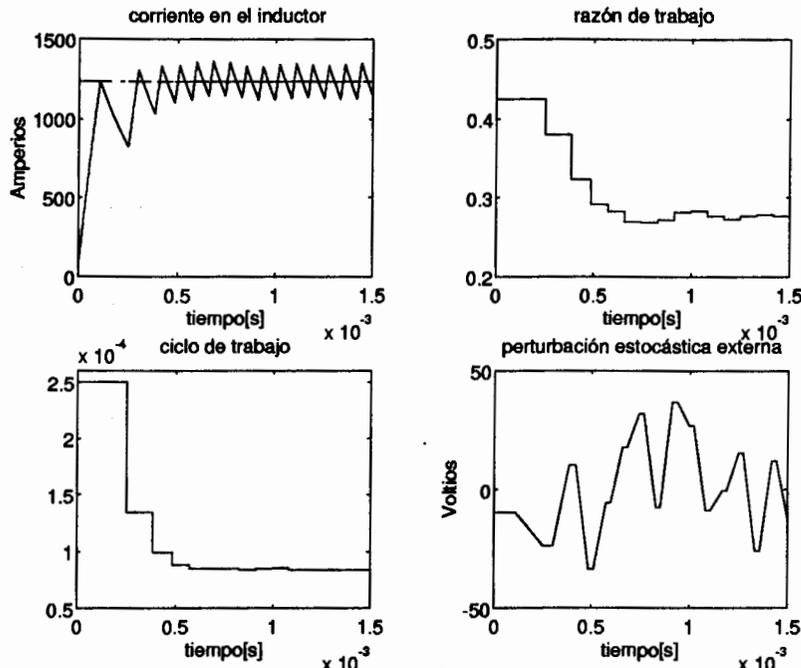


Figura 6.15: Resultados de la simulación del Convertidor "Buck-Derivado", mediante PFM.

La figura 6.15 muestra la trayectoria de la corriente de entrada, la funciones de razón de trabajo  $\mu(t)$  y de ciclo de trabajo  $T(t)$  así como también la señal de perturbación  $\nu(t)$ .

Como se puede ver, apesar de la señal de perturbación, el controlador diseñado actúa de una forma bastante satisfactoria.

## 2.2 Convertidor "Boost-Derivado".

El modelo, regulado a través de conmutación, que describe el comportamiento de la corriente de entrada, denotada por  $x$ , para el caso del convertidor "boost-derivado" es :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R}{L}x(1-u) + \frac{E}{L} \\ y &= Rx \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $y$  es el voltaje de salida y los parámetros  $R$ ,  $L$  y  $E$  vienen dados, respectivamente, por la resistencia de carga, la inductancia de entrada al circuito, y la fuente de voltaje constante. La variable  $u$  denota la *función de posición del interruptor* tomando valores en el conjunto discreto  $\{0, 1\}$ .

Una estrategia de regulación, basada en una especificación de la función de posición del interruptor del tipo PFM, puede ser descrita exactamente como en (2.2).

### Discretización Exacta

Dado el valor de  $x$  sobre el instante de tiempo  $t_k$ , denotado por  $x(t_k)$ , el valor de la corriente de entrada al final del “pulso”, de ancho  $\mu(t_k)T(t_k)$ , es encontrado, despues de emplear la *formula de Cauchy*, como:

$$x(t_k + \mu(t_k)T(t_k)) = \theta_2 \mu(t_k)T(t_k) + x(t_k) \quad (2.22)$$

donde, nuevamente, los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  denotan los cocientes  $R/L$  y  $E/L$ , respectivamente.

Tomando como condición inicial el valor de  $x$  en el instante  $t_k + \mu(t_k)T(t_k)$  (2.22) y aplicando nuevamente la *formula de Cauchy*, el valor muestreado de la corriente de entrada sobre el final del período de muestreo se obtiene como:

$$x(t_k + T(t_k)) = e^{-\theta_1 T(t_k)(1-\mu(t_k))} [\theta_2 \mu(t_k)T(t_k) + x(t_k)] + \frac{\theta_2}{\theta_1} [1 - e^{\theta_1 T(t_k)(1-\mu(t_k))}] \quad (2.23)$$

Si denotamos  $\Psi_1 = e^{-\theta_1}$ ,  $\Psi_2 = \theta_2/\theta_1$  y  $\Psi_3 = \theta_2 T(t_k)$ , la dinámica en tiempo discreto para la evolución de la corriente de entrada, descrita sobre los instantes de muestreo  $t_k$ , está dada por :

$$x(t_{k+1}) = \Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)} x(t_k) + \Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)} [\mu(t_k)T(t_k)\Psi_3 - \Psi_2] + \Psi_2 \quad (2.24)$$

Nótese que el modelo en tiempo discreto para la corriente de entrada muestreada es no lineal en las dos nueva entradas de control,  $\mu(t_k)$  y  $T(t_k)$ . Por otro lado la cantidad  $\Psi_3 T(t_k) = \theta_2 T(t_k)$  representa, para todos los instantes de tiempo  $t_k$ , una cota superior del “rizo” de la corriente de entrada en el inductor del circuito, esto es,  $x(t_k + \mu(t_k)T(t_k)) - x(t_k) = \theta_2 \mu(t_k)T(t_k) < \theta_2 T(t_k)$ .

El autovalor, variante en el tiempo, asociado con la dinámica de estado muestreado, dado por  $\Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)}$ , es positivo y no mayor que la unidad para todos los valores de  $\mu$  restringidos al intervalo unitario  $[0, 1]$ . El valor en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada, denotado por  $x_\infty^-$ , que corresponde a una función de razón de trabajo constante  $\mu_\infty$  y al valor mínimo posible del ciclo de trabajo  $T_{\min}$ , se obtiene de (2.24) como:

$$x_\infty^- = \frac{\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T(t_k)} [\mu_\infty T(t_k)\Psi_3 - \Psi_2] + \Psi_2}{1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)T(t_k)}} \quad (2.25)$$

Ahora, empleando la *formula de Cauchy*, podemos obtener la ecuación en tiempo discreto que describe la dinámica de las “esquinas superiores” del “rizo” presentado por la corriente de entrada,

$$\begin{aligned} x(t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T(t_{k+1})) &= \Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)} x(t_k + \mu(t_k)T(t_k)) + \Psi_3 \mu(t_{k+1})T(t_{k+1}) \\ &+ \Psi_2 (1 - \Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$\Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)}$  constituye el autovalor asociado con la dinámica anterior, el cual es estrictamente positivo y menor o igual que la unidad para valores de  $\mu(t_k)$  en el intervalo  $[0, 1]$ . El valor en estado estacionario de la porción "superior" de la trayectoria de estado, descrita por (2.26), que corresponde a valores constantes de la razón y del ciclo de trabajo  $\mu_\infty$  y  $T_{\min}$ , viene dado por:

$$x_\infty^+ = \frac{\mu_\infty T_{\min} \Psi_3 + \Psi_2 (1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}})}{1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}} \quad (2.27)$$

En base a las ecuaciones (2.25), (2.27) y al hecho que  $\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}} < 1$ , se puede confirmar que  $x_\infty^- < x_\infty^+$  para  $\mu_\infty \in [0, 1]$  y cualquier escogencia de  $T_{\min}$ .

El "rizo" en estado estacionario, denotado por  $\tau_\infty$ , puede escribirse como:

$$\tau_\infty = x_\infty^+ - x_\infty^- = \Psi_3 \mu_\infty T_{\min} \quad (2.28)$$

A partir de la expresión anterior vemos que no podemos relacionar a  $x_\infty^+$  y  $x_\infty^-$  independientemente del control en estado estacionario  $\mu_\infty$ , lo cual impide que se pueda expresar explícitamente el valor promedio, en estado estacionario, de la corriente de entrada en términos del valor de la corriente de entrada muestreada en estado estacionario.

El *valor promedio en estado estacionario* para la trayectoria de la corriente de entrada se define, igual que antes, como:

$$x_{av}(\infty) = x_\infty^- + \frac{1}{2} \tau_\infty \quad (2.29)$$

Empleando la expresiones (2.25) y (2.28) en (2.29) encontramos:

$$x_{av}(\infty) = \frac{[\Psi_3 \mu_\infty T_{\min} (1 + \Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}}) + 2\Psi_2 (1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}})]}{2 (1 - \Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}})} \quad (2.30)$$

Resulta imposible expresar el valor en estado estacionario correspondiente al límite inferior de la trayectoria de la corriente de entrada muestreada  $x_\infty^-$ , en términos del valor promedio en estado estacionario de la corriente de entrada  $x_{av}(\infty)$ , eliminando el control  $\mu_\infty$ . En consecuencia, se debe calcular primero numéricamente el valor de  $\mu_\infty$  que corresponde al valor deseado en estado estacionario de la corriente promedio de entrada  $X = x_{av}(\infty)$ , a partir de la expresión (2.30). Este valor calculado de la razón de trabajo requerida en estado estacionario debe ser sustituido en la expresión que nos permite obtener  $x_\infty^-(X)$  (2.25). Por medio de este procedimiento obtenemos el valor requerido en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada,  $x_\infty^-(X)$ .

Hemos mostrado que la solución requerida,  $x_\infty^-(X)$ , para la corriente de entrada en estado estacionario, en términos del estado estacionario de la corriente promedio de entrada,  $x_{av}(\infty) = X$ , siempre existe para todo  $\mu_\infty$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Además

tal solución es única. Manipulando la expresión (2.30) uno obtiene la siguiente ecuación equivalente:

$$\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}} = \frac{2X - \Psi_3\mu_\infty T_{\min} - 2\Psi_2}{2X + \Psi_3\mu_\infty T_{\min} - 2\Psi_2} \quad (2.31)$$

Recordemos que  $\Psi_1$  y  $\Psi_3$  son magnitudes positivas, y que  $\Psi_1^{T_{\min}} < 1$ . Consideremos ambos lados de la expresión (2.31) como funciones de  $\mu_\infty$ . La gráfica de la función de  $\mu_\infty$  situada en el lado izquierdo de (2.31) es continuamente creciente con una pendiente no-negativa y toma valores en el intervalo  $[\Psi_1^{T_{\min}}, 1]$  cuando  $\mu$  varía en  $[0, 1]$ . La gráfica de la función de  $\mu_\infty$  de la parte derecha de (2.31), continuamente decrece con una pendiente estrictamente negativa, cuando  $\mu_\infty$  varía de 0 a 1, desde el valor 1 hacia la cantidad  $M = (2X - \Psi_3 T_{\min} - 2\Psi_2) / (2X + \Psi_3 T_{\min} - 2\Psi_2)$  la cual es, ciertamente, menor que la unidad. De esta manera ambas funciones se interceptan, a lo sumo, en un punto en el intervalo  $[0, 1]$ , por lo tanto existe una solución única para  $\mu_\infty$ .

### Política de Control Estabilizante

El problema de estabilización para el convertidor "boost-derivado" consiste en la especificación de una estrategia de regulación PFM de la forma (2.2), tal que el valor promedio, en estado estacionario, de la trayectoria de la corriente de entrada  $x(t)$  se iguale a un valor constante deseado  $x_{av}(\infty) = X$ .

Se puede calcular implícitamente el control  $\mu(t_k)$  a partir del modelo en tiempo discreto (2.24) al forzar a  $x(t_k)$  a estabilizarse asintóticamente alrededor del valor  $x_\infty^-$ , correspondiente a  $X$ , el cual hemos denotado por  $x_\infty^-(X)$ .

Impondremos sobre el sistema controlado, un comportamiento lineal asintóticamente estable en lazo cerrado, de la forma:

$$x(t_{k+1}) = \alpha (x(t_k) - x_\infty^-(X)) + x_\infty^-(X) ; |\alpha| < 1 \quad (2.32)$$

Sustituyendo el lado derecho de la ecuación (2.24) en (2.32) y operando, encontramos la siguiente expresión transcendental:

$$\begin{aligned} [\Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))T(t_k)} - \alpha] x(t_k) + \Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))T(t_k)} [\mu_c(t_k)T(t_k)\Psi_3 - \Psi_2] + \\ + \Psi_2 - (1 - \alpha)x_\infty^-(X) = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

A partir de la ecuación anterior es posible obtener en forma numérica la función de razón de trabajo para cada instante de muestreo.

Hemos asumido que la función del ciclo de trabajo  $T(t_k)$  puede ser calculada como una función del error de estabilización, de manera similar a la descrita por la ecuación (2.18). La especificación del control se concentra entonces, en encontrar una función de razón de trabajo adecuada.

Reacomodando la ecuación anterior, hallamos la siguiente expresión equivalente para el controlador implícito:

$$\Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))T(t_k)} = \frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1 - \alpha)x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2 + \mu_c(t_k)T(t_k)\Psi_3} \quad (2.34)$$

El lado izquierdo de la expresión (2.34) varía, como función de  $\mu_c$ , desde la magnitud  $\Psi_1^{T(t_k)} < 1$  a 1, con  $\mu_c$  variando de 0 a 1. Para un valor dado de  $x(t_k)$ , y, por lo tanto, un determinado  $T(t_k)$ , el lado derecho de (2.34) toma valores, como función de  $\mu_c$ , en el intervalo:

$$\left[ \frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1 - \alpha)x_{\infty}^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2}, \frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1 - \alpha)x_{\infty}^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2 + \Psi_3 T(t_k)} \right] \quad (2.35)$$

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una de intersección entre las gráficas de las funciones, en el intervalo  $[0, 1]$ , está dada por la condición:

$$\frac{\alpha x(t_k) - \Psi_2 + (1 - \alpha)x_{\infty}^-(X)}{x(t_k) - \Psi_2 + \Psi_3 T(t_k)} < 1 \quad (2.36)$$

la cual equivale a:

$$x_{\infty}^-(X) < x(t_k) + \frac{\Psi_3 T(t_k)}{1 - \alpha} \quad (2.37)$$

En estado estacionario,  $x(t_k) = x_{\infty}^-(X)$ , por lo que la condición (2.37) se satisface de manera trivial, ya que  $\Psi_3 T_{\min} > 0$  y  $|\alpha| < 1$ . Así el controlador implícito descrito en (2.34) conduce a una solución única de la razón de trabajo  $\mu_{\infty}$ , la cual pertenece al intervalo  $[0, 1]$ .

En régimen transitorio, la expresión (2.37) no tiene mucho sentido, más aún si se escoge a  $\alpha$  como un número positivo no muy cercano a cero. Por lo tanto sin tomar en consideración la ecuación (2.37), podemos notar que el controlador implícito (2.34) *siempre* conduce a una solución única para  $\mu_c(t_k)$ , pero ésta no está, necesariamente, restringida al intervalo  $[0, 1]$ .

La función de razón de trabajo se encuentra al limitar, con la ayuda de la ecuación (2.4), función de razón de trabajo calculada al intervalo cerrado  $[0, 1]$ .

El esquema de regulación retroalimentado PFM para el convertidor "boost-derivado" basado en un modelo exacto en tiempo discreto de la corriente de entrada muestreada se expone en la figura 6.13.

**6.2 Simulación.** Para probar la robustez de la estrategia de regulación PFM basada en discretización exacta, se empleó el siguiente modelo perturbado del convertidor "boost-derivado":

$$\dot{x} = -\frac{R}{L}(1 - u)x + \left( \frac{E + \nu(t)}{L} \right) \quad (2.38)$$

donde  $\nu(t)$  es una señal de perturbación estocástica generada por el computador que representa un ruido aditivo, no modelado, en la fuente de voltaje.

Los valores de los parámetros que definen el convertidor son:

$$R = 2.8 \times 10^{-2} \Omega ; L = 1.0 \times 10^{-2} \text{ mH} ; E = 126 \text{ Volts}$$

La función del ciclo de trabajo se escogió de forma idéntica al ejemplo del convertidor "buck-derivado"

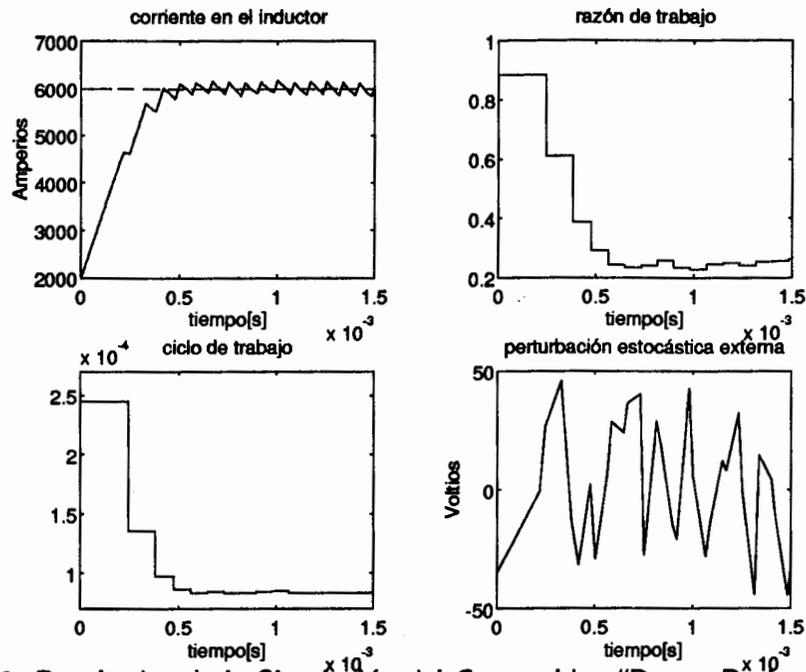


Figura 6.16: Resultados de la Simulación del Convertidor "Boost-Derivado", mediante PFM.

El valor deseado para la dinámica promedio fué ubicado en  $X = 6000$  A. El autovalor de la dinámica lineal en lazo cerrado,  $\alpha$ , se fijó en 0.3. Calculando se llega a que  $x_{\infty}^-(6000) = 5804.7$  A.

La figura 6.16 muestra la trayectoria de la corriente de entrada, la funciones de razón de trabajo  $\mu(t)$  y de ciclo de trabajo  $T(t)$  así como también la señal de perturbación  $\nu(t)$ .

Como podemos observar, a pesar de la señal de perturbación aleatoria, la estabilización de la corriente promedio de entrada se efectúa en forma bastante satisfactoria.

### 2.3 Convertidor "Buck-Boost-Derivado".

A continuación sintetizaremos todas las ecuaciones relevantes que conducen al diseño del controlador PFM estabilizante para el convertidor "buck-boost-derivado". La obtención de la función de razón de trabajo requerida está basada en un valor deseado de la corriente promedio de entrada  $X$ . La función del ciclo de trabajo es nuevamente generada por una ley de la forma (2.18).

**El modelo regulado mediante conmutación del convertidor "buck-boost-derivado".**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R}{L}(1-u)x - \frac{E}{L}u \\ &= -\theta_1(1-u)x - \theta_2u \end{aligned} \tag{2.39}$$

**Estrategia de regulación PFM para la posición del interruptor.**

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t_k \leq t < t_k + \mu(t_k)T(t_k) \\ 0 & \text{para } t_k + \mu(t_k)T(t_k) \leq t < t_k + T(t_k) \end{cases} \quad (2.40)$$

$$t_{k+1} = t_k + T(t_k); \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Una discretización exacta de la dinámica regulada PFM del convertidor "buck-boost-derivado".**

$$x(t_k + \mu(t_k)T(t_k)) = -\theta_2 \mu(t_k)T(t_k) + x(t_k) \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} x(t_k + T(t_k)) &= e^{-\theta_1(1-\mu(t_k))T(t_k)} [-\theta_2 \mu(t_k)T(t_k) + x(t_k)] \\ &= \Psi_1^{(1-\mu(t_k))T(t_k)} x(t_k) - \Psi_1^{(1-\mu(t_k))} \Psi_3 \mu(t_k)T(t_k) \end{aligned} \quad (2.42)$$

**Valor en estado estacionario de la corriente de entrada muestreada.**

$$x_{\infty}^- = -\frac{\Psi_1^{(1-\mu_{\infty})T_{\min}} \mu_{\infty} T_{\min} \Psi_3}{1 - \Psi_1^{(1-\mu_{\infty})T_{\min}}} \quad (2.43)$$

**Dinámicas en tiempo discreto de las "esquinas superiores" de la trayectoria de la corriente de entrada regulada PFM.**

$$x(t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T(t_{k+1})) = \Psi_1^{(1-\mu(t_k)T(t_k))} x(t_k + \mu(t_k)T(t_k)) - \Psi_3 \mu(t_{k+1})T(t_k) \quad (2.44)$$

**Valor en estado estacionario de las "esquinas superiores" de la trayectoria de la corriente de entrada.**

$$x_{\infty}^+ = -\frac{\mu_{\infty} \Psi_3 T_{\min}}{1 - \Psi_1^{(1-\mu_{\infty})T_{\min}}} \quad (2.45)$$

**Valor del "rizo" en estado estacionario.**

$$r_{\infty} = x_{\infty}^+ - x_{\infty}^- = -\Psi_3 \mu_{\infty} T_{\min} \quad (2.46)$$

**Valor promedio en estado estacionario de la trayectoria de la corriente de entrada.**

$$x_{av}(\infty) = x_{\infty}^- + \frac{1}{2} r_{\infty} = -\frac{[\Psi_3 \mu_{\infty} T_{\min} (1 + \Psi_1^{(1-\mu_{\infty})T_{\min}})]}{2 (1 - \Psi_1^{(1-\mu_{\infty})T_{\min}})} \quad (2.47)$$

Note que  $2X_{av}(\infty) < -\Psi_3 \mu_{\infty} T_{\min}$ .

**Existencia de una función de razón de trabajo para un valor deseado de la corriente de entrada promedio en estado estacionario.**

$$\Psi_1^{(1-\mu_\infty)T_{\min}} = \frac{2X_{av}(\infty) + \Psi_3\mu_\infty T_{\min}}{2X_{av}(\infty) - \Psi_3\mu_\infty T_{\min}} \quad (2.48)$$

Una solución para  $\mu_\infty$  siempre existe en  $[0, 1]$  a partir del hecho que  $X_{av}(\infty) < 0$  y  $\Psi_3 T_{\min} > 0$ . Ciertamente, en el intervalo  $[0, 1]$ , el lado izquierdo varía de  $\Psi_1^{T_{\min}} < 1$  a 1 mientras el lado derecho varía de 1 a  $(2X_{av}(\infty) + \Psi_3 T_{\min}) / (2X_{av}(\infty) - \Psi_3 T_{\min})$ , lo cual corresponde a un valor menor que 1, y puede aún ser negativo, por virtud del hecho que  $|2X_{av}(\infty) - \Psi_3 T_{\min}| > |2X_{av}(\infty) + \Psi_3 T_{\min}|$ .

**Dinámica deseada en lazo cerrado (asintóticamente estable).**

$$x(t_{k+1}) = \alpha (x(t_k) - x_\infty^-(X)) + x_\infty^-(X) ; |\alpha| < 1 \quad (2.49)$$

**Función del ciclo de trabajo.**

$T(t_k)$  es una función retroalimentada del error de estabilización como la definida en (2.18)

**Sintetizador implícito de la razón de trabajo.**

$$\Psi_1^{(1-\mu_c(t_k))T(t_k)} = \frac{\alpha x(t_k) + (1 - \alpha) x_\infty^-(X)}{x(t_k) - \Psi_3 \mu_c(t_k) T(t_k)} \quad (2.50)$$

Dado  $x(t_k)$  una solución para  $\mu_c(t_k)$  existe, en el intervalo  $[0, 1]$  sí, y solo sí, la siguiente condición se mantiene:

$$x_\infty^-(X) < x(t_k) - \frac{\Psi_3 T(t_k)}{1 - \alpha} \quad (2.51)$$

la cual se puede interpretarse de forma similar a (2.37) y es trivialmente satisfecha en estado estacionario.

**6.3 Simulación.** Simulaciones digitales fueron desarrolladas a partir del siguiente modelo perturbado del convertidor "buck-boost-derivado" conjuntamente con el sintetizador de la razón de trabajo propuesto,

$$\dot{x} = -\frac{R}{L}(1-u)x - \left(\frac{E + v(t)}{L}\right)u \quad (2.52)$$

Los valores de los parámetros del convertidor y del autovalor de la la dinámica impuesta en lazo cerrado, así como la función del ciclo de trabajo fueron tomados igual que en el caso anterior. El valor deseado en estado estacionario para la corriente promedio de entrada se colocó en  $-1500$  A. Se encontró  $x_\infty^-(-1500) = -1304$  A. En la figura 6.17 se muestran los resultados obtenidos.

□ □ □

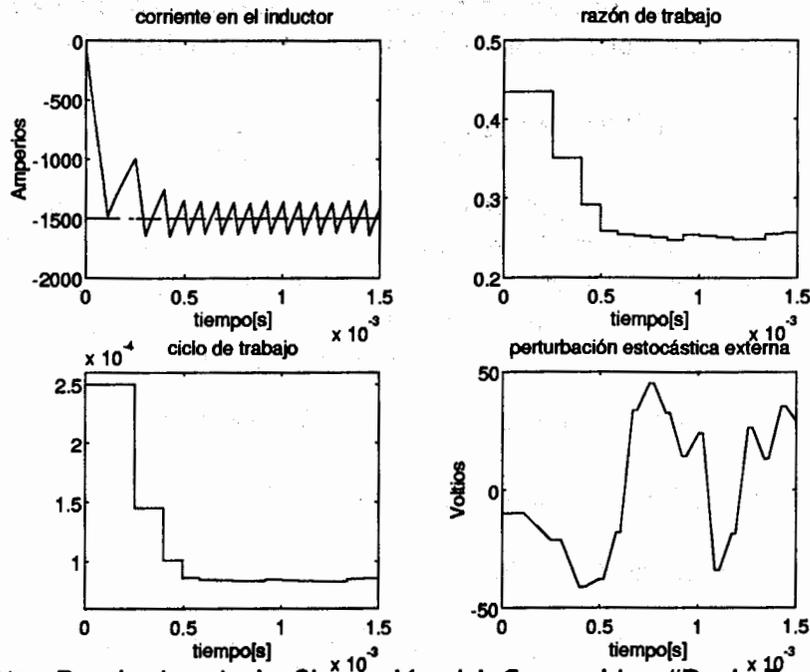


Figura 6.17: Resultados de la Simulación del Convertidor "Buck-Boost-Derivado", mediante PFM.

En el desarrollo de la sección, se ha presentado los fundamentos de una discretización exacta para el problema de estabilización PFM de la corriente de entrada, en las versiones derivadas de los convertidores "buck", "boost" y "buck-boost". Se propuso un esquema de control basado en PFM, el cual considera una muestra discreta del error de retroalimentación y, mediante una función *fija* lineal, se determina el período de muestreo variable, dentro de los límites de saturación. Por otra parte, la razón de trabajo se especificó como un control *linealizante* retroalimentado, en tiempo discreto, que conduce la dinámica del error, en lazo cerrado, a la estabilidad asintótica.

□ □ □

### 3 Seguimiento de Señales vía Modelo Promedio en Tiempo Discreto.

El problema de seguimiento de una señal de referencia variante en el tiempo, en los convertidores derivados del tipo "buck", "boost" y "buck-boost", es tratado a través de su discretización exacta mediante la inclusión de modelos promedios, en tiempo discreto, para las trayectorias de la corriente de entrada regulada por PWM. Los modelos promedios son obtenidos mediante un procedimiento de eliminación del estado en las expresiones que describen el valor medio de la corriente de entrada en los instantes de muestreo y al final del pulso asociado con la función de posición del interruptor. La eliminación del estado conlleva a una representación no-Kalmaniana de la dinámica de la corriente promedio de entrada. Los modelos encontrados conducen a un sintetizador de la razón de trabajo dinámico, *explícito* y no lineal.

□ □ □

Definimos el valor *promedio* de la trayectoria de la corriente de entrada, en el instante  $t_k$ , como:

$$z(t_k) = x(t_k) + \frac{1}{2} [x(t_k + \mu(t_k)T) - x(t_k)] = \frac{1}{2} [x(t_k) + x(t_k + \mu(t_k)T)] \quad (3.1)$$

**Observación :** Note que la asociación del valor promedio, denotado por  $z(t_k)$ , con el instante de tiempo  $t_k$ , y definido por  $\frac{1}{2} [x(t_k) + x(t_k + \mu(t_k)T)]$ , es completamente arbitraria. De hecho uno podría seleccionar un instante intermedio del intervalo,  $[t_k, t_k + \mu(t_k)T]$ , para representar el valor de tiempo correspondiente. Sin embargo, esta última convención solamente complicaría la representación aunado al hecho de no ser substancialmente diferente de la primera selección.

Similarmente, el valor promedio de la corriente de entrada en el instante  $t_k + T$  está dado por:

$$z(t_{k+1}) = \frac{1}{2} [x(t_{k+1}) + x(t_{k+1} + \mu(t_{k+1})T)] \quad (3.2)$$

Una dinámica promedio PWM se puede conseguir de (3.1) y (3.2) por medio de un procedimiento de eliminación del estado. De igual forma, observe que para cada uno de los convertidores tratados, la expresión (3.1) para  $z(t_k)$  puede ser escrita en términos del estado muestreado  $x(t_k)$  y de la razón de trabajo  $\mu(t_k)$  en el instante  $t_k$ . En forma similar, la expresión (3.2) para  $z(t_k + 1)$  puede ser también escrita en términos de  $x(t_k)$  y de la función de razón de trabajo  $\mu$  en los instantes  $t_k$  y  $t_k + 1$ , es decir,  $\mu(t_k)$  y  $\mu(t_k + 1)$ . De las ecuaciones resultante para  $z(t_k)$  y  $z(t_k + 1)$  procedemos a eliminar el estado  $x(t_k)$  y así obtener  $z(t_k + 1)$  como una función de  $z(t_k)$  y de las funciones de la razón de trabajo  $\mu(t_k)$ ,  $\mu(t_k + 1)$ .

A causa de la linealidad en el estado asociado con toda la expresiones mencionadas, la dinámica promedio PWM resultante es también lineal en el estado  $z(t_k)$ .



Similarmente, sustituimos las relaciones (1.4), (1.6) y (1.8):

$$\begin{aligned}x(t_{k+1}) &= \Psi_1 x(t_k) + \Psi_1 \Psi_2 (\Psi_1^{-\mu_k} - 1) \\x(t_k + \mu_k T) &= \Psi_1^{\mu_k} x(t_k) + \Psi_2 (1 - \Psi_1^{\mu_k}) \\x(t_{k+1} + \mu_{k+1} T) &= \Psi_1^{\mu_{k+1}} \Psi_1^{(1-\mu_k)} x(t_k + \mu_k T) + \Psi_2 (1 - \Psi_1^{\mu_{k+1}})\end{aligned}$$

en la ecuación (3.2), encontrando la siguiente expresión para  $x(t_k)$  :

$$\begin{aligned}x(t_k) &= \frac{2 z(t_{k+1})}{\Psi_1 [1 + \Psi_1^{\mu_{k+1}}]} \\&+ \frac{\Psi_2}{\Psi_1 [1 + \Psi_1^{\mu_{k+1}}]} \left\{ \Psi_1^{1-\mu_k} (1 - \Psi_1^{\mu_k}) (1 + \Psi_1^{\mu_{k+1}}) + (1 - \Psi_1^{\mu_{k+1}}) \right\} \quad (3.5)\end{aligned}$$

Finalmente igualamos las ecuaciones (3.4) y (3.5). La dinámica promedio se constituye por la ecuación recursiva que surge al colocar a  $z(t_{k+1})$  como una función de  $z(t_k)$  y de las razones de trabajo  $\mu(t_k)$  y  $\mu(t_{k+1})$ . Resumiendo, después de las manipulaciones previamente indicadas obtenemos:

$$\begin{aligned}z(t_{k+1}) &= \Psi_1 \left( \frac{1 + \Psi_1^{\mu(t_{k+1})}}{1 + \Psi_1^{\mu(t_k)}} \right) z(t_k) + \\&+ \frac{1}{2} \Psi_2 \left\{ \frac{\Psi_1^{1-\mu(t_k)} (1 - \Psi_1^{\mu(t_k)}) (1 + \Psi_1^{\mu(t_{k+1})}) + (1 - \Psi_1^{\mu(t_{k+1})}) (1 + \Psi_1^{\mu(t_k)})}{1 + \Psi_1^{\mu(t_k)}} \right\} \quad (3.6)\end{aligned}$$

Un hecho interesante, el cual hace muy peculiar al modelo promedio, es que la fórmula recursiva resultante, obtenida para la evolución de los valores de corriente promedio, requiere los valores de la función de razón de trabajo, es decir, de la variable de control, en dos instantes de muestreo consecutivos.

Supongase que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(t_k)$  existe y asumimos que está dado por el valor constante  $\mu_\infty$ , entonces, evidentemente,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(t_k) = \mu_\infty$  y el correspondiente valor en estado estacionario,  $z_\infty$ , de la corriente promedio de entrada, calculado de (3.6), está dado por:

$$z_\infty = \frac{1}{2} \left( \frac{\Psi_2}{1 - \Psi_1} \right) (1 - \Psi_1^{\mu_\infty}) (1 + \Psi_1^{1-\mu_\infty}) \quad (3.7)$$

el cual corresponde exactamente con el valor en estado estacionario  $x_{av(\infty)}$  calculado en (1.13) y encontrado a partir de consideraciones diferentes.

### Seguimiento de la Corriente Promedio de Entrada

Sea  $z_d(t)$  la representación de una señal de entrada de referencia deseada variante en el tiempo. Se desea que la corriente promedio de entrada  $z(t_k)$  siga asintóticamente los valores muestreados,  $z_d(t_k)$  de la señal de entrada de referencia.

Denotemos por  $e(t_k)$  al error promedio de seguimiento en el instante de tiempo  $t_k$ , dado por  $e(t_k) = z(t_k) - z_d(t_k)$ . Entonces, la siguiente dinámica del error de seguimiento puede ser impuesta sobre el sistema en lazo cerrado :

$$e(t_{k+1}) = \alpha e(t_k) ; |\alpha| < 1 \quad (3.8)$$

En términos de la corriente promedio de entrada, tal dinámica resulta en la siguiente expresión :

$$z(t_{k+1}) = \alpha (z(t_k) - z_d(t_k)) + z_d(t_{k+1}) \quad (3.9)$$

Puesto que  $z_d(t_k + 1)$  se asume conocida de antemano, la ecuación precedente no tiene la conotación de un *sistema acausal*.

Sustituyendo el lado derecho de la expresión (3.6) dentro de (3.9), y resolviendo para  $\mu(t_k + 1)$  uno obtiene el siguiente controlador retroalimentado, no lineal, dinámico, variante en el tiempo, o sintetizador de la razón de trabajo, para el problema de seguimiento de la corriente promedio de entrada.

$$\mu(t_{k+1}) = \frac{1}{\ln \Phi_1} \ln \left\{ \frac{2(1 + \Psi_1^{\mu(t_k)})}{\Psi_2 [\Psi_1^{1-\mu(t_k)}(1 - \Psi_1^{\mu(t_k)}) - (1 + \Psi_1^{\mu(t_k)})] + 2\Psi_1 z(t_k)} \times \right. \\ \left. \left[ -\frac{1}{2}\Psi_2 \left( \frac{\Psi_1^{1-\mu(t_k)}(1 - \Psi_1^{\mu(t_k)}) + (1 + \Psi_1^{\mu(t_k)})}{1 + \Psi_1^{\mu(t_k)}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{\Psi_1}{1 + \Psi_1^{\mu(t_k)}} - \alpha \right) z(t_k) - \alpha z_d(t_k) + z_d(t_{k+1}) \right] \right\} \quad (3.10)$$

**Observación :** La inicialización del anterior controlador, requiere la especificación de  $z(t_0)$  lo cual involucra el conocimiento de  $x(t_0)$  y  $\mu(t_0)$ . La corriente de entrada inicial  $x(t_0)$  puede ser medida, o simplemente ubicada mediante la descarga previa de la energía inicial almacenada en el inductor. La razón de trabajo inicial  $\mu(t_0)$ , puede ser seleccionada arbitrariamente. Esto implica que las cantidades  $x(t_0)$  y  $x(t_0 + \mu_0 T)$  se asumen inicialmente conocidas. Note también que una política de control PWM en base al modelo promedio (3.3) necesariamente requiere la medición en línea de la corriente promedio de entrada, es decir, valores de  $x(t)$  deben ser medidos tanto al final de cada pulso, dentro del intervalo de muestreo, como al inicio de cada período de muestreo.

La función de razón de trabajo calculada nunca debe exceder los valores de los límites naturales representados por el intervalo cerrado  $[0,1]$ . Las posibilidades de saturación de la actual función de razón de trabajo depende de la derivada temporal de la señal de referencia, del autovalor impuesto en lazo cerrado y de los parámetros del circuito. Para técnicas de promediación más convencionales ( ver Sira-Ramírez

*et al* [55]) uno puede obtener una estimación de las limitaciones en el seguimiento del circuito.

**6 .1 Simulación.** La política de seguimiento retroalimentada PWM previamente derivada, sustentada en una discretización exacta y en el modelo promedio introducido, se utiliza sobre el mismo modelo perturbado del convertidor “buck-derivado” que presentamos en (1.19).

Se desea seguir una señal de referencia “trapezoidal”, como se muestra en la figura 6.19, con  $z_{\max} = 1237$  A.

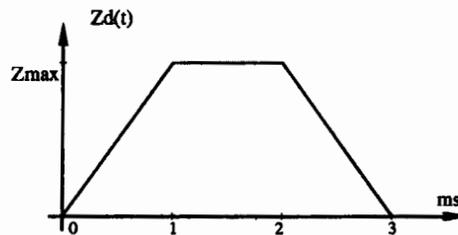


Figura 6.19: Señal Deseada Trapezoidal de la Corriente de Entrada.

Esta señal de referencia es expresada como:

$$z_d(t) = \begin{cases} 1237t & \text{para } 0 < t \leq 1 \text{ ms} \\ 1237 & \text{para } 1 < t \leq 2 \text{ ms} \\ 1237 - 1237(t - 2) & \text{para } 2 < t \leq 3 \text{ ms} \end{cases}$$

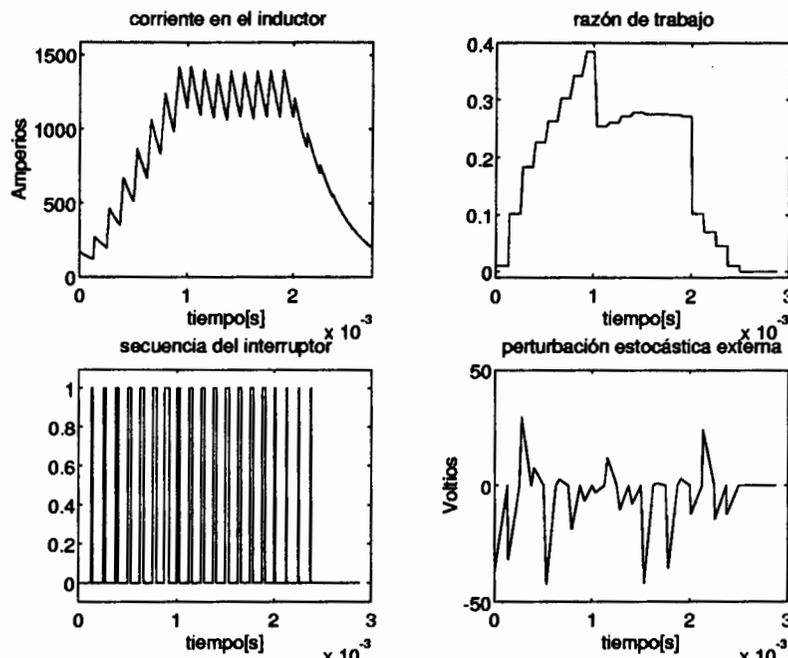


Figura 6.20: Resultados de Simulación para el Problema de Seguimiento, en el “Convertidor Buck-Derivado”.

La figura 6.20, muestra la trayectoria controlada de la corriente de entrada, la función de razón de trabajo  $\mu(t)$  y su correspondiente función de la posición del

interruptor  $u(t)$ . En esta figura también se expone la señal de perturbación  $\nu(t)$ . Como se puede observar el controlador obtenido permite que la corriente promedio de entrada siga, bastante bien, a la señal de referencia deseada, siempre y cuando la función de razón de trabajo calculada no tome valores fuera del intervalo  $[0,1]$ . Note que en las proximidades al final del seguimiento horizontal la función de razón de trabajo  $\mu$  se “satura” al valor cero. Este problema puede ser evitado por disminuir convenientemente el valor máximo de la señal de referencia deseada  $z_d(t)$  así como su pendiente sobre la porción “desendiente” del trapecoide.

□ □ □

### 3.2 Convertidor “Boost-Derivado”.

La dinámica del valor promedio de la corriente de entrada,  $z(t_k)$ , para el convertidor “boost-derivado” se puede obtener siguiendo un procedimiento similar al empleado para el convertidor “buck-derivado”. Sustituyendo (1.21) en (3.1), se logra una expresión para  $z(t_k)$  en términos de  $x(t_k)$  y  $\mu(t_k)$ . Ahora, si sustituimos (1.23) y (1.25) en (3.2) se puede obtener una ecuación para  $z(t_{k+1})$  la cual depende de  $x(t_k)$ ,  $\mu(t_k)$  y  $\mu(t_{k+1})$ . Entonces, se procede a eliminar el estado  $x(t_k)$  de las expresiones encontradas. La formula recursiva resultante está dada por :

$$z(t_{k+1}) = \Psi_1^{1-\mu(t_k)} z(t_k) - \Psi_1^{1-\mu(t_k)} \Psi_2 + \Psi_2 + \frac{1}{2} \Psi_3 \left( \Psi_1^{1-\mu(t_k)} \mu(t_k) + \mu(t_{k+1}) \right) \quad (3.11)$$

la cual, como en el caso anterior, constituye una representación de estado no-Kalmaniana o más propiamente, una *representación generalizada en el espacio de estados*, para la dinámica de la corriente promedio (Fliess [36]).

Supongase que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(t_k)$  existe y asumimos que está dado por el valor constante  $\mu_\infty$ , entonces, el correspondiente valor en estado estacionario,  $z_\infty$ , de la corriente promedio de entrada, calculado de (3.11), está dado por:

$$z_\infty = \frac{[\Psi_3 \mu_\infty (1 + \Psi_1^{1-\mu_\infty}) + 2\Psi_2 (1 - \Psi_1^{1-\mu_\infty})]}{2(1 - \Psi_1^{1-\mu_\infty})} \quad (3.12)$$

el cual corresponde exactamente con el valor en estado estacionario  $x_{av(\infty)}$ , calculado en (1.29) a partir de consideraciones diferentes.

#### Seguimiento de la Corriente Promedio de Entrada

Sea  $z_d(t)$  la representación de una señal de entrada de referencia deseada variante en el tiempo. Se desea que la corriente promedio de entrada  $z(t_k)$  siga asintóticamente los valores muestreados,  $z_d(t_k)$  de la señal de entrada de referencia.

Al igual que antes, imponemos la siguiente dinámica de la corriente de entrada sobre el sistema en lazo cerrado,

$$z(t_{k+1}) = \alpha(z(t_k) - z_d(t_k)) + z_d(t_{k+1}) \quad (3.13)$$

donde asumimos que  $z_d(t_{k+1})$  es conocido de antemano.

Sustituyendo la ecuación (3.11) en (3.13), y despejando  $\mu(t_{k+1})$ , se obtiene el siguiente controlador dinámico, no lineal, retroalimentado y variante en el tiempo, que nos permite el seguimiento de la corriente promedio de entrada,

$$\mu(t_{k+1}) = \frac{2}{\Psi_3} \left[ (\alpha - \Psi_1^{1-\mu(t_k)}) z(t_k) - \Psi_1^{1-\mu(t_k)} \left( \frac{1}{2} \Psi_3 \mu(t_k) - \Psi_2 \right) - \Psi_2 - \alpha z_d(t_k) + z_d(t_{k+1}) \right] \quad (3.14)$$

**Observación :** La inicialización del controlador anterior es efectuada de manera similar a el caso del convertidor “buck-derivado”.

**6 .2 Simulación.** La política de seguimiento retroalimentada PWM previamente derivada, sustentada en una discretización exacta y en el modelo promedio introducido, se empleó sobre el mismo modelo perturbado del convertidor “boost-derivado” que presentamos en (1.37).

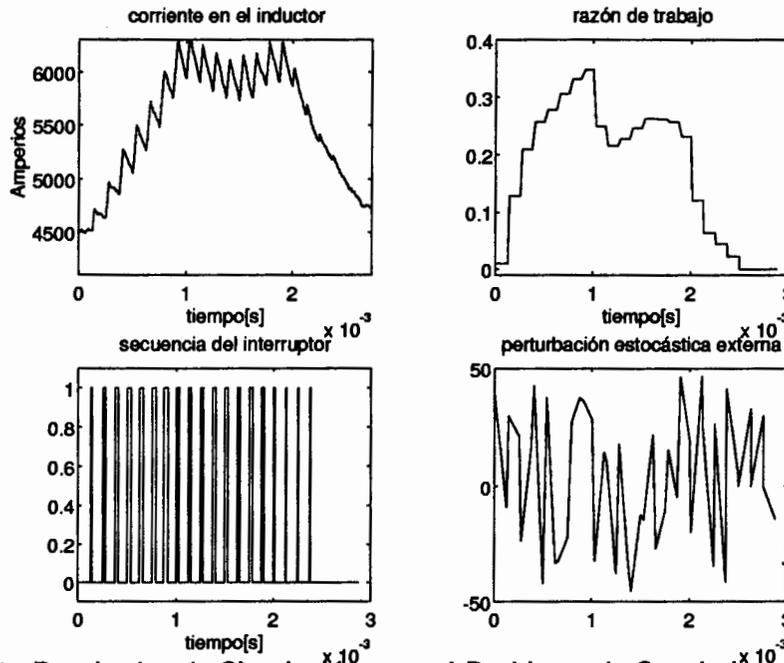


Figura 6.21: Resultados de Simulación para el Problema de Seguimiento, en el Convertidor “Boost-Derivado”.

Se requirió el seguir una señal de referencia “trapezoidal”, similar a la que se muestra en la figura 6.19, con  $z_{\max} = 6000$  A. En conformidad con el caracter “step-up” del convertidor “boost-derivado”, la señal de referencia  $z_d(t)$  está representada por:

$$z_d(t) = \begin{cases} 4500 + 1500t & \text{para } 0 < t \leq 1 \text{ ms} \\ 6000 & \text{para } 1 < t \leq 2 \text{ ms} \\ 6000 - 1500(t - 2) & \text{para } 2 < t \leq 3 \text{ ms} \end{cases}$$

La figura (6.21), muestra la trayectoria controlada de la corriente de entrada, la función de razón de trabajo  $\mu(t)$  y su correspondiente función de la posición del interruptor  $u(t)$ . En esta figura también se expone la señal de perturbación  $\nu(t)$ . Como se puede observar el controlador obtenido permite que la corriente promedio de entrada siga, bastante bien, a la señal de referencia deseada, mientras la función de razón de trabajo calculada no tome valores fuera del intervalo  $[0,1]$ .

□ □ □

### 3.3 Convertidor “Buck-Boost-derivado”.

En esta sección resumiremos la formulación que conlleva a un regulador PWM en tiempo discreto para el problema de seguimiento de una señal de referencia para el caso del convertidor “buck-boost-derivado”.

**Representación de estado generalizado de la dinámica de la corriente promedio de entrada.**

$$z(t_{k+1}) = \Psi_1^{1-\mu(t_k)} z(t_k) - \frac{1}{2} \Psi_3 \left( \Psi_1^{1-\mu(t_k)} \mu(t_k) + \mu(t_{k+1}) \right) \quad (3.15)$$

**Valor en estado estacionario de la corriente promedio de entrada.**

$$z_\infty = -\frac{\Psi_3 \mu_\infty \left( 1 + \Psi_1^{(1-\mu_\infty)} \right)}{2 \left( 1 - \Psi_1^{1-\mu_\infty} \right)} \quad (3.16)$$

la cual coincide con (1.46)

**Dinámica lineal deseada en lazo cerrado.**

$$z(t_{k+1}) = \alpha \left( z(t_k) - z_d(t_k) \right) + z_d(t_{k+1}) \quad (3.17)$$

**Sintetizador dinámico de la razón de trabajo.**

$$\mu(t_{k+1}) = \frac{2}{\Psi_3} \left[ \left( \Psi_1^{1-\mu(t_k)} - \alpha \right) z(t_k) - \frac{1}{2} \Psi_1^{1-\mu(t_k)} \Psi_3 \mu(t_k) + \alpha z_d(t_k) - z_d(t_{k+1}) \right] \quad (3.18)$$

**6.3 Simulación.** La política de seguimiento retroalimentada PWM previamente derivada se emplea sobre el modelo perturbado del convertidor “buck-boost-derivado” (1.51).

Una señal de referencia “trapezoidal” invertida con  $z_{max} = -1500A$ , fué usada en este caso, y ella está dada por :

$$z_d(t) = \begin{cases} -1500t & \text{para } 0 < t \leq 1 \text{ ms} \\ -1500 & \text{para } 1 < t \leq 2 \text{ ms} \\ -1500 + 1500(t - 2) & \text{para } 2 < t \leq 3 \text{ ms} \end{cases}$$

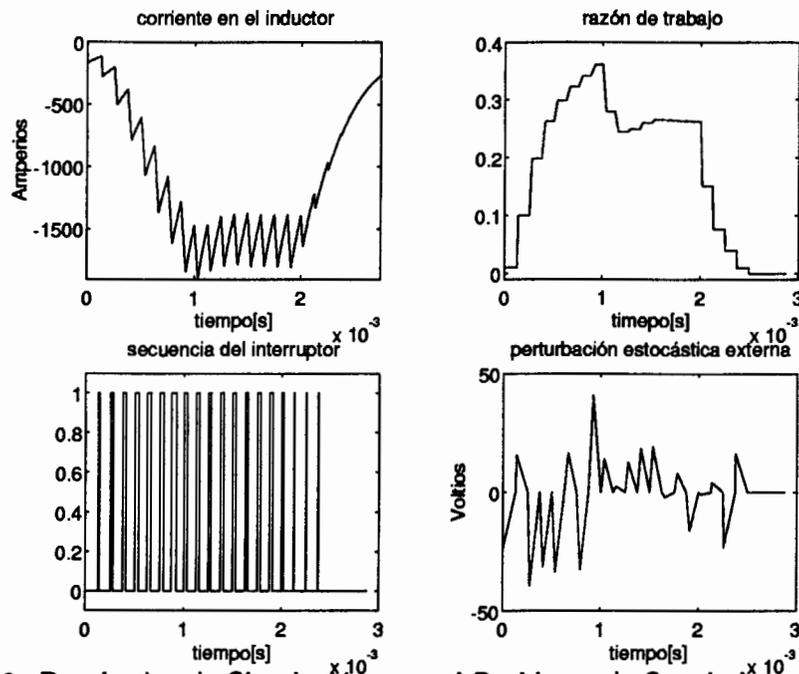


Figura 6.22: Resultados de Simulación para el Problema de Seguimiento, en el Convertidor "Buck-Boost-Derivado".

En la figura 6.22 se muestran los resultados obtenidos, y en base a ellos podemos afirmar que el controlador propuesto efectúa el seguimiento de la señal de referencia dada mientras exhibe un alto grado de robustez con respecto a la señal de perturbación estocástica externa.

□ □ □

Como pudimos observar, el problema de seguimiento fué resuelto satisfactoriamente, mediante la determinación de controladores de seguimientos basados en los modelos promedios de la corriente de entrada en el inductor. La validez de esos modelos promedios fué verificada a través el cálculo del comportamiento promedio en estado estacionario de cada convertidor. Los valores, en estado estacionario, de la corriente promedio de entrada predichos por los modelos promedios propuestos, corresponden exactamente con los valores encontrados mediante consideraciones sobre el estado estacionario del "rizo" de la corriente de entrada asociada con las trayectoria reguladas vía PWM. Los controladores diseñados son de naturaleza explícita, por lo que no se requirió emplear resolución numérica.

□ □ □