

CAPÍTULO 2

CARACTERIZACIÓN TÉRMICA DEL EDIFICIO COMO SISTEMA DINÁMICO

ÍNDICE DEL CAPÍTULO 2

CARACTERIZACIÓN TÉRMICA DEL EDIFICIO COMO SISTEMA DINÁMICO

2.1. MODELO DEL COMPORTAMIENTO TÉRMICO DINÁMICO DE UN EDIFICIO.	3
2.2. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA BASADA EN LA ANALOGÍA TERMO ELÉCTRICA.	6
2.3. DEDUCCIÓN DE LA FUNCIÓN CAPACIDAD CALORÍFICA EFECTIVA $C(\omega)$.	9
2.3.1. Incidencia de la capacidad calorífica en la dinámica térmica del edificio :	9
2.3.2. Evolución de la temperatura en el interior de un muro homogéneo sometido a una excitación térmica sinusoidal.	10
2.3.3. Balance de flujos térmicos en la superficie de un muro .	16
2.3.4. Capacidad calorífica efectiva $C(\omega)$ y rango de validez.	18
2.4. OBTENCIÓN DE LA CURVA T.F. EXPERIMENTAL :	21
2.4.1. Obtención de las transformadas de Fourier de las variables ambientales.	21
2.4.2. Obtención de la T. F. de efectos a largo plazo.	23
2.4.3. Comparación de la curva T.F. teórica con la T.F. experimental.	24
2.4.4. Obtención de la T.F. experimental de efectos a corto plazo.	27
2.4.5. Obtención de la T.F. de múltiples efectos ambientales exteriores.	28
2.5. VALIDACIÓN DEL MODELO.	34
2.6. REFERENCIAS.	38

CAPÍTULO 2

CARACTERIZACIÓN TÉRMICA DEL EDIFICIO COMO SISTEMA DINÁMICO

2.1. MODELO DEL COMPORTAMIENTO TÉRMICO DINÁMICO DE UN EDIFICIO.

En los numerosos modelos térmicos dinámicos del comportamiento de un edificio, según lo enumerado en el capítulo anterior, la formulación de las ecuaciones y la resolución del modelo se puede efectuar, dependiendo del grado de complejidad del mismo, esencialmente según dos métodos: tradicional o simplificado.

En el método tradicional se plantea generalmente la ecuación de difusión del calor simplificada, para representar la conducción en los muros, otra ecuación para efectos de convección entre aire y superficies, y ecuaciones de radiación entre superficies. Se plantean ecuaciones de acoplamiento entre los diferentes efectos y elementos. En este modelo de la dinámica térmica del edificio intervienen las propiedades físicas de los materiales constructivos, y se plantean separadamente los diferentes tipos de transferencias térmicas. Los diferentes procesos y subprocesos de transferencia de calor se extrapolan luego hacia un modelo del edificio completo. Los numerosos parámetros y la resolución de las ecuaciones le otorga a este tipo de modelo cierta complejidad (Se pueden encontrar referencias sobre este tipo de formulación en el capítulo 1).

Los modelos simplificados, en cambio, efectúan una serie de presunciones sobre los fenómenos físicos, que hacen que se faciliten los cálculos, con un grado aceptable de precisión en los resultados. Probablemente los más utilizados son los que se basan en la analogía termo-eléctrica. La misma utiliza una analogía entre un circuito eléctrico y la transferencia de calor a través de elementos multi-capas, que representan las regiones de temperatura uniforme mediante nodos. Para cada uno de estos nodos, conectados por resistencias y capacitores, se plantea una ecuación, formándose así un sistema de ecuaciones de balance energético. Este método de la red eléctrica equivalente (o analogía termo eléctrica), que correlaciona en este caso datos meteorológicos y temperatura

interior, posibilita la obtención de parámetros térmicos equivalentes (ETP), que caracterizarían al sistema físico. Una simplificación bastante usada^{1,2}, es la de considerar todo el edificio como un único sistema global que almacena calor, con lo cual la capacidad calorífica de los materiales intervinientes se encontraría concentrada en un único nodo. Usando este tipo de modelo se puede plantear una ecuación diferencial, que contenga una única constante de tiempo igual a RC , donde R es la resistencia global y C la capacidad calorífica global, como en el modelo de Sonderegger. Sin embargo, este modelo sólo puede describir variaciones a largo plazo, y no es capaz de evidenciar la dinámica térmica a corto plazo³. Como el mismo Sonderegger sugiere, una mejora del modelo debería considerar al menos dos constantes de tiempo.

Sonderegger fue variando este modelo simple, subdividiéndolo, pero considerando siempre una única C global, como en sus modelos $2R1C$ y $3R1C$, también utilizados por otros autores, como Hammarsten⁴ y otros citados por A. Rabl⁶, como Nordford et al. y Wilson et al. Sonderegger sugirió además, que los ETP, y sobre todo la masa térmica equivalente, dependen de la distribución frecuencial de las condiciones de contorno (variables meteorológicas).

Rabl⁵ propuso entonces una red $2R2C$, que estaría en condiciones de representar un sistema térmico con dos constantes de tiempo, una a corto y otra a largo plazo. A pesar de que Rabl⁶ reconoce la claridad en la interpretación física del método de la red eléctrica equivalente, opina que existen métodos más complicados pero más poderosos para caracterizar un edificio. Respecto a los ETP, destaca el carácter variable de la capacidad de un muro de almacenar calor, que varía sobre todo con la frecuencia de las variables meteorológicas exteriores.

La analogía termo eléctrica se ha utilizado también para la formulación de modelos estadísticos como el ARMA (AutoRegressive Moving Average), pero en este caso los ETP dejan de tener significado físico, sino que más bien son un instrumento para el cálculo posterior de estas características físicas (Subbarao,1984, citado también por Rabl⁶).

Madsen y Holst³ propusieron también un modelo de dos resistencias y dos capacitores ($2R2C$), conteniendo dos constantes de tiempo, y que teóricamente sería capaz de describir la dinámica del corto y largo plazo. El modelo utiliza una ecuación diferencial y agrega un término estocástico, que representa el ruido introducido a través de factores como: la modelización, el viento y errores de medición. Este modelo "estocástico de estado lineal espacial a tiempo continuo" es un modelo continuo para el tratamiento de datos discretos, lo cual constituye una mejora respecto de otros métodos,

en que el modelo formulado es discreto (diferencias finitas y modelos estadísticos tipo ARMA). Se pueden obtener como parámetros térmicos equivalentes las resistencias, las capacidades caloríficas y la apertura solar. El modelo evidencia satisfactoriamente el comportamiento a corto y largo plazo, aunque la precisión de los resultados se debe sobre todo al término estocástico “de ajuste”. La formulación satisface los objetivos matemáticos, aunque posea escasa equivalencia física.

Por comparación, en otro campo de la física y la ingeniería, en que también se formulan modelos en que intervienen fenómenos de transferencia de calor, como es la calorimetría, es posible también distinguir los siguientes tipos de métodos de resolución: completos o analíticos (extensos), métodos numéricos (en que se pierde el significado físico), o bien los simplificados⁷. En cualquiera de estos casos, el calorímetro queda caracterizado a través de su función de transferencia y/o sus constantes de tiempo.

El método simplificado utiliza la analogía termo eléctrica (analogía RC), con la que se plantean también ecuaciones diferenciales (ecuación de Tian para n elementos). Se obtienen tantas constantes de tiempo como elementos en que se ha decidido subdividir el dominio, por lo que se denomina también modelo de constantes de tiempo localizadas. La función de transferencia del sistema se puede obtener tanto analítica como experimentalmente. En este último caso, se calcula la función de transferencia midiendo temperaturas en el calorímetro, como respuesta a excitaciones conocidas, como por ejemplo un impulso de Dirac o un escalón de Heaviside^{8,9}.

La propuesta que se formula para la metodología de análisis y caracterización que se utilizará en la presente tesis, partiendo de datos experimentales de edificios reales habitados, es comparar la respuesta obtenida con la calculada utilizando la analogía RC, aplicada a un modelo muy simple, por lo que su interpretación tendrá una relación directa con los fenómenos físicos. Para la formulación matemática se utilizarán conceptos teóricos de intercambio térmico, y a partir de datos experimentales del edificio, se obtendrá la Función de Transferencia (T.F.) global del mismo, que servirá para su caracterización. El modo en que las magnitudes ambientales intervienen en el modelo, se explicará a lo largo del presente capítulo.

2.2. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA BASADA EN LA ANALOGÍA TERMO-ELÉCTRICA.

Se expondrá primeramente una función de transferencia teórica para el modelo propuesto, para poder luego compararla con la función de transferencia experimental del sistema real.

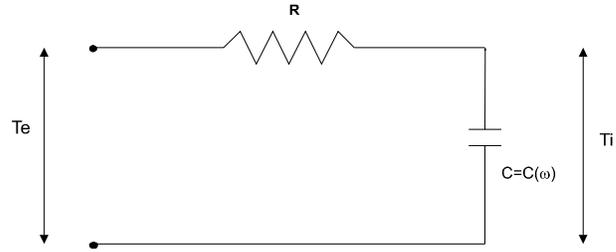
El modelo más simple que es posible plantear según el método de la red eléctrica equivalente es un circuito con 1 resistencia y 1 capacitor. Para poder hallar los parámetros *globales* de todo el edificio, se partirá en nuestro caso de este tipo de circuito, que representa la totalidad de la capacidad calorífica (capacitancia) y la totalidad de la resistencia térmica (resistencia eléctrica), concentradas en un solo medio. El planteamiento del cálculo térmico en forma global, permitirá obtener resultados también globales, de todo el edificio, utilizando valores de temperatura exterior (T_e) e interior (T_i) del mismo. Estos datos constituyen respectivamente la entrada y la salida del sistema térmico “edificio”.

El modelo de la red eléctrica equivalente es un modelo de elementos discretos, siendo la discretización cada vez mayor si se va subdividiendo el sistema (modelo 2R1C, 3R1C, 1R2C, 2R2C, etc.). Si se desean extraer ETP de un modelo de este tipo planteando modelos matemáticos continuos, es probable que no puedan obtenerse los parámetros con la precisión requerida, a pesar de complicar la resolución incluyendo más y más elementos, y con ellos, ecuaciones.

La utilización de modelos físicos discretos con modelos matemáticos continuos presenta ya de por sí un problema intrínseco, pero que se podría minimizar utilizando un modelo físico, en este caso la red eléctrica equivalente, con un número mínimo de elementos, por ejemplo 1R1C.

Esta simplificación tan drástica, sin embargo, deberá compensarse teniendo en cuenta otro factor, que como se verá más adelante, es el hecho de tomar C como parámetro no constante, sino dependiente de las condiciones térmicas.

El “circuito” propuesto, entonces es el siguiente (Fig.2.1.):



Donde: R: resistencia térmica.
C(ω): capacidad calorífica global efectiva.

Fig. 2.1: Esquema de "circuito térmico" (circuito RC desfasador) que representa el intercambio de flujos de calor en un edificio, entre el ambiente exterior y el interior.

En el esquema anterior se ha supuesto que no existen fuentes de calor adicional. De existir, deben añadirse sus efectos al de $T_e(t)$.

Se han empleado las siguientes analogías eléctricas:

Diferencia de potencial: $u_e \rightarrow T_e$ Temp. exterior.
 $u_s \rightarrow T_i$ Temp. interior.

Corriente: $i \rightarrow \dot{q}$ Flujo de calor por unidad de superficie.

Cálculo de impedancias:

$$x_C = -j / \omega C$$

$$Z_{RC} = R - j / \omega C$$

$$u_e = i (R - j / \omega C)$$

$$u_s = i x_C = i (-j / \omega C)$$

Las temperaturas a la entrada y salida del "circuito térmico" (al igual que las diferencias de potencial eléctrico) se pueden relacionar por su función de transferencia T.F.(ω), que establece el grado de dependencia entre las causas T_e y los efectos o respuesta del edificio T_i :

$$T.F.(ω) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{i(-j/\omega C)}{i(R-j/\omega C)} = -j/\omega C \frac{1}{R-j/\omega C} \frac{R+j/\omega C}{R+j/\omega C}$$

$$= \frac{-j/\omega C (R+j/\omega C)}{R^2 - j^2/\omega^2 C^2} = \frac{-jR/\omega C - j^2/\omega^2 C^2}{R^2 + 1/\omega^2 C^2}$$

$$= \frac{-jR/\omega C R^2 - j^2/\omega^2 C^2 R^2}{R^2/R^2 + 1/\omega^2 C^2 R^2}$$

$$T.F.(ω) = \frac{1/\omega^2 C^2 R^2 - j/\omega C R}{1 + 1/\omega^2 C^2 R^2}$$

Como $C = C(\omega)$ (se deducirá esta función más adelante):

$$T.F.(\omega) = \frac{1/\omega^2 C(\omega)^2 R^2}{1+1/\omega^2 C(\omega)^2 R^2} - j \frac{1/\omega C(\omega)R}{1+1/\omega^2 C(\omega)^2 R^2} \quad [2.1]$$

Esta función tiene una discontinuidad para la condición estática ($\omega = 0$), donde no está definida, ya que para la obtención de esta expresión se partió de la condición de comportamiento dinámico del sistema. Esto se debe a que en la condición estática se deben reflejar todos los factores intervinientes en la ganancia térmica total del edificio. En el planteamiento inicial para el cálculo de la T.F., se consideró que no existían fuentes adicionales de calor, es decir que las ganancias internas de un edificio, como cargas térmicas por iluminación, motores, ocupantes, no intervienen en el cálculo, pero intervienen en la ganancia estática, y/o en otras frecuencias no consideradas directamente. Por esto, la expresión de T.F. obtenida tiene validez sólo para la condición dinámica.

Por analogía con otros sistemas térmicos disipativos, se espera que la T.F. tenga la forma de una curva suave, que decae a medida que aumenta la frecuencia.

La fase de la T.F. se obtiene:

$$\phi(\omega) = \arctan \left(- \frac{1/\omega C(\omega)R}{1+1/\omega^2 C(\omega)^2 R^2} \frac{1+1/\omega^2 C(\omega)^2 R^2}{1/\omega^2 C(\omega)^2 R^2} \right) = \arctan \left(- \frac{1/\omega C(\omega)R}{1/\omega^2 C(\omega)^2 R^2} \right)$$

$$\phi(\omega) = \arctan (-\omega R C(\omega)) \quad [2.2]$$

La constante de tiempo de la curva T.F. será :

$$\tau = R C(\omega) \quad [2.3]$$

Para este caso, en que $C = C(\omega)$, se verá más adelante cómo se puede obtener la τ de esta función T.F. (ω) teórica. Esta curva teórica, cuyos parámetros son R y $C(\omega)$, servirá de curva base, con la que se comparará el comportamiento de la curva experimental T.F. (ω) obtenida de datos medidos de temperatura exterior e interior. La finalidad de la obtención de una curva teórica similar a la experimental, es que de esta curva se podrán extraer los parámetros que identificarían también al sistema real (experimental).

Antes de esto, se deberá hallar la expresión de la función $C(\omega)$, necesaria para completar la expresión de la T.F. teórica, que se efectuará a continuación.

2.3. DEDUCCIÓN DE LA FUNCIÓN CAPACIDAD CALORÍFICA EFECTIVA $C(\omega)$.

2.3.1. Incidencia de la capacidad calorífica en la dinámica térmica del edificio:

La correcta evaluación de la capacidad calorífica de los materiales constructivos y del edificio en su conjunto es de suma importancia, ya que incide sobre el análisis de los aspectos dinámicos de su respuesta térmica.

En la mayoría de los modelos de comportamiento térmico simplificados, la capacidad calorífica se asume como constante, dependiendo exclusivamente de las propiedades térmicas y físicas de los materiales, áreas superficiales y espesores, distinguiéndose en algunos casos si la masa térmica pertenece a la envoltura o es interior¹⁰.

La capacidad calorífica efectiva de un elemento construido depende sin embargo de una serie más amplia de factores, como las propiedades térmicas y físicas de los materiales componentes, las superficies expuestas, el espesor de la masa térmica y su ubicación en el conjunto (envolvente o partes interiores), y además de las condiciones ambientales en el exterior e interior al elemento. Justamente, el concepto cobra particular importancia cuando la temperatura interior al edificio es variable¹¹, ya que depende del fuerte intercambio de flujos térmicos entre el aire y las masas térmicas¹². La capacidad calorífica física total (cuasi-estática) de una masa térmica es mayor que su capacidad efectiva, en un determinado instante, de almacenar calor.

Cuanto mayor es la capacidad calorífica del edificio y su inercia térmica, menor será la oscilación de temperatura interior, y a su vez, la diferencia de oscilaciones de temperatura a la que está expuesta la masa, reduce la capacidad efectiva de la masa de almacenar calor. Por esto, es esencial prestar particular atención en el carácter variable de la capacidad calorífica, para una mayor precisión en la evaluación del comportamiento térmico dinámico en el interior de un edificio.

Para analizar estos efectos se usa a continuación un modelo simple, que permite apreciar claramente el efecto de la variabilidad de la capacidad calorífica, según las condiciones de variación de la temperatura.

2.3.2. Evolución de la temperatura en el interior de un muro homogéneo sometido a una excitación térmica sinusoidal.

Muro semi-infinito :

Se considera un muro homogéneo muy grueso, sin aislamiento, expuesto a la temperatura ambiente exterior en una de sus caras, cuya variación en el tiempo se supondrá como la de una onda sinusoidal, de período diario (Fig.2.2.). Se supone también que la temperatura dentro del mismo variará sólo en la dirección x (espesor). Si la “onda” incidente es periódica, se puede descomponer en serie de Fourier, con lo que se analizará:

$$T(x=0,t) = T_0 \sin \omega t$$

donde: T : temperatura.
 T_0 : amplitud de la onda térmica.
 ω : frecuencia de la oscilación.
 t : tiempo.

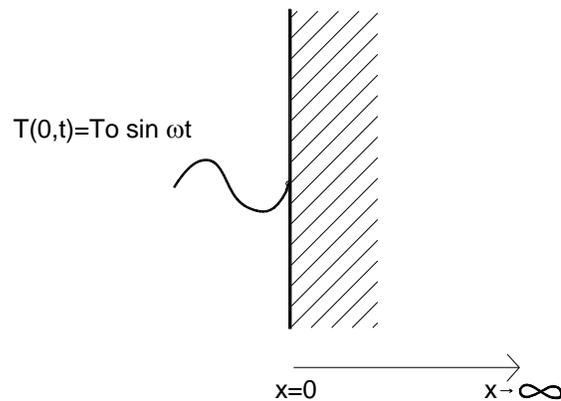


Fig. 2.2: Muro muy grueso sometido a “onda” sinusoidal.

La ecuación de transporte de calor es, en este caso:

$$\partial T(x,t) / \partial t = \alpha \partial^2 T(x,t) / \partial x^2$$

La onda incide directamente sobre la superficie de la cara en que $x=0$. La dependencia de la temperatura con el tiempo en $x=0$ y la solución que se obtiene para un campo eléctrico en un medio conductor, con el que puede establecerse una analogía, sugieren una solución, para la evolución de la temperatura dentro del muro, de tipo exponencial:

$T(x,t) = T_0 \exp [j(\omega t - kx)]$ donde k es el número de onda.

Dadas las condiciones de contorno propuestas, el comportamiento térmico del muro puede expresarse mediante la siguiente ecuación diferencial parcial en una dimensión:

$$\partial T(x,t) / \partial t = \alpha \partial^2 T(x,t) / \partial x^2$$

$$j \omega T = j^2 \alpha k^2 T$$

$$j \omega T = - \alpha k^2 T$$

$$k^2 = - \frac{j \omega}{\alpha}$$

$$k = \pm (-1 + j) (\sqrt{\omega / 2\alpha}) \quad \text{donde: } \alpha = \text{coeficiente de}$$

difusividad térmica.

siendo las condiciones en la frontera:

$$T(x=0,t) = T_0 \sin \omega t$$

y $\partial T(x,t) / \partial x |_{x=\infty} = 0$ porque el muro es muy grueso (muro semi-infinito).

Teniendo en cuenta las propiedades de la exponencial, y las condiciones de frontera en $x=0$:

$$T(x,t) = T_0 \exp [j(\omega t - kx)]$$

$$T(x,t) = T_0 \exp [j(\omega t - (\sqrt{\omega / 2\alpha})x + (\sqrt{\omega / 2\alpha})x j)]$$

$$T(x,t) = T_0 \exp [j(\omega t - (\sqrt{\omega / 2\alpha})x)] \exp [j^2 (\sqrt{\omega / 2\alpha})x]$$

$$T(x,t) = T_0 \exp [-(\sqrt{\omega / 2\alpha})x] \exp [j(\omega t - (\sqrt{\omega / 2\alpha})x)]$$

Por lo tanto la T real será :

$$T(x,t) = T_0 \exp[-(\sqrt{\omega/2\alpha})x] \sin [\omega t - (\sqrt{\omega/2\alpha})x] \quad [2.4]$$

Esta es la expresión de la función que toma la temperatura, una vez en el interior del muro. Se ha graficado $T(x,t)$ en función de la profundidad en un muro y el tiempo, para una excitación $T(x=0,t)$ diaria, a diferentes horas del día, para un valor de $\alpha = 6.67 \text{ E-7 m}^2/\text{s}$ (Figs. 2.3. y 2.4.):

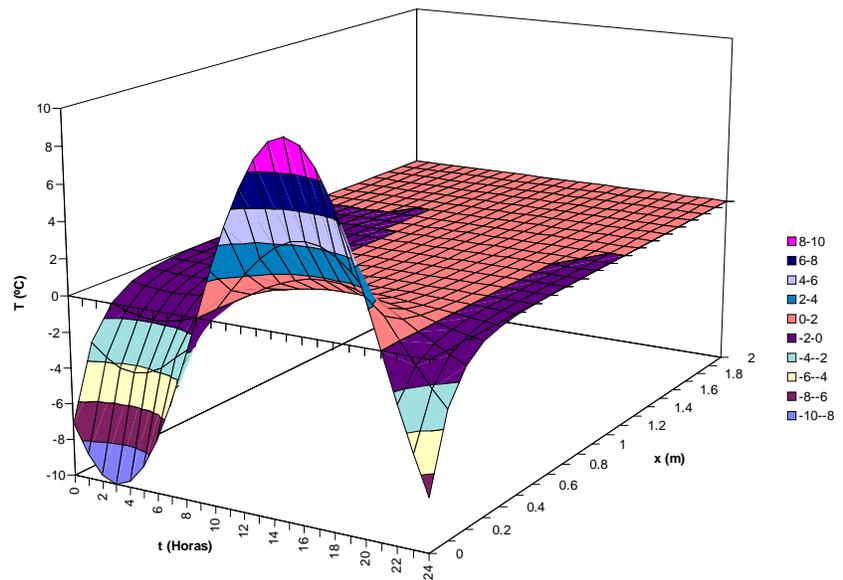


Fig.2.3: Temperatura en un muro homogéneo a lo largo del día, según su profundidad respecto de la superficie exterior, debida a una excitación sinusoidal.

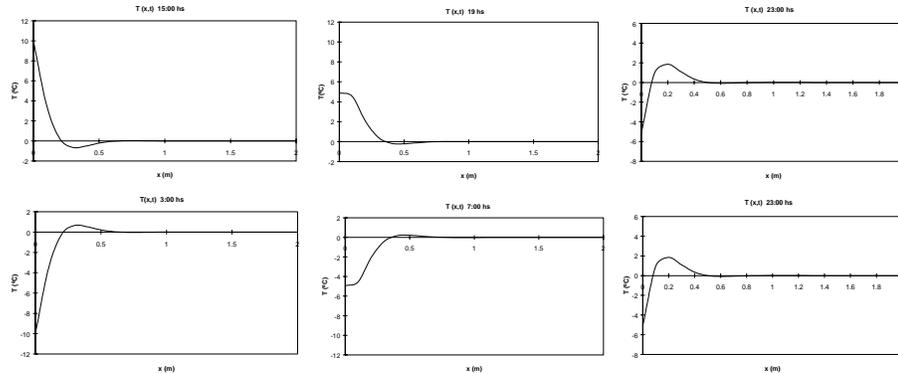


Fig.2.4: Evolución de la "onda" térmica dentro de un muro homogéneo, debido a una excitación térmica sinusoidal en una de sus caras, a diferentes horas del día.

Análisis de la expresión [2.4]:

El comportamiento temporal de T en una cierta posición x es sinusoidal, con un período de oscilación $T^* = 2\pi / \omega$. Su amplitud y su fase son:

$$\text{amplitud: } T_0 \exp[-(\sqrt{\omega/2\alpha}) x] \quad [2.5]$$

$$\text{fase: } \omega t - (\sqrt{\omega/2\alpha}) x \quad [2.6]$$

De estas expresiones se desprende que en la expresión $T(x,t)$ de la fórmula [2.4], si se excluye el término $\exp[-(\sqrt{\omega/2\alpha}) x]$ estaríamos en presencia de un perfil de “onda” sinusoidal que viaja en la dirección positiva de las x , es decir, desde la superficie hacia el interior de la pared. El factor $\exp[-(\sqrt{\omega/2\alpha}) x]$ provoca el decaimiento de la amplitud, a medida que aumenta x . Por esto, se puede interpretar la ecuación [2.4] como una “onda” sinusoidal que viaja en sentido positivo de las x con un amortiguamiento de su amplitud.

La longitud de onda de $T(x,t)$ es

$$\lambda_{\text{muro}} = 2\pi / (\sqrt{\omega/2\alpha})$$

A una profundidad de $1 \lambda_{\text{muro}}$ ($1 T^*$), el amortiguamiento de la “onda” térmica es

$$\exp[-(\sqrt{\omega/2\alpha}) \lambda_{\text{muro}}] = \exp[-(\sqrt{\omega/2\alpha}) \cdot 2\pi / (\sqrt{\omega/2\alpha}) =$$

$$\exp[-2\pi] = 1.9 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{y para } 1/2 \lambda_{\text{muro}}: \exp[-2\pi/2] = 4.3 \cdot 10^{-2}$$

Es decir, la amplitud se hace casi 0. La onda decae muy fuertemente en su amplitud para el valor de sólo media longitud de onda, por lo que se puede considerar que la influencia de la onda térmica exterior es sólo hasta la primera media longitud de onda dentro del muro.

La distancia de penetración de la “onda” térmica, se obtiene como la distancia para la que la amplitud decae a $1/e$ del valor de la superficie, y es:

$$\delta = \sqrt{2\alpha / \omega}$$

Siendo la frecuencia más significativa de la temperatura exterior la correspondiente al período diario, y considerando el orden de magnitud de los coeficientes α para materiales de construcción ordinarios, la profundidad de penetración de esta “onda” térmica diaria, sería del orden de unos decímetros.

Esto implica que no vale la pena abordar el problema de la transferencia de calor a lo largo de los muros laterales de un edificio, como la transferencia de calor en una barra rígida, en el aire¹⁴, debido a que la amplitud de la “onda” térmica transmitida se amortigua a relativamente poca distancia de la envolvente.

Muro finito :

Hasta ahora se ha considerado para el cálculo teórico un muro muy grueso, que para efectos de las condiciones de contorno se puede interpretar como un muro semi-infinito. Pero en el caso real los muros tienen un espesor definido y finito. Por esto, cabe cuantificar en cuánto y qué error se comete al utilizar la expresión anterior sobre la temperatura en el interior del muro.

Se considera entonces un muro de espesor e . En la dirección $+x$, es decir, desde $x=0$ (cara exterior) hacia $x=e$, la “onda” sinusoidal tomará la forma (reemplazando en [2.4]):

$$T(0,t) = T_0 \sin \omega t$$

$$T(0 \rightarrow e, t) = T_0 \exp[-(\sqrt{\omega/2\alpha}) x] \sin [\omega t - (\sqrt{\omega/2\alpha}) x]$$

$$T(e, t) = T_0 \exp[-(\sqrt{\omega/2\alpha}) e] \sin [\omega t - (\sqrt{\omega/2\alpha}) e]$$

Cuando la “onda” llegue a $x=e$, se encontrará con un cambio de medio, limitado por la superficie de la cara interior de la pared, y se “reflejará” en parte otra vez hacia el interior del muro, pero en sentido $-x$, es decir, desde $x=e$ hacia $x=0$. En el caso máximo de reflexión, por ejemplo que hubiese algún tipo de aislamiento térmico en el muro, la onda que parte de $x=e$ y viaja en sentido $-x$ tendrá una amplitud igual a la de la “onda” que llegó hasta allí en sentido $+x$ y la fase que en cada caso le corresponda. Es decir, la amplitud inicial de esta onda “reflejada” se supondrá :

$$T_e = T_0 \exp[-(\sqrt{\omega/2\alpha}) e]$$

La ecuación de la onda se puede escribir también :

$$T(e,t) = T_e \sin (\omega t - \phi_e) \text{ donde } \phi_e \text{ es la fase inicial en } x=e.$$

También puede interpretarse que sobre el muro finito inciden, sobre su cara exterior e interior, oscilaciones sinusoidales de frecuencia diaria y amplitudes diferentes,¹⁵ correspondientes a los perfiles de temperatura exterior e interior (Fig.2.5.).

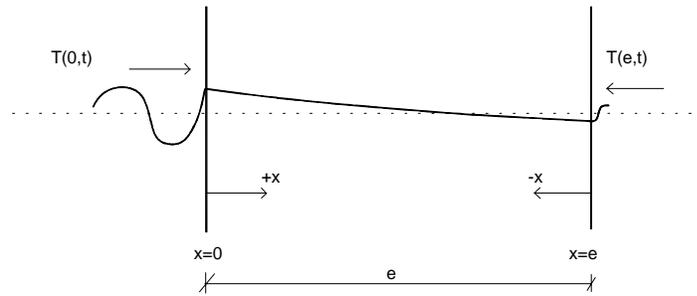


Fig.2.5: Esquema de la incidencia de ondas térmicas en ambas caras del muro, viajando en sentidos opuestos.

Si se utiliza nuevamente la expresión [2.4] para la “onda reflejada”, a la que se le aplica una excitación igual a $T(e,t)$, se obtiene la expresión de la “onda” de temperatura que viaja en sentido $-x$, o seno (visto desde $x=0$) : $x+e$
 cambio de coordenadas : $-x \rightarrow x+e$

$$T(e \rightarrow 0, t) = T_0 \exp[-(\sqrt{\omega/2\alpha})(x+e)] \sin[\omega t - (\sqrt{\omega/2\alpha})(x+e)] - \phi_e \quad [2.7]$$

teniendo en cuenta el desfase inicial ϕ_e con que partió la nueva “onda”.

Para tener una idea concreta de las magnitudes de los amortiguamientos, se tomará un ejemplo de un muro de ladrillos, con coeficiente de difusividad térmica $\alpha = 4.33 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ y un espesor $e = 0.30 \text{ m}$ (Fig.2.6.).

Una excitación sinusoidal de período diario que genere una oscilación de amplitud T_0 , llegará a $x=e$ con una amplitud del 6% de T_0 . Cuando la “onda” regrese a $x=0$, tendrá como máximo un 6% de T_0 , es decir algo menos del 0.4% de la amplitud con la que partió.

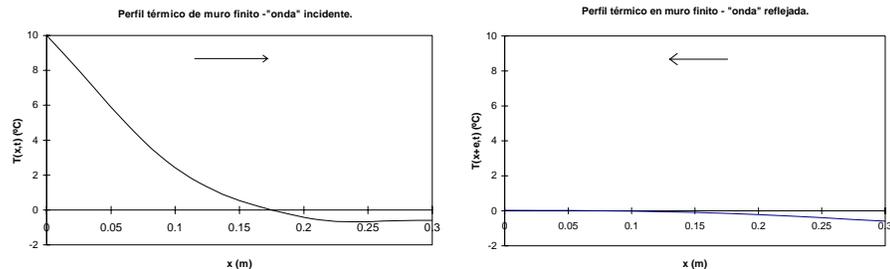


Fig.2.6: Gráficas $T(x, t)$ y $T(-x, t)$. (Comparar estas gráficas con el esquema de la Fig.2.5.)

La “onda” de temperatura resultante en $x=0$ será la suma de las temperaturas de la onda incidente y la reflejada, es decir:

$$T_i(0,t) = T_i(0,t) + T_r(0,t) = T(0 \rightarrow e, t) + T(e \rightarrow 0, t)$$

donde $T_r(0,t)$ tiene menos de 1% de la amplitud de $T_i(0,t)$.

Con esto se concluye que con la utilización de la expresión [2.4] para un muro ordinario de construcción (de 30 cm de espesor), es decir finito (y no semi-infinito, para el que se dedujo), se estaría incurriendo en un error de menos del 1% en la amplitud. Esto justificaría uso de [2.4] como expresión simplificada aproximada en lugar de la combinación de [2.4] + [2.7], teniendo en cuenta el error que se comete.

2.3.3. Balance de flujos térmicos en la superficie de un muro .

Considerando un muro semi-infinito (Fig.2.7.), en la superficie exterior ($x=0$) del mismo, se puede establecer un balance entre los flujos térmicos que lo atraviesan. Para esto, se utilizarán las expresiones de la temperatura exterior, y la de la evolución de la temperatura en el interior del muro.

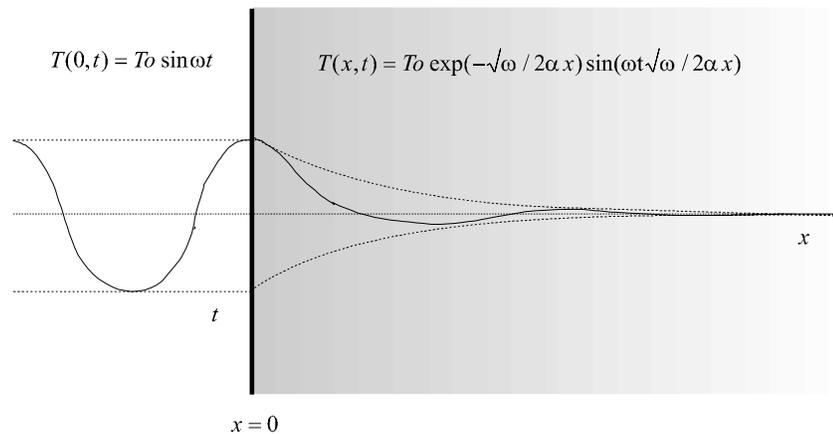


Fig.2.7: $T(x,t)$ de la oscilación térmica exterior en $x=0$ en función del tiempo, e interior del material del muro semi-infinito, en función de la profundidad.

La amplitud del calor Q que la “onda” térmica exterior puede transferir al muro (considerando que toda la masa se encuentra a la misma temperatura), está determinada por el calor específico del muro c por cada grado Kelvin, la masa del muro y la amplitud de la “onda” térmica exterior $T(x,t) = T_0 \sin \omega t$ que provoca a muy bajas frecuencias:

$$Q = T_0 C_0$$

$$Q = T_0 c m$$

$$Q = T_0 c \rho V = T_0 c \rho S e \quad [2.8]$$

donde c es el calor específico del muro,
 ρ es su peso específico,
 $S = 1 \text{ m}^2$ y e es el espesor de muro considerado.

Esta es la cantidad de calor que la onda térmica exterior está en grado de transmitir a la masa de muro considerada.

La cantidad de calor entrante y que pasa por conducción a través de una superficie de 1 m^2 de muro, evolucionando en una "onda" amortiguada, dependerá del material del muro y otros factores, como se verá a continuación:

$$T(x,t) = T_0 \exp[-(\sqrt{\omega/2\alpha}) x] \sin [\omega t - (\sqrt{\omega/2\alpha}) x]$$

Como esta expresión tiene dos variables, el calor dependerá también de dos variables: x y t . La cantidad de calor variable en el tiempo será:

$$\dot{Q}_{x=0} = dQ/dt_{x=0} = -\lambda \partial T/\partial x |_{x=0} S$$

resolviendo esta derivada con la expresión de la temperatura amortiguada queda:

$$\dot{Q}_{x=0} = -\lambda T_0 [-(\sqrt{\omega/2\alpha})] [\sin \omega t + \cos \omega t] S$$

Integrando entonces la dQ/dt anterior en cierto período de tiempo, correspondiente a media longitud de onda, se obtendrá el calor total Q :

$$Q_{x=0} = \int_0^{\pi/\omega} (dQ/dt) dt$$

Se consideró como período de integración $\pi/\omega = T^*/2$ (que corresponde a $\lambda/2$), ya que la mitad de un período de la "onda" es el lapso en que la amplitud de la onda térmica tiene todavía valores significativos. Resolviendo:

$$Q_{x=0} = 2 / \omega \lambda T_0 [-(\sqrt{\omega/2\alpha})] S$$

$$Q_{x=0} = T_0 S \sqrt{(2\rho c \lambda / \omega)} = T_0 C_{ef} \quad [2.9]$$

Esta última expresión muestra que la cantidad de calor que puede penetrar en el muro depende de la amplitud de la onda incidente T_0 , de la superficie expuesta S , de una propiedad ya conocida, que es la admisividad del material: $\sqrt{\rho c \lambda}$, y de la frecuencia ω .

En efecto, la idea física es que a una frecuencia alta, la “onda” térmica no tiene el tiempo necesario para afectar a todo el muro. Por eso, el calor efectivo que puede penetrar, disminuye al aumentar la frecuencia.

2.3.4. Capacidad calorífica efectiva $C(\omega)$ y rango de validez.

El calor de la expresión [2.8] representa el calor que la excitación térmica exterior puede ceder al muro, para diferenciarlo se llamará Q_1 . La expresión [2.9] es la cantidad de calor que puede captar el muro durante un período dado, que será Q_2 . El calor Q_2 puede ser menor que Q_1 , hasta tanto pase el suficiente tiempo para que la “onda” térmica penetre totalmente el material, es decir que depende del material del muro, que permitirá con mayor o menor facilidad la penetración del calor. Para establecer los límites de ambas expresiones, el cociente entre ambos valores no deberá superar la unidad:

$$\text{Para que: } Q_2 \leq Q_1 \quad \rightarrow \quad Q_2 / Q_1 \leq 1 \quad [2.10]$$

Escribiendo [2.9] / [2.8] :

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_0 S \sqrt{(2\rho c \lambda / \omega)}}{T_0 \rho c e S} \leq 1$$

$$\sqrt{(2 \alpha / \omega)} \cdot 1/e \leq 1$$

Para que esto suceda:

$$\sqrt{(2 \alpha / \omega)} \leq e \quad [2.11]$$

Esta última es la condición de validez para el planteamiento de las expresiones de cantidad de calor Q .

Como Q y la capacidad calorífica C son proporcionales, entonces se podrá decir que C funciona diferente a tramos. El punto donde empieza la validez de una y termina la de la otra está dado por el límite que se deduce de [2.10], es decir:

$$C_{ef} / C_0 \leq 1$$

donde C_0 es la capacidad calorífica del muro “a largo plazo”, es decir, la máxima C que puede alcanzar el material del muro, que correspondería a la expresión de Q deducida con [2.8], mientras que C_{ef} es la capacidad calorífica efectiva del muro después de un determinado período de tiempo, dado por la frecuencia ω .

De las expresiones [2.8] y [2.9] se pueden obtener las funciones que adoptará la capacidad calorífica, según la condición de validez [2.11]:

La C efectiva es:

$$C_{ef} = \sqrt{(2 \alpha / \omega)} \rho c S$$

$$C_{ef} = \sqrt{(2 \lambda \rho c / \omega)} S$$

por cada m^2 :

$$C_{ef} / S = \sqrt{(2 \lambda \rho c / \omega)}$$

mientras que la C estática (a largo plazo):

$$C_0 / S = \sqrt{(2 \lambda \rho c / \omega_{lim})} \quad \text{donde: } \omega_{lim} = 2 \alpha / e^2$$

Es decir que la capacidad calorífica no depende sólo del material (admisividad), sino también que ésta varía para cada frecuencia de la excitación exterior, es decir, $C_{ef} = C(\omega)$. Llegada una ω límite, que depende del material, la función de C continuará a más baja frecuencia con un valor constante, igual a C_0 , que es la capacidad calorífica estática.

Se puede ver la forma que tomará de la función $C = C(\omega)$ para algunos materiales de construcción, respecto del período de la oscilación térmica exterior, en la Fig. 2.8. En la Fig. 2.9. se representa la misma función, en función de ω . Los espesores (e) y coeficiente de difusividad (α) de los materiales representados, están detallados en la tabla a continuación.

Material	e (m)	α (m^2/s)
Ladrillo.	0.30	4.33 E-7
Piedra.	0.45	1.37 E-6
Madera.	0.15	1.71 E-7
Hormigón.	0.15	6.74 E-7

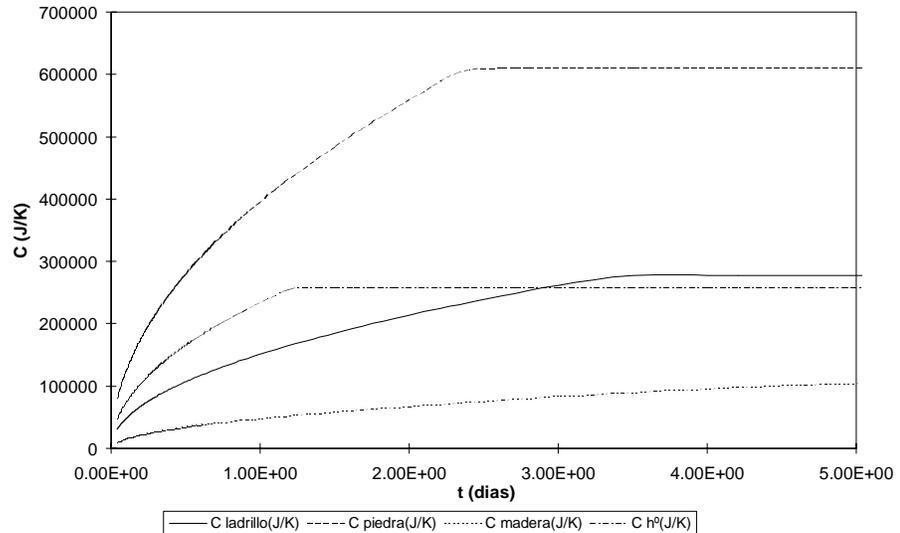


Fig. 2.8: Capacidad calorífica en función del periodo de la oscilación térmica exterior (en unidades de días).

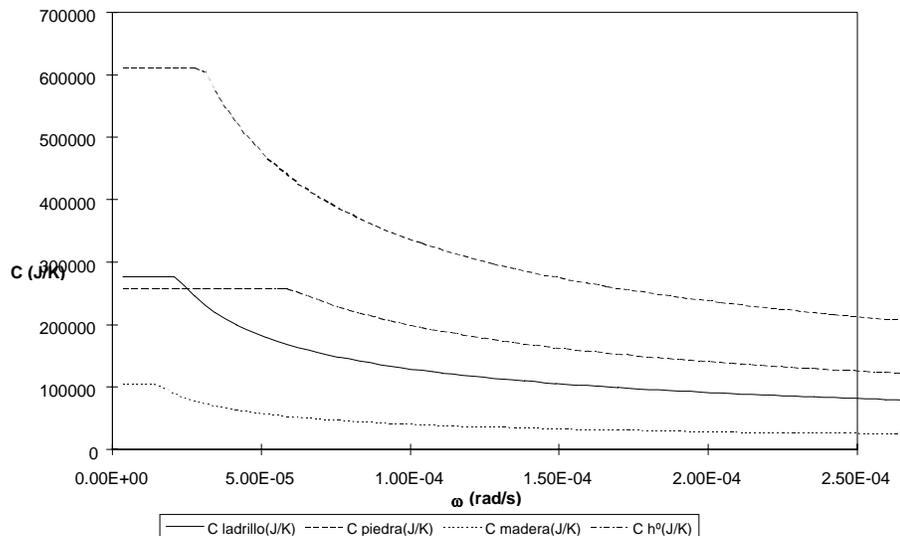


Fig. 2.9: Capacidad calorífica en función de la frecuencia de la oscilación térmica exterior¹⁶.

La “transición” entre ambas funciones ocurre en realidad de un modo suave, ya que a medida que se va aproximando a la condición estática (C_0), es necesario considerar la influencia de la segunda “onda” térmica (la que viaja desde el interior hacia el exterior del muro). Sin embargo, para los fines propuestos, y por simplicidad de manejo, se utilizará esta aproximación.

Parte de las deducciones y resultados desarrollados en este apartado han sido publicados en un congreso, según la referencia ¹⁶.

2.4. OBTENCIÓN DE LA CURVA T.F. EXPERIMENTAL:

2.4.1. Obtención de las transformadas de Fourier de las variables ambientales.

El análisis de datos experimentales temporales, durante un cierto período de tiempo, se puede realizar tanto en el dominio temporal como en el frecuencial, permitiendo este último detectar comportamientos que se repiten con frecuencias determinadas.

El análisis de Fourier permite descomponer prácticamente cualquier función física periódica o casi periódica $f(t)$, de período $T = 2\pi/\omega$, en un conjunto de componentes sinusoidales simples. Aplicando la transformada de Fourier¹⁷ a una función de estas características, es posible pasar del espacio temporal al frecuencial (y viceversa), mediante cálculos basados en la operación [2.12]:

$$F(\omega) = F[f(t)] = 1/T \int_0^T f(t) e^{i\omega t} dt \quad \text{para } 0 < t < T \quad [2.12]$$

donde: t es el tiempo, T el período y ω la frecuencia.

Se verifica que:

$$f(t) = 1/2\pi \int_0^{k\omega} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Lo anterior es válido para $f(t)$ acotada, periódica, continua (o con un número finito de discontinuidades) e integrable dentro del período T , y para t real. En realidad, tanto las funciones periódicas como las casi periódicas, que representan la evolución temporal de magnitudes físicas tales como la temperatura y la radiación solar, son susceptibles de ser transformadas¹⁸. Es posible, entonces, aplicar la transformada de Fourier a los datos medidos durante un cierto tiempo.

La función [2.12] de la transformada de Fourier está expresada en relación a un dominio temporal continuo. En caso de mediciones experimentales de magnitudes ambientales durante cierto período de tiempo, estaríamos en presencia de una serie discreta de datos temporales. Para transformar esta serie, se debería aplicar otra expresión para obtener la transformada discreta de Fourier. La forma discreta de la misma, aplicando un modelo en forma de "ondas", es:

$$F(\omega_k) = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} f(t) [\cos \omega_0 n t + i \sin \omega_0 n t] [2.12']$$

se verifica que:

$$f(t) = 1/2 \sum_{k=0}^{(N-1)/2} \{ \text{Re}[F(\omega_k)] \cos \omega_k t + i \text{Im}[F(\omega_k)] \sin \omega_k t \} \quad [2.13]$$

donde t es la variable independiente (tiempo),

n identifica el intervalo entre medidas de la serie discreta, es decir, el intervalo entre cada medición, que depende del sistema de adquisición de datos,

N es el número total de armónicos,

$\omega_0 = 2 \pi / T$ es la frecuencia fundamental,

$\omega_k = k \omega_0$ es la frecuencia angular en k ,

$\text{Re}[F(\omega_k)]$ es la componente real de la transformada de la función $f(t)$,

$\text{Im}[F(\omega_k)]$ es la componente imaginaria de la transformada de la función $f(t)$.

La primera amplitud de la serie en función de ω , correspondiente a la frecuencia fundamental ($A_0/2$) equivale al promedio de la magnitud considerada (en tiempo) durante ese período. Las amplitudes de los sucesivos armónicos de la frecuencia fundamental (la que corresponde a la totalidad del período) representan la amplitud de oscilación de la magnitud física, para la frecuencia de ese armónico. (Durante el presente trabajo, se utilizará la nomenclatura “amplitud” de una oscilación, para definir el valor entre la ordenada máxima o mínima de la oscilación y su valor medio. El valor comprendido entre la ordenada máxima y mínima se denomina valor “pico a pico”.)

Con la transformada discreta de Fourier (DFT) se puede obtener un espectro discreto de frecuencias de una serie temporal discreta periódica, que permite la identificación precisa del contenido armónico de series de magnitudes expresables como “ondas”, definidas en forma de datos discretos¹⁹.

La función F obtenida es función de la frecuencia ω , y es la que se utilizará para el análisis y cálculo de la T.F. experimental, considerando a la temperatura y la radiación solar como funciones casi periódicas y transformables. Se obtendrá por este medio la transformada F de cada una de estas magnitudes.

Para efectuar los cálculos, es necesario contar con un período relativamente prolongado de mediciones continuas, para obtener una resolución espectral que permita visualizar un cierto número de

armónicos. Como se detallará más adelante, es fundamental tener en cuenta tanto la longitud del período de medición, como el intervalo entre mediciones seleccionado, a fin de que los resultados permitan obtener una banda de frecuencias adecuadamente amplia para poder evidenciar determinados fenómenos de comportamiento.

Cabe aclarar que para el cálculo de la T.F. experimental se ha tomado como variables significativas en el comportamiento térmico de un edificio la temperatura del aire y la radiación solar. El viento y la ventilación interna juegan también un papel importante, pero al ser funciones de periodicidad menos evidente, no es tan provechoso aplicarles la transformada de Fourier, por lo que sus efectos se introducirán en el cálculo a través de otros mecanismos. En cuanto al ambiente interior, se ha tomado como variable significativa la temperatura de aire.

2.4.2. Obtención de la T.F. de efectos a largo plazo.

Dado un sistema físico lineal temporal, sobre el que está aplicada una variable de entrada o causa, que ocasiona un efecto o variable de salida, se define la función de transferencia del sistema como el cociente entre la función de salida y la función de entrada, en el espacio frecuencial (Ver más detalles en Capítulo 1). Esto implica que en el sistema térmico “edificio”, se puede obtener la función de transferencia dividiendo una variable ambiental interior por una variable ambiental exterior (se deberá elegir una), pero expresadas en función de la frecuencia. Por esto, es necesario aplicarles previamente la transformada de Fourier. Es decir:

$$T.F.(\omega) = \frac{F(f_s(\omega))}{F(f_e(\omega))}$$

La T.F. obtenida está expresada también en función de la frecuencia y es una función compleja, al igual que ambas transformadas. Cabe aclarar que la T.F. puede estar también definida por un cociente de transformadas de Laplace. Como existe una relación directa entre ambas transformadas, sería equivalente trabajar con transformadas de Fourier, y su interpretación física es más directa.

Para obtener la T.F. se tendrán en cuenta únicamente los valores significativos de la transformada de Fourier de ambas funciones, analizando previamente las frecuencias en que se presentan los valores significativos en las curvas espectrales de las

variables de entrada y salida, que corresponden a la frecuencia fundamental y algunos de sus armónicos. Esta curva T.F., con un número reducido de puntos, puede ser representativa del comportamiento del sistema⁸. Este es de hecho un método para filtrar la influencia del ruido en las mediciones.

Hay una banda de frecuencias altas que queda fuera de consideración debido al error, que es mayor para las variables de salida que para las de entrada, el valor de la T.F. tiene un margen muy grande de incertidumbre para este rango de frecuencias. Por este motivo, en la práctica sólo se han podido utilizar los resultados de hasta una frecuencia de 8 h, aunque la frecuencia de Shannon (normalmente considerada el límite de frecuencia máximo de la parte visible de la curva experimental) corresponda en la mayoría de los casos de estudio a un tiempo de 1 ó 2 horas. En el anexo A se efectúa el correspondiente análisis de errores.

Como se ha dicho, para el cálculo de la T.F. "clásica" sólo puede haber una función de entrada y una función de salida. De las dos magnitudes ambientales exteriores periódicas que se tienen en cuenta, se consideró separadamente primero la temperatura exterior y la temperatura interior, para obtener una T.F. (temp.-temp.) y luego la radiación solar y la temperatura interior, para tener una T.F. (rad-temp.). Por las características diferentes de estas dos variables exteriores, se obtendrán dos tipos de T.F.: una que representará esencialmente comportamientos de respuesta lenta, como los ocasionados por la temperatura exterior, y otra T.F. que representa efectos relativamente rápidos, como los debidos a la radiación solar. Más adelante, se intenta combinar ambos efectos.

Se analiza primeramente las T.F.(temp.-temp.), es decir, que cubre respuestas térmicas a largo plazo, obteniendo tanto la T.F. experimental, como la teórica (con la expresión [2.1]), utilizando las mismas variables de entrada y salida.

2.4.3. Comparación de la curva T.F. teórica con la T.F. experimental.

Ajuste de la curva T.F. teórica:

Para la obtención de la T.F. teórica con la expresión [2.1] es necesario dar valores iniciales estimados a los parámetros R y C. Como C es variable (se utilizará la expresión analítica), el valor que se deberá fijar es del producto RC_0 , es decir τ_0 , que está relacionada

al producto anterior mediante la expresión [2.3] y que da una idea de la inercia del edificio. Se proponen diferentes valores, comparando los resultados de ambas curvas hasta que la teórica se aproxime lo más posible a la experimental. En este caso, se obtendrá un valor aproximado de la constante de tiempo τ propia del edificio, debida a la variación de la temperatura exterior, que se espera sea más grande que la debida a la radiación solar. Por otro lado, la pendiente de la T.F. dará una idea de la velocidad de respuesta del sistema debido a ese estímulo. Un ejemplo de comparación entre las curvas está representado en la Fig. 2.10.

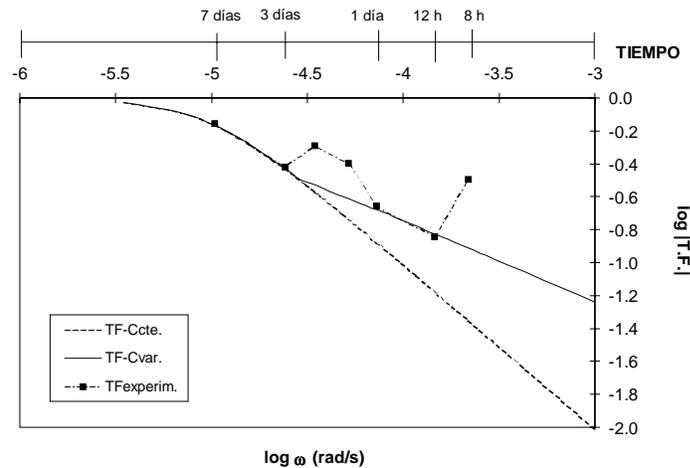


Fig.2.10: Gráfico del módulo de la T.F. teórica y la T.F. experimental (temp.-temp.) en función de ω (ejemplo ilustrativo de un piso de construcción tradicional de ladrillo, sin aislamiento, habitado, no ventilado).

En el gráfico anterior, se representa en línea negra discontinua (— · —) la curva teórica de la T.F. para el circuito del ejemplo, pero con C constante, mientras que en línea negra continua, siempre para el mismo modelo, se ha tomado C variable, según lo deducido anteriormente. En línea negra discontinua (— · —) está representada la curva real T.F., calculada con valores medidos, y que consta de pocos puntos representativos.

Como se puede apreciar, la curva teórica para C variable, no coincide perfectamente con la experimental (esto no es posible, debido a los factores que no fueron considerados), pero sin embargo se le aproxima. En cambio se demuestra, que tomando como modelo un circuito 1R1C con C constante, el error cometido, sobre todo a altas frecuencias (1 día, 12 h.), es más grande.

Análisis de las curvas de las T.F.

Comparando la curva experimental con la teórica, la separación de una respecto de la otra puede estar determinada por los siguientes factores:

- Variables exteriores importantes no consideradas en el cálculo, por ejemplo, radiación solar y viento.
- Efectos convectivos internos variables o ventilación.
- Características temporales propias de la ocupación (cargas internas variables).
- Características propias de la respuesta térmica del sistema a determinadas frecuencias.

Parte de estos efectos se analizarán más adelante.

Reconstrucción de las temperaturas interiores (validación de la constante de tiempo mayor).

Una vez hallada una coincidencia aceptable entre las curvas, se podría utilizar la curva teórica para la reconstrucción de las temperaturas internas del edificio, a modo de verificación de la validez del modelo teórico RC utilizado. Esta curva de temperaturas interiores reconstruida no puede nunca ser exacta, ya que se cuentan con muy pocos armónicos para volver a trazarla, además de que no están consideradas todas las variables intervinientes en la respuesta del edificio. Sin embargo, una verificación parcial e intermedia en el cálculo, sirve para tener una idea de la relación entre temperatura del aire exterior y respuesta interior. Esta relación se obtiene invirtiendo la ecuación para calcular la T.F., es decir:

$$T_i(\omega) = T.F.(\omega) \cdot T_e(\omega)$$

Un ejemplo del tipo de resultados que pueden esperarse se puede ver en la Fig. 2.11.

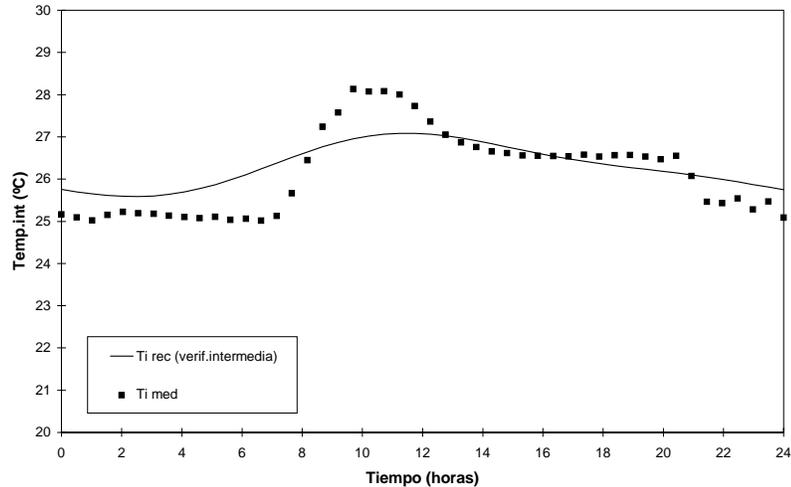


Fig.2.11: Comparación entre temperaturas interiores medidas ($T_i \text{ med.}$) y temperaturas interiores reconstruidas ($T_i \text{ rec.}$) con la T.F. (temp.-temp.) para un período de 1 día. (ejemplo ilustrativo de un piso de construcción tradicional de ladrillo, sin aislamiento, habitado, no ventilado).

Como se mencionaba, debido a los escasos armónicos de que se dispone para reconstruir la curva de temperatura interior, no es posible hallar nuevamente la función exacta, sobre todo para las ordenadas más extremas, que resultan más amortiguadas. Se cuenta más que nada con armónicos de baja frecuencia, ya que los de alta frecuencia no se pueden tener en consideración debido al ruido (ver análisis del ruido en el Anexo A).

Sin embargo, considerando que el edificio actúa como un filtro que deja pasar prioritariamente las bajas frecuencias de la excitación exterior, el error cometido por la falta de armónicos a frecuencias altas se minimiza, ya que las mismas quedan parcialmente filtradas por el sistema.

2.4.4. Obtención de la T.F. experimental de efectos a corto plazo.

Igual procedimiento se aplicará para la obtención de la curva T.F. experimental (rad.-temp.). La T.F. experimental (rad.-temp.) se calculará:

$$T.F.(\text{rad.-temp.}) (\omega) = T_i (\omega) / R (\omega)$$

La siguiente figura es un ejemplo de la T.F. calculada para el piso de la Fig. 2.12.

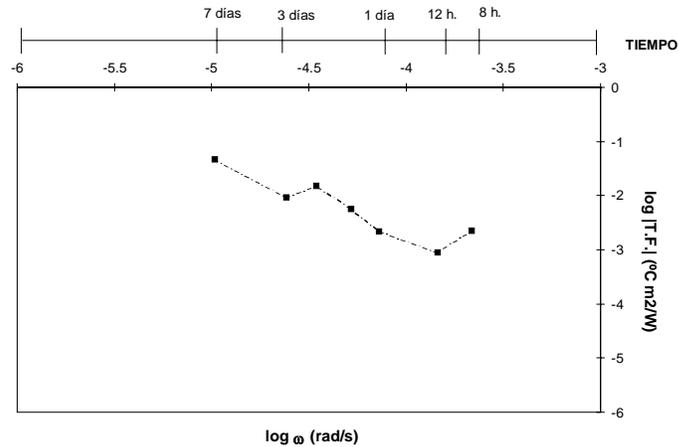


Fig. 2.12.: Gráfico del módulo de T.F. experimental (rad.-temp.) en función de ω (ejemplo ilustrativo de un piso de construcción tradicional de ladrillo, sin aislamiento, habitado, no ventilado).

El módulo de la T.F. (rad.-temp.) no es adimensional, como con T.F.(temp.-temp.), sino que tendrá unidades: $^{\circ}\text{C m}^2/\text{W}$. Debido a esto, ambas T.F. no son comparables. Sin embargo, las componentes de la función T.F. son útiles para el cálculo de la respuesta del edificio debida a una combinación de factores, entre los que está la radiación solar, como se verá en el siguiente apartado.

2.4.5. Obtención de la T.F. de múltiples efectos ambientales exteriores.

Para los cálculos de la T.F. se ha supuesto que el sistema edificio, considerado con una entrada correspondiente a la temperatura exterior y una salida correspondiente a la temperatura interior, es un sistema lineal, ya que la T.F. está definida bajo la condición de linealidad. Sin embargo, en rigor de verdad, la mayoría de los fenómenos físicos que se producen en la naturaleza no son lineales.

El comportamiento del edificio, planteado en términos de temperaturas, en realidad no es lineal. Durante las horas de la mañana, a una determinada temperatura exterior le corresponde una interior como respuesta. Durante las horas de la tarde y noche, en que el edificio recibe menos radiación solar o no recibe, a los mismos valores de temperatura exterior no le corresponden los valores anteriores de temperatura interior, es decir, el edificio no se calienta del mismo modo como se enfría. La relación por lo tanto no es unívoca.

Es necesario, por lo tanto, considerar la acción conjunta de por lo menos las dos variables de entrada más relevantes, como la temperatura exterior y la radiación solar, a fin de obtener una función que refleje un comportamiento térmico más cercano al lineal.

La utilización la T.F. en este caso plantea un inconveniente, debido a que se requiere tener en cuenta más de una variable ambiental, como causa de la respuesta térmica interior, siendo que la aplicación de la T.F. sólo admite una causa y un efecto. Un modo de representar la respuesta debida a dos variables de entrada (temperatura y radiación solar), sería suponiendo que cada una de las dos causas tienen efectos que constituyen parte de la respuesta total, y que por lo tanto se pueden sumar.

Considerando la suma de efectos:

$$T_{ITOT}(\omega) = T_{ITe}(\omega) + T_{iR}(\omega) \quad [2.14]$$

Por otro lado, la respuesta o efecto puede expresarse en función de sus causas. Esto se expresa bajo la siguiente estructura matemática, del tipo de la empleada por Ljung²⁰:

$$s(t) = G(q) e_1(t) + H(q) e_2(t)$$

donde: G y H: son funciones de transferencia
q: es un operador,
e_i: son las entradas y
s: es la salida.

Este tipo de planteamiento se ha usado generalmente como modelo matemático para los modelos estadísticos ARMAX y similares, y para procedimientos de identificación de sistemas^{21,22}. En nuestro caso, se aplicará también este tipo de combinación de T.F.

Pero el inconveniente es la inconsistencia entre unidades, por lo que G y H no son respectivamente T.F._{Te} y T.F._R, sino que son una modificación de éstas, de modo que sea posible sumar homogéneamente sus valores.

Considerando la suma de efectos de la ecuación [2.14]:

$$T_{ITOT}(\omega) = T_{ITe}(\omega) + T_{iR}(\omega)$$

y dividiendo toda la ecuación por R(ω):

$$T_{ITOT}(\omega) / R(\omega) = T_{ITe}(\omega) / R(\omega) + T_{iR}(\omega) / R(\omega)$$

$$\text{como : } T_{iTe}(\omega) = T.F._{Te}(\omega) T_e(\omega),$$

[2.15]

$$T_{iTOT}(\omega)/R(\omega) = T.F._{Te}(\omega) T_e(\omega) / R(\omega) + T.F._{R}(\omega)$$

[2.16]

donde $T.F._{Te}(\omega)$ y $T.F._{R}(\omega)$ son nuevas funciones, corregidas. Estas funciones se obtienen planteando un sistema de ecuaciones en que intervienen diferentes condiciones de asoleamiento, que se expresan tanto a través de diferentes valores de $T_e(\omega)$ como de $R(\omega)$, para hallar funciones T.F. que sean representativas del sistema, y no de una condición climática específica. A través de esta combinación lineal en que intervienen dos variables, se estaría llevando el sistema a fenómenos físicos lineales, o más cercanos a la linealidad.

Para obtener la ecuación [2.15], se ha dividido por $R(\omega)$, dado que la amplitud y riqueza de armónicos de R es superior a la de T_e , con lo que se minimizan los errores y se facilita la interpretación, con el procedimiento seguido.

Planteando pares de ecuaciones [2.16] idénticas para ambos períodos, con variables de entrada y salida diferentes (las mediciones correspondientes a cada período), se hallan los coeficientes que representan las componentes (real e imaginaria) de $T.F._{Te}(\omega)$ y $T.F._{R}(\omega)$ corregidas, para un número de frecuencias seleccionado, por lo menos 3 frecuencias.

Para que el número de ecuaciones del sistema sea relativamente reducido (hay que considerar que éste aumenta para cada período climático, cada frecuencia, y por el hecho de ser funciones complejas), se ha seleccionado hasta tres frecuencias representativas de la T.F. del sistema, que probablemente sean las más apropiadas, dadas las características tanto del sistema como de las condiciones climáticas: 1 día, 12h y 8 h. Con estas tres frecuencias y dos secuencias consideradas (con el mismo sistema térmico), se genera un sistema de doce ecuaciones con doce incógnitas (no hay que olvidar que las T.F. son complejas), resoluble por cualquier método numérico.

Los nuevos valores de las T.F. obtenidas se pueden validar aplicándolos mediante [2.15] a otra secuencia climática del mismo sistema, preferentemente con datos climáticos distintos a las dos anteriores, sobre todo en cuanto a la radiación solar. Se establece la diferencia de períodos comparando la radiación solar, ya que ésta proporciona, debido a su gran amplitud de oscilación, mayor certidumbre en los resultados de los cálculos que la temperatura, con menor oscilación.

Además de estos elementos, es necesario contar con al menos un dato sobre el comportamiento a muy largo plazo, ya que éste es

difícil de obtener con la transformada de Fourier, salvo que el intervalo de medición sea muy extenso (por ejemplo, años).

Este dato se obtiene calculando la conversión energética del edificio en un estado muy lento, sin llegar a ser estático, pero tendiendo a él.

Para el caso de la T.F.(temp.-temp.), se cuenta entonces con tres puntos de la curva T.F. corregida (T.F._{Te}), y es necesario obtener por lo menos un cuarto. Se cuenta con la pendiente de la curva T.F. teórica, que da una verificación sobre la dirección que toman los puntos experimentales, a frecuencias menores a las de 1 día. La extrapolación hacia períodos más largos, se realiza suponiendo que la oscilación de la temperatura exterior e interior será igual bajo la condición de frecuencias muy bajas:

Para $\omega \rightarrow 0$:

$$T.F.(\omega) = T_i(\omega) / T_e(\omega) \rightarrow 1 \quad \text{es decir, a bajas frecuencias.}$$

Esto último más que un punto de la curva se puede representar como una asíntota horizontal, de ordenada 1.

El cambio brusco de pendiente de la curva, pone en evidencia la frecuencia correspondiente a la constante de tiempo debido a efectos de temperatura exterior τ_{Te} .

En el caso de la T.F.(rad.-temp.) corregida (T.F._R), en que también se cuentan con sólo tres valores de frecuencia, la extrapolación a períodos más largos, se puede efectuar considerando un balance de flujos energéticos a frecuencias muy bajas, tendientes al estado estático:

$$K A_c \Delta T = R A_w \tau_r \quad \text{donde: } \tau_r \text{ es el coeficiente de transmisividad del vidrio.}$$

$$\Delta T / R = \frac{A_w \tau_r}{A_c K} = T.F._R \text{ (lento)}$$

donde: K es un coeficiente global de pérdidas por conducción (Fuente: por ejemplo Norma Básica Española de la Edificación sobre condiciones térmicas en los Edificios NBE-CT-79²³).
 A_c es al área de la envolvente del edificio.
 ΔT es la oscilación de temperatura interior.
 R es la radiación solar.
 A_w es el área transparente de la envolvente, donde incide la radiación solar (afectada por la inclinación solar).

τ_f es el coeficiente de transmisividad del vidrio.

En la fórmula precedente, se efectúa un balance entre las pérdidas globales por conducción y el aporte solar directo. La misma permite obtener un valor del módulo de $T.F.R$ en un estado tendente al estático.

Nuevamente, el cambio de dirección en la curva $T.F.R$ permite obtener la frecuencia correspondiente a la τ_R , es decir, la constante de tiempo debida a la radiación solar.

Ejemplos ilustrativos de la obtención de ambas curvas $T.F.$ y sus constantes de tiempo se pueden ver en las Figs. 2.13 y 2.14. Los gráficos corresponden al mismo piso del gráfico anterior.

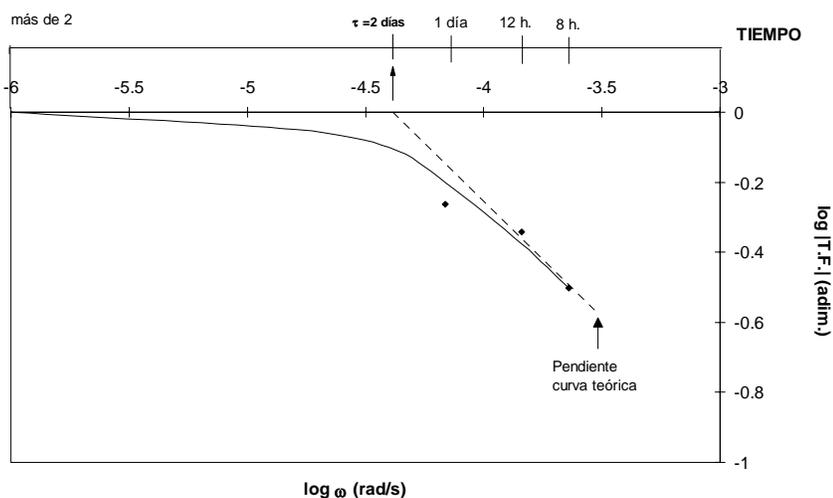


Fig.2.13: Obtención de $T.F.T_e$ y τ_{T_e} .

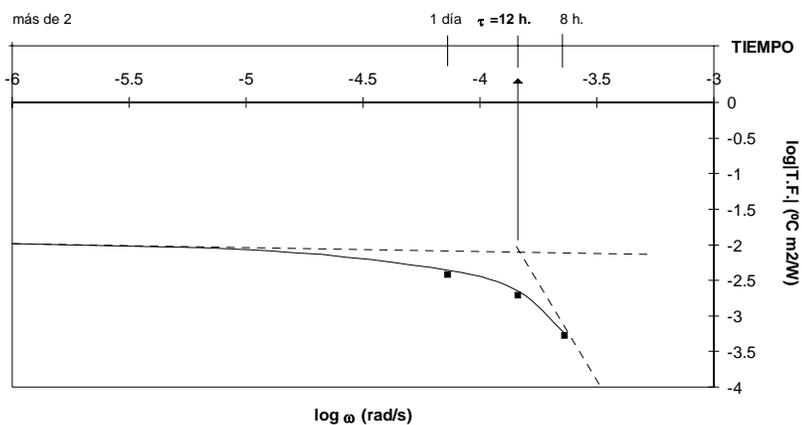


Fig.2.14: Obtención de $T.F.R$ y τ_R .

En el caso precedente se consideró un edificio en que el viento y la ventilación interna no tienen un papel relevante en la respuesta térmica. Pero en el caso de que sí lo fuera, es decir, con otras condiciones climáticas y con mucha ventilación, es necesario tener en cuenta la influencia de esta otra variable climática significativa, difícilmente evaluable directamente en lo anteriormente expuesto.

Para esto, se considera que la $T_i(t)$ obtenida a través de T.F., se ve modificada directamente por un determinado volumen de aire exterior, que se mezcla con el interior. Es decir:

$$T_i(t) \text{ ajust.} = a T_{e_{\text{vent}}}(t) + b T_{i_{\text{vent}}}(t) + c \quad [2.17]$$

donde a , b y c son coeficientes de ajuste. Se busca una curva de aproximación que se acerque lo más posible a todos los puntos de la curva de temperatura interior medida, teniendo como variables independientes $T_{e_{\text{vent}}}(t)$ y $T_{i_{\text{vent}}}(t)$ de la expresión [2.17]. Hallada esta curva de ajuste "óptima" tras sucesivas iteraciones, se pueden obtener los mencionados coeficientes. Para este procedimiento de ajuste se usará el algoritmo de Marquardt, teniendo en cuenta la modificación de Powell²⁴. Cada uno de los coeficientes representa:

- a: porcentaje de flujo energético que aporta el aire exterior que ingresa.
- b: relación entre el sistema térmico con y sin ventilación.
- c: diferencia de calibración entre sensores de temperatura exterior e interior (debiera ser próximo a 0).

De esta manera, puede obtenerse una mayor precisión en la reconstrucción de la temperatura interior, a partir de los parámetros que se han utilizado para caracterizar el sistema. La misma se puede obtener utilizando la expresión [2.17], utilizando como datos los coeficientes hallados, además de $T_{e_{\text{vent}}}(t)$ medida y $T_{i_{\text{vent}}}(t)$ (antitransformada) obtenida a través de las T.F. Más adelante se verá el resultado de este procedimiento.

Resumiendo, los **parámetros** que se han utilizado para caracterizar al sistema térmico son:

- **Curva T.F._{Te} (ω) y τ_{Te}**
- **Curva T.F._R (ω) y τ_R .**
- **Coefficientes a , b y c de ventilación.**

2.5. VALIDACIÓN DEL MODELO.

A partir de los valores conocidos de las curvas $T.F_{Te}(\omega)$ y $T.F_{R}(\omega)$ del sistema térmico considerado (componentes), y de las condiciones climáticas exteriores medidas, debe ser posible efectuar una reconstrucción de la curva de temperaturas interiores, con un grado de precisión aceptable. Si esto es posible, quedará validado el modelo.

La relación que se usará será:

$$T_{i\text{rec}}(\omega) = T.F_{TE}(\omega) \cdot T_e(\omega) + T.F_{R}(\omega) \cdot R(\omega)$$

$$T_{i\text{rec}}(\omega) \xrightarrow{\text{inv F}} T_{i\text{rec}}(t) \quad \text{donde: inv F es la transformada inversa de Fourier.}$$

$$T_i(t)_{\text{ajust.por vent.}} = a T_{e\text{medida}}(t) + b T_{i\text{rec}}(t) + c$$

En la Fig. 2.15 se puede ver un ejemplo de un gráfico de comparación entre la T_i medida, la T_i reconstruida, y la T_i ajust., es decir, aplicando además los coeficientes de ventilación, partiendo de datos experimentales²⁵. El sistema térmico considerado en este caso es una vivienda muy másica construida en una cavidad en la roca, semi-enterrada en la misma, que durante el período estival está muy ventilada. Las medidas se tomaron cada hora, siendo la secuencia total de 6 días. Si la vivienda en cuestión no estuviese ventilada, puede darse el caso de que no sean necesarios los coeficientes de ventilación para caracterizar al edificio.

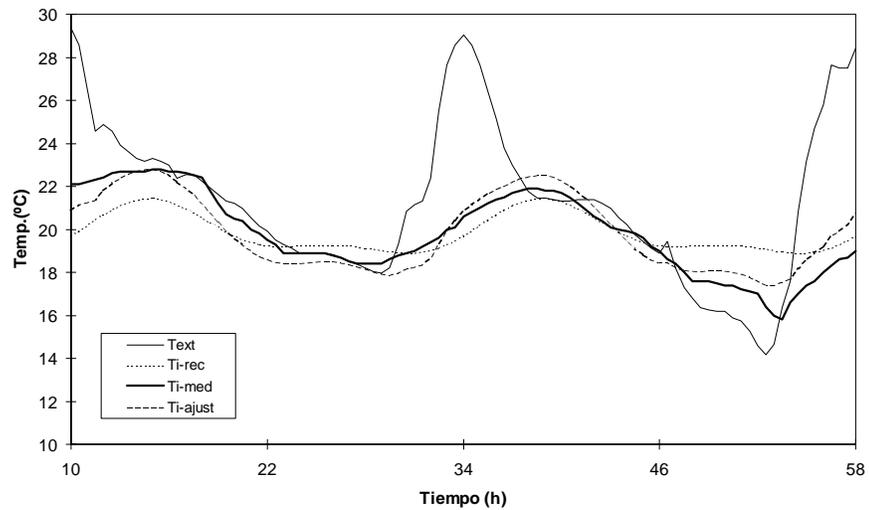


Fig.2.15: Comparación de T_i medida, T_i reconstruida, y la T_i ajust. por ventilación, y T_{ext} para un periodo de dos días, en una vivienda semi-enterrada en la roca, ventilada.

El gráfico anterior se calculó hallando los coeficientes a, b y c mediante sucesivas iteraciones del algoritmo de Marquardt. Los coeficientes obtenidos para este caso se presentan en la siguiente tabla:

COEFICIENTE DE AJUSTE.	VALOR HALLADO.
a	0.1618
b	1.6635
c	-0.1138

Estos coeficientes son los que permiten mejorar el ajuste respecto a la curva medida, de la curva T_{i-rec} a la $T_{i-ajust}$.

Puede darse el caso de que para la utilización del algoritmo y para hacer más fácil la convergencia, sea necesario restar a todas las temperaturas un valor igual, similar a la temperatura media, con el objeto de reducir los errores de redondeo operacional durante el cálculo. El mismo valor se suma luego a los resultados.

2.6. CONSIDERACIONES FINALES SOBRE LA METODOLOGÍA DE ANÁLISIS Y CARACTERIZACIÓN.

El presente es un modelo térmico aproximado que permite:

- cálculo de la/las T.F. de un edificio, que en cierta medida lo caracteriza, y de la cual se pueden obtener constantes de tiempo que den una idea de su comportamiento,
- estimación, con cierta aproximación, de la respuesta térmica, frente a determinadas condiciones climáticas exteriores.

El método es relativamente simple y el cálculo consta de pocos parámetros. Se considera que los resultados son aceptables a nivel de predimensionamiento térmico, teniendo como ventaja la de necesitar un escaso número de datos físicos del edificio. La buena aproximación de los resultados de este modelo, en relación con su gran simplicidad, se debe principalmente a tres factores:

- Modelo RC global considerando C variable.
- Utilización selectiva y adecuada de frecuencias significativas, sobre las que se manifiesta con mayor incidencia el comportamiento del sistema.
- Ajuste de los resultados por efectos de la ventilación, mediante el cálculo de coeficientes de ajuste (en caso necesario).

Se destaca, que en el cálculo por el método de red eléctrica equivalente, no sólo es importante el valor que toma RC, sino la variabilidad del valor de C para distintas frecuencias, ya que de otro modo los resultados estarían expuestos a variar, por ejemplo, según la longitud del período de tiempo que se tomara. Este factor normalmente no ha sido tenido en cuenta. Hablando del edificio como sistema térmico, no sólo es importante la cantidad de masa térmica incluida en él, representada por el valor de RC, sino la ubicación y distribución de la misma, que variará el comportamiento del sistema en su conjunto y hará que el edificio varíe su respuesta térmica a diferentes frecuencias y ubicaciones espaciales. El método descrito es capaz de poner en evidencia estos fenómenos.

El hecho de una selección adecuada de las escasas frecuencias que se utilizan, es de suma importancia. Para esto, debe tenerse en cuenta tanto la periodicidad de las variables exteriores, como la de las cargas interiores. Los buenos resultados en la reconstrucción de las temperaturas interiores, con ayuda de los valores de las T.F. de estas pocas frecuencias, es lo que corrobora una buena o mala elección.

Los efectos del viento y la ventilación interior son variables capaces de modificar sensiblemente los resultados esperados, si no se las tiene en cuenta. La aplicación de estos coeficientes de ajuste

por ventilación normalmente no modifican la forma global de la curva de temperaturas interiores. Como el efecto del viento se manifiesta generalmente a altas frecuencias, lo más probable es que con la intervención de los coeficientes se llegue a una aproximación mayor a la curva medida, sobre todo en las ordenadas extremas.

2.7. REFERENCIAS.

- ¹Sonderegger, R.C. *Diagnostic Test Determining the Thermal Response of a House*. ASHRAE Transactions, 84. Part I, 1978, pp. 691-702.
- ²Griffith, J.E. *Determination of Thermal Time Constants in Residential Housing*. ASHRAE Transactions, U.S.A., V91 (Part 2), 1985, pp. 1450-1462.
- ³Madsen, H.; Holst, J. *Estimation of Continuous-time Models for the Heat Dynamics of a Building*. Energy and Buildings 22, 1995, pp. 67-79.
- ⁴Hammarsten, S. *Lumped Parameter Models*, en: Parameter Identification Techniques for Thermal Analysis of Buildings. Ispra, 9-11 de octubre de 1989.
- ⁵Rabl, A. *Application of Identification of Energy Balances in Buildings. An Overview*, en: Parameter Identification Techniques for Thermal Analysis of Buildings. Ispra, 9-11 de octubre de 1989.
- ⁶Rabl, A. *Parameter Estimation in Buildings: Methods for Dynamic Analysis of Measured Energy Use*. Transactions of the ASME, Vol. 110, February 1988, pp. 52-66.
- ⁷Macqueron, J.L.; Navarro, J.; Torra, V. *Analytical Determination of the Transference Function*. Anales de Física, Vol. 73, 1977, pp. 163-168.
- ⁸Isalgué, A.; Ortin, J.; Torra, V.; Viñals, J. *Heat Flux Calorimeters: Dynamical Model by Localized Time Constants*. Anales de Física. Vol. 76, 1980, pp. 192-196.
- ⁹Cesari, E.; Torra, V.; Macqueron, J.L.; Navarro, J. *Transfer Function and Space localization: Experimental Space Linearity*. Anales de Física, Vol. 73, 1977, pp. 300-302.
- ¹⁰Serra, R. *Clima, Lugar y Arquitectura. Manual de Diseño Bioclimático*. Madrid: Ciemat, 1989.
- ¹¹Guedes de Almeida, M.; García, Valdemar; Maldonado, E. *The Dependence of Effective Thermal Heat Capacity of Non-homogeneous Materials on Location and Climate Parameters*. Proceedings PLEA 98, Lisbon, June 1998, pp. 345-348.
- ¹²Guedes de Almeida, M.; Bragança, L.; Maldonado, E. *An Easy and Fast Computer Program for Thermal Simulation of Buildings Based on Variable Heat Capacity*. Proceedings PLEA 98, Lisbon, June 1998, pp. 547-550.
- ¹³Carslaw, H.S. & Jaeger, J.C. *Conduction of Heat in Solids*. London: Oxford at the Clarendon Press. 1959.
- ¹⁴Isachenko, V.; Osipova, V.; Sukomel, A. *Transmisión del Calor*. España: Marcombo, 1979. (Traducido del original en ruso, publicado por Mezkhkiga, Moscú, U.R.S.S.)

- ¹⁵Sonderegger, R.C. *Harmonic Analysis of Building Thermal Response Applied to the Optimal Location of Insulation within the Walls*. Energy and Buildings, 1 ; 1977, pp. 131-140.
- ¹⁶Marincic, I.; Isalgué, A.; Serra, R. *Analysis of the Variability of Buildings' Global Heat Capacity*. Eurosun '98 (Congreso ISES Europeo). Portoroz, Eslovenia, septiembre de 1998, pp. II.2.19 del Vol.1 del libro de Actas. ISBN 0952415038.
- ¹⁷Churchill, R.V.; and Brown, J.W. *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, 1978.
- ¹⁸Wiener, N. *The Fourier Integral and Certain of its Applications*. Dover Publications, Inc., New York, 1958.
- ¹⁹Nguyen, T.T. *Parametric Harmonic Analysis*. I.E.E. Proceedings - Generation, Transmission and Distribution. Vol. 144, Iss 1, January 1997, pp. 21-25.
- ²⁰Ljung, L. *System Identification. Theory for the user*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- ²¹Palomo, E., Téllez, F.M. *Several Problems Related to the Identification of the Main Time Constants of a Thermal Solar Component*. 3rd. European Conference on Architecture, Florence, Italy, 17-21 May 1993, pp. 389-392.
- ²²Casanovas, A.; Gómez, V.; Utrillas, M.P. *Applying Black Box Identification Methods to the Thermal Monitoring of a Solar House*. 3rd. European Conference on Architecture, Florence, Italy, 17-21 May 1993, pp. 600-602.
- ²³*Manual de Aislamiento en la Edificación*. Madrid: Cristalería Española.
- ²⁴Marquardt, D.W. *An algorithm for least-squares estimation of non linear parameters*. Appl. Math., Vol.11, 1963, pp. 431-488.
- ²⁵Cusidó, J.A.; Mira, M.T.; Roset, J.; Isalgué, A. *Thermal Behaviour of a Medieval Sheltered Building*. Energy and Buildings, 10, 1987, pp. 19-27.