UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departament d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i Informàtica Industrial

A MIXED QUALITATIVE QUANTITATIVE SELF-LEARNING CLASSIFICATION TECHNIQUE APPLIED TO SITUATION ASSESSMENT IN INDUSTRIAL PROCESS CONTROL

Autor: J. Carlos Aguado Chao
Director: Josep Aguilar Martín

1998

PRIMERA PART:
OPERADORS D'INDISTINGIBILITAT

Capítol 1.
Quasi-inverses de t-normes.

Sumari:

S'introdueix de forma breu les connectives més generalment acceptades en el marc de la lògica difusa, (t-normes, t-conormes, negacions i funcions d'implicació). S'estudia amb detall les quasi-inverses de t-normes (implicació residuada) pel protagonisme que prenen en capítols succesius. En especial es tracta els aspectes de continuïtat i algunes propietats relatives a la simplificació d'expressions que inclouen composició de t-normes i quasi-inverses.

Aportacions d'aquesta memòria:

- Teorema de descomposició de quasi-inverses (Teorema 1.2.25).
- Lemes de simplificació i composició per a quasi-inverses.
- Teorema 1.2.13 de caracterització de t-normes contínues per l'esquerra respecte a les dues variables per separat.

La resta tracta de resultats que, en general, són coneguts, però aquí es presenten sota hipòtesis més febles.

1.1 t-normes, t-conormes i funcions de negació

A continuació es dóna un breu resum de propietats elementals relatives a t-normes, t-conormes i funcions de negació, que es basa en [Godo, 90] [Jacas, 87].

Es disposa de gran nombre de referències on es troben estudis més amplis del tema, entre les que es destaca [Alsina et al., 83].

Definició 1.1.1. Una operació $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ és una **t-norma** si satisfà:

1.1.1.1. Associativa: $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y),z)$

1.1.1.2. Commutativa: $T(x,y) = T(y,x)$

1.1.1.3. Monotonia: si $x \leq x'$ llavors $T(x,y) \leq T(x',y)$
si $y \leq y'$ llavors $T(x,y) \leq T(x,y')$

1.1.1.4. Condicions de contorn: $T(1,x) = x$
$T(0,x) = 0$

Definició 1.1.2. Una operació $S : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ és una **t-conorma** si satisfà:

1.1.2.1. Associativa: $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y),z)$

1.1.2.2. Commutativa: $S(x,y) = S(y,x)$

1.1.2.3. Monotonia: si $x \leq x'$ llavors $S(x,y) \leq S(x',y)$
si $y \leq y'$ llavors $S(x,y) \leq S(x,y')$

1.1.2.4. Condicions de contorn: $S(1,x) = 1$
$S(0,x) = x$

Les t-normes i les t-conormes extenen a context multivaluat les connectives conjunció i disjunció clàssiques respectivament.

Els elements **idempotents** respecte les operacions T i S es defineixen com és habitual:

Definició 1.1.3.

$$\begin{aligned}
E(T) &= \{x \in [0,1] \,/\, T(x,x) = x\}, \\
E(S) &= \{x \in [0,1] \,/\, S(x,x) = x\} \quad \textbf{(idempotents)} \\
\mathrm{NIL}(T) &= \{x \in [0,1] \,/\, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } T^n(x) = 0\} \\
\mathrm{NIL}(S) &= \{x \in [0,1] \,/\, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } S^n(x) = 1\} \quad \textbf{(nilpotents)}
\end{aligned}$$

on T^n i S^n es defineixen de forma recurrent per $T^1(x) = x$, $T^n(x) = T(T^{n-1}(x), x)$, $S^1(x) = x$, $S^n(x) = S(S^{n-1}(x), x)$.

Definició 1.1.4. Una t-norma T contínua és arquimediana si $E(T) = \{0,1\}$

Una t-conorma S contínua és arquimediana si $E(S) = \{0,1\}$

Les t-normes i t-conormes arquimedianes venen caracteritzades pels següents teoremes de representació.

Teorema 1.1.5.(Ling) Una t-norma T és arquimediana si, i només si, existeix una funció contínua i estrictament decreixent $f : [0,1] \to [0,+\infty]$ amb $f(1) = 0$ tal que

$$T(x,y) = f^{[-1]}(f(x) + f(y)).$$

Aquí $f^{[-1]}$ indica la pseudo-inversa de f, definida per

$$f^{[-1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0 \\ f^{-1}(x), & \text{si } x \in [0, f(0)] \\ 0, & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

NOTA. No s'exclou el cas que $f(0) = +\infty$.

La funció f es coneix com a **generador additiu** de T.

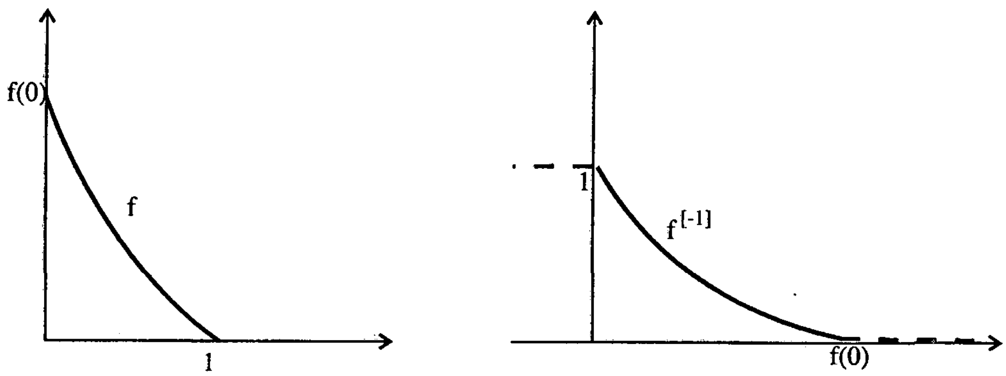

Figura 1.1.

En cert sentit, el teorema precedent estableix que les t-normes arquimedianes són operacions molt semblants, des d'un punt de vista algèbric i topològic, a la suma ($f(0) = \infty$) o a la suma acotada ($f(0) < \infty$) de nombres reals positius.

Es disposa també del corresponent teorema de Representació per t-conormes.

Teorema 1.1.5.bis (Ling) Una t-conorma S és arquimediana si, i només si, existeix una funció contínua i estrictament creixent $g : [0,1] \to [0,\infty]$ amb $g(0) = 0$ tal que

$$S(x,y) = g^{[-1]}(g(x) + g(y))$$

Com abans, la funci g és el **generador additiu** de S, i $g^{[-1]}$ està definida per la pseudo-inversa de g

$$g^{[-1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > f(1) \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in [0, f(1)] \\ 0 & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

Els generadors additius són únics llevat de constants multiplicatives i el fet que siguin o no acotats està estretament relacionat amb els elements nilpotents.

Teorema 1.1.6. Sigui T t-norma arquimediana, i f un generador additiu

$$f(0) < \infty \quad \text{si, i només si,} \quad \mathrm{NIL}(T) = [0,1).$$

En cas contrari, $\mathrm{NIL}(T) = \{0\}$. ■

Teorema 1.1.6.bis Sigui S t-conorma arquimediana, i g un generador additiu

$$g(1) < \infty \text{ si, i només si, } \mathrm{NIL}(S) = (0,1]$$

En cas contrari, $\mathrm{NIL}(S) = \{1\}$. ■

Els teoremes precedents justifiquen les següents definicions:

Definició 1.1.7. Una t-norma T arquimediana és **estricta** si $\mathrm{NIL}(T) = \{0\}$.

Definició 1.1.7.bis Una t-conorma S arquimediana és **estricta** si $\mathrm{NIL}(S) = \{1\}$.

Definició 1.1.8. Una t-norma T arquimediana és **no estricta (o nilpotent)** si $\mathrm{NIL}(T) = [0,1)$.

Definició 1.1.8.bis Una t-conorma S arquimediana és **no estricta (o nilpotent)** si $\mathrm{NIL}(S) = (0,1]$.

La importància de les t-normes (respectivament t-conormes) arquimedianes és que qualsevol t-norma (respectivament t-conorma) contínua pot obtenir-se a partir d'una família de t-normes (respectivament t-conormes) arquimedianes.

Teorema 1.1.9. [Schweizer & Sklar, 83] Sigui T una t-norma contínua. Llavors $[0,1]-E(T) = \cup_{i\in I}(a_i,b_i)$, i existeix una família de funcions contínues i estrictament decreixents $f_i : [a_i,b_i] \to [0,+\infty]$ amb $f_i(b_i) = 0$, $i \in I$, tal que:

$$T(x,y) = \begin{cases} f_i^{[-1]}(f_i(x)+f_i(y)), & \text{si } (x,y) \in (a_i,b_i)\times(a_i,b_i) \\ \mathrm{MIN}\{x,y\}, & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

Aquí, $f_i^{[-1]}$ ve definida per:

$$f_i^{[-1]}(x) = \begin{cases} b_i, & \text{si } x \le 0 \\ f^{-1}(x), & \text{si } x \in (0, f(a)) \\ a_i & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

NOTA. No s'exclou el cas $f_i(a_i) = +\infty$.

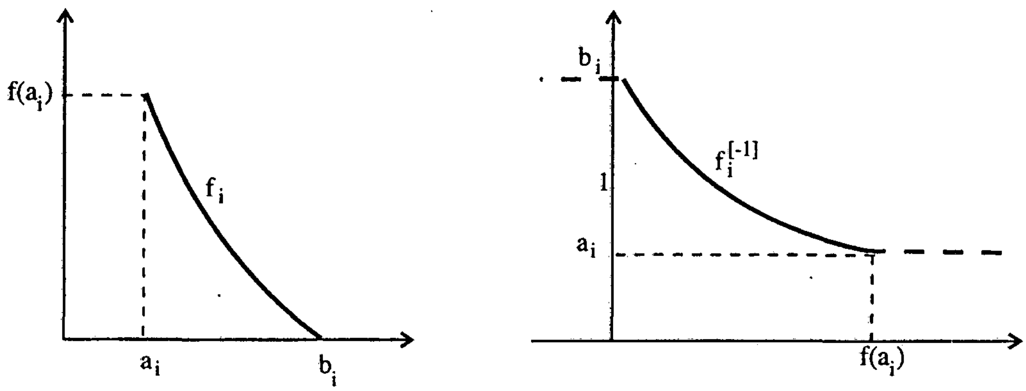

Figura 1.2.

En la situació del teorema 1.1.9, direm que la t-norma T s'ha descompost en **suma ordinal**. (Veure [Schweizer & Sklar, 83] per una definició general de suma ordinal).

Lema 1.1.10. En les hipòtesis del Teorema 1.1.9, es té: $T(x,y) \in [a_i, b_i]$ si, i només si, $\text{MIN}\{x,y\} \in [a_i, b_i]$.

A la pràctica, aquesta propietat estableix que l'interval unitat descompon en subintervals $[a_i, b_i]$, $(i \in I)$, de manera que $t_i = T_{|[a_i,b_i]}$ és una operació de $[a_i, b_i]$ associativa, commutativa, amb neutre b_i, satisfent $T_i(a_i, x) = a_i$ per tot $x \in [a_i, b_i]$ i arquimediana. Podem considerar

$$T_i = \begin{cases} t_i(x,y) & \text{si } (x,y) \in [a_i,b_i] \times [a_i,b_i] \\ \\ \text{MIN}\{x,y\} & \text{en altre cas} \end{cases}$$

Com que MIN$\geq T$, per qualsevol t-norma T (veure exemple 1.1.12) llavors $T_i \geq T$ per tot $i \in I$, d'on resulta:

Corol·lari 1.1.11. En la situació del Teorema 1.1.9 i les notacions anteriors,

$$T = \text{INF}_{i \in I} T_i$$

Com sempre, es disposa de resultats anàlegs per t-conormes.

Teorema 1.1.9.bis Sigui S una t-conorma contínua. Llavors $[0,1]-E(S)=\bigcup_{i\in I}(a_i,b_i)$, i existeix una família de funcions contínues i estrictament creixents $g_i:[a_i,b_i]\longrightarrow[0,+\infty]$ amb $f_i(a_i)=0$, $i\in I$ tal que:

$$S(x,y)=\begin{cases} g_i^{[-1]}(g_i(x)+g_i(y)) & \text{si } (x,y)\in(a_i,b_i)\times(a_i,b_i)\\ \mathrm{MAX}\{x,y\} & \text{en altre cas.}\end{cases}$$

($g_i^{[-1]}$ es defineix de forma anàloga a com s'ha fet amb $f_i^{[-1]}$).

Si definim $s_i=S_{|[a_i,b_i]}$, i $S_i=\begin{cases} s_i(x,y) & \text{si } (x,y)\in[a_i,b_i]\times[a_i,b_i]\\ \mathrm{MAX}\{x,y\} & \text{en altre cas.}\end{cases}$ com que MAX$\leq S$ per qualsevol t-norma S (veure exemple 1.1.12) llavors $S_i\leq S$ per tot $i\in I$, d'on resulta:

Corol·lari 1.1.11.bis En la situació del Teorema 1.1.9.bis i les notacions anteriors,

$$S=\mathrm{SUP}_{i\in I}S_i.$$

■

Els següents són exemples de t-normes i t-conormes. És costum presentar-los en parelles degut a la relació existent entre unes i altres via les funcions de negació, que s'exposarà més endavant.

Exemple 1.1.12.

$$T(x,y)=\mathrm{MIN}\{x,y\},\qquad S(x,y)=\mathrm{MAX}\{x,y\}$$

Són, respectivament, la t-norma més gran i la t-conorma més petita (i.e. $\mathrm{MIN}\{x,y\}\geq T(x,y)$ per tota t-norma T, i per tots $x,y\in[0,1]$, $\mathrm{MAX}\{x,y\}\leq S(x,y)$ per tota t-conorma S, i per tots $x,y\in[0,1]$).

No són arquimedianes, atès que $\mathrm{MIN}\{x,x\}=x$ i $\mathrm{MAX}\{x,x\}=x$, per tot $x\in[0,1]$, i per tant, $E(T)=E(S)=[0,1]$.

Exemple 1.1.13.

$$T(x,y)=Z(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\neq 1 \text{ i } y\neq 1\\ x & \text{si } y=1\\ y & \text{si } x=1\end{cases}$$

$$S(x,y) = Z'(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 1 \text{ i } y \neq 1 \\ x & \text{si } y = 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

No són contínues, NIL(T) =NIL(S) = $[0,1)$.

Són, respectivament, la t-norma més petita i la t-conorma més gran.

Exemple 1.1.14. (Lukasiewicz)

$T(x,y) = \text{Ł}(x,y) = \text{MAX}\{x+y-1,0\}$ $S(x,y) = \text{Ł}'(x,y) = \text{MIN}\{x+y,1\}$

Són arquimedianes no estrictes. Els seus generadors additius:

$$\begin{aligned} f: [0,1] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto 1-x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g: [0,1] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Exemple 1.1.15.(Producte)

$$T(x,y) = x \cdot y \qquad S(x,y) = x + y - x \cdot y$$

Són arquimedianes estrictes. Els seus generadors additius:

$$\begin{aligned} f: [0,1] &\longrightarrow [0,+\infty] \\ x &\longmapsto -\ln x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g: [0,1] &\longrightarrow [0,+\infty] \\ x &\longmapsto -\ln(1-x) \end{aligned}$$

Si les t-normes i t-conormes representen la conjunció i disjunció en el cas multivaluat, les funcions de negació extenen la connectiva negació clàssica.

Definició 1.1.16 Una **funció de negació** $n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ és una funció decreixent tal que $n(0) = 1$ i $n(1) = 0$. Si $n(n(x)) \leq x$ per a tot $x \in [0,1]$, es diu que n és una funció de negació **ordinària**, i si $n(n(x)) \geq x$ per a tot $x \in [0,1]$, es diu que n és **feble**. Finalment, si n és ordinària i feble alhora (i.e. $n(n(x)) = x \ \forall x \in (0,1)$), s'anomena **negació forta**.

En [Trillas, 79] es caracterizen les negacions fortes.

Teorema 1.1.17. $n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ és una funció de negació forta si, i només si, existeix una funció contínua i estrictament creixent $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ amb $g(0) = 0$ tal que

$$n(x) = g^{-1}(g(1) - g(x)), \quad \text{per tot } x \in [0,1]$$

Teorema 1.1.18. $n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ és una funció de negació forta si, i només si, existeix una funció contínua i estrictament creixent $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ amb $f(1) = 0$ tal que

$$n(x) = f^{-1}(f(0) - f(x)), \qquad \text{per tot } x \in [0,1].$$

Sigui n una funció de negació forta, i T i S una t-norma i una t-conorma respectivament. Llavors (T, S, n) s'anomena **terna de De Morgan.** T i S són n-duals en el sentit de la següent definició:

Definició 1.1.19. T i S són n-duals si

$$T = n \circ S \circ (n \times n) \quad \text{ó, equivalentment, } S = n \circ T \circ (n \times n)$$

El generador additiu f d'una t-norma i la funció de negació proporcionen el generador additiu g de la t-conorma S n-dual de T, $g = f \circ n$, (i recíprocament $f = g \circ n$).

Els exemples precedents (Exemples 1.1.11-1.1.14) són ternes de De Morgan respecte la negació forta $n(x) = 1 - x$.

1.2 Quasi-inverses de t-normes: algunes propietats

A [Valverde, 82] es dóna un conjunt mínim de propietats que una funció I ha de satisfer per a ser considerada com una extensió al cas multivaluat de la connectiva implicació:

Definició 1.2.1. Una funció d'implicació és una funció $I : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1)$ tal que:

1.2.1.1. Si $x \leq x'$ llavors $I(x,y) \geq I(x',y)$

1.2.1.2. Si $y \leq y'$ llavors $I(x,y) \leq I(x,y)$

1.2.1.3. $I(0,0) = 1$ (Principi de Falsedat)

1.2.1.4. $I(1,x) = x$ (Principi de Neutralitat)

1.2.1.5. $I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z))$ (Principi d'Intercanvi)

De fet, a [Valverde, 82] s'exigeix també la continuïtat de I. Aquesta condició és, però, massa restrictiva, ja que deixa fora funcions d'implicació molt usades, i, en particular, les implicacions residuades de les que s'ocupa aquest capítol.

Hi ha dos grans grups de funcions d'implicació (no són els únics!), segons que aquestes provinguin del formalisme booleà $\neg p \vee q$ (implicacions fortes o S-implicacions) o del intuicionista (implicació residuada o R-implicació). Les S-implicacions s'obtenen de forma natural extenent $\neg p \vee q$ al cas multivaluat a través d'una funció de negació forta i una t-conorma S:

$$I(x,y) = S(n(x),y)$$

Les R-implicacions es defineixen per residuació respecte a una conjunció (t-norma) T,

$$I(x,y) = \hat{T}(x|y) = \sup\{\alpha \in [0,1] \ / \ T(\alpha,x) \leq y\}$$

Definició 1.2.2. $\hat{T}(x|y)$ s'anomena la **quasi-inversa** de T.

En la literatura és freqüent notar T per $\otimes$ i $\hat{T}(x|y)$ per $x \otimes y$ o, simplement, $x \longrightarrow y$.

Les R-implicacions satisfan $I(x,x) = 1$ i, tal com es veurà, aquesta propietat és bàsica per treballar amb equivalències difuses, atès que permet assegurar que si $x = y$, llavors $E(x,y) = T(I(x,y), I(y,x)) = 1$. En general, la quasi-inversa d'una t-norma no és una funció d'implicació, sinó només una quasi-implicació.

Definició 1.2.3. [Godo, 90] Una **quasi-implicació** és una funció $Q : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tal que:

1.2.3.1. Si $x \leq x'$, llavors $I(x,y) \geq I(x',y)$

1.2.3.2. Si $y \leq y'$, llavors $I(x,y) \leq I(x,y')$

1.2.3.3. $I(0,0) = 1$ (Principi de Falsedat)

1.2.3.4. $I(1,x) = x$ (Principi de Neutralitat).

O sigui, les quasi-implicacions són implicacions sobre les quals no es té garantit el principi d'intercanvi (1.2.1.5) i, per tant, constitueixen una classe més general de funcions que les implicacions en sentit estricte.

Proposició 1.2.4.

(a) Si T és una t-norma, llavors $\hat{T}$ (la seva quasi-inversa) és quasi-implicació.

(b) Si T és una t-norma contínua per l'esquerra respecte les dues variables per separat, llavors $\hat{T}$ és una implicació.

NOTA. En [Godo, 90] aquesta proposició s'enuncia per una classe més general de funcions que les t-normes: les anomenades funcions generadores de Modus Ponens.

Exemple 1.2.5. Si $T = Z$, llavors $\hat{T}(x|y) = \begin{cases} y & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{en altre cas.} \end{cases}$

Convé notar que en aquest cas, $\hat{T}$ és una funció d'implicació encara que T no sigui contínua per l'esquerra respecte les seves variables per separat. Això proporciona un contraexemple al recíproc de l'apartat b) de la proposició anterior.

Exemple 1.2.6. Si T =MIN, llavors $\hat{T}(x|y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ y, & \text{si } x > y \end{cases}$

Exemple 1.2.7. Si T = L, llavors $\hat{T}(x|y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ 1 - x + y, & \text{si } x > y \end{cases}$

Exemple 1.2.8. Si T =prod, llavors $\hat{T}(x|y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ \frac{y}{x}, & \text{si } x > y \end{cases}$

L'estudi de les funcions d'implicació com a connectors de la lògica multivaluada, és un tema profusament tractat a la literatura, amb excel·lents referències (veure, per exemple, [Trillas & Valverde, 84b], [Alsina et al. 95]). L'objectiu d'aquest capítol és proporcionar algunes propietats i lemes relatius a la quasi-inversa $\hat{T}$, d'una t-norma T, que seran d'interès en les demostracions que apareixen en els capítols següents. Si bé moltes d'elles són conegudes, i apareixen parcial o globalment en diversos treballs, ho fan sovint sota la hipòtesi de continuïtat de T. Aquí s'ha intentat, fins allà on ha estat possible, de no fer ús del Teorema de Representació de Ling en les demostracions d'aquests lemes, basant-les només en les propietats elementals de les t-normes. Això fa que alguns d'ells tinguin un àmbit de validesa molt general, que s'extén fins i tot al cas no continu i, inclús, més enllà de les t-normes, al no commutatiu.

Comencem amb algunes propietats elementals.

Proposició 1.2.9. Per una t-norma T qualsevol, es té:

a) Si $x \leq y$, llavors $\hat{T}(x|y) = 1$.

b) Si $T(z,x) \leq y$, llavors $\hat{T}(x|y) \geq z$.

c) Si $T \leq T'$, llavors $\hat{T} \geq \hat{T}'$.

d) $\hat{T}(x|T(y,x)) \geq y$.

e) Si $T(\hat{T}(x|y),x) \geq y$, llavors $x \geq y$.

f) $T(y,x) \geq \mathrm{INF}\{\alpha/\hat{T}(x|\alpha) \geq y\}$.

Demostració. Trivial. ■

Encara que les t-normes no són, en general, operacions simetritzables, (les trajectòries no són injectives [Lang, 71], la quasi-inversa juga, en cert sentit, el paper d'operació inversa de la t-norma. Seguint aquesta idea, s'estudien algunes propietats relatives a la simplificació d'expressions que inclouen composició de t-normes i quasi-inverses. La idea general és que es mantenen moltes de les propietats vàlides en grups canviant, però, les igualtats per desigualtats.

Lema 1.2.10. (Primer de simplificació) Per una t-norma T qualsevol es té:

$$\hat{T}(T(x,z)|T(y,z)) \geq \hat{T}(x|y).$$

Demostració. (a) Considerem

$$A_1 = \{\alpha \in [0,1] /\ T(\alpha,x) \leq y\}$$

$$A_2 = \{\alpha \in [0,1] / \; T(\alpha, T(x,z) \leq T(y,z)\}$$

Si $\alpha \in A_1$, es té $T(\alpha, T(x,z)) = T(T(\alpha,x),z) \leq T(y,z)$, per qualsevol, $z \in [0,1]$, d'on $\alpha \in A_2$.

Així, $A_1 \subset A_2$, $\hat{T}(x|y) = \mathrm{SUP}\, A_1 \leq \mathrm{SUP}\, A_2 = \hat{T}(T(x|z)|T(y|z))$. ■

Lema 1.2.11. Si T és una t-norma qualsevol, llavors $\hat{T}(x|y)$ és monòtona creixent i contínua per la dreta respecte la segona variable y.

Demostració. monotonia: trivial.
continuïtat:

Donats $x, y \in [0,1]$ considerem una successió $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ monòtona decreixent, de límit y. Notem $A_n = \{\alpha \in [0,1]/T(\alpha,x) \leq y_n\}$, $A = \{\alpha \in [0,1]/T(\alpha,x) \leq y\}$.

És evident que $A \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. D'altra banda si $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, serà $T(a,x) \leq y_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ i, per tant, $T(a,x) \leq \mathrm{INF}_{n\in\mathbb{N}}\, y_n = y$, d'on $a \in A$.

Així $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió decreixent de conjunts tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$. Per tant, $\mathrm{SUP}\{A_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{SUP}\, A$ i.e. $\hat{T}(x|y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \hat{T}(x|y)$.
■

Lema 1.2.12. Si $T(x,y)$ és contínua per l'esquerra respecte la segona variable y, llavors $\hat{T}(x|y)$ és monòtona decreixent i contínua per l'esquerra respecte la variable primera x.

Demostració. monotonia: trivial.
continuïtat:

Donats $x, y \in [0,1]$ considerem $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ monòtona creixent, de límit x. Notem $A_n = \{\alpha \in [0,1] \,/\, T(\alpha, x_n) \leq y\}$ i $A = \{\alpha \in [0,1] \,/\, T(\alpha,x) \leq y\}$.

És evident que $A \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. A més si $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, serà $T(a,x_n) \leq y \; \forall n \in \mathbb{N}$ i, per la continuïtat de T, $y \geq \mathrm{SUP}_{n\in\mathbb{N}}\, T(a,x_n) = T(a, \mathrm{SUP}_{n\in\mathbb{N}}\, x_n) = T(a,x)$, d'on $a \in A$. Així $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió decreixent de conjunts tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$, i per tant, $\mathrm{SUP}\{A_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{SUP}\, A$ i.e. $\hat{T}(x_n|y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \hat{T}(x|y)$. ■

NOTA. La condició és essencial. Contraexemple: $T = Z$.

La condició de continuïtat per l'esquerra respecte les dues variables per separat, resulta essencial a l'hora d'obtenir moltes de les propietats elementals sobre quasi-inverses.

La següent proposició caracteritza les t-normes que satisfan aquesta condició.

Teorema 1.2.13. Per una t-norma T qualsevol, són equivalents:

(a) T és contínua per l'esquerra respecte la variable x (i.e. $\mathrm{SUP}_{i\in I} T(x_i, y) = T(\mathrm{SUP}_{i\in I} x_i, y)$)

(b) $T(\hat{T}(y|z), \hat{T}(x|y)) \leq \hat{T}(x|z)$ (T transitivitat)

(c) $T(\hat{T}(x|y), x) \leq y$ (Modus Ponens)

(d) $T(x, y) \leq z$ si, i només si, $x \leq \hat{T}(y|z)$

(e) $\mathrm{INF}\{\alpha/\hat{T}(x|\alpha) \geq y\} = T(x, y)$.

Demostració. (a) $\Rightarrow$ (b) Trivial a partir de la definició de quasi-inversa.

(b) $\Rightarrow$ (c) Prenent $x = 1$ en (b), s'obté:

$$T(\hat{T}(y|z), y) \leq z.$$

(c) $\Rightarrow$ (d) Suposem $x \leq \hat{T}(y|z)$. Aplicant (c), s'obté:

$$T(x, y) \leq T(\hat{T}(y|z), y) \leq z.$$

(d) $\Rightarrow$ (a) En general, $\mathrm{SUP}\, T(x_i, y) \leq T(\mathrm{SUP}\, x_i, y)$. Per veure l'altre desigualtat, notem $x = \mathrm{SUP}_{i\in I} x_i$, $z = \mathrm{SUP}_{i\in I} T(x_i, y)$.

Per tot $i \in I$, $T(x_i, y) \leq z$ i, per tant, $\mathrm{SUP}_{x=i\in I} x_i \leq \mathrm{SUP}\{\alpha/T(\alpha, y) \leq z\} = \hat{T}(y|z)$ d'on aplicant (d) resulta $T(x, y) \leq z$, i.e. $T(\mathrm{SUP}_{i\in I} x_i, y) \leq \mathrm{SUP}\, T(x_i, y)$.

(d) $\Rightarrow$ (e)

$$T(x, y) \leq \mathrm{INF}\{\alpha/\hat{T}(x|\alpha) \geq y\} \text{ per qualsevol t-norma } T.$$

A més, suposant (d), resulta $\hat{T}(x|\alpha) \geq y \Leftrightarrow T(y,x) \leq \alpha$, d'on $T(x,y) = \mathrm{INF}\{\alpha/\hat{T}(x|\alpha) \leq y\}$.

(e) $\Rightarrow$ (c)

$$T(x,\hat{T}(y|x)) = \mathrm{INF}\{\alpha/\hat{T}(x|\alpha) \geq \hat{T}(x|y)\} \leq y.$$

■

A més, sota la hipòtesi de continuïtat de T es pot demostrar $T(\hat{T}(x|y),x) = y$ si, i només si, $x \geq y$ [Valverde, 82].

NOTA. A partir d'ara, ens referirem al fet que una t-norma sigui contínua per l'esquerra respecte les dues variables per separat dient simplement que és **contínua per l'esquerra.**

En particular, la propietat (e) estableix que, dintre de la classe de les t-normes contínues per l'esquerra, t-normes diferents generen quasi-inverses diferents [Godo, 90]. Això no és cert per a t-normes qualssevol.

Exemple 1.2.14. Considerem les t-normes:

$$T_1(x,y) = \begin{cases} \mathrm{MIN}\{x,y\} & \text{si } (x,y) \in \left[\frac{1}{2},1\right) \times \left[\frac{1}{2},1\right) \\ x, & \text{si } y = 1 \\ y, & \text{si } x = 1 \\ 0, & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

$$T_2(x,y) = \begin{cases} T_1(x,y) & \text{si } (x,y) \neq \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\ 0, & \text{si } (x,y) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

És una simple comprovació veure que $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$. ■

Teorema 1.2.15. Siguin T_1 i T_2 t-normes tals que $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$. Llavors les seccions de T_1 i T_2 per x constant i y constant coincideixen, llevat dels punts on aquestes seccions presenten discontinuïtat de salt.

Demostració. Evident a partir de la definició de quasi-inversa. ■

Lema 1.2.16. (D'Intercanvi) Si T és contínua per l'esquerra, llavors $T(x,\hat{T}(y|z)) \leq \hat{T}(y|T(x,z))$

Demostració. Notem $A = \{\alpha / T(\alpha, y) \leq z\}$

$$\begin{aligned} T(T(x, \hat{T}(y|z)), y) &= T(T(x, \mathrm{SUP}\, A), y) = \\ &= \operatorname*{SUP}_{\alpha \in A} T(x, T(\alpha, y)) \leq \operatorname*{SUP}_{\alpha \in A} T(x, z) = T(x, z), \end{aligned}$$

i, per tant, $T(x, \hat{T}(y|z)) \leq \hat{T}(y(T(x, z))$. ■

NOTA. El lema d'intercanvi no és equivalent a la continuïtat per l'esquerra. Exemple: $T = Z$.

Lema 1.2.17.(Segon de simplificació) Si T és contínua per l'esquerra, es té:

(a) $\hat{T}\left(\hat{T}(z|x)|\hat{T}(z|y)\right) \geq \hat{T}(x|y)$

(b) $\hat{T}\left(\hat{T}(y|z)|\hat{T}(x|z)\right) \geq \hat{T}(x|y)$

Demostració. És conseqüència immediata del Teorema 1.2.13b. ■

Per aplicació reiterada del lema anterior s'obté:

Corol·lari 1.2.18. Donats $x, y, z_1, \ldots, z_n \in [0,1]$, es té:

(a) $\hat{T}\left(\underbrace{\hat{T}(...\hat{T}}_{n}(z_1|z_2)|...z_n)|x\right)\Big|\underbrace{\hat{T}\Big(...\hat{T}}_{n}(z_1|z_2)|...z_n)|y)\Big) \geq \hat{T}(x|y)$

(b) $\hat{T}(\hat{T}(\ldots\hat{T}(x|z_1)|\ldots|z_n)\Big|\hat{T}(\ldots\hat{T}(y|z_1)|\ldots|z_n)\Big) \geq \begin{cases} \hat{T}(x|y) & \text{si } n \text{ parell} \\ \hat{T}(y|x) & \text{si } n \text{ senar} \end{cases}$

NOTA. El lema 1.2.18. no caracteritza les t-normes contínues per l'esquerra. Contraexemple: $T = Z$.

Lema 1.2.19. (Primer de composició) [Pultr, 84] [Godo, 90] Si T és contínua per l'esquerra:

$$\hat{T}(x|\hat{T}(y|z)) = \hat{T}(T(x,y)|z).$$

Demostració. Considerem $A = \{\alpha \in [0,1] \;/\; T(\alpha, x) \leq \hat{T}(y|z)\}$ i $B = \{\alpha \in [0,1] \;/\; T(\alpha, T(x,y)) \leq z\}$.

Si $\alpha \in A$, $T(\alpha, T(x,y)) = T(T(\alpha,x),y) \leq T(\hat{T}(y|z),y) \leq z$ (lema 1.2.13), d'on $\alpha \in B$.

Recíprocament, si $\alpha \in B$, $T(T(\alpha,x),y) = T(\alpha, T(x,y)) \leq z$ i, per tant, $T(\alpha, x) \leq \hat{T}(y|z)$, d'on $\alpha \in A$, i per tant, $A = B$.

Així, $\hat{T}(x|\hat{T}(y|z)) = \text{SUP } A = \text{SUP } B = \hat{T}(T(x,y)|z)$. ■

NOTA. El lema 1.2.19 no caracteritza les t-normes contínues per l'esquerra. Contraexemple $T = Z$.

Per aplicació reiterada del lema anterior s'obté:

Corol·lari 1.2.20.

$$\hat{T}\big(x_1|\hat{T}(x_2|\ldots|\hat{T}(x_{n-1}|x_n))\ldots\big) = \hat{T}\big(T(\ldots T(x_1,x_2),\ldots x_{n-1})|x_n\big), \quad n \geq 4.$$

■

Lema 1.2.21. (Segon de composició) Si T és contínua per l'esquerra,

$$\hat{T}(\hat{T}(x|y)|z) \geq T(x, \hat{T}(y|z)).$$

Demostració.

$$T\big(T(x,\hat{T}(y|z)),\hat{T}(x|y)\big) = T\big(x, T(\hat{T}(x|y),\hat{T}(y|z))\big) \leq T(x,\hat{T}(x|z)) \leq z \quad ■$$

Per aplicació reiterada del lema anterior, s'obté:

Corol·lari 1.2.22.

$$\hat{T}(\hat{T}(\ldots\hat{T}(x_1|x_2)|\ldots|x_n) \geq \begin{cases} T\big(\ldots T(\hat{T}(x_1|x_2),\hat{T}(x_3|x_4))\ldots\big),\hat{T}(x_{n-1}|x_n)) & \text{si } n \geq 4 \text{ parell} \\ T\big(\ldots T(x_1|\hat{T}(x_2|x_3))\ldots\big),\hat{T}(x_{n-1}|x_n)) & \text{si } n \geq 4 \text{ senar} \end{cases}$$

NOTA. $\hat{Z}$ també satisfà el lema 1.2.21 i, per tant, aquest no caracteritza les t-normes contínues per l'esquerra.

Lema 1.2.23. Si T és contínua per l'esquerra, $\hat{T}(x|y) = \mathrm{SUP}\{\alpha \ / \ \hat{T}(\alpha|y) \geq x\}$.

Demostració. Considerem $A = \{\alpha / T(\alpha, x) \leq y\}$ i $B = \{\alpha / \hat{T}(\alpha|y) \geq x\}$. Clarament $A \subseteq B$, i per la continuïtat per l'esquerra de T, també $B \subseteq A$. ∎

NOTA. El lema 1.2.23 no caracteritza les t-normes contínues per l'esquerra.

Contraexemple:

$$T(x,y) = \begin{cases} \mathrm{MIN} & \text{si } (x,y) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ x & \text{si } y = 1, \\ y & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

Per acabar es consideren algunes propietats elementals sobre quasi-inverses que es basen en la representació per generadors additius i sumes ordinals de t-normes. Així, d'ara endavant assumirem que la t-norma T és contínua.

Proposició 1.2.24. [Valverde, 82] Si T és arquimediana de generador additiu f, llavors $\hat{T}(x|y) = f^{[-1]}(f(y) - f(x))$. ∎

Teorema 1.2.25. Una funció $\hat{T} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ és la quasi-inversa d'una t-norma T contínua si, i només si, existeix una família $\{(a_i, b_i)\}_{i \in I}$ d'intervals oberts disjunts de $[0,1]$ i una família de funcions $f_i : [a_i, b_i] \longrightarrow [0, f_i(a_i)]$ contínues, monòtones decreixents amb $f_i(b_i) = 0$

tal que

$$\hat{T}(x|y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ f^{[-1]}(f_i(y) - f_i(x)), & \text{si } (x,y) \in [a_i, b_i) \times [a_i, b_i) \\ y, & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

NOTES:

(a) Per tant: $\hat{T}$ és la quasi-inversa del mínim, o bé $f_i^{[-1]}(f_i(y) - f_i(x))$, depenent de (x, y).

(b) No s'exclou el cas $I = \emptyset$ (T =MIN)

(c) No s'exclou el cas $f_i(a_i) = +\infty$.

Demostració. $\Rightarrow$) Per ser T contínua, admet descomposició com a suma ordinal. Siguin $\{(a_i, b_i)\}_{i\in I}$ i $f_i : [a_i, b_i] \longrightarrow [0, f_i(a_i)]$ la família d'intervals i funcions corresponents a aquesta descomposició.

Donats $x, y \in [0,1]$, suposem $x \geq y$ (si $x < y$, $\hat{T}(x|y) = 1$). Considerem dos casos:

- Si $(x,y) \notin (a_i, b_i) \times (a_i, b_i)$ per cap $i \in I$, llavors $T(\alpha, x) = \mathrm{MIN}\{\alpha, x\} = \alpha$ per tot $\alpha \leq y$. Per tant, $\hat{T}(x|y) = \mathrm{SUP}\{\alpha \in [0,1]/T(\alpha, x) \leq y\} = \mathrm{SUP}\{\alpha \in [0,1]/\alpha \leq y\} = y$.
- Si existeix $i \in I$ tal que $(x,y) \in (a_i, b_i) \times (a_i, b_i)$, llavors $\hat{T}(x|y) = \mathrm{SUP}\{\alpha \in [0,1]/T(\alpha, x) \leq y\} =$
$\mathrm{SUP}\{\alpha \in (a_i, b_i)/f_i^{[-1]}(f_i(x) + f_i(\alpha)) \leq y\} = f_i^{[-1]}(f_i(y) - f_i(x))$

$\Leftarrow$) Es considera la t-norma T contínua obtinguda com a suma ordinal d'aquesta família d'intervals i generadors. ■

Sota hipòtesi de continuïtat de T, algunes desigualtats en els lemes anteriors es transformen en igualtats.

Corol·lari 1.2.26. Sigui T una t-norma contínua i $x, y, z \in [0,1]$ tal que $z \leq y \leq x$. Llavors $T(\hat{T}(x|y)|\hat{T}(y|z)) = \hat{T}(x|z)$.

Demostració. La demostració es basa en el Teorema 1.2.14. Si $T = \oplus_{i\in I} T_i$ és la descomposició de T en suma ordinal, es pot donar un dels següents casos:

(1) $x,y,z \in (a_i,b_i)$. Llavors $T(\hat{T}(x|y)|\hat{T}(y|z)) =$

$$\begin{aligned} &= f_i^{[-1]}\Big(f_i(f_i^{[-1]}(f_i(y)-f_i(x))) + f_i(f_i^{[-1]}(f_i(z)-f_i(y)))\Big) = \\ &= f_i^{[-1]}(f_i(z)-f_i(x)) = \hat{T}(x|z). \end{aligned}$$

(2) $y,z \in (a_i,b_i)$ per algun $i \in I$, però $x \notin (a_i,b_i)$. En aquest cas, $\hat{T}(x|y) = y$ i $\hat{T}(x|z) = z$, i així $T(\hat{T}(x|y)|\hat{T}(x|z)) = \hat{T}(y|z)$.

(3) $y,x \in (a_i,b_i)$ per algun $i \in I$, però $z \notin (a_i,b_i)$. Llavors $T(\hat{T}(x|y)|\hat{T}(y|z)) = T(\hat{T}(x|y)|z) = z = \hat{T}(y|z)$.

(4) En qualsevol altre cas, $\hat{T}(x|y) = \mathrm{MIN}\{x,y\} = y$ i $\hat{T}(x|z) = \mathrm{MIN}\{x,z\}$, d'on $T(\hat{T}(x|y)|\hat{T}(x|z)) = \hat{T}(y|z)$.

■

Corol·lari 1.2.27. Sigui T una t-norma contínua i $x,y,z \in [0,1]$ tal que $z \leq y \leq x$. Llavors $\hat{T}(\hat{T}(x|y)|\hat{T}(x|z)) = \hat{T}(y|z)$.

Demostració. Anàloga a la del corol·lari 1.2.26. ■

Curiosament, en les mateixes hipòtesis del Corol·lari 1.2.27 es té que $\hat{T}\left(\hat{T}(y|z)|\hat{T}(x|z)\right) \geq \hat{T}(y|z)$, però en general no val la igualtat (T =MIN).

NOTA FINAL. Donada una t-conorma S, la seva quasi-inversa es defineix com $\hat{S}(x|y) = \mathrm{INF}\{\alpha \in [0,1]/S(\alpha,x) \geq y\}$. Per la dualitat existent entre t-normes i t-conormes, totes les propietats enunciades valen també, invertint les desigualtats de forma convenient, per quasi-inverses de t-conormes.

Veure [Jacas, 93] per alguns exemples d'aplicacions d'aquestes propietats en el camp de les S-mètriques.