ANTONIO MARTÍNEZ ABEJÓN

SEMIGRUPOS DE OPERADORES Y ULTRAPOTENCIAS

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Santander, 1994

La presente Memoria, para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, ha sido realizada en el Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación de la Universidad de Cantabria, bajo la dirección del Dr. D. Manuel González Ortiz.

A mis padres, y a toda mi familia.

Quiero expresar mi agradecimiento a Manuel González, a su paciencia y habilidad con la que me ha ayudado en mi tarea investigadora, y a su generosa amistad con la que siempre me ha recibido.

También quiero manifestar mi agradecimiento al apoyo ofrecido por Teresa Alvarez, y a los consejos de Concepción Masa para la redacción de estas páginas.

INDICE

INTRODUCCION.

En esta memoria estudiamos algunas clases de operadores (lineales continuos) entre espacios de Banach, que poseen estructura de semigrupo y cuyo origen se encuentra en la teoría de Fredholm. Dicha teoría nace del análisis de las ecuaciones integrales a principios del siglo XX. El problema central de esta teoría, desde el punto de vista abstracto, es el estudio de las clases F_+ y F_- de los operadores semi-Fredholm: propiedades algebraicas, estabilidad bajo perturbaciones, etc.

La clase $\mathcal{T}_+$ de los operadores tauberianos fue introducida por Kalton y Wilansky [32] como respuesta a un problema de sumabilidad. Estos operadores han sido utilizados en la resolución de otros problemas tales como la preservación de propiedades isomorfas de espacios de Banach [39], factorización de operadores [13], etc.

La clase Ψ_+ de los operadores supertauberianos fue introducida por Tacon [49] como una subclase de la de los tauberianos, que no presenta alguna de las anomalías de esta última.

Las clases F_+, Ψ_+ y $\mathcal{T}_+$ son semigrupos (es decir, estables por productos) estables ante perturbaciones por operadores pertenecientes a determinados ideales. Además, por dualidad tienen asociados otros semigrupos, F_-, Ψ_- y $\mathcal{T}_-$. Los isomorfismos entre espacios de Banach pertenecen a todos los citados semigrupos.

Recordemos que, fijado un ultrafiltro no trivial $\mathcal{U}$, cada espacio de Banach X puede ser sumergido en otro espacio de Banach $X_{\mathcal{U}}$, la ultrapotencia de X respecto de $\mathcal{U}$, y cada operador $T : X \longrightarrow Y$ admite una extensión $T_{\mathcal{U}} : X_{\mathcal{U}} \longrightarrow Y_{\mathcal{U}}$. Nuestro objetivo es estudiar las propiedades de $T_{\mathcal{U}}$ cuando T pertenece a alguno de los semigrupos F_+, Ψ_+,... Como aplicación obtendremos nuevas caracterizaciones de los semigrupos y de ciertas clases de espacios de Banach asociadas, y nuevas demostraciones de resultados conocidos.

Las construcciones *ultraproducto* aparecieron en los años 50 y 60, cuando Łos, Tarski, Chang, Keisler y otros, aplicaron la noción de ultrafiltro a la teoría de Modelos y Conjuntos. Las nuevas técnicas descubiertas encontraron rápida aplicación en el campo del Análisis Matemático, dando como fruto los trabajos de Robinson, Luxemburg, Dacunha-Castelle y Krivine, entre otros. Robinson [43] fundóel análisis no-estándar, teoría que logra dar un soporte lógico a los números infinitesimales de Leibniz, y Luxemburg [38] estableció el concepto de envoltura no-estándar. Dacunha-Castelle y Krivine [12] fueron los primeros en emplear las técnicas ultraproducto en el estudio de los espacios de Banach, que posteriormente fueron perfeccionadas por Heinrich [23]. Resumiendo, podemos decir que el uso de estas técnicas no clásicas en el Análisis Matemático ofrece dos aplicaciones fundamentales. La primera de ellas, obtener nuevos resultados que, con el solo empleo de las técnicas de la matemática clásica, no sería posible. La segunda, reformular sugerentemente resultados ya conocidos, con el objeto de conseguir demostraciones notablemente simples.

En cierto modo, la envoltura no-estándar y las técnicas ultraproducto son equivalentes debido a que ambas deducen sus resultados del estudio de ciertos ultraproductos (consúltese [43; 2.5]). La diferencia radica en los métodos de trabajo. Algunos autores se inclinan decididamente por una de ellas. Citamos a Henson [25] textualmente: *"It is our opinion that the nonstandard analysis approach has definite conceptual advantages over the ultraproduct method.....in that nonstandard analysis has developed a natural collection of tools and concepts (such as the internal cardinality of a ∗-finite space)."* Nosotros encontramos que un correcto manejo de las técnicas no-estándar supone una sólida base en Lógica y Teoría de Modelos. Por lo general, en la matemática clásica no es necesario ser consciente de la diferencia que hay entre el *modelo* que se está estudiando, y el *lenguaje* con el que *interpretamos* dicho modelo (esto es, el lenguaje con el que formalizamos definiciones, teoremas, etc). Sin embargo, reconocer esa diferencia es fundamental para los métodos del análisis no-estándar. Pongamos un ejemplo (consúltese [43; pg.42]): a cada modelo M se le asocia un lenguaje L –con el que se formulan los teoremas sobre M– y un modelo no-estándar $^*M$. Las sentencias formuladas dentro del lenguaje L también tienen sentido en $^*M$; con más precisión: el análisis no-estándar dispone de una serie de herramientas, como el *principio de transferencia*, que permiten interpretar, en M y en $^*M$, el significado de las sentencias formuladas en L. Pero en $^*M$ "existen objetos" sin nomenclatura en el lenguaje L, los llamados objetos *externos*. En consecuencia, los objetos externos no pueden ser incluidos explícitamente en las sentencias de L. Además, estos objetos externos no son patológicos en modo alguno: el conjunto $\mathbf{N}$ de los números naturales, como subconjunto de $^*\mathbf{N}$, es un objeto externo. Esto implica que la obtención de resultados en análisis no-estándar precisa una hábil y cuidada formulación de las sentencias lógicas. Por contra, la técnica de ultraproducto no presenta este tipo de dificultades, y así quedaría patente en esta memoria. Citemos a Chadwick y Wickstead [11], dos autores que emplean ultraproductos: *"A construction slightly more general than our definition $E^\dagger$ is possible. The non-standard hull of the Banach space E... indeed ultrapowers of E are special cases of* *this construction. While it would be nice to have the language and results of non-standard analysis available to us, there appear to be difficulties in proving our results at that level of generality".*

Esta memoria consta de cuatro capítulos, subdividiéndose cada uno de ellos en varias secciones. Dentro de cada capítulo, las definiciones, proposiciones, teoremas, etc, llevan una numeración común correlativa, independiente de la sección en la que se encuentren.

Comenzamos el primer capítulo recordando en la sección 1.1 los resultados básicos sobre ultrafiltros, haciendo mención especial de los conceptos de *ultrafiltro* $\aleph_0$*-incompleto*, y de *producto de ultrafiltros*, claves en las técnicas de ultraproductos. En la sección 1.2 recordamos los conceptos de *ultrapotencia de espacios de Banach* y de *conjuntos.* Los conjuntos compactos pueden ser identificados con la ayuda de un ultrafiltro $\aleph_0$-incompleto. Esta propiedad será utilizada para caracterizar, en términos de ultrapotencias, la clausura de un conjunto, los espacios de dimensión finita y los conjuntos compactos. Otro de los principales usos de los ultrafiltros $\aleph_0$-incompletos es la construcción de apropiados elementos en una ultrapotencia $X_{\mathcal{U}}$ mediante un sistema que recuerda al método de diagonalización para la obtención de ciertas sucesiones especiales. El argumento será empleado repetidamente a lo largo de esta tesis, siendo quizá en la sección 3.2, dedicada a los operadores cosupertauberianos, donde su uso es más brillante y elaborado. Por su parte, el producto de ultrafiltros nos proporcionará un sencillo método de obtención de ultrafiltros $\aleph_0$-incompletos por un lado, y por otro, el conocido teorema de *iteración finita*, que establece una identificación isométrica entre la ultrapotencia reiterada $(X_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}$ y $X_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}$. El teorema de iteración finita nos permitirá obtener posteriormente demostraciones con notable economía.

En la sección 1.3 recordamos el concepto de *ultrapotencia de operadores (acotados) entre espacios de Banach.* Obtendremos caracterizaciones de los operadores de rango cerrado en función de las ultrapotencias de sus núcleos y rangos. Estas caracterizaciones serán vitales tanto en el estudio de los operadores semi-Fredholm como en la identificación de los operadores supertauberianos y cosupertauberianos de rango cerrado.

En la sección 1.4 se recuerdan los conceptos de *representación finita de espacios de Banach* y de *superpropiedad*, y damos sus correspondientes caracterizaciones mediante ultraproductos formuladas por Heinrich [23], en las que se prueba que Y es un espacio de Banach finitamente representado en X si existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $Y \subset X_{\mathcal{U}}$. Ofreceremos parte de su demostración, pues a ella necesitaremos acudir desde diversos puntos de esta tesis. Haremos notar que el ultrafiltro $\mathcal{U}$ para el que se verifica $Y \subset X_{\mathcal{U}}$ ha de ser tomado en ocasiones sobre un conjunto I necesariamente grande. Este hecho motiva que en nuestro estudio consideremos ultrafiltros $\mathcal{U}$ tomados sobre conjuntos I cualesquiera. En la sección 1.5 recordamos el concepto de *superreflexividad*, que aparece ligado de modo natural a las clases Ψ_+ y Ψ_-, de manera análoga a como la reflexividad se relaciona con las clases

$\mathcal{T}_+$ y $\mathcal{T}_-$, y los espacios de dimensión finita con las clases F_+ y F_- (véase [20]). Expondremos un teorema fundamental acerca de la representación finita de X^{**} en X, el *principio de reflexividad local*, y describiremos su correspondiente versión en términos de ultraproductos debida a Heinrich, en la que, para cada espacio de Banach X, se obtiene un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $X_{\mathcal{U}}$ contiene una copia isométrica y complementada de X^{**}. Advertiremos que el contenido de X^{**} en $X_{\mathcal{U}}$ no es canónico, señalando alguno de los problemas que ello crea. Acabaremos el primer capítulo recordando el concepto de *representación finita para operadores* establecido por Heinrich. Dicho concepto no parece muy apropiado para el estudio de los semigrupos F_+, $\mathcal{T}_+$, $\Psi_+, \dots$, pero se revela muy potente en el estudio de ciertos ideales ([22] y [24]). Así, Heinrich obtiene el ideal de los operadores super-débilmente compactos, una clase natural de perturbación para los semigrupos Ψ_+ y Ψ_-.

El capítulo 2 está dedicado al estudio de los operadores semi-Fredholm y los operadores tauberianos. En la primera sección se repasan algunas de las propiedades de los operadores F_+, F_- y de los operadores compactos, tales como la estabilidad de los operadores F_+ bajo perturbaciones por operadores compactos, y las caracterizaciones perturbativas de Lebow y Schechter, que dicen que un operador T *pertenece a F_+ si y sólo si para cada operador compacto K, el núcleo $N(T+K)$ es de dimensión finita.* Siguiendo las ideas de Tacon en análisis no-estándar, caracterizaremos mediante ultrapotencias los operadores semi-Fredholm y los operadores compactos, aunque en las correspondientes demostraciones recurriremos a alguna técnica típica de los ultraproductos, tal como el teorema de iteración finita. Posteriormente, caracterizaremos la clase dual F_- mediante ultrapotencias. Es destacable un punto en común entre las caracterizaciones perturbativas de Lebow y Schechter y alguna de las caracterizaciones mediante ultrapotencias de la clase F_+: ambas sólo imponen condiciones sobre el núcleo de ciertos operadores. Por ejemplo, T pertenece a F_+ si y sólo si el núcleo $N(T_{\mathcal{U}})$ es de dimensión finita. Adelantamos que este fenómeno será también observable en los restantes semigrupos. Además, veremos cómo las mencionadas caracterizaciones de Lebow y Schechter pueden ser aplicadas para obtener algunas de las caracterizaciones mediante ultrapotencias de las clases F_+ y F_-.

En la sección 2.2 se estudia la clase $\mathcal{T}_+$ de los operadores tauberianos y una de sus clases de perturbación, la de los operadores débilmente compactos.

Tacon estudióla clase $\mathcal{T}_+$ desde el punto de vista no-estándar. Nosotros lo haremos utilizando ultrapotencias siguiendo en parte las ideas de Tacon, auunque notablemente enriquecidas al emplear un refinamiento de una caracterización sucesional de la reflexividad debida a James. Dicho refinamiento nos permitirá caracterizar mediante ultrapotencias los conjuntos débilmente compactos y los operadores débilmente compactos, y de ahí obtendremos una nueva caracterización mediante ultrapotencias para los operadores T con la propiedad $N(T^{**}) = N(T)$, lo que en sí mismo supondría una demostración alternativa a la caracterización sucesional de Kalton y Wilansky [32; tma.3.1]. Los resultados obtenidos nos permitirán obtener caracterizaciones para los operadores tauberianos en términos de ultrapotencias. Posteriormente, veremos cómo algunas de estas caracterizaciones pueden ser conseguidas utilizando las caracterizaciones perturbativas de González y Onieva de los operadores tauberianos.

El capítulo 3 está dedicado al estudio de los semigrupos Ψ_+ y Ψ_- de los operadores supertauberianos y cosupertauberianos, y a sus clases de perturbación. Buscaremos formulaciones equivalentes a las definiciones originales de *operador supertauberiano* y *operador super-débilmente compacto* dadas por Tacon, con el objeto de adaptarlas mejor a las técnicas de la matemática clásica y los ultraproductos. Una caracterización sucesional de James de la superreflexividad, junto al refinamiento arriba mencionado de un resultado de James sobre reflexividad, nos permitirá obtener caracterizaciones en términos de ultrapotencias para los operadores super-débilmente compactos y los operadores supertauberianos, inspiradas en parte en los resultados de Tacon en análisis no-estándar. Por ejemplo, veremos que $T : X \longrightarrow Y$ es supertauberiano si y sólo si $N(T_\mathcal{U})$ es superreflexivo, o si $N(T_\mathcal{U}{}^{**}) \subset X_\mathcal{U}$ (fijémonos cómo estas caracterizaciones sólo imponen condiciones sobre el núcleo). Como consecuencia de las citadas caracterizaciones veremos que la clase Ψ_+ es estable bajo perturbaciones super-débilmente compactas, lo que nos conducirá hacia dos interesantes resultados. El primero de ellos prueba que la clase Ψ_+ es abierta. Aunque este resultado ya era conocido por Tacon, la demostración que aquí ofrecemos es mucho más sencilla. El segundo resultado es una nueva caracterización de la clase Ψ_+ en términos de perturbaciones por operadores compactos. Concretamente, demostramos que *un operador T es supertauberiano si y sólo si para cada operador compacto K, el núcleo $N(T+K)$ es superreflexivo.* Las dos direcciones de la correspondiente demostración usan implícitamente las técnicas de ultrapotencia al recurrir a la estabilidad de la clase Ψ_+. Por lo demás, se trata de una demostración puramente clásica. De esta última caracterización extraeremos numerosas consecuencias. Una de ellas, es una caracterización en términos de operadores supertauberianos de los espacios cuyos subespacios reflexivos son superreflexivos, y otra de los espacios cuyos subespacios reflexivos son de dimensión finita. Otra consecuencia es una nueva caracterización de tipo algebraico para la clase Ψ_+, en la que se prueba que un operador T es supertauberiano si y sólo si las restricciones $T|_E$ son super-débilmente compactas sólo cuando E es superreflexivo. Así mismo, la caracterización perturbativa nos permitirá introducir en la sección 3.3 una nueva clase de perturbación para Ψ_+ más amplia que la de los operadores super-débilmente compactos: el ideal de los operadores $\mathbf{R}_S$-S.

En la sección 3.2 estudiamos la clase dual Ψ_- de los operadores cosupertauberianos, clase que también fue introducida y estudiada por Tacon. En primer lugar daremos un nuevo resultado de tipo general en el que se prueba que *para cualquier operador T, el núcleo $N(T^*{}_{\mathcal{U}})$ es $*$-débilmente denso en $N(T_{\mathcal{U}}{}^*)$*. Este resultado generaliza al de la densidad $*$-débil de $X^*{}_{\mathcal{U}}$ en $X_{\mathcal{U}}{}^*$ [23], aunque la demostración de este último no es válida para obtener la del primero, debido sobre todo a la dificultad que plantean los operadores de rango no cerrado. Este último resultado nos permitirá obtener con suma sencillez caracterizaciones de los operadores cosupertauberianos en términos de ultrapotencias, similares a las conseguidas por Tacon con análisis no-estándar. Después, apoyándonos en la estabilidad de la clase Ψ_- bajo perturbaciones super-débilmente compactas, daremos una nueva caracterización perturbativa: *un operador $T : X \longrightarrow Y$ es cosupertauberiano si y sólo si para cada operador compacto K, $Y/\overline{R(T+K)}$ es superreflexivo.*

Como en el caso de los operadores supertauberianos, la caracterización perturbativa que acabamos de citar da lugar a interesantes consecuencias. Una de ellas consiste en sendas caracterizaciones para los espacios cuyos cocientes reflexivos son superreflexivos, y para los espacios cuyos cocientes superreflexivos tienen dimensión finita. Así mismo, podremos presentar en la sección 3.3 el ideal $\mathbf{R}_S$-C, una nueva clase de perturbación para Ψ_- más amplia que la de los operadores super-débilmente compactos.

Señalamos que, si bien se pueden aplicar técnicas de ultrapotencia al estudio de los semigrupos F_+, F_- y $\mathcal{T}_+$, éstas no son imprescindibles. Sin embargo, las técnicas no clásicas parecen insuficientes para el estudio de Ψ_+ y Ψ_-.

En el capítulo 4 analizaremos diversas situaciones en las que aparecen operadores supertauberianos. Como consecuencia de nuestra caracterización perturbativa de la clase Ψ_+, sabemos que si X es un espacio cuyos subespacios reflexivos son superreflexivos, entonces todo operador tauberiano con dominio X es supertauberiano. En esta situación se encuentra el espacio $L_1[0,1]$, como demostróRosenthal. Nosotros, mediante técnicas de ultrapotencia, obtendremos una nueva demostración de que los subespacios reflexivos de $L_1[0,1]$ son superreflexivos, para lo que necesitaremos un detallado conocimiento de la ultrapotencia de $L_1[0,1]$. Seguidamente, apoyándonos en un resultado de Kadec y Pełczyński, daremos una caracterización de los operadores supertauberianos con dominio $L_1[0,1]$.

Teniendo en cuenta que los principales candidatos a operadores supertauberianos no triviales son los operadores tauberianos, estudiaremos algunos de estos últimos. Comenzaremos con los operadores tauberianos que proporciona la factorizacion de Davis-Figiel-Johnson-Peł- czyński (abreviadamente, DFJP). La factorización DFJP descompone a todo operador T como $T = jA$, donde j es un operador tauberiano. Nosotros veremos que, si T es un operador super-débilmente compacto que no factoriza a través de espacios superreflexivos, entonces su correspondiente factor j no es supertauberiano. La existencia de tales operadores queda asegurada por Beauzamy, quien encuentra un operador uniformemente convexificante que no factoriza a través de espacios superreflexivos, y por la identificación, comprobada por nosotros, de los operadores super-débilmente compactos con los uniformemente convexificantes. Después estudiaremos la factorización DFJP de un operador tauberiano no trivial localizado en la frontera topológica de la clase $\mathcal{T}_+$, y probaremos que su correspondiente factor j tampoco es supertauberiano.

Otros conocidos operadores tauberianos son la inclusión del espacio de James J en c_0, y las inclusiones de espacios de Orlicz vectoriales $L_p(X)$ en $L_1(X)$, con $1 \leq p < \infty$. Veremos que la inclusión de J en c_0 no es supertauberiana, y que la inclusión de $L_p(X)$ en $L_1(X)$ tampoco lo es, excepto en las situaciones triviales en que $p = 1$, o bien X es superreflexivo.

Capítulo 1

ULTRAPRODUCTOS DE ESPACIOS DE BANACH.

En este capítulo incluímos los conceptos básicos acerca de los ultrafiltros y de la teoría de ultraproductos en espacios de Banach, esenciales para el desarrollo ulterior de la tesis. Caracterizaremos los conjuntos cerrados y los espacios de dimensión finita en función de sus ultrapotencias. También veremos que los operadores T de rango cerrado quedan identificados por cualquiera de las igualdades $N(T_{\mathcal{U}}) = N(T)_{\mathcal{U}}$ y $R(T_{\mathcal{U}}) = R(T)_{\mathcal{U}}$. Repasaremos la relación entre la *representabilidad finita de espacios*, la *superreflexividad* y las *ultrapotencias.* Acabaremos recordando el concepto de la *representabilidad finita para operadores*, una de las vías para introducir el ideal de los operadores *super-débilmente compactos.*

1.1 Ultrafiltros y límites.

A lo largo de este trabajo usaremos la notación habitual para conjuntos. Con letras mayúsculas $A, B, \ldots$ indicaremos conjuntos, y los elementos serán designados por letras minúsculas $a, b, c, \ldots$ Dado el conjunto I, denotaremos por $\wp(I)$ a la clase formada por todos los subconjuntos de I. Los conjuntos de los números naturales y reales serán denotados $\mathbf{N}$ y $\mathbf{R}$, respectivamente.

Definición 1.1 [6; I.36 def.1] *Diremos que el subconjunto $\mathcal{F} \subset \wp(I)$ es un* filtro sobre I *si verifica:*

i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

ii) si $A \in \mathcal{F}$ *y* $A \subset B$ *entonces* $B \in \mathcal{F}$;

iii) si $A \in \mathcal{F}$ *y* $B \in \mathcal{F}$ *entonces* $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Nuestra definición de *filtro* se corresponde con la noción de *filtro propio* dada por Sims [46; cap.1], aunque en los capítulos posteriores de [46] Sims sólo considera filtros propios, a los que denomina simplemente *filtros.*

A los elementos de un conjunto I sobre el que tomemos un filtro, los llamaremos comunmente *índices*, y los denotaremos por $i, j, k, \ldots$.

Veamos dos ejemplos de filtros sobre I:

1) Dado un elemento fijo $j \in I$, el *filtro discreto en* j es la familia formada por todos los subconjuntos de I que contienen a j.
2) Si I es infinito, se llama *filtro de Fréchet en* I al formado por todos los subconjuntos de I cuyo complementario es finito.

Sean $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ dos filtros sobre I. Se dice que $\mathcal{U}_2$ *domina a* $\mathcal{U}_1$ si cada elemento de $\mathcal{U}_1$ pertenece a $\mathcal{U}_2$.

Definición 1.2 *Diremos que $\mathcal{U}$ es un* ultrafiltro *sobre I si para todo filtro $\mathcal{V}$ que domine a $\mathcal{U}$ se verifica $\mathcal{V} = \mathcal{U}$.*

Los ultrafiltros que empleemos serán representados por $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \ldots$.

A lo largo de esta memoria, supondremos válido el axioma de elección, o equivalentemente, el lema de Zorn. Una consecuencia del lema de Zorn es que todo filtro es dominado por algún ultrafiltro [46; cap.1, lema 2]. En la siguiente proposición enunciamos una de las principales propiedades que caracterizan a los ultrafiltros.

Proposición 1.3 [46; lema 1] *Un filtro $\mathcal{U}$ sobre I es un ultrafiltro si y sólo si para todo $A \subset I$, o bien $A \in \mathcal{U}$ o bien $I \setminus A \in \mathcal{U}$.*

Fijémonos en que, por la propia definición de filtro, las anteriores alternativas son excluyentes. Es decir, si $A \in \mathcal{U}$, entonces $I \setminus A \notin \mathcal{U}$.

Evidentemente, cualquier ultrafiltro sobre un conjunto finito es un filtro discreto. La definición del filtro de Fréchet requiere que I sea infinito, con el objeto de satisfacer la propiedad *i)* de la definición 1.1 de filtro.

Resulta inmediato que todo ultrafiltro es, o bien un filtro discreto, o bien un ultrafiltro dominando al filtro de Fréchet, lo que conduce a establecer la siguiente

Definición 1.4 [46; pg.5] *Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I es* no trivial *si I es infinito y $\mathcal{U}$ domina al filtro de Fréchet en I.*

Definición 1.5 [6; I.37] *Dado un filtro $\mathcal{F}$ sobre I, y $\mathcal{C} \subset \wp(I)$, se dice que $\mathcal{C}$ es un* sistema generador de *$\mathcal{F}$, o que $\mathcal{F}$ es un* filtro generado *por $\mathcal{C}$, si $\mathcal{F}$ es el mínimo filtro que contiene a $\mathcal{C}$.*

En [46; I.37 prop.1] se prueba que para que una clase $\mathcal{C} \subset \wp(I)$ sea sistema generador para algún filtro sobre I es condición necesaria y suficiente que toda intersección finita de elementos de $\mathcal{C}$ sea no vacía.

Veamos dos ejemplos de sistema generador sobre el conjunto $\mathbf{N}$:

1) La clase $\big\{\{1\}\big\} \subset \wp(\mathbf{N})$ es base de filtro para el filtro discreto en 1.
2) La clase $\big\{\mathbf{N} \setminus \{n\} : n \in \mathbf{N}\big\} \subset \wp(\mathbf{N})$ genera al filtro de Fréchet sobre $\mathbf{N}$.

Un concepto más refinado que el de sistema generador es el de *base de filtro.*

Proposición 1.6 [6; I.38 def.3] *Si $\mathcal{B}$ es un sistema generador del filtro $\mathcal{F}$, se dice que $\mathcal{B}$ es una* base del filtro *que genera, si para todo par de elementos A y B de $\mathcal{B}$ existe un elemento $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subset A \cap B$.*

Interesa conocer cuándo una clase $\mathcal{B} \subset \wp(I)$ es base para algún filtro, y por otro lado, dado un filtro $\mathcal{F}$, cómo reconocer sus bases.

Proposición 1.7 [6; I.38 prop.2] *Dada una clase $\mathcal{B} \subset \wp(I)$, existe un mínimo filtro $\mathcal{F}$ sobre I generado por $\mathcal{B}$ si se cumplen las condiciones:*

a) $\mathcal{B} \neq \emptyset$;

b) $\emptyset \notin \mathcal{B}$;
c) *para todo* $A \in \mathcal{B}$ *y todo* $B \in \mathcal{B}$ *existe* $C \in \mathcal{B}$ *tal que* $C \subset A \cap B$.

Proposición 1.8 [6; I.38 prop.3] *Sea* $\mathcal{F}$ *un filtro sobre* I *y* $\mathcal{B} \subset \wp(I)$. *Entonces* $\mathcal{B}$ *es una base de filtro de* $\mathcal{F}$ *si y sólo si para todo elemento* $A \in \mathcal{F}$ *existe un elemento* $B \in \mathcal{B}$ *que está contenido en* A.

La siguiente definición sólo tiene sentido para ultrafiltros no triviales.

Definición 1.9 [46; pg.5] *Dado un ul no trivial* $\mathcal{U}$ *sobre* I, *diremos que es* $\aleph_0$-incompleto *si* I *es unión disjunta de una cantidad numerable de elementos no pertenecientes a* $\mathcal{U}$. *Es decir, si existe una sucesión* $I_1, I_2, I_3, \ldots$ *de subconjuntos de* I, *verificando:*
a) $I_n \notin \mathcal{U}$ *para todo* $n \in \mathbf{N}$;
b) $I_n \cap I_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$;
c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I$.

De la definición anterior se sigue obviamente que para cada $k \in \mathbf{N}$ se cumple

$$\bigcup_{n=k}^{\infty} I_n \in \mathcal{U}.$$

Lema 1.10 *Todos los ultrafiltros no triviales sobre* $\mathbf{N}$ *son* $\aleph_0$*-incompletos.*

Demostración. Basta tener en cuenta que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre $\mathbf{N}$, para cada $n \in \mathbf{N}$ se cumple $\{n\} \notin \mathcal{U}$. $\square$

Sean ahora $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos ultrafiltros sobre I y J respectivamente, y A un subconjunto cualquiera de $I \times J$. Para cada $j \in J$ consideremos el subconjunto A_j de I dado por

$$A_j := \{i \in I : (i, j) \in A\}$$

y el subconjunto J_A de J dado por

$$J_A := \{j \in J : A_j \in \mathcal{U}\}.$$

Se define el *producto de* $\mathcal{U}$ *por* $\mathcal{V}$ como el subconjunto de $\wp(I \times J)$ dado por

$$\mathcal{U} \times \mathcal{V} := \{A \subset I \times J : J_A \in \mathcal{V}\}.$$

El resultado principal sobre el producto de ultrafiltros viene dado en la siguiente

Proposición 1.11 [46; cap.13, prop.1] *Sean* $\mathcal{U}$ *y* $\mathcal{V}$ *dos ultrafiltros sobre* I *y* J *respectivamente. Entonces el producto de ultrafiltros* $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ *es a su vez un ultrafiltro sobre* $I \times J$.

Observaciones.

1) Si I_0 y J_0 son elementos pertenecientes a $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente, entonces $I_0 \times J_0$ pertenece a $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$. No obstante, los conjuntos de la forma $I_0 \times J_0$ no son una base del ultrafiltro $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$.

2) El producto de ultrafiltros no es conmutativo. Es decir, si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son dos ultrafiltros sobre I, entonces $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ puede ser distinto de $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$. Como ejemplo de esto último basta considerar los ultrafiltros $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ sobre $\mathbf{N}$, donde $\mathcal{U}$ contiene como elemento al subconjunto de todos los naturales pares, y $\mathcal{V}$, al subconjunto de todos los naturales impares. Consideremos el conjunto $L = \{(2n, 2m-1) : n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}\}$. Es fácil verificar que L pertenece a $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, pero no pertenece a $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$.

El producto de ultrafiltros nos permite obtener ultrafiltros con buenas propiedades.

Proposición 1.12 *Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ ultrafiltros sobre I y J respectivamente, tal que uno de ellos es $\aleph_0$-incompleto. Entonces $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ también es $\aleph_0$-incompleto.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{V}$ es $\aleph_0$-incompleto. Entonces existe una partición $\{J_n : n \in \mathbf{N}\}$ de J tal que $J_n \notin \mathcal{V}$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Si para cada $n \in \mathbf{N}$ tomamos $I_n = \{(i,j) : i \in I, \quad j \in J_n\}$, tenemos que $\{I_n : n \in \mathbf{N}\}$ es una partición numerable de $I \times J$ donde cada I_n no pertenece a $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Si $\mathcal{U}$ es $\aleph_0$-incompleto, la demostración es análoga. □

Una consecuencia de la última proposición es

Proposición 1.13 *Sobre todo conjunto infinito I siempre existe un ultrafiltro $\aleph_0$-incompleto.*

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ dos ultrafiltros cualesquiera sobre I y $\mathbf{N}$ respectivamente. Por la proposición 1.12, $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$ es un ultrafiltro $\aleph_0$-incompleto sobre $I \times \mathbf{N}$; ahora bien, $I \times \mathbf{N}$ e I son coordinables, lo que permite identificar a $\wp(I \times \mathbf{N})$ con $\wp(I)$ y en consecuencia, podemos considerar a $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$ como un ultrafiltro sobre I. □

Definición 1.14 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro $\aleph_0$-incompleto sobre I. Se dice que una partición $\{I_n : n \in \mathbf{N}\}$ de I es* disjunta con $\mathcal{U}$ *si $I_n \notin \mathcal{U}$ para todo $n \in \mathbf{N}$.*

Observación. De ahora en adelante, todos los conjuntos de índices I que aparezcan serán infinitos, y todos los ultrafiltros que tomemos serán $\aleph_0$-incompletos. Considerar ultrafiltros triviales sólo serviría para añadir situaciones superfluas a nuestro estudio.

Definición 1.15 *Sean X un espacio topológico Hausdorff, I un conjunto de índices, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I, y $(x_i)_{i\in I}$ una familia de elementos de X. Se dice que $(x_i)_{i\in I}$* converge hacia $x \in X$ según el ultrafiltro $\mathcal{U}$ *si para cada entorno O de x se cumple*

$$\{i \in I : x_i \in O\} \in \mathcal{U}.$$

Si $(x_i)_{i\in I}$ converge hacia x según $\mathcal{U}$, lo denotaremos

$$\lim_{\mathcal{U}} x_i = x, \quad \text{o bien} \quad \lim_{\mathcal{U}(i)} x_i = x.$$

Si X_1 y X_2 son dos espacios topológicos Hausdorff, $T : X_1 \longrightarrow X_2$ una función continua en $x \in X_1$, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I, y $(x_i)_{i\in I} \subset X_1$ una familia tal que $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$, es fácil comprobar que existe $\lim_{\mathcal{U}} Tx_i = Tx$. La propiedad que acabamos de exponer será frecuentemente utilizada en el presente trabajo.

El siguiente resultado es fundamental para la convergencia de familias según $\mathcal{U}$.

Proposición 1.16 [46; cap.3, prop.1 y 2] *Sea X un espacio topológico Hausdorff, $(x_i)_{i\in I}$ una familia contenida en X y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I. Entonces se verifica:*

a) si $(x_i)_{i\in I}$ tiene límite según $\mathcal{U}$, ese límite es único;

b) si $(x_i)_{i\in I}$ está contenida en un subconjunto compacto de X, entonces $(x_i)_{i\in I}$ tiene límite según $\mathcal{U}$.

Si X es un espacio métrico, el recíproco de *b)* es cierto, tal como pasamos a probar en la siguiente

Proposición 1.17 *Sean X un espacio métrico, K un subconjunto de X y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I. Entonces K es relativamente compacto si y sólo si toda familia $(x_i)_{i\in I}$ contenida en K es convergente según $\mathcal{U}$.*

Demostración. En virtud de la proposición 1.16, sólo necesitamos probar que si K no es relativamente compacto, entonces existe una familia $(x_i)_{i\in I}$ no convergente según $\mathcal{U}$. Supongamos que K no es relativamente compacto. Como X es un espacio métrico, tenemos que K no es totalmente acotado, y por tanto existe un $\delta > 0$ y una sucesión (x_n) contenida en K tales que

$$\operatorname{dist}(x_n\,,\, x_m) > \delta \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbf{N} \quad y \quad m \in \mathbf{N} \quad \text{con} \quad n \neq m. \qquad (1)$$

Ahora, como $\mathcal{U}$ es $\aleph_0$-incompleto, existe una partición $\{I_n : n \in \mathbf{N}\}$ de I disjunta con $\mathcal{U}$. Sea la familia $(y_i)_{i\in I}$ contenida en K dada por $y_i = x_n$ si $i \in I_n$.

Sea h un elemento cualquiera de X. Consideremos el conjunto de índices

$$H = \{i \in I : \operatorname{dist}(h\,,\, y_i) < \delta/2\}.$$

Por (1) se tiene que, o bien H es vacío, o bien coincide exactamente con algún I_n. En cualquiera de los dos casos, H no pertenece a $\mathcal{U}$, lo cual prueba que ningún $h \in X$ puede ser límite de $(y_i)_{i\in I}$ según $\mathcal{U}$. □

En particular, si X es un espacio de Banach el resultado anterior es cierto considerando en X la topología inducida por la norma. En la proposición 2.44 veremos que el recíproco de la proposición 1.16 *b)* es también válido para la topología débil en X.

Queremos destacar que los enunciados de las proposiciones 1.16, 1.17 y 2.44 son válidos para cualquier conjunto infinito de índices I, incluído $I = \mathbf{N}$.

En un espacio vectorial topológico, las operaciones conservan los límites según un ultrafiltro, es decir:

Proposición 1.18 [46; cap.3, prop.3] *Sea X un espacio vectorial topológico, $(x_i)_{i\in I}$ e $(y_i)_{i\in I}$ dos familias convergentes según el ultrafiltro $\mathcal{U}$, y $(\lambda_i)_{i\in I}$ una sucesión de escalares convergente según $\mathcal{U}$. Entonces:*

$$\lim_{\mathcal{U}} (x_i + y_i) = \lim_{\mathcal{U}} x_i + \lim_{\mathcal{U}} y_i$$
$$\lim_{\mathcal{U}} \lambda_i x_i = \lim_{\mathcal{U}} \lambda_i \lim_{\mathcal{U}} x_i.$$

Respecto de la proposición anterior, notemos que cualquier familia acotada de escalares $(\lambda_i)_{i\in I}$ es convergente según $\mathcal{U}$.

1.2 Ultrapotencias de espacios de Banach.

Generalmente, reservaremos las letras mayúsculas finales del abecedario, $\ldots, X, Y, Z$, para denotar espacios de Banach, y las letras minúsculas finales, $\ldots, x, y, z$, para representar a sus elementos. El espacio dual de X será denotado por X^*, y sus elementos, también denominados *funcionales*, serán indicados mediante letras latinas $f, g, h, \ldots$. Los elementos de X^{**} se denotarán mediante letras mayúsculas $F, G, H, \ldots$, o bien por $x'', y'', \ldots$

Sea ahora una familia $(x_i)_{i\in I}$ contenida en el espacio de Banach X. Si $(x_i)_{i\in I}$ *converge en norma hacia* x según $\mathcal{U}$, lo representaremos $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$, y si $(x_i)_{i\in I}$ *converge en la topología débil hacia* x según $\mathcal{U}$, se escribirá $w\text{-}\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$.

Si la familia $(f_i)_{i\in I}$ de X^* *converge en la topología $*$–débil hacia $f \in X^*$* según $\mathcal{U}$, lo indicaremos por $w^*\text{-}\lim_{\mathcal{U}} f_i = f$.

Dado el espacio de Banach X y el conjunto de índices I, denotaremos por $\ell_\infty(I, X)$ al espacio de Banach cuyos elementos son todas las familias acotadas $(x_i)_{i\in I} \subset X$, dotado de la norma del supremo definida por

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_\infty := \sup\{\|x_i\| : i \in I\}.$$

Proposición 1.19 [46; cap.4, pg.14] *El conjunto $N_{\mathcal{U}}(X)$, formado por todas las familias convergentes a $0 \in X$ según $\mathcal{U}$, es un subespacio cerrado de $\ell_\infty(I, X)$.*

El concepto básico de esta memoria es el de *ultrapotencia* de un espacio de Banach.

Definición 1.20 [46; cap.4, pg.14] *Llamaremos* ultrapotencia del espacio de Banach X según el ultrafiltro $\mathcal{U}$ *al espacio de Banach $X_{\mathcal{U}}$ dado por*

$$X_{\mathcal{U}} := \frac{\ell_\infty(I, X)}{N_{\mathcal{U}}(X)}\ .$$

Mientras no haya confusión, a la familia $(x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I,X)$ la denotaremos por (x_i), y por $[x_i]_i$ o por $[x_i]$ denotaremos a su respectiva clase de equivalencia en $X_{\mathcal{U}}$. Usaremos las letras minúsculas finales en negrita $\ldots, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ para representar a los elementos de $X_{\mathcal{U}}$.

De las definiciones de norma cociente y de límite según un ultrafiltro se obtiene la siguiente identidad para la norma en una ultrapotencia.

Proposición 1.21 [46; cap.4, prop.1] *Para cada elemento $[x_i]$ de la ultrapotencia $X_{\mathcal{U}}$ se verifica la igualdad:*

$$\big\|[x_i]\big\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|.$$

Observación. La ultrapotencia $X_{\mathcal{U}}$ contiene canónicamente una copia isométrica de X, donde cada elemento $x \in X$ se identifica con el elemento de $X_{\mathcal{U}}$ cuyo representante es la familia constante $(x)_i$. De ahora en adelante identificaremos a X con esta copia isométrica.

Consideremos ahora el espacio de Banach X, y los ultrafiltros $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ sobre los respectivos conjuntos de índices I y J. Entonces podemos hablar de la ultrapotencia reiterada $(X_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}$. Esta ultrapotencia verifica el teorema de iteración finita cuyo enunciado dice:

Teorema 1.22 [46; cap.13, tma.2] *Sean el espacio de Banach X y los ultrafiltros $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ sobre I y J respectivamente. Entonces $X_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}$ y $(X_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}$ son canónicamente isométricos.*

El isomorfismo $\rho : X_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}} \longrightarrow (X_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}$ del teorema de iteración finita viene dado de la siguiente manera:

$$\rho\big([x_{ij}]_{ij\in I\times J}\big) = \big[[x_{ij}]_{i\in I}\big]_{j\in J}. \tag{1}$$

Es también conveniente establecer el concepto de ultrapotencia de un subconjunto de un espacio de Banach:

Definición 1.23 *Sea C un subconjunto del espacio de Banach X. Llamaremos ultrapotencia de C según $\mathcal{U}$ al subconjunto de $X_{\mathcal{U}}$*

$$C_{\mathcal{U}} := \{[s_i] \in X_{\mathcal{U}} : \, s_i \in C, \, i \in I\}.$$

Observemos que puede ocurrir que $[s_i]$ pertenezca a $C_{\mathcal{U}}$, pero en cambio, el representante $(s_i)_{i\in I}$ no esté contenido en C.

En la siguiente proposición se demuestra que la ultrapotencia de un conjunto siempre es cerrada.

Proposición 1.24 *Sea C un subconjunto no vacío del espacio de Banach X. Entonces $C_{\mathcal{U}}$ es un subconjunto cerrado de $X_{\mathcal{U}}$. En particular, si E es un subespacio lineal de X, entonces $E_{\mathcal{U}}$ es un subespacio cerrado de $X_{\mathcal{U}}$.*

Demostración. Sea $(\mathbf{s}_n)_n$ una sucesión contenida en $C_{\mathcal{U}}$ convergiendo hacia un elemento $\mathbf{x} \in X_{\mathcal{U}}$. Hemos de ver que $\mathbf{x}$ pertenece a $C_{\mathcal{U}}$.

Pongamos

$$\mathbf{s}_n = [s_n^i]_i, \quad n \in \mathbf{N}$$
$$\mathbf{x} = [x_i]_i.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el conjunto $\{s_n^i : i \in I, n \in \mathbf{N}\}$ está acotado. En efecto, tomemos un elemento $y \in C$. Como la sucesión $(\mathbf{s}_n)$ es convergente, existe un número real $\beta > \|y\|$ tal que $\|[s_n^i]\| < \beta$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Así, por proposición 1.21, para cada $n \in \mathbf{N}$ se tiene

$$\{i : \|s_n^i\| < \beta\} \in \mathcal{U}, \tag{2}$$

y si tomamos la familia $(t_n^i)_i$ dada por

$$t_n^i = \begin{cases} s_n^i & \text{si } \|s_n^i\| < \beta \\ y & \text{si } \|s_n^i\| \geq \beta \end{cases}$$

la fórmula (2) nos da $[t_n^i] = [s_n^i]$, y además $\{t_n^i : i \in I, n \in \mathbf{N}\}$ está acotado por β.

Sea ahora $\{I_n : n \in \mathbf{N}\}$ una partición de I disjunta con $\mathcal{U}$. Obtengamos inductivamente una sucesión decreciente $A_1, A_2, A_3 \ldots$ de elementos de $\mathcal{U}$ como indicamos a continuación:

Como $(\mathbf{s}_n)$ converge hacia $\mathbf{x}$, existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tal que $\|\mathbf{s}_{n_1} - \mathbf{x}\| < 1$. Entonces los conjuntos $\{i \in I : \|s_{n_1}^i - x_i\| < 1\}$ y $\bigcup_{n=2}^{\infty} I_n$ pertenecen a $\mathcal{U}$, y por las propiedades de ultrafiltros, podemos escribir

$$A_1 := \left\{i \in I : \|s_{n_1}^i - x_i\| < 1\right\} \bigcap \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} I_n \right) \in \mathcal{U}.$$

Supongamos que ya hemos obtenido $A_{k-1} \in \mathcal{U}$. Nuevamente, por la convergencia de $(\mathbf{s}_n)$ hacia $\mathbf{x}$ según $\mathcal{U}$, existe un n_k tal que $\left\|\mathbf{s}_{n_k} - \mathbf{x}\right\| < 1/k$. Entonces tomamos el conjunto A_k dado por:

$$A_k := \left\{i \in A_{k-1} : \|s_{n_k}^i - x_i\| < 1/k\right\} \bigcap \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} I_n \right) \in \mathcal{U}.$$

Teniendo en cuenta que $\{I_n : n \in \mathbf{N}\}$ es una partición de I y que (A_k) es decreciente, entonces I es igual a la unión disjunta

$$I = (I \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \overset{\infty}{\ldots} \tag{3}$$

Ahora para cada $i \in A_k \setminus A_{k+1}$ tomamos $h_i = s_{n_k}^i$, y si $i \in I \setminus A_1$ tomamos $h_i = y \in C$. En virtud de (3), y teniendo en cuenta que $\{s_n^i : i \in I, n \in \mathbf{N}\}$ está acotado, llegamos a que $[h_i]$ está bien definido y pertenece a $C_{\mathcal{U}}$.

Si comprobamos que $[h_i]$ es igual a $\mathbf{x}$, entonces tendremos que $\mathbf{x}$ pertenece a $C_{\mathcal{U}}$, y habremos terminado la demostración. Para ello basta ver que dado un $n \in \mathbf{N}$ cualquiera, entonces

$$\{i \in I : \|h_i - x_i\| < 1/n\} \supset A_n \in \mathcal{U}$$

lo que demuestra que $\lim_{\mathcal{U}} \|h_i - x_i\| = 0$, y por tanto $[h_i] = [x_i]$. □

La proposición anterior muestra que no todo subconjunto de $X_\mathcal{U}$ es la ultrapotencia de algún subconjunto de X.

La clausura $\overline{C}$ de un subconjunto C de X puede obtenerse en función de su ultrapotencia:

Proposición 1.25 *Sea C un subconjunto del espacio de Banach X. Se verifica $C_\mathcal{U} \cap X = \overline{C}$.*

Demostración. Para el contenido $\overline{C} \subset C_\mathcal{U} \cap X$, basta tener en cuenta que la topología de X coincide con su topología heredada de $X_\mathcal{U}$, y que por la proposición 1.24, $C_\mathcal{U}$ es cerrado.

Veamos el contenido $C_\mathcal{U} \cap X \subset \overline{C}$. Sea $[x_i] \in C_\mathcal{U} \cap X$, con cada x_i perteneciente a C. Entonces existe un elemento $x \in X$ tal que $[x_i] = x$, es decir, $\lim_\mathcal{U} x_i = x$. Por tanto, para cada $n \in \mathbf{N}$ se verifica

$$J_n := \{i \in I : \|x_i - x\| < 1/n\} \in \mathcal{U}.$$

En consecuencia los J_n son no vacíos, de donde se deduce que x pertenece a la clausura de C. □

La siguiente proposición nos permitirá simplificar algunas demostraciones posteriores.

Proposición 1.26 *Sea X un espacio de Banach y $[x_i]$ un elemento de $X_\mathcal{U}$ con norma igual a α. Entonces existe una familia $(y_i) \in \ell_\infty(I, X)$ verificando:*

i) $\|y_i\| = \alpha$ *para todo* $i \in I$;

ii) $[y_i] = [x_i]$.

Demostración. Consideremos un elemento $v \in X$ con norma igual a uno, y tomemos los elementos $y_i \in X$ dados por

$$y_i := \begin{cases} \alpha x_i / \|x_i\|, & \text{si } x_i \neq 0 \\ \alpha v, & \text{si } x_i = 0. \end{cases}$$

Es obvio que los elementos y_i verifican el apartado *i)*. Para comprobar el apartado *ii)*, tengamos en cuenta que por la elección de y_i se verifica

$$\|x_i - y_i\| = \big|\|x_i\| - \alpha\big| \quad \text{para todo} \quad i \in I. \tag{4}$$

Por hipótesis se tiene que $\alpha = \lim_\mathcal{U} \|x_i\|$, luego $0 = \lim_\mathcal{U} \big(\|x_i\| - \alpha\big)$. Entonces, tomando límites según $\mathcal{U}$ en ambos miembros de la igualdad (4) llegamos a que $\lim_\mathcal{U} \|x_i - y_i\| = 0$, de donde se deduce que $[y_i] = [x_i]$. □

Llamaremos *bola cerrada* del espacio de Banach X al conjunto:

$$B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

y *esfera* de X al conjunto

$$S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

Proposición 1.27 *Sea X un espacio de Banach. Entonces se verifica la identidad:*

$$(B_X)_\mathcal{U} = B_{X_\mathcal{U}}.$$

Demostración. Basta aplicar la proposición 1.26. □

La ultrapotencia $C_\mathcal{U}$ contiene siempre a C. La igualdad $C = C_\mathcal{U}$ se produce en función de las propiedades de "compacidad" del conjunto C.

Proposición 1.28 *Sean X un espacio de Banach, K un subconjunto acotado de X y E un subespacio de X. Entonces se verifica:*

a) K es relativamente compacto si y sólo si $K_\mathcal{U}$ está contenido en X;

b) E es de dimensión finita si y sólo si $E_\mathcal{U} = E$.

Demostración.

a) Supongamos que K es relativamente compacto. Por proposición 1.16, para cada $[k_i] \in K_\mathcal{U}$ existe un elemento $y \in X$ tal que $\lim_\mathcal{U} k_i = y$. Esto nos permite escribir

$$[k_i] = y \in K_\mathcal{U} \cap X,$$

lo que prueba $K_\mathcal{U} \subset X$.

Supongamos ahora que $K_\mathcal{U}$ está contenido en X. Entonces para todo $[k_i] \in K_\mathcal{U}$ existe algún $y \in X$ tal que $[k_i] = [y]$, esto es, $\lim_\mathcal{U} k_i = y$, y por proposición 1.17, K es relativamente compacto.

b) El subespacio E es de dimensión finita si y sólo si B_E es compacta, lo que a su vez es equivalente a $(B_E)_\mathcal{U} \subset X$ en virtud de la parte *a)*. Ahora, como B_E es cerrada, por la proposición 1.25 tenemos $B_E = (B_E)_\mathcal{U} \cap X$, luego E tiene dimensión finita si y sólo si $B_E = (B_E)_\mathcal{U}$. Por último, la identidad $(B_E)_\mathcal{U} = B_{E_\mathcal{U}}$ de la proposición 1.27 nos lleva a que E tiene dimensión finita si y sólo si

$$B_{E_\mathcal{U}} = B_E,$$

o lo que es lo mismo, si y sólo si $E_\mathcal{U}$ es igual a E. □

Los dos siguientes lemas muestran el comportamiento de las ultrapotencias en construcciones de tipo general de espacios de Banach, concretamente, espacios producto y espacios cociente.

Lema 1.29 *Dados dos espacios de Banach X e Y, se verifica que $X_\mathcal{U} \times Y_\mathcal{U}$ y $(X \times Y)_\mathcal{U}$ son canónicamente isomorfos.*

Demostración. El isomorfismo viene dado por la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (X \times Y)_\mathcal{U} & \longrightarrow & X_\mathcal{U} \times Y_\mathcal{U} \\ \big[(x_i, y_i)\big] & \mapsto & \big([x_i], [y_i]\big) \end{array}$$

□

Lema 1.30 *Sea X un espacio de Banach e Y un subespacio cerrado de X. Se verifica que hay un isomorfismo canónico e isométrico*

$$\left[\frac{X}{Y}\right]_\mathcal{U} \cong \frac{X_\mathcal{U}}{Y_\mathcal{U}}$$

Demostración. Sea la aplicación

$$\begin{array}{llll}\phi: & X_{\mathcal{U}}/Y_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & [X/Y]_{\mathcal{U}} \\ & [x_i]+Y_{\mathcal{U}} & \mapsto & [x_i+Y]\end{array}$$

Comprobemos que ϕ está bien definida: sean (x_i) y (x'_i) dos elementos de $\ell_\infty(I,X)$ verificando $[x_i]+Y_{\mathcal{U}}=[x'_i]+Y_{\mathcal{U}}$. Entonces existen familias (h_i) en $\ell_\infty(I,Y)$ e (y_i) en $N_{\mathcal{U}}(X)$ tales que $x'_i=x_i+h_i+y_i$ para todo $i\in I$. Así, $x'_i+Y=x_i+y_i+Y$ y entonces $[x'_i+Y]=[x_i+Y]$, tal como queríamos ver.

La linealidad de ϕ es evidente. Comprobemos ahora que ϕ es suprayectiva. Para ello tomemos un elemento $[x_i+Y]\in[X/Y]_{\mathcal{U}}$. Por la proposición 1.26 podemos suponer

$$\|x_i+Y\|=\big\|[x_i+Y]\big\| \qquad \text{para todo} \quad i\in I.$$

Entonces, para cada x_i podemos encontrar un $y_i\in Y$ tal que $\|x_i+y_i\|\leq 2\big\|[x_i+Y]\big\|$, y tomando $z_i=x_i+y_i$, llegamos a que (z_i) pertenece a $\ell_\infty(I,X)$, lo que nos permite escribir

$$\phi\big([z_i]+Y\big)=[x_i+Y].$$

Ver ahora que ϕ es una isometría se reduce a comprobar que se cumple la igualdad

$$\inf\Big\{\lim_{\mathcal{U}(i)}\|x_i+y_i\|:(y_i)\in\ell_\infty(I,Y)\Big\}=\lim_{\mathcal{U}(i)}\inf_{y\in Y}\|x_i+y\|.$$

En primer lugar veamos que el miembro izquierdo es menor o igual que el derecho. Sea $(\varepsilon_i)\in N_{\mathcal{U}}(\mathbf{R})$ con $\varepsilon_i>0$. Para cada $i\in I$ escribamos

$$\alpha_i=\inf_{y\in Y}\|x_i+y\|$$

y tomemos un $k_i\in Y$ tal que

$$\alpha_i\leq\|x_i+k_i\|\leq\alpha_i+\varepsilon_i.$$

Fijémonos en que la familia (k_i) está acotada por estarlo también (x_i). Esto nos permite afirmar que

$$\begin{aligned}\inf\Big\{\lim_{\mathcal{U}(i)}\|x_i+y_i\|:(y_i)\in\ell_\infty(I,Y)\Big\}&\leq\\ &\leq\lim_{\mathcal{U}(i)}\|x_i+k_i\|=\lim_{\mathcal{U}(i)}\inf_{y\in Y}\|x_i+y\|.\end{aligned}$$

Para la otra desigualdad, tomemos una familia $(y_i)\in\ell_\infty(I,Y)$ cualquiera. Entonces para cada $i\in I$ se tiene que

$$\|x_i+y_i\|\geq\inf_{y\in Y}\Big\{\|x_i+y\|\Big\}$$

y así

$$\lim_{\mathcal{U}(i)}\|x_i+y_i\|\geq\lim_{\mathcal{U}(i)}\inf_{y\in Y}\Big\{\|x_i+y\|\Big\},$$

y como lo de arriba es válido para todo $(y_i)\in\ell_\infty(I,Y)$, llegamos a

$$\inf\Big\{\lim_{\mathcal{U}(i)}\|x_i+y_i\|:(y_i)\in\ell_\infty(I,Y)\Big\}\geq\lim_{\mathcal{U}(i)}\inf_{y\in Y}\|x_i+y\|.$$

□

1.3 Ultrapotencias de operadores.

Sean X e Y dos espacios de Banach. Al conjunto de todos los os acotados $T : X \longrightarrow Y$ lo denotaremos por $\mathcal{B}(X,Y)$. Todos los operadores que aparecerán en estas páginas son acotados. Por tanto, siempre que hablemos de operadores, estaremos refiriéndonos a operadores acotados. Al *núcleo* de un operador T lo denotaremos por $N(T)$, y a su imagen o *rango*, $R(T)$. Por *conúcleo* de T entendemos el espacio cociente $Y/\overline{R(T)}$.

El concepto de ultrapotencia de un oa queda establecido en la siguiente

Definición 1.31 [46; cap.5] *Llamaremos* ultrapotencia del operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, *al oa* $T_{\mathcal{U}} \in B(X_{\mathcal{U}}, Y_{\mathcal{U}})$ *dado por*

$$\begin{array}{rccc} T_{\mathcal{U}}: & X_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & Y_{\mathcal{U}} \\ & [x_i] & \mapsto & [Tx_i]. \end{array}$$

Notemos que la restricción de $T_{\mathcal{U}}|_X$ se identifica con T.

En el siguiente lema indicamos el comportamiento de la ultrapotencia de un oa bajo sumas, composiciones y productos por escalares.

Lema 1.32 *Para un escalar λ y os $S, T \in \mathcal{B}(X,Y)$, $U \in \mathcal{B}(Y,Z)$, se verifica:*

a) $(S+T)_{\mathcal{U}} = S_{\mathcal{U}} + T_{\mathcal{U}}$;
b) $\lambda T_{\mathcal{U}} = (\lambda T)_{\mathcal{U}}$;
c) $(UT)_{\mathcal{U}} = U_{\mathcal{U}} T_{\mathcal{U}}$.

La demostración es inmediata.

En relación con el teorema 1.22 de iteración finita, las ultrapotencias reiteradas de operadores verifican cierta propiedad conmutativa, expresada en la siguiente

Proposición 1.33 *Sea un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, y los isomorfismos canónicos $\rho : X_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}} \longrightarrow (X_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}$ y $\rho' : Y_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}} \longrightarrow (Y_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}$. Entonces se verifica*

$$\rho' \circ T_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}} = (T_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}} \circ \rho.$$

Cuando se tiene un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ y una familia acotada en Y de la forma (Tx_i), no siempre es posible escribir $[Tx_i] = T_{\mathcal{U}}[x_i]$, ya que la familia (x_i) puede ser no acotada. Basta pensar, por ejemplo, en un operador con $N(T) \neq 0$, y con $(x_i) \subset N(T)$. El problema es importante en el caso en que T tiene rango no cerrado. Para los operadores de rango cerrado tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.34 *Sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ un operador de rango cerrado y $(x_i)_{i\in I}$ una familia contenida en X tal que $(Tx_i)_{i\in I}$ es acotada en Y. Entonces existe una familia acotada, $(z_i)_{i\in I}$ contenida en X tal que $Tx_i = Tz_i$ para cada $i \in I$.*

Demostración. Como T es de rango cerrado, por el teorema de la aplicación abierta existe una constante $\alpha > 0$ tal que para cada $x \in X$ hay un $z \in X$ verificando $Tx = Tz$ y $\|Tx\| \geq \alpha\|z\|$.

Entonces, para cada x_i existe un z_i verificando

$$Tx_i = Tz_i \tag{1}$$

$$\|Tx_i\| \geq \alpha\|z_i\|. \tag{2}$$

Como (Tx_i) es acotada, de (2) tenemos que (z_i) es acotada, y ahora aplicando (1) podemos escribir $T_{\mathcal{U}}([z_i]) = [Tx_i]$. □

En la próxima sección veremos bajo qué condiciones un operador $T_{\mathcal{U}}$ tiene rango cerrado. En cualquier caso, $R(T_{\mathcal{U}})$ siempre es unión numerable de cerrados. Concretamente

Lema 1.35 *Sea un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Entonces $T_{\mathcal{U}}(B_{X_{\mathcal{U}}}) = (TB_X)_{\mathcal{U}}$; en particular $T_{\mathcal{U}}(B_{X_{\mathcal{U}}})$ es cerrado en $Y_{\mathcal{U}}$.*

Demostración. Según la proposición 1.27, $B_{X_{\mathcal{U}}} = (B_X)_{\mathcal{U}}$, y por tanto

$$T_{\mathcal{U}}(B_{X_{\mathcal{U}}}) = T_{\mathcal{U}}\big((B_X)_{\mathcal{U}}\big).$$

Por otra parte, de las definiciones 1.23 y 1.31 de ultrapotencias de conjuntos y de operadores, tenemos

$$T_{\mathcal{U}}\big((B_X)_{\mathcal{U}}\big) = (TB_X)_{\mathcal{U}}.$$

Asíse llega a que $T_{\mathcal{U}}(B_{X_{\mathcal{U}}})$ es la ultrapotencia de $T(B_X)$, y por tanto $T_{\mathcal{U}}(B_{X_{\mathcal{U}}})$ es cerrado, según la proposición 1.24. □

Corolario 1.36 *Para cada operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ se verifica la identidad*

$$\overline{TB_X} = Y \cap T_{\mathcal{U}} B_{X_{\mathcal{U}}}.$$

Demostración. Basta aplicar la proposición 1.25 que nos dice que

$$\overline{TB_X} = Y \cap T_{\mathcal{U}} B_{X_{\mathcal{U}}}.$$

□

En las dos proposiciones siguientes se analiza con más detalle el núcleo y el rango de $T_{\mathcal{U}}$. Se prueba que el rango de $T_{\mathcal{U}}$ es cerrado si y sólo si $R(T)$ es cerrado, y se caracterizan los operadores T de rango cerrado en función del núcleo $N(T_{\mathcal{U}})$ y del espacio $R(T)_{\mathcal{U}}$.

Proposición 1.37 *Sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Entonces $N(T)_{\mathcal{U}} \subset N(T_{\mathcal{U}})$. Además, son equivalentes:*

(a) *$N(T)_{\mathcal{U}} = N(T_{\mathcal{U}})$;*

(b) *$R(T)$ es cerrado.*

Demostración. Si $[x_i]$ pertenece a $N(T)_{\mathcal{U}}$, podemos suponer que cada x_i pertenece a $N(T)$, y por tanto $T_{\mathcal{U}}([x_i]) = [Tx_i] = [0]$. Acabamos de probar el contenido $N(T)_{\mathcal{U}} \subset N(T_{\mathcal{U}})$. Probemos ahora la equivalencia entre (a) y (b).
(a)⇒(b) Supongamos que $R(T)$ no es cerrado. Entonces para cada $n \in \mathbf{N}$ existe un x_n en S_X tal que $0 < \|Tx_n\| < 1/n$ y $\operatorname{dist}\big(x_n, N(T)\big) \geq 1/2$.

Consideremos ahora una partición $\{I_n : n \in \mathbf{N}\}$ de I disjunta con $\mathcal{U}$. Para cada $i \in I$, tomemos $h_i = x_n$ si $i \in I_n$.

Para toda familia $(z_i) \in \ell_\infty\big(I, N(T)\big)$ se verifica

$$\big\|[h_i] - [z_i]\big\| = \lim_{\mathcal{U}} \|h_i - z_i\| \geq \frac{1}{2},$$

luego $[h_i] \notin N(T)_{\mathcal{U}}$. Por otra parte, para todo $n \in \mathbf{N}$ se cumple

$$\Big\{i \in I : \|Th_i\| < \frac{1}{n}\Big\} \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} I_k \in \mathcal{U},$$

de donde se deduce que $[h_i] \in N(T_{\mathcal{U}})$, y por tanto $[h_i] \in N(T_{\mathcal{U}}) \setminus N(T)_{\mathcal{U}}$.
(b)⇒(a) Supongamos que $R(T)$ es cerrado y veamos que $N(T_{\mathcal{U}}) \subset N(T)_{\mathcal{U}}$. Sea $[x_i] \in N(T_{\mathcal{U}})$. Entonces

$$\lim_{\mathcal{U}} \|Tx_i\| = 0. \tag{3}$$

Como T es de rango cerrado, existe una constante $\beta > 0$ tal que para cada x_i se puede encontrar un elemento $z_i \in X$ verificando

$$Tx_i = Tz_i \tag{4}$$

$$\|Tx_i\| \geq \beta \|z_i\|. \tag{5}$$

De (5) se deduce que (z_i) es una familia acotada, y por tanto existe el elemento $[z_i]$ en $X_{\mathcal{U}}$; aplicando ahora (3) y (5) tenemos además que $[z_i]$ pertenece a $N_{\mathcal{U}}(X)$.

Por otra parte, de (4) se obtiene que el elemento $k_i = x_i - z_i$ pertenece a $N(T)$, y como las familias (x_i) y (z_i) son acotadas, (k_i) también lo es, y entonces podemos escribir

$$[x_i] = [z_i] + [k_i] = [k_i] \in N(T)_{\mathcal{U}}.$$

□

Proposición 1.38 *Sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Entonces $R(T_{\mathcal{U}}) \subset R(T)_{\mathcal{U}}$. Además, los tres enunciados siguientes son equivalentes:*
(a) *$R(T)$ es cerrado;*
(b) *$R(T)_{\mathcal{U}} = R(T_{\mathcal{U}})$;*

(c) $R(T_{\mathcal{U}})$ *es cerrado.*

Demostración. Si $[x_i] \in X_{\mathcal{U}}$, entonces $T_{\mathcal{U}}([x_i]) = [Tx_i]$ pertenece a $R(T)_{\mathcal{U}}$.

Probemos ahora las equivalencias del enunciado.

(a)⇒(b) Sea $[y_i] \in R(T)_{\mathcal{U}}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que para cada y_i existe un x_i en X tal que $y_i = Tx_i$. Ahora, como T es de rango cerrado, por el lema 1.34 podemos suponer que $(x_i) \in \ell_\infty(I, X)$. Por tanto

$$[y_i] = T_{\mathcal{U}}[x_i] \in R(T_{\mathcal{U}}).$$

(b)⇒(c) Basta notar que, por la proposición 1.24, $R(T)_{\mathcal{U}}$ es cerrado.

(c)⇒(a) Supongamos que $R(T_{\mathcal{U}})$ es cerrado. Por el teorema de la aplicación abierta existe un $\alpha > 0$ tal que

$$T_{\mathcal{U}}(\alpha B_{X_{\mathcal{U}}}) \supset B_{R(T_{\mathcal{U}})}. \tag{6}$$

Por otra parte, $R(T_{\mathcal{U}})$ cerrado implica

$$B_{R(T_{\mathcal{U}})} \supset B_{\overline{R(T)}}, \tag{7}$$

pues dado un elemento $y \in B_{\overline{R(T)}}$, es inmediato que $[y]$ pertenece a $\overline{R(T_{\mathcal{U}})} = R(T_{\mathcal{U}})$.

Por otro lado, el corolario 1.36 nos dice

$$\overline{TB_X} = Y \cap T_{\mathcal{U}} B_{X_{\mathcal{U}}}, \tag{8}$$

y aplicando sucesivamente (7), (6) y (8), llegamos a que

$$\overline{T(\alpha B_X)} \supset B_{\overline{R(T)}}$$

de donde se obtiene, por [8; II.5], que $T(2\alpha B_X) \supset B_{\overline{R(T)}}$, lo que prueba que $R(T) = \overline{R(T)}$. □

Observación. Dado $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, ya vimos en el corolario 1.36 que $\overline{T(B_X)} = Y \cap T_{\mathcal{U}}(B_{X_{\mathcal{U}}})$. Por tanto, siempre se verifican los contenidos

$$R(T) \subset Y \cap R(T_{\mathcal{U}}) \subset \overline{R(T)}.$$

Sin embargo, ambos pueden ser estrictos, como mostramos en los siguientes ejemplos:

a) El operador

$$\begin{array}{rccc} T: & c_0 & \longrightarrow & \ell_2 \\ & (x_n) & \mapsto & (x_n/n) \end{array}$$

verifica $R(T) \neq R(T_{\mathcal{U}}) \cap \ell_2$. En efecto, fijémonos en que $y = (1\,,\,1/2\,,\,1/3\,,\overset{\infty}{\ldots})$ pertenenece a $\overline{TB_{c_0}}$, ya que

$$y = \lim_n T(1\,,\,1\,,\overset{n}{\ldots},\,1\,,\,0\,,\,0\,,\overset{\infty}{\ldots}),$$

y así $y \in R(T_{\mathcal{U}}) \cap \ell_2$, por el corolario 1.36. Sin embargo, $(1\,,\,1/2\,,\,1/3\,,\overset{\infty}{\ldots})$ no pertenece a $R(T)$.

b) El contenido $R(T_{\mathcal{U}}) \cap Y \subset \overline{R(T)}$ se debe a que, en virtud de la proposición 1.38, $\overline{R(T_{\mathcal{U}})}$ está contenido en $R(T)_{\mathcal{U}}$, y por proposición 1.25, $R(T)_{\mathcal{U}} \cap Y = \overline{R(T)}$. Veamos ahora un operador $V \in \mathcal{B}(\ell_2, c_0)$ tal que $R(V_{\mathcal{U}}) \cap \ell_\infty$ no es igual a $\overline{R(V)}$. Sea

$$\begin{array}{rlcl} V: & \ell_2 & \longrightarrow & c_0 \\ & (x_n) & \mapsto & (x_n) \end{array}$$

El operador V tiene rango no cerrado. En particular tenemos que el elemento $y = (1\,,\,1/\sqrt{2}\,,\,1/\sqrt{3}\,,\overset{\infty}{\ldots})$ está en $c_0 \setminus R(V)$, pero se puede expresar como el límite de la sucesión (y_n) de elementos de $R(V)$ dados por

$$y_n = \left(1\,,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\ldots,\frac{1}{\sqrt{n}}\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\overset{\infty}{\ldots}\right)$$

lo que implica que $y \in \overline{R(V)} \setminus R(V)$. Sin embargo, $y \notin R(V_{\mathcal{U}}) \cap c_0$, pues, debido a que V es débilmente continuo y B_{ℓ_2} es débilmente compacto, se verifica $VB_{\ell_2} = \overline{VB_{\ell_2}}$. Entonces, por la proposición 1.25 y el lema 1.35, tenemos $VB_{\ell_2} = V_{\mathcal{U}}(B_{\ell_{2\mathcal{U}}}) \cap c_0$; por tanto

$$R(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V(nB_{\ell_2}) = c_0 \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{\mathcal{U}}(nB_{\ell_{2\mathcal{U}}}) = c_0 \cap R(V_{\mathcal{U}}).$$

En vista de los últimos ejemplos, damos la siguiente proposición.

Proposición 1.39 *Dado el operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, se verifica:*

$$\overline{R(T)} = \overline{R(T_{\mathcal{U}})} \cap Y.$$

Demostración. La inclusión $\overline{R(T)} \subset \overline{R(T_{\mathcal{U}})} \cap Y$ es trivial. Obtengamos la inclusión recíproca. Por las proposiciones 1.38 y 1.24, se cumple $\overline{R(T_{\mathcal{U}})} \subset \overline{R(T)_{\mathcal{U}}}$, y por la proposición 1.25, $\overline{R(T)_{\mathcal{U}}} \cap Y = \overline{R(T)}$. Consecuentemente, $\overline{R(T)} \supset \overline{R(T_{\mathcal{U}})} \cap Y$.

□

1.4 Estructura local y ultrapotencias.

La Teoría Local de espacios de Banach describe las propiedades de un espacio en términos de sus subespacios finito-dimensionales. Un concepto básico en esta teoría es el de *representación finita de espacios de Banach.* Henson, Moore [26] y Stern [47] observaron la conexión natural que existe entre la representabilidad finita y la teoría de ultraproductos. El objetivo de esta sección es precisamente mostrar dicha conexión, básica para el desarrollo de los capítulos posteriores.

Definición 1.40 [46; cap.10, pg.66] *Sea* $0 < \varepsilon < 1$. *Se dice que el operador* $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, *es una* ε-isometría *si verifica:*

$$\big| \|Tx\| - \|x\| \big| \leq \varepsilon \|x\| \qquad \textit{para todo} \quad x \in X.$$

Equivalentemente, existe $T^{-1} : T(X) \longrightarrow X$ *y además* $\|T\| \leq 1 + \varepsilon$ *y* $\|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$.

Definición 1.41 *Sean* X *e* Y *dos espacios de Banach. Se dice que* Y *es* finitamente representable *en* X *si para cada* $0 < \varepsilon < 1$ *y cada subespacio* M *de* Y *de dimensión finita, existe una* ε*-isometría* $T : M \longrightarrow X$.

A partir de ahora escribiremos abreviadamente Y f.r. en X para significar que Y es *finitamente representable* en X. Observemos que Y f.r. en X y Z f.r. en Y, implican Z f.r. en X.

Citemos dos ejemplos universales de representabilidad finita: es fácil comprobar que todo espacio X es f.r. en el espacio c_0. A su vez, ℓ_2 es f.r. en cualquier espacio de Banach de dimensión infinita, según un teorema de Dvoretzky [5; pg.239].

El concepto de representación finita nos permite introducir nuevas propiedades mediante un refinamiento de una propiedad dada. Concretamente:

Definición 1.42 [5; pg.225] [46; pg.66] *Sea* $\mathcal{P}$ *una propiedad de espacios de Banach, y* X *un espacio de Banach. Se dice que* X *es super-*$\mathcal{P}$ *si cada espacio de Banach* Y *f.r. en* X *es* $\mathcal{P}$.

Obviamente, si el espacio X es super-$\mathcal{P}$ también es $\mathcal{P}$, aunque el recíproco no es cierto en general, según veremos en algún ejemplo posterior. También se verifica que si X es super-$\mathcal{P}$ e Y es f.r. en X, entonces Y es super-$\mathcal{P}$.

Los siguientes resultados muestran el interés de las ultrapotencias aplicadas al estudio de las superpropiedades. La demostración del siguiente teorema aparece formulada de modo más general en [23; tma. 6.3] y [46;cap.10, lemas 1 y 2]. Por el interés que tiene en el desarrollo posterior, reproduciremos parcialmente la demostración, sin extendernos en los detalles.

Teorema 1.43 [23; tma.6.3] [46; cap.10, lemas 1 y 2] *Sean* X *e* Y *dos espacios de Banach. Son equivalentes:*
(a) Y *es f.r. en* X;
(b) *existe un ultrafiltro* $\mathcal{U}$ *tal que* $X_{\mathcal{U}}$ *contiene una copia isométrica de* Y.

Demostración.
(a)⇒(b) Tomemos el conjunto I de pares ordenados

$$I := \big\{ (M, \varepsilon) : M \subset Y \,,\, \dim M < \infty \,,\, 0 < \varepsilon < 1 \big\}.$$

Los elementos de I serán denotados abreviadamente por letras latinas i, j,.... Es conveniente escribir

$$i \equiv (M_i, \varepsilon_i).$$

En I se define la relación de orden $\leq$ como sigue: dados dos elementos de I, $i \equiv (M_i, \varepsilon_i)$, y $j \equiv (M_j, \varepsilon_j)$, escribiremos $i \leq j$ si y sólo si $M_i \subset M_j$ y $\varepsilon_i \geq \varepsilon_j$.

Para cada $j \in I$ consideremos el subconjunto $B_j = \{i \in I : j \leq i\}$. La familia $\{B_j : j \in I\}$ es base de algún filtro $\mathcal{F}$, según la proposición 1.7. Ahora, se toma un ultrafiltro $\mathcal{U}$ cualquiera que domine a $\mathcal{F}$.

Por último, definamos la isometría $J : Y \longrightarrow X_{\mathcal{U}}$. Por hipótesis, para cada índice $i \equiv (M_i, \varepsilon_i) \in I$ existe una ε_i-isometría $T_i : M_i \longrightarrow X$. Entonces, para cada $x \in Y$, $J(x) := [x_i]$, donde x_i es:

$$x_i = \begin{cases} T_i x, & \text{si } x \in M_i \\ 0, & \text{si } x \notin M_i. \end{cases}$$

(b)$\Rightarrow$(a) Consideremos un $\varepsilon > 0$ y M un subespacio de $Y \subset X_{\mathcal{U}}$ de dimensión finita igual a n.

Se toma una base cualquiera de M, digamos $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, con cada y_k de norma uno.

Para cada y_k, fijemos un representante suyo $(x_k^i)_i \in \ell_\infty(I, X)$, es decir, $y_k = [x_k^i] \in X_{\mathcal{U}}$.

Ahora, para cada $i \in I$ tomamos el subespacio M_i de X dado por

$$M_i := \langle x_1^i, x_2^i, \ldots x_n^i \rangle$$

y en función de ε se encuentra un $I_0 \in \mathcal{U}$ tal que, para todo $i \in I_0$, la aplicación

$$\begin{array}{rlcl} T_i : & M & \longrightarrow & M_i \\ & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k [x_k^i] & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^i \end{array}$$

es una ε-isometría. □

Observaciones.

1) El contenido isométrico de Y en $X_{\mathcal{U}}$ señalado en (b), no es canónico, tal como veremos en un ejemplo en la próxima sección.

2) Como indica Heinrich [23], el método de la demostración, así como el tipo de resultado obtenido, es típico de la técnica de ultraproductos: *las "subestructuras finitas" del objeto dado se usan para construir un ultrafiltro que permite reproducir el objeto total como una "subestructura" de la correspondiente ultrapotencia.* En el teorema previo, las "subestructuras finitas" son precisamente los subespacios de X de dimensión finita.

3) El tamaño del conjunto I sobre el que se toma el ultrafiltro $\mathcal{U}$ puede ser necesariamente grande, dependiendo de la naturaleza de las "subestructuras finitas" que se estén considerando. Esta es la razón por la que en nuestro estudio consideramos ultrafiltros sobre conjuntos de índices cualesquiera, y no sólo ultrafiltros sobre $\mathbf{N}$.

4) El ultrafiltro $\mathcal{U}$ construído en la demostración es no trivial y $\aleph_0$-incompleto. Basta considerar los subconjuntos

$$I_n = \{(M_i, \varepsilon_i) \in I : \dim M_i = n\}, \qquad n \in \mathbf{N}$$

que constituyen una partición de I, pero no pertenecen a $\mathcal{U}$.

Del anterior teorema se deducen los dos siguientes corolarios:

Corolario 1.44 [46; pg.71] *Para todo espacio de Banach X y todo ultrafiltro $\mathcal{U}$, $X_{\mathcal{U}}$ es f.r. en X.*

Corolario 1.45 [46; cap.10, tma.4] *Si $\mathcal{P}$ es una propiedad de espacios de Banach hereditaria por subespacios y X es un espacio de Banach, entonces son equivalentes:*
(a) *X es super-$\mathcal{P}$;*
(b) *para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$, $X_{\mathcal{U}}$ es $\mathcal{P}$;*
(c) *para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$, $X_{\mathcal{U}}$ es super-$\mathcal{P}$.*

Si en el teorema 1.43 el espacio Y goza de alguna propiedad adicional, tal como la separabilidad, resulta posible elegir el ultrafiltro $\mathcal{U}$ entre los ultrafiltros no triviales más sencillos, esto es, ultrafiltros sobre $\mathbf{N}$:

Teorema 1.46 [46; cap.10, tma.5] *Sea Y un espacio de Banach separable f.r. en X, y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathbf{N}$. Entonces Y es isométrico a un subespacio de $X_{\mathcal{U}}$.*

Se dice que la propiedad $\mathcal{P}$ de espacios de Banach es *separablemente determinada* si todo espacio de Banach X cuyos subespacios separables verifican la propiedad $\mathcal{P}$, también verifica $\mathcal{P}$. El último teorema nos permite añadir una matización al corolario 1.45 en el caso en que la propiedad $\mathcal{P}$ es separablemente determinada:

Corolario 1.47 *Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{P}$ una propiedad de espacios de Banach hereditaria por subespacios y separablemente determinada. Entonces son equivalentes:*
(a) *X es super-$\mathcal{P}$;*
(b) *para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\mathbf{N}$, $X_{\mathcal{U}}$ es $\mathcal{P}$;*
(c) *existe un ultrafiltro $\mathcal{V}$ sobre $\mathbf{N}$ tal que $X_{\mathcal{V}}$ es $\mathcal{P}$.*

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b) Se obtiene directamente del corolario 1.45.

La implicación (b)$\Rightarrow$(c) es trivial.

(c)$\Rightarrow$(a) Sea Z f.r. en X, e Y un subespacio cerrado y separable de Z. Por el teorema 1.46, Y es isométrico a un subespacio de $X_{\mathcal{V}}$, y como P es heredable por subespacios, por la hipótesis (c) Y tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Y ahora, como $\mathcal{P}$ es separablemente determinada, Z también verifica $\mathcal{P}$. Hemos probado que X es super-$\mathcal{P}$. □

Observación. La reflexividad es una propiedad hereditaria y separablemente determinada; en efecto, si X es no reflexivo, por el teorema de Eberlein-Smulian, existe una sucesión acotada $(x_n) \subset X$ sin subsucesiones

w-convergentes. Entonces el subespacio $\langle x_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ es separable y no reflexivo. Esto significa que, dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$ cualquiera, por los corolarios 1.45 y 1.47, X es superreflexivo si y sólo si $X_{\mathcal{U}}$ es superreflexivo.

1.5 Duales de ultrapotencias.

Al ultraproducto del espacio dual X^* según $\mathcal{U}$, $(X^*)_{\mathcal{U}}$, lo denotaremos más abreviadamente por ${X^*}_{\mathcal{U}}$, y al dual del ultraproducto $X_{\mathcal{U}}$, $(X_{\mathcal{U}})^*$, lo representaremos por ${X_{\mathcal{U}}}^*$. Mediante las letras $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \ldots$ denotaremos a los elementos del espacio dual ${X_{\mathcal{U}}}^*$.

Lema 1.48 [46; cap.11, lema 1] *Sea X un espacio de Banach. Entonces se verifica canónicamente el siguiente contenido isométrico:*

$${X^*}_{\mathcal{U}} \subset {X_{\mathcal{U}}}^*.$$

Demostración. La inmersión de ${X^*}_{\mathcal{U}}$ en ${X_{\mathcal{U}}}^*$ viene dada por la isometría $J : {X^*}_{\mathcal{U}} \longrightarrow {X_{\mathcal{U}}}^*$, donde si $[f_i]$ es un elemento ${X^*}_{\mathcal{U}}$, $J[f_i]$ es el funcional dado por

$$\begin{array}{rccl} J[f_i]: & X_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & [x_i] & \mapsto & \lim\limits_{\mathcal{U}} f_i(x_i). \end{array}$$

□

Observación. Se entiende que la norma en ${X^*}_{\mathcal{U}}$ es la norma de la ultrapotencia, y la de ${X_{\mathcal{U}}}^*$ es la correspondiente como espacio dual de $X_{\mathcal{U}}$.

Dado un espacio de Banach X y E un subespacio de X^*, se dice que E es *normante sobre* X si para todo $x \in X$ se cumple $\|x\| = \sup\{f(x) : f \in S_E\}$. Evidentemente, X^* es normante sobre X y viceversa.

Si X es reflexivo entonces el único subespacio cerrado y normante de X es X^*; en efecto, si E un subespacio cerrado y propio de X^*, por el teorema de Hahn-Banach existe un $y \in X^{**} \backslash \{0\}$ tal que $y(E) = 0$, pero la reflexividad de X implica que $y \in X$, y por tanto E no es normante.

Proposición 1.49 [46; cap.11, lema 1] *El subespacio ${X^*}_{\mathcal{U}}$ es normante sobre $X_{\mathcal{U}}$.*

Demostración. Sea $[x_i] \in X_{\mathcal{U}}$. Por cada $i \in I$ existe un funcional $f_i \in S_{X^*}$ tal que $f_i(x_i) = \|x_i\|$. Entonces $[f_i] \in S_{{X^*}_{\mathcal{U}}}$ y $[f_i]([x_i]) = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = \big\|[x_i]\big\|$.

□

Del teorema de Hahn-Banach se sigue que, si E es un espacio normante de X, entonces $\overline{B_E}^{w^*} = B_{X^*}$. En consecuencia:

Proposición 1.50 *La bola unidad de* ${X^*}_{\mathcal{U}}$ *es* w^**-densa en la bola unidad de* ${X_{\mathcal{U}}}^*$.

Cuando aparecen espacios duales en el estudio de ultrapotencias, suele ser necesario el siguiente resultado.

Lema 1.51 *Sea* $\mathcal{U}$ *un ultrafiltro sobre el conjunto de índices* I*, y* $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de elementos de* $\mathcal{U}$ *verificando* $B_n \supset B_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbf{N}$. *Entonces existe una sucesión* $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de elementos de* $\mathcal{U}$ *satisfaciendo las siguientes condiciones:*

i) $C_n \subset B_n$ *para todo* $n \in \mathbf{N}$*;*

ii) $C_n \supset C_{n+1}$ *y* $C_n \setminus C_{n+1} \neq \emptyset$ *para todo* $n \in \mathbf{N}$*;*

iii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$.

Demostración. Sea $\{I_n : n \in \mathbf{N}\}$ una partición de I disjunta con $\mathcal{U}$. Podemos considerar que $I_n \neq \emptyset$ para todo n. Construiremos los conjuntos C_n inductivamente.

Tomemos $C_1 := B_1$ y supongamos que tenemos el conjunto C_k verificando las condiciones *i)* e *ii)*. Sea el número natural n_k dado por

$$n_k = \min\{n \in \mathbf{N} : I_n \cap C_k \neq \emptyset\},$$

entonces el conjunto C_{k+1} viene dado por:

$$C_{k+1} := B_{k+1} \bigcap \Big[\bigcup_{n=n_k+1}^{\infty} I_n \Big].$$

Es inmediato comprobar que la sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface las condiciones requeridas. □

La próxima proposición es una consecuencia del lema anterior, y consiste en un resultado más fuerte que los obtenidos en las proposiciones 1.50 y 1.49.

Proposición 1.52 *Sea* X *un espacio de Banach,* $\mathbf{\Phi}$ *un elemento de* ${X_{\mathcal{U}}}^*$*, y* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *una colección finita de elementos de* $X_{\mathcal{U}}$. *Entonces existe un elemento* $[f_i]$ *de* ${X^*}_{\mathcal{U}}$ *verificando:*

i) $\big\|[f_i]\big\| \leq \|\mathbf{\Phi}\|$*;*

ii) $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k) = [f_i](\mathbf{x}_k)$*,* $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los $\mathbf{x}_k$ son linealmente independientes. Pongamos $\mathbf{x}_k = [x_k^i]$ para $k = 1, \ldots, n$, y sean los espacios

$$M := \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \rangle$$
$$M_i := \langle x_1^i, \ldots, x_n^i \rangle, \quad i \in I.$$

Para cada $n \in \mathbf{N}$, la demostración del teorema 1.43 nos da un $A_n \in \mathcal{U}$ tal que las aplicaciones

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & M_i, & & i \in A_n \\ \mathbf{x}_k & \mapsto & x_k^i & & \end{array} \tag{1}$$

son $1/(n+1)$-isometrías. Tomemos los conjuntos $B_n := \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{U}$. El lema 1.51 proporciona una sucesión $(C_n) \subset \mathcal{U}$ tal que $B_n \supset C_n \supset C_{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y $\bigcap_{n=1}^\infty C_n = \emptyset$. Sea $C_0 := I$, y para cada $i \in I$, denotemos n_i al único número que verifica $i \in C_{n_i} \setminus C_{n_i+1}$. Como $i \in A_{n_i}$, la fórmula (1) asigna al índice i una $1/(n_i+1)$-isometría que denotaremos T_i. Consideremos el funcional $f_i := \mathbf{\Phi} T_i^{-1}$.

Veamos la condición *ii)*: para $k = 1, 2, \ldots, n$, tenemos $[f_i](\mathbf{x}_k) = \lim_{\mathcal{U}(i)} \mathbf{\Phi} T_i^{-1}(x_k^i) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_k)$.

Para la condición *i)*, $\|[f_i]\| = \lim_{\mathcal{U}(i)} \|\mathbf{\Phi} T_i^{-1}\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|T_i^{-1}\|$, y para cada $n \in \mathbf{N}$, la elección de las aplicaciones T_i nos lleva a

$$\left\{ i \in I : \|T_i^{-1}\| < 1 + \frac{1}{n} \right\} \supset C_n \in \mathcal{U},$$

lo que demuestra que $\lim_{\mathcal{U}} \|T_i^{-1}\| \leq 1$. □

De acuerdo con la definición 1.42, el concepto de *superreflexividad* queda establecido según la siguiente

Definición 1.53 *Se dice que un espacio de Banach X es* superreflexivo *si todo espacio de Banach f.r. en X es reflexivo.*

Ejemplos conocidos de espacios superreflexivos son los $L_p[0,1]$, con $1 < p < \infty$. Un ejemplo de espacio reflexivo pero no superreflexivo es $\ell_2(\ell_1^n)$, pues ℓ_1 es f.r. en dicho espacio. En efecto, es fácil comprobar que $\ell_2(\ell_1^n)$ no es B-convexo, es decir, para todo $n \geq 2$ y todo $\varepsilon > 0$ existen n elementos $x_1, \ldots, x_n$ en la esfera unidad $S_{\ell_2(\ell_1^n)}$ verificando, para toda elección de signos,

$$\|x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n\| > n(1-\varepsilon);$$

un resultado de Giesy y James [16; tma.1] demuestra que un espacio es B-convexo si y sólo ℓ_1 es f.r. en él, lo que asegura que $\ell_2(\ell_1^n)$ no es superreflexivo.

Teniendo en cuenta que la reflexividad es una propiedad hereditaria y separable, por el corolario 1.47 se tiene que, dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$ cualquiera, X es superreflexivo si y sólo si $X_{\mathcal{U}}$ es reflexivo. Otra importante caracterización de la superreflexividad en función del dual de $X_{\mathcal{U}}$ es:

Proposición 1.54 [23; prop.7.1] *Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro. Entonces X es superreflexivo si y sólo si ${X^*}_{\mathcal{U}} = {X_{\mathcal{U}}}^*$.*

Demostración. Supongamos $X_{\mathcal{U}}$ es reflexivo. Como ${X^*}_{\mathcal{U}}$ es normante, se tiene ${X^*}_{\mathcal{U}} = {X_{\mathcal{U}}}^*$.

Inversamente, supongamos ahora que ${X^*}_{\mathcal{U}} = {X_{\mathcal{U}}}^*$. Si vemos que cada funcional $\mathbf{f} = [f_i] \in {X^*}_{\mathcal{U}}$ alcanza su norma sobre $B_{X_{\mathcal{U}}}$, el teorema de James [27; pg.157] nos dará que $X_{\mathcal{U}}$ es reflexivo. Sea $\{I_n : n \in \mathbf{N}\}$ una partición de I disjunta con $\mathcal{U}$. Para cada $i \in I_n$, existe un $x_i \in B_X$ tal que

$$f_i(x_i) > \|f_i\| - 1/n.$$

Entonces

$$\mathbf{f}\big([x_i]\big) = \lim_{\mathcal{U}} f_i(x_i) = \lim_{\mathcal{U}} \|f_i\| = \|\mathbf{f}\|.$$

□

Un caso concreto y muy importante de representación finita es el de X^{**} en X, proporcionado por el *principio de reflexividad local*, que a continuación exponemos.

Teorema 1.55 [31] [36] *Sea X un espacio de Banach, M y F subespacios de dimensión finita de X^{**} y X^* respectivamente, y $0 < \varepsilon < 1$. Entonces existe una ε-isometría $T : M \longrightarrow X$ verificando:*

i) $Tx = x$ *para todo* $x \in M \cap X$*;*

ii) $f(Tx'') = x''(f)$ *para todo* $f \in F$ *y todo* $x'' \in M$.

Usando el resultado anterior, podemos refinar el resultado del teorema 1.43 mostrando que existe un ultrafiltro $\mathcal{W}$ tal que $X_{\mathcal{W}}$ contiene una copia isométrica y complementada de X^{**}.

Teorema 1.56 [23; prop.6.7] [46; cap.11, tma.3]. *Sea X un espacio de Banach. Entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{W}$ tal que:*

i) existe una isometría $J : X^{**} \longrightarrow X_{\mathcal{W}}$*;*

ii) existe una proyección $P : X_{\mathcal{W}} \longrightarrow X_{\mathcal{W}}$ *verificando* $J(X^{**}) = P(X_{\mathcal{W}})$ *y* $\|P\| = 1$*;*

iii) si $\imath$ es la inmersión canónica de X en X^{**}, entonces $J \circ \imath$ es la inmersión canónica de X en $X_{\mathcal{W}}$.

Demostración. Sea I el conjunto de todas las ternas

$$i = (M_i, F_i, \varepsilon_i) \tag{2}$$

donde $0 < \varepsilon_i < 1$, y M_i y F_i son subespacios de dimensión finita de X^{**} y X^* respectivamente.

En I se establece la relación de orden $\leq$, donde $i \leq j$ si

$$M_i \subset M_j, \qquad F_i \subset F_j, \quad \text{y} \quad \varepsilon_i \geq \varepsilon_j. \tag{3}$$

Por cada índice $j \in I$, tomemos el conjunto C_j dado por:

$$C_j = \{i \in I : j \leq i\}. \tag{4}$$

Por proposición 1.7, $\{C_j : j \in I\}$ es base de algún filtro, que denotaremos $\mathcal{F}_X$. Sea $\mathcal{W}$ cualquier ultrafiltro que domine a $\mathcal{F}_X$.

Construyamos la isometría J. Por el principio de reflexividad local, para cada $i \in I$ existe una ε_i-isometría $T_i : M_i \longrightarrow X$ verificando $T_i x = x$ para todo $x \in M_i \cap X$, y $f(Tx'') = x''(f)$ para todo $x'' \in M_i$ y todo $f \in F_i$. Entonces la expresión de J es

$$\begin{array}{rccc} J: & X^{**} & \longrightarrow & X_{\mathcal{W}} \\ & x'' & \mapsto & [x_i] \end{array}$$

donde

$$x_i = \begin{cases} T_i x'', & \text{si} \quad x'' \in M_i \\ 0, & \text{si} \quad x'' \notin M_i. \end{cases} \tag{5}$$

Obsérvese que la familia (x_i) es acotada y

$$w^*\text{-}\lim_{\mathcal{W}} x_i = x''. \tag{6}$$

Claramente, J está bien definida y es lineal.

Tomemos un elemento $x'' \in X^{**}$ de norma uno, y sea $0 < \varepsilon < 1$ cualquiera. Elijamos un $j \in I$ tal que x'' pertenezca a M_j y $\varepsilon_j < \varepsilon$. Entonces, por la elección de T_i, se verifica:

$$1 - \varepsilon < \|T_i x''\| < 1 + \varepsilon \qquad \text{para todo} \quad i \in C_j \in \mathcal{W}$$

lo que prueba que $\|Jx''\| = 1$, y por tanto J es una isometría.

Para cada $(x_i)_i \in \ell_\infty(I, X)$, siempre existe $w^*\text{-}\lim_{\mathcal{W}} x_i$, debido a que $B_{X^{**}}$ es w^*-compacta y a la proposición 1.16. La proyección P viene dada por

$$\begin{array}{rccl} P: & X_{\mathcal{W}} & \longrightarrow & X_{\mathcal{W}} \\ & [x_i] & \mapsto & J(w^*\text{-}\lim_{\mathcal{W}} x_i) \end{array}$$

La aplicación P está bien definida, pues si $(z_i)_i$ es otra familia acotada tal que $[x_i] = [z_i]$, entonces $\lim_{\mathcal{W}} (x_i - z_i) = 0$, y por tanto es $w^*\text{-}\lim_{\mathcal{W}} (x_i - z_i) = 0$.

Es inmediato de (6) que $P(X_{\mathcal{W}}) = J(X^{**})$. Veamos ahora que P es una proyección, esto es, que $P^2 = P$. Tomemos un $[y_i] \in X_{\mathcal{W}}$, y sean $x'' = w^*\text{-}\lim_{\mathcal{W}} y_i$, y $[x_i] = Jx''$, donde el representante (x_i) es exactamente el dado en (5). Por (6), se cumple $w^*\text{-}\lim_{\mathcal{W}} x_i = x''$, y así

$$P^2([y_i]) = P(Jx'') = P([x_i]) = J(w^*\text{-}\lim_{\mathcal{W}} x_i) = Jx'' = [x_i].$$

Ya tenemos que P es proyección, y en consecuencia, $\|P\| \geq 1$. Tomemos un $[x_i] \in X_{\mathcal{W}}$ cualquiera. Se verifica:

$$\|P([x_i])\| = \|J(w^*\text{-}\lim_{\mathcal{W}} x_i)\| = \|w^*\text{-}\lim_{\mathcal{W}} x_i\| \leq \lim_{\mathcal{W}} \|x_i\| = \big\|[x_i]\big\|.$$

Entonces, $\|P\| = 1$. El resto del teorema es inmediato. $\square$

Observación. Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, sería interesante encontrar un ultrafiltro $\mathcal{U}$ e isometrías $J_X : X^{**} \longrightarrow X_{\mathcal{U}}$ y $J_Y : Y^{**} \longrightarrow Y_{\mathcal{U}}$ tales que el siguiente diagrama fuese conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X_{\mathcal{U}} \arrow[r, "T_{\mathcal{U}}"] & Y_{\mathcal{U}} \\ X^{**} \arrow[u, "J_X"] \arrow[r, "T^{**}"'] & Y^{**} \arrow[u, "J_Y"'] \end{tikzcd} \tag{7}$$

Varios de los resultados que veremos en las secciones dedicadas a los operadores supertauberianos y cosupertauberianos podrían haberse logrado con el diagrama (7). Veamos un ejemplo: si T es supertauberiano, obtendríamos que T^{**} también es supertauberiano aplicando la conmutatividad de (7) –es decir, $T_{\mathcal{U}} J_X = J_Y T^{**}$– y las siguientes propiedades de los operadores supertauberianos:

i) las isometrías son operadores supertauberianos;
ii) la composición de operadores supertauberianos es supertauberiana;
iii) si la composición ST es supertauberiana, entonces T es supertauberiano;
iv) dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$ cualquiera, si T es supertauberiano entonces $T_{\mathcal{U}}$ también lo es.

Sin embargo, la isometría J del teorema 1.56 no es canónica. En otras palabras, la inmersión de X^{**} en $X_{\mathcal{W}}$ depende de las ε-isometrías elegidas durante la construcción. Este hecho plantea dificultades para la conmutatividad del diagrama (7). En el siguiente ejemplo, mostramos un espacio de Banach X, un ultrafiltro $\mathcal{V}$ sobre el conjunto de índices I especificado en (2), y dos isometrías J_1 y J_2 construídas según el patrón del teorema 1.56, que sumergen a X^{**} en $X_{\mathcal{V}}$. Probaremos que el operador identidad $I_X \in \mathcal{B}(X)$ cumple $J_2 {I_X}^{**} \neq I_{X_{\mathcal{V}}} J_1$, esto es, no verifica la conmutatividad de (7).

Ejemplo: sea el espacio de Banach c_0 de las sucesiones convergentes a cero. Como en (2), tomemos el conjunto de índices I dado por todas las ternas

$$i = (M_i, F_i, \varepsilon_i)$$

donde $0 < \varepsilon_i < 1$, y M_i y F_i son subespacios de dimensión finita de ℓ_∞ y ℓ_1 respectivamente. Como en el teorema 1.56, establecemos una relación de orden en I –véase (3)–, y tomamos un ultrafiltro $\mathcal{V}$ sobre I dominando al filtro generado por la base $\{C_i : i \in I\}$ –véase (4)–.

Para cada índice $i \in I$ tomamos una ε_i-isometría $T_i : M_i \longrightarrow c_0$ verificando $T_i|_{M_i \cap c_0} = id|_{M_i \cap c_0}$ y $G(f) = f(T_i G)$ para todo $f \in F_i$ y todo $G \in M_i$. Probemos que para todo $i \in I$ existe un $n_i \in \mathbf{N}$ tal que para cada $G \in S_{M_i}$ se cumple

$$|(T_i G)_n| < \varepsilon_i/10 \qquad \text{para todo} \quad n \geq n_i, \tag{8}$$

donde $(T_i G)_n$ es la coordenada n-ésima de $T_i G \in c_0$.

Sea $\{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ una $\varepsilon_i/40$-red de S_{M_i}. Como $T_i G_k \in c_0$, existe un $n_i \in \mathbf{N}$ tal que

$$|(T_i G_k)_n| < \varepsilon_i/40 \qquad \text{para todo} \quad n \geq n_i \quad \text{y} \quad k = 1, \dots m.$$

Sea G un elemento cualquiera de S_{M_i}. Entonces existe un G_k de la anterior red tal que $\|G - G_k\|_\infty < \varepsilon_i/40$, y como T_i es ε_i-isometría, entonces

$\|T_i(G - G_k)\|_\infty < (1 + \varepsilon_i)\varepsilon_i/40$. Así, teniendo en cuenta (8) se llega a que

$$|(T_i G)_n| < \varepsilon_i/10, \qquad \text{para todo} \quad n \geq n_i,$$

tal como queríamos ver.

Ahora, para cada $i \in I$ consideremos los siguientes subespacios de dimensión finita:

$$\tilde{M}_i = \langle M_i, e_1, e_2, \ldots, e_{n_i} \rangle \subset \ell_\infty$$
$$\tilde{F}_i = \langle F_i, e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n_i} \rangle \subset \ell_1.$$

El principio de reflexividad local nos da una ε_i-isometría $\tilde{T}_i : \tilde{M}_i \longrightarrow c_0$ con la propiedad de que no modifica las n_i primeras coordenadas de cada elemento de $\tilde{M}_i$, es decir:

$$\tilde{T}_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_i}, \alpha_{n_i+1}, \overset{\infty}{\ldots}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_i}, \beta_{n_i+1}, \beta_{n_i+2}, \overset{\infty}{\ldots}).$$

Escribamos $S_i = \tilde{T}_i|_{M_i}$. Fijémonos en que S_i es una ε_i-isometría en las condiciones del principio de reflexividad local respecto de los subespacios M_i y F_i.

Según el teorema 1.56, las dos aplicaciones J_1 y J_2 siguientes son dos modos diferentes de sumergir isométricamente a $c_o^{**} = \ell_\infty$ en $(c_0)_\mathcal{V}$:

$$\begin{array}{rccc} J_1 : & \ell_\infty & \longrightarrow & (c_0)_\mathcal{V} \\ & G & \mapsto & [G_i] \end{array}$$

donde

$$G_i = \begin{cases} T_i G & \text{si } G \in M_i \\ 0 & \text{si } G \notin M_i \end{cases}$$

y

$$\begin{array}{rccc} J_2 : & \ell_\infty & \longrightarrow & (c_0)_\mathcal{V} \\ & G & \mapsto & [G_i] \end{array}$$

donde

$$G_i = \begin{cases} S_i G & \text{si } G \in M_i \\ 0 & \text{si } G \notin M_i \end{cases}$$

Consideremos ahora el elemento $G = (1, 1, 1, \overset{\infty}{\ldots}) \in \ell_\infty$.

Si $G \in M_i$, tenemos

$$|(S_i G)_{n_i}| - |(T_i G)_{n_i}| > 1 - \varepsilon_i/10 > 1/2$$

lo cual significa que para todos los índices j tal que $G \in M_j$, se cumple

$$\|T_j G - S_j G\|_\infty \geq 1/2;$$

esto asegura que $J(G) \neq Q(G)$, y teniendo en cuenta que $(I_{c_0})_\mathcal{U} = I_{c_{0\mathcal{U}}}$ e $I_{c_0}{}^{**} = I_{c_0{}^{**}}$ son las respectivas identidades sobre $c_{0\mathcal{U}}$ y $c_0{}^{**}$, obtenemos que el siguiente diagrama no es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
(c_0)_{\mathcal{V}} & \xrightarrow{id} & (c_0)_{\mathcal{V}} \\
J_1 \Big\uparrow & & \Big\uparrow J_2 \\
\ell_\infty & \xrightarrow[id]{} & \ell_\infty
\end{array}$$

En [24], Heinrich consigue unos resultados que, si bien guardan cierto paralelismo con nuestros deseos de conmutatividad del diagrama (7), no nos han servido para conseguir los resultados que esperábamos obtener de la conmutatividad de (7). No obstante, los citados resultados de Heinrich siguen interesándonos por su conexión con los operadores super débilmente compactos.

Si F es un subespacio cerrado de X, denotaremos $\imath_F$ a la inclusión de F en X, y por q_F a la aplicación cociente de X en X/F.

Heinrich extiende el concepto de *representación finita de espacios* a operadores.

Definición 1.57 [24; def.1.1] *Se dice que el operador $T_0 \in \mathcal{B}(X_0, Y_0)$ es* finitamente representable *en el operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, si para todo $\varepsilon > 0$ y subespacios $M_0 \subset X_0$, $N_0 \subset Y_0$ tales que $\dim M_0 < \infty$ y $\dim Y_0/N_0 < \infty$, existen subespacios $M \subset X$, $N \subset Y$ e ε-isometrías biyectivas $V : M_0 \longrightarrow M$ y $W : Y/N \longrightarrow Y_0/N_0$ tales que*

$$\|q_{N_0} T_0 \imath_{M_0} - W q_N T \imath_M V\| < \varepsilon.$$

En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta salvo ε:

$$\begin{array}{ccccccc}
M & \xrightarrow{\imath_M} & X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{q_N} & Y/N \\
V \Big\uparrow & & & & & & \Big\downarrow W \\
M_0 & \xrightarrow[\imath_{M_0}]{} & X_0 & \xrightarrow[T_0]{} & Y_0 & \xrightarrow[q_{N_0}]{} & Y_0/N_0
\end{array}$$

Se demuestra que un espacio X_0 es f.r. en X si y sólo si el operador identidad I_{X_0} es f.r. en I_X [24; prop.3.2]. Siguiendo unas técnicas constructivas similares a las del teorema 1.56, Heinrich [24; tma.1.2] obtiene una caracterización mediante ultrapotencias para la representación finita de operadores, tal como indicaremos en la siguiente proposición. Diremos que $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es una *suprayección métrica* si el operador inducido $\widehat{T} : X/N(T) \longrightarrow T(X)$ es una isometría. Cualquier aplicación cociente es una suprayección métrica.

Proposición 1.58 [24; tma.1.2] *El operador $T_0 \in \mathcal{B}(X_0, Y_0)$ es finitamente representable en $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ si y sólo si existen un ultrafiltro $\mathcal{U}$, una isometría $J : X_0 \longrightarrow X_{\mathcal{U}}$ y una suprayección métrica $Q : Y_{\mathcal{U}} \longrightarrow Y^{**}$ tales que*

$$QT_{\mathcal{U}}J = \imath_Y T_0,$$

donde $\imath_Y$ es la inclusión natural de Y en Y^{**}.

Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X_{\mathcal{U}} \arrow[r, "T_{\mathcal{U}}"] & Y_{\mathcal{U}} \arrow[d, "Q"] \\
X_0 \arrow[u, "J"] \arrow[r, "\imath_Y T_0"'] & {Y_0}^{**}
\end{tikzcd}$$

En particular, para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$, el operador $T_{\mathcal{U}}$ es f.r. en T.

Haciendo uso del principio de reflexividad local, Heinrich [24; lema 4.1] demuestra que cada operador T^{**} es f.r. en T, y como consecuencia de la proposición 1.58, existen un ultrafiltro $\mathcal{U}$, una isometría $J : X^{**} \longrightarrow X_{\mathcal{U}}$ y una suprayección métrica $Q : Y_{\mathcal{U}} \longrightarrow Y^{****}$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X_{\mathcal{U}} \arrow[r, "T_{\mathcal{U}}"] & Y_{\mathcal{U}} \arrow[d, "Q"] \\
X^{**} \arrow[u, "J"] \arrow[r, "\imath_{Y^{**}} T^{**}"'] & Y^{****}
\end{tikzcd}$$

donde $\imath_{Y^{**}}$ es la inmersión natural de Y^{**} en Y^{****}.

Capítulo 2

OPERADORES SEMI-FREDHOLM Y OPERADORES TAUBERIANOS.

En este capítulo quedarán caracterizados los operadores compactos $K \in \mathcal{B}(X,Y)$ por la propiedad $K_{\mathcal{U}}(X_{\mathcal{U}}) \subset Y$, e identificaremos a los operadores semi-Fredholm superiores $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ como aquéllos para los que el núcleo $N(T_{\mathcal{U}})$ tiene dimensión finita, o bien $T_{\mathcal{U}}(X_{\mathcal{U}} \setminus X) \subset Y_{\mathcal{U}} \setminus Y$. En este punto las ultraprotencias reiteradas jugarán un papel importante. Veremos cómo este tipo de caracterizaciones permite obtener resultados clásicos acerca de estos operadores. Estudiaremos también las ultrapotencias de los operadores semi-Fredholm inferiores. Así mismo, veremos cómo las caracterizaciones perturbativas de Lebow y Schechter pueden ser aprovechadas por las técnicas de ultraproducto.

Los operadores *tauberianos* son aquellos operadores $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ que cumplen $T^{**}(X^{**} \setminus X) \subset Y^{**} \setminus Y$. En analogía con la definición, obtenemos la siguiente caracterización en términos de ultrapotencias: $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es tauberiano si y sólo si $T_{\mathcal{U}}(X_{\mathcal{U}} \setminus X_{\mathcal{U}}^{w}) \subset Y_{\mathcal{U}} \setminus Y$, donde $X_{\mathcal{U}}^{w}$ es el subespacio cerrado de $X_{\mathcal{U}}$ formado por los elementos con representantes débilmente convergentes según $\mathcal{U}$. Es conocido que el ideal de los operadores débilmente compactos es una clase de perturbación para el semigrupo de los operadores tauberianos. Los os $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ débilmente compactos quedarán caracterizados por la propiedad $T(X_{\mathcal{U}} \setminus X_{\mathcal{U}}^{w}) \subset Y_{\mathcal{U}}^{w}$. Probaremos también que los operadores $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ para los que $N(T^{**}) = N(T)$, son aquéllos que verifican $N(T_{\mathcal{U}}) \subset X_{\mathcal{U}}^{w}$, para algún (equivalentemente, para todo) ultrafiltro $\mathcal{U}$. Esta última propiedad constituye en sí misma una demostración alternativa al resultado central de Kalton y Wilansky en [32], en el que se da una caracterización de tipo sucesional para los operadores $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ que cumplen $N(T^{**}) \subset X$.

2.1 Operadores semi-Fredholm.

Definición 2.1 *Se dice que el operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es compacto si $T(B_X)$ es relativamente compacto.*

Proposición 2.2 [15; pg.483] *El subconjunto de los operadores compactos de X en Y es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(X,Y)$.*

Denotaremos por $Co(X,Y)$ a la clase de todos los operadores compactos de X en Y.

Si $\mathcal{B}$ es la clase de todos los operadores entre espacios de Banach, se dice que una subclase $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$ es un *ideal de operadores* si $\mathcal{A}$ contiene a todos los operadores de rango finito, y sus componentes sobre espacios de Banach, $\mathcal{A}(X,Y) = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}(X,Y)$, verifican:

i) si $S, T \in \mathcal{A}(X,Y)$ entonces $S+T \in \mathcal{A}(X,Y)$;

ii) si $T \in \mathcal{B}(Z,X)$, $R \in \mathcal{B}(Y,W)$ y $S \in \mathcal{A}(X,Y)$, entonces $RST \in \mathcal{A}(Z,W)$.

Se dice que el ideal $\mathcal{A}$ es *cerrado* si cada componente $\mathcal{A}(X,Y)$ es cerrada en $\mathcal{B}(X,Y)$. Se llama *inyectivo* a todo ideal $\mathcal{A}$ para el que, si S y T son dos operadores tales que $ST \in \mathcal{A}$ y S es inyectivo de rango cerrado, entonces $T \in \mathcal{A}$. Se dice que $\mathcal{A}$ es suprayectivo cuando, para todo par de operadores S, T tales que $ST \in \mathcal{A}$ y T es suprayectivo, entonces $S \in \mathcal{A}$. Se dice que un ideal de operadores $\mathcal{A}$ es *regular* si para todo operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ tal que $\imath_Y T \in \mathcal{A}(X,Y^{**})$, se cumple $T \in \mathcal{A}$, donde $\imath_Y$ es la inclusión natural de Y en Y^{**}. La clase de todos los operadores compactos constituye un ideal de operadores cerrado, inyectivo y suprayectivo [41; 1.4] que denotaremos Co.

Las caracterizaciones clásicas más comunes de los operadores compactos son:

Proposición 2.3 [10; pg.1] *Sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(a) *el operador T es compacto;*

(b) *si $A \subset X$ es acotado, entonces TA es relativamente compacto en Y;*

(c) *si $(x_n)_n$ es una sucesión acotada en X, entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que (Tx_{n_k}) converge.*

Proposición 2.4 [10; tma.1.2.1] *Sea un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Se verifica que T es compacto si y sólo si T^* es compacto.*

Usando el lenguaje de las ultrapotencias, los operadores compactos admiten la siguiente caracterización.

Proposición 2.5 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Entonces T es compacto si y sólo si $T_{\mathcal{U}}(X_{\mathcal{U}}) \subset Y$.*

Demostración. Por la definición 2.1 y proposición 1.28, T es un operador compacto si y sólo si $(TB_X)_{\mathcal{U}} \subset Y$, y como $(TB_X)_{\mathcal{U}} = T_{\mathcal{U}}(B_{X_{\mathcal{U}}})$, entonces es claro que T es compacto si y sólo si $T_{\mathcal{U}}(X_{\mathcal{U}}) \subset Y$. □

De la anterior proposición se obtiene otra caracterización de los operadores compactos mediante ultrapotencias.

Proposición 2.6 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, y el operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(a) *$T \in Co(X,Y)$;*

(b) *$T_{\mathcal{U}} \in Co(X_{\mathcal{U}}, Y_{\mathcal{U}})$.*

(b)⇒(a) Basta considerar que $T_{\mathcal{U}}|_X = T$, y que la restricción de todo operador compacto es también compacto.

(a)⇒(b) Si T es compacto, por la proposición anterior se cumple

$$T_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}(X_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}) \subset Y. \tag{1}$$

Por otro lado, el teorema de iteración 1.22 y la proposición 1.33 identifican al operador

$$(T_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}} : (X_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}} \longrightarrow (Y_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}}$$

con el operador

$$T_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} : X_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \longrightarrow Y_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}.$$

Entonces, de (1) tenemos $(T_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}}\big((X_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}}\big) \subset Y$, lo que demuestra que $T_{\mathcal{U}}$ es compacto, según la proposición 2.5. □

Definición 2.7 *Se dice que el operador $T \in B(X,Y)$ es* semi-Fredholm superior *si su núcleo $N(T)$ es de dimensión finita y su rango es cerrado.*

Definición 2.8 *Se dice que el operador $T \in B(X,Y)$ es* semi-Fredholm inferior *si su conúcleo $Y/\overline{R(T)}$ es de dimensión finita y su rango $R(T)$ es cerrado.*

Al subconjunto de los operadores Semi-Fredholm superiores de $\mathcal{B}(X,Y)$ lo denotaremos por $F_+(X,Y)$ y al de los operadores Semi-Fredholm inferiores, lo denotaremos por $F_-(X,Y)$. Si el operador T es Semi-Fredholm superior o Semi-Fredholm inferior, diremos respectivamente que T *es* F_+ o F_-.

Entre los operadores F_+ y los operadores F_- se da la siguiente relación de dualidad:

Proposición 2.9 [10; 1.3.1] *Sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Entonces se verifica:*
a) T pertenece a $F_+(X,Y)$ si y sólo si T^* pertenece a $F_-(Y^*,X^*)$;
b) T pertenece a $F_-(X,Y)$ si y sólo si T^* pertenece a $F_+(Y^*,X^*)$.

Las clases $F_+(X,Y)$ y $F_-(X,Y)$ son abiertas en $\mathcal{B}(X,Y)$. Otra de las principales propiedades de los operadores semi-Fredholm es su estabilidad bajo perturbaciones por operadores compactos.

Proposición 2.10 [10; 1.3.7] *Sean los operadores $T \in F_+(X,Y)$, $S \in F_-(X,Y)$ y $K \in Co(X,Y)$. Entonces $T+K$ es F_+, y $S+K$ es F_-.*

Un resultado mucho más fuerte que el anterior, es la siguiente caracterización perturbativa para operadores semi-Fredholm obtenida por Lebow y Schechter.

Teorema 2.11 [35] *Sea un oa $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Entonces:*
a) $T \in F_+(X,Y)$ si y sólo si para todo operador $K \in Co(X,Y)$ se cumple $\dim N(T+K) < \infty$;
b) $T \in F_-(X,Y)$ si y sólo si para todo operador $K \in Co(X,Y)$ se cumple $\dim Y/\overline{R(T+K)} < \infty$.

Las siguientes proposiciones caracterizan mediante técnicas de ultrapotencia a los operadores compactos, F_+ y F_-.

Proposición 2.12 *Sea un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro cualquiera. Entonces son equivalentes:*
(a) $T \in F_+(X,Y)$;
(b) $N(T) = N(T_\mathcal{U})$;
(c) $T_\mathcal{U} \in F_+(X_\mathcal{U}, Y_\mathcal{U})$;
(d) $\dim N(T) < \infty$ *y* $R(T)_\mathcal{U} = R(T_\mathcal{U})$.

Demostración.
(a)⇒(b) Supongamos que T es F_+. Entonces $\dim N(T) < \infty$, y por la proposición 1.28, $N(T) = N(T)_\mathcal{U}$. Por otro lado, $R(T)$ es cerrado, luego por la proposición 1.37, $N(T)_\mathcal{U} = N(T_\mathcal{U})$. En consecuencia, se cumple $N(T) = N(T_\mathcal{U})$.
(b)⇒(c) Si $N(T) = N(T_\mathcal{U})$, entonces $N(T)_\mathcal{U} = N(T_\mathcal{U})$, luego por proposición 1.37, $R(T_\mathcal{U})$ es cerrado. Y como $N(T) = N(T)_\mathcal{U}$, por la proposición 1.28 se tiene $\dim N(T)_\mathcal{U} = \dim N(T_\mathcal{U}) < \infty$. Entonces $T_\mathcal{U}$ es F_+.

Las implicaciones (c)⇒(d) y (d)⇒(a) se siguen inmediatamente aplicando la proposición 1.38. □

Veamos una segunda caracterización mediante ultrapotencias de los operadores F_+.

Teorema 2.13 *Sea un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro cualquiera. Entonces son equivalentes:*
(a) $T \in F_+(X,Y)$;
(b) $T_\mathcal{U}(X_\mathcal{U} \setminus X) \subset Y_\mathcal{U} \setminus Y$;
(c) $N(T_\mathcal{U}) \subset X$;
(d) $\dim N(T_\mathcal{U}) < \infty$.

Demostración.
(a)⇒(b) Supongamos que T es F_+, y sea $[x_i]$ un elemento cualquiera de $X_\mathcal{U}$ tal que $T_\mathcal{U}([x_i]) \in Y$. Como $R(T)$ es cerrado, por la proposición 1.38 se verifica $R(T) = R(T_\mathcal{U}) \cap Y$. Entonces existe un $x \in X$ tal que $Tx = [Tx_i]$. Consecuentemente, $[x - x_i]$ pertenece a $N(T_\mathcal{U})$, pero por la proposición anterior, $N(T_\mathcal{U})$ es igual a $N(T)$, luego $[x - x_i]$ pertenece a X, y así $[x_i] \in X$.
(b)⇒(c) Inmediato.
(c)⇒(d) Para todo operador T siempre se verifica

$$N(T) = N(T)_\mathcal{U} \cap X = N(T_\mathcal{U}) \cap X. \tag{2}$$

Si el operador T verifica además la hipótesis (c), entonces de (2) se obtiene:

$$N(T) = N(T)_\mathcal{U} = N(T_\mathcal{U})$$

de donde se desprende, por la proposición 1.28, que $N(T_\mathcal{U})$ tiene dimensión finita.
(d)⇒(a) Si $N(T_\mathcal{U})$ es de dimensión finita, entonces $\dim N(T) < \infty$, luego tan sólo nos falta probar que $R(T)$ es cerrado. Supongamos que $R(T)$ es no

cerrado. Como $\dim N(T) < \infty$, por el teorema de Hahn-Banach existe un subespacio cerrado H de X verificando:

$$X = N(T) \oplus H. \tag{3}$$

Entonces $T|_H \colon H \longrightarrow Y$ es un operador inyectivo de rango no cerrado. Esto permite encontrar una sucesión (x_n) en H tal que $\|x_n\| = 1$ y $\|Tx_n\| \leq 1/n$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Veamos que la sucesión (x_n) no contiene ninguna subsucesión convergente: si (x_{n_k}) fuese una subsucesión convergente de (x_n) y $x = \lim_k x_{n_k}$, entonces, como $\|Tx_n\| \leq 1/n$ para todo $n \in \mathbf{N}$, tendríamos que x pertenece a $N(T)$. Pero H es completo y cada x_n pertenece a H, luego $x \in H \cap N(T)$, y de acuerdo con (3), x ha de ser igual a cero. Esto se contradice con que $x = \lim_k x_{n_k}$ y cada x_n es de norma uno.

Ahora, como (x_n) no tiene subsucesiones convergentes, existe un número real $\delta > 0$ tal que

$$\|x_k - x_m\| \geq \delta \qquad \text{si} \quad k \neq m. \tag{4}$$

Extraigamos de la sucesión (x_n) infinitas subsucesiones disjuntas:

$$(x_1^n)_n,\ (x_2^n)_n,\ (x_3^n)_n, \overset{\infty}{\ldots\ldots}$$

Sea $\{I_n : n \in \mathbf{N}\}$ una partición de I disjunta con $\mathcal{U}$. Por cada una de las anteriores sucesiones $(x_k^n)_n$ tomemos $\mathbf{z}_k := [z_k^i]_i \in X_{\mathcal{U}}$, donde $z_k^i = x_k^n$ si $i \in I_n$.

Ahora, como $\lim_n Tx_k^n = 0$ para todo $k \in \mathbf{N}$, entonces $\lim_{\mathcal{U}(i)} Tz_k^i = 0$, y de ahí, los elementos $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \overset{\infty}{\ldots\ldots}$ pertenecen a $N(T_{\mathcal{U}}) \cap B_{X_{\mathcal{U}}}$.

Por otro lado, dados dos elementos distintos $\mathbf{z}_r$ y $\mathbf{z}_s$, por (4) tenemos:

$$\lim_{\mathcal{U}(i)} \|z_k^i - z_s^i\| \geq \delta,$$

y en consecuencia,

$$\big\|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_s\big\| \geq \delta,$$

lo que prueba que $N(T_{\mathcal{U}}) \cap B_{X_{\mathcal{U}}}$ es no compacto, y por tanto $N(T_{\mathcal{U}})$ es de dimensión infinita. Este hecho se contradice con la hipótesis de partida. □

Existe otra caracterización clásica para los operadores F_+ cuya demostración se puede encontrar, con alguna variante, en [10; 1.3.2], y que a continuación enunciamos:

Proposición 2.14 *Sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Entonces son equivalentes:*

(a) *$T \in F_+(X, Y)$;*

(b) *X no contiene ninguna sucesión acotada (x_n) sin subsucesiones convergentes verificando que (Tx_n) sea convergente.*

Escribiremos $X = M \oplus N$ si M y N son subespacios de X con $M \cap N = 0$ y $X = M + N$.

En el estudio de las ultrapotencias de los operadores F_-, se hace imprescindible el teorema de Kato, cuyo enunciado dice:

Proposición 2.15 [10; 3.2.4] *Sean $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ y N un subespacio cerrado de Y tales que $R(T) \oplus N$ es cerrado. Entonces $R(T)$ es cerrado.*

En analogía con las caracterizaciones 2.12 y 2.13 de los operadores F_+, obtenemos la siguiente caracterización de los operadores F_- usando ultrapotencias.

Proposición 2.16 *Sea un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Son equivalentes:*
(a) $T \in F_-(X,Y)$;
(b) $\dim Y \big/ R(T) < \infty$;
(c) $\dim Y_{\mathcal{U}} \big/ R(T_{\mathcal{U}}) < \infty$;
(d) $T_{\mathcal{U}} \in F_-(X_{\mathcal{U}}, Y_{\mathcal{U}})$.

Demostración.
(a)⇒(b) Por la propia definición de operador F_-.
(b)⇒(c) Como $\dim Y \big/ R(T) < \infty$, por el tma. de Kato se tiene que $R(T)$ es cerrado, y por tanto $R(T_{\mathcal{U}})$ también es cerrado. Ahora, usando consecutivamente la proposición 1.38, el lema 1.30 y proposición 1.28, obtenemos

$$\frac{Y_{\mathcal{U}}}{R(T_{\mathcal{U}})} \equiv \frac{Y_{\mathcal{U}}}{R(T)_{\mathcal{U}}} \equiv \left[\frac{Y}{R(T)}\right]_{\mathcal{U}} \equiv \frac{Y}{R(T)} \tag{5}$$

de donde se deduce que $\dim Y_{\mathcal{U}} \big/ R(T_{\mathcal{U}}) < \infty$.
(c)⇒(d) De nuevo, por el tma. de Kato.
(d)⇒(a) Si $T_{\mathcal{U}}$ es F_-, por dualidad (proposición 2.9) ${T_{\mathcal{U}}}^*$ es F_+, y como ${T^*}_{\mathcal{U}} = {T_{\mathcal{U}}}^*|_{{X^*}_{\mathcal{U}}}$, por la proposición 2.12 T^* también es F_+, y por dualidad, T es F_-.
□

Dado un operador cualquiera $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, el operador inducido

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & Y \big/ \overline{R(T)} & \longrightarrow & Y_{\mathcal{U}} \big/ \overline{R(T_{\mathcal{U}})} \\ & y + \overline{R(T)} & \mapsto & [y] + \overline{R(T_{\mathcal{U}})} \end{array}$$

es inyectivo debido a que $\overline{R(T)} = \overline{R(T_{\mathcal{U}})} \cap Y$, según se demostróen la proposición 1.39. El operador φ proporciona otra interesante caracterización para los operadores F_-:

Proposición 2.17 *Sea el operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*
(a) $T \in F_-(X,Y)$;
(b) $R(T_{\mathcal{U}}) + Y = Y_{\mathcal{U}}$;
(c) $\overline{R(T_{\mathcal{U}})} + Y = Y_{\mathcal{U}}$;
(d) *la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & Y \big/ \overline{R(T)} & \longrightarrow & Y_{\mathcal{U}} \big/ \overline{R(T_{\mathcal{U}})} \\ & y + \overline{R(T)} & \mapsto & [y] + \overline{R(T_{\mathcal{U}})} \end{array}$$

es suprayectiva.

Demostración.
(a)⇒(b) Supongamos T es F_-, es decir, $R(T)$ es cerrado y $\dim Y/R(T) < \infty$. Entonces existe un subespacio de dimensión finita $H \subset Y$ tal que $Y = R(T) \oplus H$. Teniendo en cuenta que $\dim H < \infty$ equivale a $H = H_{\mathcal{U}}$, y que, por ser $R(T)$ cerrado se cumple la igualdad $R(T_{\mathcal{U}}) = R(T)_{\mathcal{U}}$, podemos escribir

$$Y_{\mathcal{U}} = [R(T) \oplus H]_{\mathcal{U}} = R(T)_{\mathcal{U}} \oplus H_{\mathcal{U}} = R(T_{\mathcal{U}}) \oplus H,$$

de donde se sigue que $Y_{\mathcal{U}} = R(T_{\mathcal{U}}) + Y$.

Las implicaciones (b)⇒(c) y (c)⇒(d) son triviales.
(d)⇒(a) Recordemos que los isomorfismos isométricos canónicos $\phi_1 : R(T_{\mathcal{U}})^\perp \longrightarrow \big[Y_{\mathcal{U}}/\overline{R(T_{\mathcal{U}})}\big]^*$ y $\phi_2 : [Y/\overline{R(T)}]^* \longrightarrow R(T)^\perp$ vienen dados por

$$\phi_1(\mathbf{f}) := \mathbf{h}, \qquad \text{donde} \quad \mathbf{h}\big(\mathbf{y} + \overline{R(T_{\mathcal{U}})}\big) := \mathbf{f}(\mathbf{y})$$
$$\phi_2(\mathbf{g}) := \mathbf{g}\, q_{\overline{R(T)}}.$$

(véase por ejemplo, [37; tma.III.3.3]).

Teniendo en cuenta las igualdades $R(T)^\perp = N(T^*)$ y $R(T_{\mathcal{U}})^\perp = N({T_{\mathcal{U}}}^*)$, la aplicación φ induce el operador $\psi := \phi_2 \varphi^* \phi_1 : N({T_{\mathcal{U}}}^*) \longrightarrow N(T^*)$, donde

$$\psi(\mathbf{f}) = \mathbf{f}|_Y, \qquad \text{para todo} \quad \mathbf{f} \in N({T_{\mathcal{U}}}^*). \tag{6}$$

Por otro lado, se verifica

$$N(T^*) \subset N(T^*)_{\mathcal{U}} \subset N({T^*}_{\mathcal{U}}) \subset N({T_{\mathcal{U}}}^*). \tag{7}$$

Supongamos que φ es suprayectivo. Entonces el operador suprayectivo ψ es un isomorfismo, y de acuerdo con (6), se sigue $N({T_{\mathcal{U}}}^*) = N(T^*)$. De la igualdad previa y de (7) se obtiene $N({T^*}_{\mathcal{U}}) = N(T^*)$, luego por la proposición 2.12, T^* es F_+, y por dualidad, T es F_-. □

Observación. De la fórmula (7), tenemos que si $N(T^*) = N({T_{\mathcal{U}}}^*)$, entonces T^* es F_+, luego T es F_-; y si T es F_-, por la proposición 2.12 se cumple $N(T^*) = N({T^*}_{\mathcal{U}})$, pero también es cierta la igualdad $N(T^*) = N({T_{\mathcal{U}}}^*)$, aunque las herramientas necesarias para probarla se encuentran en la sección 3.2 dedicada a los operadores cosupertauberianos. Allí se obtiene por un lado, que un operador cosupertauberiano T queda caracterizado por la propiedad $N({T_{\mathcal{U}}}^*) = N({T^*}_{\mathcal{U}})$, y por otro lado, que un operador F_- es un caso particular de operador cosupertauberiano. De aquí se desprende que si T es F_-, entonces $N(T^*) = N({T_{\mathcal{U}}}^*)$.

Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, hemos visto en el teorema 2.13 que el contenido $T_{\mathcal{U}}(X_{\mathcal{U}} \setminus X) \subset Y_{\mathcal{U}} \setminus Y$ caracteriza a T como un operador F_+. Analogamente, la proposición 2.17 dice que T es F_- si y sólo si se verifica $R(T_{\mathcal{U}}) + Y = Y_{\mathcal{U}}$. Es interesante ver cómo el lenguaje desarrollado por las mencionadas caracterizaciones permite volver a demostrar ciertas propiedades, aunque conocidas, de los operadores F_+ y F_-. Comencemos por la estabilidad de los operadores F_+ y F_- bajo perturbaciones compactas.

Proposición 2.18 *Si $K \in Co(X,Y)$ y $T \in F_+(X,Y)$ entonces $T+K \in F_+(X,Y)$.*

Demostración. Sea $[x_i] \in X_\mathcal{U} \setminus X$. Como T es F_+ y K es compacto, entonces $K_\mathcal{U}[x_i] \in X$ y $T_\mathcal{U}[x_i] \in X_\mathcal{U} \setminus X$. Ahora, $(T+K)_\mathcal{U}[x_i] \in X_\mathcal{U} \setminus X$, lo que prueba que $T+K$ es F_+. □

Proposición 2.19 *Si $K \in Co(X,Y)$ y $T \in F_-(X,Y)$ entonces $T+K \in F_-(X,Y)$.*

Demostración. Sea $[y_i] \in Y_\mathcal{U}$. Por ser T un operador F_-, existen $y \in Y$ y $[x_i] \in X_\mathcal{U}$ tales que $[y_i] = T_\mathcal{U}[x_i] + y$. Pero K es compacto, luego existe un $y' \in Y$ tal que $K_\mathcal{U}[x_i] = y'$.

Entonces $[y_i] = (T+K)_\mathcal{U}[x_i] + y - y'$, luego por la proposición 2.17, $T+K$ es F_-. □

Proposición 2.20 *Si $T \in F_+(X,Y)$ y $S \in F_+(Y,Z)$, entonces $ST \in F_+(X,Z)$.*

Demostración. Haciendo uso de la caracterización 2.13, obtenemos

$$(ST)_\mathcal{U}(X_\mathcal{U} \setminus X) = S_\mathcal{U} T_\mathcal{U}(X_\mathcal{U} \setminus X) \subset S_\mathcal{U}(Y_\mathcal{U} \setminus Y) \subset Z_\mathcal{U} \setminus Z.$$

□

Proposición 2.21 *Sean dos operadores $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$ tales que $ST \in F_+(X,Z)$. Entonces T es F_+.*

Demostración. Supongamos que T no es F_+. Entonces existe un elemento $[x_i] \in X_\mathcal{U} \setminus X$ tal que $T_\mathcal{U}[x_i] \in Y$.

Ahora, como $T_\mathcal{U}|_X = T$ y $S_\mathcal{U}|_Y = S$, llegamos a

$$(ST)_\mathcal{U}[x_i] = S_\mathcal{U}(T_\mathcal{U}[x_i]) \in Z,$$

lo que contradice que ST es F_+, en virtud del teorema 2.13. □

Las caracterizaciones perturbativas para los operadores F_+ y F_- de Lebow y Schechter (proposición 2.10) encajan bien en el contexto de las técnicas de ultrapotencia. Veamos cómo permiten obtener de un modo directo y relativamente corto las implicaciones $(\mathfrak{a}) \Rightarrow (\mathfrak{b})$ del teorema 2.13 y proposición 2.17.

Proposición 2.22 *Sea un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$.*

a) T es F_+ si y sólo si $T_\mathcal{U}(X_\mathcal{U} \setminus X) \subset Y_\mathcal{U} \setminus Y$;

b) T es F_- si y sólo si $R(T_\mathcal{U}) + Y = Y_\mathcal{U}$.

Demostración.

a) Si T es F_+, nos remitimos a la demostración $(\mathfrak{a}) \Rightarrow (\mathfrak{b})$ del teorema 2.13. Supongamos T no es F_+. Entonces, por la caracterización perturbativa para operadores F_+, existe un operador compacto $K \in \mathcal{B}(X,Y)$ tal que $\dim N(T-K) = \infty$, lo que implica la existencia de un elemento $\mathbf{x} \in$

$\overline{N(T-K)}_{\mathcal{U}} \setminus N(T-K) \subset X_{\mathcal{U}} \setminus X$, por proposición 1.28. Ahora, K compacto y la proposición 2.5 nos dan $K_{\mathcal{U}}\mathbf{x} \in Y$, y de ahí se sigue $T_{\mathcal{U}}\mathbf{x} = K_{\mathcal{U}}\mathbf{x} \in Y$. Por tanto, $T_{\mathcal{U}}(X_{\mathcal{U}} \setminus X) \not\subset Y_{\mathcal{U}} \setminus Y$.

b) Si T es F_-, nos remitimos a la demostración de (a)⇒(b) en la proposición 2.17. Supongamos que T no es F_- y encontremos un elemento $[y_i]$ en $Y_{\mathcal{U}} \setminus [R(T_{\mathcal{U}})+Y]$. Por la caracterización perturbativa para operadores F_-, existe un operador compacto K tal que $\dim Y/\overline{R(T+K)} = \infty$. Así, por la proposición 1.28 existe una familia $(y_i) \in \ell_\infty(I,Y)$ tal que

$$\left[y_i + \overline{R(T+K)}\,\right] \in \left[\frac{Y}{\overline{R(T+K)}}\right]_{\mathcal{U}} \setminus \frac{Y}{\overline{R(T+K)}},$$

de donde resulta que $[y_i] \notin \overline{R(T+K)}_{\mathcal{U}} + Y$, y como $R(T_{\mathcal{U}}+K_{\mathcal{U}}) \subset \overline{R(T+K)}_{\mathcal{U}}$, entonces $[y_i] \notin R(T_{\mathcal{U}}+K_{\mathcal{U}})+Y$. Ahora, de la caracterización para operadores compactos de la proposición 2.5, tenemos $K_{\mathcal{U}}(X_{\mathcal{U}}) \subset Y$, y por tanto $R(T_{\mathcal{U}} + K_{\mathcal{U}}) + Y = R(T_{\mathcal{U}}) + Y$. En consecuencia, $[y_i] \notin R(T_{\mathcal{U}}) + Y$, tal como queríamos demostrar. □

2.2 Operadores tauberianos.

Una clase natural de perturbación asociada a la clase de los operadores tauberianos es el ideal de los operadores débilmente compactos, que seguidamente presentamos.

Definición 2.23 *Se dice que el operador $K \in \mathcal{B}(X,Y)$ es w-*compacto *si $T(B_X)$ es relativamente w-compacto.*

Es inmediato que todo operador compacto es w-compacto. Al conjunto de los operadores w-compactos de $\mathcal{B}(X,Y)$ lo denotaremos por $WCo(X,Y)$. La clase de todos los operadores w-compactos, WCo, es un ideal de operadores cerrado, inyectivo y suprayectivo [41; 1.5] [15; VI.4.4].

Proposición 2.24 [15; VI.4] *T es w-compacto si y sólo si T^* es w-compacto.*

El teorema de Eberlein-Smulian nos proporciona la siguiente caracterización para los operadores w-compactos:

Proposición 2.25 *El operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es w-compacto si y sólo si para toda sucesión acotada $(x_n)_n \subset X$ se verifica que $(Tx_n)_n$ tiene subsucesiones w-convergentes.*

Definición 2.26 [32] *Se dice que el operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es* tauberiano *si $T^{**-1}(Y) \subset X$.*

D.G. Tacon [49] establece el concepto dual de *oa cotauberiano*:

Definición 2.27 [49; pg.65] *Se dice que el operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es* cotauberiano *si T^* es tauberiano.*

Al subconjunto de los operadores tauberianos de $\mathcal{B}(X,Y)$ lo denotaremos por $\mathcal{T}_+(X,Y)$, y al subconjunto de los operadores cotauberianos lo representaremos $\mathcal{T}_-(X,Y)$.

Es inmediato que si T es un operador tauberiano, entonces $N(T^{**}) = N(T)$, de donde se deduce que $N(T)$ es reflexivo. Sin embargo, como ya observaron Kalton y Wilansky [32], la igualdad $N(T^{**}) = N(T)$ no implica que T sea tauberiano. Concretando:

Proposición 2.28 [32] *Sea $T \in B(X,Y)$. Se verifica:*

a) si T es tauberiano, entonces $N(T) = N(T^{**})$;

b) si $N(T) = N(T^{**})$, entonces $N(T)$ es reflexivo;

c) si $N(T)$ es reflexivo y $R(T)$ cerrado, entonces T es tauberiano.

No obstante, es fácil encontrar operadores tauberianos con rango no cerrado. Sirve como ejemplo cualquier operador de rango no cerrado $T \in \mathcal{B}(\ell_2, \ell_2)$. La siguiente proposición da algunas condiciones sobre el rango de un operador T que, junto a la igualdad $N(T) = N(T^{**})$, obligan a que T sea tauberiano.

Proposición 2.29 [32] *Sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(a) *$T \in \mathcal{T}_+(X,Y)$;*

(b) *$N(T) = N(T^{**})$ y $\overline{TB_X} \subset R(T)$;*

(c) *$N(T) = N(T^{**})$ y TB_X es cerrado.*

El resultado central de Kalton y Wilansky en [32] es la siguiente caracterización sucesional de la propiedad $N(T) = N(T^{**})$.

Proposición 2.30 [32; tma.3.1] *Sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(a) *$N(T) = N(T^{**})$;*

(b) *si $(x_n) \in \ell_\infty(X)$ y $\lim_n Tx_n = 0$, entonces (x_n) tiene subsucesiones w-convergentes.*

De aquí se deducen caracterizaciones de los operadores tauberianos en función de la compacidad débil.

Proposición 2.31 [32; tma.3.2] *Sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(a) *$T \in \mathcal{T}_+(X,Y)$;*

(b) *para todo conjunto acotado $C \subset X$ con $T(C)$ relativamente w-compacto, se tiene que C es relativamente w-compacto;*

(c) *para todo conjunto acotado $C \subset X$ con $T(C)$ relativamente compacto, se tiene que C es relativamente w-compacto.*

Un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ se identifica con la restricción de T^{**} a X. Por ello, si T^* es cotauberiano, entonces T es tauberiano. Sin embargo, el recíproco es falso, tal como demuestran T. Alvarez y M. González. En la siguiente proposición, describimos el contraejemplo hallado por los citados autores.

Ejemplo 2.32 [2; prop.5] *Existe un espacio de Banach Z y un operador tauberiano $S \in \mathcal{B}(Z)$ tal que S^{**} no es tauberiano.*

Demostración. Un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, induce otro operador

$$\begin{array}{rccl} T_q : & X^{**}/X & \longrightarrow & Y^{**}/Y \\ & x'' + X & \mapsto & T^{**}x'' + Y. \end{array}$$

Evidentemente, T es tauberiano si y sólo si T_q es inyectivo. Además, no es difícil ver que se puede identificar ${T^{**}}_q = {T_q}^{**}$.

Denotemos por e_n al elemento n-ésimo de norma uno de la base canónica de ℓ_1, y sea X_n el subespacio de ℓ_1 generado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Siguiendo una construcción de Bellenot, se obtiene el espacio de Banach

$$Z := \big\{(x_n) : \; x_n \in X_n, \lim_n \|x_n\|_1 = 0 \quad \text{y} \quad \|(x_n)\|_J < \infty\big\},$$

donde

$$2\|(x_n)\|_J^2 := \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^{k-1}\|x_{n_{i+1}} - x_{n_i}\|_1^2\right) + \|x_{n_k}\|_1^2 : \, n_1 < n_2 < \ldots < n_k\right\}.$$

Sea ahora el operador compacto $T \in \mathcal{B}(\ell_1)$ dado por $T(\alpha_n) := (\alpha_n/n)$. Consideremos el operador

$$\begin{array}{rccl} S : & Z & \longrightarrow & Z \\ & (x_n) & \mapsto & (Tx_n) \end{array}$$

donde $x_n \in X_n$.

Se demuestra que el cociente Z^{**}/Z es isométrico a ℓ_1, lo que permite identificar $Z^{**}/Z \equiv \ell_1$. Bajo la previa identificación se obtiene $S_q \equiv T$.

Obviamente, el operador T es inyectivo, luego S es tauberiano. Por otro lado, T^* es compacto, luego $\overline{R(T^*)}$ es separable. Pero ℓ_∞ no es separable, luego $\overline{R(T^*)} \neq \ell_\infty$, y como $N(T^{**}) = R(T^*)^\perp$, entonces T^{**} no es inyectivo. Las identificaciones $(S^{**})_q \equiv (S_q)^{**} \equiv T^{**}$ demuestran que S^{**} no es tauberiano. □

D.G. Tacon [49; pg.65 (5)] probóque, al contrario que los operadores F_+, el conjunto de los operadores tauberianos $\mathcal{T}(X,Y)$ no es, en general, abierto en $\mathcal{B}(X,Y)$. Veamos un sencillo ejemplo de operador tauberiano en la frontera.

Ejemplo 2.33 [2; pg.1026] *Si X es un espacio no reflexivo, entonces existe un operador tauberiano de $\ell_2(X)$ en $\ell_2(X)$ que no está en la frontera de $\mathcal{T}_+\big(\ell_2(X), \ell_2(X)\big)$.*

Demostración. Consideremos el operador

$$\begin{array}{rccl} T : & \ell_2(X) & \longrightarrow & \ell_2(X) \\ & (x_n) & \mapsto & (x_n/n). \end{array}$$

El operador T es tauberiano, pues T^{**} es inyectivo. Consideremos ahora, para cada $k \in \mathbf{N}$, el operador

$$T_k : \ell_2(X) \longrightarrow \ell_2(X), \qquad k \in \mathbf{N}$$

dado por

$$T_k\big((x_n)\big) = \big(x_1\,,\, x_2/2\,,\, \ldots,\, x_k/k\,,\, 0\,,\, 0\,,\ldots\big)$$

Es inmediato que los operadores T_k no son tauberianos, pues su núcleo no es reflexivo. Por otra parte, $\|T - T_k\| = 1/(k+1)$ para todo $k \in \mathbf{N}$, de donde se sigue que T no pertenece al interior de $\mathcal{T}\big(\ell_2(X), \ell_2(X)\big)$. □

Los operadores tauberianos son estables bajo perturbaciones w-compactas.

Proposición 2.34 [49; pg.64] *Sean $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ y $K \in WCo(X,Y)$.*
a) si $T \in \mathcal{T}_+(X,Y)$, entonces $T + K \in \mathcal{T}_+(X,Y)$;
b) si $T \in \mathcal{T}_-(X,Y)$, entonces $T + K \in \mathcal{T}_-(X,Y)$.

En analogía con las caracterizaciones perturbativas de Lebow y Schechter [35] para los operadores F_+ y F_-, M. González y V.M. Onieva consiguen las siguientes caracterizaciones para los operadores tauberianos y cotauberianos.

Teorema 2.35 [21; tma.1] *Sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Entonces se verifica:*
a) $T \in \mathcal{T}_+(X,Y)$ si y sólo si para todo operador $K \in Co(X,Y)$ se verifica que $N(T+K)$ es reflexivo;
b) $T \in \mathcal{T}_-(X,Y)$ si y sólo si para todo operador $K \in Co(X,Y)$ se verifica que $Y\big/\overline{R(T+K)}$ es reflexivo.

Las siguientes proposiciones van encaminadas a caracterizar mediante técnicas de ultrapotencia los operadores w-compactos y los operadores tauberianos.

Lema 2.36 *Sea M un subespacio de dimensión finita del espacio de Banach X, $\varepsilon > 0$ y x'' un elemento de X^{**} tal que $\operatorname{dist}(x'', X) > \varepsilon$. Entonces existe un funcional $f \in M^\perp$ verificando $\|f\| = 1$ y $x''(f) > \varepsilon$.*

Demostración. Como $\dim M < \infty$, entonces $M = M^{\perp\perp}$, y así:

$$(M^\perp)^* \equiv \frac{X^{**}}{M^{\perp\perp}} \equiv \frac{X^{**}}{M},$$

es decir, $X^{**}\big/M$ es el dual de $M^\perp$. Por otro lado, se cumple $\|x'' + M\| > \varepsilon$ por hipótesis. Entonces existe un $f \in S_{M^\perp}$ tal que $x''(f) > \varepsilon$. □

El siguiente resultado es un refinamiento de un argumento de James [28] sobre una caracterización geométrica de la reflexividad.

Proposición 2.37 *Sea X un espacio de Banach y (x_n) una sucesión acotada en X sin subsucesiones w-convergentes. Entonces existe un $0 < \varepsilon < 1$, una subsucesión (z_n) de (x_n) y una sucesión $(f_n) \subset X^*$ tales que $\|f_n\| = 1$ y*

$$f_k(z_m) \begin{cases} > \varepsilon, & si\ 1 \le k \le m \\ = 0, & si\ 1 \le m < k. \end{cases}$$

Demostración. Probaremos inductivamente la existencia de las sucesiones (z_n) y (f_n).

Por hipótesis, la sucesión (x_n) no contiene subsucesiones w-convergentes, luego por el teorema de Eberlein-Smulian, $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ no es relativamente w-compacto. Ahora bien, un subconjunto acotado de $A \subset X$, es relativamente w-compacto si y sólo si su clausura w^*-débil en X^{**}, $\overline{A}^{w^*}$, está contenida en X [51; II.C]. Entonces existe un elemento $x'' \in \overline{\{x_n : n \in \mathbf{N}\}}^{w^*} \setminus X$.

Sean $2\varepsilon = \operatorname{dist}(x'', X) > 0$, f_1 un funcional de S_{X^*} tal que $x''(f_1) > \varepsilon$, y el w^*-entorno V_1 de x'' dado por

$$V_1 = \{y'' \in X^{**} : y''(f_1) > \varepsilon\}.$$

Sea (x_n^1) la subsucesión de (x_n) formada por todos los elementos de (x_n) pertenecientes a V_1.

Elegimos $z_1 := x_1^1$. Por el lema 2.36, existe un funcional $f_2 \in S_{X^*}$ tal que $f_2(z_1) = 0$ y $x''(f_2) > \varepsilon$.

Dado $p \in \mathbf{N}$, supongamos que hay sucesiones finitas

$$(z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}) \subset (x_n)_n, \quad \text{y} \quad (f_1, f_2, \ldots, f_p) \subset S_{X^*}$$

verificando las condiciones:

$$f_k(z_m) = \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si} \quad 1 \leq k \leq m \leq p-1 \\ 0, & \text{si} \quad 1 \leq m < k \leq p-1 \end{cases} \tag{1}$$

$$f_p(z_k) = 0, \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq p-1 \tag{2}$$

$$x''(f_k) > \varepsilon, \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq p \tag{3}$$

La condición (3) nos asegura que el conjunto

$$V_p := \{y'' \in X^{**} : y''(f_k) > \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, p\}$$

es un w^*-entorno de x''. Como x'' es punto de w^*-acumulación del conjunto $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, se puede extraer de (x_n) la subsucesión (x_n^p) formada por todos los x_n contenidos en V_p.

Elegimos $z_p := x_p^p$. De nuevo, por el lema 2.36 existe un funcional $f_{p+1} \in S_{X^*}$ tal que

$$\begin{aligned} &f_{p+1}(z_k) = 0 \quad \text{para todo} \quad k = 1, 2, \ldots, p \\ &x''(f_{p+1}) > \varepsilon, \end{aligned}$$

y de las condiciones (1) y (2) y $z_p \in V_p$, obtenemos:

$$f_k(z_m) \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq p \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k \leq p. \end{cases}$$

Reiterando el anterior argumento, obtenemos las sucesiones requeridas (z_n) y (f_n). $\square$

El siguiente resultado es, en cierto modo, un recíproco del precedente.

Proposición 2.38 *Sea X un espacio de Banach, $0 < \varepsilon < 1$, y (x_n), (f_n) dos sucesiones contenidas en S_X y S_{X^*} respectivamente. Si se cumple la condición*

$$f_k(x_m) \begin{cases} > \varepsilon, & si\ 1 \leq k \leq m \\ = 0, & si\ 1 \leq m < k \end{cases} \tag{4}$$

entonces (x_n) no contiene subsucesiones w-convergentes.

Demostración. Supongamos que $(x_n) \subset S_X$ y $(f_n) \subset S_{X^*}$ verifican la condición (4), y que (x_{n_j}) es una subsucesión de (x_n) que converge débilmente hacia $x \in X$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que (x_{n_j}) es la sucesión (x_n). Así, $w\text{-}\lim_n x_n = x \in X$.

Evidentemente, por hipótesis (4), el conjunto $\{f_k : k \in \mathbf{N}\}$ es infinito. Sea entonces $f \in B_{X^*}$ un punto de w^*-acumulación de $\{f_k : k \in \mathbf{N}\}$.

Como $x = w\text{-}\lim_n x_n$, para cada funcional f_k se verifica $f_k(x) = \lim_n f_k(x_n) \geq \varepsilon$, donde la última desigualdad es debida a que $f_k(x_n) > \varepsilon$ para todo $n \geq k$. En consecuencia, $f_k(x) \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbf{N}$, y como f es punto de w^*-acumulación de $\{f_k : k \in \mathbf{N}\}$, entonces:

$$f(x) \geq \varepsilon. \tag{5}$$

Por otra parte, para cada $n \in \mathbf{N}$, f es punto de w^*-acumulación de $\{f_k : k > n\}$, luego para todo $\delta > 0$ podemos elegir un f_k con $k > n$ tal que $|f(x_n) - f_k(x_n)| < \delta$. Así, por la condición (4) llegamos a $f(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

De lo anterior y de $x = w\text{-}\lim_n x_n$, se deduce $f(x) = 0$, contradiciéndose con (5). □

El siguiente resultado es de James, y caracteriza geométricamente la reflexividad.

Proposición 2.39 [5; pg.51, tma.6] [28] *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(a) *X es no reflexivo;*

(b) *para todo $0 < \varepsilon < 1$ existen sucesiones $(x_n) \subset S_X$ y $(f_n) \subset S_{X^*}$ tales que*

$$f_k(x_m) \begin{cases} > \varepsilon, & si\ 1 \leq k \leq m \\ = 0, & si\ 1 \leq m < k; \end{cases}$$

(c) *existen $0 < \varepsilon < 1$ y sucesiones $(x_n) \subset S_X$ y $(f_n) \subset S_{X^*}$ tales que:*

$$f_k(x_m) \begin{cases} > \varepsilon, & si\ 1 \leq k \leq m \\ = 0, & si\ 1 \leq m < k. \end{cases}$$

Definición 2.40 *Dado un espacio de Banach X y un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I, llamamos* subespacio de familias débilmente convergentes de *$X_{\mathcal{U}}$ al conjunto $X_{\mathcal{U}}^w$ formado por todos los elementos $[x_i] \in X_{\mathcal{U}}$ tales que $(x_i)_{i \in I}$ es w-convergente según el ultrafiltro $\mathcal{U}$.*

Observemos que si $[x_i]$ es un elemento de $X^w_{\mathcal{U}}$ y (x'_i) es otra familia tal que $[x_i] = [x'_i]$, entonces $\lim_{\mathcal{U}} x_i = \lim_{\mathcal{U}} x'_i$, y en consecuencia, $w\text{-}\lim_{\mathcal{U}} x_i = w\text{-}\lim_{\mathcal{U}} x'_i$.

También es fácil comprobar que $X^w_{\mathcal{U}}$ es un subespacio lineal de $X_{\mathcal{U}}$. En el siguiente lema probamos que $X^w_{\mathcal{U}}$ es además completo.

Lema 2.41 *Dados un espacio de Banach X y un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I, se verifica que $X^w_{\mathcal{U}}$ es un subespacio lineal cerrado de $X_{\mathcal{U}}$.*

Demostración. Sea $[x_i]$ un elemento de $X_{\mathcal{U}}$. Como $B_{X^{**}}$ es w^*-compacta, en virtud de la proposición 1.16 podemos definir la aplicación lineal acotada Q dada por

$$\begin{array}{rccl} Q: & X_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & X^{**} \\ & [x_i] & \mapsto & w^*\text{-}\lim_{\mathcal{U}} x_i. \end{array}$$

Evidentemente, $X^w_{\mathcal{U}}$ es igual a $Q^{-1}(X)$, luego es cerrado. □

Observación. Si el ultrafiltro $\mathcal{U}$ considerado en el lema anterior es el ultrafiltro $\mathcal{W}$ del teorema 1.56, entonces Q es suprayectiva.

En la siguiente proposición se estudian las ultrapotencias de los operadores w-compactos, y se encuentran relaciones con resultados del tipo de la proposición 2.37. La equivalencia entre las condiciones (a) y (b) es bien conocida y puede encontrarse en [15; VI.4.2].

Proposición 2.42 *Sea un operador $T \in B(X,Y)$, y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro cualquiera. Son equivalentes:*

(a) *$T \in WCo(X,Y)$;*
(b) *$T^{**}(X^{**}) \subset Y$;*
(c) *$T(X_{\mathcal{U}}) \subset Y^w_{\mathcal{U}}$;*
(d) *dado $\varepsilon > 0$, no existen sucesiones $(x_n) \subset S_X$, $(f_n) \subset S_{Y^*}$ verificando:*

$$f_k(Tx_m) \begin{cases} > \varepsilon & si\ 1 \leq k \leq m \\ = 0 & si\ 1 \leq m < k; \end{cases}$$

(e) *si la sucesión $(x_n) \subset X$ es acotada, entonces la sucesión (Tx_n) contiene subsucesiones w-convergentes.*

Demostración. Denotaremos I al conjunto sobre el cual tomamos el ultrafiltro $\mathcal{U}$, e $\{I_n : n \in \mathbf{N}\}$ será una partición de I disjunta con $\mathcal{U}$.

(a)⇒(b) Por hipótesis, TB_X es acotado y relativamente w-compacto, de donde se deduce que

$$\overline{TB_X}^{w^*} = \overline{TB_X}^{w}, \tag{6}$$

y como T^{**} es w^*-continuo, entonces

$$T^{**}(B_{X^{**}}) = T^{**}(\overline{B_X}^{w^*}) \subset \overline{T^{**}B_X}^{w^*} = \overline{TB_X}^{w^*}. \tag{7}$$

Ahora, combinando (6) y (7), se llega a $T^{**}(B_{X^{**}}) \subset \overline{TB_X}^{w} \subset Y$.

(b)⇒(c) Sea $[x_i] \in X_{\mathcal{U}}$. Tomemos el elemento $x'' \in X^{**}$ dado por $x'' = w^*\text{-}\lim_{\mathcal{U}} x_i$, esto es

$$\begin{array}{rccl} x'': & X^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & g & \mapsto & \lim_{\mathcal{U}} g(x_i). \end{array}$$

Así, para cada $f \in Y^*$ tenemos

$$f(T^{**}x'') = x''(fT) = \lim_{\mathcal{U}} fT(x_i),$$

y como por hipótesis $T^{**}(x'') \in Y$, entonces existe $T^{**}(x'') = w\text{-}\lim_{\mathcal{U}} Tx_i$, y por tanto $T_{\mathcal{U}}[x_i] \in Y^w_{\mathcal{U}}$.

(c)⇒(d) Supongamos que (d) falla. Entonces existen sucesiones $(x_n) \subset S_X$ y $(f_n) \subset S_{X^*}$ y un $0 < \varepsilon < 1$ tales que

$$f_k(Tx_m) \begin{cases} > \varepsilon & \text{si } 1 \leq k \leq m \\ = 0 & \text{si } 1 \leq m < k. \end{cases} \tag{8}$$

Para cada $i \in I$, tomamos $z_i := x_n$ si $i \in I_n$, y formamos el elemento $[z_i] \in X_{\mathcal{U}}$. Sea $y'' = w^*\text{-}\lim_{\mathcal{U}} Tz_i$. Basta ver que $y'' \in Y^{**} \setminus Y$.

Por definición de y'',

$$y''(f) = \lim_{\mathcal{U}} f(Tz_i), \qquad \text{para todo} \quad f \in Y^*. \tag{9}$$

Sea g un elemento de w^*-acumulación de $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$. Por (8) tenemos $f_k(Tx_m) = 0$ si $m < k$, luego $g(Tx_m) = 0$ para todo $m \in \mathbf{N}$, y aplicando (9) obtenemos $y''(g) = \lim_{\mathcal{U}} g(Tz_i) = 0$.

Por otro lado, (8) y (9) implican que, para cada f_k, se verifica $y''(f_k) = \lim_{\mathcal{U}(i)} f_k(Tz_i) > \varepsilon$. Entonces, si y'' perteneciese a Y tendríamos $g(y'') > \varepsilon$ debido a que g es punto de w^*-acumulación de $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$, lo que produce contradicción.

(d)⇒(e) Supongamos que $(x_n) \subset X$ es una sucesión acotada tal que (Tx_n) no contiene subsucesiones w-convergentes. Por la proposición 2.37 existe un $0 < \varepsilon < 1$, una sucesión $(f_n) \subset S_{X^*}$ y una subsucesión (z_n) de (x_n) tales que $f_k(Tz_m) > \varepsilon$ si $k \leq m$ y $f_k(Tz_m) = 0$ si $m < k$, lo que contradice la condición (d).

(e)⇒(a) Es una aplicación del teorema de Eberlein-Smulian. □

Observación. La proposición anterior es válida para cualquier ultrafiltro, incluídos los ultrafiltros sobre $\mathbf{N}$. Es interesante comparar la proposición 2.42 con la homóloga 2.5 para operadores compactos.

Corolario 2.43 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro cualquiera. Entonces, un espacio de Banach X es reflexivo si y sólo si $X_{\mathcal{U}} = X^w_{\mathcal{U}}$.*

Proposición 2.44 *Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I y C un subconjunto acotado en el espacio de Banach X. Entonces C es relativamente débilmente compacto si y sólo si $C_{\mathcal{U}}$ está contenido en $X^w_{\mathcal{U}}$.*

Demostración. Supongamos que C es relativamente w-compacto. Por la proposición 1.16, se tiene el contenido $C_{\mathcal{U}} \subset X_{\mathcal{U}}^w$.

Supongamos ahora que C no es w-compacto. Por el teorema de Eberlein–Smulian, existe una sucesión acotada (x_n) contenida en C que no tiene subsucesiones w-convergentes. Entonces, por la proposición 2.37, existe una subsucesión (z_n) de (x_n), un $0 < \varepsilon < 1$ y una sucesión de funcionales $(f_n) \subset S_{X^*}$ tales que

$$f_k(z_m) \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \leq k \leq m \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k. \end{cases}$$

Sea $\{I_n : n \in \mathbf{N}\}$ una partición de I disjunta con $\mathcal{U}$, y tomemos el elemento $[y_i] \in X_{\mathcal{U}}$ dado por $y_i := z_n$ si $i \in I_n$. Entonces $[y_i]$ pertenece a $C_{\mathcal{U}}$, pero no a $X_{\mathcal{U}}^w$. □

El siguiente lema es vital para describir las ultrapotencias de los operadores T que verifican $N(T^{**}) = N(T)$.

Lema 2.45 *Sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ y $x'' \in S_{X^{**}}$ tales que $T^{**}x'' = 0$. Dados $\varepsilon > 0$ y un w^*-entorno V de $0 \in X$, existe $x \in B_X$ tal que $x'' - x \in V$ y $\|Tx\| < \varepsilon$.*

Demostración. Como en el teorema 1.56, dado el espacio X, consideremos el filtro $\mathcal{F}_X$ y $\mathcal{W}$ un ultrafiltro dominando a $\mathcal{F}_X$. Para el elemento x'', sea la familia $(x_i)_{i\in I}$ como la obtenida en la fórmula (5) del mismo teorema 1.56. Por 1.56(6), se cumple $x'' = w^*\text{-}\lim_{\mathcal{W}} x_i$, y por la w^*-continuidad de T^{**}, tenemos $0 = T^{**}x'' = w^*\text{-}\lim_{\mathcal{W}} Tx_i$. Entonces 0 pertenece a la w-clausura de la envoltura convexa de $\{Tx_i : x_i \in W\}$, la cual coincide con su clausura en norma. Esto nos permite encontrar una sucesión (z_n) contenida en la envoltura convexa de $\{x_i : x_i \in W\}$ tal que $\lim_n Tz_n = 0$. Obviamente, cada z_n pertenece a W y es de norma menor o igual a uno. Eligiendo un z_n en la anterior sucesión tal que $\|Tz_n\| < \varepsilon$, concluímos la demostración. □

Notas. Si se desea, se puede sustituir el ultrafiltro $\mathcal{W}$ de la anterior demostración por otro más sencillo, $\mathcal{V}$, procediendo de la siguiente manera. Se considera un conjunto de índices I en correspondencia biunívoca con el conjunto de todos los w^*-entornos de $0 \in X^{**}$. Dado el índice $j \in I$, denotemos V_j a su correspondiente w^*-entorno, y sea $C_j := \{i \in I : V_i \subset V_j\}$. El conjunto $\{C_j : j \in I\}$ es base para algún filtro $\mathcal{F}$. Como ultrafiltro $\mathcal{V}$ basta tomar uno cualquiera que domine a $\mathcal{F}$. Como familia $(x_i)_{i\in I}$, sería suficiente tomar, para cada $i \in I$, un x_i tal que $x_i - x'' \in V_i$, lo que aseguraría que $w^*\text{-}\lim_{\mathcal{V}} x_i = x''$.

Proposición 2.46 *Sea un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) *$N(T^{**}) \subset X$;*

(b) *$N(T_{\mathcal{U}}) \subset X_{\mathcal{U}}^w$;*

(c) *no hay* $0 < \varepsilon < 1$ *para el que existan sucesiones* $(x_n) \subset S_X$, $(f_n) \subset S_{X^*}$ *tales que*

$$\|Tx_n\| < 1/n, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbf{N}$$

$$f_k(x_m) \begin{cases} > \varepsilon, & \textit{si } 1 \le k \le m \\ = 0, & \textit{si } 1 \le m < k. \end{cases}$$

Demostración.
(a)$\Rightarrow$(b) Supongamos que $N(T^{**}) \subset X$. Sea $[x_i]$ un elemento de $N(T_{\mathcal{U}})$ y consideremos el elemento $x'' \in X^{**}$ dado por $x'' = w^*\text{-}\lim_{\mathcal{U}} x_i$. Como T^{**} es w^*-continuo, $T^{**}x'' = w^*\text{-}\lim_{\mathcal{U}} Tx_i = 0$. Entonces, por hipótesis, x'' pertenece a X, luego $[x_i]$ pertenece a $X_{\mathcal{U}}^w$.
(b)$\Rightarrow$(c) Supongamos que no se cumple la hipótesis (c); es decir, existe un $0 < \varepsilon < 1$ y sucesiones $(x_n) \subset S_X$ y $(f_n) \subset S_{X^*}$ tales que $\|Tx_n\| < 1/n$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y

$$f_k(x_m) = \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \le k \le m \\ = 0, & \text{si } 1 \le m < k. \end{cases}$$

Por la proposición 2.38, (x_n) no contiene subsucesiones w-convergentes y por tanto, $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ no es w-compacto. Entonces, por la proposición 2.44, existe un $[y_i] \in \{x_n : n \in \mathbf{N}\}_{\mathcal{U}} \setminus X_{\mathcal{U}}^w$. Obviamente, $[y_i]$ no puede ser igual a ningún x_n. Entonces, para cada $n \in \mathbf{N}$ se cumple

$$\{i \in I : \|Ty_i\| \ge 1/n\} \notin \mathcal{U},$$

de donde deducimos que $T_{\mathcal{U}}[y_i] = 0$, contradiciéndonos con (b).
(c)$\Rightarrow$(a) Supongamos que existe un elemento $x'' \in N(T^{**}) \setminus X$ tal que $\|x''\| = 1$. Elijamos un $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(x'', X)$ cualquiera. Tomemos un $f_1 \in S_{X^*}$ tal que $x''(f_1) > \varepsilon$. Por el lema 2.45, existe un $x_1 \in B_X$ tal que $f_1(x_1) > \varepsilon$.

Ahora, por el lema 2.36, existe un $f_2 \in S_{X^*} \cap \langle x_1 \rangle^\perp$ tal que $x''(f_2) > \varepsilon$. Otra vez por el lema 2.45, existe un $x_2 \in B_X$ tal que $f_1(x_2) > \varepsilon$, $f_2(x_2) > \varepsilon$, y $\|Tx_2\| < 1/2$.

Para $n \ge 3$, supongamos que tenemos familias $\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \subset B_X$ y $\{f_1, \dots, f_{n-1}\} \subset S_{X^*}$ tales que $\|Tx_k\| < 1/k$ para $1 \le k \le n-1$ y

$$f_k(x_m) \begin{cases} > \varepsilon & \text{si } 1 \le k \le m \le n-1 \\ = 0 & \text{si } 1 \le m < k \le n-1. \end{cases}$$

Por el lema 2.36, existe $f_n \in S_{X^*} \cap \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle^\perp$ tal que $x''(f_n) > \varepsilon$. Y ahora, por el lema 2.45 existe un $x_n \in B_X$ tal que $f_k(x_n) > \varepsilon$ para $1 \le k \le n$ y $\|Tx_n\| < 1/n$. Reiterando el proceso, obtenemos sucesiones $(x_n) \subset B_X$ y $(f_n) \subset S_{X^*}$ tales que $\|Tx_n\| < 1/n$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y

$$f_k(x_m) \begin{cases} > \varepsilon & \text{si } 1 \le k \le m < \infty \\ = 0 & \text{si } 1 \le m < k < \infty, \end{cases}$$

contradiciéndose con la hipótesis (c). $\square$

Observación. La proposición precendente no sólo caracteriza los operadores $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ tales que $N(T^{**}) \subset X$, sino que además proporciona una demostración alternativa a la proposición 2.30 debida a Kalton y Wilansky.

Caractericemos ahora las ultrapotencias de los operadores tauberianos.

Proposición 2.47 *Sea un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro cualquiera. Entonces son equivalentes:*
(a) *T es tauberiano;*
(b) $T_\mathcal{U}(X_\mathcal{U} \setminus X_\mathcal{U}^w) \subset Y_\mathcal{U} \setminus Y_\mathcal{U}^w$*;*
(c) $T_\mathcal{U}(X_\mathcal{U} \setminus X_\mathcal{U}^w) \subset Y_\mathcal{U} \setminus Y$*;*
(d) *TB_X es cerrado en Y y $N(T^{**}) \subset X$.*

Demostración.
(a)⇒(b) Sea $[x_i] \in X_\mathcal{U} \setminus X_\mathcal{U}^w$, y consideremos el elemento $x'' = w^*\text{-}\lim_\mathcal{U} x_i$. Como $x'' = w^*\text{-}\lim_\mathcal{U} x_i \in X^{**} \setminus X$ y T es tauberiano, entonces $w^*\text{-}\lim_\mathcal{U} Tx_i = T^{**}x'' \in Y^{**} \setminus Y$, lo que prueba que $T_\mathcal{U}[x_i] \in Y_\mathcal{U} \setminus Y_\mathcal{U}^w$.
(b)⇒(c) Trivial.
(c)⇒(d) De la hipótesis (c) se deduce el contenido $N(T_\mathcal{U}) \subset X_\mathcal{U}^w$, y aplicando ahora la proposición 2.46, se obtiene $N(T^{**}) \subset X$.

Veamos ahora que TB_X es cerrado en Y. Tomemos un $y \in \overline{TB_X}$. Por el corolario 1.36 existe un elemento $[x_i] \in B_X$ tal que $T_\mathcal{U}[x_i] = y \in Y$. Por hipótesis (c), $[x_i]$ pertenece a $X_\mathcal{U}^w$. Sea $x = w\text{-}\lim_\mathcal{U} x_i$. Entonces $w\text{-}\lim_\mathcal{U} Tx_i = Tx$, y como $\lim_\mathcal{U} Tx_i = y$, tenemos $Tx = y$, lo que prueba que TB_X es cerrado.

(d)⇒(a) Sea $x'' \in B_{X^{**}}$ tal que $T^{**}x'' = y \in Y$, y comprobemos que x'' pertenece a X. El elemento x'' pertenece a $\overline{B_X}^{w^*}$, luego $y \in \overline{TB_X}^{w^*} \cap Y = \overline{TB_X}^{w}$. Pero por hipótesis, TB_X es cerrado en norma, luego $TB_X = \overline{TB_X}^{w}$, de donde se deduce que existe un $x \in B_X$ tal que $Tx = y$. Consecuentemente, $x'' - x$ pertenece a $N(T^{**}) \subset X$, y por tanto $x'' \in X$. □

Por la proposición 2.42, un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es w-compacto si y sólo si $T_\mathcal{U}(X_\mathcal{U}) \subset Y_\mathcal{U}^w$, y por la proposición 2.47, T es tauberiano si y sólo si $T_\mathcal{U}(X_\mathcal{U} \setminus X_\mathcal{U}^w) \subset Y_\mathcal{U} \setminus Y_\mathcal{U}^w$. Ambas caracterizaciones nos permiten obtener rápidamente algunos de los resultados, ya conocidos, sobre los operadores tauberianos. Veamos por ejemplo que la clase de los operadores tauberianos es estable bajo perturbaciones w-compactas.

Proposición 2.48 *Si $K \in WCo(X,Y)$ y $T \in \mathcal{T}_+(X,Y)$, entonces $T + K \in \mathcal{T}_+(X,Y)$.*

Demostración.

$$(T+K)_\mathcal{U}(X_\mathcal{U} \setminus X_\mathcal{U}^w) = (T_\mathcal{U} + K_\mathcal{U})(X_\mathcal{U} \setminus X_\mathcal{U}^w) \subset (Y_\mathcal{U} \setminus Y_\mathcal{U}^w) + Y_\mathcal{U}^w$$

lo que prueba que $T + K \in \mathcal{T}_+(X,Y)$. □

Finalizamos esta sección viendo cómo las caracterizaciones perturbativas del teorema 2.35 permiten obtener alguna de las caracterizaciones mediante ultrapotencias para los operadores tauberianos.

Proposición 2.49 *Un operador* $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ *es tauberiano si y sólo si* $T_{\mathcal{U}}(X_{\mathcal{U}} \setminus X^w_{\mathcal{U}}) \subset Y_{\mathcal{U}} \setminus Y^w_{\mathcal{U}}$.

Demostración. Si T es tauberiano, nos remitimos a la demostración de la implicación (a)⇒(b) en la proposición 2.47.

Supongamos ahora que T no es tauberiano. Por la caracterización perturbativa 2.35, existe un operador compacto $K \in \mathcal{B}(X,Y)$ verificando que $N(T-K)$ no es reflexivo. Entonces, por el corolario 2.43, existe una familia acotada $(x_i) \subset N(T-K)$ tal que $[x_i] \notin X^w_{\mathcal{U}}$. Ahora, como K es compacto se cumple $K_{\mathcal{U}}[x_i] \in Y$, y así$T_{\mathcal{U}}[x_i] = K_{\mathcal{U}}[x_i] \in Y$. □

Capítulo 3

OPERADORES SUPERTAUBERIANOS, COSUPERTAUBERIANOS Y PERTURBACIONES.

En esta sección caracterizaremos los operadores supertauberianos como aquellos operadores T para los que existe algún (equivalentemente, para todo) ultrafiltro $\mathcal{U}$ verificando que $T_{\mathcal{U}}$ es tauberiano, o $N(T_{\mathcal{U}})$ es reflexivo. Dichas caracterizaciones nos permitirán probar que si T es supertauberiano y K un operador super-débilmente compacto, entonces $T+K$ es supertauberiano. Este resultado nos permitirá obtener, por un lado, una sencilla demostración de que la clase Ψ_+ es abierta, y por otro lado, una caracterización de tipo perturbativo que constituye el resultado central de este capítulo: un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es supertauberiano si y sólo si para todo operador compacto $K \in \mathcal{B}(X,Y)$, el núcleo $N(T+K)$ es superreflexivo.

De ahí derivaremos interesantes aplicaciones, tales como una caracterización de los espacios de Banach para los que todos los subespacios reflexivos son superreflexivos.

En la sección 3.2, dedicada a los operadores cosupertauberianos, probaremos que para todo operador T el núcleo $N({T^*}_{\mathcal{U}})$ es w^*-denso en $N({T_{\mathcal{U}}}^*)$, para después obtener caracterizaciones, mediante ultrapotencias, de los operadores cosupertauberianos. Posteriormente obtendremos una caracterización perturbativa para la clase Ψ_- similar a la de la clase Ψ_+, de la que también extraeremos numerosas consecuencias.

En la sección 3.3 presentaremos una nuevo ideal obtenido como una clase de perturbación asociada a Ψ_+ y que contiene estrictamente al ideal de los operadores super-débilmente compactos.

3.1 Operadores supertauberianos.

El concepto de *superreflexividad* está estrechamente ligado a los operadores supertauberianos y cosupertauberianos. Recordemos que un espacio es superreflexivo si todos los espacios de Banach finitamente representados en él son reflexivos. Según el corolario 1.45, el espacio de Banach X es superreflexivo si y sólo si para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$, $X_{\mathcal{U}}$ es reflexivo. La siguiente caracterización de superreflexividad fue obtenida en su mayor parte por R.C. James [29]. Nosotros daremos otra demostración en el contexto de los ultraproductos.

Proposición 3.1 *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*
(a) *X es no superreflexivo;*
(b) *para todo $0 < \varepsilon < 1$ y todo $n \in \mathbf{N}$ existen familias $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S_X$ y $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset S_{X^*}$ verificando*

$$f_k(x_m) \begin{cases} > \varepsilon, & \textit{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & \textit{si } 1 \leq m < k \leq n; \end{cases}$$

(c) *existe un $0 < \varepsilon < 1$ tal que para todo $n \in \mathbf{N}$ existen familias $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S_X$ y $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset S_{X^*}$ verificando*

$$f_k(x_m) \begin{cases} > \varepsilon, & \textit{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & \textit{si } 1 \leq m < k \leq n. \end{cases}$$

Demostración.
(a)$\Rightarrow$(b) Sean $0 < \varepsilon < 1$ y $n \in \mathbf{N}$ cualesquiera. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\varepsilon > 1/4$, y así podemos tomar valores δ y ε' tales que $0 < \varepsilon' < (1/\sqrt{\varepsilon}) - 1$ y $\delta = \varepsilon(1 + \varepsilon')^2 < 1$.

Si X no es superreflexivo, entonces existe un espacio no reflexivo Y f.r. en X. Por la proposición 2.39, existen sucesiones $(y_n) \subset S_Y$ y $(g_n) \subset S_{Y^*}$ verificando

$$g_k(y_m) \begin{cases} > \delta, & \text{si } 1 \leq k \leq m < \infty \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k < \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Consideremos el subespacio $Y_n := \langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle \subset Y$. Como Y es f.r. en X, existe una ε'-isometría $T : Y_n \longrightarrow X$. Denotemos por x_k a los elementos

$$x_k = (1 + \varepsilon')^{-1} T(y_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

y escribamos $X_n := \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \subset X$. Entonces $T : Y_n \longrightarrow X_n$ es un isomorfismo ε'-isométrico, y en consecuencia $T^* : X_n^* \longrightarrow Y_n^*$ también lo es. Ahora bien, como $Y_n^* \equiv Y^*/Y_n^\perp$, para cada g_k existe un $f_k \in X_n^*$ tal que

$$T^* f_k = (1 + \varepsilon')^{-1} g_k + Y_n^\perp, \qquad \text{para todo} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f_k(x_m) &= (1 + \varepsilon')^{-1} f_k(T y_m) = \\ &= (1 + \varepsilon')^{-1} (T^* f_k)(y_m) = (1 + \varepsilon')^{-2} g_k(y_m), \end{aligned}$$

y por (1) y la elección de $\delta = \varepsilon(1 + \varepsilon')^2$, tenemos

$$f_k(x_m) = \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k \leq n. \end{cases}$$

Además se cumple que para todo $k = 1, \dots, n$, los x_k y f_k son de norma menor o igual a uno, pues

$$\|f_k\| = (1+\varepsilon')^{-1}\|T^{*-1}(g_k + Y_n^{\perp})\| \leq \\ \leq (1+\varepsilon')^{-1}\|T^{*-1}\| \cdot \|g_k + Y_n^{\perp}\| \leq \|g_k\| = 1$$

y

$\|x_k\| = (1+\varepsilon')^{-1}\|Ty_k\| \leq \|y_k\| = 1.$

Normalizando los elementos x_k y f_k, obtenemos el resultado apetecido.

(b)⇒(c) Trivial.

(c)⇒(a) En virtud del corolario 1.45, si encontramos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\mathbf{N}$ de manera que $X_{\mathcal{U}}$ no sea reflexivo, habremos probado que X no es superreflexivo.

Por hipótesis (c), existe un $0 < \varepsilon < 1$ tal que para cada $n \in \mathbf{N}$ existen conjuntos finitos $\{x_1^n, \dots, x_n^n\} \subset S_X$ y $\{f_1^n, \dots, f_n^n\} \subset S_{X^*}$ tales que

$$f_k^n(x_m^n)\begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k \leq n. \end{cases} \tag{2}$$

Escribamos $x_m^n = 0 \in X$ y $f_m^n = 0 \in X^*$ si $n < m$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro cualquiera sobre $\mathbf{N}$, y para cada $k \in \mathbf{N}$ consideremos el elemento $\mathbf{x}_k \in S_{X_{\mathcal{U}}}$ dado por $\mathbf{x}_k = [x_k^n]_n$, o más abreviadamente, $\mathbf{x}_k = [x_k^n]$.

Como $X^*{}_{\mathcal{U}}$ es subespacio de $X_{\mathcal{U}}{}^*$, se verifica $\mathbf{f}_k := [f_k^n]_n \in S_{X_{\mathcal{U}}{}^*}$ para todo $k \in \mathbf{N}$.

Por (2), si $k \leq m$ se cumple $\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_m) = \lim_{\mathcal{U}(n)} f_k^n(x_m^n) > \varepsilon/2$, y si $m < k$, entonces $\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_m) = \lim_{\mathcal{U}(n)} f_k^n(x_m^n) = 0$. Por la proposición 2.39 se tiene que $X_{\mathcal{U}}$ es no reflexivo, tal como queríamos ver. □

La definición de *operador super-débilmente compacto* que a continuación damos es original de Tacon.

Definición 3.2 [48; pg.149] *Se dice que el operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es* super-débilmente compacto *si para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe un $n \in \mathbf{N}$ para el que no existen familias $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset S_X$ y $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset S_{Y^*}$ tales que*

$$f_k(Tx_m)\begin{cases} > \varepsilon, & si\ 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & si\ 1 \leq m < k \leq n. \end{cases}$$

Escribiremos abreviadamente *super-w-compacto* en lugar de *super-débilmente compacto*. Al subconjunto de $\mathcal{B}(X,Y)$ de todos los operadores super-w-compactos lo denotaremos por $SWCo(X,Y)$.

De la caracterización 2.42(d) de operador w-compacto, es fácil deducir que todo operador super-w-compacto es w-compacto.

Definición 3.3 [49; pg.66] *Se dice que el operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es* super-tauberiano *si para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe un $n \in \mathbf{N}$ para el que no hay familias*

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset S_X$ *y* $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset S_{X^*}$ *verificando*

$$
\begin{aligned}
&f_k(x_m) \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \le k \le m \le n \\ = 0, & \text{si } 1 \le m < k \le n \end{cases} \\
&\|Tx_k\| < 1/k, \quad \text{si} \quad 1 \le k \le n.
\end{aligned}
$$

Al subconjunto de $\mathcal{B}(X,Y)$ de todos los operadores supertauberianos lo denotaremos por $\Psi_+(X,Y)$.

Observación. Es consecuencia inmediata de las definiciones que el espacio X es superreflexivo si y sólo si $\mathcal{B}(X,Y) = \Psi_+(X,Y)$ para todo Y; en efecto, fijémonos en que todo operador supertauberiano tiene núcleo superreflexivo, y si $\mathcal{B}(X,Y) = \Psi_+(X,Y)$, el operador nulo es supertauberiano, lo que implica que X es superreflexivo.

En la siguiente proposición damos una caracterización de operador supertauberiano más apropiada para el empleo de técnicas clásicas y ultraproducto.

Proposición 3.4 *El operador* $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ *es supertauberiano si y sólo si para todo* $0 < \varepsilon < 1$ *existen un* $\delta > 0$ *y un* $n \in \mathbf{N}$ *para los que no hay familias* $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S_X$ *y* $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset S_{X^*}$ *verificando*

$$
\begin{aligned}
&f_k(x_m) \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \le k \le m \le n \\ = 0, & \text{si } 1 \le m < k \le n \end{cases} \\
&\|Tx_k\| < \delta, \quad \text{si} \quad 1 \le k \le n.
\end{aligned}
$$

Demostración. Si T no satisface las condiciones del enunciado para algún $0 < \varepsilon < 1$, dado un $n \in \mathbf{N}$ cualquiera, basta elegir un $0 < \delta < 1/n$. Entonces existen familias $\{x_1, \ldots, x_n\}$ en S_X y $\{f_1, \ldots, f_n\}$ en S_{X^*} tales que

$$
\begin{aligned}
&f_k(x_m) \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \le k \le m \le n \\ = 0, & \text{si } 1 \le m < k \le n \end{cases} \\
&\|Tx_k\| < \delta < 1/k, \quad \text{si} \quad 1 \le k \le n,
\end{aligned}
$$

luego T no es supertauberiano.

Supongamos ahora que $T \notin \Psi_+(X,Y)$ y sea $0 < \varepsilon < 1$ para el que T no cumple las condiciones de la definición. Sean $\delta > 0$ y $n \in \mathbf{N}$ cualesquiera. Tomemos un $p \in \mathbf{N}$ tal que $1/n(p-1) < \delta$. Entonces existen familias $\{x_1, \ldots, x_{np}\} \subset S_X, \quad \{f_1, \ldots, f_{np}\} \subset S_{X^*}$ verificando

$$
\begin{aligned}
&f_k(x_m) \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \le k \le m \le np \\ = 0, & \text{si } 1 \le m < k \le np \end{cases} \\
&\|Tx_k\| < 1/k, \quad \text{si} \quad 1 \le k \le np.
\end{aligned}
$$

Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, tomamos $y_k := x_{n(p-1)+k}$ y $g_k := f_{n(p-1)+k}$. Así, las familias $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset S_X$ y $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subset S_{X^*}$ verifican

$$g_k(y_m) \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k \leq n \end{cases}$$

$$\|Ty_k\| < \frac{1}{n(p-1)+k} < \delta, \quad \text{si} \quad 1 \leq k \leq n,$$

tal como queríamos ver. □

A continuación caracterizaremos los operadores super-w-compactos y supertauberianos mediante ultrapotencias.

Proposición 3.5 *Un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ es super-w-compacto si y sólo si $T_\mathcal{U}$ es w-compacto.*

Demostración. Sea $\{I_n : n \in \mathbf{N}\}$ una partición de I disjunta con $\mathcal{U}$. Si T no es super-w-compacto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbf{N}$ existen familias $\{x_1^n, \ldots, x_n^n\} \subset S_X$ y $\{f_1^n, \ldots, f_n^n\} \subset S_{Y^*}$ verificando

$$f_k^n(Tx_m^n) \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k \leq n. \end{cases}$$

Si $k > n$ escribimos $x_k^n = 0 \in X$ y $f_k^n = 0 \in Y^*$, y para cada $k \in \mathbf{N}$ definimos los elementos:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &:= [z_k^i]_i \in S_{X_\mathcal{U}}, \quad \text{donde} \quad z_k^i = x_k^n, \quad \text{si} \quad i \in I_n, \\ \mathbf{g}_k &:= [h_k^i]_i \in S_{Y_\mathcal{U}^*}, \quad \text{donde} \quad h_k^i = f_k^n, \quad \text{si} \quad i \in I_n. \end{aligned}$$

Calculemos los valores $\mathbf{g}_k(T_\mathcal{U}\mathbf{y}_m)$: si $k \leq m$, para todo $n \geq m$ y todo $i \in I_n$, se verifica $h_k^i(Tz_m^i) = f_k^n(Tx_m^n) > \varepsilon$, y como $\bigcup_{n \geq m} I_n \in \mathcal{U}$, entonces

$$\mathbf{g}_k(T_\mathcal{U}\mathbf{x}_m) = \lim_{\mathcal{U}(i)} h_k^i(Tz_m^i) > \varepsilon/2;$$

sea ahora $m < k$. Para todo $i \in I$ se verifica $h_m^i(Tz_k^i) = 0$, luego

$$\mathbf{g}_k(T_\mathcal{U}\mathbf{x}_m) = \lim_{\mathcal{U}(i)} h_k^i(Tz_m^i) = 0,$$

y aplicando la proposición 2.42 se deduce que $T_\mathcal{U}$ no es w-compacto.

Para el recíproco, supongamos que $T_\mathcal{U}$ no es w-compacto. Entonces, por la proposición 2.42 existe un $0 < \varepsilon < 1$ y sucesiones $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \overset{\infty}{\ldots}\} \subset S_{X_\mathcal{U}}$ y $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \overset{\infty}{\ldots}\} \subset S_{Y_\mathcal{U}^*}$ tales que

$$\mathbf{f}_k(T_\mathcal{U}\mathbf{x}_m) = \begin{cases} > \varepsilon & \text{si } 1 \leq k \leq m < \infty \\ = 0 & \text{si } 1 \leq m < k < \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Por la proposición 1.26, podemos tomar representaciones $\mathbf{x}_k = [x_k^i]$ con $\|x_k^i\| = 1$ para todo $i \in I$ y $k \in \mathbf{N}$.

Elijamos un $n \in \mathbf{N}$. Por la condición (3) tenemos que el sistema $\{T_\mathcal{U}\mathbf{x}_1, \ldots, T_\mathcal{U}\mathbf{x}_n\}$ es linealmente independiente, luego si escribimos

$$X_n := \langle T_\mathcal{U}\mathbf{x}_1, \ldots, T_\mathcal{U}\mathbf{x}_n\rangle,$$

por la demostración del teorema 1.43 existe un $I_1 \in \mathcal{U}$ tal que para cada $i \in I_1$, queda establecida una ε-isometría S dada por

$$\begin{array}{rccc} S: & T_\mathcal{U}X_n & \longrightarrow & Y_i := \langle Tx_i^1, \ldots, Tx_i^n\rangle \\ & T_\mathcal{U}\mathbf{x}_k & \mapsto & Tx_k^i \end{array}$$

Fijemos un índice $j \in I_1$. Entonces la aplicación

$$(T_\mathcal{U}X_n)^* \xrightarrow{\quad S^{*-1} \quad} Y_j^*$$

también es una ε-isometría, por lo que para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ podemos elegir un $f^k \in Y^*$ de modo que $1 - \varepsilon < \|f^k\| < 1 + \varepsilon$ y

$$S^{*-1}\big[\mathbf{f}_k + (T_\mathcal{U}X_n)^\perp\big] = f^k + Y_j^\perp\,. \tag{4}$$

Por las definiciones de S y S^{*-1} es inmediato que $f^k(Tx_m^j) = \mathbf{f}_k(T_\mathcal{U}\mathbf{x}_m)$ para $1 \leq k \leq n$ y $1 \leq m \leq n$.

Tomando los funcionales normalizados $g_k := \|f^k\|^{-1}f^k$, y teniendo en cuenta (3) y (4), llegamos a

$$g_k(Tx_m^j) = \begin{cases} > \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}, & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & \text{si } 1 \leq k < m \leq m \end{cases}$$

y además, $\|g_k\| = \|x_k^j\| = 1$ para todo $1 \leq k \leq n$, luego T no es super-w-compacto, tal como queríamos ver. □

Corolario 3.6 *Si $T \in Co(X,Y)$, entonces es super-w-compacto.*

Demostración. Por la proposición 2.6, $T_\mathcal{U}$ es compacto, luego $T_\mathcal{U}$ es w-compacto. Entonces, por la proposición octr, T es super-w-compacto. □

Proposición 3.7 *La clase $SWCo(X,Y)$ de los operadores super-w-compactos es un conjunto cerrado en $\mathcal{B}(X,Y)$.*

Demostración. Consideremos el operador continuo

$$\begin{array}{rccc} J: & \mathcal{B}(X,Y) & \longrightarrow & \mathcal{B}(X_\mathcal{U}, Y_\mathcal{U}) \\ & T & \mapsto & T_\mathcal{U} \end{array}$$

Teniendo en cuenta que el conjunto $WCo(X_\mathcal{U}, Y_\mathcal{U})$ de los operadores w-compactos es cerrado [15; VI.4 cor.4], y que un operador T es super-w-compacto si y sólo si $T_\mathcal{U}$ es w-compacto (proposición octr), resulta que $J^{-1}(WCo(X_\mathcal{U}, Y_\mathcal{U})) = SWCo(X,Y)$ es cerrado. □

Proposición 3.8 *El conjunto de los operadores super-w-compactos es un ideal de operadores.*

Demostración. Sean X e Y dos espacios de Banach cualesquiera.

a) Si T, S pertenen a $SWCo(X,Y)$, entonces $T_{\mathcal{U}}$ y $S_{\mathcal{U}}$ son w-compactos. Como la suma de operadores w-compactos es otro operador w-compacto, tenemos $T_{\mathcal{U}} + S_{\mathcal{U}} = (T+S)_{\mathcal{U}} \in WCo(X,Y)$, y por la proposición octr, $T+S$ es super-w-compacto.

b) sea $K \in SWCo(X,Y)$, $T \in \mathcal{B}(Y,Z)$ y $S \in \mathcal{B}(V,X)$. Como $K_{\mathcal{U}}$ es w-compacto, la composición $T_{\mathcal{U}} K_{\mathcal{U}} S_{\mathcal{U}} = (TKS)_{\mathcal{U}}$ es un operador w-compacto, de donde se deduce que TKS es super-w-compacto (proposición octr). $\square$

Observación. En 1980 aparecen independientemente "dos" tipos de operadores bajo la denominación común de *operadores super-débilmente compactos.* Uno de ellos, introducido por Tacon [48], y el otro, por Heinrich [24]. Recordamos que hemos hecho nuestra la definición de Tacon de operador super-débilmente compacto (definición 3.2). Heinrich observa que *sus* operadores super-débilmente compactos coinciden con los operadores *uniformemente convexificantes*, previamente definidos por Beauzamy [3] en 1976. Empleando un argumento más sencillo que el de Heinrich, en la sección 4.2 veremos que los operadores uniformemente convexificantes coinciden con los operadores super-débilmente compactos de Tacon.

De la definición 3.2 (Tacon), hemos deducido que T es super-débilmente compacto si y sólo si existe algún ultrafiltro $\mathcal{U}$ (equivalentemente, para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$) tal que $T_{\mathcal{U}}$ es débilmente compacto (véase proposición octr). Más generalmente, si $\mathcal{A}$ es un ideal de operadores, la clase $S\mathcal{A}$ formada por los operadores T tales que $T_{\mathcal{U}} \in \mathcal{A}$ para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$, es otro ideal de operadores contenido en $\mathcal{A}$.

La versión de Heinrich de *operador super débilmente compacto* involucra el concepto de *representación finita operadores*, cuya definición hemos reproducido en 1.57. Dado un ideal de operadores $\mathcal{A}$, Heinrich [24; def.2.1] llama *superideal de* $\mathcal{A}$, denotado $\mathcal{A}^s$, al conjunto de todos los operadores T para los que se cumple que, si T_0 es un operador f.r. en T, entonces $T \in \mathcal{A}$. Se demuestra que $\mathcal{A}^s$ es a su vez otro ideal de operadores [24; prop. 2.2]. Siempre se verifica $\mathcal{A}^s \subset S\mathcal{A}$, pues si $T \in \mathcal{A}^s$, por proposición 1.58, $T_{\mathcal{U}}$ es f.r. en T, y en consecuencia T pertenece a $S\mathcal{A}$. Si el ideal $\mathcal{A}$ es regular, entonces podemos asegurar que $S\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^s$. En efecto, si $T \in S\mathcal{A}(X,Y)$ y $T_0 \in \mathcal{B}(X_0, Y_0)$ es f.r. en T, entonces la proposición 1.58 da un ultrafiltro $\mathcal{U}$, una isometría J y una suprayección Q tales que $QT_{\mathcal{U}}J = \imath T_0$, donde $\imath$ es la inmersión natural de Y_0 en Y_0^{**}. Por definición, $T_{\mathcal{U}}$ pertenece al ideal $S\mathcal{A}$, luego $\imath T_0 \in \mathcal{A}$, y por definición de ideal regular, $T_0 \in \mathcal{A}$.

En el caso que nos ocupa, WCo es un ideal inyectivo y por tanto regular, luego $SWCo = WCo^s$.

La siguiente proposición, inspirada en un resultado de Tacon [49] obtenido con análisis no-estándar, estudia las ultrapotencias de los operadores supertauberianos.

Proposición 3.9 *Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, son equivalentes:*
(a) $T \in \Psi_+(X,Y)$;
(b) $T_{\mathcal{U}} \in \Psi_+(X_{\mathcal{U}}, Y_{\mathcal{U}})$;
(c) $N(T_{\mathcal{U}}{}^{**}) \subset X_{\mathcal{U}}$;
(d) $T_{\mathcal{U}} \in \mathcal{T}_+(X_{\mathcal{U}}, Y_{\mathcal{U}})$.

Demostración. Sea $\{I_n : n \in \mathbf{N}\}$ una partición de I disjunta con $\mathcal{U}$.
(a)$\Rightarrow$(b) Supongamos que $T_{\mathcal{U}}$ no es supertauberiano. Entonces existe un $0 < \varepsilon < 1$ tal que para cada $n \in \mathbf{N}$ existen familias $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset S_{X_{\mathcal{U}}}$ y $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\} \subset S_{X_{\mathcal{U}}{}^*}$ verificando:

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_m) \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \le k \le m \le n \\ = 0, & \text{si } 1 \le m < k \le n \end{cases} \tag{5}$$

$$\|T_{\mathcal{U}} \mathbf{x}_k\| < 1/k, \quad 1 \le k \le n. \tag{6}$$

En virtud de la proposición 1.26, para cada $k = 1, 2, \dots, n$ podemos escribir $\mathbf{x}_k = [x_k^i]_i$ con $\|x_k^i\| = 1$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$ y todo $i \in I$. De la demostración del teorema 1.43 se deduce la existencia de un $I_0 \in \mathcal{U}$ tal que para cada $i \in I_0$, la aplicación

$$\begin{array}{llll} S_i : & \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle & \longrightarrow & X_i := \langle x_1^i, \dots, x_n^i \rangle \\ & \mathbf{x}_k & \mapsto & x_k^i \end{array}$$

es una $\varepsilon/2$-isometría. Tomando los funcionales $f_k^i := S_i^{*-1}(\mathbf{f}_k|_{X_i})$ y extendiéndolos a todo X, tenemos $1 - 2^{-1}\varepsilon \le \|f_k^i\| \le 1 + 2^{-1}\varepsilon$ para todo $k = 1, \dots, n$ y todo $i \in I_0$, y

$$f_k^i(x_m^i) = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_m) \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \le k \le m \le n \\ = 0, & \text{si } 1 \le m < k \le n. \end{cases} \tag{7}$$

Por otro lado, por (6), para cada $k = 1, 2, \dots, n$ se tiene $\lim_{\mathcal{U}(i)} \|Tx_k^i\| < 1/k$, y en consecuencia existe un $I_k \in \mathcal{U}$ tal que

$$\|Tx_k^i\| < 1/k \qquad \text{para todo} \quad i \in I_k. \tag{8}$$

Entonces $J := \bigcap_{k=0}^n I_k \in \mathcal{U}$, lo que asegura la existencia de un $j \in J$. Para cada $k = 1, \dots, n$ tomamos $g_k = \|f_k^j\|^{-1} f_k^j$. Entonces $\|x_k^j\| = \|g_k\| = 1$ para $k = 1, 2, \dots, n$, y como $j \in I_0$, por las condiciones (7) tenemos $g_k(x_m^j) > 2\varepsilon(2+\varepsilon)^{-1}$ si $1 \le k \le m \le n$ y $g_k(x_m^j) = 0$ si $1 \le m < k \le n$. Y de (8) y $j \in I_1 \cap \dots \cap I_n$, se sigue $\|Tx_k^j\| < 1/k$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$. Esto muestra que T no es supertauberiano.
(b)$\Rightarrow$(c) Si $T_{\mathcal{U}}$ es supertauberiano, de la definición 3.3 se sigue que no hay $0 < \varepsilon < 1$ para el que existan sucesiones $(\mathbf{x}_n) \subset S_{X_{\mathcal{U}}}$ y $(\mathbf{f}_n) \subset S_{X_{\mathcal{U}}{}^*}$ cumpliendo $\|T_{\mathcal{U}} \mathbf{x}_k\| < 1/k$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$ y

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_m) = \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \le k \le m < \infty \\ = 0, & \text{si } 1 \le m < k < \infty, \end{cases}$$

y entonces, por la proposición 2.46 se tiene $N(T_{\mathcal{U}}{}^{**}) \subset X_{\mathcal{U}}$.
(c)$\Rightarrow$(d) Por el lema 1.35, $T_{\mathcal{U}}(B_{X_{\mathcal{U}}})$ es cerrada, y del resultado 2.29(c) de Kalton y Wilansky se sigue que $T_{\mathcal{U}}$ es tauberiano.
(d)$\Rightarrow$(a) Supongamos que T no es supertauberiano. Entonces existe un $0 < \varepsilon < 1$ tal que para cada $n \in \mathbf{N}$ existen familias $\{x_1^n, x_2^n, \dots, x_n^n\} \subset S_X$ y $\{f_1^n, f_2^n, \dots, f_n^n\} \subset S_{X^*}$ verificando

$$f_k^n(x_m^n) \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \le k \le m \le n \\ = 0, & \text{si } 1 \le m < k \le n \end{cases}$$
$$\|Tx_k^n\| < 1/n, \qquad \text{para todo} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Escribamos $x_k^n = 0 \in X$ y $f_k^n = 0 \in X^*$ si $n < k$, y para cada $m \in \mathbf{N}$ consideremos los elementos

$$\mathbf{z}_m := [z_m^i] \in S_{X_{\mathcal{U}}}, \quad \text{donde} \quad z_m^i = x_m^n \quad \text{si} \quad i \in I_n,$$
$$\mathbf{g}_m := [g_m^i] \in S_{X_{\mathcal{U}}^*}, \quad \text{donde} \quad g_m^i = f_m^n, \quad \text{si} \quad i \in I_n.$$

Entonces, para cada $m \in \mathbf{N}$ se cumple

$$\{i \in I : \|Tz_m^i\| \le 1/n\} \supset \bigcap_{k=n}^{\infty} I_k \in \mathcal{U},$$

luego

$$\mathbf{z}_m \in N(T_{\mathcal{U}}) \qquad \text{para todo} \quad m \in \mathbf{N}. \tag{9}$$

Además, si $m < k$:

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{z}_m) = \lim_{\mathcal{U}(i)} g_k^i(z_m^i) = 0 \tag{10}$$

y si $k \le m$, teniendo en cuenta que $J := \bigcup_{n=m}^{\infty} I_n \in \mathcal{U}$, y que para todo $i \in J$ se verifica $g_k^i(z_m^i) > \varepsilon$, entonces

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{z}_m) = \lim_{\mathcal{U}(i)} g_k^i(z_m^i) > \varepsilon/2. \tag{11}$$

Ahora, como para todo $k \in \mathbf{N}$ es $1 = \|\mathbf{z}_k\| = \|\mathbf{g}_k\|$, de (9), (10), (11) y la proposición 2.39 se deduce que $N(T_{\mathcal{U}})$ no es reflexivo, y por tanto $T_{\mathcal{U}}$ no es tauberiano en contradicción con (d). □

De esta última proposición se deduce que la clase $\Psi_+(X, Y)$ está contenida en $\mathcal{T}_+(X, Y)$, esto es:

Corolario 3.10 *Todo operador supertauberiano es tauberiano.*

Demostración. Sea un operador supertauberiano $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$, y teniendo en cuenta que la restricción de un operador tauberiano es tauberiana, por la proposición 3.9 tenemos $T = T_{\mathcal{U}}|_X \in \mathcal{T}_+(X, Y)$. □

Otra consecuencia de la proposición 3.9 es la siguiente.

Proposición 3.11 *Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, son equivalentes:*
(a) $T \in \Psi_+(X,Y)$*;*
(b) $N(T_\mathcal{U})$ *es superreflexivo;*
(c) $N(T_\mathcal{U})$ *es reflexivo.*

Demostración.
(a)$\Rightarrow$(b) Si T es supertauberiano, por la proposición 3.9(b) $T_\mathcal{U}$ es supertauberiano, de donde resulta inmediato que $N(T_\mathcal{U})$ es superreflexivo.
(b)$\Rightarrow$(c) Trivial.
(c)$\Rightarrow$(a) Basta utilizar el mismo argumento que el de la implicación (d)$\Rightarrow$(a) de la proposición 3.9. $\square$

La siguiente caracterización, inspirada en un resultado de análisis no-estándar de Tacon [49], es fundamental para probar que la clase $\Psi_+(X,Y)$ es abierta y para obtener una caracterización perturbativa tipo Lebow-Schechter para la clase $\Psi_+(X,Y)$.

Proposición 3.12 *Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, son equivalentes:*
(a) $T \in \Psi_+(X,Y)$*;*
(b) *existen $0 < \varepsilon < 1$, un $n \in \mathbf{N}$ y un $\delta > 0$ para los que no hay familias $\{x_1,\dots,x_n\}$ en S_X y $\{f_1,\dots,f_n\}$ en S_{X^*} verificando:*

$$f_k(x_m)\begin{cases} > \varepsilon, & si\ 1 \le k \le m \le n \\ = 0, & si\ 1 \le m < k \le n \end{cases}$$
$$\|Tx_k\| < \delta, \quad si \quad 1 \le k \le n.$$

Demostración.
(a)$\Rightarrow$(b) Si T es supertauberiano, por la proposición 3.4 se verifica que para cualquier $0 < \varepsilon < 1$ se pueden encontrar un $n \in \mathbf{N}$ y un $\delta > 0$ para los que no existen familias $\{x_1,\dots,x_n\}$ en S_X y $\{f_1,\dots,f_n\}$ en S_{X^*} tales que $\|Tx_k\| < \delta$ si $k = 1,2,\dots,n$ y

$$f_k(x_m)\begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \le k \le m \le n \\ = 0, & \text{si } 1 \le m < k \le n, \end{cases}$$

de donde resulta inmediata la condición (b).
(b)$\Rightarrow$(a) Si T no es supertauberiano, por la proposición 3.11 $N(T_\mathcal{U})$ no es superreflexivo. Veamos entonces que T no verifica la condición (b).

Sean $n \in \mathbf{N}$, $0 < \varepsilon < 1$ y $\delta > 0$ cualesquiera, y elijamos un $\varepsilon' \in (\varepsilon, 2\varepsilon) \cap (0,1)$. Como $N(T_\mathcal{U})$ no es superreflexivo, por proposición 3.1 y el teorema de Hahn-Banach existen familias $\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n\}$ en $S_{N(T_\mathcal{U})}$ y $\{\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_n\}$ en $S_{X_\mathcal{U}{}^*}$ tales que

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_m)\begin{cases} > \varepsilon', & \text{si } 1 \le k \le m \le n \\ = 0, & \text{si } 1 \le m < k \le n. \end{cases}$$

Por la proposición 1.26, podemos escribir $\mathbf{x}_k = [x_k^i]_i$, con $\|x_k^i\| = 1$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$ y todo $i \in I$.

Sea $X_n := \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \rangle$. Notemos que $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ es una base de X_n.

Por hipótesis, cada elemento $\mathbf{x}_k$ pertenece a $N(T_\mathcal{U})$, luego existen $I_k \in \mathcal{U}$, con $k = 1, 2, \ldots, n$, tales que $\|Tx_k^i\| < \delta$ para todo $i \in I_k$.

Por otra parte, dado $\delta' := (\varepsilon' - \varepsilon)\varepsilon^{-1}$, por la elección de ε' se tiene que $0 < \delta' < 1$, y entonces, por la demostración del teorema 1.43 existe $I_0 \in \mathcal{U}$ tal que, para cada $i \in I_0$, la aplicación S_i definida por

$$\begin{array}{rccc} S_i : & X_n & \longrightarrow & X \\ & \mathbf{x}_k & \mapsto & x_k^i \end{array}$$

es una δ'-isometría. Fijemos un $j \in I_0 \cap I_1 \cap \ldots \cap I_n \in \mathcal{U}$. Como la aplicación $S_j^* : S(X_n)^* \longrightarrow X_n^*$ es una δ'-isometría, para $k = 1, 2, \ldots, n$ podemos encontrar funcionales $f_k \in X^*$ tales que $\|f_k\| < 1 + \delta'$ y

$$f_k + S_j(X_n)^\perp = (S_j^*)^{-1}(\mathbf{f}_k|_{X_n}).$$

Tomemos ahora $g_k := \|f_k\|^{-1} f_k \in S_{X^*}$, con $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces:

$$\begin{aligned} g_k(x_m^j) &= \big(g_k + S_j(X_n)^\perp\big)(S_j\mathbf{x}_m) = \\ &= \|f_k\|^{-1} S_j^*\big(f_k + S_j(X_n)^\perp\big)(\mathbf{x}_m) = \|f_k\|^{-1}\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_m) \end{aligned}$$

luego

$$g_k(x_m^j) \begin{cases} > \|f_k\|^{-1}\varepsilon' > (1+\delta')^{-1}\varepsilon' = \varepsilon, & \text{si } 1 \le k \le m \le n \\ = 0, & \text{si } 1 \le m < k \le n, \end{cases}$$

y como además $\|Tx_k^j\| < \delta$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces T no verifica (b), tal como queríamos ver. □

La proposición 3.11 proporciona los primeros ejemplos de operadores supertauberianos.

Proposición 3.13 *Si $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ tiene rango cerrado, entonces T es supertauberiano si y sólo si su núcleo es superreflexivo.*

Demostración. Si T es supertauberiano, su núcleo siempre es superreflexivo.

Recíprocamente, supongamos $N(T)$ superreflexivo. Por las observaciones hechas al corolario 1.47, $N(T)_\mathcal{U}$ es reflexivo. Pero $R(T)$ es cerrado, luego por proposición 1.37, $N(T_\mathcal{U}) = N(T)_\mathcal{U}$. Entonces $N(T_\mathcal{U})$ es reflexivo, y por proposición 3.11, T es supertauberiano. □

Como consecuencia de la proposición previa tenemos que todo operador F_+ es supertauberiano. Entonces, por el corolario 3.10 podemos escribir

$$F_+(X, Y) \subset \Psi_+(X, Y) \subset \mathcal{T}_+(X, Y).$$

Corolario 3.14 *Si M es un subespacio cerrado de X, entonces el operador cociente $q_M : X \longrightarrow X/M$ es supertauberiano si y sólo si M es superreflexivo.*

Demostración. En vista de la proposición 3.13, basta considerar que $R(q_M)$ es cerrado y que $N(q_M) = M$. □

En analogía a un resultado para operadores tauberianos [18], tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.15 *Sean los operadores $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$:*

i) si T y S son supertauberianos, entonces ST es supertauberiano;

ii) si ST es supertauberiano, entonces T es supertauberiano.

Demostración.

i) Por proposición 3.9, $T_{\mathcal{U}}$ y $S_{\mathcal{U}}$ son tauberianos, luego $(ST)_{\mathcal{U}} = S_{\mathcal{U}}T_{\mathcal{U}} \in \mathcal{T}_+(X_{\mathcal{U}}, Y_{\mathcal{U}})$. Esto prueba que ST es supertauberiano.

ii) Como ST es supertauberiano, $S_{\mathcal{U}}T_{\mathcal{U}} = (ST)_{\mathcal{U}}$ es tauberiano. Entonces $T_{\mathcal{U}}$ es tauberiano, y por tanto, T es supertauberiano. □

Los operadores supertauberianos son estables bajo perturbaciones super-w-compactas.

Proposición 3.16 *Si $T \in \Psi_+(X,Y)$ y $K \in SWCo(X,Y)$, entonces $T + K \in \Psi_+(X,Y)$.*

Demostración. Por las proposiciones octr y 3.9 tenemos respectivamente que $K_{\mathcal{U}}$ es w-compacto y $T_{\mathcal{U}}$ es tauberiano, y por proposición 2.48, se cumple

$$(T+K)_{\mathcal{U}} = T_{\mathcal{U}} + K_{\mathcal{U}} \in \mathcal{T}_+(X_{\mathcal{U}}, Y_{\mathcal{U}}).$$

Nuevamente por la proposición 3.9, $T + K$ pertenece a $\Psi_+(X,Y)$. □

Con la ayuda de los métodos no-estándard, Tacon [49; tma.4.3] demostróque la clase $\Psi_+(X,Y)$ es abierta. A continuación damos una prueba de tipo clásico más sencilla que la de Tacon.

Proposición 3.17 *La clase $\Psi_+(X,Y)$ de los operadores supertauberianos es un conjunto abierto en $\mathcal{B}(X,Y)$.*

Demostración. Supongamos que $\Psi_+(X,Y)$ no es abierto. Entonces existe un operador $T \in \Psi_+(X,Y)$ y una sucesión de operadores (T_m) en $\mathcal{B}(X,Y)$ verificando $\|T_m\| < 1/m$ y $T + T_m \notin \Psi_+(X,Y)$ para todo $m \in \mathbf{N}$.

Sean $0 < \varepsilon < 1$ y $n \in \mathbf{N}$ cualesquiera. Como $T + T_{2n} \notin \Psi_+(X,Y)$, por la proposición 3.12 existen familias $\{x_1, \ldots, x_n\}$ en S_X y $\{f_1, \ldots, f_n\}$ en S_{X^*} satisfaciendo las condiciones

$$f_k(x_m) \begin{cases} > \varepsilon & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0 & \text{si } 1 \leq m < k \leq n \end{cases} \tag{12}$$

$$\|(T + T_{2n})(x_k)\| < 1/2n \quad \text{para todo} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Entonces, de (13) se deduce

$$\|Tx_k\| < \frac{1}{2n} + \|T_{2n}\| < 1/n. \tag{14}$$

Las condiciones (12) y (14) determinan que T no es supertauberiano, lo cual nos lleva a contradicción. □

Las caracterizaciones perturbativas para los operadores semi-Fredholm (teorema 2.11) y resultados análogos en [21] sugieren el siguiente procedimiento para obtener clases de operadores a partir de un ideal $\mathcal{A}$ de operadores: se consideran los ideales de espacios $Sp(\mathcal{A})$ y $Sp(\mathcal{A}^d)$ asociados a $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^* := \{T^* : T \in \mathcal{A}\}$, dados por

$$
\begin{aligned}
Sp(\mathcal{A}) &:= \{X : I_X \in \mathcal{A}\}\\
Sp(\mathcal{A}^d) &:= \{X : I_{X^*} \in \mathcal{A}\}.
\end{aligned}
$$

Entonces se dice que $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ pertenece a la clase $G\mathcal{A}_+$ si $N(T+K) \in Sp(\mathcal{A})$ para todo $K \in \mathcal{A}$, y $S \in \mathcal{B}(X,Y)$ pertenece a $G\mathcal{A}_-$ si $Y/\overline{R(S+K)} \in Sp(\mathcal{A}^d)$ para todo $K \in \mathcal{A}$.

Desde este punto de vista, $Sp(Co)$, $Sp(WCo)$ y $Sp(SWCo)$ son los respectivos ideales de los espacios de dimensión finita, reflexivos, y superreflexivos, y el teorema 2.11 y proposición 2.35 permiten escribir $GCo_\pm = F_\pm$ y $GWCo_\pm = \mathcal{T}_\pm$.

En el siguiente teorema probamos precisamente que la clase $GSWCo_+$ coincide con Ψ_+. Para ello necesitamos un lema previo.

Lema 3.18 *Sean X un espacio de Banach, $\varepsilon > 0$ un número real, y familias $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset S_X$ y $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset S_{X^*}$ verificando*

$$
f_k(x_m) = \begin{cases} > \varepsilon, & si\ 1 \le k \le m \le n\\ = 0, & si\ 1 \le m < k \le n. \end{cases}
$$

Entonces existe una familia $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subset X^*$ tal que $g_k(x_m) = \delta_{km}$ y $\|g_k\| \le \varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^{-1})^{n-1}$ para todo $1 \le k \le n$.

Demostración. Construiremos los funcionales g_k recursivamente: denotemos $f_k^0 = f_k$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ y consideremos los nuevos funcionales

$$
f_k^1 \begin{cases} = f_k^0 - \frac{f_k^0(x_n)}{f_n^0(x_n)} f_n^0, & \text{si } 1 \le k \le n-1\\ = f_n^0, & \text{si } k = n. \end{cases}
$$

Si fuese $n = 2$, bastaría tomar $g_k := \left(f_k^1(x_k)\right)^{-1} f_k^1$ y habríamos terminado. Supongamos que $n \ge 3$ y que para $1 \le p < n-1$ y $k = 1, 2, \ldots, n$ tenemos funcionales f_k^p verificando las condiciones

$$
\begin{aligned}
&\|f_k^p\| \le (1+\varepsilon^{-1})^p \qquad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n\\
&f_k^p(x_m) = f_k^{p-1}(x_m) \qquad \text{para} \quad 1 \le m \le n-p\\
&f_k^p(x_m) = \delta_{km} f_k^{p-1}(x_m) \qquad \text{para} \quad n-p+1 \le m \le n.
\end{aligned}
$$

Definamos los funcionales f_k^{p+1} dados por:

$$
f_k^{p+1} : \begin{cases} = f_k^p - \frac{f_k^p(x_{n-p})}{f_{n-p}^p(x_{n-p})} f_{n-p}^p, & \text{para } 1 \le k \le n-p-1\\ = f_k^p, & \text{para } n-p \le k \le n. \end{cases}
$$

Estos funcionales verifican

$$\begin{aligned}
&\|f_k^{p+1}\| \leq (1+\varepsilon^{-1})^{p+1} \qquad \text{para} \quad k = 1,2,\ldots,n \\
&f_k^{p+1}(x_m) = f_k^p(x_m) \qquad \text{para} \quad 1 \leq m \leq n-p-1 \\
&f_k^{p+1}(x_m) = \delta_{km} f_k^p(x_m) \qquad \text{para} \quad n-p \leq k \leq n.
\end{aligned}$$

Ahora, para $k = 1,\ldots,n$ los funcionales $g_k := \big(f_k^{n-1}(x_k)\big)^{-1} f_k^{n-1}$ satisfacen las condiciones requeridas. □

Teorema 3.19 *Un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es supertauberiano si y sólo si para todo operador compacto $K \in Co(X,Y)$ se verifica que el núcleo $N(T+K)$ es superreflexivo.*

Demostración. Supongamos que T es supertauberiano, y sea $K \in \mathcal{B}(X,Y)$ un operador compacto. Por el corolario 3.6, K es super-w-compacto, y por la proposición 3.16, $T+K$ es supertauberiano. Entonces $N(T+K)$ es superreflexivo.

Supongamos ahora que T no es supertauberiano, y encontremos un operador compacto K tal que $T+K$ tenga núcleo no superreflexivo.

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Para cada $n \in \mathbf{N}$, obtendremos recursivamente familias

$$(x_k^n) \subset S_X,\ (f_k^n) \subset S_{X^*},\ \text{y } (h_k^n) \subset X^* \text{ para } n \in \mathbf{N} \text{ y } 1 \leq k \leq n$$

tales que

$$h_k^r(x_m^s) = \delta_{rs}\delta_{km} \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^n \|h_k^n\|\|Tx_k^n\| < 2^{-n} \tag{16}$$

$$f_k^n(x_m^n) = \begin{cases} > \varepsilon & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0 & \text{si } 1 \leq m < k \leq n. \end{cases} \tag{17}$$

Primero, por proposición 3.4 existen $x_1^1 \in S_X$ y $f_1^1 \in S_{X^*}$ tales que $f_1^1(x_1^1) > \varepsilon$ y $\|Tx_1^1\| < 2^{-1}\varepsilon$; y por el lema 3.18, existe $g_1^1 \in \varepsilon^{-1}S_{X^*}$ tal que $g_1^1(x_1^1) = 1$. Escribamos $h_1^1 = g_1^1$.

Para $n \geq 2$, supongamos que ya hemos obtenido los elementos x_k^p, f_k^p y h_k^p para $1 \leq p \leq n-1$ y $1 \leq k \leq p$.

Sea P la proyección sobre X con núcleo y rango dados por

$$N(P) = \bigoplus_{p=1}^{n-1} \langle x_k^p : k = 1,2,\ldots,k \rangle$$

y

$$R(P) = \bigcap_{p=1}^{n-1} \bigcap_{k=1}^{p} N(h_k^p).$$

Sea I_X el operador identidad sobre X. Evidentemente, $R(I_X - P)$ tiene dimensión finita, luego $T \circ (I_X - P)$ es compacto. Ahora, como T no es supertauberiano y $T = TP + T \circ (I_X - P)$, de la proposición 3.16 se sigue que TP no es supertauberiano, o equivalentemente, la restricción $T|_{R(P)}$ no es supertauberiana. Entonces, tomando

$$\delta = \left(n2^n\varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^{-1})^{n-1}\|P\|\right)^{-1}$$

por la proposición 3.12 existen elementos

$$\{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n\} \subset S_{R(P)}$$

y funcionales

$$\{f_1^n, f_2^n, \ldots, f_n^n\} \subset S_{X^*}$$

verificando

$$\|Tx_k^n\| < \delta \tag{18}$$

$$f_k^n(x_m^n) = \begin{cases} > \varepsilon & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0 & \text{si } 1 \leq m < k \leq n. \end{cases} \tag{19}$$

Aplicando ahora el lema 3.18 en (19), obtenemos funcionales

$$\{g_1^n, g_2^n, \ldots, g_n^n\} \subset X^*$$

tales que $\|g_k^n\| \leq \varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^{-1})^{n-1}$ y $g_k^n(x_m^n) = \delta_{km}$. Los funcionales h_k^n buscados son

$$h_k^n = g_k^n \circ P \in \|P\|\varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^{-1})^{n-1}S_{X^*}.$$

La fórmula (19) demuestra que la condición (17) es satisfecha. La condición (15) queda garantizada por la construcción de la proyección P. Comprobémoslo:

Si $r < n$, entonces $h_k^r(x_m^n) = 0$ debido a que $x_m^n \in R(P) \subset N(h_k^r)$; y $h_k^n(x_m^r) = 0$ se debe a que $x_m^r \in N(P)$.

Finalmente, como $x_m^n \in R(P)$, entonces $Px_m^n = x_m^n$, y en consecuencia, $h_k^n(x_m^n) = g_k^n(x_m^n) = \delta_{km}$.

La condición (16) se cumple gracias a la elección de δ y a la condición (18). Ahora, por (18) tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n}\|h_k^n\|\|Tx_k^n\|) < 1$, lo que nos permite definir el operador $K : X \longrightarrow Y$ mediante

$$Kx = -\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} h_k^n(x) \cdot Tx_k^n\right].$$

Evidentemente, K es compacto por ser aproximable por operadores de rango finito. Por (15), cada x_k^n pertenece a $N(T+K)$; entonces, la relación (17) muestra que $N(T+K)$ no es superreflexivo, tal como queríamos probar. $\square$

Observación. El operador compacto K de la anterior demostración puede tomarse con norma arbitrariamente pequeña. Basta considerar el operador

$$Qx = -\sum_{n=q+1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} h_k^n(x)\cdot Tx_k^n\right].$$

Para este nuevo operador se sigue cumpliendo que $N(T+Q)$ no es superreflexivo, y además $\|Q\| < 2^{-q}$.

Destacamos que, en el caso de los operadores F_+, las caracterizaciones perturbativas tenían su aplicación dentro de las técnicas de ultraproducto. En el caso de los operadores Ψ_+, han sido las técnicas ultraproducto las que se han revelado indispensables en la obtención de la correspondiente caracterización perturbativa.

Del teorema 3.19 se deducen interesantes consecuencias. Una de ellas es una caracterización de ciertos espacios de Banach en términos de operadores supertauberianos.

Proposición 3.20 *Sea X un espacio de Banach.*

a) Los subespacios superreflexivos de X tienen dimensión finita si y sólo si $\Psi_+(X,Y) = F_+(X,Y)$ para todo Y.

b) Los subespacios reflexivos de X son superreflexivos si y sólo si se verifica $\mathcal{T}_+(X,Y) = \Psi_+(X,Y)$ para todo Y.

Demostración.
a) Supongamos que los subespacios superreflexivos de X tienen dimensión finita, y sea $T \in \Psi_+(X,Y)$. Por el teorema 3.19, para cada operador compacto $K \in \mathcal{B}(X,Y)$ tenemos que $N(T+K)$ es superreflexivo, y por tanto de dimensión finita. La caracterización perturbativa de Lebow y Schechter (teorema 2.11) prueba que $T \in F_+(X,Y)$.

Recíprocamente, si X contiene un subespacio superreflexivo M de dimensión infinita, el operador cociente $q_M : X \longrightarrow X/M$ no es F_+. Pero el corolario 3.14 dice que q_M es supertauberiano.

b) Supongamos que los subespacios reflexivos de X son superreflexivos, y sea $T \in \mathcal{T}_+(X,Y)$. La caracterización perturbativa de González y Onieva (proposición 2.35) nos da que, para cada operador compacto $K \in \mathcal{B}(X,Y)$, $N(T+K)$ es reflexivo, y por tanto superreflexivo. Aplicando el teorema 3.19 obtenemos que T es supertauberiano.

Supongamos ahora que X contiene un subespacio reflexivo, no superreflexivo M. Por el corolario 3.14, el operador cociente $q_M : X \longrightarrow X/M$ no es supertauberiano. Sin embargo, por la proposición 2.28(c), q_M es tauberiano.

$\square$

Las situaciones descritas en la anterior proposición no son triviales. Por ejemplo, el espacio de Tsirelson, $\mathcal{T}$ [9; tma.I.8] es reflexivo pero no contiene subespacios superreflexivos de dimensión infinita. Entonces para todo espacio de Banach Y tenemos:

$$F_+(\mathcal{T},Y) = \Psi_+(\mathcal{T},Y) \neq \mathcal{T}_+(\mathcal{T},Y) = \mathcal{B}(\mathcal{T},Y).$$

Por otro lado, $L_1[0,1]$ no es reflexivo, pero contiene subespacios reflexivos de dimensión infinita, y además, todos sus subespacios reflexivos son superreflexivos (vése sección 4.1). Entonces

$$F_+(L_1[0,1],Y) \neq \Psi_+(L_1[0,1],Y) = \mathcal{T}_+(L_1[0,1],Y) \neq \mathcal{B}(L_1[0,1],Y).$$

Otra situación en la que los subespacios reflexivos de X son superreflexivos, se produce cuando X es un espacio $L_1(\mu)$ o es el dual de una C^*-álgebra [30]. Por tanto, ahí también es aplicable la proposición 3.20.

Una nueva consecuencia del teorema 3.19 es una caracterización de tipo algebraico para los operadores supertauberianos.

Proposición 3.21 *Sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Son equivalentes:*
(a) *T es supertauberiano;*
(b) *para cada espacio Z y cada operador $A \in \mathcal{B}(Z,X)$ tal que TA es super-w-compacto, A es super-w-compacto;*
(c) *para cada subespacio cerrado M de X tal que $T|_M$ es super-w-compacto, M es superreflexivo.*

Demostración.
(a)⇒(b) Supongamos T es supertauberiano y TA super-w-compacto. Por las proposiciones 3.9 y 3.5, $T_{\mathcal{U}}$ es tauberiano y $(TA)_{\mathcal{U}} = T_{\mathcal{U}}A_{\mathcal{U}}$ es w-compacto. Entonces, por [21; tma.2], $A_{\mathcal{U}}$ es w-compacto y, consecuentemente, A es super-w-compacto.
(b)⇒(c) Sea $M \subset X$ tal que $T|_M$ es super-w-compacto, e $\imath_M : M \longrightarrow X$ el operador inclusión. Por hipótesis (b), el operador $\imath_M$ es super-w-compacto, y en consecuencia M es superreflexivo.
(c)⇒(a) Si T no es supertauberiano, por el teorema 3.19 existe un operador compacto K tal que $M := N(T-K)$ no es superreflexivo. Entonces $T \circ \imath_M = K \circ \imath_M$ es trivialmente super-w-compacto, y por tanto, la hipótesis (c) implica que M es superreflexivo, lo que produce contradicción. □

En la proposición anterior, la equivalencia (b)⇔(a) puede probarse sin usar la caracterización perturbativa 3.19.

Proposición 3.22 *Un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es supertauberiano si y sólo si $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ es super-w-compacto cuando TA es super-w-compacto.*

Demostración. Si T es supertauberiano, nos remitimos a la demostración de (a)⇒(b) en la proposición anterior.

Supongamos que T no es supertauberiano. Entonces existe un $0 < \varepsilon < 1$ tal que para todo $n \in \mathbf{N}$ podemos encontrar familias $\{x_1^n, \ldots, x_n^n\} \subset S_X$ y $\{f_1^n, \ldots, f_n^n\} \subset S_{X^*}$ tales que

$$f_k^n(x_m^n) \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k \leq n \end{cases}$$
$$\|Tx_k^n\| < 1/n, \qquad \text{para todo} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Consideremos el espacio $\ell_1(\ell_1^n) := \ell_1^1 \oplus_1 \ell_1^2 \oplus_1 \ell_1^3 \oplus_1 \overset{\infty}{\ldots}$, que obviamente es isométrico a ℓ_1. Para cada $n \in \mathbf{N}$, denotemos e_k^n, $1 \leq k \leq n$, a los elementos de la base canónica de ℓ_1^n. Sea el operador $A : \ell_1(\ell_1^n) \longrightarrow X$ dado por $A(e_k^n) = x_k^n$. Como para cada $a = (a_i^n)_{\substack{1\leq n<\infty \\ 1\leq i\leq n}} \in \ell_1(\ell_1^n)$ se cumple

$$\|Aa\| = \| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i^n x_i^n \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_i^n| = \|a\|,$$

tenemos que A es acotado. Pero A no es super-w-compacto ya que para cada $n \in \mathbf{N}$ se verifica

$$f_k^n(Ae_m^n) = \begin{cases} > \varepsilon & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0 & \text{si } 1 \leq m < k \leq n. \end{cases}$$

Veamos que $S := TA$ es compacto. Tomemos un $k \in \mathbf{N}$ y denotemos por P a la proyección sobre

$$\ell_1^k \oplus_1 \ell_1^{k+1} \oplus_1 \overset{\infty}{\ldots}$$

con núcleo $\ell_1^1 \oplus_1 \ldots \oplus_1 \ell_1^{k-1}$. Es fácil ver, como antes hicimos con A, que $\|TP\| < 1/k$, y $T(I-P)$ es de rango finito. Entonces T es aproximable por operadores de rango finito, y por tanto T es compacto. $\square$

3.2 Operadores cosupertauberianos.

Tacon define el concepto de operador cosupertauberiano como seguidamente indicamos.

Definición 3.23 [50] *Se dice que el operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es cosupertauberiano si su conjugado T^* es supertauberiano.*

Al conjunto de todos los operadores cosupertauberianos de $\mathcal{B}(X,Y)$ lo denotaremos $\Psi_-(X,Y)$.

Teniendo en cuenta que la clase $\Psi_+(X,Y)$ es abierta (proposición 3.17), por dualidad es inmediato comprobar que $\Psi_-(X,Y)$ es abierta.

Lema 3.24 *Para todo operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ se verifican los contenidos:*

$$N(T^*)_{\mathcal{U}} \subset N({T^*}_{\mathcal{U}}) \subset N({T_{\mathcal{U}}}^*).$$

Demostración. El primer contenido ya ha sido visto en la proposición 1.37. El segundo contenido se debe a que ${T^*}_{\mathcal{U}} = {T_{\mathcal{U}}}^*|_{{Y^*}_{\mathcal{U}}}$. En efecto, dado $[g_i] \in {Y^*}_{\mathcal{U}}$, tenemos

$${T_{\mathcal{U}}}^*([g_i]) = [g_i] \circ T_{\mathcal{U}} = [g_i \circ T] = [T^*(g_i)] = {T^*}_{\mathcal{U}}[g_i].$$

$\square$

El primer contenido del lema anterior es igualdad si y sólo si $R(T)$ es cerrado. A lo largo de esta sección veremos que el segundo contenido es igualdad si y sólo si $Y_{\mathcal{U}}/\overline{R(T_{\mathcal{U}})}$ es superreflexivo, lo que a su vez equivale a decir que T es cosupertauberiano. Recordemos que $\left[Y_{\mathcal{U}}/\overline{R(T_{\mathcal{U}})}\right]^*$ se identifica con $N(T_{\mathcal{U}}{}^*)$.

En las proposiciones 1.52 y 1.50 vimos que $X^*{}_{\mathcal{U}}$ es w^*-denso en $X_{\mathcal{U}}{}^*$; el argumento allí empleado es aplicable para probar que, si T es un operador de rango cerrado, entonces $N(T^*{}_{\mathcal{U}})$ es w^*-denso en $N(T_{\mathcal{U}}{}^*)$. Sin embargo, el citado argumento no es válido en el caso en que $R(T)$ es no cerrado.

Nuestra siguiente proposición nos permitirá probar que $N(T^*{}_{\mathcal{U}})$ es w^*-denso en $N(T_{\mathcal{U}}{}^*)$ para cualquier operador T, lo que tendrá importantes consecuencias en el estudio de los operadores cosupertauberianos.

Proposición 3.25 *Dados $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ y $0 < \delta < 1$, sean $\mathbf{y} \in Y_{\mathcal{U}}$ y $\mathbf{f} \in N(T_{\mathcal{U}}{}^*)$ tales que $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{f}\| = 1$. Entonces existe $\mathbf{g} \in N(T^*{}_{\mathcal{U}})$ tal que $\mathbf{g}(\mathbf{y}) \geq 1-\delta$.*

Demostración. De $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 1$ se sigue $\operatorname{dist}(\mathbf{y}, R(T_{\mathcal{U}})) = 1$. Entonces, para todo $m \in \mathbf{N}$, se cumple

$$\operatorname{dist}(\mathbf{y}, mT_{\mathcal{U}}B_{X_{\mathcal{U}}}) \geq 1. \tag{1}$$

Pongamos $\mathbf{y} = [y_i]$, con $\|y_i\| = 1$ para todo $i \in I$. Sea

$$J_m := \{i \in I : \operatorname{dist}(y_i, mTB_X) > 1-\delta\}.$$

Es inmediato que $J_m \in \mathcal{U}$, y $J_n \supset J_{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Por el lema 1.51 encontramos una sucesión $(C_n) \subset \mathcal{U}$ con $C_n \subset J_n$, $C_n \supset C_{n+1}$, $C_n \setminus C_{n+1} \neq \emptyset$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$. Tomamos además $C_0 = I$. Para cada $i \in I$, denotemos m_i al único número natural que cumple $i \in C_{m_i} \setminus C_{m_i+1}$, y consideremos el conjunto

$$K_i := y_i + m_i TB_X.$$

Por construcción, $K_i \cap (1-\delta)B_Y = \emptyset$. Usando el teorema de Hahn-Banach [51; I.A.11], elegimos $g_i \in S_{Y^*}$ tal que

$$\inf_{y \in K_i} g_i(y) \geq 1-\delta. \tag{2}$$

Entonces $g_i(y_i) \geq 1-\delta$ para todo $i \in I$, luego $[g_i](\mathbf{y}) \geq 1-\delta$. Además, como $|g_i(y_i)| \leq 1$, por (2), para cada $i \in C_m$ y cada $y \in TB_X$ obtenemos

$$|g_i(y)| \leq \delta/m.$$

En consecuencia, $[g_i]([z_i]) = 0$ para todo $[z_i] \in T_{\mathcal{U}}B_{X_{\mathcal{U}}}$, lo que permite tomar

$$\mathbf{g} := [g_i] \in R(T_{\mathcal{U}})^{\perp} \cap Y^*{}_{\mathcal{U}} = N(T^*{}_{\mathcal{U}}). \tag{3}$$

Finalmente, la condición (2) nos lleva a que $\mathbf{g}(\mathbf{y}) \geq 1-\delta$. □

De la proposición anterior se obtiene que $N(T^*{}_{\mathcal{U}})$ es un espacio normante de $Y/\overline{R(T_{\mathcal{U}})}$. Es decir:

Proposición 3.26 *Sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Para todo $\mathbf{y} \in Y_{\mathcal{U}}$ se verifica*

$$\left\|\mathbf{y} + \overline{R(T_{\mathcal{U}})}\right\| = \sup\left\{\mathbf{f}(\mathbf{y}) : \mathbf{f} \in N(T^*{}_{\mathcal{U}})\ ,\ \|\mathbf{f}\| = 1\right\}.$$

Demostración. Sea $\mathbf{y} \in Y_{\mathcal{U}}$ tal que $\|\mathbf{y} + \overline{R(T_{\mathcal{U}})}\| = 1$. teniendo en cuenta que $N({T_{\mathcal{U}}}^*) \equiv \left[Y_{\mathcal{U}}/\overline{R(T_{\mathcal{U}})}\right]^*$, existe un $\mathbf{g} \in N({T_{\mathcal{U}}}^*)$ tal que $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = 1$. Aplicando ahora la proposición 3.25, para todo $\delta > 0$ existe un $\mathbf{f} \in N(T^*{}_{\mathcal{U}})$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{y}) > 1 - \delta$, con lo que queda probada la proposición. □

Ahora resulta inmediata la siguiente proposición.

Proposición 3.27 *Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, se tiene $\overline{N(T^*{}_{\mathcal{U}})}^{w^*} = N({T_{\mathcal{U}}}^*)$.*

Una interesante consecuencia del resultado anterior es la siguiente caracterización para los operadores cosupertauberianos.

Proposición 3.28 *Sea el operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*
(a) *T es cosupertauberiano;*
(b) *$N({T_{\mathcal{U}}}^*)$ es superreflexivo;*
(c) *$N(T^*{}_{\mathcal{U}})$ es superreflexivo;*
(d) *$N({T_{\mathcal{U}}}^*)$ es reflexivo;*
(e) *$N(T^*{}_{\mathcal{U}})$ es reflexivo.*

Demostración.

Las implicaciones (b)⇒(c) y (d)⇒(e) se deben a que $N(T^*{}_{\mathcal{U}})$ es subespacio de $N({T_{\mathcal{U}}}^*)$.

(c)⇒(b) y (e)⇒(d) Si $N(T^*{}_{\mathcal{U}})$ es reflexivo, entonces $\overline{N(T^*{}_{\mathcal{U}})}^{w^*} = N(T^*{}_{\mathcal{U}})$. Por otro lado, por proposición 3.27 tenemos $\overline{N(T^*{}_{\mathcal{U}})}^{w^*} = N({T_{\mathcal{U}}}^*)$, es decir, $N(T^*{}_{\mathcal{U}}) = N({T_{\mathcal{U}}}^*)$ es reflexivo. El mismo razonamiento prueba que, si $N(T^*{}_{\mathcal{U}})$ es superreflexivo, entonces $N({T_{\mathcal{U}}}^*)$ también es superreflexivo.

(a)⇔(c)⇔(e) Por definición, T es cosupertauberiano si y sólo si T^* es supertauberiano, y por proposición 3.11, $N(T^*{}_{\mathcal{U}})$ reflexivo o superreflexivo equivale a que T^* es supertauberiano. □

La proposición precedente identifica a los operadores cosupertauberianos de rango cerrado, como a continuación probamos.

Proposición 3.29 *Si $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ tiene rango cerrado, entonces T es cosupertauberiano si y sólo si $Y/R(T)$ es superreflexivo.*

Demostración. Si T es cosupertauberiano y $R(T)$ cerrado, entonces $N(T^*) \equiv [Y/R(T)]^*$ es superreflexivo, y por tanto $Y/R(T)$ es superreflexivo..

Supongamos ahora que $Y/R(T)$ es superreflexivo. Entonces tenemos que $[Y/R(T)]_{\mathcal{U}} \equiv Y_{\mathcal{U}}/R(T)_{\mathcal{U}}$ es reflexivo. Por la proposición 1.38, $R(T_{\mathcal{U}}) = R(T)_{\mathcal{U}}$, y así $[Y_{\mathcal{U}}/R(T_{\mathcal{U}})]^* \equiv N({T_{\mathcal{U}}}^*)$ es reflexivo. La proposición 3.28 nos dice que T es cosupertauberiano. □

La proposición 3.29 prueba que todo operador F_- es cosupertauberiano, y como todo operador cosupertauberiano es cotauberiano, para todo par de espacios X e Y podemos escribir:

$$F_-(X,Y) \subset \Psi_-(X,Y) \subset \mathcal{T}_-(X,Y).$$

Veamos una inmediata consecuencia de la proposición 3.29.

Proposición 3.30 *Si M es un subespacio cerrado de X, entonces el operador inmersión $\imath_M : M \longrightarrow X$ es cosupertauberiano si y sólo si X/M es superreflexivo.*

De las proposiciones 3.27 y 3.28 se sigue que, si T es un operador cosupertauberiano, entonces $N(T^*{}_{\mathcal{U}}) = N(T_{\mathcal{U}}{}^*)$. La siguiente proposición, inspirada en un resultado de Tacon, muestra la implicación inversa. Obsérvese el uso implícito de la $\aleph_0$-incompletitud del ultrafiltro $\mathcal{U}$ a través del lema 1.51.

Proposición 3.31 *El operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es cosupertauberiano si y sólo si $N(T_{\mathcal{U}}{}^*) = N(T^*{}_{\mathcal{U}})$.*

Demostración. Si T es cosupertauberiano, por la proposición 3.28, $N(T^*{}_{\mathcal{U}})$ es reflexivo, esto es, $\overline{N(T^*{}_{\mathcal{U}})}^{w^*} = N(T^*{}_{\mathcal{U}})$, y aplicando la proposición 3.27 obtenemos $N(T^*{}_{\mathcal{U}}) = N(T_{\mathcal{U}}{}^*)$.

Supongamos ahora que $N(T^*{}_{\mathcal{U}}) = N(T_{\mathcal{U}}{}^*)$, y que T no es cosupertauberiano. Por la proposición 3.28, el espacio $N(T_{\mathcal{U}}{}^*) = N(T^*{}_{\mathcal{U}})$ es no reflexivo, y aplicando la proposición 2.39, obtenemos un $0 < \varepsilon < 1$, y sucesiones de elementos de norma uno,

$$\left(\mathbf{y}_n + \overline{R(T_{\mathcal{U}})}\right)_n \subset Y_{\mathcal{U}}/\overline{R(T_{\mathcal{U}})}$$

$$\left(\mathbf{f}_n\right)_n \subset \left[Y_{\mathcal{U}}/\overline{R(T_{\mathcal{U}})}\right]^* = N(T^*{}_{\mathcal{U}})$$

verificando la condición

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{y}_m) = \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \le k \le m < \infty \\ = 0, & \text{si } 1 \le m < k < \infty. \end{cases} \tag{4}$$

Escribamos $\mathbf{y}_n = [y_n^i]_i$ y $\mathbf{f}_n = [f_n^i]_i$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Sea $\mathbf{g} = [g_i]$ un punto de w^*-acumulación de $\{\mathbf{f}_n : n \in \mathbf{N}\}$ en $N(T^*{}_{\mathcal{U}})$. De la condición (4), se deduce

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}_n) = 0 \qquad \text{para todo} \quad n \in \mathbf{N}. \tag{5}$$

Por otro lado, las condiciones (4) y (5) nos permiten construir inductivamente la siguiente sucesión $\{A_n\}_n$ de elementos de $\mathcal{U}$:

$$A_1 := \{i \in I : \, g_i(y_1^i) < \varepsilon/2 \, , \, f_1^i(y_1^i) > \varepsilon \,\} \in \mathcal{U}$$
$$A_n := A_{n-1} \cap \{i \in I : \, g_i(y_n^i) < \varepsilon/2 \, , \, f_k^i(y_n^i) > \varepsilon \, , \, 1 \le k \le n \,\} \in \mathcal{U}.$$

Evidentemente, $\{A_n\}_n$ es monótona decreciente, y por el lema 1.51, encontramos otra sucesión monótona decreciente de elementos de $\mathcal{U}$, $\{C_n\}_n$, verificando $C_n \subset A_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$. Esto nos permite definir un elemento $[s_i] \in S_{Y_\mathcal{U}}$ dado por

$$s_i := y_k^i \quad \text{si} \quad i \in C_k \setminus C_{k+1}.$$

La elección de $[s_i]$ asegura que $\mathbf{g}([s_i]) > \varepsilon$ para todo $k \in \mathbf{N}$: en efecto, sea $k \in \mathbf{N}$ fijo. Para cada número natural $m > k$ y cada $i \in C_m \setminus C_{m+1}$, se cumple

$$f_k^i(s_i) = f_k^i(y_m^i) > \varepsilon,$$

y como $\bigcup_{m=k}^{\infty} (C_m \setminus C_{m+1}) \in \mathcal{U}$, entonces

$$\mathbf{f}_k([s_i]) = [f_k^i]([s_i]) \geq \varepsilon \qquad \text{para todo} \quad k \in \mathbf{N}.$$

De la expresión superior y de que $\mathbf{g}$ es punto de w^*-acumulación de $\{\mathbf{f}_n : n \in \mathbf{N}\}$, se sigue

$$\mathbf{g}([s_i]) \geq \varepsilon. \tag{6}$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbf{N}$ y cada $i \in C_n \setminus C_{n+1} \subset A_n$, se cumple $g_i(s_i) = g_i(y_n^i) < \varepsilon/2$, y considerando que $\bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \setminus C_{n+1}) \in \mathcal{U}$, llegamos a que

$$\mathbf{g}([s_i]) = [g_i]([s_i]) \leq \varepsilon/2,$$

lo que se contradice con (6). $\square$

El siguiente es otro teorema que caracteriza a los operadores cosupertauberianos.

Teorema 3.32 *Sea el operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) *$T \notin \Psi_-(X,Y)$;*

(b) *existe un $0 < \varepsilon < 1$ tal que para todo $n \in \mathbf{N}$ existen sucesiones finitas $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset S_Y$ y $\{g_1, \ldots, g_n\} \subset S_{Y^*}$ verificando*

$$g_m(y_k) = \begin{cases} > \varepsilon, & si\ 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & si\ 1 \leq m < k <\leq n \end{cases}$$
$$\|T^* g_k\| < 1/n, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

(c) *existen un $0 < \varepsilon < 1$ y sucesiones de elementos de norma uno $(\mathbf{z}_n) \subset Y_\mathcal{U}$, $(\mathbf{h}_n) \subset {Y_\mathcal{U}}^*$ tales que*

$$\mathbf{h}_m(\mathbf{z}_k) \begin{cases} > \varepsilon, & si\ 1 \leq k \leq m < \infty \\ = 0, & si\ 1 \leq m < k < \infty \end{cases}$$
$$\|{T_\mathcal{U}}^* \mathbf{h}_n\| < 1/n, \quad n \in \mathbf{N};$$

(d) *existe* $0 < \varepsilon < 1$ *tal que para todo* $n \in \mathbf{N}$ *existen familias finitas* $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\} \subset S_{Y_\mathcal{U}}$, $\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n\} \subset S_{Y_\mathcal{U}^*}$ *tales que* $\|T_\mathcal{U}{}^* \mathbf{g}_k\| < 1/n$ *para todo* $k = 1, 2, \ldots, n$, *y*

$$\mathbf{g}_m(\mathbf{y}_k) = \begin{cases} > \varepsilon, & si\ 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & si\ 1 \leq m < k \leq n. \end{cases}$$

Demostración. Nótese que (b) no es directamente equivalente a $T^* \notin \Psi_+(Y^*, X^*)$, pues los elementos y_n se toman en Y en lugar de en Y^{**}. Lo mismo sucede con (c) y (d).
(a)⇒(b) Supongamos que $T \notin \Psi_-(X, Y)$, es decir, $T^* \notin \Psi_+(Y^*, X^*)$. Por definición de operador supertauberiano, existe un $0 < \varepsilon < 1$ tal que para todo $n \in \mathbf{N}$, existen $\{g_1, \ldots, g_n\} \subset S_{Y^*}$ y $\{G_1, \ldots, G_n\} \subset S_{Y^{**}}$ cumpliendo $\|T^* g_k\| < 1/n$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, y

$$G_k(g_m) = \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k \leq n. \end{cases}$$

Consideremos los subespacios $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle \subset Y^*$ y $\langle G_1, \ldots, G_n \rangle \subset Y^{**}$. Usando el principio de reflexividad local, obtenemos elementos $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset S_Y$ verificando

$$g_m(y_k) = \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k \leq n \end{cases}$$

con lo cual, hemos obtenido (b).
(b)⇒(c) Sea $0 < \varepsilon < 1$ tal que para cada $n \in \mathbf{N}$ existen sucesiones finitas $\{y_1^n, y_2^n, \ldots, y_n^n\} \subset S_Y$ y $\{g_1^n, g_2^n, \ldots, g_n^n\} \subset S_{Y^*}$ satisfaciendo las condiciones

$$g_m^n(y_k^n) = \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k \leq n \end{cases}$$
$$\|T^* g_k^n\| < 1/n, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Si k y m son dos números naturales tales que $m < k$, escribamos $y_k^m = 0 \in Y$, $g_k^m = 0 \in Y^*$.

Sea $\{I_n : n \in \mathbf{N}\}$ una partición de I disjunta con $\mathcal{U}$ y consideremos las sucesiones de elementos de norma uno, $(\mathbf{z}_n) \subset Y_\mathcal{U}$, $(\mathbf{h}_n) \subset Y^*{}_\mathcal{U}$, definidas por

$$\mathbf{z}_n := [z_n^i]_i, \quad \text{donde} \quad z_n^i := y_n^k \quad \text{si} \quad i \in I_k,$$
$$\mathbf{h}_n := [h_n^i]_i, \quad \text{donde} \quad h_n^i := g_n^k \quad \text{si} \quad i \in I_k.$$

Es inmediato comprobar que

$$\mathbf{h}_m(\mathbf{z}_k) = \begin{cases} > \varepsilon/2, & \text{si } 1 \leq k \leq m < \infty \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k < \infty \end{cases}$$

y que $\|T^*{}_\mathcal{U} \mathbf{h}_n\| = \lim_{\mathcal{U}(i)} \|T^* h_n^i\| = 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

(c)$\Rightarrow$(d) Por hipótesis, existe $0 < \varepsilon < 1$ y sucesiones de elementos de norma uno, $(\mathbf{y}_n)_n \subset Y_{\mathcal{U}}$, $(\mathbf{f}_n)_n \subset {Y_{\mathcal{U}}}^*$ verificando $\|{T_{\mathcal{U}}}^*\mathbf{f}_n\| < 1/n$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{y}_m) = \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \leq k \leq m < \infty \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k < \infty. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbf{N}$, las familias $\{\mathbf{f}_{n+1}, \ldots, \mathbf{f}_{2n}\} \subset S_{Y_{\mathcal{U}}^*}$ y $\{\mathbf{y}_{n+1}, \ldots, \mathbf{f}_{2n}\} \subset S_{Y_{\mathcal{U}}}$ cumplen las condiciones de (d).

(d)$\Rightarrow$(a) Por hipótesis, existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que para cada $n \in \mathbf{N}$ existen $\{\mathbf{y}_1^n, \mathbf{y}_2^n \ldots, \mathbf{y}_n^n\} \subset S_{Y_{\mathcal{U}}}$ y $\{\mathbf{g}_1^n, \mathbf{g}_2^n, \ldots, \mathbf{g}_n^n\} \subset S_{Y_{\mathcal{U}}^*}$ tales que

$$\mathbf{g}_m^n(\mathbf{y}_k^n) = \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k \leq n \end{cases}$$

$$\|{T_{\mathcal{U}}}^*\mathbf{g}_k^n\| < 1/n, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Escribamos $\mathbf{y}_k^n = 0 \in Y_{\mathcal{U}}$ y $\mathbf{g}_k^n = 0 \in {Y_{\mathcal{U}}}^*$ si $n < k$. Sea $\mathcal{V}$ un ultrafiltro sobre $\mathbf{N}$, y consideremos las sucesiones de elementos de norma uno, $(\eta_k)_k \subset (Y_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}$ y $(\phi_k)_k \subset \left({Y_{\mathcal{U}}}^*\right)_{\mathcal{V}}$, dadas por

$$\eta_k = [\mathbf{y}_{k+n}^{2n}]_n \in (Y_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}, \quad k \in \mathbf{N}$$
$$\phi_k = [\mathbf{g}_{k+n}^{2n}]_n \in \left({Y_{\mathcal{U}}}^*\right)_{\mathcal{V}}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Dichas sucesiones verifican

$$\phi_m(\eta_k) = \begin{cases} > \varepsilon/2, & \text{si } 1 \leq k \leq m < \infty \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k < \infty. \end{cases} \tag{8}$$

Por el teorema de iteración 1.22, podemos suponer $(\eta_k)_k \subset Y_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}$ y $(\phi_k)_k \subset \left({Y_{\mathcal{U}}}^*\right)_{\mathcal{V}} \subset {Y_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}}^*$, y por la proposición 1.33 y (7), es fácil comprobar el contenido $(\phi_k)_k \subset N({T_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}}^*)$. Ahora, de (8) y proposición 2.39, se deduce que $N({T_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}}^*)$ no es reflexivo. Aplicando la proposición 3.28, obtenemos que T no es cosupertauberiano. □

Si un operador T es cosupertauberiano cuando T^* es supertauberiano, y U es supertauberiano cuando $U_{\mathcal{U}}$ es tauberiano, parece natural llamar *supercotauberiano* a un operador V tal que $V_{\mathcal{U}}$ es cotauberiano. A continuación veremos que estos operadores coinciden con los cosupertauberianos.

Corolario 3.33 *Sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Son equivalentes:*
(a) *T es cosupertauberiano;*
(b) *$T_{\mathcal{U}}$ es cosupertauberiano;*
(c) *$T_{\mathcal{U}}$ es cotauberiano.*

Demostración.
(a)$\Rightarrow$(b) Supongamos T es cosupertauberiano. Por proposición 3.28, el núcleo $N({T_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}}^*)$ es reflexivo, por la proposición 1.33, $N({(T_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}}}^*)$ también es reflexivo, y nuevamente por la proposición 3.28, $T_{\mathcal{U}}$ es cosupertauberiano.
(b)$\Rightarrow$(c) Si $T_{\mathcal{U}}$ es cosupertauberiano, entonces ${T_{\mathcal{U}}}^*$ es supertauberiano, luego por proposición 3.10 ${T_{\mathcal{U}}}^*$ es tauberiano, y así $T_{\mathcal{U}}$ es cotauberiano.
(c)$\Rightarrow$(a) Si $T_{\mathcal{U}}$ es cotauberiano, por definición ${T_{\mathcal{U}}}^*$ es tauberiano. Entonces ${T^*}_{\mathcal{U}}$ es tauberiano, y por proposición 3.9, T^* es supertauberiano, o lo que es lo mismo, T es cosupertauberiano. □

En el siguiente corolario comprobamos que, al igual que $\Psi_+(X,Y)$, la clase $\Psi_-(X,Y)$ también es estable bajo perturbaciones super-w-compactas.

Corolario 3.34 *Sean dos operadores $T, K \in \mathcal{B}(X,Y)$. Si T es cosupertauberiano y K es super-w-compacto, entonces $T+K$ es cosupertauberiano.*

Demostración. El operador K^* es super-w-compacto, pues por la proposición octr, $K_\mathcal{U}$ es w-compacto, y de ahí $K_\mathcal{U}{}^*$ es w-compacto. Entonces la restricción $K^*{}_\mathcal{U}$ es w-compacta, y de nuevo por la proposición octr, K^* es super-w-compacto. Ahora por proposición 3.16, $T^* + K^*$ es supertauberiano. □

Los siguientes pasos pretenden probar, en analogía con el teorema 3.19, que un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es cosupertauberiano si y sólo si para todo operador compacto $K \in \mathcal{B}(X,Y)$ se cumple $Y/\overline{R(T+K)}$ es superreflexivo. De acuerdo con la notación desarrollada en las líneas previas al teorema 3.19, se trata de ver que las clases Ψ_- y $GSWCo_-$ coinciden.

Destacamos que el resultado que acabamos de mencionar no se sigue del teorema 3.19 por dualidad. Para su demostración necesitaremos el siguiente lema técnico similar al lema 3.18.

Lema 3.35 *Sea X un espacio de Banach, $\varepsilon > 0$ un número real, y familias finitas $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ contenidas respectivamente en S_X y S_{X^*}, y satisfaciendo las condiciones*

$$f_k(y_m) = \begin{cases} > \varepsilon, & si\ 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & si\ 1 \leq m < k \leq n. \end{cases}$$

Entonces existe una familia finita $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ contenida en X tal que $f_k(x_m) = \delta_{km}$ y $\|x_k\| \leq \varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^{-1})^{n-1}$ para todo $1 \leq k \leq n$.

Demostración. Basta tomar los elementos $z_m := y_{n-m} \in X^{**}$ y $h_k := f_{n-k} \in X^*$ para $m = 1, 2, \ldots, n$, y aplicarles el mismo proceso que en el el lema 3.18. Entonces obtenemos una familia $\{F_1, \ldots, F_n\} \subset X^{**}$ tales que $F_k(h_m) = \delta_{km}$ y $\|F_k\| \leq \varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^{-1})^{n-1}$. Observemos que los elementos F_k son combinaciones lineales de los elementos y_k. Entonces los elementos buscados son $x_k := F_{n-k} \in X$ para $k = 1, \ldots, n$.

□

Teorema 3.36 *Un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es cosupertauberiano si y sólo si para todo operador compacto $K \in \mathcal{B}(X,Y)$, el cociente $Y/\overline{R(T+K)}$ es superreflexivo.*

Demostración. Supongamos que $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es cosupertauberiano y $K \in \mathcal{B}(X,Y)$ es compacto. Por el corolario 3.34, $T^* + K^*$ es supertauberiano, luego $N([T+K]^*)$ es superreflexivo, y como $N[T^* + K^*] \equiv \left[Y/\overline{R(T+K)}\right]^*$, concluímos que $Y/\overline{R(T+K)}$ es superreflexivo.

Supongamos ahora que T no es cosupertauberiano, y encontremos un operador compacto K tal que $T+K$ tenga conúcleo $Y/\overline{R(T+K)}$ no superreflexivo.

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Para cada $n \in \mathbf{N}$, obtendremos recursivamente familias

$$(h_k^n) \subset Y, \quad (f_k^n) \subset S_{Y^*}, \text{ y } (y_k^n) \subset S_Y \text{ para } n \in \mathbf{N} \text{ y } 1 \leq k \leq n,$$

tales que

$$f_m^r(h_k^s) = \delta_{rs}\delta_{km} \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \|h_k^n\| \|T^* f_k^n\| < 2^{-n} \tag{10}$$

$$f_k^n(y_m^n) = \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k \leq n. \end{cases} \tag{11}$$

Primero, tomamos $\delta_1 = 2^{-1}\varepsilon$, y por definición de operador supertauberiano y el principio de reflexividad local, existen $y_1^1 \in S_Y$ y $f_1^1 \in S_{Y^*}$ tales que $f_1^1(y_1^1) > \varepsilon$ y $\|T^* f_1^1\| < \delta_1$. Ahora por el lema 3.35 encontramos $x_1^1 \in \varepsilon^{-1} B_Y$ tal que $f_1^1(x_1^1) = 1$. Escribamos $h_1^1 = x_1^1$.

Supongamos que ya hemos obtenido los elementos h_k^p, f_k^p e y_k^p para $1 \leq p \leq n-1$ y $1 \leq k \leq p$, con $n \geq 2$.

Sea P la proyección sobre Y con núcleo y rango dados por

$$N(P) = \bigoplus_{p=1}^{n-1} \langle h_k^p : 1 \leq k \leq p \rangle$$

y

$$R(P) = \bigcap_{p=1}^{n-1} \bigcap_{k=1}^{p} N(f_k^p).$$

Sea I_Y el operador identidad sobre Y. Como $N(P)$ tiene dimensión finita, $I_{Y^*} - P^*$ tiene rango de dimensión finita, y por tanto $T^* \circ (I_{Y^*} - P^*)$ es compacto; y como $T^* = T^* \circ P^* + T^* \circ (I_{Y^*} - P^*)$ no es supertauberiano, por la proposición 3.16 se tiene que $T^* \circ P^*$ no es supertauberiano; equivalentemente, $T^*|_{N(P)^\perp}$ no es supertauberiano. Entonces, tomando

$$\delta = \left(n 2^n \varepsilon^{-1} (1 + \varepsilon^{-1})^{n-1} \|P\|\right)^{-1}$$

por la proposición 3.12 existen funcionales

$$\{u_1^n, u_2^n, \ldots, u_n^n\} \subset S_{N(P)^\perp}$$

y elementos

$$\{G_1^n, G_2^n, \ldots, G_n^n\} \subset S_{Y^{**}}$$

verificando

$$\|T^* u_k^n\| < \delta \text{ para todo } 1 \leq k \leq n \tag{12}$$

y $G_k^n(u_m^n) > \varepsilon$ para $1 \leq k \leq m \leq n$ y $G_k^n(u_m^n) = 0$ para $1 \leq m < k \leq n$. Mediante el cambio de índices $f_k^n := u_{n-k}^n$, $H_k^n := G_{n-k}^n$ con $k = 1, 2, \ldots, n$, y aplicando el principio de reflexividad local a los subespacios $\langle f_1^n, f_2,^n, \ldots, f_n^n \rangle$ y $\langle H_1^n, H_2^n, \ldots, H_n^n \rangle$, encontramos elementos

$$\{y_1^n, y_2^n, \ldots, y_n^n\} \subset S_Y$$

verificando

$$f_k^n(y_m^n) = \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \leq k \leq m \leq n \\ = 0, & \text{si } 1 \leq m < k \leq n. \end{cases} \tag{13}$$

Aplicando ahora el lema 3.35 en (13), obtenemos elementos

$$\{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n\} \subset Y$$

tales que $\|x_k^n\| \leq \varepsilon^{-1}(1 + \varepsilon^{-1})^{n-1}$ y $f_k^n(x_m^n) = \delta_{km}$. Los elementos h_k^n buscados son

$$h_k^n := P(x_k^n) \in \|P\|\varepsilon^{-1}(1 + \varepsilon^{-1})^{n-1} \, S_Y.$$

La fórmula (13) demuestra que la condición (11) es satisfecha. La condición (9) queda garantizada por la construcción de la proyección P. Comprobémoslo:

Si $r < n$, entonces h_k^n pertenece a $R(P) \subset N(f_m^r)$, luego $f_m^r(h_k^n) = 0$. Y $f_m^n(h_k^r) = 0$ porque $h_k^r \in N(P)$ y $f_m^n \in N(P)^\perp$.

Finalmente, las pertenencias $f_k^n \in N(P)^\perp$ y $h_m^n = P(x_m^n) \in R(P)$ producen que $f_k^n(h_m^n) = f_k^n(x_m^n) = \delta_{km}$.

La condición (10) se cumple por la elección de δ y la condición (12).

Ahora, por (10) tenemos $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \|h_k^n\|\|T^* f_k^n\|\right) < 1$, lo que nos permite definir el operador $Q : Y^* \longrightarrow X^*$ mediante

$$Qf = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} f(h_k^n) \cdot T^* f_k^n \right] .$$

Además, Q es compacto por ser aproximable por operadores de rango finito. Así, por (9) cada funcional f_k^n pertenece al núcleo de $T^* + Q$; entonces, la relación (11) muestra que $N(T^* + Q)$ no es superreflexivo.

Por otra parte, Q es el conjugado del operador $K : X \longrightarrow Y$ dado por

$$Kx = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{n} (T^* f_m^n)(x) \cdot h_m^n \right]$$

luego $N(T^* + Q) = N[(T + K)^*] = [Y/\overline{R(T + K)}]^*$ no es superreflexivo, y por ende $Y/\overline{R(T + K)}$ no es superreflexivo. □

Al igual que en la sección dedicada a los operadores supertauberianos, la caracterización perturbativa para operadores cosupertauberianos nos permite extraer algunas interesantes consecuencias que a continuación desarrollamos. Por ejemplo, el teorema 3.36 permite caracterizar ciertos espacios de Banach en términos de operadores cosupertauberianos.

Proposición 3.37 *Sea X un espacio de Banach.*

a) Los cocientes superreflexivos de X tienen dimensión finita si y sólo si $\Psi_-(Z,X) = F_-(Z,X)$ para todo espacio de Banach Z.

b) Los cocientes reflexivos de X son superreflexivos si y sólo si $\mathcal{T}_-(Z,X) = \Psi_-(Z,X)$ para todo espacio de Banach Z.

Demostración.
a) Supongamos que todo cociente superreflexivo de X es de dimensión finita, y sea $T \in \Psi_-(Z,X)$. Por el teorema 3.36, para cada operador compacto $K \in \mathcal{B}(Z,X)$, $X/\overline{R(T+K)}$ es superreflexivo y por tanto tiene dimensión finita. La caracterización perturbativa de Lebow y Schechter (teorema 2.11 y [35]) prueba que T es F_-.

Supongamos ahora que existe un subespacio Y de X tal que X/Y es superreflexivo de dimensión infinita. Entonces la inclusión $\imath_Y : Y \longrightarrow X$ no es F_-. Por otro lado, la proposición 3.30 dice que $\imath_Y$ es cosupertauberiano.
b) Supongamos que los cocientes reflexivos de X son superreflexivos, y sea $T \in \mathcal{T}_-(Z,X)$. Por la caracterización perturbativa de González y Onieva [21] recordada en el teorema 2.35, para cada operador compacto $K \in \mathcal{B}(Z,X)$ tenemos $X/\overline{R(T+K)}$ es superreflexivo. Entonces, por el teorema 3.36, T es cosupertauberiano.

Supongamos ahora que X contiene un subespacio cerrado Y tal que X/Y es reflexivo no superreflexivo. Siguiendo un razonamiento análogo al del apartado anterior, el operador $\imath_Y : Y \longrightarrow X$ es cotauberiano pero no cosupertauberiano. □

Tal como indicamos en la proposición homóloga 3.20, las situaciones descritas por la anterior proposición no son triviales. Por dualidad, sirve como ejemplo el espacio original de Tsirelson $\mathcal{T}^*$ [9]: para cualquier espacio de Banach Z, se tiene

$$F_-(Z,\mathcal{T}^*) = \Psi_-(Z,\mathcal{T}^*) \neq \mathcal{T}_-(Z,\mathcal{T}^*) = \mathcal{B}(Z,\mathcal{T}^*).$$

Además, $L_\infty[0,1]$ no es reflexivo, pero todos sus cocientes reflexivos son superreflexivos [30]. Entonces para todo espacio Z se verifica

$$F_-(Z,L_\infty[0,1]) \neq \Psi_-(Z,L_\infty[0,1]) = \mathcal{T}_-(Z,L_\infty[0,1]) \neq \mathcal{B}(Z,L_\infty[0,1]).$$

Si Y es una C^*-álgebra, en particular si Y es un espacio $C(K)$ o un $L_\infty(\mu)$, también se verifica que sus cocientes reflexivos son superreflexivos [30], por lo que resulta aplicable la proposición 3.37.

Otra consecuencia de la caracterización perturbativa es la siguiente caracterización algebraica para los operadores cosupertauberianos.

Proposición 3.38 *Sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(a) *T es cosupertauberiano;*

(b) *para cada espacio de Banach Z y cada operador $A \in \mathcal{B}(Y,Z)$, si AT es super-w-compacto entonces A es super-w-compacto;*

(c) *para cada subespacio cerrado M de Y tal que $q_M T$ es super-w-compacto, Y/M es superreflexivo.*

Demostración.
(a)⇒(b) Supongamos que $T \in \Psi_-(X,Y)$ y $A \in \mathcal{B}(Y,Z)$ verifican que AT es super-w-compacto. Por el corolario 3.33 y la proposición octr, $T_{\mathcal{U}}$ es cotauberiano y $(AT)_{\mathcal{U}} = A_{\mathcal{U}} T_{\mathcal{U}}$ es w-compacto. Por [21; tma.2], $A_{\mathcal{U}}$ es w-compacto, y por tanto A es super-w-compacto.

(b)⇒(c) Si $q_M T$ es super-w-compacto, por hipótesis (b), q_M es super-w-compacto, de donde es inmediato que Y/M es superreflexivo.

(c)⇒(a) Si T no es cosupertauberiano, por el teorema 3.36 existe un oa compacto K tal que $Y/\overline{R(T-K)}$ no es superreflexivo. Escribamos $M := \overline{R(T-K)}$. Entonces $q_M T = q_M K$ son trivialmente super-w-compactos. Pero Y/M no es superreflexivo. Esto contradice la hipótesis (c). □

Aquítambién es posible dar una demostración directa de (b)⇒(a), sin usar el teorema 3.36:

Proposición 3.39 *Un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es cosupertauberiano si y sólo si $L \in \mathcal{B}(Y,Z)$ es super-w-compacto cuando LT es super-w-compacto.*

Demostración. Si $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es cosupertauberiano, nos remitimos a la implicación (a)⇒(b) de la proposición anterior.

Supongamos que T no es cosupertauberiano. Entonces por el teorema 3.32 existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que para cada $n \in \mathbf{N}$ existen familias $\{x_1^n, \dots, x_n^n\} \subset S_Y$ y $\{f_1^n, \dots, f_n^n\} \subset S_{Y^*}$ verificando

$$f_m^n(x_k^n) = \begin{cases} > \varepsilon & \text{si } 1 \le k \le m \le n \\ = 0 & \text{si } 1 \le m < k \le n \end{cases} \tag{14}$$

y $\|T^* x_k^n\| < 1/n$ para todo $1 \le k \le n$. Razonando como en la proposición 3.22, el operador $A : \ell_1(\ell_1^n) \longrightarrow Y^*$ dado por $A(e_i^n) := f_i^n$ no es super-w-compacto, pero T^*A sí lo es. Denotemos $\imath_X$ a la inmersión natural de X en X^{**}. Entonces $A^* T^{**} \imath_X = (A^* \imath_Y) T$ es super-w-compacto. Pero $A^* \imath_Y : Y \longrightarrow \ell_\infty$ no es super-w-compacto: en efecto, para cada $n \in \mathbf{N}$, los elementos $e_i^n \in S_{\ell_1}$ y $x_i^n \in S_X$, $i = 1, 2, \dots, n$ verifican

$$e_m^n(A^* x_k^n) = (A e_m^n)(x_k^n) = f_m^n(x_k^n)$$

lo cual, junto a (14) y una adecuada reordenación de índices, demuestra que $A^* \imath_Y$ no es super-w-compacto. □

3.3 Perturbaciones admisibles.

Dado un espacio de Banach $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$ un subconjunto suyo, se dice que $\mathcal{P}$ es una *clase de perturbación* de $\mathcal{S}$, o que $\mathcal{S}$ es estable bajo perturbaciones de $\mathcal{P}$, si $x + y$ pertenece a $\mathcal{S}$ para todo $x \in \mathcal{S}$ y todo $y \in \mathcal{P}$. Por ejemplo, $Co(X, Y)$ y $SWCo(X, Y)$ son dos clases de perturbación para $\Psi_+(X, Y)$.

En 1958, Kato [33] introduce una clase de perturbación de F_+ más amplia que el ideal Co: el ideal SS de los operadores estrictamente singulares. Paralelamente, Pełczyński [40] introduce el ideal SC de los operadores estrictamente cosingulares. Dicho ideal contiene a Co, y es una clase de perturbación para F_-.

De modo análogo, en [17] se introducen dos nuevos ideales: el ideal $\mathbf{R}$-SS de los operadores $\mathbf{R}$-estrictamente singulares, y el ideal $\mathbf{R}$-SC de los operadores estrictamente cosingulares. Tanto $\mathbf{R}$-SS como $\mathbf{R}$-SC contienen al ideal WCo, y son, respectivamente, clases de perturbación para las clases $\mathcal{T}_+$ y $\mathcal{T}_-$.

Siguiendo estas ideas, presentamos dos nuevos ideales de operadores: $\mathbf{R}_S$-S y $\mathbf{R}_S$-C. Ambos contienen estrictamente a $SWCo$, y son clases de perturbación para Ψ_+ y Ψ_- respectivamente. Destacamos que las caracterizaciones perturbativas para operadores supertauberianos y cosupertauberianos (teoremas 3.19 y 3.36) son las que nos permiten obtener las propiedades citadas de los ideales $\mathbf{R}_S$-S y $\mathbf{R}_S$-C.

Definición 3.40 *Decimos que un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ pertenece a $\mathbf{R}_S$-S si para todo espacio de Banach Z y todo $A \in \mathcal{B}(Z, X)$ tal que TA es supertauberiano, se verifica que A es super-w-compacto.*

A la clase de los operadores $\mathbf{R}_S$-S pertenecientes a $\mathcal{B}(X, Y)$ la denotaremos $\mathbf{R}_S$-$S(X, Y)$.

Definición 3.41 *Decimos que un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ pertenece a $\mathbf{R}_S$-C si para cada espacio de Banach Z y cada $L \in \mathcal{B}(Y, Z)$ tal que LT es cosupertauberiano, se verifica que L es super-w-compacto.*

A la clase de los operadores $\mathbf{R}_S$-C pertenecientes a $\mathcal{B}(X, Y)$ la denotaremos $\mathbf{R}_S$-$C(X, Y)$.

Proposición 3.42 *Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *$T \in \mathbf{R}_S$-$S(X, Y)$;*

(b) *Si Z es un espacio de Banach y $A \in \mathcal{B}(Z, X)$ verifica que TA es supertauberiano, entonces Z es superreflexivo.*

Demostración.

(a)$\Rightarrow$(b) Si TA es supertauberiano, por definición de $\mathbf{R}_S$-S, A es super-w-compacto. Pero los operadores super-w-compactos son un ideal, luego TA es super-w-compacto. Entonces, por la estabilidad de los operadores supertauberianos bajo perturbaciones super-w-compactas (proposición 3.16) el operador nulo de $\mathcal{B}(Z, X)$ es supertauberiano, y por tanto Z es superreflexivo.

(b)⇒(a) Basta tener en cuenta que si Z es un espacio de Banach superreflexivo, entonces todo operador $A \in \mathcal{B}(Z, X)$ es trivialmente super-w-compacto.

□

Proposición 3.43 *Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*
(a) $T \in \mathbf{R}_S$-C;
(b) *Si Z es un espacio de Banach y $L \in \mathcal{B}(Y, Z)$ verifica que LT es cosupertauberiano, entonces Z es superreflexivo.*

Demostración.
(a)⇒(b) Si LT es cosupertauberiano, por definición de operador $\mathbf{R}_S$-C se tiene que L es super-w-compacto, y en consecuencia T^*L^* también es super-w-compacto. Por otra parte, T^*L^* es supertauberiano (definición 3.23), y aplicando las proposiciones 3.16 y 3.11, deducimos que Z^* es superreflexivo. Consecuentemente, Z es superreflexivo.
(b)⇒(a) Si Z es un espacio de Banach superreflexivo, $L \in \mathcal{B}(Y, Z)$ es trivialmente super-w-compacto. □

La siguiente proposición muestra una interesante propiedad de los operadores $\mathbf{R}_S$-S.

Proposición 3.44 *Sea $T \in \mathbf{R}_S$-$S(X, Y)$ y M un subespacio cerrado de X. Si $T|_M$ es un isomorfismo, entonces M es superreflexivo.*

Demostración. Si $\imath_M : M \longrightarrow X$ es la inmersión del subespacio cerrado M en X y $T|_M = T\imath_M$ es isomorfismo, entonces es también supertauberiano, y por proposición 3.42, M es superreflexivo. □

En analogía con la proposición anterior, presentamos el siguiente resultado para operadores $\mathbf{R}_S$-C.

Proposición 3.45 *Sean $T \in \mathbf{R}_S$-C, y $q_N : Y \longrightarrow Y/N$ el operador cociente asociado al subespacio cerrado N de Y. Si $q_N T$ es un isomorfismo, entonces Y/N es superreflexivo.*

Demostración. Si $q_N T$ es isomorfismo, entonces es cosupertauberiano. Por proposición 3.43, Y/N es superreflexivo. □

Proposición 3.46 *La clase $\mathbf{R}_S$-S es un ideal de operadores.*

Demostración.

a) Sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ un operador de rango finito, y veamos que T es $\mathbf{R}_S$-S. Evidentemente T pertenece al ideal de los operadores super-w-compactos. Entonces para todo operador $A \in \mathcal{B}(Z, X)$, TA es super-w-compacto. Si además TA es supertauberiano, entonces Z es superreflexivo. La proposición 3.42 prueba que T es $\mathbf{R}_S$-S.

b) Sean $T \in \mathbf{R}_S$-$S(X, Y)$, $A \in \mathcal{B}(Z, X)$ y $B \in \mathcal{B}(Y, V)$. Veamos que la composición BTA es $\mathbf{R}_S$-S: sea $L \in \mathcal{B}(W, Z)$ tal que $BTAL$ es supertauberiano. Por proposición 3.15 TAL es supertauberiano. Pero T

es $\mathbf{R}_S$-S, luego por proposición 3.42 W es superreflexivo, lo que prueba que BTA es $\mathbf{R}_S$-S.

c) Sean $K, L \in \mathbf{R}_S$-$S(X,Y)$, y comprobemos $K + L \in \mathbf{R}_S$-$S(X,Y)$: supongamos lo contrario, esto es, que existe $A \in \mathcal{B}(Z,X)$ tal que $(K+L)A$ es supertauberiano pero Z no superreflexivo. Por proposición 3.42, KA y LA son ambos no supertauberianos, y entonces por proposición 3.21 existe un subespacio no superreflexivo $M \subset Z$ tal que $KA\imath_M$ es super-w-compacto.

Por otro lado, $L \in \mathbf{R}_S$-$S(X,Y)$ y M no superreflexivo implican $LA\imath_M$ no es supertauberiano, pero es suma de $(K+L)A\imath_M$ y $-KA\imath_M$, lo que contradice la estabilidad de los operadores supertauberianos bajo perturbaciones por operadores super-w-compactos (proposición 3.16). □

Proposición 3.47 *La clase $\mathbf{R}_S$-C es un ideal de operadores.*

Demostración.

a) Si $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es de rango finito, entonces es $\mathbf{R}_S$-C: sea $A \in \mathcal{B}(Y,Z)$ tal que AT es cosupertauberiano. Como T es de rango finito, entonces AT es super-w-compacto. Entonces Z es superreflexivo, y por proposición 3.43, T es $\mathbf{R}_S$-C.

b) Sean $T \in \mathbf{R}_S$-$C(X,Y)$, $A \in \mathcal{B}(Z,X)$, $B \in \mathcal{B}(Y,V)$, y veamos que BTA es $\mathbf{R}_S$-C: consideremos $L \in \mathcal{B}(V,W)$ tal que $LBTA$ es cosupertauberiano. Por proposición 3.15, LBT es cosupertauberiano, y como T es $\mathbf{R}_S$-C, W es superreflexivo. Aplicando ahora la proposición 3.43, tenemos que BTA es $\mathbf{R}_S$-C.

c) Sean $K, L \in \mathbf{R}_S$-$C(X,Y)$ y probemos que $K+L$ es $\mathbf{R}_S$-C. Si $K+L$ no es $\mathbf{R}_S$-C, entonces existe $A \in \mathcal{B}(Y,V)$ tal que $A(K+L)$ es cosupertauberiano pero V no es superreflexivo. Por proposición 3.43, AK y AL son ambos no cosupertauberianos, y por proposición 3.38, existe un subespacio $N \subset V$ tal que $q_N AK$ es super-w-compacto y V/N no es superreflexivo.

Por otra parte, $L \in \mathbf{R}_S$-$C(X,Y)$ y V/N no superreflexivo implican $q_N AL$ no cosupertauberiano (proposición 3.43). Pero $q_N AL$ es suma de $q_N A(K+L)$ y $-q_N AK$, lo que contradice que los operadores cosupertauberianos son estables bajo sumas de perturbaciones super-w-compactas (corolario 3.34).

□

Según el procedimiento explicado en las notas precedentes al lema 3.18 y teorema 3.19, los ideales de operadores $\mathbf{R}_S$-S y $\mathbf{R}_S$-C generan los respectivos ideales de espacios $Sp(\mathbf{R}_S$-$S)$ y $Sp(\mathbf{R}_S$-$C)$. La siguiente proposición demuestra que ambos ideales coinciden con $Sp(SWCo)$, es decir, el ideal de los espacios superreflexivos.

Proposición 3.48 *Un espacio de Banach X es superreflexivo si y sólo si I_X es $\mathbf{R}_S$-S, o equivalentemente, si y sólo si I_X es $\mathbf{R}_S$-C.*

Demostración. Basta considerar que I_X siempre es supertauberiano, y que I_X es super-w-compacto si y sólo si X es superreflexivo. □

Es ahora natural preguntarse por las clases $G(\mathbf{R}_S$-$S)$ y $G(\mathbf{R}_S$-$C)$. Para todo ideal $\mathcal{A}$ contenido en $SWCo$ y tal que $Sp(\mathcal{A}) = Sp(SWCo)$, el teorema

3.19 nos dice automáticamente que $G(\mathcal{A})_+$ es la clase de los operadores supertauberianos. Precisamente, el interés de los ideales $\mathbf{R}_S$-S y $\mathbf{R}_S$-C se debe a que contienen estrictamente a $SWCo$, como seguidamente demostramos.

Proposición 3.49 *Para todo par de espacios de Banach X e Y se verifica:*

$$SWCo(X,Y) \subset \mathbf{R}_S\text{-}S(X,Y) \cap \mathbf{R}_S\text{-}C(X,Y).$$

Demostración. Sea $K \in SWCo(X,Y)$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{B}(Z,X)$, KA es super-w-compacto. Supongamos además que KA es supertauberiano. Entonces Z es superreflexivo, y por proposición 3.42, K es $\mathbf{R}_S$-S.

De manera similar, si $L \in \mathcal{B}(Y,V)$ verifica que LK es cosupertauberiano, entonces K^*L^* es supertauberiano y super-w-compacto a la vez, lo cual sólo es posible si V es superreflexivo. Por proposición 3.45, K es $\mathbf{R}_S$-C. □

Veamos con un ejemplo que se demuestra que el contenido $SWCo \subset \mathbf{R}_S$-$S$ es estricto.

Ejemplo: sea X un espacio separable, reflexivo, no superreflexivo (por ejemplo, $X = \ell_2(\ell_1^n)$). Consideremos un operador suprayectivo $T : \ell_1 \longrightarrow X$ (para la existencia de T, véase [5; pg.114]). Entonces

$$T \in \mathbf{R}_S\text{-}S \setminus SWCo.$$

En efecto: si T fuese super-w-compacto, tendríamos $T_{\mathcal{U}}$ w-compacto y $R(T_{\mathcal{U}}) = X_{\mathcal{U}}$, de donde se desprendería que $X_{\mathcal{U}}$ es reflexivo, y de ahí X superreflexivo, lo que es contradictorio.

Veamos ahora que $T \in \mathbf{R}_S$-S. Sea $A \in \mathcal{B}(Z,\ell_1)$ tal que TA es supertauberiano. Sea (z_n) una sucesión acotada cualquiera en Z. Como X es reflexivo, la sucesión (TAz_n) contiene subsucesiones w-convergentes, y como TA es tauberiano, (z_n) contiene subsucesiones w-convergentes, lo que implica, en virtud del teorema de Eberlein–Smulian, que Z es reflexivo. Entonces el operador $A \in \mathcal{B}(Z,\ell_1)$ es compacto, pues ℓ_1 tiene la propiedad de Schur (esto es, toda sucesión w-convergente en ℓ_1 converge también en norma). Ahora, por el corolario 3.6 A es super-w-compacto, y en consecuencia T es $\mathbf{R}_S$-S.

Para finalizar esta sección, veremos que la clase Ψ_+ (respectivamente Ψ_-) es estable bajo perturbaciones $\mathbf{R}_S$-S ($\mathbf{R}_S$-C). Este hecho, junto a las caracterizaciones perturbativas 3.19 y 3.36, prueban que $G(\mathbf{R}_S\text{-}S)_+ = \Psi_+$ y $G(\mathbf{R}_S\text{-}C)_- = \Psi_-$.

Proposición 3.50 *Sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$:*

i) si T es supertauberiano y $K \in \mathbf{R}_S$-S, entonces $T+K$ es supertauberiano;

ii) si T es cosupertauberiano y $L \in \mathbf{R}_S$-C, entonces $T+K$ es cosupertauberiano.

Demostración.

i) Supongamos que T es supertauberiano, K es $\mathbf{R}_S$-S y $T+K$ no es supertauberiano. Por la proposición 3.21 existe un subespacio no superreflexivo $M \subset X$ tal que $(T+K)\imath_M$ es super-w-compacto. Entonces, como

$T\imath_M$ es supertauberiano, $K\imath_M$ también lo es, puesto que la clase de los operadores supertauberianos es cerrada bajo perturbaciones super-w-compactas (proposición 3.16). Pero K es $\mathbf{R}_S$-S, luego por proposición 3.44, M ha de ser superreflexivo, lo que produce una contradicción.

ii) Supongamos que T cosupertauberiano, K es $\mathbf{R}_S$-C, y $T + K$ no es cosupertauberiano. Por la proposición 3.38 existe un subespacio $N \subset Y$ tal que Y/N no es superreflexivo y $q_N(T + K)$ es super-w-compacto. Entonces $(T^* + K^*)q_N^* = (T^* + K^*)\imath_{N^\perp}$ es super-w-compacto, y procediendo como en la parte *i)* llegamos a contradicción al probar que Y/N tiene que ser superreflexivo. □

Capítulo 4

EJEMPLOS DE OPERADORES SUPERTAUBERIANOS.

En el capítulo anterior vimos el contenido $\Psi_+(X,Y) \subset \mathcal{T}_+(X,Y)$. El objeto de este capítulo es identificar entre los operadores tauberianos algunos operadores supertauberianos no triviales. Mediante técnicas de ultrapotencia, en la sección 4.1 probaremos que los subespacios reflexivos de $L_1[0,1]$ son superreflexivos, caracterizaremos a los operadores tauberianos de $L_1[0,1]$ en X, y como consecuencia de la caracterización perturbativa 3.19, veremos que son supertauberianos. Otros ejemplos de operadores tauberianos que aquí estudiamos son los proporcionados por la factorización de Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński, la inclusión del espacio de James J en c_0, y las inclusiones de los espacios de Orlicz vectoriales $L_p(X)$ en $L_1(X)$. Por supuesto, teniendo en cuenta que la clase $\Psi_+(X,Y)$ es abierta, y que para todo operador $T \in \Psi_+$ se cumple $T^{**} \in \Psi_+$ [50], quedan descartados como operadores supertauberianos aquellos operadores $T \in \mathcal{T}_+(X,Y)$ tales que T^{**} no es tauberiano, o bien están en la frontera de $\mathcal{T}_+(X,Y)$ (la existencia de tales operadores tauberianos está registrada en los ejemplos 2.32 y 2.33).

4.1 Operadores supertauberianos de $L_1[0,1]$ en X.

Un conocido resultado de Rosenthal [44] establece que todo subespacio reflexivo de $L_1[0,1]$ es isomorfo a algún subespacio de $L_p[0,1]$, para cierto $1 < p < \infty$. De ahí se deriva que

(a) todo subespacio reflexivo de $L_1[0,1]$ *es superreflexivo,*

y de acuerdo con nuestra proposición 3.20, los operadores tauberianos de $L_1(0,1)$ en X son supertauberianos.

Pisier [42] consigue una versión no conmutativa del teorema de Rosenthal. La demostración de Pisier se apoya a su vez en un resultado de Jarchow [30] que dice

(b) cada cociente reflexivo de una C^*-álgebra A, y cada subespacio reflexivo de A^*, es superreflexivo.

Pisier sugiere la posibilidad de probar *(a)* usando la estabilidad de los espacios L_1 bajo ultraproductos.

En esta sección probaremos *(a)* usando el método sugerido por Pisier y caracterizaremos los operadores tauberianos de $L_1[0,1]$ en X, lo que nos proporcionará una fuente de operadores supertauberianos no triviales.

En lo que sigue, dado un espacio de medida (Ω, Σ, m), $L_1(m)$ denotará al espacio de Banach de las funciones m-integrables con dominio Ω. En particular, $([0,1], \mathcal{M}, \mu)$ es el espacio $[0,1]$ con la medida de Lebesgue y $L_1[0,1]$ representará al espacio de las funciones integrables Lebesgue sobre $[0,1]$. La función característica asociada a un conjunto A será representada por χ_A, como es habitual.

A continuación describimos la construcción del ultraproducto de $L_1(\mu)$ dada por Heinrich. Los detalles y demostraciones pertinentes se encuentran en [23; 5] y [46; pg.48].

Sea I un conjunto de índices, y denotemos $\mathcal{F}(I, [0,1])$ al conjunto de todas las familias $(x_i)_{i \in I}$ tales que $x_i \in [0,1]$. Dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I, en $\mathcal{F}(I, [0,1])$ se define la relación de equivalencia $\sim$, mediante $(x_i) \sim (y_i)$ si $\{i \in I : x_i = y_i\} \in \mathcal{U}$. Escribiremos

$$[0,1]^{\mathcal{U}} := \frac{\mathcal{F}(I, [0,1])}{\sim},$$

y a la clase de equivalencia determinada por la familia acotada (x_i) la denotaremos $\{x_i\}$. Si $\{A_i : i \in I\}$ es una colección de subconjuntos de $[0,1]$, escribiremos

$$(A_i)^{\mathcal{U}} = \big\{\{x_i\} : x_i \in A_i\big\}.$$

Sobre $[0,1]^{\mathcal{U}}$ se construye el álgebra de Boole $\Sigma_{\mathcal{U}}$ dada por

$$\Sigma_{\mathcal{U}} := \{(A_i)^{\mathcal{U}} : A_i \in \mathcal{M}\}.$$

A la σ-álgebra generada por $\Sigma_{\mathcal{U}}$ la llamaremos $\Gamma_{\mathcal{U}}$. Sobre $\Gamma_{\mathcal{U}}$ se define la medida $\mu_{\mathcal{U}}$ unívocamente determinada por el valor que alcanza sobre los elementos $(A_i) \in \Sigma_{\mathcal{U}}$:

$$\mu_{\mathcal{U}}\big((A_i)_{\mathcal{U}}\big) := \lim_{\mathcal{U}} \mu(A_i).$$

Heinrich prueba la existencia un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{N}, \nu)$ tal que $L(\mu)_{\mathcal{U}}$ es isomorfo a la ℓ_1-suma directa de $L_1(\mu_{\mathcal{U}})$ y $L_1(\nu)$,

$$L_1(\mu)_{\mathcal{U}} \equiv L_1(\mu_{\mathcal{U}}) \oplus_1 L_1(\nu).$$

Además, existe una isometría $J : L_1(\mu_{\mathcal{U}}) \longrightarrow L_1(\mu)_{\mathcal{U}}$ y una proyección de norma uno, $P : L_1(\mu)_{\mathcal{U}} \longrightarrow L_1(\mu)_{\mathcal{U}}$ cuyo núcleo es $N(P) = L_1(\nu)$, y su rango $R(P) = L_1(\mu_{\mathcal{U}})$. Nótese que

$$\|\mathbf{f}\| = \|P\mathbf{f}\| + \|(I-P)\mathbf{f}\| \quad \text{para todo} \quad f \in L_1(\mu)_{\mathcal{U}}. \tag{1}$$

La isometría J se define en primera instancia sobre las funciones simples de la forma

$$\chi_A \in L_1(\mu_{\mathcal{U}}), \qquad A = (A_i)^{\mathcal{U}} \in \Sigma_{\mathcal{U}}$$

mediante

$$J(\chi_A) := [\chi_{A_i}]_i \in L_1(\mu)_{\mathcal{U}},$$

y por linealidad y densidad, J se extiende a todo $L_1(\mu_{\mathcal{U}})$.

Sea un elemento cualquiera $\mathbf{f} = [f_i] \in L_1(\mu)_{\mathcal{U}}$ y calculemos $P(\mathbf{f})$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\|f_i\|_1 = 1$ para todo $i \in I$. Tomemos las medidas complejas ν_{f_i} sobre $\mathcal{M}$ dadas por

$$\nu_{f_i}(A) := \int_A f_i \, d\mu, \qquad A \in \mathcal{M}, \quad i \in I,$$

y la medida $\nu_{\mathbf{f}}$ sobre $\Gamma_{\mathcal{U}}$, que queda determinada por

$$\nu_{\mathbf{f}}(A) := \lim_{\mathcal{U}} \nu_{f_i}(A_i), \quad \text{donde } A = (A_i)^{\mathcal{U}} \in \Sigma_{\mathcal{U}}. \tag{2}$$

Por el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym (ver por ej. [45; pg.113]), existen dos únicas medidas, $w_{\mathbf{f}}$ y $m_{\mathbf{f}}$, mutuamente singulares entre sí (denotado $m_{\mathbf{f}} \perp w_{\mathbf{f}}$), $w_{\mathbf{f}}$ absolutamente continua respecto de $\mu_{\mathcal{U}}$, $m_{\mathbf{f}} \perp \mu_{\mathcal{U}}$, y una función $g_{\mathbf{f}} \in L_1(\mu_{\mathcal{U}})$, denominada *derivada de Radon-Nikodym de* $w_{\mathbf{f}}$ respecto de $\mu_{\mathcal{U}}$, que verifican

$$\nu_{\mathbf{f}} = w_{\mathbf{f}} + m_{\mathbf{f}}, \tag{3}$$

$$w_{\mathbf{f}}(A) = \int_A g_{\mathbf{f}} \, d\mu_{\mathcal{U}}, \qquad A \in \Gamma_{\mathcal{U}} \tag{4}$$

y

$$|w_{\mathbf{f}}|(A) = \int_A |g_{\mathbf{f}}| \, d\mu_{\mathcal{U}}, \qquad A \in \Gamma_{\mathcal{U}}.$$

Esto permite definir el operador $Q : L_1(\mu)_{\mathcal{U}} \longrightarrow L_1(\mu_{\mathcal{U}})$ mediante $Q(\mathbf{f}) := g_{\mathbf{f}}$, y la proyección P por

$$P := JQ. \tag{5}$$

Ahora es fácil ver que un elemento $\mathbf{f} \in L_1(\mu)$ pertenece a $R(P)$ si y sólo si la parte singular $m_{\mathbf{f}}$ es nula: en efecto, por un lado se tiene

$$\|\mathbf{f}\| = |\nu_{\mathbf{f}}|([0,1]^{\mathcal{U}}), \tag{6}$$

y por otro,

$$\|P\mathbf{f}\| = \|g_{\mathbf{f}}\| = |w_{\mathbf{f}}|([0,1]^{\mathcal{U}}). \tag{7}$$

Como $|\nu_{\mathbf{f}}|([0,1]^{\mathcal{U}}) = |w_{\mathbf{f}}|([0,1]^{\mathcal{U}}) + |m_{\mathbf{f}}|([0,1]^{\mathcal{U}})$, de (6) y (7) es inmediato que $\|P\mathbf{f}\| = \|\mathbf{f}\|$ si y sólo si $m_{\mathbf{f}} = 0$, y ahora, en virtud de (1), $m_{\mathbf{f}} = 0$ si y sólo si $\mathbf{f} = P\mathbf{f}$.

Para abordar los siguientes resultados, necesitamos un resultado de Kadec y Pełczyński que a continuación enunciamos.

Proposición 4.1 [14; pg.94-98] *Sea (f_n) una sucesión acotada de $L_1(\mu)$ sin subsucesiones w-convergentes. Entonces existe una subsucesión $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ y sucesiones (h_k) y (g_k) en $L_1(\mu)$ tales que (h_k) es w-convergente, $g_k g_l = 0$ si $k \neq l$, y $g_k h_k = 0$ para todo $k \in \mathbf{N}$, de modo que $f_{n_k} = g_k + h_k$.*

La siguiente proposición identifica a los subespacios reflexivos de $L_1[0,1]$ como aquéllos cuya ultrapotencia está contenida en el rango de la proyección P definida en (5). Como consecuencia, se demuestra que los subespacios reflexivos de $L_1[0,1]$ son superreflexivos. Una parte de la demostración se inspira en un resultado de [1].

Proposición 4.2 *Sea E un subespacio de $L_1(\mu)$. Entonces E es reflexivo si y sólo si $E_{\mathcal{U}}$ está contenido en $L_1(\mu_{\mathcal{U}})$. Además, si E es reflexivo, entonces E es superreflexivo.*

Demostración. Mantendremos la terminología empleada en la anterior descripción del ultraproducto de $L_1(\mu)$. Recordemos que un subconjunto G de $L_1(\mu)$ es w-compacto si y sólo si G es equiintegrable [5; pg.162], es decir, si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$\int_{\{|f|>n\}} |f(t)|\, d\mu < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad f \in G.$$

Por la proposición 1.27, $(B_E)_{\mathcal{U}} = B_{(E_{\mathcal{U}})}$.

Tomemos un $\varepsilon > 0$ cualquiera. La reflexividad de E implica que B_E es w-compacto, luego existe $k \in \mathbf{N}$ tal que

$$\int_{\{|f|>k\}} |f(t)|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } f \in B_E. \tag{8}$$

Sea $\mathbf{f} \in (B_E)_{\mathcal{U}}$. Tomemos una representación $\mathbf{f} = [f_i]$ con $f_i \in B_E$ para todo i. Probemos que $\nu_{\mathbf{f}}$ es absolutamente continua respecto de $\mu_{\mathcal{U}}$:

Sea $A = (A_i)^{\mathcal{U}} \in \Sigma_{\mathcal{U}}$ tal que $\mu_{\mathcal{U}}(A) = 0$. Entonces

$$I_1 := \left\{ i \in I : \mu(A_i) < \frac{\varepsilon}{2k} \right\} \in \mathcal{U},$$

y así, para todo $i \in I_1$, por (8)

$$\begin{aligned} |\nu_{f_i}|(A_i) = \int_{A_i \cap \{|f_i|>k\}} |f_i|\, d\mu + \int_{A_i \cap \{|f_i| \leq k\}} |f_i|\, d\mu \leq \\ \leq \int_{\{|f_i|>k\}} |f_i|\, d\mu + \int_{A_i} k\, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

luego $|\nu_{\mathbf{f}}|(A) = \lim_{\mathcal{U}} |\nu_{f_i}|(A_i) = 0$, de donde se deduce que $|\nu_{\mathbf{f}}|$ es absolutamente continua respecto de $\mu_{\mathcal{U}}$. De la unicidad de las medidas $\nu_{\mathbf{f}}$ y $m_{\mathbf{f}}$, tenemos

$$\nu_{\mathbf{f}} = w_{\mathbf{f}} \tag{9}$$

De acuerdo con la fórmula (4), sea $g_{\mathbf{f}}$ la derivada de Radon-Nikodym de $w_{\mathbf{f}}$ respecto de $\mu_{\mathcal{U}}$. Por (9) podemos escribir

$$\|P(\mathbf{f})\| = \int_{[0,1]^{\mathcal{U}}} |g_{\mathbf{f}}(t)|\, d\mu_{\mathcal{U}} = |\nu_{\mathbf{f}}|([0,1]^{\mathcal{U}}) =$$

$$= \lim_{\mathcal{U}} |\nu_{f_i}|([0,1]) = \lim_{\mathcal{U}} \int_{[0,1]} |f_i(t)|\, d\mu = \|\mathbf{f}\|.$$

Entonces, por (1) se tiene $P(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$ y $\mathbf{f} \in R(P) = L_1(\mu_{\mathcal{U}})$; acabamos de probar

$$E_{\mathcal{U}} \subset L_1(\mu_{\mathcal{U}}). \tag{10}$$

Ahora, teniendo en cuenta (10) y que $Q|_{L_1(\mu_{\mathcal{U}})}$ es una isometría, demostrar que $B_{E\mathcal{U}}$ es w-compacto es equivalente a ver que $Q(B_{E\mathcal{U}})$ es equiintegrable.

Veamos que los conjuntos $\{|g_{\mathbf{f}}| > k\}$ y $\{|f_i| > k\}^{\mathcal{U}}$ son iguales salvo un conjunto de medida $\mu_{\mathcal{U}}$-nula. Supongamos que existe un conjunto $A = (A_i)^{\mathcal{U}} \in \Sigma_{\mathcal{U}}$ tal que $\mu_{\mathcal{U}}(A) > 0$ y $A \subset \{|g_{\mathbf{f}}| > k\} \setminus \{|f_i| > k\}^{\mathcal{U}}$. Por (9)

$$|\nu_{\mathbf{f}}|(A) = \int_A |g_{\mathbf{f}}|\, d\mu_{\mathcal{U}} > k\mu_{\mathcal{U}}(A). \tag{11}$$

Por otro lado

$$|\nu_{\mathbf{f}}|(A) = \lim_{\mathcal{U}} |\nu_{f_i}|(A_i) = \lim_{\mathcal{U}} \int_{A_i} |f_i|\, d\mu \leq$$

$$\leq k \lim_{\mathcal{U}} \mu(A_i) = k\mu_{\mathcal{U}}(A). \tag{12}$$

Las desigualdades (11) y (12) son incompatibles, luego ha de ser $\mu_{\mathcal{U}}(A) = 0$. Del mismo modo probaríamos que si $A \in \Sigma_{\mathcal{U}}$ y $A \subset \{|f_i| > k\}^{\mathcal{U}} \setminus \{|g_{\mathbf{f}}| > k\}$, entonces $\mu_{\mathcal{U}}(A) = 0$. Así, tenemos

$$\{|f_i| > k\}^{\mathcal{U}} = \{|g_{\mathbf{f}}| > k\} \quad \mu_{\mathcal{U}} - \text{a.e.}$$

y ahora, de (8) y (9) se sigue

$$\int_{\{|Q\mathbf{f}|>k\}} |Q\mathbf{f}|\, d\mu_{\mathcal{U}} = \int_{\{|f_i|>k\}^{\mathcal{U}}} |g_{\mathbf{f}}(t)|\, d\mu_{\mathcal{U}} =$$

$$= \nu_{\mathbf{f}}(\{|f_i| > k\}^{\mathcal{U}}) = \lim_{\mathcal{U}} \int_{\{|f_i|>k\}} |f_i(t)|\, d\mu < \varepsilon,$$

lo que prueba que $B_{E_{\mathcal{U}}}$ es equiintegrable. Entonces $E_{\mathcal{U}}$ es reflexivo y por tanto E es superreflexivo.

Supongamos ahora que E no es reflexivo. Entonces, por la proposición 4.1, existe una sucesión disjunta $(g_n) \subset L_1(\mu)$ tal que $g_n \geq 0$ y $\|g_n\|_1 = 1$ para todo $k \in \mathbf{N}$. Denotemos por $A_n \subset [0,1]$ al soporte de cada función g_n, y sea $\{I_n : n \in \mathbf{N}\}$ una partición disjunta con $\mathcal{U}$. Por cada $i \in I$, tomemos $f_i := g_n$ y $B_i := A_n$ si $i \in I_n$. Así, B_i es el soporte de f_i. Consideremos $\mathbf{f} := [f_i] \in L_1(\mu)_{\mathcal{U}}$ y $C := (B_i)^{\mathcal{U}} \subset [0,1]^{\mathcal{U}}$. De la condición $A_n \cap A_m = \emptyset$ para $n \neq m$, se deduce que $\lim_n \mu(A_n) = 0$, y por tanto,

$$\mu_{\mathcal{U}}(C) = \lim_{\mathcal{U}} \mu(B_i) = 0. \tag{13}$$

Por otra parte, sea $\nu_{\mathbf{f}}$ la medida definida como en (2), y al igual que en (3), sea $\nu_{\mathbf{f}} = w_{\mathbf{f}} + m_{\mathbf{f}}$ la descomposición de Lebesgue-Radon-Nikodym de la medida $\nu_{\mathbf{f}}$, donde $w_{\mathbf{f}}$ es la parte absolutamente continua respecto de $\mu_{\mathcal{U}}$, y $m_{\mathbf{f}}$ y $w_{\mathbf{f}}$ son mutuamente singulares entre sí. Entonces

$$\nu_{\mathbf{f}}(C) = \lim_{\mathcal{U}} \int_{B_i} f_i \, d\mu = 1$$

lo que prueba, junto a (13), que ν no es absolutamente continua respecto de $\mu_{\mathcal{U}}$ y por tanto $m_{\mathbf{f}} \neq 0$, lo que a su vez implica que $\mathbf{f} \notin L_1(\mu_{\mathcal{U}})$. □

El resultado que acabamos de obtener, junto al de Kadec y Pełczyński (proposición 4.1), nos permiten caracterizar los operadores supertauberianos de $L_1[0,1]$ en X.

Proposición 4.3 *Para un operador $T : L_1(\mu) \longrightarrow X$, los siguientes enunciados son equivalentes:*
(a) *T es supertauberiano;*
(b) *T es tauberiano;*
(c) *para toda sucesión disjunta y normalizada, $(f_n) \subset L_1(\mu)$, se cumple $\liminf_n \|Tf_n\| > 0$.*

Demostración. La equivalencia (a)⇔(b) se debe a que, por la proposición 4.2, todos los subespacios reflexivos de $L_1[0,1]$ son superreflexivos, y así, por la proposición 3.20, todo operador tauberiano de $L_1[0,1]$ en X es supertauberiano.
(b)⇒(c) Supongamos T es tauberiano, y sea (f_n) una sucesión disjunta y normalizada en $L_1(\mu)$. Entonces (f_n) no contiene subsucesiones w-convergentes [5; pg.155], y por ser T tauberiano, (Tf_n) no contiene subsucesiones convergentes a cero [32].
(c)⇒(b) Supongamos ahora que T no es tauberiano. Entonces existe una sucesión acotada $(f_n) \subset L_1(\mu)$ sin subsucesiones w-convergentes tal que (Tf_n) es w-convergente [32]. Por proposición 4.1, existe una subsucesión $(f_{n_k}) \subset (f_n)$, una sucesión (h_k) w-convergente y una sucesión disjunta (g_k) tales que

$$f_{n_k} = g_k + h_k \quad \text{y} \quad g_k \cdot h_k = 0, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Como (g_k) no contiene subsucesiones w-convergentes, podemos encontrar una subsucesión (g_{α_k}) tal que $\lim_k \|g_{\alpha_k}\| > 0$. Consideremos la sucesión $y_k := \|g_{\alpha_k}\|^{-1} g_{\alpha_k}$. Evidentemente (Tg_k) es w-convergente, luego (Ty_k) es también

w-convergente, e (y_k) es una sucesión normalizada disjunta, y por tanto sin subsucesiones w-convergentes. Entonces la sucesión $z_k := 2^{-1}(y_{2k} - y_{2k-1})$ también es disjunta y normalizada tal que (Tz_k) es débilmente nula. Esto nos permite tomar una sucesión (r_k) construida por bloques convexos de (z_k) tal que (Tr_k) converge hacia cero en norma, es decir: existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \dots$ y números reales $\alpha_i \geq 0$ tales que $\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_i = 1$ y $r_k = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_i z_i$. Fijémonos en que (r_k) es normalizada y disjunta. Consecuentemente, (r_k) no tiene subsucesiones w-convergentes [5; pg.155]. □

4.2 La factorización de Davis-Figiel-Johnson-Pełczyński.

En [13], Davis, Figiel, Johnson y Pełczyński demostraron que todo operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ puede ser descompuesto como $T = j_T A_T$, donde el operador $j_T \in \mathcal{B}(X,R)$ es tauberiano e inyectivo, y si además T es w-compacto, entonces el espacio de factorización R es reflexivo. A la factorización $T = j_T A_T$ la denominaremos *factorización* DFJP. En [19] se muestra que el factor A_T puede ser descompuesto a su vez en la forma $A_T = U_T k_T$, donde U_T es un isomorfismo y k_T es cotauberiano, y de modo que si la factorización de T^* es $j_{T^*} U_{T^*} K_{T^*}$, entonces $j_{T^*} = (k_T)^*$ y $k_{T^*} = (j_T)^*$. Es natural preguntarse si se cumplen las igualdades $j_{(T_\mathcal{U})} = (j_T)_\mathcal{U}$, $U_{(T_\mathcal{U})} = (U_T)_\mathcal{U}$ y $k_{(T_\mathcal{U})} = (k_T)_\mathcal{U}$. La respuesta, en general es negativa. Basta considerar un operador T de rango no cerrado. Entonces j_T y $j_{(T_\mathcal{U})}$ son inyectivos de rango no cerrado, y por proposición 1.37, $(j_T)_\mathcal{U}$ no es inyectivo, luego $j_{(T_\mathcal{U})} \neq (j_T)_\mathcal{U}$.

Más interesante aún es preguntarse si el factor j_T es supertauberiano. Usando un ejemplo de Beauzamy [3] mostraremos que no siempre lo es. Para comprobarlo, veremos que los operadores uniformemente convexificantes coinciden con los super-w-compactos.

La definición de Beauzamy de operador *uniformemente convexificante* requiere previamente los conceptos de (n,ε)-rama y de *rama infinita* en un espacio de Banach[5; pg.225]:

Una $(1,\varepsilon)$-*rama* es un conjunto $\{x_{+1}, x_{-1}\} \subset X$ tal que $\|x_{+1} + x_{-1}\| \geq \varepsilon$.

Una $(2,\varepsilon)$-*rama* es un conjunto de 2^2 elementos, $\{x_{\varepsilon_1\varepsilon_2} : \varepsilon_i = \pm 1\}$, verificando $\|x_{+1,-1} - x_{+1,+1}\| \geq \varepsilon$, $\|x_{-1,-1} - x_{-1+1}\| \geq \varepsilon$, , y los puntos $x_{+1} := \frac{1}{2}(x_{+1,-1} + x_{+1,+1})$ y $x_{-1} := \frac{1}{2}(x_{-1,-1} + x_{-1,+1})$ forman una $(1,\varepsilon)$-rama.

Reiterando este proceso, si $\{x_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_{n-1}} : \varepsilon_i = \pm 1\}$ son los 2^{n-1} puntos de una $(n-1,\varepsilon)$-rama, diremos que el conjunto $\{x_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n} : \varepsilon_i = \pm 1\}$ es una (n,ε)-*rama* si para cada $(n-1)$-tupla de signos $\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_{n-1}$ se verifica:

$$x_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_{n-1}} = \frac{1}{2}(x_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_{n-1}-1} + x_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_{n-1}+1})$$

y además

$$\|x_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_{n-1}-1} - x_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_{n-1}+1}\| \geq \varepsilon.$$

Se llama *ε-rama infinita* a una familia infinita de puntos

$$\{x_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n} : \varepsilon_i = \pm 1,\, n \in \mathbf{N}\} \subset X$$

verificando las propiedades:

i) para cada $n \in \mathbf{N}$ y cada $(n-1)$-tupla de signos $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}$, se cumple

$$x_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}} = \frac{1}{2}(x_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}-1} + x_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}+1}),$$

ii) para todo $n \in \mathbf{N}$, $\{x_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n} : \varepsilon_i = \pm 1\}$ es una (n,ε)-rama.

Definición 4.4 [3; cap.1] [5; pg.227] *Se dice que un conjunto C de un espacio de Banach X tiene la* propiedad de árbol finito *(p.a.f.) si existe un $0 < \varepsilon < 1$ tal que para todo $n \in \mathbf{N}$ existe una (n,ε)-rama contenida en C. Se dice que C tiene la propiedad de* árbol infinito*(p.a.i.) si contiene una ε-rama infinita.*

Definición 4.5 [3; cap.1, def.4] *Se dice que el operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es* uniformemente convexificante *si $T(B_X)$ no tiene la p.a.f.*

El siguiente lema permite relacionar los conceptos de superreflexividad y de (n,ε)-rama.

Lema 4.6 *Sean $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset X$ y $0 < \varepsilon < 1$. Son equivalentes:*

(a) *existe $\{f_1,\ldots,f_n\} \subset S_{X^*}$ tal que*

$$f_k(x_m) = \begin{cases} > \varepsilon, & si\ 1 \le k \le m \le n \\ = 0, & si\ 1 \le m < k \le n; \end{cases}$$

(b) *para todo $k = 1,2,\ldots,n-1$, se cumple*

$$\operatorname{dist}\Big(\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle\,,\, \operatorname{conv}(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)\Big) > \varepsilon.$$

Demostración.

(a)$\Rightarrow$(b) Sea $1 \le k \le n-1$. Si $m \ge k+1$, pongamos $\varepsilon_m := f_{k+1}(x_m) - \varepsilon > 0$, y $\delta = \min\{\varepsilon_{k+1},\ldots,\varepsilon_n\}$. Sean $y \in \langle x_1,\ldots,x_k\rangle$ y $z = \sum_{i=k+1}^n \lambda_i x_i \in \operatorname{conv}(x_{k+1},\ldots,x_n)$; así $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \ge 0$. Entonces

$$f_{k+1}(z-y) = f_{k+1}(z) = \varepsilon\sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\lambda_i \ge \varepsilon + \delta > \varepsilon.$$

Como $\|f_{k+1}\| = 1$, entonces $\|z-y\| > \varepsilon + \delta$, luego

$$\operatorname{dist}\Big(\langle x_1,\ldots,x_k\rangle\,,\, \operatorname{conv}(x_{k+1},\ldots,x_n)\Big) > \varepsilon.$$

(b)$\Rightarrow$(a) Sean $1 \le k \le n-1$, y el conjunto convexo y cerrado $H := \langle x_1,\ldots,x_k\rangle - \operatorname{conv}(x_{k+1},\ldots,x_n)$. Denotemos $F := \langle x_1,\ldots,x_n\rangle$. Por hipótesis, $\operatorname{dist}(0,H) > \varepsilon$, luego $\varepsilon B_X \cap H = \emptyset$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe un funcional $f_{k+1} \in S_{X^*}$ y un $d > 0$ tales que

$$\sup f_{k+1}(\varepsilon B_F) < d < \inf f_{k+1}(H).$$

La condición $\|f_{k+1}\| = 1$ implica $\varepsilon < d$, y así $\varepsilon < \inf f_{k+1}(H)$. Por otro lado, $\varepsilon < \inf f_{k+1}(H)$ implica $f(x_i) = 0$ para $i = 1,2,\ldots,k$. Entonces $\varepsilon < \inf f_{k+1}\big(\operatorname{conv}(x_{k+1},\ldots,x_n)\big)$. $\square$

Lema 4.7 *Sean $\varepsilon > 0$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2^n}\} \subset X$ y $\{f_1, f_2, \ldots, f_{2^n}\} \subset S_{X^*}$ tales que*

$$f_k(x_m) = \begin{cases} > \varepsilon, & si\ 1 \le k \le m \le 2^n \\ = 0, & si\ 1 \le m < k \le 2^n. \end{cases}$$

Entonces $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2^n}\}$ es una (n, ε)-rama.

Demostración. Por el lema 4.6,

$$\operatorname{dist}\Big(\langle x_1, \ldots, x_k \rangle, \operatorname{conv}(x_{k+1}, \ldots, x_{2^n})\Big) > \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (1)$$

Entonces $\|x_{2l-1} - x_{2l}\| > \varepsilon$ para todo $l = 1, \ldots, 2^{n-1}$. Sean los elementos

$$x_l^2 := \frac{1}{2}(x_{2l-1} - x_{2l}), \quad l = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}.$$

Por (1) es inmediato que

$$\operatorname{dist}\left(\langle x_1^2, \ldots, x_k^2 \rangle, \operatorname{conv}(x_{k+1}^2, \ldots, x_{2^{n-1}}^2)\right) > \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1} - 1$$

de donde se deduce $\|x_{2l-1}^2 - x_{2l}^2\| > \varepsilon$ para todo $l = 1, 2, \ldots, 2^{n-2}$. Y procediendo inductivamente, se comprueba que $\{x_1, \ldots, x_{2^n}\}$ es una (n, ε)-rama. □

Nuestra demostración de que los operadores uniformemente convexificantes coinciden con los super-w-compactos usa un resultado de Beauzamy [5; pg.235], en el que se prueba que si un conjunto contiene una ε-rama infinita entonces no es relativamente débilmente compacto.

Proposición 4.8 *Un operador es uniformemente convexificante si y sólo si es super-w-compacto.*

Demostración. Supongamos que $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ no es super-w-compacto. Por definición, existe un $0 < \varepsilon < 1$ tal que para todo $n \in \mathbf{N}$ existen familias finitas $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2^n}\} \subset S_X$ y $\{f_1, f_2, \ldots, f_{2^n}\} \subset S_{Y^*}$ verificando

$$f_k(Tx_m) = \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } 1 \le k \le m \le 2^n \\ = 0, & \text{si } 1 \le m < k \le 2^n. \end{cases}$$

Por el lema 4.7, $\{Tx_l : 1 \le l \le 2^n\}$ es una (n, ε)-rama, luego $T(B_X)$ tiene la p.a.f., y por definición, T no es uniformemente convexificante.

Para el recíproco, supongamos que $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ no es uniformemente convexificante. Entonces $T(B_X)$ tiene la p.a.f., y así existe un $0 < \varepsilon < 1$ tal que para todo $n \in \mathbf{N}$ existen familias

$$\{x_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n}^n : \varepsilon_i = \pm 1\} \subset B_X$$

verificando que $\{Tx_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n}^n : \varepsilon_i = \pm 1\}$ es una (n, ε)-rama de $T(B_X)$.

Para cada par de números naturales i y n, y para cada n-tupla de signos $\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n$, tomemos los elementos

$$z^i_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n} := \begin{cases} = 0, & \text{si } i < n \\ = x^n_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n}, & \text{si } i = n \\ = \dfrac{1}{2}(x^i_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n -1} + x^i_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n +1}), & \text{si } n < i. \end{cases}$$

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathbf{N}$, y por cada n-tupla $\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n$ consideremos el elemento

$$\mathbf{z}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n} := [z^i_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n}]_i \in B_{X_\mathcal{U}}.$$

Es fácil comprobar que $K := \{T_\mathcal{U}\mathbf{z}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n} : \varepsilon_i = \pm 1,\ 1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbf{N}\}$ es una ε-rama infinita contenida en $T_\mathcal{U}(B_{X_\mathcal{U}})$, lo que prueba, según [5; pg.235], que $T_\mathcal{U}(B_{X_\mathcal{U}})$ no es w-compacto, o equivalentemente, que el operador T no es super-w-compacto. □

Beauzamy [5; pg.121-122] considera el espacio de Orlicz $L_\varphi[0,1]$ de las funciones $f(t) \in L_1[0,1]$ para las que se verifica

$$\varphi(f) := \int_0^1 |f(t)|\big(1 + \log(1 + |f(t)|)\big)\, dt < \infty.$$

Denotando $\imath_\varphi$ a la inclusión natural del espacio $L_\varphi[0,1]$ en $L_1[0,1]$, se demuestra en [5; pg.122] que el operador $\imath_\varphi$ es uniformemente convexificante pero no factoriza a través de espacios superreflexivos. Esto nos permite afirmar que el factor tauberiano j de DFJP no siempre es supertauberiano, según mostramos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.9 *El factor j en la factorización DFJP del operador inclusión $\imath_\varphi : L_\varphi[0,1] \longrightarrow L_1[0,1]$ no es supertauberiano.*

Sea $\imath_\varphi = jUk$ el refinamiento de la factorización DFJP considerado en [19], donde $j \in \mathcal{B}(F, L_1[0,1])$ es tauberiano, y $k \in \mathcal{B}(L_\varphi[0,1], E)$ es cotauberiano. Según la proposición 4.8, $\imath_\varphi$ es super-w-compacto. Ahora, $SWCo$ es un ideal suprayectivo, luego por [19; 2.2.a], j es super-w-compacto. Si además j fuese supertauberiano, por la proposición 3.16 y el teorema 3.19, F tendría que ser superreflexivo, contradiciéndose con que $\imath_\varphi$ no factoriza a través de espacios superreflexivos.

Análogamente, como $SWCo$ es un ideal inyectivo, por [19; 2.2.b], k es super-w-compacto. Si k fuese también cosupertauberiano, entonces E tendría que ser superreflexivo, llegando a contradicción.

A continuación, daremos un ejemplo elemental de operador T tal que el factor j en la DFJP no es supertauberiano. Para ello necesitaremos exponer algunos elementos de la factorización DFJP cuyos detalles y demostraciones pueden consultarse en [13] y [19]. Dado $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, para cada $n \in \mathbf{N}$ denotaremos

$$q_n(y) := \inf\{t > 0 : y \in 2^n TB_X + 2^{-n}B_Y\}, \quad y \in Y$$
$$p_n(g) := 2^n\|T^*g\| + 2^{-n}\|g\|, \quad g \in Y^*.$$

Tanto q_n como p_n son normas equivalentes a las normas iniciales de Y e Y^* respectivamente. Además,

$$(Y, q_n)^* = (Y^*, p_n), \qquad \text{(isométricamente)}.$$

Consideremos los espacios de Banach

$$\ell_2(Y, q_n) := \left\{ (y_n) : \ y_n \in Y, \ \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n(y_n)^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}$$
$$\ell_2(Y^*, p_n) := \left\{ (g_n) : \ g_n \in Y^*, \ \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n(g_n)^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

ambos dotados con la norma natural, que denotaremos por $\|\!| \cdot |\!\|$, y los subespacios cerrados

$$F_T := \{(y_n) \in \ell_2(Y, q_n) : y_1 = y_n \quad \forall n \in \mathbf{N}\} \subset \ell_2(Y_n, q_n)$$
$$N_{T^*} := \Big\{(g_n) \in \ell_2(Y^*, p_n) : \sum_{n=1}^{\infty} T^* g_n = 0\Big\} \subset \ell_2(Y_n^*, p_n).$$

Se verifica $(F_T)^\perp = N_{T^*}$. Por tanto, se identifican isométricamente

$$(F_T)^* \equiv \ell_2(Y^*, p_n)/N_{T^*}.$$

La factorización $T = j_T A_T$ viene dada por

$$j_T : (y, y, y, \ldots) \in F_T \longrightarrow y \in Y$$
$$A_T : x \in X \longrightarrow (j_T)^{-1}(Tx) \in F_T.$$

Nótese que la acción de $f = (f_1, f_2, f_3, \ldots) + N_{T^*} \in (F_T)^*$ sobre el elemento $g = (y, y, y, \ldots) \in F_T$ se obtiene como

$$f(g) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y).$$

A continuación estudiamos la factorización DFJP del operador tauberiano en la frontera de $\mathcal{T}_+$ que vimos en el ejemplo 2.33.

Ejemplo 4.10 *Dado X un espacio de Banach no superreflexivo, sea el operador $T : \ell_2(X) \longrightarrow \ell_2(X)$ dado por*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) := \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots \right).$$

Entonces el factor j_T en la factorización DFJP *de T no es supertauberiano.*

Demostración. Sean $0 < \varepsilon < 1$, $n \in \mathbf{N}$ y $\delta > 0$ cualesquiera. Bastará encontrar familias $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ en S_F y $\{f_1, f_2, \dots f_n\}$ en S_{F^*} tales que $f_k(x_m) > \varepsilon$ si $1 \le k \le m \le n$ y $f_k(x_m) = 0$ si $1 \le m < k \le n$ y $\|j_T x_k\| < \delta$ para todo $k = 1, \dots, n$.

Dado $r \in \mathbf{N}$, para un espacio de Banach Y cualquiera denotaremos $L_r : Y \longrightarrow \ell_2(Y)$ a la aplicación definida por

$$L_r(x) := (0, 0, \dots, 0, x, 0, 0, \dots, 0), \qquad x \in Y,$$

donde el elemento x ocupa el lugar r-ésimo. Consideremos los subespacios $X_r := L_r(X) \subset \ell_2(X)$. Nótese que $X_r \subset R(T)$, luego $X_r \subset R(j_T)$. Así

$$\left(2^n T B_{\ell_2(X)} + 2^{-n} B_{\ell_2(X)}\right) \cap X_r = 2^n \frac{1}{k} B_{X_r} + 2^{-n} B_{X_r}.$$

Por tanto, para $x \in X_r$, tenemos $q_n(x) = (2^n \frac{1}{r} + 2^{-n})^{-1} \|x\|$.

Denotemos

$$\beta_n \equiv \beta_n(r) := (2^n \frac{1}{r} + 2^{-n})^{-1} \|x\|$$
$$C \equiv C(r) := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2\Big)^{1/2}.$$

Como X no es superreflexivo, podemos tomar familias $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ en S_X y $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ en S_{X^*} tales que $g_k(y_m) > \varepsilon$ si $k \le m$ y $g_k(y_m) = 0$ si $m < k$. Consideremos los elementos

$$\widetilde{x}_k := j_T^{-1}(L_r y_k) \in F, \qquad k = 1, 2, \dots, n$$
$$\widetilde{f}_k := \big(\beta_1^2 L_r(g_k), \beta_2^2 L_r(g_k), \dots\big) + N_{T^*} \in F^*, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

La norma de los $\widetilde{x}_k$ es

$$|||\widetilde{x}_k||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2(L_r y_k)\right)^{1/2} = C, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Calculemos la norma de los $\widetilde{f}_k$:

$$p_n^2(\widetilde{f}_k) = \left[2^n \|T^* \beta_n^2 g_k\| + 2^{-n} \|\beta_n^2 g_k\|\right]^2 = \left[2^n \frac{1}{r} \beta_n^2 + 2^{-n} \beta_n^2\right]^2 = \beta_n^2$$

luego

$$|||\widetilde{f}_k||| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n^2(\widetilde{f}_k)\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2\right)^{1/2} = C, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Además,

$$\widetilde{f}_k(\widetilde{x}_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 g_k(y_m),$$

y así

$$\widetilde{f}_k(\widetilde{x}_m) \begin{cases} > C^2\varepsilon, & \text{si } 1 \le k \le m \le n \\ = 0, & \text{si } 1 \le m < k \le n. \end{cases}$$

Finalmente, nótese que

$$C^2(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2^n + r2^{-n}} \right)^2 \ge \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2^n + r} \right)^2 \ge$$

$$\ge \int_1^{\infty} \left(\frac{r}{2^t + r} \right)^2 dt \ge \int_1^{\log r} \left(\frac{r}{2^t + r} \right)^2 dt \ge \frac{1}{4}(\log r - 1) \xrightarrow[r\to\infty]{} \infty.$$

Entonces, si elegimos r suficientemente grande para que $C(r)^{-1} < \delta$, y tomando los elementos normalizados

$$x_k := C^{-1}\widetilde{x}_k \in F, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$
$$f_k := \|\widetilde{f}_k\|^{-1} \widetilde{f}_k \in F^*, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

obtenemos $f_k(x_m) > \varepsilon$ si $k \le m$, $f_k(x_m) = 0$ si $m < k$, y $\|j(x_k)\| < \delta$, para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, lo que demuestra que j_T no es supertauberiano.

4.3 La inclusión del espacio J de James en c_0.

El espacio de James, denotado J (ver por ejemplo [37; 1.d.2]), ha tenido su origen en la búsqueda de contraejemplos en la teoría de espacios de Banach. Una de sus principales propiedades es que es isométrico a su doble dual, y sin embargo no es reflexivo.

Representemos por $\mathbf{N}^*$ al conjunto de los enteros no negativos. La coordenada n-ésima de una sucesión $x : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{R}$ se escribirá $x(n)$. Para cada una de estas sucesiones denotaremos

$$\|x\|_J := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \big(x(p_i) - x(p_{i+1})\big)^2 : \, p_i \in \mathbf{N}^*, \, p_1 < \ldots < p_n \right\}^{1/2}.$$

El espacio J se define como el conjunto de las sucesiones $x : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{R}$ que verifican las propiedades:

i) $\lim_n x(n) = 0$,

ii) $\|x\|_J < \infty$,

teniendo por norma a la expresión $\|\cdot\|_J$. Es evidente que $\|x\|_\infty \le \|x\|_J$, luego la inclusión natural $\imath : J \longrightarrow c_0$ es un operador acotado. Además es tauberiano, pues J^{**} es igual a $J \oplus \langle(1, 1, 1, \ldots)\rangle$ [37; 1.d.2], e $\imath^{**}(1, 1, \ldots) = (1, 1, \ldots) \notin c_0$. Sin embargo no es supertauberiano, tal como pasamos a probar.

Ejemplo 4.11 *La inclusión natural $\imath : J \longrightarrow c_0$ es un operador tauberiano no supertauberiano.*

Demostración. Sean $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < 1$ y $n \in \mathbf{N}$ cualesquiera. Tomemos un $p \in \mathbf{N}$ tal que $\sqrt{2p}^{-1} < \delta$. Escribamos $m := n+1$, y para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, sean las sucesiones $y_k : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{R}$ dadas por

$$y_k(i) \begin{cases} = \sqrt{2p}^{-1}, & \text{si } i = k, m+k, 2m+k, \ldots, (p-1)m+k \\ = 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Tomamos los elementos

$$x_k := y_1 + \ldots + y_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Notemos que cada x_k está formado por p "mesetas" de altura $\sqrt{2p}^{-1}$ y "anchura" igual a k. Teniendo en cuenta que $x_k(0) = x_k(m) = \ldots = x_k((p-1)m) = x(pm) = 0$, es inmediato que $\|x_k\|_J = 1$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$. Además

$$\operatorname{dist}_J\big(\langle x_1, \ldots, x_{k-1}\rangle, \operatorname{conv}(x_k, \ldots, x_n)\big) \geq 1, \quad 2 \leq k \leq n-1$$

debido a que, si $u \in \langle x_1, \ldots, x_{k-1}\rangle$ y $v \in \operatorname{conv}(x_k, \ldots, x_n)$, entonces $y := u - v$ verifica

$$\begin{aligned} &y(k) = y(m+k) = y(2m+k) = \ldots = y((p-1)m+k) = -\sqrt{2p}^{-1} \\ &y(0) = y(m) = y(2m) = \ldots = y((p-1)m) = y(pm) = 0, \end{aligned}$$

de donde se sigue $\|y\|_J \geq 1$. Entonces, por el lema 4.6 existen funcionales $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset S_J$ tales que $f_k(x_m) > \varepsilon$ si $1 \leq k \leq m \leq n$ y $f_k(x_m) = 0$ si $1 \leq m < k \leq n$. Y como $\|x_k\|_\infty < \delta$, por la proposición 3.4 la inclusión de J en c_0 no es supertauberiana.

4.4 Inclusiones de espacios de Orlicz vectoriales.

Dado un espacio de Banach X, los espacios de Orlicz vectoriales son ciertos espacios de Banach cuyos elementos son funciones medibles $f : [0,1] \longrightarrow X$.

Bombal y Fierro [7] demuestran que para un espacio de Banach X y Ψ una función de Young verificando la δ_2-condición, la inclusión natural del espacio de Orlicz $L_\Psi(X)$ en $L_1(X)$ es un operador tauberiano. En particular, para $1 \leq p < \infty$, los espacios $L_p(X)$ definidos por

$$L_p(X) := \left\{ f : [0,1] \longrightarrow X \quad \text{medible} : \ \Big(\int_0^1 \|f(t)\|^p \, dt\Big)^{1/p} < \infty \right\}$$

verifican que la inclusión natural de $L_p(X)$ en $L_1(X)$, denotada $\imath_p$, es un operador tauberiano. Trivialmente, la inclusión $\imath_1$ es supertauberiana.

Es conocido que, para $1 < p < \infty$, un espacio X es superreflexivo si y sólo si $L_p(X)$ también lo es [4; pg.71]. Según la anterior observación, si X es superreflexivo, la inclusión $\imath_p$ es trivialmente supertauberiana, ya que $L_p(X)$ es superreflexivo. Sin embargo, veremos que cuando X no es superreflexivo, $\imath_p$ nunca es supertauberiano.

Ejemplo 4.12 *Si X es un espacio de Banach no superreflexivo y $1 < p < \infty$, el operador inclusión de $L_p(X)$ en $L_1(X)$ no es supertauberiano.*

Demostración. Como X es no superreflexivo, dado $0 < \varepsilon < 1$, por cada $n \in \mathbf{N}$ podemos encontrar familias $\{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n\}$ en S_X y $\{f_1^n, f_2^n, \ldots, f_n^n\}$ en S_{X^*} tales que

$$f_k^n(x_m^n) = \begin{cases} > \varepsilon, & \text{si } k \leq m \\ = 0, & \text{si } m < k. \end{cases}$$

Denotemos por $\chi_n(t)$ a la función característica del intervalo $[0, 2^{-n}]$, y para $p \in \mathbf{N}$, representemos por p' al número natural tal que $pp' = p + p'$. Recordemos que $L_{p'}(X^*)$ se identifica de modo natural con un subespacio de $L_p(X)^*$. Para cada $n \in \mathbf{N}$ y $1 \leq k \leq n$, sean los elementos $z_k^n(t) \in L_p(X)$ y $g_k^n(t) \in L_{p'}(X^*) \subset L_p(X)^*$ dados por

$$z_k^n(t) = 2^{n/p} x_k^n \chi_n(t)$$

y

$$g_k^n(t) = 2^{n/p'} f_k^n \chi_n(t).$$

Los elementos $z_k^n(t)$ y $g_k^n(t)$ tienen norma uno en $L_p(X)$ y $L_{p'}(X^*)$ respectivamente, pues

$$\int_{[0,1]} \|z_k^n(t)\|^p \, dt = \int_{[0,2^{-n}]} 2^n \, dt = 1$$
$$\int_{[0,1]} \|g_k^n(t)\|^{p'} \, dt = \int_{[0,2^{-n}]} 2^n \, dt = 1.$$

Además, si $1 \leq k \leq m \leq n$:

$$\langle g_k^n, z_m^n \rangle = \int_{[0,2^{-n}]} 2^n f_k^n(x_m^n) \, dt > \varepsilon$$

y si $1 \leq m < k \leq n$:

$$\langle g_k^n, z_m^n \rangle = \int_{[0,2^{-n}]} 2^n f_k^n(x_m^n) \, dt = 0.$$

Finalmente, la norma de $\imath_p(z_k^n)$ en $L_1(X)$ es

$$\|\imath_p(z_k^n)\| = \int_{[0,2^{-n}]} 2^{n/p} = 2^{\frac{n}{p} - n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

y de la proposición 3.3, se deduce que T no es supertauberiano. □

TABLA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{N}$	conjunto de los números naturales o enteros positivos.
$\mathbf{R}$	conjunto de los números reales.
$\wp(I)$	clase de las partes del conjunto I.
$A \subset B$	el conjunto A está contenido o es igual a B.
$A \cap B$	intersección de los conjuntos A y B.
$A \cup B$	unión de A y B.
$A \setminus B$	conjunto de los elementos de A que no pertenecen a B.
χ_A	función característica asociada al conjunto A.
X^*	espacio dual asociado al espacio de Banach X.
$\ell_\infty(I, X)$	espacio de las familias acotadas $(x_i)_{i \in I}$ contenidas en X.
$N_{\mathcal{U}}(X)$	espacio de los elementos de $\ell_\infty(I, X)$ convergentes a cero según el ultrafiltro $\mathcal{U}$.
$X_{\mathcal{U}}, C_{\mathcal{U}}$	ultrapotencias según el ultrafiltro $\mathcal{U}$ del espacio X o del subconjunto C de X.
B_X	elementos del espacio X con norma igual o menor que 1.
S_X	elementos del espacio X con norma igual a 1.
$\lim_{\mathcal{U}}$	límite según el ultrafiltro $\mathcal{U}$.
$w\text{-}\lim_{\mathcal{U}}$	límite débil según el ultrafiltro $\mathcal{U}$.
$w^*\text{-}\lim_{\mathcal{U}}$	límite $*$-débil según el ultrafiltro $\mathcal{U}$.
$\overline{A}$	en un espacio de Banach, clausura en norma del conjunto A.
$\overline{A}^w$	clausura débil de A.
$\overline{A}^{w^*}$	clausura $*$-débil de A.
$A + B$	en un espacio de Banach, conjunto de todos los elementos $x + z$ con $x \in A$ y $z \in B$.
$A - B$	en un espacio de Banach, conjunto de todos los elementos $x - z$ con $x \in A$ y $z \in B$.
$\langle A \rangle$	subespacio lineal cerrado generado por A.
$\operatorname{conv} A$	envoltura convexa del conjunto A.
$A^\perp$	espacio ortogonal asociado a A.
$\dim E$	dimensión algebraica del espacio E.
$\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$	distancia en un espacio métrico.
$\mathcal{B}(X, Y)$	conjunto de todos los operadores lineales y continuos del espacio X en Y.
$\mathcal{B}(X)$	se define como el conjunto $\mathcal{B}(X, X)$.
$N(T)$	núcleo del operador T.
$R(T)$	rango del operador T.
$T\|_E$	restricción del operador T al espacio E.
I_X	operador identidad asociado al espacio X.
$\imath_E$	operador inclusión asociado al subespacio E.

q_E	operador cociente asociado al subespacio cerrado E.
$X \oplus_p Y$	para $1 \leq p < \infty$, espacio de los pares $(x,y) \in X \times Y$ con la norma $\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|$.
c_0	espacio de Banach de las sucesiones nulas con la norma del supremo.
ℓ_∞	espacio de Banach de las sucesiones acotadas con la norma del supremo.
$\|\cdot\|_\infty$	norma del supremo, dada por $\|(x_n)\|_\infty := \sup_n \lvert x_n \rvert$.
ℓ_p	para $1 \leq p < \infty$,espacio de Banach de las sucesiones (x_n) dotado de la norma $\|\cdot\|_p$.
$\|\cdot\|_p$	norma dada por $\|(x_n)\|_p = \sum_{n=1}^\infty \lvert x_n \rvert$.
$L_p[0,1]$	para $1 \leq p < \infty$, espacio de Banach de las funciones medibles $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ con potencia p-ésima integrable.
Co	ideal de los operadores compactos.
$Co(X,Y)$	conjunto de los operadores compactos de X en Y.
WCo	ideal de los operadores débilmente compactos o w-compactos.
$WCo(X,Y)$	conjunto de los operadores w-compactos de X en Y.
$SWCo$	ideal de los operadores super-débilmente compactos, o super-w-compactos.
$SWCo(X,Y)$	conjunto de los operadores super-w-compactos.
$\mathbf{R}_S$-S	ideal de los operadores $\mathbf{R}_S$-S
$\mathbf{R}_S$-$S(X,Y)$	clase de los operadores $\mathbf{R}_S$-S de X en Y.
$\mathbf{R}_S$-C	ideal de los operadores $\mathbf{R}_S$-C
$\mathbf{R}_S$-$C(X,Y)$	clase de los operadores $\mathbf{R}_S$-C de X en Y.
F_+	semigrupo de los operadores semi-Fredholm superiores.
$F_+(X,Y)$	clase de los operadores semi-Fredholm superiores de X en Y.
F_-	semigrupo de los operadores semi-Fredholm inferiores.
$F_-(X,Y)$	clase de los operadores semi-Fredholm inferiores de X en Y.
$\mathcal{T}_+$	semigrupo de los operadores tauberianos.
$\mathcal{T}_+(X,Y)$	clase de los operadores tauberianos de X en Y.
$\mathcal{T}_-$	semigrupo de los operadores cotauberianos.
$\mathcal{T}_-(X,Y)$	clase de los operadores cotauberianos de X en Y.
Ψ_+	semigrupo de los operadores supertaberianos.
$\Psi_+(X,Y)$	clase de los operadores supertaberianos de X en Y.
Ψ_-	semigrupo de los operadores cosupertauberianos.
$\Psi_-(X,Y)$	clase de los operadores cosupertauberianos de X en Y.

REFERENCIAS

[1] A.G. Aksoy and M.G. Khamsi. *Nonstandard methods in fixed point theory.* **Springer-Verlag.** (1990).

[2] T. Alvarez and M. González. *Some examples of tauberian operators.* **Proc. Amer. Math. Soc.** 111 (1991), 1023-1027.

[3] B. Beauzamy. *Opérateurs uniformément convexifiants.* **Studia Mathematica.** 57 (1976), 103-139.

[4] B. Beauzamy. *Espaces d'interpolation réels: topologie et géométrie.* **Springer-Verlag.** Lecture notes 666 (1978).

[5] B. Beauzamy. *Introduction to Banach spaces and their Geometry.* **North-Holland.** Math. Studies 68 (1985).

[6] Bourbaki. *Topologie Générale I.* **Hermann Ed.** livre III (1953).

[7] F. Bombal y C. Fierro. *Compacidad débil en espacios de Orlicz.* **Rev. Real Academia de Ciencias de Madrid.** 78 (1984), 157-163.

[8] H. Brzis. *Análisis Funcional.* **Alianza editorial.** Alianza Universidad (1983).

[9] P.G. Casazza and T.J. Shura. *Tsirelson space.* **Springer-Verlag.** Lecture notes 1363 (1989).

[10] S.R. Caradus, W.E. Pfaffenberger and B. Yood. *Calkin algebras and algebras of operators on Banach spaces.* **Marcel Dekker.** Lecture Notes in Pure and Applied Math. (1974).

[11] J.J.M. Chadwick and A.W. Wickstead. *A quotient of ultrapowers of Banach spaces and semi-Fredholm operators.* **Bull London Math. Soc.** 9 (1977), 321-325.

[12] D. Dacunha-Castelle et J.L. Krivine. *Applications des ultraproduits à l'étude des espaces et des algèbres de Banach.* **Studia Math.** 41 (1972) 315-334.

[13] W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson and A. Pełczyński. *Factoring weakly compact operators.* **J. Funct. Anal.** 17 (1974), 311-327.

[14] J. Diestel. *Sequences and series in Banach spaces.* **Springer Verlag.** (1984).

[15] N. Dunford and J.T. Schwartz. *Linear Operators.* **Interscience Publishers Inc.** (1957).

[16] D.P. Giesy and R.C. James. *Uniformly non-$\ell^{(1)}$ and B-convex Banach spaces.* **Studia Math.** 48 (1973), 61-69 .

[17] M. González. *An operator ideal associated to tauberian operators.* **Extracta Mathematicae.** 4 (1989), 105-107.

[18] M. González. *Properties and applications of tauberian operators.* **Extracta Mathematicae.** 5 (1990), 91-107.

[19] M. González. *Dual results of factorization for operators.* **Annales Acad. Sci. Fennicæ.** Series A.I. Math. 18 (1993), 3-11.

[20] M. González and V.M. Onieva. *Semi-Fredholm operators and semigroups associated with some classical operators ideals-II.* **Proc. R. Irish Acad.** 88A (1988), 35-38.

[21] M. González and V.M. Onieva. *Characterizations of tauberian operators and other semigroups of operators.* **Proc. Amer. Math. Soc.** 108 (1990), 399-405.

[22] S. Heinrich. *Finite representability of operators.* **Proc. Int. Conf. operators algebras, ideals and applications.** Leipzig, (1977). 33-39.

[23] S. Heinrich. *Ultraproducts in Banach spaces theory.* **J. reine angew. Math.** 313 (1980), 72-104.

[24] S. Heinrich. *Finite representability and super-ideals of operators.* **Dissertationes Mathematicae.** 162 (1980) 5-37.

[25] C.W. Henson. *Nonstandard analysis and the theory of Banach spaces.* **Springer-Verlag** 983 (1983), 27-112.

[26] C.W. Henson and L.C. Moore. *Subspaces of the nonstandard hull of a normed space.* **Trans. Amer. Math. Soc.** 197 (1974), 131-143.

[27] R.B. Holmes. *Geometric functional analysis and its applications* **Springer-Verlag.** (1975).

[28] R.C. James. *Weak compactness and reflexivity.* **Israel J. Math.** 2 (1964), 101-119.

[29] R.C. James. *Some self-dual properties of normed linear spaces.* **Sympos. on Infinite Dimensional Topology.** Ann. of Math. Studies 69. Princeton Univ. Press. Princeton (1972), 159-175.

[30] H. Jarchow. *On weakly compact operators on C^*-algebras.* **Math. Ann.** 273 (1986), 341-343.

[31] W.B. Johnson, H.P. Rosenthal and M. Zippin. *On bases, finite-dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces.* **Israel J. Math.** 9 (1971), 488-506.

[32] N. Kalton and A. Wilansky. *Tauberian operators on Banach spaces.* **Proc. Amer. Math. Soc.** 57, (1976), 251-255.

[33] T. Kato. *Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators.* **J. d'Analyse Math.** 6 (1958), 261-322.

[34] D.C. Lay and A.E. Taylor. *Introduction to functional analysis.* **Krieger.** Second edition, (1980).

[35] A. Lebow and M. Schechter. *Semigroups of operators and measures of noncompactness.* **J. Funct. Anal.** 7 (1971), 1-26.

[36] J. Lindenstrauss and H.P. Rosenthal. *The $\mathcal{L}_p$ spaces.* **Israel J. Math.** 7 (1969), 325-349.

[37] J. Lindenstrauss and L.Tzafriri. *Classical Banach spaces.* **Springer-Verlag.** (1977).

[38] W.A.J. Luxemburg. *A general theory of monads,* in *applications of model theory to algebra, analysis and probability.* **W.A.J. Luxemburg (ed.) Holt, Rinehart and Winston** New York (1969), 18-86.

[39] R. Neidinger and H.P. Rosenthal. *Norm-attainment of linear functionals on subspaces and characterizations of tauberian operators.* **Pacific J. Math.** 118 (1985), 39-339.

[40] A. Pełczyński. *On strictly singular and strictly cosingular operators.* **Bull. Acad. Polon. Sci.** 13 (1965) 31-36, 37-41.

[41] A. Pietsch. *Operators Ideals.* **North-Holland.** (1980).

[42] G. Pisier. *Factorization of operators through $L_{p\infty}$ or L_{p1} and non-commutative generalizations.* **Math. Ann. 276** (1986), 105-136.

[43] A. Robinson. *Non-standard analysis.* **North Holland.** 1.974 revised edition, (1974).

[44] H.P. Rosenthal. *On subspaces of L_p.* **Ann. of Math. 97** 344-373 (1973).

[45] W. Rudin. *Análisis real y complejo.* **Reverté** (1985).

[46] B. Sims. *Ultra-techniques in Banach spaces theory.* **Queen's Papers in Pure and Applied Math.** 60 (1982).

[47] J. Stern. *Some applications of model theory in Banach spaces theory.* **Ann. Math. Logic.** 9 (1976), 49-122.

[48] D.G. Tacon. *Nonstandard extensions of transformations between Banach spaces.* **Trans. Amer. Math. Soc.** 260 (1980), 147-158.

[49] D.G. Tacon. *Generalized semi-Fredholm transformations.* **J. Austral Math. Soc.** (series A) 34 (1983), 60-70.

[50] D.G. Tacon. *Generalized Fredholm transformations* **J. Austral Math. Soc.** (series A) 37 (1984), 89-97.

[51] P. Wojtaszczyk. *Banach spaces for analysts.* **Cambridge University Press.** (1991).