

ANEXO C

SISTEMAS TÉRMICOS Y CONSTANTES DE TIEMPO.

ÍNDICE DEL ANEXO C

SISTEMAS TÉRMICOS Y CONSTANTES DE TIEMPO.

C.1. TRANSMISIÓN DEL CALOR. SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS.	3
C.2. SOLUCIÓN DE UN MODELO TÉRMICO DISCRETO BASADO EN LA ANALOGÍA RC.	4
C.3 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA.	7
C.4. REFERENCIAS.	8

ANEXO C

SISTEMAS TÉRMICOS Y CONSTANTES DE TIEMPO.

C.1. TRANSMISIÓN DEL CALOR. SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS.

La resolución de un sistema térmico, sometido a fenómenos de transferencia de calor fundamentalmente por conducción, se puede abordar según 2 planteamientos diferentes:

- El planteamiento analítico completo se efectúa planteando la ecuación de difusión de Fourier, para cada uno de los elementos que constituyen el sistema, considerando 3 dimensiones y las condiciones en las fronteras. Como se supone que los dominios tienen dimensiones infinitesimales dV , se puede asumir que la temperatura permanece constante en el interior de cada elemento de volumen.

La resolución de este sistema de ecuaciones, dependiendo de la complejidad del sistema físico, puede resultar dificultosa. La misma se puede efectuar de manera analítica o por métodos numéricos. La forma más conveniente de resolución, por motivos de interpretación y entendimiento, es buscar una solución semi-analítica.

La ecuación de Fourier para 1 material y en 1 dimensión es en forma general:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Dada una condición $T(x,t) = T(x,0)$, la solución a la ecuación es de la forma de una sumatoria de exponenciales dependientes del tiempo.

$$T(x,t) = \sum \text{exponenciales}(t)$$

Carslaw & Jaeger (1959) discuten soluciones a la ecuación de difusión, para diferentes condiciones¹.

- El planteamiento simplificado, a través de la analogía RC, consiste en dividir el sistema en elementos finitos correspondientes a N dominios “relevantes”, equiparándose el sistema real a un conjunto de elementos con capacidades caloríficas, relacionadas entre sí y con el medio de referencia, por coeficientes de acoplamiento (conducciones térmicas).

Para la resolución de un sistema calorimétrico, se puede plantear para cada elemento un balance de potencias, aplicando la ecuación de Tian de 1 cuerpo o 1 elemento:

$$W = c \, dT/dt + P (T - T_0)$$

donde:

t: tiempo (variable independiente).

W: potencia disipada por el elemento.

T_0 : temperatura de referencia (constante).

T: temperatura del elemento considerado.

c: capacidad calorífica del elemento.

P: coeficiente de acoplamiento entre el elemento y el medio de referencia.

En el interior de cada uno de estos dominios de volumen finito, la temperatura ya no depende de la posición, sino sólo del tiempo.

Este método simplificado equivale a la formulación de Fourier y, una vez elegidos los N elementos de volumen macroscópico, el modelo puede representar al sistema.

C.2. SOLUCIÓN DE UN MODELO TÉRMICO DISCRETO BASADO EN LA ANALOGÍA RC.

En sistemas térmicos disipativos (tales como calorímetros de conducción), se puede utilizar la analogía RC como modelo térmico discreto de capacidades caloríficas y conducciones térmicas (coeficientes de acoplamiento).

En este caso, se descompone el sistema en N dominios que se consideren relevantes, de modo que sean capaces de representar del modo más aproximado posible al sistema^{2,3} (Fig. C.1.).

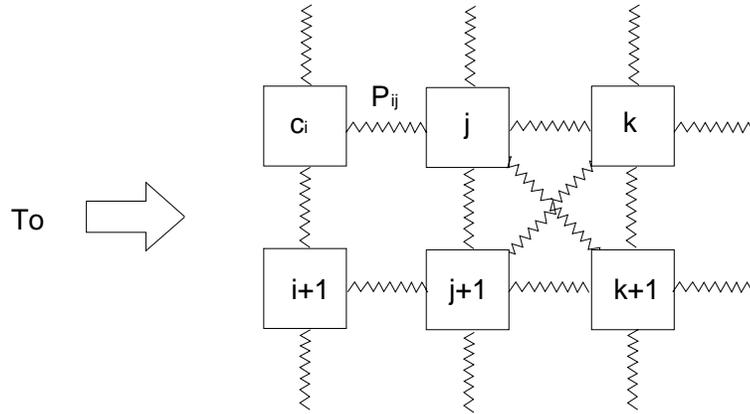


Fig.C.1: Esquema del modelo de una red de capacidades caloríficas y coeficientes de acoplamiento.

Planteando la ecuación de Tian (balance de potencias) para cada uno de los N elementos, se obtiene un sistema de N ecuaciones diferenciales lineales.

$$W_i(t) = c_i \frac{dT_i}{dt} + \sum_{k=1}^N P_{ik} (T_i - T_k) + P_{i0} (T_i - T_0)$$

$$W_1(t) = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$W_N(t) = \dots\dots\dots \quad [C.1]$$

- donde:
- t: tiempo (variable independiente).
 - W_i: potencia disipada por el elemento i.
 - T₀: temperatura de referencia (constante).
 - T_i: temperatura del elemento i.
 - T_k: temperatura del elemento k.
 - c_i: capacidad calorífica del elemento i.
 - P_{i0}: coeficiente de acoplamiento entre el elemento i y el medio de referencia.
 - P_{ik}: coeficiente de acoplamiento entre el elemento i y el k (constante).

Para facilitar la resolución, se transforma el anterior sistema de ecuaciones a un sistema de ecuaciones algebraicas, aplicando la transformada de Laplace. Definiendo: $\theta_i = T_i - T_0$, y considerando las condiciones iniciales:

$$\theta_i (t=0) = 0,$$

$$W_i(p) = c_i p \mathcal{T}_i + \sum_{k=1}^N P_{ik} (\mathcal{T}_i - \mathcal{T}_k) + P_{i0} \mathcal{T}_i$$

$$W_1(p) = (c_1 p + \sum P_{1k} + P_{10}) \mathcal{T}_1 - P_{12} \mathcal{T}_2 - P_{13} \mathcal{T}_3 \dots - P_{1i} \mathcal{T}_i \dots - P_{1N} \mathcal{T}_N.$$

.....

$$W_N(p) = \dots - P_{N1} \mathcal{T}_1 \dots - P_{N2} \mathcal{T}_2 \dots - P_{N3} \mathcal{T}_3 \dots \dots \dots - P_{Ni} \mathcal{T}_i \dots \dots \dots + (c_N p + \sum P_{Nk} + P_{N0}) \mathcal{T}_N.$$

[C.2]

donde: $i = 1, \dots, N$.
 p : es la variable de Laplace (variable independiente).
 $\mathcal{T}_i(p)$: temperaturas transformadas (θ_i), son las incógnitas.

Resolviendo por determinantes, se obtiene un conjunto de soluciones \mathcal{T}_i :

$$\mathcal{T}_i(p) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 p + \sum P_{1k} + P_{10} & -P_{12} & \dots & W_1 & \dots & -P_{1N} \\ -P_{12} & \dots & \dots & W_2 & \dots & -P_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -P_{N1} & -P_{N2} & \dots & W_N & \dots & +(c_N p + \sum P_{Nk} + P_{N0}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 p + \sum P_{1k} + P_{10} & -P_{12} & \dots & \dots & \dots & -P_{1N} \\ -P_{21} & \dots & \dots & \dots & \dots & -P_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -P_{N1} & -P_{N2} & \dots & \dots & \dots & +(c_N p + \sum P_{Nk} + P_{N0}) \end{vmatrix}}$$

Experimentalmente, se imponen las siguientes hipótesis restrictivas:

- La disipación se produce sólo en 1 elemento:
 $W_i \neq 0$ y $W_k = 0$.
- La temperatura es homogénea en cada elemento.

Las incógnitas $\mathcal{T}_i(p)$ quedan expresadas:

$$\mathcal{T}_i(p) = \frac{W_i \cdot (\text{polinomio grado } < N \text{ en } p)}{(\text{polinomio grado } N \text{ en } p)} \quad [C.4]$$

Mediante la anti-transformada de Laplace, se pueden obtener las temperatura θ_i , y con éstas T_i , las temperaturas de los N elementos en los que se descompuso el dominio.

Los polinomios se pueden expresar como productos de binomios en p, donde intervienen sus respectivas soluciones, con lo cual, la formula [C.4] se puede expresar también como:

$$W_i(p) \cdot S \cdot \frac{\prod_{j=1}^M (\tau_j^* p + 1)}{\prod_{i=1}^N (\tau_i p + 1)} = \mathcal{F}_i(p)$$

$$W_i(p) \cdot \prod_{j=1}^M (\tau_j^* p + 1) = 1/S \cdot \prod_{i=1}^N (\tau_i p + 1) \cdot \mathcal{F}_i(p) \quad [C.5]$$

En el espacio temporal esta expresión corresponde a:

$$W(t) + a^* dW/dt + b^* d^2W/dt^2 + \dots + m^* d^M W/dt^M =$$

$$1/S [\theta_i(t) + a d\theta_i(t)/dt + d^2 \theta_i(t) /dt^2 + \dots + n d^N \theta_i(t)/dt^N] \quad [C.6]$$

donde:

$$a^* = \tau_1^* + \tau_2^* + \dots + \tau_M^*$$

$$b^* = \tau_1^* \tau_2^* + \tau_1^* \tau_3^* + \dots + \tau_1^* \tau_M^* + \tau_2^* \tau_3^* + \dots + \tau_{M-1}^* \tau_M^*$$

.....

$$m^* = \tau_1^* \tau_2^* \dots \tau_M^*$$

$$a = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_N$$

.....

$$n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_N$$

C.3 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA.

La Función de Transferencia (T.F.) se define en el espacio de Laplace, como el cociente entre la transformada de la función “respuesta” del sistema, en el numerador, dividido la transformada de la función “entrada” (W), en el denominador. A partir de lo anterior, la T.F. se puede expresar como un cociente de polinomios en p, de diferente grado:

$$T.F.(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{\text{polin.grado} < N}{\text{polin.grado} N}$$

Las soluciones del polinomio del numerador τ_j^* se denominan ceros, mientras que las del polinomio denominador τ_i , se llaman polos. Los polinomios se puede expresar como productos de binomios en que intervienen los ceros y los polos:

$$T.F.(p) = S \frac{\prod_{j=1}^M (\tau_j^* p + 1)}{\prod_{i=1}^N (\tau_i p + 1)} \quad [C.7]$$

donde: S es una constante, igual a la sensibilidad del sistema.
y $M < N$ son los grados del polinomio del numerador y del denominador, respectivamente.

Para un sistema térmico, $\tau_j^* \in \Re$ y $\tau_j^* > 0$
 $\tau_i \in \Re$ y $\tau_i > 0$.

El cociente T.F. se puede descomponer en fracciones simples:

$$T.F.(p) = \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{p + \omega_i} \quad [C.8]$$

donde: $\omega_i = 1 / \tau_i$, son los coeficientes de las fracciones simples.

En el espacio temporal (habiendo aplicado la transformada inversa de Laplace):

$$T.F.(t) = \mathcal{L}^{-1} [T.F.(p)]$$

$$T.F.(t) = \sum_{i=1}^N a_i e^{-\omega_i t} = \sum_{i=1}^N a_i e^{-t/\tau_i} \quad [C.9]$$

La T.F. en el espacio temporal está formada por un conjunto de exponenciales.

C.4. REFERENCIAS.

¹ Carslaw, H.S. & Jaeger, J.C. *Conduction of Heat in Solids*. London: Oxford at the Clarendon Press. 1959.

² Tachoire, Henri; Torra, Vicenç. *Apport de L'Informatique en Calorimetrie a Conduction*. Marseille et Palma de Mallorca, 1990.

³ Isalgué, A.; Ortin, J.; Torra, V.; Viñals, J. *Heat Flux Calorimeters: Dynamical Model by Localized Time Constants*. Anales de Física. Vol. 76, 1980, pp. 192- 196.