UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departament d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i Informàtica Industrial

A MIXED QUALITATIVE QUANTITATIVE SELF-LEARNING CLASSIFICATION TECHNIQUE APPLIED TO SITUATION ASSESSMENT IN INDUSTRIAL PROCESS CONTROL

Autor: J. Carlos Aguado Chao
Director: Josep Aguilar Martín

1998

Capítol 2
Operadors de T-indistingibilitat

Sumari:

Després d'una breu introducció dels conceptes fonamentals (veure també la Introducció) s'estudia l'estructura reticular del conjunt H_E dels generadors d'un operador de T-indistingibilitat E. Resulta conegut que H_E és el conjunt dels punts fixos de l'operador de clausura difusa ϕ_E [Jacas, 87]. Això permet aplicar el Teorema del Punt Fix de Tarski [Tarski, 55], i obtenir així una nova demostració del fet que H_E és un subreticle complet de $[0,1]^X$ amb l'ordre puntual. Seguidament s'introdueix un nou operador ψ_E, que és en cert sentit el simètric de ϕ_E respecte a l'ordre puntual (ψ_E proporciona fites inferiors dintre de H_E per difusos arbitraris, mentre que ϕ_E en proporciona de superiors). El conjunt de punts fixos de ψ_E és també H_E. Finalment s'introdueix la noció de base i dimensió, i s'estén el seu estudi al cas en que el cardinal del conjunt és infinit. Es generalitza el Teorema de Caracterització de T-indistingibilitats unidimensionals [Jacas, 87] i s'enuncia el corresponent per a n-dimensionals.

Aportacions d'aquesta memòria:

Llevat de l'apartat 2.1 (Generalitats), els resultats d'aquest capítol són, essencialment, nous. En destaquen:

- Teorema de descomposició d'un operador de T-indistingibilitat com a suprem d'operadors de T_i-indistingibilitat (Teorema 2.1.7.) quan $T = \oplus_{i \in I} T_i$ (suma ordinal).

- L'operador $\psi_E : H_E \rightarrow H_E$, definició i propietats. Caracterització dels generadors com a punts fixos de ψ_E. (Teorema 2.2.10).

- Nova demostració del fet que H_E és un reticle complet, com a aplicació del Teorema del Punt Fix de Tarski. (Teorema 2.2.6).

- Teorema de caracterització d'operadors de T-indistingibilitat n-dimensional (Teorema 2.3.14) i extensió del Teorema de caracterització d'unidimensionals. (Teorema 2.3.5).

2.1 Generalitats.

En tot aquest capítol T notarà una t-norma.

Una relació difusa en un conjunt X és una aplicació $R : X \times X \rightarrow [0,1]$. És, per tant, un subconjunt difús de $X \times X$, ($R \in [0,1]^{X\times X}$).

Definició 2.1.1. Una relació difusa E en un conjunt X és un **operador de T-indistingibilitat** (o, simplement, **una T-indistingibilitat**) si satisfà:

(a) $E(x,x) = 1\ \forall x \in X$ (Reflexiva)

(b) $E(x,y) = E(y,x)\ \forall x,y \in X$ (Simètrica)

(c) $T(E(x,y), E(y,z)) \leq E(x,z)\ \forall x,y,z \in X$ (T-transitiva).

Notació: Si convé especificar el domini de definició d'E, ho farem dient que (X,E) és un operador de T-indistingibilitat, (o simplement una T-indistingibilitat). Si també es vol especificar la t-norma T, ho notarem per (X,E,T).

Definició 2.1.2. Un operador de T-indistingibilitat és **separador** si satisfà:

$$E(x,y) = 1 \text{ si, i només si, } x = y.$$

Com ja s'ha explicat a la Introducció, les T-indistingibilitats extenen a context difús el concepte de relació d'equivalència, basant-se en una noció de proximitat mètrica (convé adonar-se de la semblança entre la definició d'operador de T-indistingibilitat i la de distància).

Els operadors de T-indistingibilitat reben noms diferents a la literatura depenent de la t-norma T emprada per modelitzar la transitivitat difusa:

Si T =MIN, E s'anomena similitud *(similarity)* [Zadeh, 71].

Si T = L, E s'anomena semblança *(likeness)* [Ruspini, 77].

Si T =Prod, E s'anomena relació probabilística [Menger, 51].

També s'anomenen igualtats difuses (*fuzzy equality relations*), o relacions d'equivalència difuses (*fuzzy equivalence relations*).

Per la relació existent entre t-normes i t-conormes es pot definir el concepte de S-mètrica (S t-conorma) que és, en cert sentit, el dual de l'operador de T-indistingibilitat.

Definició 2.1.3. Donada una t-conorma S, direm que una relació difusa M en un conjunt X és una S-mètrica si satisfà:

(a) $M(x,x) = 1$, $\forall x \in X$ (Reflexiva).

(b) $M(x,y) = M(y,x)$ $\forall x,y \in X$ (Simètrica).

(c) $S(M(x,y), M(y,z)) \geq M(x,z)$ $\forall x,y,z \in X$ (S-transitiva o triangular).

Les S-mètriques són espais mètrics generalitzats en el sentit de [Trillas & Alsina, 78]. Tots els resultats que s'obtindran en aquest capítol sobre T-indistingibilitats són vàlids també, mutatis mutandi, per S-mètriques.

Si la t-norma T és contínua, la descomposició $T = \oplus_{i\in I} T_i = \mathrm{INF}_{i\in I} T_i$ en suma ordinal de t-normes elementals T_i [Teorema 1.1.9, Corol·lari 1.1.11] indueix una descomposició d'E com a suprem de T_i-indistingibilitats.

Siguin $[a_{i-1}, b_{i-1}]$ i $[a_i, b_i]$ dos intervals consecutius en la descomposició de T, (i.e. $0 \leq a_{i-n} < b_{i-1} \leq a_i < b_i \leq 1$), i no existeix $j \in I$ tal que $b_{i-1} \leq a_j < b_j \leq a_i$). Considerem la funció

$$\begin{aligned} f_i : [0,1] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 1 \\ b_i, & \text{si } b_i \leq x < 1 \\ x, & \text{si } b_{i-1} \leq x < b_i \\ 0, & \text{si } 0 \leq x < b_{i-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

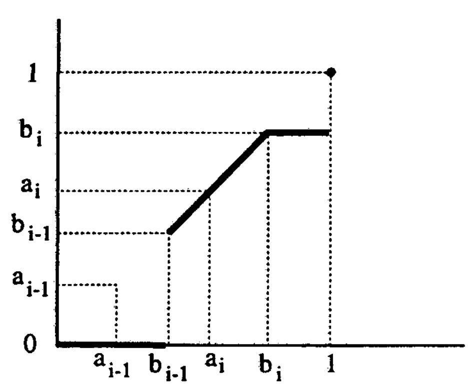

Figura 2.1.

Lema 2.1.4 f_i divideix $[0,1]$ en 4 zones:

$$A_1 = [0, b_{i-1}), \quad A_2 = [b_{i-1}, b_i), \quad A_3 = [b_i, 1), \quad A_4 = \{1\}$$

de manera que:

(a) $f_i(x) \in A_k \Leftrightarrow x \in A_k$, $\forall k = 1,2,3,4$.

(b) $T_i(x,y) \in A_k \Leftrightarrow T(x,y) \in A_k$.

A més, si $T_i(x,y) \in A_2$, llavors $T(x,y) = T_i(x,y)$.

Demostració.
(a) Trivial

(b) Procedim per casos. Donats $x, y \in [0,1]$, pot passar que:

CAS 1. $x \notin \bigcup\limits_{j\in I} [a_j, b_j)$ ó $y \notin \bigcup\limits_{j\in I} [a_j, b_j)$

CAS 2. $x \in \bigcup\limits_{j\in I} [a_j, b_j)$ i $y \in \bigcup\limits_{j\in I} [a_j, b_j)$.

<u>CAS 1</u>: $T(x,y) = T_i(x,y) = \mathrm{MIN}\{x,y\}$.

<u>CAS 2</u>: Siguin $x \in [a_m, b_m)$ i $y \in [a_n, b_n)$.
Si $m \neq n$, llavors $T = T_i = \mathrm{MIN}$.
Si $m = n = i$, llavors $T(x,y) = T_i(x,y)$.
Si $m = n \neq i$, llavors $a_m \leq T(x,y) = T_m(x,y) < T_i(x,y) = \mathrm{MIN}(x,y) < b_m$, i per tant, $T(x,y) \in [a_m, b_m)$ i $T_i(x,y) \in [a_m, b_m)$ i, en particular, són del mateix A_k $(k = 1,2,3)$. ■

Lema 2.1.5. f_i satisfà:

(a) $f_i \circ T = f_i \circ T_i$

(b) $T_i(f_i(x), f_i(y)) = f_i(T_i(x,y))$.

Demostració.
(a) Conseqüència del lema 2.1.4.b.

(b) Procedim per casos: (suposem $x \leq y$, i per tant, $f_i(x) \leq f_i(y)$)

CAS 1: $f_i(x) = x$ i $f_i(y) = y$.
Llavors $x, y \in A_2$ i també $T_i(x,y) \in A_2$. Per tant: $T_i(f_i(x), f_i(y)) = T_i(x,y) = f_i(T_i(x,y))$.

CAS 2: $f_i(x) = 0$.
Llavors $x \in A_1$, i $T_i(f_i(x), f_i(y)) = T_i(0, f_i(y)) = 0 = f_i(T_i(x,y))$.

CAS 3: $f_i(y) = b_i$.
Llavors $y \in A_3$, i $T_i(f_i(x), f_i(y)) = \mathrm{MIN}(f_i(x), b_i) = f_i(x) = f_i(\mathrm{MIN}\{x,y\}) = f_i(T_i(x,y))$.

CAS 4: $f_i(y) = 1$.
Llavors $y \in A_4 (= 1)$, i $T_i(f_i(x), f_i(y) = T_i(f_i(x), 1) = f_i(x) = f_i(T_i(x,1)) = f_i(T_i(x,y))$. ■

Proposició 2.1.6. Amb les notacions i hipòtesis precedents, considerem per cada $i \in I$, $E_i(x,y) = f_i(E(x,y))$.

(a) $E_i \leq E, \quad \forall i \in I$

(b) E_i és operador de T_i-indistingibilitat en X.

(c) $E = \mathrm{SUP}_{i \in I} E_i$.

Demostració.
(a) Trivial ($f_i(x) \leq x$, $\forall x \in [0,1]$).

(b) Reflexiva i Simètrica: trivial.

T_i-transitivitat:

$$\begin{aligned} T_i(E_i(x,y), E_i(y,z)) &= T_i(f_i(E(x,y)), f_i(E(y,z))) = \\ &= f_i(T_i(E(x,y), E(y,z)) = f_i(T(E(x,y), E(y,z)) \\ &\leq f_i(E(x,z)) = E_i(x,z). \end{aligned}$$

(c) Donat $E(x,y) \neq 1$, existeix $i \in I$ tal que $E(x,y) \in [b_{i-1}, b_i)$, i, per tant, $E(x,y) = E_i(x,y)$. (Si $E(x,y) = 1$, llavors $E(x,y) = E_i(x,y)$ $\forall i \in I$).

■

Com a conseqüència de la proposició anterior, podem enunciar el següent teorema:

Teorema 2.1.7. (de descomposició). Sigui T contínua, i $T = \oplus_{i \in I} T_i$ la seva descomposició com a suma ordinal. Llavors, si E és operador de T-indistingibilitat, existeix una família $\{E_i\}_{i \in I}$ d'operadors de T_i-indistingibilitat en X tal que $E = \mathrm{SUP}_{i \in I} E_i$.

Demostració. Trivial. ■

Sota la hipòtesi de continuïtat per l'esquerra respecte les dues variables per separat de la t-norma T es pot obtenir alguns exemples i resultats fonamentals.

Exemple 2.1.8. Sigui $X = [0,1]$ i T contínua per l'esquerra. Llavors: $E_T(x,y) = \mathrm{MIN}\{\hat{T}(x|y), \hat{T}(y|x)\} = \hat{T}(\mathrm{MAX}\{x,y\} | \mathrm{MIN}\{x,y\})$ és operador de T-indistingibilitat.

Demostració. Reflexivitat i Simetria: trivial.

T-transitivitat: Teorema 1.2.13. ■ .

Lema 2.1.9. Si E és una T-indistingibilitat en X (T qualsevol) llavors:

a) $\hat{T}(E(x,y)|E(x,z)) \geq E(y,z)$

b) $E_T(E(x,y), E(y,z)) \geq E(y,z)$.

Demostració. Trivial a partir de 2.1.1.c (T-transitivitat). ■

E_T és la T-indistingibilitat que indueix T en [0,1] de forma natural. Com es veurà més endavant, és l'operador de T-indistingibilitat bàsic a partir del qual es construeix tots els altres. En general E_T no és contínua, però presenta una conducta força regular per pas al límit:

Lema 2.1.10. Sigui $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successió convergent de [0,1], $y = \lim_{n \to \infty} y_n$, i $x \in [0,1]$ qualsevol. Si T és contínua per l'esquerra i $\lim_{n \in \mathbb{N}} E_T(x, y_n)$ existeix, llavors

$$E_T(x,y) = E_T\big(x, \lim_{n \in \mathbb{N}} y_n\big) \geq \lim_{n \in \mathbb{N}} E_T(x, y_n).$$

Demostració. Qualsevol successió convergent té alguna parcial monòtona convergent i de mateix límit. Per tant, n'hi ha prou amb demostrar el lema per successions monòtones. Procedint per casos:

(1) $\{y_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ monòtona creixent, $\lim_{n\in\mathrm{N}} y_n = y \leq x$.

$$\begin{aligned} E_T\left(x, \lim_{n\in\mathrm{N}} y_n\right) &= \hat{T}\left(x|\operatorname*{SUP}_{n\in\mathrm{N}} y_n\right) \geq \operatorname*{SUP}_{n\in\mathrm{N}} \hat{T}(x|y_n) = \\ &= \operatorname*{SUP}_{n\in\mathrm{N}} E_T(x|y_n) = \lim_{n\in\mathrm{N}} E_T(x, y_n). \end{aligned}$$

(2) $\{y_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ monòtona decreixent, $\lim_{n\in\mathrm{N}} y_n = y \leq x$.

$$\begin{aligned} E_T\left(x, \lim_{n\in\mathrm{N}} y_n\right) &= \hat{T}\left(x|\operatorname*{INF}_{n\in\mathrm{N}} y_n\right) = \operatorname*{INF}_{n\in\mathrm{N}} \hat{T}(x|y_n) = \\ &= \lim_{n\in\mathrm{N}} \hat{T}(x|y_n) = \lim_{n\in\mathrm{N}} E_T(x, y_n) \end{aligned}$$

(3) $\{y_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ monòtona creixent, $\lim_{n\in\mathrm{N}} y_n = y > x$.

$$\begin{aligned} E_T\left(x, \lim_{n\in\mathrm{N}} y_n\right) &= \hat{T}\left(\operatorname*{SUP}_{n\in\mathrm{N}} y_n|x\right) \underset{(*)}{=} \operatorname*{INF}_{n\in\mathrm{N}} \hat{T}(y_n|x) = \\ &= \lim_{n\in\mathrm{N}} \hat{T}(y_n|x) = \lim_{n\in\mathrm{N}} E_T(y_n, x) \end{aligned}$$

La igualtat (*) requereix de la continuïtat per l'esquerra de $\hat{T}$ respecte la primera variable, condició que s'obté de la continuïtat per l'esquerra de T respecte les dues variables per separat (Lema 1.2.12).

(4) $\{y_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ monòtona decreixent, $\lim_{n\in\mathrm{N}} y_n = y > x$.

$$\begin{aligned} E_T\left(x, \lim_{n\in\mathrm{N}} y_n\right) &= \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{n\in N} y_n|x\right) \geq \operatorname*{SUP}_{n\in\mathrm{N}} \hat{T}(y_n|x) = \\ &= \lim_{n\in\mathrm{N}} \hat{T}(y_n|x) = \lim_{n\in\mathrm{N}} E_T(x, y_n) \end{aligned}$$

■

NOTA. De la demostració es desprèn que si $\lim_{n\to\infty} y_n \leq x$, llavors el resultat és cert per a qualsevol t-norma T. En aquest cas (i també en el lema 2.1.9) no es pot assegurar, però, que E_T sigui T-indistingibilitat.

Exemple 2.1.11. Sigui T contínua per l'esquerra, X conjunt i $h : X \longrightarrow [0,1]$ una aplicació. Llavors $E_h(x,y) = E_T(h(x), h(y))$ és operador de T-indistingibilitat.

Demostració. Reflexivitat i Simetria: trivial.

T-transitivitat: Lema 1.2.13. ■.

Exemple 2.1.12. Sigui T una t-norma qualsevol, X conjunt i $\{E_i\}_{i\in I}$ una família de T-indistingibilitats en X. Llavors $E = \mathrm{INF}_{i\in I} E_i$ és T-indistingibilitat.

Demostració. Reflexivitat i Simetria: trivial.

T-transitivitat:

$$\begin{aligned} T(E(x,y),E(y,z)) &= T\big(\operatorname*{INF}_{i\in I} E_i(x,y), \operatorname*{INF}_{i\in I} E_i(y,z)\big) \leq \\ &\leq \operatorname*{INF}_{i\in I} T\big(E_i(x,y), \operatorname*{INF}_{j\in I} E_j(y,z)\big) \leq \\ &\leq \operatorname*{INF}_{i\in I} T\big(E_i(x,y), E_i(y,z)\big) \leq \\ &\leq \operatorname*{INF}_{i\in I} E_i(x,z) = E(x,z). \ \blacksquare \end{aligned}$$

La importància dels exemples anteriors rau en el fet que, segons el Teorema de Representació [Valverde, 82] qualsevol operador de T-indistingibilitat es pot obtenir a partir d'ells.

En general, el Teorema de Representació s'enuncia i demostra per t-normes contínues. La versió que aquí es presenta estableix la seva validesa al cas de t-normes contínues per l'esquerra.

Teorema 2.1.13. (de Representació). Sigui E una relació difusa en X, i T t-norma contínua per l'esquerra. E és operador de T-indistingibilitat si, i només si, existeix una família $\{h_i\}_{i\in I}$ de subconjunts difusos de X, $(h_i : X \to [0,1], \forall i \in I)$ satisfent $E(x,y) = \mathrm{INF}_{i\in I} E_{h_i}(x,y)$.

Demostració. El recíproc és conseqüència directa dels exemples anteriors.

Pel directe, considerem $\{h_x\}_{x\in X}$ on

$$\begin{aligned} h_x : X &\to [0,1] \\ u &\mapsto h_x(u) = E(u,x) \end{aligned}$$

Segons el lema 2.1.8, $E_T(h_x(u),h_x(v)) = E_T(E(u,x),E(u,v)) \geq E(u,v)$, per tots $x,y,v \in X$, d'on $\mathrm{INF}_{x\in X} E_T(h_x(u),h_x(v)) \geq E(u,v)$ per tots $u,v \in X$.

A més, com que $h_u(u) = 1$, $\mathrm{INF}_{x\in X} E_T(h_x(u), h_x(v)) = E(u,v)$, per tots $u, v \in X$. ■

Aquesta demostració és la mateixa que es proposa a [Valverde, 82]. L'única raó d'incloure-la aquí és posar de manifest que la condició de continuïtat de la t-norma T en l'enunciat original del teorema es pot afeblir.

Definició 2.1.14. Donada una T-indistingibilitat E en X, una família d'aplicacions en la situació del Teorema de Representació es dirà que és una **família generadora** o un **sistema de generadors** de E.

Definició 2.1.15. Direm que un subconjunt difús $h : X \to [0,1]$ és un generador de E si forma part d'alguna família generadora.

H_E notarà el conjunt de generadors d'E. Clarament,
$H_E = \{h : X \to [0,1] \ / \ E_T(h(x), h(y)) \geq E(x,y)$, per tots $x, y \in X\}$.

Definició 2.1.16. Les aplicacions $h_x : X \to [0,1]$ definides per $h(x) = E(u,x)$ s'anomenen **columnes** d'E.

El nom de columnes prové de la notació matricial de les relacions difuses definides en un conjunt X de cardinal finit:

$$\begin{pmatrix} E(x_1,x_1) & \cdots & E(x_1,x_j) & \cdots & E(x_1,x_n) \\ \vdots & & & & \\ E(x_j,x_1) & \cdots & E(x_i,x_j) & \cdots & E(x_i,x_n) \\ \vdots & & & & \\ E(x_n,x_1) & \cdots & \cdots & \cdots & E(x_n,x_n) \end{pmatrix}$$

De la demostració del Teorema de Representació es desprèn que les columnes d'E són sempre generadors d'E, i que $\{h_x\}_{x\in X}$ és un sistema generador.

2.2 Estructura dels generadors

L'estudi dels operadors de T-indistingibilitat passa necessàriament per l'estudi del conjunt H_E dels seus generadors. Els resultats principals s'obtenen en relació a dues estructures matemàtiques: els reticles i les topologies difuses.

Les topologies difuses i la seva incidència en H_E han estat ampliament tractats en [Jacas, 87], [Recasens, 95] i el tema escapa als objectius d'aquesta memòria. En aquesta secció només es veuran propietats relatives a l'estructura reticular.

Recordem que per **reticle** s'entén un conjunt H dotat d'una relació d'ordre parcial $\leq$, (i.e. reflexiva, antisimètrica i transitiva), de manera que per cada parella d'elements $h, g \in H$ existeix la més petita de les cotes superiors (el seu suprem $h \vee g$) i la més gran de les inferiors (el seu ínfim $h \wedge g$).

A més, el reticle és **complet** si el suprem $\bigvee_{i \in I} h_i$ i l'ínfim $\bigwedge_{i \in I} h_i$ existeixen també per famílies arbitràries d'elements $\{h_i\}_{i \in I}$ [Grätzer, 78].

En aquest cas, existirà primer i últim elements: $\mathbf{1} = \bigvee H$, $\mathbf{0} = \bigwedge H$.

Definició 2.2.1. La relació d'**ordre puntual** en $[0,1]^X$ es defineix com:

$$h \leq_X g \quad \text{si, i només si, } h(x) \leq g(x) \quad \text{per tot } x \in X \;\; (h, g \in [0,1]^X).$$

L'ordre puntual defineix un ordre parcial en $[0,1]^X$, i $([0,1]^X, \leq_X)$ és un reticle complet.

Si no hi ha ambigüitat respecte el conjunt X, notarem simplement $h \leq g$.

En [Jacas, 87] es caracteritza els generadors d'un operador E de T-indistingibilitat com els punts fixos de l'operador ϕ_E, definit per:

$$\begin{array}{rcl} \phi_E : [0,1]^X & \to & [0,1]^X \\ h & \mapsto & \phi_E(h), \quad \phi_E(h)(x) = \operatorname*{SUP}_{u \in X} T(E(x,u), h(u)) \end{array}$$

Proposició 2.2.2.

(a) $\phi_E(h) \geq h$

(b) Si $h \leq h'$ llavors $\phi_E(h) \leq \phi_E(h')$ (i.e. ϕ_E és monòtona creixent respecte l'ordre puntual).

(c) $\phi_E(h_1 \vee h_2) = \phi_E(h_1) \vee \phi_E(h_2)$.

(d) $\phi_E(h) \in H_E$, per tot $h \in [0,1]^X$.

Teorema 2.2.3. **(Primer de caracterització dels generadors).** $h \in H_E$ si, i només si, $\phi_E(h) = h$.

Corol·lari 2.2.4. $\phi_E^2 = \phi_E$.

En particular, podem aplicar a ϕ_E el següent teorema del punt fix [Tarski, 55]:

Teorema 2.2.5. (Tarski) El conjunt de punts fixos d'una aplicació monòtona d'un reticle complet en sí mateix és un subreticle complet.

Així s'obté una elegant prova alternativa d'un fet conegut:

Proposició 2.2.6. H_E és un subreticle complet de $[0,1]^X$.

A més, es disposa d'una interpretació intuïtiva que explica l'acció de l'operador: $\phi_E(h)$ és el més petit dels generadors més grans que h, i, per tant, proporciona de forma efectiva una **cota superior òptima.**

Proposició 2.2.7. Per tot $h \in [0,1]^X$, $\phi_E(h) = \bigwedge\{h' \in H_E \ / \ h' \geq h\}$.

Demostració. Si $h' \in H_E$ satisfà $h' \geq h$, llavors segons les proposicions anteriors, $h' = \phi_E(h') \geq \phi_E(h)$, d'on $\bigwedge\{h' \in H_E \mid h' \geq h\} \geq \phi_E(h)$.

D'altra banda, com que $\phi_E(h) \geq h$ i $\phi_E(h) \in H_E$, també $\bigwedge\{h' \in H_E \ / \ h' \geq h\} \leq \phi_E(h)$. ■

Arribat aquest punt i considerant la simetria del reticle $[0,1]^X$, sembla del tot natural preguntar-se per l'existència d'una **cota inferior** òptima i d'una forma efectiva per al seu càlcul. Amb aquesta finalitat s'introdueix un nou operador:

$$\begin{array}{rcl} \psi_E : [0,1]^X & \to & [0,1]^X \\ h & \mapsto & \psi_E(h) \end{array}$$

on $\psi_E(h)(x) = \mathrm{INF}_{u \in X}\, \hat{T}\,(E(x,u)|h(u))$.

Els següents teoremes i proposicions estableixen que ψ_E és l'operador "simètric" de ϕ_E per sota, i que aquests dos operadors es comporten d'una manera molt semblant.

Proposició 2.2.8.

(a) $\psi_E(h) \leq h$.

(b) Si $h \leq h'$ llavors $\psi_E(h) \leq \psi_E(h')$ (i.e. ψ_E és monòtona creixent respecte l'ordre puntual).

(c) $\psi_E(h_1 \wedge h_2) = \psi_E(h_1) \wedge \psi_E(h_2)$.

Demostració. (b) i (c) són conseqüència immediata de la monotonia de $\hat{T}$ respecte la segona variable.
(a) es desprèn del fet que $\hat{T}(E(x,x)|h(x)) = h(x)$. ■

Teorema 2.2.9. $\psi_E(h) \in H_E$ per tot $h \in [0,1]^X$.

Demostració. S'ha de veure que $E_T(\psi_E(h)(x), \psi_E(h)(y)) \geq E(x,y)$, per tots $x, y \in X$, $\forall h \in [0,1]^X$.

$$
\begin{aligned}
\hat{T}(\psi_E(h)(x)|\psi_E(h)(y)) &= \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u\in X} \hat{T}(E(x,u)|h(u)) \mid \operatorname*{INF}_{u\in X} \hat{T}(E(y,u) \mid h(u))\right) = \\
&\underset{(*)}{=} \operatorname*{INF}_{u\in X} \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{v\in X} \hat{T}(E(x,v)|h(v)) \mid \hat{T}(E(y,u) \mid h(u))\right) \geq \\
&\underset{(**)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in X} \hat{T}\left(\hat{T}(E(x,u)|h(u)) \mid \hat{T}(E(y,u) \mid h(u))\right) \geq \\
&\underset{(***)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in X} \hat{T}(E(y,u) \mid E(x,u)) \\
&\underset{(****)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in X} E(x,y) = E(x,y).
\end{aligned}
$$

Les igualtats i desigualtats precedents segueixen dels següents fets:

(*) $\hat{T}$ és contínua per la dreta respecte la segona variable.

(**) $\hat{T}$ és decreixent respecte la primera variable.

(***) Lema 1.2.17.

(****) Les columnes són un sistema de generadors.

De forma totalment anàloga s'obtindria $\hat{T}(\psi_E(h)(y) \mid \psi_E(h)(x)) \geq E(x,y)$, i d'ambdues desigualtats, $E_T(\psi_E(h)(x), \psi_E(h)(y)) \geq E(x,y)$. ■

Teorema 2.2.10. (Segon de caracterització dels generadors).
$\psi_E(h) = h$ si, i només si, $h \in H_E$.

Demostració. Si $\psi_E(h) = h$, llavors $h \in H_E$ com a conseqüència del Teorema 2.2.9.

Si $h \in H_E$, només cal veure que $\psi_E(h) \geq h$) (atès que $\psi_E(h) \leq h$ sempre, segons proposició 2.2.8.b).

Per ser h generador, $\hat{T}(h(x) \mid h(y)) \geq E(x,y)$, i per tant, (Lema 1.2.23) $\hat{T}(E(x,y) \mid h(y)) \geq h(x)$.

Donada l'arbitrarietat de $x, y \in X$, $\mathrm{INF}_{y\in X}\, \hat{T}(E(x,y) \mid h(y)) = \psi_E(h)(x) \geq h(x)$. ■

Corol·lari 2.2.11. $\psi_E^2 = \psi$.

Demostració. Conseqüència dels teoremes 2.2.9 i 2.2.10. ■

Naturalment, també a ψ_E podem aplicar-li el Teorema del Punt Fix de Tarski (Teorema 2.2.5.) i obtenir el resultat que H_E és un subreticle complet de $[0,1]^X$, tal i com ja s'ha fet amb ϕ_E.

La necessitat d'establir una fita inferior ha portat en alguns casos (Rough Sets, Fuzzy Modal Logic,...) a definir-la com $n \circ \phi_E \circ n \circ h$, on n és una funció de negació forta.

El problema és que, en general, per aquest procediment s'obté una fita inferior de h, però no un generador. En [Boixader et al., 97] s'estudia aquest problema i es demostra el següent teorema:

Teorema 2.2.12. Sigui E un operador de T-indistingibilitat (T contínua) i n una funció de negació forta. Llavors $\psi_E(h) = n \circ \phi_E \circ n(h)$ $\forall h \in [0,1]^X$ si, i només si, T és una t-norma arquimediana no estricta que admet com a generador additiu el generador de n, o bé E és una relació d'equivalència clàssica. ■

També en [Boixader et al., 97] s'estudia la relació entre els operadors ϕ_E i ψ_E

i la possibilitat i necessitat (respectivament) en el marc de la lògica modal i dels rough sets, estudi que escapa als objectius d'aquesta memòria.

2.3 Dimensió d'un operador de T-indistingibilitat

Fins ara s'ha considerat el conjunt H_E de tots els generadors d'un operador de T-indistingibilitat, i se n'ha estudiat algunes propietats estructurals. H_E és, des del punt de vista del Teorema de Representació, el més gran sistema generador possible perquè conté qualsevol altre sistema generador.

A l'altre extrem, les famílies generadores formades amb el mínim nombre possible de generadors, proporcionen una gama de problemes i propietats estructurals de caire ben diferent. Són els problemes de **bases i dimensions.**

Aquests dos conceptes es formulen per primera vegada a [Jacas, 87], on es dóna un algorisme pel càlcul efectiu d'una base pel cas $|X| < \infty$ ($|X|$ denota el cardinal de X) i T =MIN. Més endavant, en [Recasens, 95] es resol el problema de trobar una base per $|X| < \infty$ i T arquimediana, i es posa de manifest la naturalesa mètrica del tema, relacionant dimensions amb *"betwennes"* mètriques [Schweizer & Sklar, 83].

La investigació que aquí s'exposa obre l'estudi del cas $|X| = \infty$, fins ara no abordat. S'abandona la via dels algorismes de càlcul i es busca un concepte general que permeti caracteritzar la dimensió d'una T-indistingibilitat, amb independència del cardinal de X i de la t-norma T.

En tota aquesta secció suposarem que la t-norma T és contínua, encara que alguns resultats són vàlids per t-normes només contínues per l'esquerra respecte les dues variables per separat.

Definició 2.3.1. Direm que $S = \{h_i\}_{i\in I}$ ($h_i \in H_E$, per tot $i \in I$) és un **sistema generador minimal** de E si:

1. S és sistema generador,

2. per tot $S' \subsetneq S$, S' no és sistema generador.

O sigui, és un sistema generador minimal respecte la inclusió de conjunts.

Definició 2.3.2. Direm que un sistema generador minimal B és una base de E si, per qualsevol altre sistema generador S, $|B| \leq |S|$.

Així, les bases són sistemes generadors amb el nombre mínim possible d'elements.

Definició 2.3.3. La **dimensió** d'E (dim E) és el cardinal d'una base d'E.

Des d'un punt de vista computacional, una base és la forma òptima d'emmagatzemar un operador de T-indistingibilitat, perquè és el mínim nombre possible de difusos que permeten generar-la via el Teorema de Representació.

Des d'un punt de vista estructural, la dimensió mesura la complexitat de l'operador respecte de la t-norma T. Així, els més simples són els unidimensionals, (dim $E = 1$), que poden ser generats per un sol difús.

En [Jacas, 87] es caracteritza les T-indistingibilitats unidimensionals, separadores per T arquimediana estricta, no estricta i T =MIN en el cas $|X| < \infty$. El següent teorema generalitza aquests resultats.

Definició 2.3.4. Direm que $(\overline{X}, \overline{E}, T)$ és una extensió de (X, E, T) si $X \subseteq \overline{X}$ i $\overline{E}(x, y) = E(x, y)$ $\forall x, y \in X$.

Per **preordre** s'entén una relació reflexiva i transitiva. Si a més és antisimètrica es parla d'un **ordre**. En ambdos cassos, es diu que la relació (ordre o preordre) és **total** si dos elements qualsevols estan sempre relacionats (i.e. si com és habitual notem per $x \leq y$ el fet que x està relacionat amb y, llavors donats dos elements x i y qualssevol, es té que $x \leq y$ o $y \leq x$).

Teorema 2.3.5. (Caracterització de les T-indistingibilitats unidimensionals).

Sigui T una t-norma contínua i (X, E) un operador de T-indistingibilitat. Són equivalents:

(a) (X, E) és unidimensional.

(b) Existeix una ampliació $(\overline{X}, \overline{E})$ de (X, E) amb $\overline{X} = X \cup \{a\}$, satisfent:

(1) Hi ha un preorde total $\leq$ en $\overline{X}$ tal que
$u \leq v \leq w \Rightarrow \hat{T}(\overline{E}(u, v) \mid \overline{E}(u, w)) = \overline{E}(v, w)$ per tots $u, v, w \in \overline{X}$.

(2) $a \leq x$ per tot $x \in X$ (i.e. a és primer element)

(c) Hi ha un preordre total $\leq$ en X tal que

(1) $x \leq y \leq z \Rightarrow \hat{T}(E(x,y) \mid E(x,z)) = E(y,z)$

(2) $\hat{T}(\mathrm{INF}_{x\leq y} E(x,y) \mid \mathrm{INF}_{x\leq z} E(x,z)) = E(y,z)$ si $y \leq z$.

Demostració.
(a) $\Rightarrow$ (b)
Sigui $\alpha = \mathrm{INF}_{x\in X} h(x)$ on $\{h\}$ és una base. Si existeix $a \in X$ tal que $h(a) = \alpha$, prenem $\overline{X} = X \cup \{a\} = X$.

Si per tot $x \in X$, $h(x) > \alpha$, considerem $\overline{X} = X \cup \{a\}$, $(a \notin X)$, i definim

$$\overline{h}(u) = \begin{cases} h(u) & \text{si } u \neq a (\text{i.e. } u \in X) \\ \alpha & \text{si } u = a (\text{i.e. } u \notin X) \end{cases}$$

$\overline{h}$ indueix de forma natural un preordre total en $\overline{X}$:

$$u \leq v \Leftrightarrow \overline{h}(u) \geq \overline{h}(v), \text{ per tots } u, v \in \overline{X}.$$

En particular, $a \leq x$, per tot $x \in X$ i, per tant, a és primer element (b)(2).

Definim $\overline{E}$ via $\overline{h}$, i.e. $\overline{E}(u,v) = E_T(\overline{h}(u), \overline{h}(v))$, per tots $u, v \in X$. Clarament $\overline{E}$ extén E. A més, $\overline{E}$ satisfà:

$$\hat{T}(\overline{E}(u,v) \mid \overline{E}(u,w)) = \overline{E}(v,w) \text{ si } u \leq v \leq w.$$

En efecte, si $a < u$, llavors $\hat{T}(\overline{E}(u,v) \mid \overline{E}(u,w)) = \hat{T}(E(u,v) \mid E(u,w)) = E(v,w) = \overline{E}(v,w)$.

Suposem $a = u$. Si $a = v = w$, trivial.

Si $a = v < w$, llavors $\hat{T}(\overline{E}(a,v) \mid \overline{E}(a,v)) = \hat{T}(1 \mid \overline{E}(a,w)) = \overline{E}(v,w)$

Si $a < v = w$, llavors $\hat{T}(\overline{E}(a,v) \mid \overline{E}(a,w)) = 1 = \overline{E}(u,w)$.

Finalment, si $a < v < w$, llavors $\hat{T}(\overline{E}(a,v) \mid \overline{E}(a,w)) =$
$\hat{T}(\hat{T}(\overline{h}(a) \mid \overline{h}(v) \mid \hat{T}(\overline{h}(a) \mid \overline{h}(w)) \underset{(*)}{=} \hat{T}(\overline{h}(v) \mid \overline{h}(w)) = \hat{T}(h(v) \mid h(w)) = E(v,w) = \overline{E}(v,w)$.

(*) segueix del Lema 1.2.17.

(b) $\Rightarrow$ (c)

(c)(1) es desprèn de (b)(1)

En quant a (c)(2), $\text{INF}_{x\leq y} E(x,y) = \overline{E}(a,y)$, i $\text{INF}_{x\leq z} E(x,z) = E(a,z)$, i, per tant, si $y \leq z$, $\hat{T}\left(\text{INF}_{x\leq y} E(x,y) \mid \text{INF}_{x\leq z} E(x,z)\right) = \hat{T}\left(\overline{E}(\alpha,y) \mid \overline{E}(a,z)\right) = \overline{E}(y,z) = E(y,z)$.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Definim

$$\begin{array}{rcl} h : X & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & h(x) = \underset{\alpha\leq x}{\text{INF}}\, E(x,\alpha) \end{array}$$

per tots x, y, $x \leq y$, $\hat{T}(h(x), h(y)) = \hat{T}\left(\text{INF}_{\alpha\leq y} E(y,\alpha) \,\Big|\, \text{INF}_{\alpha\leq y} E(y,\alpha)\right) = E(x,y)$

Per tant, $\{h\}$ és una base. ■

OBSERVACIONS:

1) Si E és separadora, aleshores el preordre total esdevé ordre total.

2) Si T és arquimediana, la condició (b)(1) (o (c)(1)) és equivalent a $T(\overline{E}(x,y), \overline{E}(y,x)) = \overline{E}(x,z)$, sempre que $\overline{E}(x,z) > 0$. En general, però, només val (b)(1) $\Rightarrow T(\overline{E}(x,y), \overline{E}(y,z)) = \overline{E}(x,z)$, (respectivament (c)(1))

Exemple 2.3.6.

Definim en $\mathbb{R}$ l'operador: $E(x,y) = \text{MAX}\{0, 1 - |x-y|\}$.

E és T-indistingibilitat (separadora) per $T = \text{Ł}$.

Notem que en aquest cas, ($T = \text{Ł}$), se satisfà que: $\hat{T}(a|b) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ i $b = 0$, i que $\hat{T}(a|0) = 1 - a$.

Considerem $X = \{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $0 = x_1 \leq x_2 ... \leq x_n = 1 < x_{n+1}$ i $E_1 = E_{|X}$.

Considerem també $Y = [0, 1+\epsilon] \subseteq \mathbb{R}$, ($\epsilon > 0$) i $E_2 = E_{|Y}$. Llavors:

(a) L'ordre habitual en $\mathbb{R}$ satisfà:

$$x \leq y \leq z \Rightarrow T(E(x,y), E(y,z)) = E(x,z)$$

(b) dim $E_1 = 2$

(c) $\dim E_2 = \infty$

La demostració, (concretament de (b) i (c)) es basa en el següent lema:

Lema 2.3.7. Sigui (X, E, L) definit a dalt, i suposem que existeix $h : X \to [0,1]$ generador tal que $0 = E(x,z) = \hat{T}(h(x)|h(z))$. (En particular, $h(x) = 1$ i $h(z) = 0$) on $|x - z| > 1$). Llavors, per tot $y \in X$ tal que $x \neq y \neq z$, h no pot generar $E(x,y)$ i $E(y,z)$ alhora (i.e. no pot ser que $E(x,y) = E_h(x,y)$ i $E(y,z) = E_h(y,z)$ alhora).

Demostració. (Lema 2.3.7) Considerem l'ordenació induïda per h en X, (i.e. $u \leq_h v \Leftrightarrow h(u) \geq h(v)$, (per tots $u, v \in X$). Si $h(x) = h(y)$ o $h(y) = h(z)$ ja hem acabat.

En cas contrari, donat y, podem trobar 3 casos:

$$\begin{array}{ll} x <_h y <_h z & (a) \\ x <_h z <_h y & (b) \\ y <_h x <_h z & (c). \end{array}$$

Cas (a): Com que $h(x) > h(y) > h(z)$ llavors

$$\underbrace{\hat{T}\left(\hat{T}(h(x) \mid h(y)) \mid \underbrace{\hat{T}(h(x) \mid h(z))}_{=0}\right)}_{=\hat{T}(h(x)|h(y))} = \hat{T}(h(y) \mid h(z)).$$

Així, $\hat{T}(h(y) \,|h(z)) = \hat{T}(h(x) \,|h(y))$, d'on $h(y) = \frac{1}{2}$.
Si h genera ambdues, $E(y,z)$ i $E(x,y)$, llavors $E(y,z) = E(x,y) = \frac{1}{2}$.
Però $E(y,z) = E(x,y) > 0$ i així, $E(y,z) = 1 - |y - z| = 1 - |x - y| = E(x,y)$ d'on $|y - z| = |x - y|$, i l'única possibilitat és $y = \frac{x+z}{2}$, així $E(x,y) = 1 - \frac{|x-z|}{2} < \frac{1}{2}$, en contradicció amb $E(x,y) = \frac{1}{2}$.

Cas (b):

$$\begin{aligned} 0 &= E(x,z) = \hat{T}(h(x) \mid h(z)) \Rightarrow 0 = \hat{T}(h(x) \mid h(y)) \\ 1 &= \hat{T}(0|0) = \hat{T}\left(\hat{T}(h(x) \mid h(z)) \,|\hat{T}(h(x) \mid h(y))\right) = \\ &= \hat{T}(h(z) \mid h(y)) \end{aligned}$$

Cas (c):

$$0 = E(x,z) = \hat{T}(h(x) \mid h(z)) \Rightarrow 0 = \hat{T}(h(y) \mid h(z))$$

$$\hat{T}\left(\hat{T}(h(y)\ |h(x))\middle|\hat{T}(h(y)\mid h(z))\right) = \hat{T}(h(x)\mid h(z)) = 0$$
$$\Rightarrow \hat{T}(h(y)\ |h(x)) = 1.$$

■

Demostració. (Exemple 2.3.6).

(a) Clarament $E(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| \geq 1$. A partir d'aquí, és un estudi per casos trivial.

(b) (dim $E = 2$)

Segons el lema anterior, no pot existir una base formada per un sol element. Però $h_1 = E(0,\_)$ i $h_2 = E(x_{n+1},\_)$ són sistema generador (trivial).

(c) (dim $E = \infty$)

Considerem la successió $\epsilon_n = \frac{\epsilon}{n}$, $n \geq 0$.

Si un generador h genera $E(\epsilon_n, 1+\epsilon_n)$, no pot generar $E(\epsilon_m, 1+\epsilon_m)$ per tot $m > n$. Com que $E(\epsilon_n, 1+\epsilon_n) = 0$, si h genera es té:

$$\begin{cases} h(\epsilon_n) = 0, \quad h(1+\epsilon_n) = 1 \quad (1) \\ \text{o bé} \\ h(1+\epsilon_n) = 0 \text{ i } h(\epsilon_n) = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Suposem (1) ((2) es fa igual))

Suposem que h genera també $E(\epsilon_m, 1+\epsilon_m) = 0$ $(m > n)$.

Si $h(\epsilon_m)h(1+\epsilon_m) = 1$, llavors $\hat{T}\left(h(1+\epsilon_n) \mid h(\epsilon_m)\right) = 0 < E(1+\epsilon_n, \epsilon_n)$.

Si $h(\epsilon_m) = 1$, $h(1+\epsilon_m) = 0$, llavors $\hat{T}\left(h(\epsilon_m \mid h(\epsilon_n)\right) = 0 < E(\epsilon_m, \epsilon_n)$.

Per tant, qualsevol conjunt finit de generadors no podrà ser base.

■

3) Si T és arquimediana, i $E(x,y) > 0$ per tots $x,y \in X$, la preordenació total $\leq$ es pot substituïr per la seva simètrica $\leq_*$ ($x \leq_* y$ si, i només si, $y \leq x$) en (b)(1). No és així en general, tal i com mostra el següent exemple:

Exemple 2.3.8. T =MIN, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$

$$E(x_1,x_2) = 0.6$$
$$E(x_1,x_3) = 0.3$$
$$E(x_2,x_3) = 0.3$$

$x_1 \leq x_2 \leq x_3$.
$\hat{T}\,(E(x_1,x_2) \mid E(x_1,x_3)) = 0.3 = E(x_2,x_3)$

Si, en canvi, es considera $x_3 \leq x_2 \leq x_1$,

$$\hat{T}\,(E(x_3,x_2) \mid E(x_3,x_1)) = \hat{T}(0.3 \mid 0.3) = 1 > E(x_1,x_2). \quad \blacksquare$$

4) De la demostració del teorema anterior es desprèn que el preordre parcial que apareix a (b)(1) és el mateix que el definit mitjançant el generador h (i.e. $x \leq_h y$ si, i només si, $h(x) \geq h(y)$).

5) La condició d'existència d'un **primer element**, satisfent la condició (b), ja sigui en el propi X ja en una ampliació $\overline{X}$ (o la condició equivalent (c)), és essencial.

Exemple 2.3.9.

$([0,\infty], E, T)$ amb $T(x,y) = x \cdot y$, $((x,y) \in [0,1] \times [0,1])$

$\hat{T}(x|y) = \frac{y}{x}$ si $x \geq y$ (1 en cas contrari)

$E(x,y) = \mathrm{MIN}\left\{\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right\}$

Considerem $X = [0,M]$, i $E_M = E_{|X}$.

Llavors:

(a) dim $E_M = 1$, per tot $M > 0$.

(b) dim $E = \infty$.

Demostració. (a) $h_M(x) = \frac{x}{M}$ és base. (evident)

La demostració de (b) es basa en el següent lema:

Lema 2.3.10. Si h és generador de E (i.e. $E(x,y) \leq E_h(x,y) = \mathrm{MIN}\left\{\frac{h(x)}{h(y)}, \frac{h(y)}{h(x)}\right\}$) no existeix cap parella de successions de $\mathbb{R}^+$ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfent:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq y_n \leq e^{-n} \leq e^n \leq x_n$

(2) $E(x_n,y_n) = E_h(x_n,y_n)$.

Demostració (Lema 2.3.10).

Siguin $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfent (1) i (2)

(i) Suposem que existeix n_o tal que per tot $n \geq n_0$, $E(x_n, y_n) = E_h(x_n, y_n) = \text{MIN}\left\{\frac{h(x_n)}{h(y_n)}, \frac{h(y_n)}{h(x_n)}\right\} = \frac{h(y_n)}{h(x_n)}$.

Sigui $\{y_{n_0+n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ parcial decreixent de $\{y_{n_0+n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ (sempre existeix perquè $y_n \to 0$), per tot $k \in \mathbb{N}$, $h(y_{n_0+n_k}) \leq E\left(y_{n_0+n_k}, x_{n_0+n_k}\right)$ $\left(= \frac{h(y_{n_0+n_k})}{h(x_{n_0+n_k})}\right)$.

D'altra banda, com que h és generador, $\frac{h(y_{n_0+n_k})}{h(y_{n_0})} \geq E(y_{n_0+n_k}, y_{n_0})$ d'on $h(y_{n_0}) \leq \frac{h(y_{n_0+n_k})}{E(y_{n_0+n_k}, y_{n_0})} \leq \frac{E(y_{n_0+n_k}, x_{n_0+n_k})}{E(y_{n_0+n_k}, y_{n_0}} = E(y_{n_0}, x_{n_0+n_k}) \leq$ $\leq E(e^{-n_0}, e^{n_0+n_k}) = e^{-n_k} \underset{n_k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'on $h(y_{n_0}) = 0$, i per tant $E_h(y_{n_0}, x) = 0$ per tot $x \in X$. Contradicció.

(ii) Si no existeix n_0 satisfent la condició, serà:

- o bé existeix n_0 tal que per tot $n \geq n_0$, $E(x_n, y_n) = E_h(x_n, y_n) = \frac{h(x_n)}{h(y_n)}$, i en aquest cas es fa una construcció semblant,
- o bé existeixen parcials $\{x_{n_p}\}$ $\{y_{n_p}\}$ satisfent (i), i sobre elles apliquem la mateixa construcció. ■

Demostració. (Exemple 2.3.9.b)

Sigui $\{h_1, \ldots, h_n\}$ una base, i considerem les successions $y_n = e^{-n}$ i $x_n = e^n$.

Per h_1, existiran parcials $\{e^{-n_{i_1}}\}_{i_1\in\mathbb{N}}$ de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{e^{n_{i_1}}\}_{i_1\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tals que

$$E\left(e^{-n_{i_1}}, e^{n_{i_1}}\right) < E_h\left(e^{-n_{i_1}}, e^{n_{h_1}}\right)$$

i, per tant, h_1 no genera sobre aquestes parcials.

Per h_2, existirà una parcial $\{n_{i_2}\}_{i_2\in\mathbb{N}}$ de $\{n_{i_1}\}_{i_1\in\mathbb{N}}$ tal que

$$E\left(e^{-n_{i_2}}, e^{n_{i_2}}\right) < E_h\left(e^{-n_{i_2}}, e^{n_{i_2}}\right)$$

i, per tant, h_2 no genera sobre aquesta subparcial (ni tampoc h_1!).

Reiterant aquest procés, com que hi ha un nombre finit d'elements $h_1, ..., h_n$, s'obté una subparcial sobre la qual cap d'ells genera. ■

La importància del teorema anterior rau en el fet que introdueix una nova línia d'argumentació en relacionar un concepte nou –la dimensió– amb una estructura matemàtica molt ben coneguda –el preordre–.

Quina és, però, la generalització al cas n-dimensional? Quins són els preordres que satisfan les hipòtesis del teorema 2.3.5 si la dimensió és més gran que 1? L'observació 4 precedent suggereix (falsament!) que aquests preordres haurien d'obtenir-se a través dels generadors d'una base en la forma natural (o sigui, $x \leq_i y$ sii $h_i(x) \geq h_i(y)$ $i = 1 \div n$ on $B = \{h_1, \ldots, h_n\}$ és una base). Això, però, només funciona en el cas unidimensional, i la situació esdevé força més complicada en el cas general. Les següents proposicions i teoremes aclareixen aquesta qüestió.

Proposició 2.3.11. Donat (X, E) operador de T-indistingibilitat (T contínua), suposem que existeixen n preordres parcials en X $\leq_1, \ldots, \leq_n$ satisfent:

1.- Per tots $x, y \in X$ existeix $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \leq_i y$ ó $y \leq_i x$.

2.- Si $x \leq_i y \leq_i z$, llavors:
(a) $E(x,z) \leq \text{MIN}\{E(x,y), E(y,z)\}$
(b) $\hat{T}(E(x,y) \mid E(x,z)) = E(y,z)$

3.- Existeix $(\overline{X}, \overline{E})$ extensió de (X, E) i de $\leq_1, ..., \leq_n$ on per tot $x \in X$, existeixen $m_1, ..., m_n$ elements minimals respecte $\leq_1, ..., \leq_n$ (respectivament), tals que $m_1 \leq_1 x, ..., m_n \leq_n x$.

4.- Si $M_i = \{m \in \overline{X} \ / \ m$ és minimal per $\leq_i\}$, existeix
$k_i : M_i \rightarrow [0,1]$
$m \mapsto k_i(m)$
satisfent:

(a) si $m \leq_i x$, llavors $T(\overline{E}(x,m), k_i(m)) \geq T(\overline{E}(x,n), k_i(n))$ per tot $n \in M_i$.

(b) $\hat{T}(T(x_i(n), \overline{E}(m,x) \mid T(k_i(m), \overline{E}(m,y)) = \hat{T}(\overline{E}(m,x) \mid \overline{E}(m,y)) = E(x,y)$ per tots x, y tal que $m \leq_i x \leq_i y$.

Llavors, dim $E \leq n$.

Demostració. Per demostrar aquesta proposició construïrem un sistema generador per E amb n elements.

Aquesta construcció es basa en tres fets coneguts:

- Les columnes són generadors.
- El suprem d'una família de generadors és generador.
- $h' = T(c, h)$ és generador si h ho és i c és constant.

Considerem el sistema $\{h_1, \ldots, h_n\}$ on cada h_i es defineix segons:

$$h_i(x) = \operatorname*{SUP}_{m \in M_i} T\left(\overline{E}(m,x), k_i(m)\right), \text{ per tot } x \in X$$

- h_i és generador, per tot $i = 1, ..., n$.

  Com que la columna $h_m(x) = E(m,x)$ és generador, llavors $T(h_m(x), k_i(m))$ $(x \in X)$ també, i $h_i = \mathrm{SUP}_{m \in M_i} T(h_m(x), k_i(m))$ també.

- $\{h_1, \ldots, h_n\}$ és sistema generador.

  Donats $x, y \in X$, es tindrà que $x \leq_i y$ o $y \leq_i x$ per alguns $i \in \{1, ..., n\}$.

  Suposem $x \leq_i y$, i sigui m un element minimal respecte $\leq_i$ tal que $m \leq_i x \leq_i y$.

  Llavors $E(x,y) = \hat{T}(\overline{E}(m,x) \mid \overline{E}(m,y))$ per (2.b).

  A més, per 4.(a) es té:

  $$\begin{array}{rcll} T\left(E(m,x), k_i(m)\right) & \geq & T\left(E(x,m'), k_i(m')\right) & \text{per tot } m' \in M_i \\ T\left(E(m,y), k_i(m)\right) & \geq & T\left(E(y,m'), k_i(m')\right) & \text{per tot } m' \in M_i \end{array}$$

  de manera que $h_i(x) = \mathrm{SUP}_{m' \in M_i} T(h_{m'}(x), k_i(m')) = T(h_{m'}(x), k_i(m'))$ i que $h_i(y) = \mathrm{SUP}_{m' \in M_i} T(h_{m'}(y), k_i(m')) = T(h_{m'}(y), k_i(m))$

  Per tant,

  $$\begin{aligned} E_T(h_i(x), h_i(y)) &= E_T(T(h_m(x), k_i(m)), T(h_m(y), k_i(m)) = \\ &= \hat{T}(T(h_m(x), k_i(m)) \mid T(h_m(y), k_i(m))) = \\ &= \hat{T}(\overline{E}(m,x) \mid \overline{E}(m,y)) = \overline{E}(x,y) = E(x,y). \end{aligned}$$

  Així, $\{h_1, ..., h_n\}$ són un sistema generador, perquè per tot $x, y \in X$, existeix h_i tal que $E_T(h_i(x), h_i(y)) = E(x,y)$. ∎

La complexitat en les hipòtesis de la proposició anterior és fruit de l'ànim de generalitat. De fet, si ens restringim al cas en que els preordres parcials admeten primer element dintre de X, s'obté una versió força simplificada. Aquesta situació es té sempre automàticament en el cas unidimensional (en X mateix o en una extensió).

Corol·lari 2.3.12. Donat (X, E) operador de T-indistingibilitat (T contínua), suposem que existeixen n preordres parcials $\leq_1, ..., \leq_n$ amb $m_1, ..., m_n$ primers elements (i.e. $m_i \leq_i x$, $\forall x \in X$, $i = 1, .., n$) satisfent:

1.- Per tots $x, y \in X$, $\exists i \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \leq_i y$ o $y \leq_i x$.

2.- Si $x \leq_i y \leq_i z$, llavors $\hat{T}(E(x, y) \mid E(x, z)) = E(y, z)$.

Llavors dim $E \leq n$.

Demostració. Es comproven fàcilment totes les hipòtesis de la Proposició 2.3.8, prenent $M_i = \{m_i\}$ i $k_i(m_i) = 1$. ■

Proposició 2.3.13. Si E és T-indistingibilitat n-dimensional en X, existeixen n preordres parcials $\leq_1, ..., \leq_n$ en X satisfent $1 \div 4$ de la proposició anterior.

Demostració. Sigui $B = \{h_1, ..., h_n\}$ una base d'E.
Definim $x \leq_i y$ si, i només si, $E(x, y) = \hat{T}(h_i(x) \mid h_i(y))$.

• $\leq_i$ és preordre parcial.
Reflexiva: $x \leq_i x$ (trivial)
T-transitiva

$$\left.\begin{array}{l} x \leq_i y \Leftrightarrow E(x,y) = \hat{T}(h_i(y)|h_i(y) \\ y \leq_i z \Leftrightarrow E(y,z) = \hat{T}(h_i(y)|h_i(z)) \end{array}\right\} E(x,z) \geq T(E(x,y), E(y,z)) =$$
$$= T\left(\hat{T}(h_i(y)|h_i(y), \hat{T}(h_i(y)|h_i(z))\right) \underset{(*)}{=} \hat{T}(h_i(x)|h_i(z)) \geq E(x,z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E(x,z) = \hat{T}(h_i(x)|h_i(z)) \Rightarrow x \leq_i z$$

(*) segueix del Corol·lari 1.2.26 (T contínua).

A més, se satisfà una mena de propietat antisimètrica respecte el generador h_i:

Pseudo-antisimètrica

$$\left.\begin{array}{l} x \leq_i y \Leftrightarrow E(x,y) = \hat{T}(h_i(y)|h_i(x) \\ y \leq_i z \Leftrightarrow E(x,y) = \hat{T}(h_i(x)|h_i(y)) \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{T}(h_i(y)|h_i(x)) =$$
$$= \hat{T}(h_i(x)|h_i(y)) = 1 \Rightarrow \text{“}h_i(x) = h_i(y)\text{”}$$

• **Condició 1**: Donats $x, y \in X$, sigui h_i tal que $E_T(h_i(x)|h_i(y)) = E(x,y)$. Llavors $x \leq_i y$ o $y \leq_i x$.

• **Condició 2**: Siguin $x \leq_i y \leq_i z$
(a) és trivial.
(b) Segueix del lema 1.2.17:

$$\begin{aligned} \hat{T}(E(x,y)|E(x,z)) &= \hat{T}\left(\hat{T}(h_i(x)|h_i(y))|\hat{T}(h_i(x)|h_i(z))\right) = \\ &= \hat{T}(h_i(y)|h_i(z)) = E(y,z). \end{aligned}$$

• **Condició 3**: Si $|X| < \infty$ és trivial. Si no, donat $x \in X$ suposem que existeix y tal que $y \leq_i x$, i que no existeix cap element minimal $m_i \in X$ respecte $\leq_i$ tal que $m_i \leq_i y \leq_i x$. En tot cas, ampliem X amb un nou element m_i, $X = X \cup \{m_i\}$ i extenem $\leq_i$ i E sobre m_i.

Sigui $\mu(x)$ una cadena maximal totalment ordenada d'extrem superior x, tal que $y \in \mu(x)$.

Definim $m_i \leq_i k$ per tot $u \in \mu(x)$ (De fet, m_i depèn de la $\mu(x)$ escollida).

Per extendre E, ho fem via els generadors de B.

Definim $h_i(m_i) = \mathrm{SUP}_{u \in \mu(x)} h_i(u)$

D'altra banda, sigui $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mu(x)$ una successió monòtona decreixent respecte $\leq_i$, tal que per tot $u \in \mu(x)$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $u_n \leq_i u$.

Llavors, $\forall j\ h_j(u_n)$ defineix una successió de [0,1] i, pel caràcter compacte de [0,1], té almenys una parcial convergent. Sigui $\{h_i(u_{n_k})\}_{n_k}$ una tal parcial convergent. Definim $h_j(m_i) = \lim_{n_k \to \infty} h_i(u_{n_k})$.

Reiterant aquest procés per tot $i = 1, ..., n$ i per tot $x \in X$, s'obté l'ampliació X buscada.

A més, com que $E_T(h_j(u), h_j(u_{n_k})) \geq E_T(h_i(u), h_i(u_{n_k}))$ $(= E(u, u_{n_k}))$ per tot $n_k \in \mathbb{N}$, pel lema 2.1.10 es té:

$$\begin{aligned} E_T(h_j(u), h_j(m_i) &= E_T(h_j(u), \lim_{n_k} h_j(u_{n_k})) \geq \lim_{n_k} E_T(h_j(u), h_j(u_{n_k})) \geq \\ &\geq \lim_{n_k} E_T(h_i(u), h_i(u_{n_k}) = \operatorname{INF}_{n_k} \hat{T}(h_i(u_{n_k})|h_i(u)) = \\ &= \hat{T}\left(\operatorname{SUP}_{n_k} h_i(u_{n_k})|h_i(u)\right) = \hat{T}(h_i(m_i)|h_i(u)) = \\ &= E_T(h_i(m_i), h_i(u)) \end{aligned}$$

de manera que h_i genera $E(m_i, u)$, per tot $u \in \mu(x)$.

- **Condició 4:** Considerem $k_i = h_i\big|_{M_i}$

$$\begin{aligned} \text{(a) } T(E(x,m), k_i(m)) &= T(\hat{T}(h_i(m)|h_i(x)), h_i(m)) \underset{(*)}{=} h_i(x) \\ &\underset{(**)}{\geq} T(\hat{T}(h_i(x)|h_i(y)), h_i(x)) \geq \\ &\underset{(***)}{\geq} T(E(x,n), h_i(n)) = T(E(x,n), k_i(n)). \end{aligned}$$

(*) $h_i(m) \geq h_i(x)$, (**) Modus Ponens (Teorema 1.2.13) (***) h_i és generador.

(b) Suposem $m \leq_i x \leq_i y$

$$\begin{aligned} &\hat{T}\,(T(k_i(m), E(m,x))|T(k_i(m), E(m,y))) = \\ &= \hat{T}\left(T(h_i(m), \hat{T}(h_i(m)|h_i(x)) \mid T(h_i(m), \hat{T}(h_i(m)|h_i(y))\right) = \\ &= \hat{T}(h_i(x)|h_i(y)) = E(x,y) \end{aligned}$$

■

De les dues proposicions anteriors, es dedueix el següent teorema:

Teorema 2.3.14.

(a) dim $E \leq n$, si, i només si, existeixen $m(\leq n)$ preordres parcials satisfent les condicions $1 \div 4$ de la Proposició 2.3.8.

(b) dim E és el mínim nombre de preordres parcials satisfent les condicions $1 \div 4$.

Exemple 2.3.15.

$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| + |y| \leq 1\}$

$E((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \text{INF}\{1 - |x_1 - x_2|, 1 - |y_1 - y_2|\}$

$T(x,y) = \mathcal{L}(x,y) = \text{MAX}\{x + y - 1, 0\}$

$\hat{T}(x|y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ 1 - x + y, & \text{en altre cas} \end{cases}$

La dimensió de (X, E, T) és 2.

Demostració. Clarament $(X, E, \text{Ł})$ és operador de Ł-indistingibilitat. Considerem dues relacions $\leq_x$ i $\leq_y$, definides per

$$(x_1,y_1) \leq_x (x_2,y_2) \text{ si, i només si, } |x_1 - x_2| \geq |y_1 - y_2| \text{ i } x_1 \leq x_2$$
$$(x_1,y_1) \leq_y (x_2,y_2) \text{ si, i només si, } |x_1 - x_2| \leq |y_1 - y_2| \text{ i } y_1 \leq y_2$$

És una simple comprovació veure que $\leq_x$ i $\leq_y$ són dos preordres (parcials), i que $(-1,0)$ i $(0,-1)$ són primers elements per $\leq_x$ i $\leq_y$, respectivament.

A més, si $(x_1,y_1) \leq_x (x_2,y_2) \leq_x (x_3,y_3)$, llavors

$$\begin{aligned} &\hat{T}\left(E((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \middle| E((x_1,y_1),(x_3,y_3))\right) = \\ &= \hat{T}(1 - x_2 + x_1 \mid 1 - x_3 + x_1) = \\ &= 1 - (1 - x_2 + x_3) + (1 - x_3 + x_1) = 1 - x_3 + x_2 = \\ &= E((x_2,y_2),(x_3,y_3)) \end{aligned}$$

Per tant, aplicant el Corol·lari 2.3.12, es té que dim $E \leq 2$.

Per altra banda, és evident que no se satisfan les condicions del teorema 2.3.5, de manera que dim $E \neq 1$.

Així, l'única possibilitat és, dim $E = 2$. ∎

Exemple 2.3.16.

$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| < 1, \text{ i } |y| < 1\}$

E i T com a l'exemple anterior.

La dimensió de $(X, E, \text{Ł})$ és 2.

Demostració. Construïm una ampliació de X amb elements minimals (no mínims).

Considerem $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| \leq 1 \text{ i } |y| \leq 1\}$ i estenem E sobre X mitjançant la mateixa fórmula que defineix E sobre X.

Considerem els mateixos ordres $\leq_x$ i $\leq_y$ de l'exemple anterior, estesos a X de forma natural.

És elemental comprovar totes les condicions de la Proposició 2.3.8, considerant $M_x = \{(-1,y) \ / \ y \in [-1,1]\}$ i $M_y = \{(x,-1) \ / \ x \in [-1,1]\}$ i $k_x(m) = 1$ per tot $m \in M_x$, $k_y(m) = 1$ per tot $m \in M_y$.

Així, dim $E \leq 2$, i com que dim $E \neq 1$ (Teorema 2.3.5), llavors l'única possibilitat és dim $E = 2$. ■

NOTA. Naturalment, en els dos exemples precedents es pot provar que dim $E = 2$ sense recórrer als resultats precedents, (llevat del teorema 2.3.5 de caracterització de les unidimensionals), atès que E s'ha introduït com a ínfim de dos operadors de T-indistingibilitat unidimensionals. La raó d'incloure'ls és il·lustrar les condicions d'aplicació de les proposicions exposades.