UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departament d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i Informàtica Industrial

A MIXED QUALITATIVE QUANTITATIVE SELF-LEARNING CLASSIFICATION TECHNIQUE APPLIED TO SITUATION ASSESSMENT IN INDUSTRIAL PROCESS CONTROL

Autor: J. Carlos Aguado Chao
Director: Josep Aguilar Martín

1998

SEGONA PART

OPERADORS D'INDISTINGIBILITAT I RAONAMENT APROXIMAT

Capítol 4.
Inferència com a Raonament Aproximat en Lògica Difusa.

Sumari:

S'introdueix el coneixement basat en regles en Lògica Difusa, i la Regla Composicional d'Inferència (CRI) com a mecanisme d'inferència. A continuació, es quantifica la semblança entre fets vagues mitjançant la T-indistingibilitat natural avaluada sobre les seves funcions característiques, i es mostra així que totes les formes de CRI satisfan el principi general de deduir tesis semblants d'hipòtesis semblants. A partir d'aquí s'inverteix el procès, i es busca quins són els mecanismes de deducció òptims respecte a aquest principi, obtenint com a resultat l'Operador Natural d'Inferència. Problemes del mateix estil tenen com a solució altres operadors (l'Operador Natural Simetritzat, i altres). Finalment, el capítol s'acaba amb la revisió de dos models de deducció en Lògica Difusa que condueixen de forma independent a l'Operador Natural d'Inferència.

Aportacions d'aquesta memòria:

- CRI és operador extensional per qualsevol relació emprada (Teoremes 4.2.7 i 4.2.8).
- L'extensió de funcions és operador extensional (Teorema 4.2.10).

- Definició de l'Operador Natural d'Inferència (Definició 4.3.1).
- Caracterització de l'Operador Natural d'Inferència com a òptim respecte l'extensionalitat i l'ordre puntual (Teorema 4.3.2).
- Definició d'altres operadors (Operador Natural Simetritzat,...) i la seva caracterització com a solució de problemes d'optimalitat respecte a l'extensionalitat (Teoremes 4.3.11, 4.3.15 i 4.3.16).

4.1 Coneixement basat en regles i CRI

Llegim en [Dubois & Prade, 97] que "les regles si/llavors (if/then rules) ofereixen un format adequat per expressar fragments de coneixement". De fet, quan un home parla d'un sistema exterior amb l'ànim de descriure'l, ho fa a través de tres estadis:

1) Selecciona un conjunt de *variables* que apareixen ben diferenciades a l'enteniment. Moltes vegades, es tracta de variables assequibles als sentits d'una forma immediata (sensacions), o bé de determinacions més precises d'aquestes variables a través de sistemes de mesura. D'altres vegades són entitats abstractes creades pel propi enteniment humà, de les quals es té la certesa que apareixen sota la mateixa forma i estructura en cada home (entitats a priori en el llenguatge kantià [Kant, 89]). Tant per les unes com per les altres, perquè hi pugui haver coneixement o descripció efectiva del sistema, s'ha de disposar, a més, d'un sistema de *contrastar-les en forma de fets.* Així, una sensació pot aparèixer o no fer-ho, una mesura pot prendre un cert valor o rang de valors, o una successió d'experiències en la vida d'una persona satisfà alguna ordenació cronològica determinada.

2) Estableix relacions entre els fets en forma de regles si/llavors. Una regla lliga dos fets A i B establint que "si (Fet A) llavors (Fet B)", o simplement, "si A llavors B".

3) Finalment, prova d'organitzar les regles en forma de teoria. L'objectiu final és obtenir un conjunt reduït de regles a partir de les quals es puguin deduir, per raonament, totes les altres regles, i es pugui respondre a qualsevol pregunta formulada sobre el sistema descrit.

Però si algunes –potser totes– de les variables seleccionades són de naturalesa gradual (per exemple, escalfor, altura, quantitat,...), a falta de determinacions més precises, l'enteniment humà les contrasta en forma de fets també graduals i implícitament vagues. Així, si la variable és la temperatura, podem contrastar-la a través d'una sensació tèrmica per contacte, i els fets que se'n deriven són del tipus "ser calent", "ser fred", "ser molt calent",... En el context de la Lògica Difusa, aquestes reben el nom de variables lingüístiques, els fets associats es refereixen per expressions del tipus "X és A", on A és un possible estat de la variable X, que es representa per un subconjunt difús μ_A de l'univers de discurs on X pren valors [Zadeh, 77].

Si aquests fets vagues es relacionen mitjançant regles, s'obtenen les regles si/llavors difuses, que s'escriuen "si (X és A) llavors (Y és B)". Per simplicitat, ens referirem també a aquestes regles com "si A llavors B" en la resta d'aquesta memòria. Les regles difuses, encara que àmpliament utilitzades en el llenguatge humà, no tenen un significat clar unívocament determinat, i des que L.A. Zadeh va posar de manifest la seva importància en el camp de l'Automàtica i el Control, s'ha publicat gran quantitat de treballs d'investigació que en donen interpretacions molt diverses. (Veure [Godo, et al., 97], [Dubois & Prade, 97], per un recull d'aquestes interpretacions). Un tret comú a totes elles és que atribueixen a aquest tipus de regles propietats d'interpolació del coneixement. Pel fet de ser vaga, una regla pot ser aplicada amb més o menys propietat a situacions diverses i, per tant, ha de permetre la interpolació projectant la informació a situacions per a les quals, en sentit estricte, la regla no ha estat inicialment formulada.

La formalització més acceptada de com efectuar aquesta interpolació i, en general, de com actuen aquestes regles la proporciona la Regla Composicional d'Inferència (CRI).

La Regla Composicional d'Inferència estén una regla difusa "si A llavors B" (on A i B són subconjunts difusos definits sobre dos universos de discurs diferents, U i V respectivament), a hipòtesis A' ("X és A'") diferents de A, i ho fa segons el següent esquema:

$$\begin{array}{ll} \text{si } A \text{ llavors } B & A, A' \in [0,1]^U \\ \text{si } A' & B, B' \in [0,1]^V \\ \hline \text{llavors } B' & \end{array}$$

on $B'(v) = \mathrm{CRI}(A')(v) = \mathrm{SUP}_{u \in U}\, T(A'(u), R_{AB}(u,v))$, per tot $v \in V$.

On T és una t-norma, i $R_{AB} : U \times V \longrightarrow [0,1]$ una relació difusa, que han anat variant depenent de l'època i l'autor [Dubois & Prade, 91] des que L.A. Zadeh va introduir CRI per primera vegada [Zadeh, 73]. En totes les versions, però, T fa el paper de conjunció, mentre que R_{AB} representa la relació de dependència entre els universos U i V que indueix la regla "si A llavors B".

Encara que CRI ha estat àmpliament utilitzada, no existeix una base teòrica que inclogui, d'una manera clara, totes les possibles relacions R_{AB} que actualment es fan servir en diferents contextos d'aplicació. Els intents de fonamentar CRI es poden agrupar segons dues línies d'explicació:

1) Interpretació de CRI com a Modus Ponens Generalitzat. Podem veure reflectit en l'esquema de CRI el Modus Ponens clàssic (i.e. de A, i $A \Rightarrow B$, es dedueix B), si l'interpretem semànticament per $A \wedge (A \Rightarrow B)$, i considerem connectives multivaluades en [0,1]: una t-norma T per la conjunció $\wedge$ i una funció d'implicació R per la implicació $\Rightarrow$.

   Aquesta interpretació porta [Trillas & Valverde, 85b] a definir $R(u,v) = \hat{T}(A(u)|B(v))$, (la implicació residuada associada a la t-norma T), resultant-ne algunes millores sobre altres tipus de relacions. Una variant d'aquest punt de vista, que consisteix en incorporar valors de veritat difusos, es troba en [Baldwin, 79] i [Godo et al., 91].

   A aquesta línia es poden interposar, almenys, dues objeccions. Des del punt de vista teòric, interpreta a "i" del Modus Ponens com a element del llenguatge a l'introduir la connectiva $\wedge$ (T) per modelitzar a nivell semàntic "de A i $A \Rightarrow B$ es dedueix B", quan clarament aquesta conjunció (i tota la regla del Modus Ponens) forma part del Metallenguatge. I des del punt de vista de les aplicacions, deixa fora moltes relacions que, havent estat àmpliament utilitzades amb èxit, són difícilment interpretables com a relacions d'implicació (el cas paradigmàtic és, sense cap dubte, la de Mamdani $R_{AB}(u,v) = \mathrm{MIN}\{A(u), B(v)\}$).

2) Interpretació de CRI com a raonament basat en proximitat (Raonament Aproximat) en context difús. Es basen en el fet que les tesis B' obtingudes per CRI (i.e. B' =CRI(A')) no canvien caòticament depenent de les hipòtesis A' sinó que, a hipòtesis "semblants" corresponen tesis "semblants". El problema principal està en formalitzar el significat del terme semblants.

   A la literatura hi ha moltes aproximacions diferents al tema. Per exemple, les "Resemblance Relations" en [Bouchon, Meunier & Valverde, 93], la interpretació d'algunes tècniques de Fuzzy Control en termes de similituds en [Klawoon & Kruse, 93], generalitzacions de CRI al camp dels intervals [Turksen & Zhang, 90] i, fins i tot, la proposta de nous formalismes força diferents de CRI, que es basen en la idea d'interpolació difusa [Kóczy & Hirota, 93].

   Els treballs exposats en aquesta memòria s'inclouen en aquesta segona línia d'explicacions, prenent com a mesura de la semblança entre dos subconjunts difusos la T-indistingibilitat natural, introduïda al Capítol 3 (Definició 3.2.7).

4.2 Operadors d'inferència extensionals

En la secció anterior s'ha vist que la Regla Composicional d'Inferència es pot interpretar com a Modus Ponens (generalitzat) en el marc de la Lògica Difusa. Aquest punt de vista es basa en la consideració dels valors de veritat que μ_A (la funció característica del difús A), pren sobre els elements de l'univers de discurs, i en el seu tractament funcional a través de les connectives conjunció i implicació material de la lògica multivaluada.

Com seria, però, el Modus Ponens generalitzat en el marc d'un Raonament Aproximat basat exclusivament en la noció de proximitat? Una possible resposta la proporciona el següent esquema:

"si (Fet A) llavors (Fet B)"

"(Fet A') aproximadament igual a (Fet A)"

———————————————— (4.2.1.)

"(Fet B') aproximadament igual a (Fet B)".

Aquest esquema presenta dos trets remarcables. En primer lloc l'expressió "aproximadament igual" és intencionadament equívoca, i, a aquest nivell, només té un sentit intuïtiu. Caldrà especificar, en cada domini d'aplicació, que s'entén per "aproximadament igual".

En segon lloc, aquest esquema només estableix una condició sobre les possibles tesis B', (això és: que siguin aproximadament iguals a B, la tesi de la regla), en comptes de seleccionar una B' en particular tal i com ho fa CRI o el Modus Ponens clàssic.

Així doncs, aquest Modus Ponens que es proposa pel Raonament Aproximat no és en si mateix un *mecanisme d'inferència*, sinó una condició que han de satisfer els mecanismes d'inferència.

En general, com a mecanismes d'inferència considerarem aplicacions amb domini en l'espai de les possibles hipòtesis, i imatge en l'espai de les possibles tesis a derivar. En la resta d'aquest apartat es donarà forma concreta a les anteriors consideracions quan els fets considerats venen descrits per conjunts difusos, i el grau amb que dos fets són aproximadament iguals es quantifica mitjançant la T-indistingibilitat natural.

Definició 4.2.2. Un operador entre els universos U i V és una aplicació $\mathcal{C} : [0,1]^U \longrightarrow [0,1]^V$.

A partir de la definició 4.2.2 introduïm el concepte d'operador extensional.

Definició 4.2.3. Un operador $\mathcal{C} : [0,1]^U \longrightarrow [0,1]^V$ és extensional respecte a la t-norma T, o T-extensional, si és una aplicació extensional respecte a $\overline{E}_U^T$ i $\overline{E}_V^T$.

Si no hi ha ambigüitat, parlarem simplement d'operadors extensionals, sense cap referència a la t-norma T.

Notació: $OE_T = \{\mathcal{C} : [0,1]^U \longrightarrow [0,1]^V \ / \ \mathcal{C}$ és operador T-extensional$\}$.

NOTA. Recordem que la condició mínima que s'ha d'exigir a la t-norma T per assegurar que E_T i $\overline{E}_U^T$ són T-indistingibilitats és la continuitat per l'esquerra respecte les dues variables per separat, (breument, T contínua per l'esquerra). En la resta d'aquest capítol, (i de tota la memòria) suposem que aquesta condició es dóna, si no s'especifica el contrari.

Els operadors extensionals són compatibles amb l'esquema 4.2.1 si interpretem l'expressió "aproximadament igual" per "indistingibilitat natural més gran o igual que". D'aquesta manera, per cada $\alpha \in [0,1]$ obtenim:

$$\begin{array}{l} \text{“si } A \text{ llavors } B\text{”} \\ \overline{E}_U^T(A, A') \geq \alpha \\ \hline \qquad \overline{E}_V^T(B, B') \geq \alpha \end{array} \tag{4.2.4.}$$

Proposició 4.2.5. Per un operador $\mathcal{C} : [0,1]^U \longrightarrow [0,1]^V$ són equivalents:

a) $\mathcal{C}$ és extensional.

b) Per tot $\alpha \in [0,1]$, les tesis obtingudes a través de $\mathcal{C}$ (i.e. $B = \mathcal{C}(A)$, $B' = \mathcal{C}(A')$,...) són compatibles amb l'esquema 4.1.4.

Demostració. (a) $\Rightarrow$ (b) és trivial.

(b) $\Rightarrow$ (a). Només cal adonar-se que si

$$\overline{E}^T_U(A,A') \geq \alpha \Rightarrow \overline{E}^T_V(\mathcal{C}(A),\mathcal{C}(A')) \geq \alpha, \quad \text{per tot } \alpha \in [0,1]$$

llavors

$$\overline{E}^T_V(\mathcal{C}(A),\mathcal{C}(A')) \geq \overline{E}^T_U(A,A'). \quad \blacksquare$$

Els operadors extensionals s'introdueixen per donar una versió formal (una de les possibles) del principi filosòfic on rau l'essència del Raonament Aproximat. Aquest principi és, en paraules de D. Hume:

"From causes which appear similar, we expect similar effects.

This is the sum of all our experimental conclusions".

En el present context de formalització, la semblança es quantifica per la indistingibilitat natural, i el concepte que de fets semblants se'n deriven semblants conseqüències ve modelitzat pel concepte d'extensionalitat.

Res de tot això fa referència, però, a l'ordre o direcció en el procés d'inferència.

Una condició mínima a demanar als operadors, en ordre a obtenir un comportament regular en els processos d'inferència, és que respectin l'ordre puntual entre difusos, (Definició 2.2.1).

Definició 4.1.6. Una aplicació $\mathcal{C} : [0,1]^U \longrightarrow [0,1]^V$ és un **operador d'inferència** si preserva l'ordre puntual, o sigui:

$$\text{Si } A_1 \leq_U A_2 \text{ llavors } \mathcal{C}(A_1) \leq_V \mathcal{C}(A_2).$$

El terme inferència en la definició anterior es refereix al fet que aquests operadors preserven la inferència de Lògica Difusa, entenent que de "X és A_1" inferim "X és A_2" quan $\mu_{A_1} \leq \mu_{A_2}$ (Quan $A_1 \leq A_2$, en la notació present).

Demanar que un operador sigui operador d'inferència és demanar que, com menys específiques siguin les hipòtesis (i.e. continguin menys informació), menys específiques siguin les tesis associades. Aquesta és una condició molt natural si es vol assegurar la coherència en el flux de la informació.

Notació. $OIE_T = \{\mathcal{C} : [0,1]^U \longrightarrow [0,1]^V \;/\; \mathcal{C}$ és operador d'inferència T-extensional$\}$.

La classe OIE_T dels operadors d'inferència extensionals conté molts operadors coneguts, tal com mostren les següents proposicions:

Teorema 4.2.7. Per qualsevol t-norma T, i qualsevol relació difusa $R_{AB} : U \times V \longrightarrow [0,1]$, $CRI^T_{R_{AB}} : [0,1]^U \longrightarrow [0,1]^V$ és un operador d'inferència T-extensional.

Demostració. Clarament és un operador d'inferència, per la monotonia de la t-norma T i SUP respecte l'ordre puntual.

Per l'extensionalitat, s'ha de veure que donats $A', A'' \in [0,1]^U$ qualssevol, les tesis associades $B' = CRI^T_{R_{AB}}(A')$ i $B'' = CRI^T_{R_{AB}}(A'')$ satisfan $\overline{E}^T_U(A', A'') \leq \overline{E}^T_V(B', B'')$:

Per tot $v \in V$, es té:

$$\begin{aligned}
\hat{T}\,(B'(v)|B''(v)) &= \hat{T}\,(\mathrm{CRI}^T_{R_{AB}}(A')|\mathrm{CRI}^T_{R_{AB}}(A'')) = \\
&= \hat{T}\left(\operatorname*{SUP}_{u\in U} T\,(A'(u), R_{AB}(u,v)) \,\middle|\, \operatorname*{SUP}_{u\in U} T\,(A''(u), R_{AB}(u,v))\right) = \\
&\underset{(*)}{=} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\,(T(A'(u), R_{AB}(u,v)) \,|\, \operatorname*{SUP}_{r\in U} T\,(A''(r), R_{AB}(r,v))) \geq \\
&\underset{(**)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\,(T(A'(u), R_{AB}(u,v)) \,|\, T\,(A''(u), R_{AB}(u,v))) \geq \\
&\underset{(***)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\,(A'(u)|A''(u)) \geq \\
&\geq \operatorname*{INF}_{u\in U} \mathrm{MIN}\left\{\hat{T}(A'(u) \mid A''(u)), \hat{T}(A''(u)|A'(u))\right\} = \\
&= \operatorname*{INF}_{u\in U} E_T\,(A'(u), A''(u)) = \overline{E}^T_U(A', A''),
\end{aligned}$$

on

$(*)$ segueix del fet que $\hat{T}(x|y)$ és monòtona decreixent i contínua per l'esquerra respecte la variable x.

$(**)$ és conseqüència de la monotonia creixent de $\hat{T}(x|y)$ respecte la variable y.

$(***)$ segueix del segon lema de simplificació (Lema 1.2.17).

Semblantment, es pot obtenir la desigualtat

$$\hat{T}(B''(v)|B'(v)) \geq \overline{E}^T_U(A', A'')$$

i, de les dues,

$$\begin{aligned} E_T(B'(v), B''(v) &= \mathrm{MIN}\left\{\hat{T}(B'(v)|B''(v)), \hat{T}(B''(v)|B'(v))\right\} \geq \\ &\geq \overline{E}_U^T(A', A''). \end{aligned}$$

Finalment, donada l'arbitrarietat de $v \in V$, es té:

$$\overline{E}_V^T(B', B'') = \operatorname*{INF}_{u \in V} E_T(B'(v), B''(v)) \geq \overline{E}_V^T(A', A''),$$

el que calia provar. ■

Un cas especialment important de CRI^T s'obté prenent T =MIN. Això es deu, d'una banda, a que és el més usat en el camp de les aplicacions al Fuzzy Control [Mamdani, 77], i d'altra a que apareix de forma natural en la teoria de la possibilitat [Zadeh, 73].

Els operadors $\mathrm{CRI}^{\mathrm{MIN}}$ presenten una conducta molt especial: són T-extensionals per qualsevol t-norma T considerada.

Proposició 4.2.8. Per qualsevol t-norma T i qualsevol relació difusa $R : U \times V \longrightarrow [0,1]$, l'operador $\mathrm{CRI}_R^{\mathrm{MIN}} : [0,1]^U \longrightarrow [0,1]^V$ és T-extensional.

Demostració. Donats A' i $A'' \in [0,1]^U$, s'ha de veure que les tesis associades B' $=\mathrm{CRI}_R^{\mathrm{MIN}}(A')$ i B'' $=\mathrm{CRI}_R^{\mathrm{MIN}}(A'')$ satisfan:

$$\overline{E}_U^T(A', A'') \leq \overline{E}_V^T(B', B''),$$

per qualsevol t-norma T.

Per tot $v \in V$ es té:

$$\begin{aligned} &\hat{T}(B'(v)|B''(v)) = \hat{T}\left(\mathrm{CRI}_R^{\mathrm{MIN}}(A')|\mathrm{CRI}_R^{\mathrm{MIN}}(A'')\right) = \\ &= \hat{T}\left(\operatorname*{SUP}_{u\in U} \mathrm{MIN}(A'(u), R(u,v)) \middle| \operatorname*{SUP}_{u\in U} \mathrm{MIN}(A''(u), R(u,v))\right) = \\ &\underset{(*)}{=} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\left(\mathrm{MIN}(A'(u), R(u,v)) \middle| \operatorname*{SUP}_{u\in U} \mathrm{MIN}(A''(r), R(r,v))\right) \geq \\ &\underset{(**)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\left(\mathrm{MIN}(A'(u), R(u,v)) \middle| \mathrm{MIN}(A''(r), R(r,v))\right) \geq \\ &\underset{(***)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\left(A'(u), A''(u)\right) \geq \operatorname*{INF}_{u\in U} \mathrm{MIN}\left\{\hat{T}(A'(u)|A''(u)), \hat{T}(A''(u)|A'(u))\right\} = \end{aligned}$$

$$= \quad \operatorname*{INF}_{u \in U} E_T(A'(u), A''(u)) = \overline{E}_U^T(A', A''),$$

on

(*) segueix del fet que $\hat{T}(x|y)$ és monòtona decreixent i contínua per l'esquerra respecte la variable x.

(**) és conseqüència de la monotonia creixent de $\hat{T}(x|y)$ respecte la variable y

(***) segueix del fet que $\hat{T}(\mathrm{MIN}(x,z)|\,\mathrm{MIN}(y,z)) \geq \hat{T}(x|y)$ per qualsevol t-norma T. Aquesta propietat és fàcilment provable considerant x, y, z en tots els possibles ordres per la relació $\leq$, i tenint en compte les propietats elementals de $\hat{T}$.

Semblantment, es pot obtenir la desigualtat:

$$\hat{T}(B''(u)|B'(v)) \geq \overline{E}_U^T(A', A'')$$

i, de les dues,

$$\begin{aligned} E_T(B'(v)|B''(v)) &= \mathrm{MIN}\left\{\hat{T}(B'(v)|B''(v)), \hat{T}(B''(v), B'(v))\right\} \\ &\geq \overline{E}_U^T(A', A''). \end{aligned}$$

Finalment, donada l'arbitrarietat de $v \in V$, es té:

$$\overline{E}_V^T(B', B'') = \operatorname*{INF}_{v \in V} E_T(B'(v), B''(v)) \geq \overline{E}_U^T(A', A''),$$

que és el que es volia veure. ∎

Tots dos, el teorema 4.2.7 i la proposició 4.2.8, constitueixen una justificació de CRI en termes de Raonament Aproximat. S'ha de destacar que aquesta justificació comprèn també totes aquelles relacions R_{AB} que, havent estat àmpliament utilitzades en el camp de les aplicacions, són difícilment justificables com a relacions d'implicació. El cas paradigmàtic és, sens dubte, la relació de Mamdani $R_{AB}(u,v) = \mathrm{MIN}\{A(u), B(v)\}$.

Resulta sorprenent l'arbitrarietat de la relació R_{AB}. De fet, l'elecció de R_{AB} pot dependre del problema concret a tractar.

Si l'operador CRI prové d'una regla "si A llavors B", una propietat natural de demanar serà que l'operador interpoli la regla, en el sentit de la definició següent:

Definició 4.2.9. Un operador $\mathcal{C} : [0,1]^U \longrightarrow [0,1]^V$ **interpola la regla** "si A llavors B", $A \in [0,1]^U$, $B \in [0,1]^V$, si $\mathcal{C}(A) = B$.

Resulta evident que una relació R_{AB} qualsevol en un operador CRI no interpolarà la regla "si A llavors B".

Sota certes hipòtesis, es pot demostrar [Trillas & Valverde, 85b] que la relació $R(u,v) = \hat{T}(A(u)|B(v))$ interpola la regla "si A llavors B", mentre que $R(u,v) = \text{MIN}\{A(u), B(v)\}$ no ho fa, tot i que dóna resultats aproximats satisfactoris [Mamdani, 77].

Un altre exemple notable d'operador d'inferència extensional, diferent de CRI però estretament relacionat, el proporcionen les extensions de funcions [Kruse et al., 94].

Definició 4.2.10. Si $f : U \longrightarrow V$ és una funció, l'extensió f^* de f es defineix com:

$$\begin{aligned} f^* : [0,1]^U &\longrightarrow [0,1]^V \\ \mu &\longmapsto f^*(\mu) \end{aligned}$$

on $f^*(\mu)(v) = \text{SUP}_{\{f^{-1}(v)\}}\, \mu(u)$.

La idea que hi ha darrera l'extensió d'una funció és ben simple. Suposem que existeix una funció $f : U \longrightarrow V$ que descriu la dependència entre els universos de discurs U i V, i que aquesta funció és, a més, coneguda. En tal situació, si X i Y són variables possibilístiques definides sobre U i V, respectivament, i es disposa d'una hipòtesi no vaga, no imprecisa, clàssica $X = \{u_0\}$ $(u \in U)$, f permet inferir la tesi $Y = \{f(u_0)\}$.

Si en comptes d'això tenim una hipòtesi vaga, que expressem a través d'un subconjunt difús A, ("X és A"), llavors la tesi inferida serà "Y és $f^*(A)$". En definitiva, f^* ens proporciona regles del tipus "si A llavors $f^*(A)$".

En [Kruse et al., 94] s'afirma que, per qualsevol funció f, la seva extensió f^* és T-extensional per $T = \text{Ł}$ i $T = \text{MIN}$. Més en general, val el següent teorema:

Teorema 4.2.11. *Per qualsevol funció $f : U \longrightarrow V$, la seva extensió f^* és un operador d'inferència T-extensional respecte qualsevol t-norma T contínua per l'esquerra.*

Demostració. Que és operador d'inferència és trivial.

S'ha de provar que, per qualsevol T contínua,

$$\overline{E}_T^U(A, A') \leq \overline{E}_T^V(f^*(A), f^*(A')).$$

Donat $v \in V$, es té:

$$\begin{aligned}
\hat{T}\left(f^*(A)(v)|f^*(A')(v)\right) &= \hat{T}\left(\mathop{\mathrm{SUP}}_{u\in\{f^{-1}(v)\}} A(u)| \mathop{\mathrm{SUP}}_{u\in\{f^{-1}(v)\}} A'(u)\right) = \\
&\underset{(*)}{=} \mathop{\mathrm{INF}}_{u\in f^{-1}(v)} \hat{T}\left(A(u)| \mathop{\mathrm{SUP}}_{s\in f^{-1}(v)} A'(s)\right) \underset{(**)}{\geq} \mathop{\mathrm{INF}}_{u\in f^{-1}(v)} \hat{T}(A(u)|A_2(u)) \geq \\
&\geq \mathop{\mathrm{INF}}_{u\in U} \hat{T}\left(A(u)|A'(u)\right) \geq \mathop{\mathrm{INF}}_{u\in U} E_T(A_1(u), A_2(u)) = \overline{E}_U^T(A_1, A_2)
\end{aligned}$$

(*) segueix de la continuïtat per l'esquerra respecte la variable x de la funció $\hat{T}(x|y)$.

(**) és conseqüència de la monotonia de $\hat{T}(x|y)$ respecte la variable y.

De forma anàloga, es prova que $\hat{T}\left(f^*(A')(v)|f^*(A)(v)\right) \geq \overline{E}_U^T(A', A'')$ i d'ambdues obtenim $E_T\left(f^*(A)(v), f^*(A')(v)\right) \geq \overline{E}_U^T(A, A'')$. Finalment, donada l'arbitarietat de $v \in V$,

$$\begin{aligned}
\overline{E}_V^T(f^*(A), f^*(A')) &= \mathop{\mathrm{INF}}_{v\in V} E_T\left(f^*(A)(v), f^*(A')(v)\right) \geq \\
&\geq \overline{E}_U^T(A, A'). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

4.3 Inferència basada en l'extensionalitat

A la secció anterior s'ha posat de manifest la rellevància de la classe OIE_T dels operadors d'inferència extensionals, que compta amb operadors tan coneguts com CRI i l'extensió de funcions. Aquesta rellevància porta a qüestionar-se si és possible introduir mecanismes d'inferència que es basin exclusivament en la extensionalitat. Concretament, el problema es formula de la següent manera: donada una regla "si A llavors B", existeix algun operador extensional $\mathcal{C}$ òptim respecte l'ordre puntual (i.e. menys específic), que interpoli la regla (i.e. $\mathcal{C}(A) = B$)?

Aquest problema admet dues solucions diferents segons considerem operadors de OE_T o bé ens restringim als de OIE_T, però en tots dos cassos la resposta és afirmativa, amb un únic operador òptim com a solució.

En primer lloc es tracta el problema dintre de la classe dels OIE_T.

Definició 4.3.1. L'Operador Natural d'Inferència associat a la regla "si A llavors B", i a la t-norma T, serà:

$$\begin{aligned} \overline{C}^T_{A,B} : [0,1]^U &\longrightarrow [0,1]^V \\ A' &\longmapsto \overline{C}^T_{AB}(A') = B' \end{aligned}$$

on $B'(v) = \hat{T}\left(\text{INF}_{u\in U}\, \hat{T}\left(A'(u)|A(u)\right) |B(v)\right)$

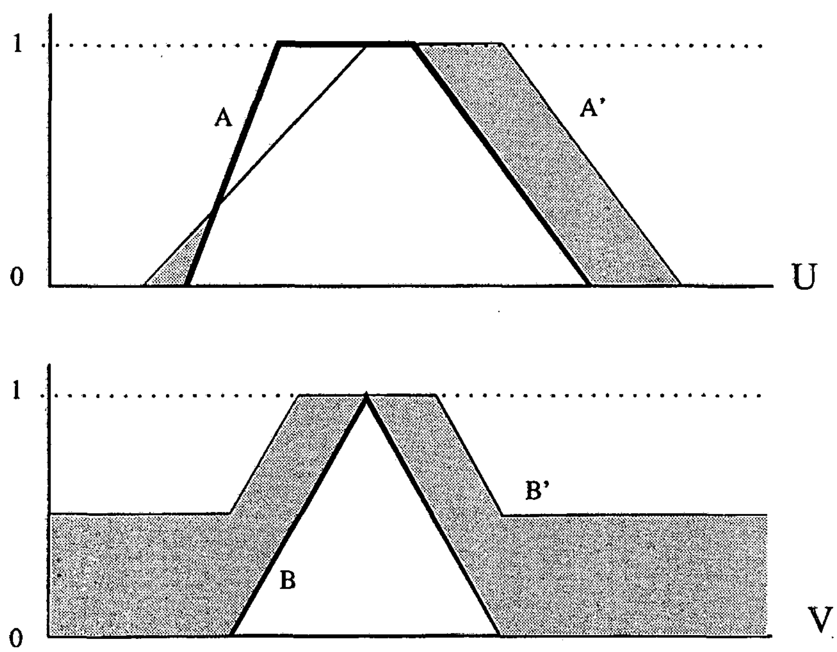

Figura 4.1. Operador Natural d'Inferència

El següent teorema estableix de quina manera l'Operador Natural d'Inferència és l'òptim dintre de la classe dels OIE_T.

Teorema 4.3.2.

(a) $\overline{C}^T_{AB}$ és operador d'inferència.

(b) Per tot $A' \in [0,1]^U$, $B \leq_V \overline{C}^T_{AB}(A')$. A més, si $A' \leq_U A$ llavors $\overline{C}_{AB}(A') = B$.

(c) $\overline{C}^T_{AB}$ interpola la regla "si A llavors B".

(d) $\overline{C}^T_{AB}$ és operador T-extensional.

(e) $\overline{C}^T_{AB}$ és l'operador més gran respecte $\leq_V$ (i.e. menys específic) satisfent (a), (b), (c) i (d).

Demostració.

(a) És conseqüència immediata de la monotonia de $\hat{T}$ i del INF.

(b) Per qualssevol $x, y \in [0,1]$, $\hat{T}(x|y) \geq y$
Per tant, donat $A' \in [0,1]^U$, per tot $v \in V$ es té:

$$\overline{C}^T_{AB}(A')(v) = \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\left(A'(u)|A(u)\right) B(v)\right) \geq B(v).$$

D'altra banda, si $x \leq y$ llavors $\hat{T}(x|y) = 1$. Així, si $A' \leq_U A$, resulta $\overline{C}^T_{AB}(A')(v) = \hat{T}\left(\mathrm{INF}_{u\in U} \hat{T}\left(A'(u)|A(u)\right) |B(v)\right) = \hat{T}(1|B(v)) = B(v)$, per tot $v \in V$.

(c) Segueix immediatament de (b).

(d) Donat A' i $A" \in [0,1]^U$, considerem $B' = \overline{C}^T_{AB}(A')$ i $B" = \overline{C}^T_{AB}(A")$.
S'ha de provar que $\overline{E}^T_V(A', A") \leq \overline{E}^T_V(B', B")$.
Per cada $v \in V$, es té:

$$
\begin{aligned}
&\hat{T}(B'(v) \mid B"(v)) = \\
&\quad = \hat{T}\left(\hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\left(A'(u) \mid A(u)\right) |B(v)\right) \middle| \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\left(A"(u)|A(u)\right) |B(v)\right)\right) \\
&\quad \underset{(*)}{\geq} \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\left(A"(u)|A(u)\right) \middle| \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\left(A'(u)|A(u)\right)\right) = \\
&\quad \underset{(**)}{=} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{r\in U} \hat{T}\left(A"(r)|A(r)\right) \middle| \hat{T}(A'(u)|A(u)\right) \geq \\
&\quad \underset{(***)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\left(\hat{T}(A"(u)\ |A(u)\right) \middle| \hat{T}\left(A'(u)\ |A(u)\right)) \\
&\quad \underset{(****)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}(A'(u)|A(u)) \geq \\
&\quad \geq \operatorname*{INF}_{u\in U} \mathrm{MIN}\{\hat{T}(A'(u)|A"(u)), \hat{T}(A"(u)|A'(u))\} \\
&\quad = \operatorname*{INF}_{u\in U} E_T(A'(u), A"(u)) = \\
&\quad = \overline{E}^T_V(A', A")
\end{aligned}
$$

on les igualtats i desigualtats segueixen dels següents fets:

(*) i (****) són conseqüència del lema de simplificació 1.2.17.

(**) $\hat{T}(x|y)$ és monòtona creixent i contínua per la dreta respecte la variable y.

(***) $\hat{T}(x|y)$ és monòtona decreixent respecte la variable x.

De forma semblant s'obtindria que $\hat{T}(B"(v)\ |B'(v)) \geq \overline{E}_U^T(A', A")$ i, de les dues,

$$E_T(B'(v), B"(v)) = \mathrm{MIN}\{\hat{T}(B'(v) \mid B"(v)), \hat{T}(B"(v) \mid B'(v))\} \geq \overline{E}_U^T(A', A").$$

Finalment, donada l'arbitrarietat de $v \in V$,

$$\overline{E}_V^T(B', B") = \underset{v\in V}{\mathrm{INF}}\, E_T(B'(v), B"(v)) \geq \overline{E}_U^T(A', A").$$

(e) Sigui $\mathcal{D} : [0,1]^U \longrightarrow [0,1]^V$ un operador satisfent (a), (b), (c) i (d).

Donat $A' \in [0,1]^U$, volem veure que $\mathcal{D}(A') \leq_V \overline{C}_{AB}^T(A')$.

Considerem $A" = \mathrm{SUP}_{\leq U}(A, A')$, (i.e. $A"(u) = \mathrm{SUP}\{A(u), A'(u)\}$ per tot $u \in U$).

Obviament $A \leq_U A"$ i, per tant, $\overline{E}_U^T(A", A) = \mathrm{INF}_{u\in U}\, E_T(A"(u), A(u)) = \mathrm{INF}_{u\in U}\, \hat{T}(A"(u) \mid A(u))$.

Com que $\mathcal{D}$ satisfà (b), (c) i (d), se segueix:

$$\begin{aligned}
\underset{v\in V}{\mathrm{INF}}\, \hat{T}\,(\mathcal{D}(A")(v)|B(v)) &\underset{(b)}{=} \underset{v\in V}{\mathrm{INF}}\, \mathrm{MIN}\{\hat{T}(\mathcal{D}(A")(v)|B(v)), \hat{T}(B(v)|\mathcal{D}(A")(v)\} = \\
&= \underset{v\in V}{\mathrm{INF}}\, E_T\,(\mathcal{D}(A"(v), B(v)) = \\
&= \overline{E}_V^T(\mathcal{D}(A"), B) = \\
&\underset{(c)}{=} \overline{E}_V^T(\mathcal{D}(A"), \mathcal{D}(A)) \underset{(d)}{\geq} \overline{E}_U^T(A", A) = \\
&= \underset{u\in U}{\mathrm{INF}}\, \hat{T}(A"(u)|A(u)).
\end{aligned}$$

Per tant, per cada $v \in V$, $\hat{T}(\mathcal{D}(A")(v)|B(v)) \geq \mathrm{INF}_{u\in U}\, \hat{T}(A"(u) \mid A(u))$ i, com a conseqüència del lema 1.2.23,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(A")(v) &\leq \sup\{\alpha \in [0,1]/\hat{T}(\alpha|B(v)) \geq \underset{u\in U}{\mathrm{INF}}\, \hat{T}(A"(u)|A(u)\} = \\
&= \hat{T}\left(\underset{u\in U}{\mathrm{INF}}\, \hat{T}\,(A"(u)|A(u))\,|B(v)\right)
\end{aligned}$$

d'on $\mathcal{D}(A") \leq_V \overline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A")$.

Però com que $A" = A \vee A'$, i $\overline{\mathcal{C}}^T_{AB}$ és operador d'inferència, es té

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A") &= \overline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A \vee A') = \\ &= \overline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A) \vee \overline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A') \underset{(b)}{=} \overline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A'), \end{aligned}$$

i, d'altra banda, com que $\mathcal{D}$ satisfà (a) i $A' \leq_V A"$ es té $\mathcal{D}(A') \leq_V \mathcal{D}(A")$, resultant finalment $\mathcal{D}(A') \leq_V \mathcal{D}(A") \leq_V \overline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A") = \overline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A')$. ∎

Una conseqüència immediata dels teoremes 4.3.2 i 4.2.7 és que si $\mathrm{CRI}^T_{R_{AB}}$ interpola la regla "si A llavors B" (per exemple si $R_{AB} = \hat{T}(A(u)|B(v))$), llavors $\mathrm{CRI}^T_{AB} \leq_V \overline{\mathcal{C}}^T_{AB}$. De fet, el lema 1.2.21 estableix que, a nivell de l'interval [0,1] es té la desigualtat $\hat{T}\left(\hat{T}(x|y)|z\right) \geq T(x, \hat{T}(y|z))$, i que no val, en general, la igualtat. Per tant, la igualtat tampoc valdrà si considerem $\overline{\mathcal{C}}^T_{AB}$ i $\mathrm{CRI}^T_{R_{AB}}$ entre subconjunts difusos.

Exemple 4.3.3. Considerem $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$, $V = \{v_0, v_1, v_2\}$, $A = (0, 0'25, 1, 0)$, $A' = (0, 0'5, 1, 0)$ i $B = (0'5, 0'3, 1)$.

Les tesis B' que s'obtenen són:

$$\left.\begin{aligned} B' &= CRI^T_{AB}(A') = (0'5, 0'5, 1) \\ B' &= \overline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A') = (1, 0'6, 1) \end{aligned}\right\} \text{T-producte}$$

$$\left.\begin{aligned} B' &= CRI^T_{AB}(A') = (0'5, 0'5, 1) \\ B' &= \overline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A') = (0'75, 0'55, 1) \end{aligned}\right\} T = \text{Ł}$$

$$\left.\begin{aligned} B' &= CRI(A') = (0'5, 0'5, 1) \\ B' &= \overline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A') = (1, 1, 1) \end{aligned}\right\} T = \text{Mínim}$$

Ja s'ha vist a la secció anterior que $\mathrm{CRI}^T_{R_{AB}}$, quan $R_{AB} = \hat{T}(A(u)|B(v))$ s'obté d'estendre als difusos de $[0,1]^U$ i $[0,1]^V$ el model $T(x, \hat{T}(y|z))$ de l'interval unitat, i que això es fa via suprems $\left(\mathrm{CRI}^T_{R_{AB}}(A'))(v) = \mathrm{SUP}_{u \in U} T\left(A'(u), \hat{T}(A(u)|B(v))\right)\right)$.

En canvi, si el model a estendre als difusos és $\hat{T}\left(\hat{T}(x|y)|z\right)$, hi ha dues possibilitats: $\mathrm{SUP}_{u \in U} \hat{T}\left(\hat{T}(A'(u)|A(u))|B(v)\right)$ i

$\hat{T}\left(\mathrm{INF}_{u\in U}\,\hat{T}(A'(u)|A(u))|B(v)\right)$

Com que $\hat{T}(x|y)$ és monòtona decreixent i contínua per l'esquerra respecte la variable x, peró no és (en general) contínua per la dreta, resulta que

$$\mathop{\mathrm{SUP}}_{u\in U}\hat{T}\left(\hat{T}(A'(u)|A(u))|B(v)\right)\leq T\left(\mathop{\mathrm{INF}}_{u\in U}\hat{T}\left(A'(u)|A(u)\right)|B(v)\right)=\overline{C}^{T}_{AB}(A').$$

La igualtat, en general, no val.

Exemple 4.3.4. Considerem T =MIN, $U=\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $V=\{v\}$, $B(v)\in[0,1]$ tal que $B(v)<1$, $A\in[0,1]^U$ tal que $A(u_n)\downarrow B(v)$, i $A'\in[0,1]^U$ tal que $A'(u_n)=1$, per tot $n\in\mathbb{N}$. Llavors

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathrm{SUP}}_{n\in\mathbb{N}}\hat{T}\left(\hat{T}\left(A'(u_n)|A(u_n)\right)|B(v)\right) &= \mathop{\mathrm{SUP}}_{n\in\mathbb{N}}\hat{T}\left(\hat{T}(1|A(u_n))|B(v)\right)= \\
&= \mathop{\mathrm{SUP}}_{n\in\mathbb{N}}\hat{T}\left(A(u_n)|B(v)\right)= \\
&= \mathop{\mathrm{SUP}}_{n\in\mathbb{N}}B(v)=B(v)<1=\hat{T}(B(v)|B(v))= \\
&= \hat{T}\left(\mathop{\mathrm{INF}}_{n\in\mathbb{N}}A(u_n)|B(v)\right)= \\
&= \hat{T}\left(\mathop{\mathrm{INF}}_{n\in\mathbb{N}}\hat{T}(1|A(u_n))|B(v)\right)= \\
&= \hat{T}\left(\mathop{\mathrm{INF}}_{n\in\mathbb{N}}\hat{T}(A'(u_n)|A(u_n))|B(v)\right)\quad\blacksquare
\end{aligned}$$

Segons s'ha vist al Capítol 1 si la t-norma T és arquimediana no estricta, llavors $\hat{T}(x|y)$ és contínua per la dreta respecte de la primera variable x, i ambdós operadors coincideixen.

Més en general, per una t-norma T contínua per l'esquerra, es té:

Lema 4.3.5. Si existeix $u_0\in U$ tal que $\mathrm{INF}_{u\in U}\,\hat{T}(A'(u)|A(u))=\hat{T}(A'(u_0)|A(u_0))$, llavors

$$\mathop{\mathrm{SUP}}_{u\in U}\hat{T}\left(\hat{T}(A'(u)|A(u))|B(v)\right)=\hat{T}\left(\mathop{\mathrm{INF}}_{u\in U}\hat{T}(A'(u)|A(u))|B(v)\right).$$

Demostració.

$$\begin{aligned}\mathop{\mathrm{SUP}}_{u\in U} \hat{T}\left(\hat{T}(A'(u)|A(u))|B(v)\right) &\leq \hat{T}\left(\mathop{\mathrm{INF}}_{u\in U} \hat{T}\left(A'(u)|A(u)\right)|B(v)\right) = \\ &= \hat{T}\left(\hat{T}(A'(u_0)|A(u_0))\big|B(v)\right) \leq \\ &\leq \mathop{\mathrm{SUP}}_{u\in V} \hat{T}\left(\hat{T}(A'(u)|A(u))\big|B(v)\right). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Notació: $C^T_{AB} = \mathrm{SUP}_{u\in U}\, \hat{T}\left(\hat{T}(A'(u)|A(u))\big|B(v)\right)$.

Lema 4.3.6. Per qualsevol t-norma T contínua, per l'esquerra, i per $R_{AB} = \hat{T}(A(u)|B(v))$ es té:

$$\mathrm{CRI}^T_{R_{AB}}(A') \leq_V C^T_{AB}(A') \leq_V \overline{C}^T_{AB}(A').$$

Demostració. Es desprèn de les consideracions precedents. ■

A més, l'operador C^T_{AB} presenta importants propietats estructurals.

Teorema 4.3.7.

(a) C^T_{AB} és operador d'inferència.

(b) Per tot $A' \in [0,1]^U$, $B \leq_V C^T_{AB}(A')$. A més, si $A' \leq_U A$ llavors $C^T_{AB}(A') = B$.

(c) C^T_{AB} interpola la regla "si A llavors B".

(d) C^T_{AB} és operador T-extensional.

Demostració.

(a) És conseqüència immediata de la monotonia de $\hat{T}$ i del SUP.

(b) Per qualsevol $x, y, z \in [0,1]$ es té que $\hat{T}(\hat{T}(x|y)|z) \geq z$, (atès que $\hat{T}(\hat{T}(x|y)|z)$ és monòtona creixent respecte x, i que $\hat{T}(\hat{T}(0|y)|z) = z$).

Per tant, per tot $v \in V$ es té:

$$\overline{C}_{AB}(A')(v) = \operatorname*{SUP}_{u\in U} \hat{T}(\hat{T}(A'(u)|A(u))|B(v)) \geq \operatorname*{SUP}_{u\in U} B(v) = B(v).$$

D'altra banda, si $x \leq y$ es té $\hat{T}(\hat{T}(x|y)|z) = z$, (perquè $\hat{T}(x|y) = 1$). Així, si $A' \leq_U A$, resulta

$$\overline{C}_{AB}(A')(v) = \operatorname*{SUP}_{u\in U} \hat{T}\left(\hat{T}(A'(u)|A(u))|B(v)\right) = \operatorname*{SUP}_{u\in U} B(v) = B(v),$$

per tot $v \in V$.

(c) Segueix immediatament de (b).

(d) Donats A' i $A'' \in [0,1]^U$, considerem $B' = \overline{C}_{AB}(A')$ i $B'' = \overline{C}_{AB}(A'')$. S'ha de provar que $\overline{E}^T_U(A', A'') \leq \overline{E}^T_V(B', B'')$.

Per cada $v \in V$, es té:

$$\begin{aligned}
\hat{T}(B'(v)|B''(v)) &= \hat{T}\left(\operatorname*{SUP}_{u\in U} \hat{T}\left(\hat{T}(A'(u)|A(u))|B(v)\right)\right.\\
&\quad \left.\Big|\operatorname*{SUP}_{u\in U} \hat{T}\left(\hat{T}(A''(u)|A(u))|B(v)\right)\right)\\
&\underset{(*)}{=} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\left(\hat{T}\left(\hat{T}(A'(u)|A(u))|B(v)\right)\Big|\operatorname*{SUP}_{r\in U} \hat{T}\left(\hat{T}(A''(r)|A(r))|B(v)\right)\right) \geq\\
&\underset{(**)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\left(\hat{T}\left(\hat{T}(A'(u)|A(u))B(v)\right)\Big|\hat{T}\left(\hat{T}(A''(u)|A(u))|B(v)\right)\right) \geq\\
&\underset{(***)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\left(\hat{T}(A'(u)|A(u))|\hat{T}(A"(u)|A(u))\right) \geq\\
&\underset{(****)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}(A'(u)|A''(u)) \geq\\
&\geq \operatorname*{INF}_{u\in U} \operatorname{MIN}\left\{\hat{T}(A'(u)|A''(u)), \hat{T}(A''(u)|A'(u))\right\}\\
&= \operatorname*{INF}_{u\in U} E_T(A'(u), A''(u)) = \overline{E}^T_U(A', A'').
\end{aligned}$$

on les igualtats i desigualtats segueixen dels següents fets:

(*) $\hat{T}(x|y)$ és monòtona decreixent i contínua per l'esquerra respecte la variable x.

(**) $\hat{T}(x|y)$ és monòtona creixent respecte la variable y.

(***) i (****) són conseqüència del lema de simplificació (1.2.17).

De forma semblant s'obtindria que $\hat{T}(B"(v)|B'(v)) \geq \overline{E}^T_U(A', A")$, i, de les dues,

$$\begin{aligned} E_T(B'(v), B''(v)) &= \text{MIN}\left\{\hat{T}(B'(v)|B''(v)), \hat{T}(B''(v)|B'(v))\right\} \geq \\ &\geq \overline{E}^T_U(A', A''). \end{aligned}$$

Finalment, donada l'arbitarietat de $v \in V$,

$$\overline{E}^T_V(B', B'') = \underset{v \in V}{\text{INF}}\, E_T\,(B'(v), B''(v)) \geq \overline{E}^T_U(A', A''). \quad \blacksquare$$

A continuació es resol el problema de determinar l'operador òptim respecte l'ordre puntual $\leq_V$ (i.e. menys específic), dintre de la classe dels operadors extensionals OE_T (no necessàriament operadors d'inferència), que anomenarem *operador natural simetritzat.*

Definició 4.3.8. L'Operador Natural Simetritzat associat a la regla "si A llavors B" i a la t-norma T, serà:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{S}}^T_{AB} : [0,1]^U &\longrightarrow [0,1]^V \\ A' &\longmapsto \mathcal{S}^T_{AB}(A') = B' \end{aligned}$$

on $B'(v) = \hat{T}\left(\text{INF}_{u \in U}\, E_T(A'(u), A(u)) \middle| B(v)\right)$.

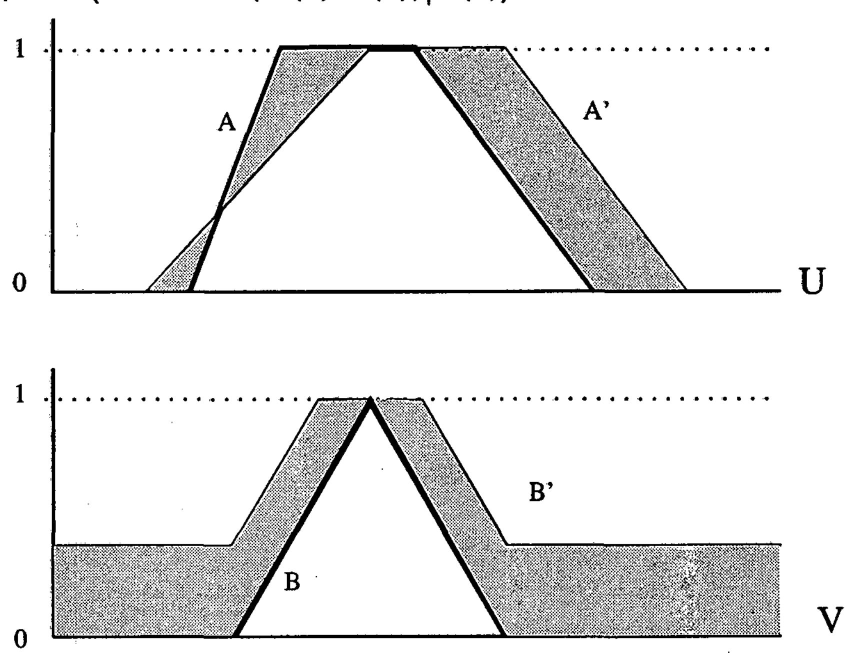

Figura 4.2. Operador Natural Simetritzat

L'adjectiu "simetritzat" en la definició anterior fa referència al fet que la imatge d'un difús A' per $\overline{S}^T_{AB}$ depèn només de la semblança entre A' i A, i no de l'ordenació puntual.

En particular, l'Operador Natural Simetritzat no és un operador d'inferència.

Lema 4.3.8. $\overline{S}^T_{AB}(A')(v) = \hat{T}\left(\overline{E}^T_U(A',A)|B(v)\right)$, per tot $v \in V$.

Demostració. Evident. ■

Lema 4.3.10. $\overline{S}^T_{AB}(A')(v) = \left\{\overline{C}^T_{AB}(A') \vee C^T_{A'B}(A)\right\}$.

Demostració. Per tot $v \in V$,

$$\begin{aligned}
\overline{S}^T_{AB}(A')(v) &= \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u\in U} E_T(A'(u),A(u))|B(v)\right) = \\
&= \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u\in U}\left(\mathrm{MIN}\left\{\hat{T}(A'(u)|A(u)),\hat{T}(A(u)|A'(u))\right\}\right)\middle|B(v)\right) = \\
&= \hat{T}\left(\mathrm{MIN}\left\{\operatorname*{INF}_{u\in U}\hat{T}\,(A'(u)|A(u))\,,\operatorname*{INF}_{u\in U}\hat{T}(A(u),A'(u))\right\}\middle|B(v)\right) = \\
&= \mathrm{SUP}\left\{\hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u\in U}\hat{T}(A'(u)|A(u))|B(v)\right),\hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u\in U}\hat{T}(A(u)|A'(u))|B(v)\right)\right\} = \\
&= \mathrm{SUP}\left\{\overline{C}^T_{AB}(A')(v),\overline{C}_{A'B}(A)(v)\right\}.
\end{aligned}$$ ■

El següent teorema estableix de quina manera l'operador natural simetritzat és òptim dintre de la classe OE_T dels operadors extensionals.

Teorema 4.3.11.

(a) $\overline{S}^T_{AB}(A') \geq_V B$, per tot $A' \in [0,1]^U$.

(b) $\overline{S}^T_{AB}$ interpola la regla "si A llavors B".

(c) $\overline{S}^T_{AB}$ és operador T-extensional.

(d) $\overline{S}^T_{AB}$ és l'operador més gran respecte $\leq_V$ (i.e. menys específic) satisfent (a) (b) i (c).

Demostració.

(a) $\hat{T}(x|y)$ és monòtona creixent respecte la variable x, i $\hat{T}(1|B(v)) = B(v)$.

(b) Trivial.

(c) Donat A' i $A'' \in [0,1]^U$, considerem $B' = \mathcal{S}^T_{AB}(A')$ i $B'' = \mathcal{S}^T_{AB}(A'')$. S'ha de provar que $\overline{E}^T_U(A', A'') \leq \overline{E}^T_V(B', B'')$.

Per cada $v \in V$, es té:

$$\begin{aligned} \hat{T}(B'(v)|B''(v)) &= \hat{T}\left(\hat{T}\left(\overline{E}^T_U(A,A')|B(v)\right)|\hat{T}(\overline{E}^T_U(A,A'')|B(v))\right) \geq \\ &\underset{(*)}{\geq} \hat{T}\left(\overline{E}^T_U(A,A'')|\overline{E}^T_U(A,A')\right) \underset{(**)}{\geq} \overline{E}^T_U(A',A'') \end{aligned}$$

on (*) i (**) són conseqüència dels lemes 1.2.17 i 2.1.9 respectivament.

(d) Donat $\mathcal{D} : [0,1]^U \longrightarrow [0,1]^V$ satisfent (a), (b) i (c), s'ha de veure que $\mathcal{D}(A') \leq \mathcal{D}^T_{AB}(A')$, per tot $A' \in [0,1]^U$. Per cada $v \in V$ es té, degut al lema 1.2.23.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^T_{AB}(A')(v) &= \hat{T}\left(\overline{E}^T_U(A',A)|B(v)\right) = \\ &= \mathrm{SUP}\left\{\alpha \in [0,1]/\hat{T}(\alpha|B(v)) \geq \overline{E}^T_U(A',A)\right\} \end{aligned}$$

Però

$$\begin{aligned} \hat{T}\left(\mathcal{D}(A')(v)|B(v)\right) &\underset{(a)}{=} E_T\left(\mathcal{D}(A')(v), B(v)\right) \\ &\underset{(b)}{=} E_T(\mathcal{D}(A')(v), \mathcal{D}(A)(v)) \geq \\ &\underset{(c)}{\geq} \overline{E}^T_U(A',A), \end{aligned}$$

i, per tant, $\mathcal{D}(A')(v) \leq \mathcal{S}^T_{AB}(A')(v)$, i donada l'arbitarietat de $v \in V$, $\mathcal{D}(A') \leq_V \mathcal{S}^T_{AB}(A')$. ∎

L'Operador Natural Simetritzat $\overline{\mathcal{S}}^T_{AB}$ s'obté d'estendre als difusos de $[0,1]^U$, $[0,1]^V$ la fórmula $\hat{T}(E_T(x,y)|z)$ de l'interval unitat. Com ja passava amb l'operador natural d'inferència, hi ha dues possibilitats per fer això: $\mathrm{SUP}_{u \in U}\, \hat{T}\left(E_T(A'(u), A(u))|B(v)\right)$ i $\hat{T}\left(\mathrm{INF}_{u \in U}\, E_T(A'(u), A(u))|B(v)\right)$.

Notació: $\mathrm{SUP}_{u \in U}\, \hat{T}\left(E_T(A'(u)|A(u))\big|B(v)\right) = \mathcal{S}^T_{AB}$.

Com qué $\hat{T}(x|y)$ és monòtona decreixent i contínua per l'esquerra respecte a la variable x, peró, en general, no és contínua per la dreta, resulta que $\mathcal{S}^T_{AB} \leq_V \overline{\mathcal{S}}^T_{AB}$. La igualtat, en general, no val.

Exemple 4.3.12. Considerem T =MIN i U, V, A, A', B com en l'exemple 4.2.5.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^T_{AB}(A)(v) &= \operatorname*{SUP}_{n\in\mathbf{N}} \hat{T}\left(E_T(A'(u_n), A(u_n))\middle|B(v)\right) = \\
&= \operatorname*{SUP}_{n\in\mathbf{N}} \hat{T}\left(E_T(1, A(u_n))\middle|B(v)\right) = \\
&= \operatorname*{SUP}_{n\in\mathbf{N}} \hat{T}\left(A(u_n))\middle|B(v)\right) = \operatorname*{SUP}_{n\in\mathbf{N}} B(v) = \\
&= B(v) < 1 = \hat{T}(B(v)|B(v)) = \\
&= \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{n\in\mathbf{N}} \hat{E}_T(1|A(u_n))\middle|B(v)\right) = \\
&= \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{n\in\mathbf{N}} E_T(A'(u_n), A(u_n))|B(v)\right) = \overline{\mathcal{S}}^T_{AB}(A')(v) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Si $\hat{T}(x|y)$ és també contínua per la dreta respecte la variable x, llavors ambdós operadors coincideixen. Més en general, per una t-norma T contínua per l'esquerra, es té:

Lema 4.3.13. Si existeix $u_0 \in U$ tal que $\overline{E}^T_U(A', A) = E_T(A'(u_0), A(u_0))$, llavors $\mathcal{S}^T_{AB}(A') = \overline{\mathcal{S}}^T_{AB}(A')$.

Demostració. Donat $v \in V$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^T_{AB}(A')(v) &= \operatorname*{SUP}_{u\in U} \hat{T}\left(E_T(A'(u), A(u))|B(v)\right) \leq \\
&\leq \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u\in U} E_T(A'(u), A(u))|B(v)\right) = \\
&= \hat{T}\left(\overline{E}^T_U(A', A)|B(v)\right) = \overline{\mathcal{S}}^T_{AB}(A')(v) = \\
&= \hat{T}\left(E_T(A'(u_0), A(u_0))|B(v)\right) \leq \\
&\leq \operatorname*{SUP}_{u\in U} \hat{T}\left(E_T(A'(u), A(u))|B(v)\right) = \\
&= \mathcal{S}^T_{AB}(A')(v). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 4.3.14.

(a) $\mathcal{S}^T_{AB}(A') \geq_V B$, per tot $A' \in [0,1]^U$.

(b) $\mathcal{S}^T_{AB}$ interpola la regla "si A llavors B".

(c) $\mathcal{S}^T_{AB}$ és operador T-extensional.

Demostració.

(a) Conseqüència immediata del fet que $\hat{T}(x|y) \geq y$, per tots $x, y \in [0,1]$,

(b) Evident.

(c) Donat A' i $A'' \in [0,1]^U$, considerem $B' = \mathcal{S}^T_{AB}(A')$ i $B'' = \mathcal{S}^T_{AB}(A'')$ s'ha de provar que $\overline{E}^T_U(A', A'') \leq \overline{E}^T_V(B', B'')$.

Per cada $v \in V$, es té:

$$\begin{aligned}
\hat{T}\,(B'(v)|B''(v)) &= \hat{T}\Big(\operatorname*{SUP}_{u\in U} \hat{T}\,(E_T(A(u), A'(u))|B(v)) \Big| \\
&\qquad | \operatorname*{SUP}_{u\in U} \hat{T}\,(E_T(A(u), A''(u))|B(v)) \Big) = \\
&\underset{(*)}{=} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T} \left(\hat{T}\,(E_T(A(u), A'(u))|B(v)) \,\Big|\, \operatorname*{SUP}_{r\in U} \hat{T}\,(E_T(A(r), A''(r))|B(v)) \right) \geq \\
&\underset{(**)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T} \left(\hat{T}\,(E_T(A(u), A'(u))|B(v)) \,\Big|\, \hat{T}\,(E_T(A(u), A''(u))|B(v)) \right) \geq \\
&\underset{(***)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}\,(E_T(A(u), A'(u))|E_T(A(u), A''(u))) \\
&\underset{(****)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in U} E_T(A'(u), A''(u)) = \overline{E}^T_U(A', A'')
\end{aligned}$$

on les igualtats i desigualtats segueixen dels fets següents:

(*) $\hat{T}(x|y)$ és monòtona decreixent i contínua per l'esquerra respecte la variable x.

(**) $\hat{T}(x|y)$ és monòtona creixent respecte la variable y.

(***) i (****) són conseqüència dels lemes de simplificació 1.2.17 i 2.1.9 respectivament.

De forma semblant s'obtindria que $\hat{T}(B''(v)|B'(v)) \geq \overline{E}_U^T(A',A'')$ i, de les dues,

$$\begin{aligned} E_T(B'(v),B''(v)) &= \mathrm{MIN}\left\{\hat{T}(B'(v)|B''(v)),\hat{T}(B''(v)|B'(v))\right\} \geq \\ &\geq \overline{E}_U^T(A',A''). \end{aligned}$$

Finalment, donada l'arbitrarietat de $v \in V$,

$$\overline{E}_V^T(B',B'') = \mathop{\mathrm{INF}}_{v\in V} E_T(B'(v),B''(v)) \geq \overline{E}_U^T(A',A''). \quad \blacksquare$$

De la mateixa manera que s'ha plantejat el problema de determinar l'operador menys específic que interpola una regla "si A llavors B", es pot plantejar la determinació del més específic.

Donada una regla "si A llavors B", considerem l'operador

$$\begin{aligned} \underline{C}_{AB}^T : [0,1]^U &\longrightarrow [0,1]^V \\ A' &\longmapsto \underline{C}_{AB}^T(A') = B' \end{aligned}$$

definit per $B'(v) = T\left(\mathrm{INF}_{u\in U}\,\hat{T}(A(u)|A'(u)), B(v)\right)$

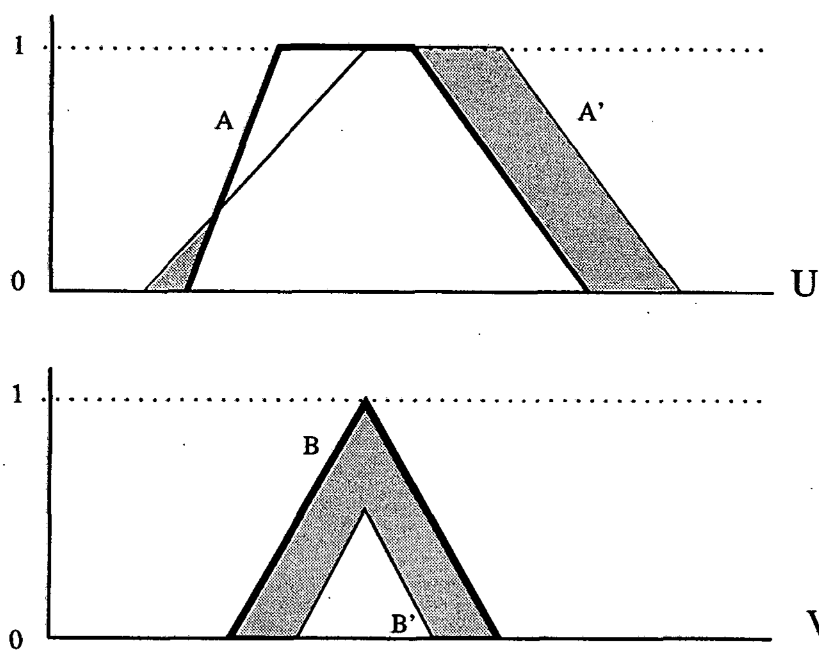

Figura 4.3. L'operador $\underline{C}_{AB}^T$

Teorema 4.3.15.

(a) $\underline{\mathcal{C}}^T_{AB}$ és operador d'inferència.

(b) Per tot $A' \in [0,1]^U$, $B \geq_V \underline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A')$. A més, si $A' \geq_U A$, llavors $\underline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A') = B$.

(c) $\underline{\mathcal{C}}^T_{AB}$ interpola la regla "si A llavors B".

(d) $\underline{\mathcal{C}}^T_{AB}$ és operador T-extensional.

(e) $\underline{\mathcal{C}}^T_{AB}$ és l'operador més petit respecte $\leq_V$ (i.e. més específic) satisfent (a), (b), (c) i (d).

Demostració.

(a) És conseqüència immediata de la monotonia de $T, \hat{T}$ i INF.

(b) Per qualssevol $x, y \in [0,1]$, $T(x,y) \leq y$. Per tant, donat $A' \in [0,1]^U$, per tot $v \in V$ es té:

$$\underline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A') = T\left(\operatorname*{INF}_{u \in U} \hat{T}(A(u)|A'(u)), B(v)\right) \leq B(v).$$

D'altra banda, si $A \leq_U A'$ llavors $\mathrm{INF}_{u\in U}\hat{T}(A(u)|A'(u)) = 1$, d'on $\underline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A')(v) = B(v)$.

(c) Segueix immediatament de (b).

(d) S'ha de veure que $\overline{E}^T_V(\underline{\mathcal{C}}_{AB}(A'), \underline{\mathcal{C}}_{AB}(A'')) \geq \overline{E}^T_U(A', A'')$, per tots $A', A'' \in [0,1]^U$. Donat $v \in V$ qualsevol,

$$\begin{aligned}
&\hat{T}\left(\underline{\mathcal{C}}_{AB}(A')(v) | \underline{\mathcal{C}}_{AB}(A'')(v)\right) = \\
&= \hat{T}\left(T\left(\operatorname*{INF}_{u\in U}\hat{T}(A(u)|A'(u)), B(v)\right) \middle| T\left(\operatorname*{INF}_{u\in U}\hat{T}(A(u)|A''(u), B(v)\right)\right) \geq \\
&\underset{(*)}{\geq} \hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{u\in U}\hat{T}(A(u)|A'(u)) \middle| \operatorname*{INF}_{u\in U}\hat{T}(A(u)|A''(u)\right) = \\
&\underset{(**)}{=} \operatorname*{INF}_{u\in U}\hat{T}\left(\operatorname*{INF}_{s\in U}\hat{T}(A(s)|A'(s)) \middle| \hat{T}(A(u)|A''(u)\right) \geq \\
&\underset{(***)}{\geq} \operatorname*{INF}_{u\in U}\hat{T}\left(\hat{T}(A(u)|A'(u)) \middle| \hat{T}(A(u)|A''(u)\right) \geq
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{(****)}{\geq} \ \operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}(A'(u)|A''(u)) \geq \operatorname*{INF}_{u\in U} E_T(A'(u)|A''(u)) = \\
&= \ \overline{E}^T_U(A', A'').
\end{aligned}
$$

on les igualtats i desigualtats segueixen dels fets següents:

(*) Lema 1.2.10.

(**) $\hat{T}(x,y)$ és monòtona creixent i contínua per la dreta respecte la variable y.

(***) $\hat{T}(x|y)$ és monòtona decreixent respecte la variable x.

(****) Lema 1.2.17.

Semblantment, es té que $\hat{T}\left(\underline{\mathcal{C}}_{AB}(A'')(v)|\underline{\mathcal{C}}_{AB}(A')(v)\right) \geq \overline{E}^T_U(A'', A')$ i, de les dues, $E_T\left(\underline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A')(v), \underline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A'')(v)\right)$.

Finalment, donada l'arbitrarietat de $v \in V$, es té

$$
\overline{E}^T_V(\underline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A')), \underline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A'')) \geq \overline{E}^T_V(A', A''),
$$

el que calia provar. ■

(e) Sigui $\mathcal{D}$ satisfent (a), (b), (c) i (d), s'ha de veure que $\mathcal{D} \geq \underline{\mathcal{C}}^T_{AB}$.

Donat $A' \in [0,1]^U$, considerem $A'' = A' \wedge A$. Per tot $v \in V$, es té que

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A'')(v) &= T\left(\operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}(A(u)|\operatorname{MIN}\{A(u)|A'(u)\})|B(v)\right) = \\
&= T\left(\operatorname*{INF}_{u\in U} \operatorname{MIN}\left\{\hat{T}(A(u)|A(u)), \hat{T}(A(u)|A'(u)\right\}\Big|B(v)\right) = \\
&= T\left(\operatorname*{INF}_{u\in U} \hat{T}(A(u)|A'(u))|B(v)\right) = \underline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A').
\end{aligned}
$$

Com que $\mathcal{D}$ satisfà (a), (b), (c) i (d), llavors:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{INF}_{v\in V} \hat{T}\left(B(v)|\mathcal{D}(A'')(v)\right) \underset{(b)}{=} \operatorname*{INF}_{v\in V} E_T(B(v), \mathcal{D}(A'')(v)) = \\
&= \ \overline{E}^T_V(\mathcal{D}(A''), B) \underset{(c)}{=} \overline{E}^T_V\left(\mathcal{D}(A''), \mathcal{D}(A)\right) \geq \\
&\underset{(d)}{\geq} \ \overline{E}^T_U(A'', A) = \operatorname*{INF}_{u\in U}(A'(u)|A''(u)).
\end{aligned}
$$

Per tant, per cada $v \in V$, $\hat{T}\left(B(v)|\mathcal{D}(A'')(v)\right) \geq \operatorname{INF}_{u\in U} \hat{T}(A(u)|A''(u))$, d'on resulta $\underline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A'')(v) = T\left(B(v), \operatorname{INF}_{u\in U} \hat{T}(A(u)|A''(u))\right) \leq \mathcal{D}(A'')(v)$.

D'altra banda, com que $\mathcal{D}$ satisfà (a), i $A'' \leq A'$ resulta finalment:

$$\mathcal{D}(A') \geq \mathcal{D}(A'') \geq \underline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A'') = \underline{\mathcal{C}}^T_{AB}(A'). \quad \blacksquare$$

Així, segons estableix el teorema 4.2.13, $\underline{\mathcal{C}}^T_{AB}$ és l'operador d'inferència extensional més específic entre els que interpolen la regla "si A llavors B". És, per tant, la solució del problema plantejat dintre de la classe dels OIE$_T$. La solució dintre de la classe OE$_T$ la proporciona l'operador $\underline{\mathcal{S}}^T_{AB} : [0,1]^U \longrightarrow [0,1]^V$ definit per:

$$\underline{\mathcal{S}}^T_{AB}(A')(v) = T\left(B(v), \overline{E}^T_U(A', A)\right),$$

per tot $v \in V$.

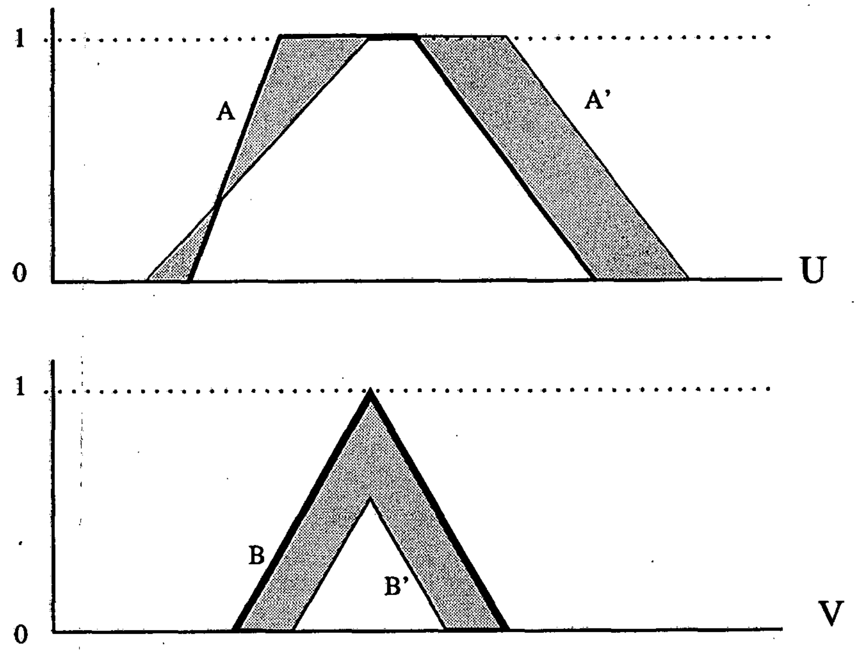

Figura 4.4. L'operador $\underline{\mathcal{S}}^T_{AB}$

Teorema 4.3.16.

(a) Per tot $A' \in [0,1]^U$, $B \geq_V \underline{\mathcal{S}}^T_{AB}(A')$.

(b) $\underline{\mathcal{S}}^T_{AB}$ interpola la regla "si A llavors B".

(c) $\underline{S}^T_{AB}$ és operador extensional.

(d) $\underline{S}^T_{AB}$ és l'operador més petit respecte $\leq_V$ (i.e. més específic) satisfent (a), (b) i (c).

Demostració.

(a) Per qualssevol $x, y \in [0,1]$, $T(x,y) \leq y$. Per tant, donat $A' \in [0,1]^U$, per tot $v \in V$ es té:

$$\underline{S}^T_{AB}(A')(v) = T\left(\overline{E}^T_U(A', A), B(v)\right) \leq B(v).$$

(b) Segueix immediatament de (a).

(c) S'ha de veure que $\overline{E}^T_V\left(\underline{S}^T_{AB}(A'), \underline{S}^T_{AB}(A'')\right) \geq \overline{E}^T_U(A', A'')$, per tot $A', A'' \in [0,1]^U$. Donat $v \in V$ qualsevol,

$$\begin{aligned}
&\hat{T}\left(\underline{S}^T_{AB}(A')(v) \middle| \underline{S}^T_{AB}(A'')(v)\right) = \\
&= \hat{T}\left(T(B(v), \overline{E}^T_U(A', A'')) \middle| T(B(v), \overline{E}^T_U(A'', A))\right) \underset{(*)}{\geq} \\
&\geq \hat{T}\left(\overline{E}^T_U(A', A) \middle| \overline{E}^T_U(A'', A)\right) \underset{(**)}{\geq} \\
&\geq \overline{E}^T_U(A', A'')
\end{aligned}$$

on les desigualtats són conseqüència de:

(*) Lema 1.2.10.

(**) Lema 2.1.9.

Semblantment, $\hat{T}\left(\underline{S}^T_{AB}(A'')(v) \middle| \underline{S}^T_{AB}(A')(v)\right) \geq \overline{E}^T_U(A', A'')$, i, d'ambdues,

$$E_T\left(\underline{S}^T_{AB}(A')(v), \underline{S}^T_{AB}(A'')(v)\right) \geq \overline{E}^T_U(A', A'').$$

Finalment, donada l'arbitrarietat de $v \in V$,

$$\begin{aligned}
\overline{E}^T_V\left(\underline{S}^T_{AB}(A')(v), \underline{S}^T_{AB}(A'')(v)\right) &= \operatorname{INF}_{v \in V} E_T\left(\underline{S}^T_{AB}(A')(v), \underline{S}^T_{AB}(A'')(v)\right) \\
&\geq \overline{E}^T_U(A', A'').
\end{aligned}$$

(d) Donat $\mathcal{D}$ satisfent (a), (b) i (c), s'ha de veure que $\mathcal{D}(A') \geq_V \underline{S}_{AB}(A')$, Per la proposició 1.2.9

$$T(B(v), \overline{E}_U^T(A, A')) = \text{INF}\left\{\alpha \in [0,1] \,/\, \hat{T}(B(v)|\alpha) \geq \overline{E}_U^T(A', A'')\right\}$$

i per tant, com que

$$\hat{T}(B(v)|\mathcal{D}(A')(v)) = \hat{T}(\mathcal{D}(A)(v)|\mathcal{D}(A')(v)) \geq \overline{E}_U^T(A, A'),$$

es té $\mathcal{D}(A')(v) \geq T(B(v), \overline{E}_U^T(A, A')$. ■

L'operador d'inferència natural $\overline{\mathcal{C}}_{AB}^T$ i l'operador natural simetritzat $\overline{\mathcal{S}}_{AB}^T$ associats a la regla "si A llavors B" s'han obtingut com a solució d'un problema d'optimalitat.

La pregunta natural a fer-se és: són aquests operadors la versió difusa d'algun model clàssic d'inferència?. Tenint en compte que $\hat{T}$ i E_T fan el paper de la implicació i de l'equivalència, respectivament, resulta clar que $\overline{\mathcal{C}}_{AB}^T(A')$ resulta d'estendre a context difús $(A' \to A) \to B$, i $\overline{\mathcal{S}}_{AB}^T$ resulta d'estendre $(A' \leftrightarrow A) \to B$.

En context clàssic, si A i B són proposicions "crisp", i si val la regla "si A llavors B", llavors també són vàlides totes les regles "si A' llavors B'", "si A'' llavors B''",... on $A \Leftrightarrow A' \Leftrightarrow A''$... i $B \Leftrightarrow B' \Leftrightarrow B''$... (on $\Leftrightarrow$ denota l'equivalència clàssica entre proposicions).

En aquest cas, un esquema gràfic del raonament seria:

$$\begin{array}{l} \text{si } A \text{ llavors } B \\ A \Leftrightarrow A' \\ B \Leftrightarrow B' \\ \hline \text{si } A' \text{ llavors } B' \end{array} \tag{4.3.17}$$

El resultat d'aquest esquema de raonament no és una simple tesi B', sinó una nova regla vàlida. Així, (4.3.17) permet generar un conjunt de regles "si A' llavors B'", "si A'' llavors B''"... a partir d'una donada "si A llavors B", basant-se en l'equivalència de proposicions. Aquestes noves regles, estenen el coneixement a situacions diferents de la que ha permès formular la regla original "si A llavors B", i aquest és precisament un dels trets característics del Raonament Aproximat.

Al generalitzar aquest procediment a context difús, s'ha de canviar la relació d'equivalència entre proposicions $\Leftrightarrow$ per una relació d'equivalència difusa, o sigui, un operador de T-indistingibilitat E. Una possible manera de fer-ho és treballant amb fites inferiors d'indistingibilitat i demanar que si α és una fita inferior pel grau d'indistingibilitat de les hipòtesis, ho sigui també per les tesis, i.e. que per tot $\alpha \in [0,1]$, si $E(A,A') \geq \alpha$ llavors $E(B,B') \geq \alpha$. Però aquesta condició és del tot equivalent a demanar $E(B,B') \geq E(A,A')$ que és, justament, la condició d'extensionalitat.

Des d'aquest punt de vista, l'esquema (3) es converteix en:

$$\begin{array}{l} \text{si } A \text{ llavors } B \\ E(A,A') \leq E(B,B') \\ \hline \text{si } A' \text{ llavors } B' \end{array} \tag{4.3.18}$$

Així, si per extendre una regla "si A llavors B" a noves regles utilitzem un operador $\mathcal{C}$, (obtenint "si A' llavors $\mathcal{C}(A')$"), llavors els operadors extensionals responen justament a l'esquema (4.3.18): només cal posar $B' = \mathcal{C}(A')$ en (4.3.18), i per tant, les regles que generen els operadors extensionals són la versió difusa (graduada en [0,1] per un operador de T-indistingibilitat) de les regles clàssiques compatibles amb l'esquema (4.3.17).

Ara bé: l'extensionalitat per si sola no garanteix el bon comportament dels operadors. Considerem el cas extrem en què $E(A,A') = 0$. Si es vol generar una regla "si A' llavors B'" a partir de la regla "si A llavors B" que es basi exclusivament en l'esquema (4.3.18) (o sigui, no es disposa de cap operador específic $\mathcal{C}$), qualsevol B' serveix, i per tant, la regla obtinguda no té cap valor. De fet, $E(A,A') = 0$ es correspon al cas clàssic en que $A \not\Leftrightarrow A'$, i llavors no es pot aplicar (4.3.17).

Aquest problema crític es mostra també en menor grau per valors intermedis $0 \leq \alpha < 1$ i $E(A,A') = \alpha$.

La solució que es proposa és associar a A' el conseqüent B' menys específic (i.e. contenint menys informació) entre tots els que satisfan

$$\overline{E}_V^T(B,B') \geq \overline{E}_U^T(A,A').$$

L'operador que permet obtenir B' d'acord amb les consideracions precedents és *l'Operador Natural Simetritzat*, segons el teorema 4.3.11.

Si, a més s'exigeix que al variar A' sobre tot $[0,1]^U$ el que s'obtingui sigui operador d'inferència, el que s'obtè, segons el teorema 4.3.2, és *l'Operador Natural d'Inferència.*

Consideracions totalment anàlogues a les anteriors mostren que si en comptes de l'esquema (4.3.17) considerem:

$$\begin{array}{l} \text{si } A \text{ llavors } B \\ A' \Rightarrow A \\ B \Rightarrow B' \\ \hline \text{si } A' \text{ llavors } B' \end{array} \tag{4.3.19}$$

La corresponent extensió a context difús, canviant indistingibilitat per implicació residuada, ens porta a l'*Operador Natural d'Inferència.*

4.4 Dues referències sobre l'Operador Natural d'Inferència

Per acabar aquest capítol, comentarem breument dos treballs en què apareix, sota motivacions que res tenen a veure amb l'extensionalitat, l'Operador Natural d'Inferència [Godo & Hajek, 96,97] i [Magrez & Smets, 89].

En l'article de Lluís Godo i Petr Hájek "On deduction in Zadeh's Fuzzy Logic", s'emprèn la formalització de la Lògica Difusa com a sistema deductiu en sentit clàssic, en una lògica multivaluada de quantificació racional amb múltiples tipus, del tipus Pavelka-Lukasiewicz. En aquest context, a partir d'una regla "si (X és A) llavors (Y és B)" interpretada com

$$(\forall x)\ (X(x) \rightarrow A(x)) \rightarrow (\forall y)\ (Y(y) \rightarrow B(y))$$

i d'una premisa (X és A) amb A' diferent d'A, es pot deduir (X és B') on $(\forall y)(B')(y) \equiv (\forall x)(A'(x) \rightarrow A(x)) \rightarrow B(y)$. A nivell semàntic, $B' = \overline{C}^T_{AB}(A')$, $(T = \text{Ł})$.

Aquesta deducció de B' es pot dur a terme interpretant el valor de veritat de A donat A' com $\vee(A' \rightarrow A) = \text{INF}_{u \in U}\, \hat{T}(A'(u)|A(u))$. Llavors, $B' = \overline{C}^T_{AB}(A')$

és la menys específica de les conclusions satisfent $\vee(B' \to B) = \vee(A' \to A)$ [Godo, et al., 97b].

El fet sorprenent és que, en canvi, no es pot deduir B' =CRI(A') sense imposar hipòtesis addicionals al model que, si bé són raonables des d'un punt de vista intuïtiu, són de difícil interpretació lògica. Concretament, cal imposar l'existència d'una distribució de possibilitat conjunta per a la variable $X \times Y$ sobre el producte cartesià $U \times V$ dels universos de discurs U i V on prenen valors X i Y.

Molt més llunyà en el temps és el treball de Magrez i Smets "Fuzzy Modus Ponens: A New Model...". Després d'un estudi sobre CRI considerant diferents funcions d'implicació, estableix un conjunt de propietats intuïtives que hauria de satisfer la deducció en Lògica Difusa, i arriba a la conclusió que cap de les formes de CRI estudiades les satisfà plenament. A partir d'aquí, gràcies a una acurada distinció entre llenguatge i metallenguatge, estableix que la deducció segons Modus Ponens clàssic és funcional respecte la necessitat, cosa que estén a context difús com:

$$N(B) = \otimes[N(A), N(A \to B)], \text{ on } \otimes \text{ és t-norma.}$$

Avaluant les necessitats $N(A)$, $N(B)$, $N(A \to B)$ i $N(A|A^*)$ (i.e. necessitat d'A donat A^*) arriba a

$$N(A|A^*) = 1 - \operatorname*{SUP}_{u \in U} (\otimes[1 - A(u), A^*(u)]) = \delta,$$

d'on finalment resol el problema de trobar B^* satisfent $N(B|B^*) = \delta$, que és precisament $B^*(v) = \text{SUP}\{u \in [0,1] / \otimes (1 - B^*(v), u) \leq 1 - \delta\}$.

En el cas en què $\otimes = \text{L}$, es pot comprovar que B^* no és altre que $\overline{C}^T_{AB}(A^*)$. No hi ha cap relació aparent quan $\otimes \neq \text{L}$

Cal remarcar que, en aquesta memòria, l'Operador Natural d'Inferència s'ha introduït en base a consideracions completament diferents a les adduïdes en els dos models anteriors, i que el seu àmbit d'aplicació s'estén a qualsevol t-norma T, contínua per l'esquerra respecte les dues variables per separat.