CAPÍTOL II

HIPERELASTICITAT AL PLA

2.1 BARRA HIPERELÀSTICA AL PLA.

Una vegada definits al capítol anterior els elements bàsics (material, geometria, constants, etc.) que formen el que serà una estructura hiperelàstica, passem a continuació a estudiar el comportament del que és la base d'aquestes estructures: la barra hiperelàstica.

2.1.1 Desplaçament d'un nus extrem.

Suposem una barra hiperelàstica de longitud inicial L, situada al pla de tal manera que un dels seus nusos extrems coincideix amb el punt "i" de coordenades (xi,yi) i l'altre amb el punt "k" (xk,yk). Així doncs, aquesta barra té en aquest moment una longitud real Lt tal que

$$Lt = \sqrt{Lx^2 + Ly^2} \qquad \text{sent}$$

$$Lx = xk - xi \qquad \text{i} \qquad Ly = yk - yi$$

evidentment per la llei de Hooke, aquesta barra està sotmesa a una tensió T tal que:

$$T = \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{Lt}\right) \cdot K$$

sent K la constant hiperelàstica d'aquesta barra.

Aquesta tensió T pot descompondre's en les seves components segons els eixos coordenats: Tx i Ty .

$$Tx = T \cdot Lx / Lt \qquad ; \qquad Ty = T \cdot Ly / Lt$$

Si sotmetem al nus "k" a un desplaçament dky paral.lel a l'eix d'ordenades i aquest desplaçament és molt petit, podrem fer servir tot el que s'ha estudiat al paràgraf 1.5 del capítol anterior.

Veiem així que després de sofrir el punt "k" aquest desplaçament dky , la tensió de la barra ha variat. Aquesta variació o increment es pot explicitar a través de la variació de cada una de les seves components.

Segons les equacions 1.15 i 1.16 tindrem:

$$dTy = Rly \cdot dky$$

$$dTx = Rty \cdot dky$$

sent Rly i Rty les rigideses lineal i transversal de la barra amb el valor que s'obté a través de les equacions 1.13 i 1.14 ; és a dir:

$$Rly = \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{Lt} + \frac{Ly^2}{Lt^3} \right) \cdot K$$

$$Rty = \frac{Lx \cdot Ly}{Lt^3} \cdot K$$

Sotmetem, a continuació al punt "k" ja desplaçat a un nou desplaçament dkx , aquesta vegada paral.lel a l'eix d'abscisses. (fig. 2.1)

Si aquest desplaçament és molt petit podrem repetir el procés anterior i obtindrem:

$$dTy = Rtx \,.\, dkx$$

$$dTx = Rlx \,.\, dkx$$

sent aquesta vegada:

$$Rlx = \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{Lt} + \frac{Lx^2}{Lt^3} \right) . K$$

$$Rtx = \frac{Lx \,.\, Ly}{Lt^3} . K$$

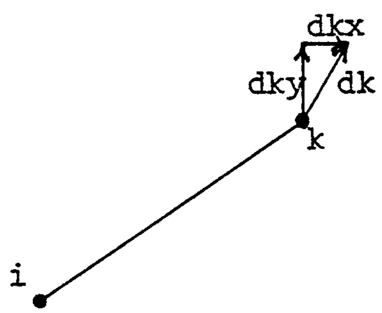


Fig. 2.1

Abans de seguir endavant cal fixar-se que

$$Rtx = Rty = \frac{Lx \,.\, Ly}{Lt^3} . K$$

per tant a partir d'ara utilitzarem en lloc de Rtx i Rty la notació "Rt".

Tornant al cas que estàvem estudiant, veiem que una vegada el punt "k" ha estat sotmès a ambdós desplaçaments dkx i dky , la tensió final de la barra ha sofert també dos augments i que les components finals d'aquesta tensió seran:

$$Tfx = Tx + Rt.dky + Rlx.dkx \qquad \text{(eq. 2.1)}$$

$$Tfy = Ty + Rt.dkx + Rly.dky \qquad \text{(eq. 2.2)}$$

o també podem dir que els augments totals han estat:

$$dTxk = Rt.dky + Rlx.\ dkx \qquad \text{(eq. 2.3)}$$

$$dTyk = Rt.\ dkx + Rly.dky \qquad \text{(eq. 2.4)}$$

És evident que si la barra al començament estava en equilibri, i ara ho ha de seguir estant, a l'extrem contrari d'on s'han aplicat els desplaçaments, és a dir, al nus "i" han hagut d'aparéixer uns augments de tensió iguals i de sentit contrari dels que han aparegut al nus "k". Així:

$$dTxi = -\ Rt.dky - Rlx.dkx \qquad \text{(eq. 2.5)}$$

$$dTyi = -\ Rt.dkx - Rly.dky \qquad \text{(eq. 2.6)}$$

2.1.2 Desplaçament d'ambdós nusos extrems.

Quan en una barra hiperelàstica en equilibri, a cada un dels dos nusos extrems se'ls aplica un desplaçament (di; dk respectivament) apareixen en aquests nusos uns augments de tensió que són funció d'aquests desplaçaments. No cal dir, per la mateixa raó que abans, que els augments produïts al nus "i" seran del mateix valor absolut però de sentit contrari que els que es produeixin al nus "k".

Per tot el que s'ha vist a l'apartat anterior 2.1.1, aquests augments de tensió, aplicant les equacions 2.3;2.4;2.5 i 2.6, seran: (Fig. 2.2)

$$dTxi = Rt.diy + Rlx.dix - Rt.dky - Rlx.dkx$$

$$dTyi = Rt.dix + Rly.diy - Rt.dkx - Rly.dky$$

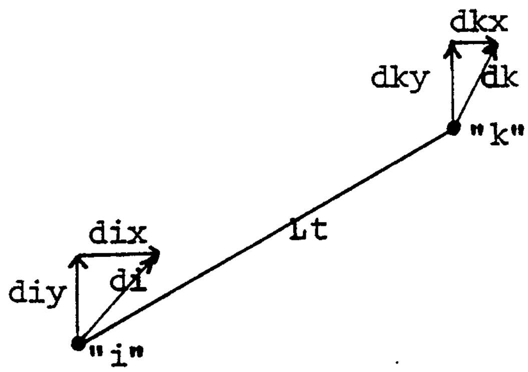


Fig. 2.2

$$dTxi = Rt.(diy - dky) + Rlx.(dix - dkx) \quad \text{(eq. 2.7)}$$

$$dTyi = Rt.(dix - dkx) + Rly.(diy - dky) \quad \text{(eq. 2.8)}$$

i anàlogament:

$$dTxk = - dTxi \quad \text{(eq. 2.9)}$$

$$dTyk = - dTyi \quad \text{(eq. 2.10)}$$

2.2 NUS HIPERELÀSTIC.

Donat un conjunt de n barres hiperelàstiques, tals que un dels seus nusos extrems sigui comú a totes, definirem com a Nus Hiperelàstic a aquest nus "O". (Fig. 2.3)

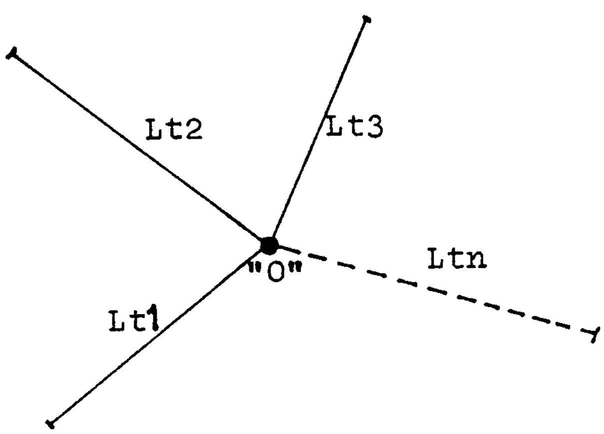


Fig. 2.3

2.3 RIGIDESES LINEAL I TRANSVERSAL D'UN NUS HIPERELÀSTIC.

Sia un nus hiperelàstic O al qual hi concorren n barres hiperelàstiques. (fig. 2.3)

Cada una d'aquestes barres hiperelàstiques està sotmesa a una tensió Ti que, segons Hooke, val:

$$Ti = \left(\frac{Lti}{Li} - 1\right) \cdot Ki \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sent Li la longitud inicial de cada barra, Lti la longitud real en aquest moment i Ki la constant hiperelàstica de cada barra. Cada una d'aquestes tensions Ti pot descompondre's en les seves components Tix ; Tiy i per tant al nus O ens trobarem amb un conjunt de tensions que, tot plegat, tindran una resultant, les components de la qual seran:

$$TOx = \Sigma\ Tix \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad \text{(eq. 2.11)}$$

$$TOy = \Sigma\ Tiy \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad \text{(eq. 2.12)}$$

Apliquem al nus O un desplaçament dO , de components sobre els eixos coordenats dOx ; dOy (fig. 2.4)

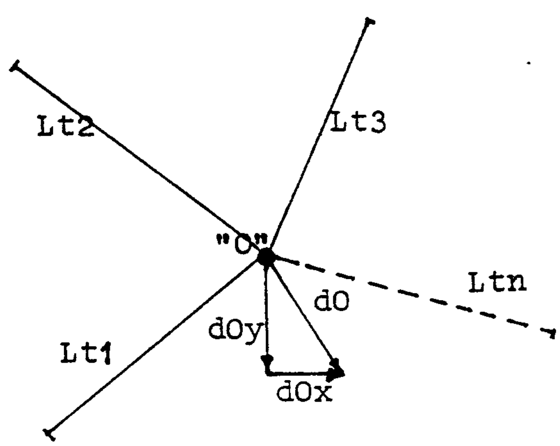


Fig. 2.4

Degut a aquests desplaçaments dOx ; dOy cada una de les barres hiperelàstiques concorrents al nus O sofreix un augment de tensió que es reflecteix amb un augment de les components Tix ; Tiy d'aquesta mateixa barra. Aquest augment es pot quantificar a través de les equacions 2.3 ; 2.4 .

$$dTix = Rti.dOy + Rlix.dOx \qquad \text{(eq. 2.13)}$$

$$dTiy = Rti.dOx + Rliy.dOy \qquad \text{(eq. 2.14)}$$

Per tant, l'augment de les components (equacions 2.11 ; 2.12) de la tensió resultant al punt O serà:

$$dTOx = \Sigma\ dTix\ ,(i = 1,\ldots,n) \qquad \text{(eq. 2.15)}$$

$$dTOy = \Sigma\ dTiy\ ,(i = 1,\ldots,n) \qquad \text{(eq. 2.16)}$$

Aquests sumatoris últims, d'acord amb les equacions 2.13 ; 2.14 valen:

$$\Sigma\ dTix = dOy.\Sigma Rti + dOx.\Sigma Rlix\ ,\ (i= 1,\ldots,n) \qquad \text{(eq. 2.17)}$$

$$\Sigma\ dTiy = dOx.\Sigma Rti + dOy.\Sigma Rliy\ ,\ (i= 1,\ldots,n) \qquad \text{(eq. 2.18)}$$

Per analogia d'aquestes equacions amb les 2.3 ; 2.4 podrem definir com a rigidesa lineal d'un nus hiperelàstic "O" a un valor tal que les seves components segons els eixos coordenats valguin:

$$RlOx = \Sigma\ Rlix\ ,\ (i= 1,\ldots,n) \qquad \text{(eq. 2.19)}$$

$$RlOy = \Sigma\ Rliy\ ,\ (i= 1,\ldots,n) \qquad \text{(eq. 2.20)}$$

Igualment, definirem com a rigidesa transversal d'un nus hiperelàstic O al valor:

$$RtO = \sum Rti \ , \ (i = 1, \ldots, n) \qquad \text{(eq. 2.21)}$$

El significat d'aquests valors R1Ox, R1Oy, RtO és òbviament el mateix que el que tenen les rigideses lineal i transversal d'una barra hiperelàstica i que ja s'ha explicat al final de l'apartat 1.5 del capítol anterior.

Així doncs, si a les equacions 2.15 ; 2.16 hi substituïm els valors que hem obtingut a les equacions 2.17 ; 2.18 ; 2.19 ; 2.20 i 2.21 obtindrem:

$$dTOx = dOx \cdot R1Ox + dOy \cdot RtO \qquad \text{(eq. 2.22)}$$

$$dTOy = dOy \cdot R1Oy + dOx \cdot RtO \qquad \text{(eq. 2.23)}$$

equacions que ens relacionen directament l'augment de les tensions existents en un nus hiperelàstic amb els desplaçaments soferts per aquest mateix nus, això a través d'unes constants que anomenem rigideses lineals i transversal d'aquest nus.

2.4 MODIFICACIONS DE LES RIGIDESES LINEALS I TRANSVERSAL D'UN NUS HIPERELÀSTIC.

A l'apartat anterior, hem definit les rigideses d'un nus hiperelàstic sota la hipòtesi de que els altres nusos extrems de cada barra romanien fixes quan es desplaçava aquest nus hiperelàstic. El que ara anem a veure és quina modificació tindran aquestes rigideses, o més exactament les equacions establertes a l'apartat 2.3 , quan aquesta hipòtesi no es compleixi.

Suposem, doncs, el nus hiperelàstic "O" al que hi concorren n barres hiperelàstiques. Cada una d'aquestes barres té l'altre nus extrem "Ai" (i = 1,...,n) situat de tal manera que Lti és la distància entre "O" i "Ai".

Apliquem al nus hiperelàstic "O" un desplaçament dO de components dOx ; dOy (Fig. 2.5). Així mateix, a cada nus extrem "Ai" li apliquem un desplaçament dAi de components dAix ; dAiy. Si tots aquests desplaçaments són petits podrem establir un seguit d'equacions basades en les rigideses lineals i transversal de cada barra (capítol I) i del propi nus.

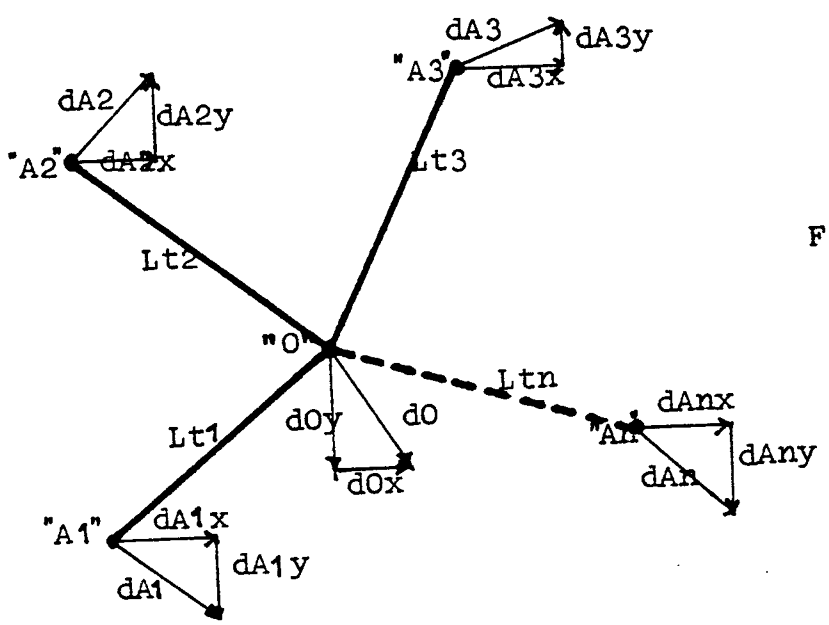


Fig. 2.5

Per un costat, hem vist abans que degut al desplaçament del nus hiperelàstic O , aquest nus sofreix un augment de tensions (eq. 2.22 ; 2.23). Per un altre costat anem a veure què passa quan un nus extrem Ai sofreix un desplaçament dAi (fig. 2.5) de components dAix ; dAiy.

A través de les equacions 2.5 ; 2.6 veiem que al nus hiperelàstic O hi apareixeran uns augments de tensió:

$$dTOx = - Rlix \cdot dAix - Rti \cdot dAiy$$

$$dTOy = - Rliy \cdot dAiy - Rti \cdot dAix$$

sent Rlix ; Rliy ; Rti les rigideses lineals i transversal de la barra que uneix el nus O amb el nus Ai .

Naturalment això ho podrem aplicar a cada barra i al final veurem que la variació total de la tensió en el nus O degut al desplaçament dels altres nusos extrems de cada barra concorrent en ell és:

$$dTOx = - \Sigma\, Rlix.dAix - \Sigma\, Rti.dAiy \quad ;(i=1,\ldots,n)$$

$$dTOy = - \Sigma\, Rliy.dAiy - \Sigma\, Rti.dAiy \quad ;(i=1,\ldots,n)$$

Si ara sumem aquestes dues equacions que acabem d'obtenir a les 2.22 ; 2.23 ens quedarà:

$$dTOx = dOx.RlOx + dOy.RtO - \Sigma Rlix.dAix - \Sigma Rti.dAiy \qquad (i=1,\ldots,n) \qquad (eq.2.24)$$

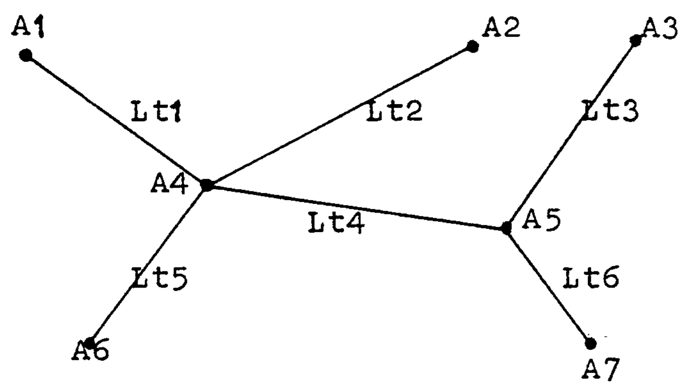
$$dTOy = dOy.RlOy + dOx.RtO - \Sigma Rliy.dAiy - \Sigma Rti.dAix \qquad (i=1,\ldots,n) \qquad (eq.2.25)$$

equacions que ens relacionen l'augment de les tensions produïdes en un nus hiperelàstic amb els desplaçaments soferts per aquest mateix nus i els altres nusos extrems de cada barra a través de les rigideses lineals i transversal del nus i les rigideses lineals i transversal de cada una de les barres que hi concorren.

2.5 ESTRUCTURA HIPERELÀSTICA

Definirem com una estructura hiperelàstica al conjunt de "n" nusos hiperelàstics, units entre sí mitjantçant barres hiperelàstiques.

Mentre estem treballant amb problemes situats al pla, tindrem que una estructura hiperelàstica plana és aquella en la qual tots els seus nusos són coplanaris. (Fig. 2.6).



(Fig. 2.6)

Una estructura hiperelàstica serà susceptible de ser estudiada (i eventualment calculada) quan estigui sotmesa a un estat de càrregues o deformacions; és a dir, quan la totalitat dels nusos que la formen no estiguin en equilibri.

Tant les càrregues com les deformacions s'hauran d'aplicar directament sobre els nusos que formen l'estructura, ja que si s'apliquessin sobre les barres, aquestes no podrien suportar-ho, atesa la pròpia definició de barra hiperelàstica. (Apartat 1.2.c))

2.6 TIPOLOGIA DE NUSOS EN UNA ESTRUCTURA HIPERELÀSTICA PLANA

No tots els nusos que componen una estructura hiperelàstica tenen les mateixes propietats. És evident que si tots els nusos tinguessin, per exemple, el desplaçament lliure en qualsevol direcció del pla, davant una força que s'apliqués a l'estructura aquesta quedaria en un estat de moviment continu, ja que no hi podria existir cap reacció. Les reaccions són sempre produïdes, doncs, als nusos **fixos**, és a dir, als nusos que tenen la deformació restringida en una o les dues direccions del pla.

Un cas semblant, però de sentit contrari, el tenim quan apliquem a un nus un desplaçament determinat. Si aquest nus no roman fix després d'aquest desplaçament, aquest no li hauria servit per a res, ja que el nus tornarà a moure's en llibertat en funció de la resta de càrregues o desplaçaments que s'apliquin a l'estructura. Així doncs, quan a un nus se li aplica un desplaçament determinat en una direcció, cal que a partir d'aquest moment, el nus resti immòbil en aquesta direcció.

D'aquestes i altres consideracions que encara es podrien fer sobre aquest tema, podem deduir que existeixen diversos tipus de nus. Anem-los a estudiar:

2.6.1 <u>Nus fix.</u>

Direm que un nus d'una estructura hiperelàstica plana és fix quan tingui coartats els desplaçaments lliures en les dues direccions del pla. En un nus així no s'hi ha d'aplicar cap tipus de força ja que no afectaria en res al comportament de l'estructura, perquè tota la reacció a aquesta força es produiria precisament en aquest nus.

En una estructura carregada en estat d'equilibri aquest nus pot posseir una reacció amb components segons els dos eixos coordenats. Per altra banda, un nus d'aquest tipus pot haver sofert un desplaçament determinat previ a les càrregues, també segons els dos eixos coordenats, i romandre fix després, durant l'aplicació de les càrregues a l'estructura.

2.6.2 Nus tipus "x".

Direm que un nus d'una estructura hiperelàstica plana és del tipus "x" quan només pot moure's lliurement en la direcció de l'eix d'abscisses x . Per tant aquest nus no podrà tenir component x en la seva reacció a l'estat d'equilibri, ja que si fos així, en poder moure's lliurement en aquesta direcció, el nus, i per tant l'estructura, no estaria en equilibri.

Per altra banda aquest tipus de nus pot acceptar un desplaçament previ en el sentit de l'eix d'ordenades y , ja que després restarà immòbil en aquesta direcció. Igualment, les càrregues aplicables en aquest tipus de nus tindran només component x , que resulta ser l'única que forçarà un desplaçament del nus. Una força de component y seria completament inútil, i tota la reacció a ella es concretaria en el propi nus.

2.6.3 Nus tipus "y".

Tot el que s'ha dit a l'apartat anterior 2.6.2 pot repetir-se per a aquest tipus de nus, canviant totes les referències a l'eix d'abscisses x per l'eix d'ordenades y i viceversa.

2.6.4 Nus lliure.

Direm que un nus d'una estructura hiperelàstica plana és del tipus lliure quan pugui desplaçar-se sense cap coerció en les dues direccions del pla. Aquest tipus de nus, per tant, no podrà tenir en l'estat d'equilibri cap reacció, ja que el moviment seria immediat. Tampoc se li poden aplicar desplaçaments previs a les càrregues perquè quedarien sense efecte una vegada s'haguessin aplicat aquelles. Tanmateix aquests nusos podran suportar qualsevol càrrega amb component x i y .

EXEMPLE:

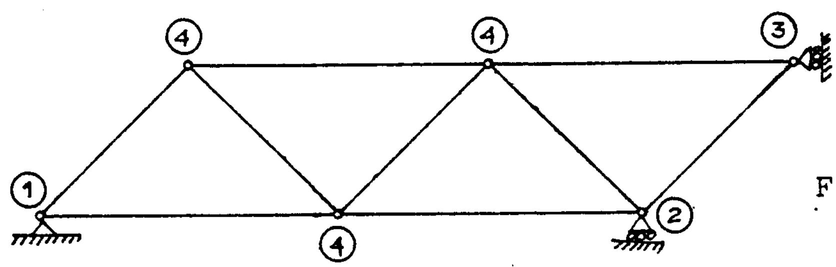


Fig. 2.7

1 Nus fix
2 Nus tipus "x"
3 Nus tipus "y"
4 Nus lliure