

Capítulo 6: Implementación del modelo

Para comparar las predicciones del modelo con los resultados experimentales obtenidos durante la caracterización HM del material, se implementó el modelo descrito anteriormente en un código numérico utilizando la técnica de las diferencias finitas (Hofmann, 1993) en el lenguaje de programación MATLAB. Se consideró el caso de la hidratación unidimensional de una muestra de pellets, Figura 6.1-a. La idealización de la muestra y la dinámica de flujo se muestran en las Figuras 6.1-b y 6.1-c considerando dos elementos. De acuerdo con la idealización adoptada, la resolución del problema se planteo de la siguiente manera:

- Planteo del problema y ecuaciones para la microestructura
- Planteo del problema y ecuaciones para la macroestructura
- Planteo del sistema acoplado
- Estrategia de resolución iterativa

6.1 Planteo del problema y ecuaciones para la microestructura

Para el planteo del problema a nivel de la microestructura se siguieron las hipótesis planteadas en el capítulo anterior. Se considera el medio formado por N elementos ideales y dentro de cada uno de ellos la hidratación de un pellet sometido a las acciones externas impuestas desde la macroestructura (tensión neta: σ'_M y succión: s_M ; Figure 6.2). Las condiciones de contorno para cada pellet están determinadas por los valores de succión macro (s_M) y tensión neta (σ'_M) desde la macroestructura del propio elemento. En la Figura 6.2 se muestra de forma esquemática la dinámica de flujo asumida en el problema planteado y se indican las condiciones de contorno.

6.1.1 Compatibilidad entre deformaciones y desplazamientos para la microestructura

Para la resolución del problema a nivel microestructural, se adopta un sistema de referencia solidario al centro del pellet. En el caso planteado en la Figura 6.1 se han considerado $N=2$ elementos “ideales” para representar el medio real. Tomando en consideración cada elemento, se divide la microestructura (pellet) en K sub-elementos de dimensión $dx = \frac{DX^*}{K}$. Donde DX^* es la mitad del diámetro característico de los pellets ($DX^* = \frac{\phi_{caract}}{2}$) y representa la distancia que debe recorrer el agua hasta para hidratar totalmente el pellet. En la Figura 6.2 se muestra el planteo realizado para la resolución del problema de la hidratación de la microestructura y se indican las correspondientes condiciones de contorno (presión de agua o succión: s_M y tensión media neta: σ'_M). Como resultado de este planteo, se obtiene una malla de $K+1$ nodos y se establecen los vectores de coordenadas y desplazamientos locales $x_{m_{i,j}}$ y $\Delta u_{m_{i,j}}$ (referidos al sistema de referencia local solidario al centro del pellet).

De acuerdo con el planteo anterior, quedan determinadas las relaciones de compatibilidad entre deformaciones y desplazamientos evaluadas a nivel local. Los incrementos de deformación volumétrica de cada uno de los sub-elementos de la microestructura $\dot{\epsilon}_{vmi,j}$ se puede expresar como **Equation Section 6:**

$$\dot{\epsilon}_{vmi,j} = -\frac{(\Delta u_{m_{i,j+1}} - \Delta u_{m_{i,j}})}{(x_{m_{i,j+1}} - x_{m_{i,j}})} = \frac{(\Delta u_{m_{i,j+1}} - \Delta u_{m_{i,j}})}{dx} = -\frac{\dot{\epsilon}_{mi,j}}{(1+e_{mi,j})} \quad (6.1)$$

$e_{mi,j}$ representa el índice de vacíos microestructural evaluado en el sub-elemento j de la microestructura correspondiente al elemento i de la macroestructura (Figura 6.3). Los incrementos de deformación volumétrica micro $\dot{\epsilon}_{vmi,j}$ evaluados a nivel local (dentro de cada sub-elemento micro), se deben integrar dentro del sistema de referencia global. Esto se realiza a partir de la relación entre el índice de vacíos e_{mij} de los sub-elementos que componen la microestructura (pellet) con el índice de vacíos micro total e_{mmi} ,

evaluado en el referencial de todo el elemento (Figura 6.4). Del planteo anterior se obtiene la igualdad:

$$(e_{mmi}) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{j=K} (e_m)_{ij} \quad (6.2)$$

Considerando (6.1) y (6.2) en forma incremental y teniendo en cuenta que la deformación volumétrica total se puede expresar como:

$$\dot{\epsilon}_{vT} = \dot{\epsilon}_{vM} + \dot{\epsilon}_{vmm} \quad (6.3)$$

o lo que es lo mismo

$$\dot{\epsilon}_{vT} = - \frac{\dot{e}_T}{(1+e_T)} = - \frac{\dot{e}_M + \dot{e}_{mm}}{(1+e_T)} = - \left[\frac{\dot{e}_M}{(1+e_T)} + \frac{\dot{e}_{mm}}{(1+e_T)} \right] \quad (6.4)$$

se tiene

$$\frac{\dot{e}_{mmi}}{(1+e_{mmi})} \cdot DX^* = \sum_{j=1}^K \frac{\dot{e}_{mij} \cdot dx}{(1+e_{mij})} \quad (6.5)$$

y sustituyendo en (6.5) las ecuaciones (6.3), (6.4) y (6.1), y expresando en forma incremental se tiene:

$$\frac{(1+e_{Ti})}{(1+e_{mmi})} \dot{\epsilon}_{vmm} \cdot DX^* = \sum_{j=1}^K \dot{\epsilon}_{vmij} dx \quad (6.6)$$

Esta expresión permite integrar los incrementos de deformación volumétrica de cada sub-elemento de la microestructura y calcular la deformación volumétrica total microestructural en el sistema de referencia global.

6.1.2 Balance de masa micro y ley de Darcy

Las ecuaciones de balance de masa planteadas a nivel local sobre cada sub-elemento de la micro se expresan como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_m \cdot S_r^m) - \nabla \cdot (k_m \nabla \varphi_m) = 0 \quad (6.7)$$

donde $\phi_m = \frac{e_m}{(1+e_m)}$ y S_r^m son la porosidad y el grado de saturación evaluados a nivel local, k_m y φ_m son el coeficiente de permeabilidad y el potencial de agua para cada sub-elemento de la microestructura respectivamente. En el caso del potencial de agua φ_m se desprecia la componente gravitacional y se obtiene $\varphi_m = \frac{p_{wm}}{\gamma_w}$.

Sobre el conjunto de K balances de masa (correspondientes en cada sub-elemento de la microestructura), se aplica la condición de consistencia entre la micro y la macroestructura. Se debe cumplir que la suma de las variaciones en el contenido de agua de cada uno de los K elemento de la microestructura sea igual al cambio en el contenido de agua del elemento macro correspondiente. Se considera un término fuente o sumidero $f_{M \rightarrow m}^w$ que representa el intercambio de agua Macro-micro de acuerdo con la convención de signos:

$f_{M \rightarrow m}^w < 0$ flujo saliente de la Macro hacia la micro

$f_{M \rightarrow m}^w > 0$ flujo desde la micro y entrante en la Macro.

De acuerdo con esta convención de signos la condición de consistencia se puede expresar como:

$$\sum_{j=1}^K \left[\frac{\partial}{\partial t} (\phi_m \cdot S_r^m) \right]_{ij} = f_{M \rightarrow mi} \quad (6.8)$$

La ecuación (6.8) junto con los K balances de masa para cada sub-elemento de la micro componen K+1 ecuaciones de balance de masa.

6.1.3 Equilibrio de Tensiones

A nivel local se plantea el equilibrio de tensiones de acuerdo con la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}(\sigma) + b = 0 \quad (6.9)$$

y si despreciamos las fuerzas de masa ($b = 0$) nos queda:

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}(\sigma) = 0 \quad (6.10)$$

Las ecuaciones de equilibrio deben cumplir con las condiciones de contorno impuestas desde la macroestructura. De acuerdo con esto debe haber equilibrio de tensiones en la interfase micro-macro cumpliéndose:

$$p'_{mK} = p'_{Mi} \quad (6.11)$$

Las K-1 ecuaciones de equilibrio (6.10) y la ecuación (6.11) representan un total de K ecuaciones correspondientes al equilibrio de tensiones.

6.1.4 Compatibilidad y Modelo Constitutivo

Una vez planteadas las ecuaciones de balance (6.7) y de equilibrio (6.10) se modifican utilizando la técnica de las diferencias finitas y se aplican las condiciones de compatibilidad (desplazamientos-deformación). Finalmente se utilizan las ecuaciones constitutivas (Modelo mecánico y Curva de retención) para expresar las ecuaciones planteadas en función de los campos de presiones de agua o succión micro (s_{mij}) y los campos de desplazamientos locales Δu_{mij} . El acoplamiento entre ambos niveles estructurales se considera imponiendo las condiciones expresadas en las ecuaciones (6.8) y (6.11). El conjunto de modificaciones realizadas utilizando la técnica de las diferencias finitas y el planteo de las mismas en forma matricial se presenta en el ANEXO III.

6.2 Ecuaciones para la macroestructura

De acuerdo con la idealización del medio adoptada se considera que el medio se puede representar como la superposición o suma de dos medios distintos e imbricados entre sí. A nivel global, una red de elementos macroestructurales conectados entre sí (Figura

6.5-a) y a nivel local, un conjunto de elementos independientes entre sí, ubicados dentro de cada elemento macro y que representan la microestructura. Estos últimos actúan como fuentes o sumideros de la macroestructura (Figura 6.5-b). A continuación se presentan las ecuaciones de compatibilidad entre deformaciones y desplazamientos a nivel global para el caso unidimensional. Se plantean las ecuaciones de balance y equilibrio y las leyes constitutivas correspondientes a la macroestructura.

6.2.1 Compatibilidad entre deformaciones y desplazamientos para la macroestructura

Considerando una muestra de altura H_{muestra} el medio real se sustituye por N elementos idealizados de dimensión $DX = \frac{H_{\text{muestra}}}{N}$. La elección del número de elementos N guarda relación con el tamaño característico de las unidades granulares o pellets ($\phi_{\text{caract. Pellet}}$) definido mediante la curva granulométrica de la mezcla. Asumiendo que los pellets tienen forma esférica, el valor $DX = \frac{\phi_{\text{Pellet}}}{2}$ representa la distancia media desde el centro a la superficie del pellet (Figura 6.6). De acuerdo con las hipótesis realizadas sobre la dinámica de flujo, esta distancia representa la distancia máxima que debe recorrer el agua alojada en la macroestructura, para hidratar completamente un gránulo de bentonita. A partir de lo anterior, el número de elementos N queda determinado tal que la distancia entre nodos cumpla la relación:

$$DX = \frac{(1 + e_T)}{(1 + e_{\text{mm}})} DX^* \quad (6.12)$$

donde e_T es el índice de vacíos medio de la muestra, calculado en función de la densidad de los sólidos que componen los pellets ($\rho_{\text{sol.}}$) y la densidad seca de la mezcla ($\rho_{\text{mezcla.}}$) de acuerdo con:

$$e_T = \left(\frac{\rho_{\text{sol.}}}{\rho_{\text{d Mezcla}}} - 1 \right) \quad (6.13)$$

y e_{mm} representa el índice de vacíos medio del pellet y se obtiene a partir de la densidad seca de las estructuras granulares ($\rho_{d\ Pellet}$) según la expresión:

$$e_{mm} = \left(\frac{\rho_{sol.}}{\rho_{d\ Pellet}} - 1 \right) \quad (6.14)$$

En el caso unidimensional, cada elemento se representa mediante tres nodos. Dos nodos ubicados en ambos extremos del elemento y un nodo interior al elemento y que materializa la interfase macro-micro (superficie del pellet, Figura 6.7). Las relaciones de compatibilidad entre deformaciones y desplazamientos para cada elemento a nivel global, se obtienen expresando las deformaciones volumétricas en función de los campos de coordenadas y desplazamientos de los nodos globales, X_i , U_i y um_i respectivamente. El incremento de deformación volumétrica del elemento i se puede expresar como:

$$\dot{\epsilon}_{vTi} = - \frac{(\dot{U}_{i+1} - \dot{U}_i)}{(X_{i+1} - X_i)} = - \frac{(\dot{U}_{i+1} - \dot{U}_i)}{(DX_i)} = - \frac{\dot{e}_T}{(1+e_T)} \quad (6.15)$$

Los incrementos de deformación volumétrica de la macroestructura se definen considerando el desplazamiento de la superficie del pellet o interfase macro-micro (um_i) de acuerdo con la expresión:

$$\dot{\epsilon}_{vM} = - \frac{(\dot{U}_{i+1} - \dot{um}_i)}{(X_{i+1} - X_i)} = - \frac{(\dot{U}_{i+1} - \dot{um}_i)}{(DX)} = - \frac{\dot{e}_M}{(1+e_T)} \quad (6.16)$$

Si definimos el desplazamiento de la superficie del pellet (um_i) tomando como referencia el desplazamiento en el nodo i (sistema de referencia local) como $um_i = U_i + \Delta um_i$, podemos expresar:

$$\dot{\epsilon}_{vM} = - \underbrace{\frac{(\dot{U}_{i+1} - \dot{U}_i)}{(X_{i+1} - X_i)}}_{\dot{\epsilon}_v} + \underbrace{\frac{(\Delta \dot{um}_i)}{(X_{i+1} - X_i)}}_{\dot{\epsilon}_{vmm}} = (\dot{\epsilon}_v - \dot{\epsilon}_{vmm}) \quad (6.17)$$

donde Δu_i es el desplazamiento de la superficie del pellet o interfase macro-micro evaluada localmente. De esta manera obtenemos una relación incremental para las deformaciones volumétricas de cada nivel estructural evaluadas a nivel global:

$$\dot{\epsilon}_{vT} = \dot{\epsilon}_{vM} + \dot{\epsilon}_{vmm} \quad (6.18)$$

o bien

$$\dot{\epsilon}_{vT} = -\frac{\dot{e}_T}{(1+e_T)} = -\frac{\dot{e}_M + \dot{e}_{mm}}{(1+e_T)} = -\left[\frac{\dot{e}_M}{(1+e_T)} + \frac{\dot{e}_{mm}}{(1+e_T)} \right] \quad (6.19)$$

donde e_{mm} es el índice de vacíos medio del pellet tal que $e_T = e_M + e_{mm}$ y calculado de acuerdo con (6.14). Las compatibilidades planteadas se representan para un elemento en la Figura 6.7.

6.2.2 Balance de masa macro y ley de Darcy

En los balances de masa realizados a nivel macro se considera la microestructura como un término fuente o sumidero de cada elemento macro. La ecuación de balance se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_M \cdot S_r^M) - \nabla \cdot (k_M \nabla \varphi_M) = f_{M \rightarrow m}^w \quad (6.20)$$

donde $\phi_M = \frac{e_M}{(1+e_T)}$ es la porosidad macro, S_r^M es el grado de saturación macro, k_M es el coeficiente de permeabilidad para la macro de acuerdo a la ley de Darcy y $\varphi_M = \chi + \frac{p_{wM}}{\gamma_w}$ es el potencial del agua en la macroestructura donde se desprecia la componente gravitacional.

El término fuente o sumidero $f_{M \rightarrow m}^w$ representa el intercambio de agua Macro-micro de acuerdo con la convención de signos:

$$f_{M \rightarrow m}^w < 0 \text{ flujo saliente de la Macro hacia la micro}$$

$f_{M \rightarrow m}^w > 0$ flujo desde la micro entrante en la Macro.

6.2.3 Equilibrio de Tensiones

Dado que los elementos se conectan entre si a través de la macroestructura se plantean las ecuaciones de equilibrio de tensiones entre los niveles macro de cada elemento.

$$\frac{\partial}{\partial X_i}(\sigma) + b = 0 \quad (6.21)$$

Despreciando las fuerzas de masa $b = 0$ se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial X_i}(\sigma) = 0 \quad (6.22)$$

6.2.4 Compatibilidad y Modelo Constitutivo

Para plantear la resolución del problema es necesario expresar las ecuaciones de balance y equilibrio en términos de presión de agua o succión (s_M) y desplazamientos (U_i y Δum_i). Partiendo de de las ecuaciones de balance y equilibrio (6.20) y (6.22), se realizan modificaciones utilizando la técnica de las diferencias finitas. Posteriormente se aplican las condiciones de compatibilidad 6.2.1, se introduce el modelo constitutivo HM (Modelo BBM) y las leyes constitutivas como la curva de retención y se sustituyen en las ecuaciones de balance y equilibrio. Como resultado se obtiene un sistema de ecuaciones expresado en función de desplazamientos globales (U_i) y los campos de presiones de agua (s_M). En este sistema de ecuaciones aparecen como términos de acoplamiento con la microestructura, los términos fuente o sumidero entre la macro y la microestructura $f_{M \rightarrow m}^w$ y los desplazamientos de la superficie del pellet Δum_i

6.3 Planteo e implementación del sistema de ecuaciones mediante la técnica de las diferencias finitas

A continuación se presenta el detalle de las modificaciones realizadas sobre la ecuación de balance (6.20) para su expresión en forma matricial en función de desplazamientos y

presiones de agua. Partiendo de esta ecuación y utilizando la técnica de las diferencias finitas, se aplican las condiciones de compatibilidad (deformación-desplazamiento) y se introduce la curva de retención como relación fundamental entre la succión y el grado de saturación. El planteo e implementación para las restantes ecuaciones así como el ensamblaje del sistema completo y su expresión en forma matricial se presentan en detalle en el ANEXO III.

Partiendo de la ecuación (6.20)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_m \cdot S_r^M) - \nabla \cdot (k_M \nabla \phi_M) = f_{M \rightarrow m}^w$$

para el caso unidimensional y despreciando la componente gravitacional del potencial del agua $\phi_M = \frac{p_{wM}}{\gamma_w}$ se tiene una ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t}((\phi_\Gamma - \phi_{mm}) \cdot S_r^M) - \frac{k_M}{\gamma_w} \frac{\partial p_{wi}}{\partial X^2} = f_{M \rightarrow m}^w \quad (6.23)$$

donde $\phi_\Gamma - \phi_{mm}$ es la porosidad total y la porosidad micro global. En la ecuación (6.23)

se sustituyen los términos $\frac{\partial}{\partial t}(S_r^M)$, $\frac{\partial p_{wi}}{\partial X^2}$ y $\frac{\partial}{\partial t}((\phi_\Gamma - \phi_{mm}))$ de la siguiente manera:

Primero se aplica sobre $\frac{\partial}{\partial t}(S_r^M)$ la regla de derivación considerando la relación constitutiva $S_{r_i}^M(s_M)$ o curva de retención. Para $S_{r_i}^M(s_M)$ se adoptó una expresión de tipo Van Genuchten modificada.

$$\dot{S}_{r_i}^M = \overbrace{\frac{\partial S_{r_i}^M}{\partial s}}^{\text{A partir de la Cur. Ret. (Van Genuchten)}} * \underbrace{\frac{\partial s_{Mi}}{\partial p}}_{-1} * \underbrace{\frac{(p_{wi,t+dt} - p_{wi,t})}{dt}}_p = \left[-\frac{\partial S_{r_i}^M}{\partial s} \frac{(p_{wi,t+dt} - p_{wi,t})}{dt} \right] \quad (6.24)$$

En segundo lugar, aplicando la técnica de las diferencias finitas se sustituye la derivada

segunda de la presión de agua $\left(\frac{\partial^2 p_w}{\partial X^2} \right)$, de acuerdo con un desarrollo de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 p_w}{\partial X^2} = \frac{[\theta(p_{wi-1} - 2p_{wi} + p_{wi+1})_{t+dt} + (1-\theta)(p_{wi-1} - 2p_{wi} + p_{wi+1})_t]}{DX^2} \quad (6.25)$$

Finalmente para $\frac{\partial}{\partial t}((\phi_r - \phi_{mm}))$, se utilizan las relaciones de compatibilidad entre el incremento de porosidad macro y los incrementos de los desplazamientos en los nodos para el intervalo Δt . De acuerdo con las expresiones (6.17) y (6.19) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}((\phi_r - \phi_{mm})) = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{(\delta U_{i+1} - \delta U_i)}{(DX_i)} - \frac{(\delta \Delta um_{iK+1})}{(DX_i)} \right] \quad (6.26)$$

donde $(\delta \Delta um_{iK+1})$ representa el incremento en el desplazamiento de la superficie del pellet referida al sistema de coordenadas solidario con el centro del pellet. Sustituyendo las expresiones (6.24), (6.25) y (6.26) en (6.23) se tiene:

$$S_r^M \left[\frac{(\delta U_{i+1} - \delta U_i)}{(DX_i)} - \frac{(\delta \Delta um_{iK+1})}{(DX_i)} \right] - \left(\frac{e_{Mi}}{(1+e)} \right) \left[\frac{\partial S_r^M}{\partial s} (p_{wi,t+dt} - p_{wi,t}) \right] - \frac{k_{Mi} \Delta t}{\gamma_w DX_i^2} [\theta(p_{wi-1} - 2p_{wi} + p_{wi+1})_{t+dt} + (1-\theta)(p_{wi-1} - 2p_{wi} + p_{wi+1})_t] - f_{M \rightarrow m}^w = 0 \quad (6.27)$$

La ecuación (6.27) está expresada en función de los valores de presión de agua y desplazamientos nodales. $(\delta \Delta um_{iK+1})$ y $f_{M \rightarrow m}^w$ representan los términos de acoplamiento entre la micro y macroestructura.

Operando de forma análoga sobre las ecuaciones de equilibrio global, las ecuaciones de balance y equilibrio a nivel local se obtiene un conjunto de ecuaciones expresadas en función de los desplazamientos y presión de agua en los nodos. Las diferentes ecuaciones se plantean en forma matricial y se obtienen dos sistemas de ecuaciones acoplados. Un sistema global con $2(N+1)$ incógnitas y N sistemas locales con $2(K+1)$ incógnitas, siendo N y K los números de elementos macro y sub-elementos micro respectivamente. Las incógnitas en cada nodo son la presión de agua y el desplazamiento. Ambos sistemas, macro y micro, están acoplados a partir de los términos que computan los volúmenes de agua intercambiados entre la macro y microestructura (6.8) y los desplazamientos de la superficie del pellet (6.11).

6.4 Estrategia de resolución iterativa

Para la resolución e integración en el tiempo del sistema de ecuaciones se adoptó un esquema iterativo basado en la idealización del medio utilizada. Se plantean dos sistemas de ecuaciones: un sistema correspondiente al medio global y un sistema formado por N subsistemas cada uno de ellos correspondientes a cada elemento micro. Se plantean ambos sistemas de forma desacoplada y se realizan hipótesis para el planteo de una resolución iterativa. A continuación se describen las etapas correspondientes a la resolución del problema planteado para un intervalo de tiempo Δt (Figura 6.8).

ETAPA 1: Se resuelve el sistema de ecuaciones global realizando la hipótesis de que durante el intervalo Δt la microestructura (pellets) se comporta como un material inerte. La hipótesis planteada asume que los términos de acoplamiento $(\delta\Delta um_{iK+1})_0$ y $[\mathbf{f}_{M \rightarrow m}^w]_0$ son nulos. Esto hace que el sistema se vuelva determinado y permite que se resuelva la macroestructura de forma independientemente de la microestructura. Como resultado de esta etapa se obtienen los campos de presión de agua o succión macro (s_{Mi}) y desplazamientos a nivel macro U_i .

ETAPA 2: Tomando los campos obtenidos en la ETAPA 1 (presiones y desplazamientos a nivel macro, s_{Mi} y U_i), se construyen las condiciones de contorno para cada uno de los N elementos micro. Con estas condiciones de contorno se plantea la resolución del conjunto de los N subsistemas micro y se obtienen los campos de presiones de agua o succión micro y los campos de desplazamientos para cada uno de los pellets (s_{mij} y $(\delta\Delta um_{ij})$).

ETAPA 3: Utilizando los resultados del paso anterior calculamos el incremento en el contenido de agua de cada elemento micro $[\mathbf{f}_{M \rightarrow m}^w]_1$ utilizando la expresión (6.8) y los desplazamientos correspondientes a cada una de las superficies de los pellets, desplazamientos $(\delta\Delta um_{iK+1})_1$. Con estos valores verificamos las hipótesis de la

ETAPA 1 evaluando las tolerancias impuestas por: $\|(\delta\Delta um_{iK+1})_0 - (\delta\Delta um_{iK+1})_1\| \leq \delta_1$ y

$\|[\mathbf{f}_{M \rightarrow m}^w]_0 - [\mathbf{f}_{M \rightarrow m}^w]_1\| \leq \delta_2$ o bien:

$$\left\| \frac{(\delta \Delta u_{iK+1})_0 - (\delta \Delta u_{iK+1})_1}{(\delta \Delta u_{iK+1})_1} \right\| \leq \delta^{rel}_1 \text{ y } \left\| \frac{[f_{M \rightarrow m}^w]_0 - [f_{M \rightarrow m}^w]_1}{[f_{M \rightarrow m}^w]_1} \right\| \leq \delta^{rel}_2$$

Si se cumplen las tolerancias pasamos a la ETAPA 4. Si en la ETAPA 3 no se cumplen las tolerancias, se corrigen los valores supuestos en la ETAPA 1 adoptando como nuevos valores de hipótesis los obtenidos en la ETAPA 2, $(\delta \Delta u_{iK+1})_1$ y $[f_{M \rightarrow m}^w]_1$. Con los nuevo valores volvemos a resolver de acuerdo a lo planteado en la ETAPA 1.

ETAPA 4: Con los campos de desplazamientos y presiones de agua obtenidos para ambos niveles estructurales calculamos los incrementos de tensión media neta $\delta p'_{mij}$ y $\delta p'_{Mi}$ integrando los modelos constitutivos correspondientes.

Para la implementación del modelo constitutivo se siguió la formulación propuesta por Lloret & Ledesma (1993) y Ledesma *et al.* (1995). Para el cálculo de las tensiones e integración del modelo constitutivo se utilizó un algoritmo de tipo Newton-Rapson (Hofmann, 1993) y el algoritmo de retorno propuesto por Vaunat *et al.* (2000).