



Universitat Politècnica de Catalunya

Departamento de Ingeniería del Terreno, Cartográfica y Geofísica

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

Análisis comparativo del fenómeno de licuación en arenas. Aplicación a Tumaco (Colombia)

Por: Jesús R. García Núñez

Barcelona, Febrero del 2007

Tesis Doctoral

Dirigida por: Dr. Alberto Ledesma Villalba

Indice

Notación	xix
Dedicatoria	xxi
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Motivación y objetivos	1
1.2 Organización y Contenido	2
2 REVISIÓN DE MÉTODOS PARA EVALUAR LICUACIÓN	5
2.1 Introducción	5
2.2 Definición de Licuación	5
2.3 Revisión de Métodos para evaluar Licuación	6
2.3.1 Métodos Empíricos.	6
2.3.2 Métodos Numéricos	13
3 FORMULACIÓN ACOPLADA DEL PROBLEMA DINÁMICO	23
3.1 Antecedentes	23
3.2 Variables utilizadas en el modelo	23
3.3 Ecuaciones básicas	24
3.3.1 Ley de tensiones efectivas	24
3.3.2 Tensor de pequeñas deformaciones	24
3.3.3 Ecuación constitutiva	24
3.3.4 Ecuación de momento	25
3.3.5 Ecuación de continuidad del agua	25
3.3.6 Ley de Darcy	26
3.4 Resumen de las ecuaciones	26
3.5 Formulación u-p utilizando elementos de alto orden	27
3.5.1 Ecuación de Momento	27
3.5.2 Ecuación de continuidad	29
3.5.3 Discretización Temporal	31
3.5.4 Estrategia Utilizada para la solución de la ecuación no lineal	32
3.6 Formulación u-p utilizando elementos de igual orden de interpolación	34
3.6.1 Antecedentes	34
3.6.2 Técnicas de Estabilización que permiten la utilización de elementos de igual orden de interpolación	34

3.7	Programa Desarrollado	46
3.8	Conclusiones	47
4	MODELO CONCEPTUAL DE LA FORMULACIÓN u-p	49
4.1	Introducción	49
4.2	Propagación de ondas en arenas-resultados experimentales	49
4.3	Amortiguamiento en arenas - resultados experimentales	54
4.4	Soluciones Analíticas	76
4.4.1	Teoría de Biot	76
4.5	Modelo para la Matriz de Acoplamiento	79
4.5.1	Suelo Seco	79
4.5.2	Suelo Saturado	83
4.6	Conclusiones	89
5	DEFINICIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO	91
5.1	Antecedentes	91
5.2	Ecuaciones de Campo	95
5.3	Aproximación Paraxial	107
5.4	Discretización de Ecuación del Movimiento con Contornos Absorbentes	113
5.5	Discretización temporal	116
5.5.1	Efecto del tamaño de la malla	116
5.6	Ejemplo de Aplicación	120
6	MODELO CONSTITUTIVO PARA EL COMPORTAMIENTO CÍCLICO	125
6.1	Antecedentes	125
6.2	Teoría de Plasticidad Generalizada	127
6.3	El Modelo de Pastor-Zienkiewicz para arenas	130
6.4	Predicciones del modelo de Pastor-Zienkiewicz	136
6.4.1	Ensayo No drenado-Deformación controlada: ε_1	137
6.4.2	Ensayo Drenado - Deformación controlada: ε_1	137
6.5	Parámetros del modelo	138
6.6	Simulación de ensayos con el Modelo	139
6.7	Aspectos Computacionales	140
6.7.1	Transformación al sistema cartesiano	140
6.8	Conclusiones	145
7	INSTRUMENTACIÓN SÍSMICA INSTALADA EN TUMACO (COLOMBIA)	147
7.1	Antecedentes	147
7.2	Introducción	148
7.3	Aspectos Tectónicos	148
7.3.1	Subducción de la Placa de Nazca en la zona de Nariño	148
7.3.2	Sistemas de fallas intracontinentales en Nariño	149
7.4	Aspectos Sismológicos	149
7.4.1	Instrumentación Sismológica	149
7.4.2	Definición del sitio a instrumentar	153
7.5	Actividades de Campo	153

7.5.1	Levantamiento Topográfico	153
7.5.2	Instalación de los Equipos de Precisión.	153
7.6	Conclusiones	170
8	RECONOCIMIENTO GEOTÉCNICO Y ENSAYOS DE LABORATORIO	173
8.1	Antecedentes	173
8.2	Exploración del Subsuelo	173
8.2.1	Ensayo de penetración estándar (SPT)	174
8.2.2	Piezocono Sísmico (CPTU)	177
8.2.3	Dilatómetro de Marchetti (DMT)	202
8.2.4	Ensayo de Microtrepidaciones	208
8.2.5	Cuadro Resumen	210
8.3	Resultados pruebas "in situ"	212
8.3.1	Ensayo de Penetración estándar (SPT)	212
8.3.2	Ensayo CPTU	214
8.3.3	Ensayo DMT	214
8.3.4	Ensayo de Refracción Sísmica	217
8.3.5	Ensayo de Microtrepidaciones	217
8.4	Ensayos de Laboratorio	221
8.4.1	Antecedentes	221
8.4.2	Mineralogía de la Arena	222
8.4.3	Granulometría	225
8.4.4	Efecto de la forma de las Partículas	225
8.4.5	Compresibilidad	228
8.4.6	Ensayos Triaxiales	228
8.5	Perfil Geotécnico	243
8.6	Conclusiones	243
9	POTENCIAL DE LICUACIÓN EVALUADO POR MÉTODOS SEMIEMPÍRICOS	247
9.1	Antecedentes	247
9.2	Relación de Tensiones Cíclicas (CSR) y Relación de Resistencia Cíclica (CRR)	247
9.2.1	Relación de tensiones cíclicas CSR	248
9.2.2	Relación de resistencia cíclica CRR	248
9.3	Métodos semiempíricos para evaluar CRR	248
9.3.1	Ensayo de Penetración estándar - SPT	248
9.3.2	Ensayo de Penetración con Cono - CPT	250
9.3.3	Ensayo DMT	258
9.4	Aplicación de los Métodos a la Arena de Tumaco	260
9.4.1	Determinación del Potencial de Licuación mediante el SPT	260
9.4.2	Determinación del Potencial de Licuación mediante el CPTU	261
9.4.3	Determinación del Potencial de Licuación mediante el DMT	262
9.5	Análisis comparativo de las pruebas in situ (SPT - CPTU - DMT)	262
9.6	Conclusiones	266

10 ANÁLISIS DE LICUACIÓN UTILIZANDO TÉCNICAS NUMÉRICAS	271
10.1 Introducción	271
10.2 Capa de arena sujeta a un sismo horizontal	271
10.3 Aplicación a Tumaco - sismo de 1979	273
10.3.1 Antecedentes	273
10.3.2 Amenaza Sísmica	276
10.3.3 Análisis Desacoplado en Tensiones Totales	282
10.3.4 Análisis Semi-acoplado	283
10.3.5 Análisis Acoplado	292
10.4 Aplicación a Tumaco - sismo de 1997	295
10.4.1 Antecedentes	295
10.4.2 Análisis en Tensiones Totales - Análisis Desacoplado	298
10.4.3 Análisis Semi-acoplado	305
10.4.4 Análisis Acoplado en Tensiones efectivas	307
10.5 Aplicación a Tumaco - Sismo de 1997 escalado a $0.2g$	310
10.6 Aplicación a Tumaco - Sismo de 1997 escalado a $0.25g$	313
10.7 Comparación entre Métodos Semi-empíricos con Métodos Numéricos	316
10.8 Conclusiones	319
11 CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN	321

Lista de Tablas

4.1	Comparación entre la notación de Biot y de Ishihara	79
6.1	Parámetros del Modelo Pastor-Zienkiewicz	140
7.1	Eventos sísmicos del área de Tumaco [Nacional, 1999]	151
7.2	Características de los piezómetros	159
7.3	Distribución de los canales	171
8.1	Resumen de las relaciones entre resistencia del cono y el parámetro de estado para arenas normalmente consolidadas (Been et al, 1987)	188
8.2	Resumen de los valores del ensayo de cámara sobre la arena de Ticino normalmente consolidada agrupados de acuerdo al plano de la tensiones principales (Sladen, 1989)	191
8.3	Resumen de parámetros de estado estable último y los parámetros de las velocidades de onda de corte para diferentes arenas (Cunnig et al 1995) donde M es la pendiente de la línea del estado crítico y n la porosidad	191
8.4	Relaciones semiempíricas de E_m (Lunne and Chistophersen, 1983)	199
8.5	Relaciones entre la densidad relativa y el Modulo base (Baldi, et al, 1981)	199
8.6	Determinación de R_m (Marchetti, 1980)	208
8.7	Correlaciones utilizadas para SPTy CPTU	211
8.8	Correlaciones utilizadas para DMT	212
8.9	Distribución porcentual de los minerales	225
8.10	Comparación entre los parámetros obtenidos a partir de las correlaciones de Cho y los valores experimentales (laboratorio/campo)	243
9.1	Valores de los coeficientes en función del contenido de finos (FC)	249
9.2	Valores de los factores de corrección	250
9.3	Comparación de varios métodos de campo para la evaluación de la resistencia a la licuación a partir del CPT	269
10.1	Parámetros del suelo	273
10.2	Parámetros para la simulación del sismo de Tumaco del 12/12/1979	279
10.3	Parámetros utilizados en el analisis desacoplado en tensiones totales	282

Lista de Figuras

2.1	Representación esquemática del fenómeno de licuación. a) Estado inicial de tensiones. b) Fuerzas de contacto entre las partículas. c) Disminución de las fuerzas de contacto entre partículas, al incrementarse la presión de poros.	6
2.2	Factor de Corrección C_q en función de la tensión efectiva vertical [Seed et al., 1983] . . .	8
2.3	Susceptibilidad de licuación a partir de la resistencia de punta del cono eléctrico q_c [Seed et al., 1983]	9
2.4	deformación de corte usando ensayos de cono eléctrico o de penetración estándar así como la tensión cortante cíclica normalizada. Sísmo de magnitud 7.5. $\gamma_o =$ deformación de corte, $(N_1)_{60} =$ Número de golpes corregido [Seed et al., 1984a]	10
2.5	Correlación entre la velocidad de corte normalizada V_{s1} y la tensión cortante cíclica para sismos de magnitud $M_s = 7.5$ [Robertson et al., 1992]	10
2.6	Correlación entre la velocidad de ondas de corte y la aceleración máxima del terreno, antes de la licuación [Holzer et al., 1988]	11
2.7	Estimación del potencial de licuación con base en pruebas de cono eléctrico y la tensión efectiva de campo para temblores de magnitud $M_s = 7.5$ [Robertson et al., 1992]	11
2.8	Ensayo de corte monotónico torsional sobre un espécimen con una tensión de corte estático inicial [Alarcon-Guzman et al., 1988]	12
2.9	Aproximación de las curvas tensión de corte-deformación de corte en el modelo lineal equivalente	14
2.10	Variación del módulo de corte y el amortiguamiento con la deformación de corte	14
2.11	Depósito de suelo estratificado para análisis mediante el método unidimensional. G es el módulo de corte máximo, ξ es la relación de amortiguamiento y ρ es la densidad [Bardet et al., 2000]	15
2.12	Perfil estratigráfico de la perforación BH-2, en el Distrito Marina en San Francisco (profundidades en pies) [Arulanandan et al., 1997]	20
2.13	Variación de la aceleración máxima en superficie en función de la máxima aceleración en la base. Predicción en tensiones totales (SHAKE) y predicción en tensiones efectivas (DYSAC). [Arulanandan et al., 1997]	21
2.14	Comparación entre los espectros de respuesta obtenidos en tensiones totales (SHAKE), y en tensiones efectivas (DYSAC2), para el Distrito Marina (San Fransisco) [Arulanandan et al., 1997]	21
3.1	Elementos utilizados en formulación u-p, para diferente grado de interpolación.	31
3.2	Elemento cuadrilatero con igual orden de interpolación para los desplazamientos y las presiones [Pastor et al., 1997]	35

3.3	a) Condiciones de frontera para una columna de suelo saturada con carga superficial periódica ($q = t_y = 100e^{-i\omega t}$) b) Amplitud de la presión de poros para el problema de la columna de suelo usando 20 elementos Q4P4 con $k = 10^{-7}m/s$ y (1) $Q^* = 10^4MPa$ (2) $Q^* = 10^9MPa$ c) Amplitud de la presión de poros para el problema de la columna de suelo usando 20 elementos Q8P4 con $k = 10^{-7}m/s$ y (3) $Q^* = 10^4MPa$ (4) $Q^* = 10^9MPa$ [Pastor et al., 1997]	36
3.4	Elemento cuadrático para los desplazamientos y lineal para la presión [Pastor et al., 1997]	37
3.5	Prueba para una malla de seis elementos T6P3 [Pastor et al., 1997]	37
4.1	Comparación entre los resultados experimentales y teóricos sobre propagación de Ondas de Compresión en la arena de Ottawa, para los casos seco y saturado [Hardin & Richart., 1963]	50
4.2	Variación de la velocidad de la Onda de Corte con la presión de confinamiento para la arena de Ottawa, para los casos seco y saturado [Hardin & Richart., 1963]	51
4.3	Variación de la velocidad de las Ondas de Corte con la relación de vacíos para varias presiones de confinamiento, tamaño de granos y gradación de la arena de Ottawa seca [Hardin & Richart., 1963]	52
4.4	Relación entre la velocidad de la onda en el fluido - grado de saturación - relación de vacíos para la arena de Ottawa en la cámara de pulso [Valores teóricos y experimentales], [Foster et al., 1980]	53
4.5	Velocidad de la onda rápida en la arena de Ottawa versus la presión de confinamiento para varios grados de saturación [p=100 kPa],[Bardet & Sayed, 1993]	55
4.6	Atenuación de la onda rápida de 1 Hz en la arena de Ottawa versus la presión efectiva de confinamiento para varios grados de saturación [Bardet & Sayed, 1993]	55
4.7	Valores sugeridos de $\frac{\mu\omega}{G}$ para arenas secas [Hardin, 1965]	56
4.8	Definición del Módulo de Corte	57
4.9	Definición del amortiguamiento	58
4.10	Módulo de Corte normalizado y relación de amortiguamiento para todos los suelos versus deformación hiperbólica. La deformación hiperbólica es una medida de la deformación de corte que se define en el ecuación 4.8 [Hardin & Drnevich, 1972b]	59
4.11	Relación entre el amortiguamiento versus la amplitud de la deformación de corte para arenas secas [Hardin & Drnevich, 1972a]	59
4.12	Relación geométrica entre el módulo de corte y la relación de amortiguamiento [Hardin & Drnevich, 1972b]	60
4.13	Relación entre el módulo y el amortiguamiento en función de la deformación de corte normalizada [Hardin & Drnevich, 1972b]	60
4.14	Definición del módulo de corte y amortiguamiento [Ishihara, 1996]	61
4.15	Definición de la tensión de corte máxima	62
4.16	Influencia de la saturación en la relación de amortiguamiento	63
4.17	Comparación entre las diferentes correlaciones propuestas para el amortiguamiento [R^2 : coeficiente de correlación], [Edil & Luh, 1978]	64
4.18	Amortiguamiento estático y dinámico para la arena seca. [Bolton & Wilson, 1990]	65
4.19	Amortiguamiento en suelo seco y saturado con agua y aceite. D: seco, W: agua, O: aceite [Bolton & Wilson, 1990]	66
4.20	Relación entre el amortiguamiento y $\frac{G}{G_{máx}}$ para arenas [Ishibashi & Zhang, 1993]	67

4.21	Influencia de la mezcla del cementante sobre el módulo de corte y el amortiguamiento (AC = acrylate en porcentaje variable). [Maher et al., 1994]	67
4.22	Influencia de la mezcla del cementante sobre el módulo de corte y el amortiguamiento [Maher et al., 1994]	68
4.23	Forma del pulso longitudinal en el esqueleto sólido en $x = 1.0$ cm, para diferentes valores de frecuencia en el caso de acoplamiento viscoso ($K_D =$ coeficiente de permeabilidad) [Gajo, 1995]	69
4.24	Forma del pulso longitudinal en $x = 1$ cm en el fluido, para diferentes valores de frecuencia, en el caso de acoplamiento viscoso ($K_D =$ coeficiente de permeabilidad) [Gajo, 1995]	69
4.25	Relación D versus γ obtenidas para suelos granulares por ocho investigadores. [Vucetic et al., 1998a]	70
4.26	Variación del amortiguamiento con la deformación de corte en Gravas. [Rollins et al., 1998]	71
4.27	Forma de la deformación cíclica en el tiempo [Vucetic et al., 1998b]	72
4.28	Efecto de la forma de la deformación cíclica sobre λ para: a) Arena limpia de Santa Mónica; b) Arena limosa del valle Antelope [Vucetic et al., 1998b].	72
4.29	Relaciones de amortiguamiento medidas versus deformación de corte, para una arena silíceo gruesa, en condición seca, con agua y con dos tipos de aceite como fluido (30 cs y 100 cs) [Ellis et al., 2000]	73
4.30	Relación de amortiguamiento medida versus deformación de corte para la arena de Toyoura, en condición seca, con agua y con dos tipos de aceite como fluido (30 cs y 100 cs) [Ellis et al., 2000]	74
4.31	Relación de amortiguamiento medida versus deformación de corte sobre arena silíceo fina, en condición seca, con agua y con dos tipos de aceite como fluido (30 cs y 100 cs) [Ellis et al., 2000]	74
4.32	Cambio en la relación de amortiguamiento entre muestras de agua y muestras de aceite de 100 cS [Ellis et al., 2000]	75
4.33	Variación de la deformación de corte con F_v [Bransby & Soga, 1996]	75
4.34	Variación de F_v con el tamaño inverso de la partícula [Bransby & Soga, 1996]	76
4.35	Variación de F_v con la amplitud de la deformación de corte y el tipo de arena. Datos experimentales comparados con la expresión 4.23. [Ellis et al., 2000]	77
4.36	Modelo Conceptual - Formulación u-p, caso seco	79
4.37	Modelo Conceptual - Formulación u-p, caso saturado	83
4.38	Viscosidad de algunos fluidos típicos	87
4.39	Efecto del fluido sobre el amortiguamiento del suelo	88
5.1	Tamaño de la malla para minimizar el efecto de las condiciones de borde ($H =$ altura del talud, $D =$ profundidad de análisis). [Kulhawy, 1977]	92
5.2	Efecto de la ubicación de las condiciones de contorno, en función del ancho de la presa. 1) 0.4B, 2) 0.8B, 3) 1.0B, 4) 1.5B [Chang, 1979]	93
5.3	Historia temporal de los desplazamientos en la cresta de la presa. [Chang, 1979]	94
5.4	Relaciones de dispersión para el caso escalar. Las curvas A_1 , A_2 y A_3 son las relaciones de dispersión para la aproximación paraxial de la ecuación de onda escalar [Clayton & Enquist, 1977]	108

5.5	Influencia de la frecuencia en V_1 , V_2 , V_3 a) Arena gruesa de Monterrey b) Arena media de Monterrey c) Arena silíceas fina. V_1 (<i>Onda P</i>), V_2 (<i>Onda Biot</i>), V_3 (<i>Onda S</i>) [Nakagawa et al., 1997]	110
5.6	Condición de contorno absorbente	111
5.7	Sistema local de coordenadas para el elemento absorbente	114
5.8	Efecto del tamaño del elemento - varilla homogénea [Kuhlemeyer & Lysmer, 1973]	117
5.9	a) Dispersión de las ondas debido a la dependencia de la velocidad de onda V sobre la longitud de onda λ (V_o velocidad de la onda en el continuo). b) Paso de tiempo límite para estabilidad numérica [Bazant & Celep, 1982]	119
5.10	Condiciones contorno utilizadas en los análisis	121
5.11	Historia temporal de desplazamientos y presiones para el caso transitorio a profundidades de 5, 45 y 95 metros.	122
5.12	Variación de la presión de poros con el tiempo, para el caso de una columna de suelo [Akiyoshi et al., 1994]	123
5.13	Variación de los desplazamientos con el tiempo, para el caso de una columna de suelo [Akiyoshi et al., 1994]	123
6.1	Superficie de fluencia y potencial plástico implícitos en el modelo PZC [Pastor et al., 1990]	133
6.2	Descarga de una arena en condiciones no-drenadas desde distintas relaciones de tensión [Ishihara & Okoda, 1982]	135
6.3	Comparación entre los resultados experimentales y la predicción del modelo $\left(\frac{\sigma'_d}{2\sigma_c} = 0.3\right)$	141
6.4	Comparación entre los resultados experimentales y la predicción del modelo $\left(\frac{\sigma'_d}{2\sigma_c} = 0.2\right)$	142
6.5	Comparación entre los resultados experimentales y la predicción del modelo $\left(\frac{\sigma'_d}{2\sigma_c} = 0.15\right)$	143
7.1	Localización Tumaco	148
7.2	Tectónica de Placas en Colombia [Muñoz & Bermúdez, 2001]	150
7.3	Flujo de transmisión de datos de la RSNC	151
7.4	Eventos históricos registrados en la Costa Sur Pacífica de Colombia, con magnitudes M_s mayores a 6.7 [Nacional, 1999]	152
7.5	Ubicación de las perforaciones ejecutadas en Tumaco	154
7.6	Perfil Topográfico Faro Tumaco - Batallón de Ingeniería	155
7.7	Aceleraciones en superficie y registro de presión de poros, durante el sismo del 25 de septiembre de 1980 [Ishihara et al., 1981]	157
7.8	Sección transversal de la instrumentación en Wildlife [Youd & Holzer, 1994]	158
7.9	Esquema del dispositivo utilizado por Hushmand et al, para verificar la eficiencia de los piezómetros del Wildlife [Hushmand et al., 1992]	159
7.10	Comparación de los registros de presión de poros obtenidos por los piezómetros BAT (desarrollado por [Hushmand et al., 1992]) y el P2 (desarrollado por el Servicio Geológico de los Estados Unidos).	160
7.11	Perfil estratigráfico e instrumentación en Kobe (Elgamal & Parra, 1996)	161
7.12	Registro de los componentes N-S y E-W a diferentes profundidades (Elgamal & Parra, 1996)	161
7.13	Construcción de los drenes de grava	162
7.14	Construcción de la cimentación de la caseta	162

7.15	Corte configuración de la caseta	163
7.16	Fachada principal de la caseta para estación de acelerógrafo	164
7.17	Sellamiento del fondo de la excavación	164
7.18	Instalación sensores	165
7.19	Características del acelerógrafo instalado a 25m de profundidad	165
7.20	Esquema pozo de observación	166
7.21	Ubicación de la instrumentación instalada en Tumaco. SM1 acelerógrafo en superficie, SM2 acelerógrafo en roca, S sondeo con piezómetro, CPTU como sísmico, DMT Dilatómetro de Marchetti, MT Microtrepidaciones	166
7.22	Perfil de la Instrumentación (esquemático)	167
7.23	Saturación de piezómetros con agua de-aireada	168
7.24	Piezómetro integral con arena y bentonita	169
7.25	Protección piezómetro con material granular	169
7.26	Instalación final de la caseta de instrumentación	170
8.1	Esquema ilustrando el ensayo de penetración estandar (SPT) [Kovacs & Salomone, 1982]	174
8.2	Densidad relativa calculada vs medida en depósito de suelo arenoso [Cubrinovski & Ishihara, 1999].	176
8.3	Relación entre el rango de la relación de vacíos y el diametro medio del grano [Cubrinovski & Ishihara, 1999]	176
8.4	Correlación entre el ángulo de fricción interno para muestras inalteradas congeladas (FS) y $(N_1)^{0.5}$ [Hatanaka & Uchida, 1996]	178
8.5	Pruebas con el piezocono sísmico, PAGANI.	179
8.6	Registros de la información en un ordenador portátil, operando el piezocono.	180
8.7	Ejemplo de diseño de un piezocono y la influencia de la presión de poros sobre los valores medidos de resistencia por punta y fricción en el manguito [Larsson & Mulabbic, 1991]	181
8.8	Carta de clasificación del tipo de comportamiento del suelo basada en datos normalizados de CPT/CPTU (Robertson, 1990)	182
8.9	Carta extendida de clasificación del tipo de suelos para datos de CPTU (Jefferies and Davies, 1991)	183
8.10	Influencia de la compresibilidad sobre arenas cuarzosas no cementadas NC [Jamiolkowski et al., 1988]	185
8.11	Efecto de la compresibilidad de las arenas sobre q_c, σ'_{v0}, D_r [Robertson & Campanella, 1983]	186
8.12	Definición de parámetro de estado Ψ . [Been & Jefferies, 1985]	187
8.13	Resumen de las relaciones entre resistencia del cono y Ψ para arenas normalmente consolidadas. [Been & Jefferies, 1985].	188
8.14	Correlación entre la resistencia del cono normalizada k a $\psi = 0$ y λ_{ss} [Been et al., 1987]	189
8.15	Correlación entre el gradiente m de la relación resistencia del cono normalizada - ψ y λ_{ss} [Been et al., 1987]	190
8.16	Relaciones de regresión lineal entre los logaritmos de $(q_c - p) / p'$ y Ψ para varios planos de tensión principal. [Sladen, 1989]	192
8.17	k contra la tensión media para la arena de Ticino [Sladen, 1989]	193
8.18	Comparación del promedio de la relación $V_{s1} - e$ durante la consolidación isotrópica para la arena de Syncrude [Cunnig et al., 1995]	193

8.19	Resumen de todos los resultados de los ensayos (Arenas Ottawa, Alaska, Syncrude) en términos de la velocidad de onda de corte normalizada versus relación de vacíos. [Cunnig et al., 1995]	194
8.20	q_c versus σ'_h para la arena de Leighton Buzzard [Houlsby & Hitchman, 1988]	194
8.21	Relación entre el número de capacidad portante y el ángulo de fricción para cámaras de calibración [Robertson & Campanella, 1983].	195
8.22	Correlación propuesta entre la resistencia del cono y el pico del ángulo de fricción de arenas cuarzosas no cementadas [Robertson & Campanella, 1983].	196
8.23	Ángulo de fricción drenado en función del parámetro de estado [Been & Jefferies, 1985].	197
8.24	Conceptos mecánicos del estado crítico del suelo: (a) Diagrama $e - p' - q$ (b) Proyecciones sobre el plano $e - \ln p'$. [Fear & Robertson, 1995]	198
8.25	Relación entre la resistencia del cono y el módulo confinado para arenas normalmente consolidadas [Baldi et al., 1981]	200
8.26	Módulo adimensional de arenas en función de la resistencia del cono y la relación de sobreconsolidación [Eslaamizaad & Robertson, 1996].	201
8.27	Obtención de G_{max} a partir de q_c [Rix & Stokoe, 1992]	201
8.28	Paleta y central de lectura del DMT.	202
8.29	Dispositivo utilizado para la hinca del DMT.	203
8.30	Ábaco para determinar el tipo de suelo y el peso específico relativo [Marchetti & Cropps, 1981].	205
8.31	Ábaco q_c, k_0, ϕ de acuerdo a Durgunoglu & Mitchel (compilado por [Marchetti, 1975]) .	207
8.32	Relación entre el módulo de corte G_{max} obtenido a partir del cono sísmico y E_D del DMT contra K_D para suelos arenosos [Tanaka & Tanaka, 1998].	209
8.33	Registrador Digital ORION 3S	210
8.34	Ubicación de perforaciones, microtremores (MT), CPTU, DMT y líneas de refracción sísmica	213
8.35	Medición de Vibración Ambiental.	214
8.36	Resultados del Ensayo de Penetración Estandar	215
8.37	Registro ensayo CPTU, variación de propiedades en profundidad	216
8.38	Resultados del ensayo DMT	218
8.39	Perfiles de líneas de refracción Sísmica LS1 y LS2	219
8.40	Cocientes espectrales H/V en el punto MT-1.	220
8.41	Influencia del método de preparación sobre la tensión cíclica $\left(\frac{\sigma_d}{2\sigma_c}\right)$ [Mulilis et al., 1977] .	222
8.42	Efecto del método de preparación sobre el módulo de corte y sobre el amortiguamiento [Katyama et al., 1986]	223
8.43	Equipo Triaxial Cíclico GDS 2 Hz	224
8.44	Muestreador Partido de Arena	224
8.45	Distribución de la arena por el tamaño del mineral; nótese el predominio de granos angulares.	226
8.46	Epidota.	227
8.47	Horblenda	227
8.48	Distribución por el tamaño del mineral.	228
8.49	Granulometría de la arena de Tumaco	229

8.50	Carta de esfericidad (S) y redondez (R). Las líneas diagonales corresponden a partículas de regularidad constante. $\rho = \frac{(R+S)}{2}$. [Krumbein & Sloss, 1963]	229
8.51	Consolidación unidimensional con el edómetro	230
8.52	Consolidación isotrópica de la arena de Tumaco	230
8.53	(a) Trayectoria de deformaciones durante consolidación anisotrópica (b) Variación de $(dv/d\epsilon)_\eta$ con η ($\eta = \frac{q}{p}$) [Balasubramaniam & Chaudhry, 1978]	232
8.54	Ensayos triaxiales consolidados denados - trayectoria K_0 (a) Trayectorias de tensiones durante consolidación anisotrópica. (b) Trayectorias de deformación durante consolidación anisotrópica.	232
8.55	Curva de dilatación - variación de $(dv/d\epsilon)_\eta$ con η	233
8.56	Ensayos triaxiales consolidados drenados. a) Trayectoria de tensiones, b) Curva tensión desviadora - deformación axial. c) Cambio volumétrico - deformación axial.	234
8.57	Ensayos consolidados no drenados midiendo presión de poros (CU)	236
8.58	Línea de estado crítico - arena de Tumaco	237
8.59	Angulo de fricción drenado en función del parámetro de estado (Ψ), para varias arenas incluyendo la de Tumaco, para los ensayos cíclicos y para los ensayos de carga monótona ([Been & Jefferies, 1985])	238
8.60	Triaxial cíclico - $\frac{\sigma_d}{2\sigma_c} = 0.3$. Con $\sigma_d = \sigma_v - \sigma_h$	239
8.61	Triaxial cíclico - $\frac{\sigma_d}{2\sigma_c} = 0.2$. Con $\sigma_d = \sigma_v - \sigma_h$	240
8.62	Triaxial cíclico - $\frac{\sigma_d}{2\sigma_c} = 0.1$. Con $\sigma_d = \sigma_v - \sigma_h$	241
8.63	Esfuerzo desviador vs Número de ciclos	242
8.64	Parámetros obtenidos a partir de las diferentes pruebas de campo y ensayos de laboratorio	245
9.1	Curva base recomendada por el Workshop de 1997, para evaluar licuación en arenas limpias a partir del SPT [Youd et al., 2001]	249
9.2	Curva recomendada por el NCEER (1996), para el calculo del CRR a partir del CPT [Robertson & Wride, 1998].	251
9.3	Factor de corrección K_c , utilizado para la determinación de la resistencia CPT equivalente a una arena limpia [Robertson & Wride, 1998]	253
9.4	Diagrama de flujo ilustrando la aplicación integrada del CPT en la evaluación de la relación de resistencia cíclica (CRR) [Robertson & Wride, 1998]	254
9.5	Mediciones de campo de licuación cíclica con la curva de resistencia CPT para arenas limpias [Robertson & Fear, 1995]	255
9.6	Curvas determinísticas y probabilística para la obtención del CSR [Juang et al., 2003] .	258
9.7	Comparación de las curvas límites mediante dos técnicas [Juang et al., 2003]	259
9.8	Diferentes curvas utilizadas para la estimación del CRR a partir del DMT [Marchetti et al., 2001]	260
9.9	Comparación entre la densidad relativa medida y la predicción hecha por el DMT [Tanaka & Tanaka, 1998]	261
9.10	Determinación de licuación mediante el DMT [Monaco et al., 2005]	262
9.11	Evaluación de Licuación mediante el SPT	263
9.12	Evaluación del potencial de licuación mediante el CPTU	264
9.13	Evaluación de licuación mediante el DMT	265
9.14	Análisis Comparativo de Evaluación de Licuación mediante SPT, CPTU y DMT	268

10.1	Capa de arena sometida a un sismo horizontal a) Geometría de la capa de Arena b) Malla de elementos finitos c) Acelerograma: Componente N-S del terremoto del Centro de Mayo de 1940. (NEIC)	272
10.2	Capa de arena sometida a un sismo horizontal: a) malla de elementos finitos b) condiciones de contorno	274
10.3	Variación de la presión de poros con el tiempo. Terremoto del Centro	275
10.4	Sectores que se vieron afectados por el sismo de 1979, haciendo énfasis en las áreas donde se presentó licuación.	277
10.5	Sector donde hubo manifestación de licuación, calle del comercio - Tumaco (Diario de Occidente, jueves 13 de Diciembre de 1979)	278
10.6	Falla de terraplén de acceso a la isla de Tumaco (Diario de Occidente, jueves 13 de Diciembre de 1979)	278
10.7	Área de estudio, se incluye la distribución de los desplazamientos en metros sobre el plano de falla. La estrella indica el punto donde se inicia la ruptura. El mecanismo focal corresponde al del evento de 12/12/1979, el cual fue tomado de la base de datos CMT de Harvard. Los triángulos indican la ubicación de poblaciones importantes en la región. [Ojeda, 2002]	280
10.8	Resultados obtenidos con el modelo 1. Las isocurvas son para valores de aceleración máxima del terreno en cm/seg ² , tomados de los acelerogramas simulados [Ojeda, 2002]	281
10.9	Acelerograma Sintético [Ojeda, 2002]	281
10.10	Variación del Módulo de Corte máximo en profundidad, a partir del SPT, CPTU y DMT	284
10.11	Variación del Módulo de Corte normalizado y el Amortiguamiento con la Deformación de Corte - Arena de Tumaco	285
10.12	Variación del Módulo de Corte y el Amortiguamiento con la Deformación de Corte - Limo Orgánico	285
10.13	Análisis comparativo entre el EERA y el PRO SHAKE, sismo de 1979	286
10.14	Malla de elementos finitos y distribución de las diferentes capas	286
10.15	Comparación entre los espectros de respuesta obtenidos mediante el QUAD4M y el PROSHAKE	287
10.16	Modelo tridimensional del suelo utilizando FLAC3D	289
10.17	Condiciones de contorno: elementos absorbentes sobre las caras y restricción de desplazamientos en la base	289
10.18	Parámetros utilizados en el modelo de Byrne, para los diferentes estratos	290
10.19	Comparación entre los registros de aceleración en superficie, obtenidos mediante el QUAD4M y el FLAC3D. Sismo de 1979	290
10.20	Comparación entre las aceleraciones espectrales obtenidas mediante PROSHAKE, QUAD4M y FLAC3D	291
10.21	Variación de la presión de poros con el tiempo, programa FLAC3D	291
10.22	Malla de elementos finitos utilizando el elemento triángulo	292
10.23	Descretización de los diferentes estratos	293
10.24	Comparación de los espectros de respuesta obtenidos a partir de formulaciones desacopladas, semi-acopladas y acopladas.	293
10.25	Aceleraciones en superficie calculadas	294
10.26	Resultados de ensayo con centrifuga [Gonzalez et al., 2002]	296

10.27	Variación de la presión de poros con el tiempo (estratos de limo orgánico y arena). Profundidad de 0.0 m a 8.0 m.	297
10.28	Variación de la presión de poros con el tiempo (estratos de limo orgánico y arena). Profundidad de 8 m a 14 m.	297
10.29	Variación de la presión de poros con el tiempo (estratos de limo orgánico y arena). Profundidad de 15 m a 19.5 m.	298
10.30	Ubicación Sismo de 1997	299
10.31	Registro de aceleración del sismo de 1997	300
10.32	Registros corregidos por línea base	301
10.33	Registro de presión de poros. Sismo de 1997	302
10.34	Determinación de la posición del nivel freático a partir de los registros piezométricos . .	303
10.35	Comparación entre la predicción del modelo desacoplado PROSHAKE y el registro en superficie. Sismo de 1997, componente N-S	304
10.36	Comparación entre la predicción del modelo desacoplado PROSHAKE y el registro en superficie. Sismo de 1997, componente E-W	304
10.37	Comparación entre los espectros obtenidos con el PROSHAKE y los medidos en superficie	305
10.38	Comparación entre la predicción del modelo desacoplado QUAD4M y el registro en su- perficie. Sismo de 1997, componente N-S	306
10.39	Comparación entre la predicción del modelo desacoplado QUAD4M y el registro en su- perficie. Sismo de 1997, componente E-W	306
10.40	Comparación en la predicción de espectros de respuesta entre métodos desacoplados (PROSHAKE y QUAD4M), contra el espectro del registro en superficie. Sismo de 1997	307
10.41	Comparación entre los registros de aceleraciones medidos y los calculados mediante el PROSHAKE, QUAD4M y FLAC3D	308
10.42	Comparación entre espectros de respuesta sismo de 1997	308
10.43	Comparación entre la presión de poros registrada durante el sismo de 1997 y la calculada con FLAC3D	309
10.44	Espectros de respuesta para el sismo de 1997 escalado a 0.2g	311
10.45	Comparación entre los espectros de respuesta obtenidos mediante el PROSHAKE, QUAD4M, FLAC3D y SOLDYNA. Acelerograma de 1997 escalado a 0.2g	311
10.46	Incremento en presión de poros calculado mediante el FLAC3D. Sismo de 1997 escalado a 0.2g.	312
10.47	Variación de la presión de poros con el tiempo (estratos de limo orgánico y arena). Profundidad de 0.0 m a 8.0 m.	312
10.48	Variación de la presión de poros con el tiempo (estratos de limo orgánico y arena). Profundidad de 8.0 m a 14.0 m.	313
10.49	Variación de la presión de poros con el tiempo (estratos de limo orgánico y arena). Profundidad de 15 m a 19.5 m.	314
10.50	Comparación entre los espectros de respuesta obtenidos mediante el PROSHAKE, QUAD4M, FLAC3D y SOLDYNA. Acelerograma de 1997 escalado a 0.25g	315
10.51	Incremento en presión de poros obtenidos con el FLAC3D. Sismo de 1997 escalado a 0.2g	315
10.52	Variación de la presión de poros con el tiempo (estratos de limo orgánico y arena). Profundidad de 0.0 m a 8.0 m.	316
10.53	Variación de la presión de poros con el tiempo (estratos de limo orgánico y arena). Profundidad de 8.0 m a 14.0 m	317

10.54	Variación de la presión de poros con el tiempo (estratos de limo orgánico y arena).	
	Profundidad de 15 m a 19.5 m.	317
10.55	Resumen de los Análisis	319

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que me brindaron su colaboración y amistad durante todos estos años. Sin ellas no hubiera sido posible la realización de este trabajo. Quiero agradecer muy especialmente al director de esta tesis, Dr. Alberto Ledesma, no sólo por su gran ayuda en el campo académico, sino porque me brindó su amistad y comprensión durante mi estadía en Barcelona. Igualmente agradezco a los Doctores Orlando Soto, Andrew Chan y Manuel Pastor, por su asesoría y recomendaciones en el campo numérico.

También quiero agradecer el soporte económico brindado por Colciencias y así como también a las directivas de Ingeominas, que por cuestiones del destino no forman parte del instituto: Dr Adolfo Alarcón (ex Director General), Ing. Edgar Rodriguez, Dr Carlos Forero (q.e.p.d.), Dr Fernando Muñoz, Ing Diana Rubiano, Ing Fernando Ramirez, así como a los ingenieros Mauricio Palacios y Fernando Diaz en la edición de la presente tesis y Manuel Caviades en los ensayos de laboratorio.

Finalmente, quiero manifestar un gran sentimiento de gratitud a los compañeros y amigos que tuve la oportunidad de conocer durante mi estadía en Barcelona: Leonardo Guimaraes, Luciano Oldecop, Marcelo Sánchez, Guillermo Avila, Jean Vaunat, Enrique Romero, Iván Berdugo y a todos los restantes compañeros que por cuestiones del paso del tiempo no los tengo muy presentes.

Notación

En general las matrices y vectores se denotan por caracteres en negrita y las variables escalares en itálica. Se utiliza la notación cartesiana cuando se refiere a un sistema de coordenadas, siendo (x_1, x_2, x_3) o (x, y, z) las coordenadas Cartesianas para el caso tridimensional.

x_k : k _ésima componente del vector \mathbf{x}

a_{kl} : componente kl del tensor \mathbf{a}

$a_k b_k$: $\sum_{k=1}^n a_k b_k$ Indices repetidos suman a menos que se indique lo contrario

$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$: Producto tensorial de dos vectores $((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{kl} = a_k b_l)$

$\mathbf{A} : \mathbf{B}$: Producto escalar de tensores $(\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{kl} B_{kl})$

$\|u\|$: Norma del vector \mathbf{u} ($\|u\| = \sqrt{u_k u_k}$)

t : tiempo

$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$

$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$

∇a : Gradiente de a ; ésto es $(\nabla a)_{kl} = \partial_k a_l$

$\nabla^2 a$: Laplaciano de a ; ésto es $(\nabla^2 a)_l = \partial_k \partial_k a_l$

$\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_k u_k$: Divergencia del vector \mathbf{u}

$\nabla x u$: Rotacional del vector u

δ_{ij} : delta de Kronecker

s_{ij} : tensión desviadora

σ_{ij} : tensor de tensiones totales

ϵ_{ij} : tensor de pequeñas deformaciones

σ'_{ij} : tensor de tensiones efectivas

D_{ijkl} : tensor de cuarto orden que representa la ecuación constitutiva del material

\ddot{u}_i : aceleración de las partículas sólidas

\ddot{w}_i : aceleración del fluido.

Dedicatoria

A Ricardo, Sergio, Santiago y Lucy, hermanas y padres por su incondicional apoyo durante estos años.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación y objetivos

El fenómeno de licuación es uno de los asuntos más importantes, interesantes y complejos que se presentan en la ingeniería geotécnica. El fenómeno se manifiesta cuando un depósito de arena saturada se ve sometido a las ondas de corte que se propagan durante un sismo, de manera que la estructura de la arena tiende a densificarse. Sin embargo, como la duración de la aplicación de las tensiones de corte cíclico es, en general, muy pequeña en comparación con el tiempo necesario para que ocurra algún drenaje, la tendencia de la arena a disminuir de volumen durante cada ciclo se refleja en un incremento progresivo de la presión de poros [Ishihara, 1993],[Seed & Lee, 1966]. Esto produce una reducción continua de la tensión efectiva y consecuentemente una disminución en la resistencia al corte de la arena. Si en el curso de la carga cíclica la presión de poros aumenta hasta un valor igual a la tensión de confinamiento inicial, la tensión efectiva o intergranular existente en el esqueleto de la arena se reduce a cero y en consecuencia la arena pierde completamente la resistencia al corte, al menos en principio. En otras palabras, la arena se licua, esto es, se comporta como un líquido viscoso, generándose grandes deformaciones que pueden dar origen a múltiples mecanismos de falla, algunas de ellas catastróficas como el rompimiento de presas [Seed et al., 1975], destrucción de puentes [Ross et al., 1969], y falla de taludes [Keefer, 1984].

Colombia es un país con todos los niveles de amenaza sísmica y posee extensas zonas cuya geología muestra depósitos de arenas saturadas susceptibles a licuación sobre los cuales es necesario desarrollar asentamientos humanos, estructuras industriales o centros estatales. Entre otros, el municipio de Tumaco, Nariño ha presentado en el pasado sismos muy importantes en magnitud que han generado licuación local y extensiva, de modo que pensar hacia el futuro cercano en fundaciones para estructuras o en diseños geotécnicos en sitios con tales características debe involucrar un análisis racional y lo más detallado posible de la amenaza por licuación del suelo.

La presente tesis tiene por objeto estudiar el fenómeno de licuación en Tumaco, pero abarcado el problema de manera integral, es decir, se instrumentó el suelo para tener mediciones de aceleraciones tanto en suelo como roca y adicionalmente tener datos de los incrementos de presión de poros generados por el sismo. Con el fin de tener parámetros del suelo, se realizaron perforaciones por diferentes métodos (CPTU, DMT, SPT) y adicionalmente se ejecutaron pruebas de laboratorio tendientes a la obtención de parámetros para el modelo elastoplástico. A partir de la anterior información se construyó el modelo geotécnico del subsuelo con todos los parámetros requeridos para realizar un adecuado modelamiento numérico.

Aprovechando los resultados de las anteriores pruebas de campo, se optó por la evaluación del potencial de licuación mediante pruebas *in situ*, utilizando para ello, procedimientos simplificados. Es innegable que el procedimiento que ha tenido una gran aceptación a nivel mundial, es el propuesto por Seed [Seed & Idriss, 1971], el cual está basado en la prueba de penetración estándar (SPT). Desde el año 1977, este procedimiento ha sido revisado y actualizado con el fin de mejorar el nivel predictivo del mismo [Varela & Donovan, 1977]. Paralelo al ensayo de penetración estándar (SPT), se han venido desarrollando métodos simplificados basados en otras pruebas *in situ*, tales como el CPTU y el DMT. Un estado del arte interesante sobre los métodos que siguen el formato de Seed, ha sido presentada en el informe del Workshop, editado por Youd [Youd et al., 1997], y cuyo resumen fue publicado en la revista de Geotecnia de la ASCE [Youd et al., 2001]. Adicionalmente, se realizó un análisis comparativo entre los mismos (SPT, DMT y CPTU).

Para efectos del modelamiento se desarrolló un código de elementos finitos (*SOLDYNA Soil Dynamic Analysis*), que permite solucionar de manera acoplada las ecuaciones de Biot haciendo uso de la formulación $u - p$ [Zienkiewicz et al., 1990]. Debido a que en suelos, la compresibilidad del fluido y la permeabilidad del esqueleto es pequeña, el sistema de ecuaciones discretizada puede contener elementos de la submatriz (p, p) cercanos a cero, lo cual genera el uso de elementos mixtos, los cuales fuerzan de forma muy precisa la incompresibilidad, pero tienen dos desventajas al intentar ser utilizadas para resolver problemas a gran escala: La primera es que uno de los campos debe ser interpolado usando elementos de alto orden, lo cual aumenta el ancho de banda de la matriz del sistema de ecuaciones finales y son costosos de integrar. La segunda es que el sistema resultante está mal condicionado, por lo cual el uso del solvers iterativos (GMRES, Gradiente Conjugado Precondicionado, etc) es casi prohibitivo. Debido lo anterior se optó por utilizar técnicas de estabilización que permiten utilizar elementos de igual orden de interpolación (Triángulo 2D y tetraédro 3D). Otro problema que se suele presentar en el modelamiento numérico de problemas dinámicos y que también fué abordado en la presente tesis, corresponde al problema de reflexión de ondas. Para ello, se implementaron una serie de elementos absorbentes que permiten minimizar dicho fenómeno. Los anteriores resultados se comparan con los resultados de análisis en tensiones totales (PROSHAKE, EERA y QUAD4M).

1.2 Organización y Contenido

La tesis consta de dos partes bien diferenciadas: en primer lugar una parte teórica, correspondiente a los capítulos 1 a 6, y en segundo lugar, una parte aplicada, en la que se modelan diferentes eventos que han acontecido en Tumaco conformadas por los capítulos 7 a 10. A continuación se presenta una breve síntesis del contenido de los diferentes capítulos:

En el capítulo 2 se hace una revisión sobre las diferentes técnicas experimentales, semi-empíricas y numéricas existentes para analizar el fenómeno de licuación. Se presentan diferentes metodologías para analizar el fenómeno de licuación a partir de pruebas de campo, tales como el ensayo de penetración estándar (SPT), el cono sísmico (CPTU) y Dilatómetro de Marchetti (DMT). De igual manera, se presenta una discusión sobre las ventajas y desventajas de las técnicas numéricas existentes en la actualidad: formulación desacoplada en tensiones totales, formulación semi-acoplada en tensiones efectivas y formulación acoplada en tensiones efectivas.

En el capítulo 3 se presenta la discretización espacial y temporal de las ecuaciones de Biot [Biot, 1956], utilizando elementos de alto orden (elementos mixtos), y elementos de igual orden de interpolación (técnicas de estabilización). En la presente tesis, nos hemos inclinado por el uso de elementos de igual

orden de interpolación debido a que permite el análisis utilizando miles de elementos y adicionalmente, es posible el uso de solvers iterativos en bloque que le dan gran rapidez al procesamiento numérico. La gran ventaja en el uso de elementos de igual orden de interpolación es que son computacionalmente muy baratos, permitiendo el uso de grandes mallas, para los casos bidimensionales y tridimensionales.

El capítulo 4, corresponde a un modelo conceptual, con el que se intenta explicar el efecto del fluido en la capacidad de amortiguamiento de un suelo. Para ello, se realiza una revisión a nivel experimental sobre el efecto que tiene un fluido en la velocidad de propagación de las ondas de corte y de compresión. Posteriormente, se toman los resultados experimentales de Ellis [Ellis et al., 2000], el cual analiza el efecto de la viscosidad del fluido sobre el amortiguamiento de una arena. Finalmente, con el modelo se intenta determinar el efecto de la viscosidad del fluido sobre el amortiguamiento.

En el capítulo 5, se tratan las condiciones de contorno; Una simple aproximación en problemas geotécnicos consiste en el truncamiento del dominio infinito a una distancia finita con una condición de contorno impuesta (Condición de Dirichlet). Sin embargo, la localización del contorno finito es muy importante y la distancia mínima a la región de interés es frecuentemente cuestión de experiencia e intuición ya que la exactitud de la solución dependerá en gran medida de la localización de las condiciones de contorno. Para el caso dinámico, la situación es más grave, ya que las restricciones que se suelen aplicar a un problema dinámico, generan rebote de ondas, lo cual puede llegar a invalidar los resultados numéricos. El capítulo presenta todo el desarrollo analítico para la obtención del elemento absorbente, para ello se hace uso de la aproximación paraxial desarrollado por Claerbout [Claerbout & Johnson, 1971] y de la transformada de Fourier.

En el capítulo 6 se presenta un breve recuento de las diferentes teorías elastoplásticas existentes para modelar el comportamiento dinámico de una arena. Sin embargo, en la presente tesis nos hemos inclinado por el uso de la plasticidad generalizada, haciendo especial énfasis en el modelo de Pastor-Zienkiewicz. De igual manera se utiliza el modelo para reproducir una serie de ensayos triaxiales cíclicos no drenados realizados en la arena de Tumaco. Los parámetros así obtenidos, fueron utilizados posteriormente en el modelamiento numérico del fenómeno de licuación.

El capítulo 7 corresponde a la instrumentación que se llevó a cabo en Tumaco, que consta básicamente de un acelerógrafo en superficie y otro en roca a 25 metros de profundidad. La anterior instrumentación fue complementada con una serie de piezómetros piezoresistivos ubicados a diferentes profundidades. Con esta instrumentación se pretende básicamente tener un dato de entrada (registro de aceleraciones en roca), y las mediciones de la respuesta del depósito de arena (aceleraciones en superficie e incrementos en presión de poros a diferentes profundidades).

El capítulo 8 trata de la exploración de subsuelo mediante diferentes técnicas: piezocono sísmico (CPTU), Dilatómetro de Marchetti (DMT) y ensayo de penetración estándar (SPT). Mediante las anteriores técnicas se obtuvieron parámetros del subsuelo a partir de correlaciones semi-empíricas definidas para cada método, entre los que se destacan: densidad relativa (D_r), coeficiente de presión de tierras en reposo (K_o), ángulo de fricción (ϕ), entre otros. Los valores así obtenidos fueron complementados y ajustados con los parámetros obtenidos a partir de ensayos de laboratorio (ensayos triaxiales tanto estáticos como dinámicos).

En el capítulo 9 se evalúa el potencial de licuación de la arena de Tumaco, a partir de métodos semiempíricos; esta actividad se adicionó a la presente tesis con el fin de aprovechar la información obtenida a partir del SPT, CPTU y el DMT. De esta manera se hizo un análisis bastante riguroso sobre cada una de estas técnicas y finalmente se utilizaron cinco métodos diferentes en la evaluación de licuación. Al final del capítulo se realiza un análisis comparativo de los diferentes métodos semiempíricos.

En el capítulo 10 se realiza la simulación numérica del comportamiento dinámico de la arena de

Tumaco ante el evento de un sismo. Para ello, se integran de manera racional los resultados in situ, las pruebas de laboratorio y el modelo numérico. Los análisis se realizaron en tensiones totales (programa de diferencias finitas PROSHAKE, EERA y QUAD4M) y en tensiones efectivas (programa de elementos finitos *SOLDYNA*), para la predicción del comportamiento de la arena de Tumaco ante un sismo.

Por último, en el capítulo 11 se presentan las conclusiones de la tesis y se proponen futuras líneas de investigación que darán continuidad al presente trabajo.

Capítulo 2

REVISIÓN DE MÉTODOS PARA EVALUAR LICUACIÓN

2.1 Introducción

El comportamiento de suelos no cohesivos ante cargas sísmicas ha sido objeto de una gran cantidad de investigaciones en los últimos treinta años. Numerosos estudios se han desarrollado en el campo de ensayos cíclicos, definición de parámetros del suelo, ecuaciones constitutivas y métodos de análisis. Los métodos de análisis de licuación han sido propuestos con el objeto de valorar cuantitativamente o cualitativamente el potencial de licuación de un sitio. Adicionalmente, se han desarrollado una gran cantidad tanto de ecuaciones constitutivas ([Bianchini & Puccini, 1988],[Dafalias, 1994]), como de programas de computador tendientes a determinar la generación de presiones de poros en suelos no cohesivos ante carga cíclica.

En este capítulo, se hace una revisión de los más significativos métodos empíricos y numéricos para analizar la respuesta de suelos granulares ante cargas sísmicas.

2.2 Definición de Licuación

Durante la ocurrencia de sismos severos se ha observado sistemáticamente que depósitos saturados de suelos granulares con deficiente grado de compactación sufren un significativo nivel de deformaciones que es incompatible con la estabilidad de cualquier estructura. Al analizar las características de las fallas se han identificado dos fenómenos, que aunque presentan similitudes, son diferentes. En el primero existe una pérdida de resistencia, en cambio en el segundo existe una pérdida de rigidez. En el primero no es necesaria la acción permanente de la perturbación en el momento de la falla, en cambio en el segundo es necesaria la acción sísmica durante el desarrollo de las deformaciones. Para referirse a cada uno de estos fenómenos cuyo denominador común es un importante incremento de presión de poros, Casagrande[Casagrande, 1975] propuso dos términos: licuación verdadera y movilidad cíclica. En la figura 2.1 se ilustra un elemento de suelo sometido a una serie de tensiones cíclicas. Como consecuencia de las tensiones de corte aplicadas, la estructura no drenada del suelo tiende a ser más compacta, resultando una transferencia de tensiones a la presión de poros y por tanto, una reducción en la tensión efectiva. Si la arena está suelta, la presión de poros puede incrementarse rápidamente a un valor igual a la presión de confinamiento, y la capa de suelo puede experimentar grandes deformaciones.

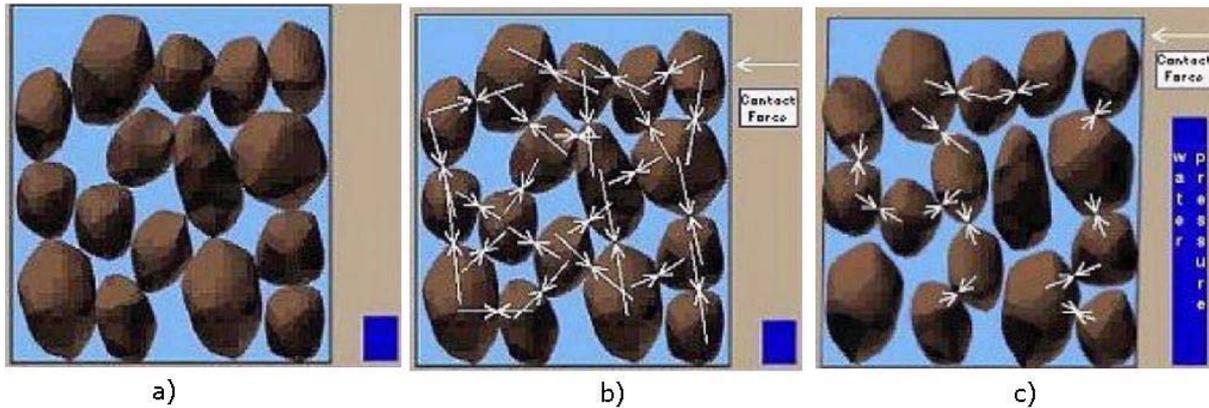


Figura 2.1: Representación esquemática del fenómeno de licuación. a) Estado inicial de tensiones. b) Fuerzas de contacto entre las partículas. c) Disminución de las fuerzas de contacto entre partículas, al incrementarse la presión de poros.

2.3 Revisión de Métodos para evaluar Licuación

2.3.1 Métodos Empíricos.

Se han desarrollado varios procedimientos empíricos para predecir el potencial de licuación de depósitos de suelo saturado. Muchos de estos métodos fueron desarrollados inicialmente por el profesor Seed y sus colaboradores durante la década de 1970 en la Universidad de Berkeley, pero otros investigadores también han hecho importantes aportes en este campo.

Los métodos empíricos se basan en comparar sitios donde se ha presentado sismos, y en los cuales ha ocurrido y no ha ocurrido licuación. El potencial de licuación es calculado cualitativamente y correlacionado con una propiedad del terreno. A continuación presentaremos una breve descripción de estos métodos:

Métodos basados en la observación y el registro de casos donde se ha manifestado el fenómeno de licuación

- Kishiba [Kishiba, 1970], con base en los datos obtenidos en tres sitios donde ocurrió licuación estableció un criterio para determinar bajo sismos de igual magnitud, si puede ocurrir licuación cuando el nivel freático está cerca de la superficie y las características granulométricas satisfacen las relaciones:

$$0.074mm < D_{50} < 2mm \quad \text{y} \quad C_u < 10$$

Además se debe cumplir que el estrato de suelo no licuable, arriba del estrato licuable sea menor de 8 metros y que las relaciones entre las profundidades de estos sea menor de 1. También estableció que los suelos no son susceptibles a la licuación si las presiones efectivas de confinamiento son mayores de 200 kPa y la densidad relativa es superior al 75%.

- Ohsaki [Ohsaki, 1966], también estableció que los suelos con nivel freático cercano a la superficie pueden licuarse si:

$$0.2mm < D_{60} < 2mm \quad \text{y} \quad D_{10} < 0.1mm$$

Adicionalmente establece que estos suelos tendrán poca probabilidad de licuarse si el número de golpes en ensayo de penetración estándar es mayor a 2 veces la profundidad del depósito, considerada en metros.

- Floring e Ivanov [Floring & Ivanov, 1973] , desarrollaron un criterio que permite estimar la susceptibilidad a la licuación de suelos por medio de pruebas de campo, que consiste en investigar los 10 metros superiores de suelo haciendo explotar sucesivamente tres cargas de dinamita de 5 Kg, colocadas a una profundidad media de 4.5 metros y determinando después de cada explosión, el asentamiento promedio de la superficie dentro de un radio de 4.5 metros. La cantidad y profundidad a la que se coloca el explosivo se eligen de forma que no haya expulsión del suelo durante la explosión. Si el asentamiento promedio es menor de 8 a 10 cm y la relación de asentamientos entre explosiones sucesivas es menor que 0.6 se puede afirmar que ese suelo no es susceptible de licuarse.
- Las investigaciones de Seed e Idriss [Seed et al., 1975], les llevaron a proponer un procedimiento semiempírico para la determinación de la susceptibilidad de licuación de arenas sueltas saturadas basados en la observación y registro de casos donde se ha manifestado el fenómeno, así como en la evaluación de la condición de los materiales arenosos a partir de los resultados de ensayos de penetración estándar y de las tensiones cortantes inducidas en la masa de suelo durante un sismo (este método se explica y utiliza en el capítulo 8). El método originalmente se desarrolló con base en la prueba SPT pero luego fue modificado usando ensayos de cono eléctrico. El método modificado consiste en:

- Medir la resistencia a la penetración estableciendo correlaciones entre las resistencias a la penetración estándar y la medida en el cono eléctrico (penetración estática). Se pueden utilizar las correlaciones propuestas por Schmertmann [Schmertmann, 1977], y las correcciones de q_c , en función del estado de tensiones efectivas propuestas por Seed, Idriss y Arango [Seed et al., 1983], tales como:

$$Q_c = C_q q_c \quad (2.1)$$

Donde q_c es la resistencia por punta del cono eléctrico, Q_c es la resistencia normalizada y C_q es el factor de corrección obtenido de la figura 2.2

- Estimar el estado inicial de tensiones así como las tensiones de corte inducidas τ_{prom} , por un sismo mediante la expresión:

$$\frac{\tau_{prom}}{\sigma_0} \approx 0.65 \frac{a_{m\acute{a}x}}{g} \frac{\sigma_0}{\sigma_0'} r_d \quad (2.2)$$

En donde g es la aceleración de la gravedad; $a_{m\acute{a}x}$ es la aceleración máxima del terreno en el sitio de interés; σ_0 es la tensión vertical total de campo, σ_0' es la tensión efectiva vertical y r_d es un factor de reducción, función de la profundidad.

- Definir por comparación estadística si el suelo es susceptible de licuación, o bien aplicando un τ_{prom} a probetas de laboratorio en triaxial cíclico.
- A partir de las investigaciones de campo, estos autores lograron recopilar información que permite definir para sitios y profundidades particulares, la resistencia sísmica normalizada $\frac{\tau}{\sigma_0}$ y la resistencia modificada Q_c , distinguiendo entre depósitos que sufrieron licuación y aquellos en los que no se presentó el fenómeno. Utilizando las figuras 2.2 y 2.3 y los valores de $\frac{\tau}{\sigma_0}$ y Q_c se puede evaluar si un depósito es susceptible de licuarse.

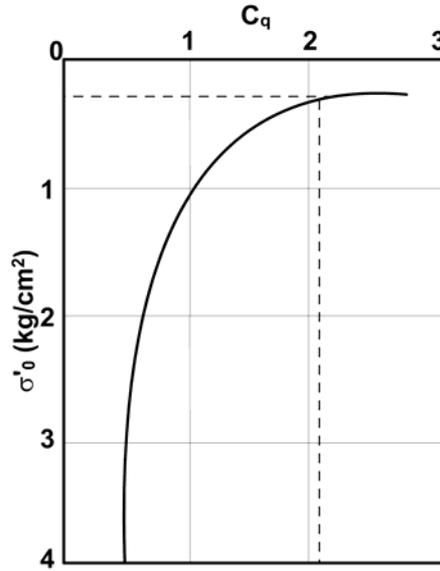


Figura 2.2: Factor de Corrección C_q en función de la tensión efectiva vertical [Seed et al., 1983]

- Seed [Seed et al., 1984a], modifican el anterior método agregándole a la gráfica que define si una arena es licuable o no, el nivel de daño esperado en términos de las deformaciones por cortante que experimentará el suelo durante el temblor. (figura 2.4).
- Holzer [Holzer et al., 1988], propone una gráfica que compara las aceleraciones máximas que pueden experimentarse en la superficie del terreno antes de la licuación, $a_{máx}$ con los valores de la velocidad de propagación de las ondas de corte, V_s , definiendo fronteras entre las arenas que han sufrido licuación en algunos sitios del Imperial Valley, California, durante algunos temblores registrados en 1988 (figura 2.6).
- Existe otro método análogo al de Seed e Idriss propuesto por Robertson [Robertson et al., 1992] pero en lugar de comparar la tensión cortante cíclica, $\frac{\tau_{prom}}{\sigma'_0}$, con una medida de la resistencia a la penetración, la comparación se hace con la velocidad de propagación de ondas de corte normalizada, V_{s1} , dada por:

$$V_{s1} = V_s \left(\frac{P_a}{\sigma'_0} \right)^{0.25} \quad (2.3)$$

Donde P_a es la presión atmosférica

La utilización de este criterio se lleva a cabo entrando en la gráfica de la figura 2.5 con los valores de $\frac{\tau_{prom}}{\sigma'_0}$ determinados con la ecuación 2.2 y con los valores de V_s medidos en el campo y normalizados con la ecuación 2.3.

Holzer [Holzer et al., 1988], propone una gráfica que compara las aceleraciones máximas que pueden ser experimentadas en la superficie del terreno antes de licuación, $a_{máx}$, con los valores de velocidad de propagación de las ondas de corte, V_s , definiendo fronteras entre las arenas que han sufrido licuación

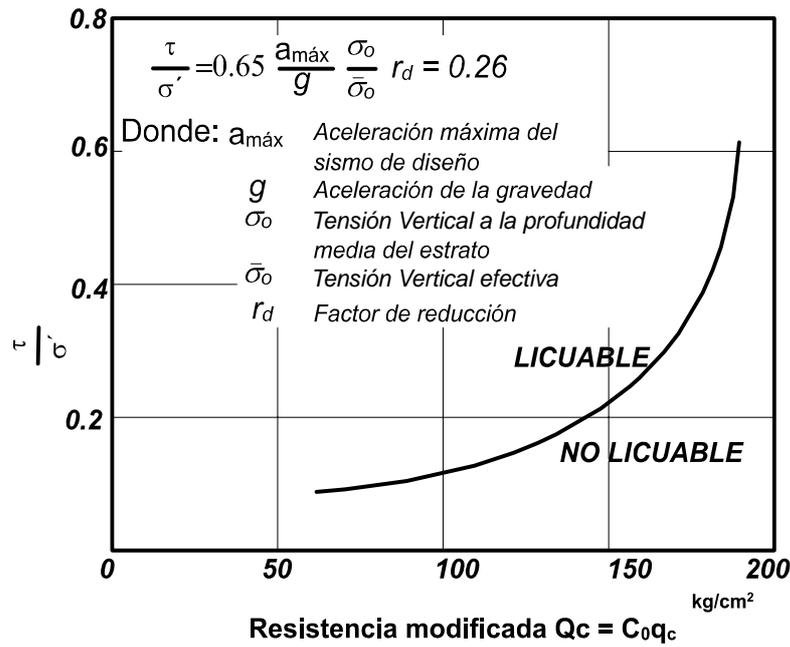


Figura 2.3: Susceptibilidad de licuación a partir de la resistencia de punta del cono eléctrico q_c [Seed et al., 1983]

en algunos sitios del Valle Imperial Valley, California, durante algunos temblores registrados en 1988 (figura 2.6).

Robertson [Robertson et al., 1992] realiza una recopilación interesante de arenas que han sufrido licuación, y las cuales han sido ensayadas en cámaras de calibración de gran tamaño o en ensayos triaxiales sobre muestras reconstituidas. Los autores encuentran que la licuación de las arenas puede ocurrir cuando se satisfacen las siguientes desigualdades, para sismos de magnitud $M_s = 7.5$

$$q_c \left(\frac{P_a}{\sigma'_0} \right)^{0.6} \leq 67 \frac{Kg}{cm^2} = 6.7 MPa \tag{2.4}$$

$$q_c \left(\frac{P_a}{\sigma'_0} \right)^{0.5} \leq 50 \text{ a } 75 \frac{Kg}{cm^2} = 5.0 \text{ a } 7.5 MPa \tag{2.5}$$

$$\frac{q_c}{\sigma'_0} \leq 40 \text{ a } 50 \frac{Kg}{cm^2} = 4.0 \text{ a } 5.0 MPa \tag{2.6}$$

La aplicación de este criterio es sencilla pues basta con entrar a la figura 2.7 para inspeccionar si un determinado estrato es potencialmente licuable o no.

Métodos basados en el estado estable de las arenas

Algunos de los métodos más conocidos para definir la susceptibilidad de licuación de las arenas por medio de ensayos de laboratorio, están basados en el concepto del estado estable y la línea de estado estable, definida como una condición en la que una muestra sufre deformaciones de flujo a tasas constantes de tensiones de corte, presión de poros y deformación.

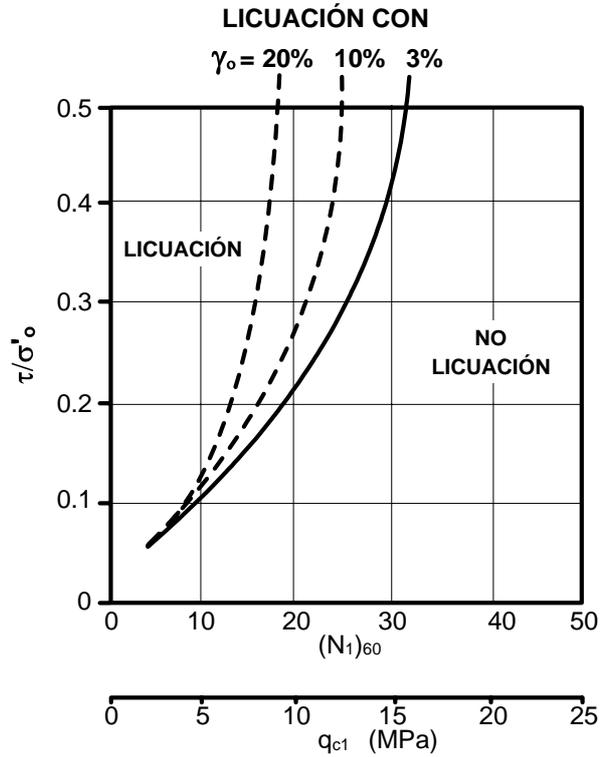


Figura 2.4: deformación de corte usando ensayos de cono eléctrico o de penetración estándar así como la tensión cortante cíclica normalizada. Sísmo de magnitud 7.5. γ_o = deformación de corte, $(N_1)_{60}$ = Número de golpes corregido [Seed et al., 1984a]

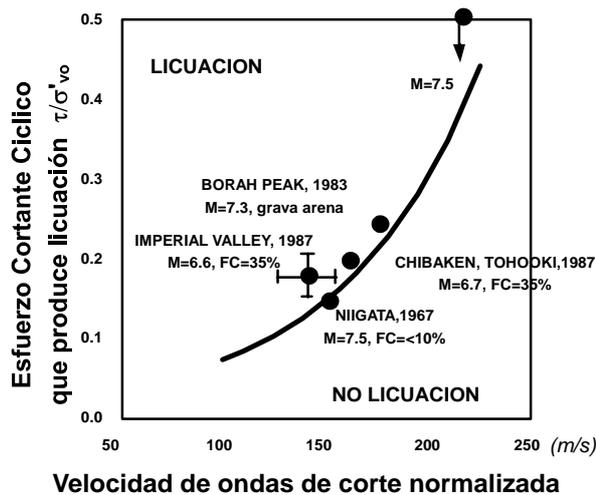


Figura 2.5: Correlación entre la velocidad de corte normalizada V_{s1} y la tensión cortante cíclica para sismos de magnitud $M_s = 7.5$ [Robertson et al., 1992]

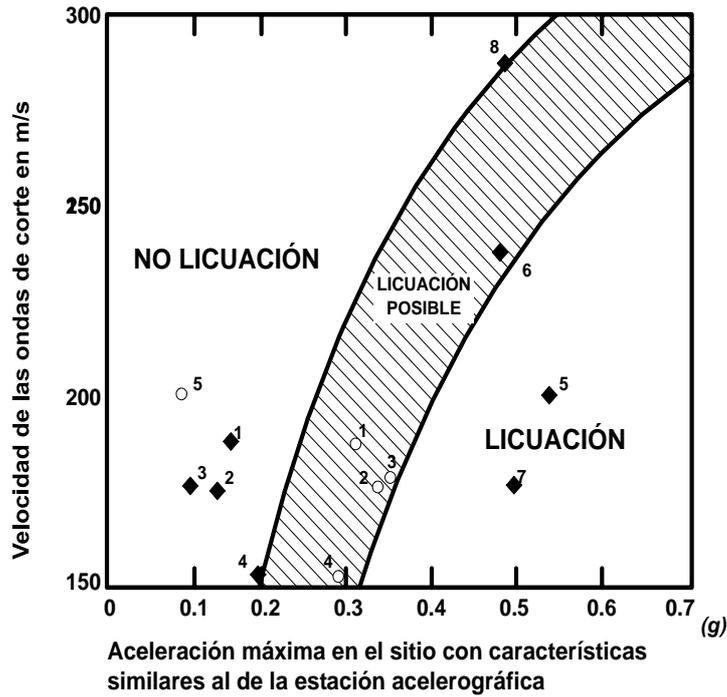


Figura 2.6: Correlación entre la velocidad de ondas de corte y la aceleración máxima del terreno, antes de la licuación [Holzer et al., 1988]

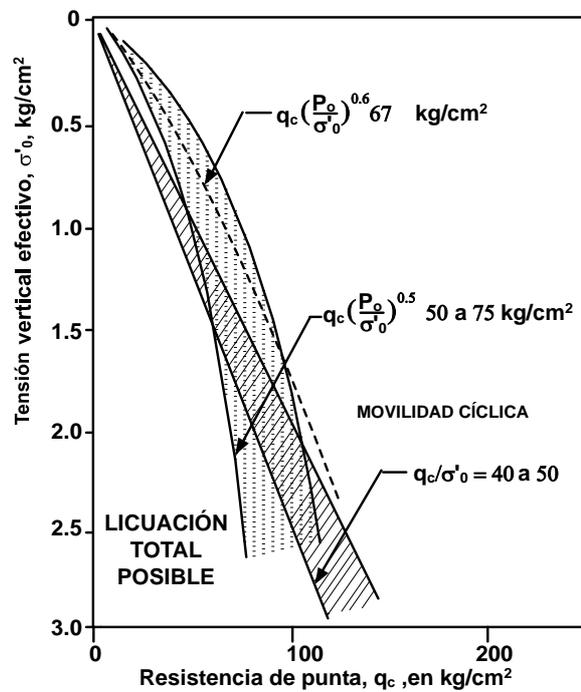


Figura 2.7: Estimación del potencial de licuación con base en pruebas de cono eléctrico y la tensión efectiva de campo para temblores de magnitud $M_s=7.5$ [Robertson et al., 1992]

Mediante la ejecución de ensayos sobre muestras formadas a diferentes relaciones de vacíos y diferentes presiones de consolidación se puede determinar el estado estable a lo largo de una línea en el espacio e vs p . Algunos de estos métodos definen fronteras bajo las cuales un suelo puede presentar un comportamiento contractivo o dilatante, lo cual permite distinguir entre materiales susceptibles de licuarse y otros donde no se puede presentar el fenómeno: una arena saturada contractiva es susceptible de licuarse durante la aplicación no drenada de tensiones mientras que las dilatantes no son licuables. Existe otra interpretación del comportamiento de algunas muestras que experimentan una deformación de flujo limitada cuando alcanzan un estado en el cual las fuerzas de corte y la presión de poros presentan poco o ningún cambio ([Alarcon-Guzman et al., 1988]). Este estado se conoce como cuasi-estable y ocurre a deformaciones más pequeñas que el estado estable (figura 2.8).

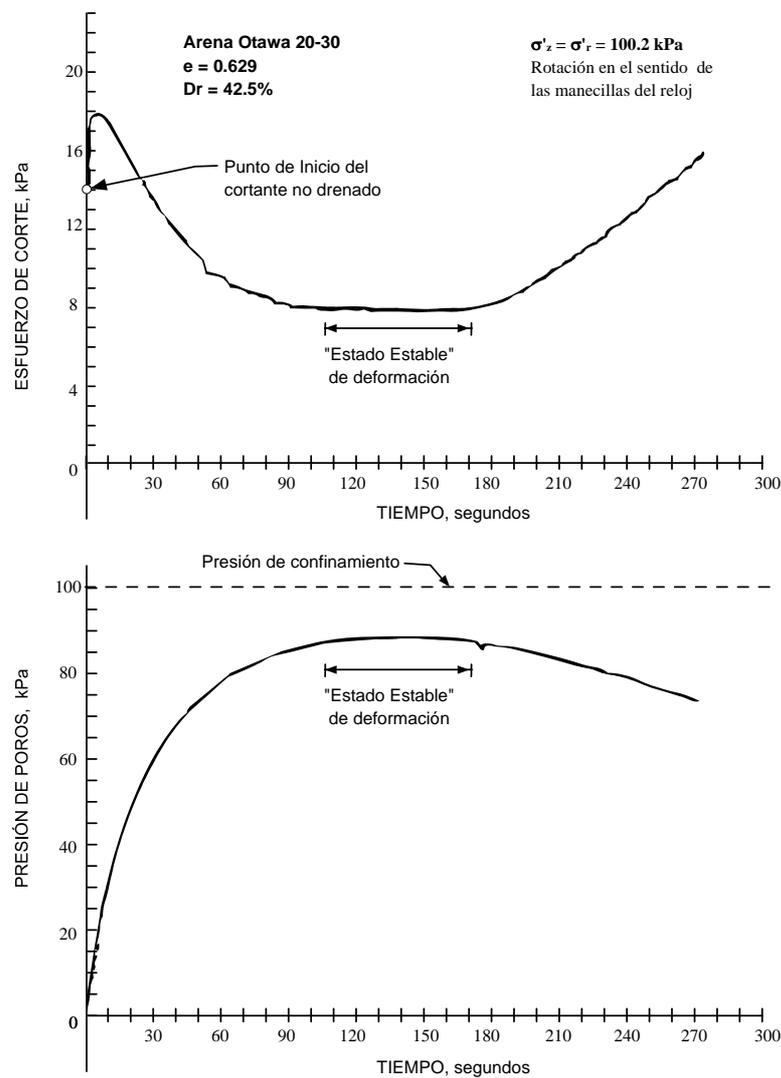


Figura 2.8: Ensayo de corte monotónico torsional sobre un espécimen con una tensión de corte estático inicial [Alarcon-Guzman et al., 1988]

Dentro de las principales técnicas propuestas para evaluar el fenómeno se destaca el siguiente:

- Poulos [Poulos et al., 1985] propone determinar mediante ensayos triaxiales convencionales no drenados, la pendiente de la línea de estado estable (Steady State), en la que se presenta un comportamiento de dilatancia cero durante la aplicación de tensiones de corte. Por otra parte, deberá determinarse la densidad in situ del material de estudio. De esta forma, se evalúa directamente la resistencia no drenada del material, la cual se compara con el resistencia estática actuante, y de ahí se estima el potencial de licuación teniendo en cuenta que la resistencia al corte en estado estable depende solamente de la relación de vacíos in situ de la masa de suelo y no del estado de tensiones, para proceso de carga sin drenaje. Con base en lo anterior se puede definir el factor de seguridad contra licuación como:

$$F_1 = \frac{S_{su}}{\tau_d} \quad (2.7)$$

Siendo F_1 el factor de seguridad contra licuación, S_{su} , la resistencia al corte no drenada en estado estable y τ_d es el tensión cortante requerida para mantener el equilibrio estático.

2.3.2 Métodos Numéricos

Existen básicamente tres formulaciones para analizar la licuación de suelos y las consecuencias sobre la estabilidad de las estructuras de tierra.

Estas formulaciones se pueden categorizar como [Ledesma & Lloret, 1997]:

- Formulación desacoplada en tensiones totales:
 - Método lineal equivalente - tensiones totales
 - Método lineal equivalente - generación y disipación de presiones de poros.
- Formulación semi-acoplada en tensiones efectivas
- Formulación acoplada en tensiones efectivas

A continuación presentaremos una breve descripción de las anteriores técnicas numéricas.

Formulación desacoplada en tensiones totales

Dentro de la formulación desacoplada se distinguen dos formulaciones, en primer lugar el método lineal equivalente, y en segundo lugar el método lineal equivalente con generación y disipación de presiones de poros.

Método Lineal Equivalente Este método de análisis ha sido ampliamente utilizado en programas tales como el SHAKE [Idriss & Sun, 1992], QUAD-4 [Idriss et al., 1973], LUSH [Lysmer et al., 1974] y FLUSH [Lysmer et al., 1975] . La hipótesis fundamental del método lineal equivalente, es que la respuesta no lineal puede ser aproximada de manera satisfactoria por un modelo lineal elástico amortiguado si las propiedades del modelo son escogidas apropiadamente. Las propiedades tensión-deformación (figura 2.9), son definidas por un par de curvas que representan la degradación del módulo de corte secante con la deformación y la variación del amortiguamiento con la deformación (figura 2.10).

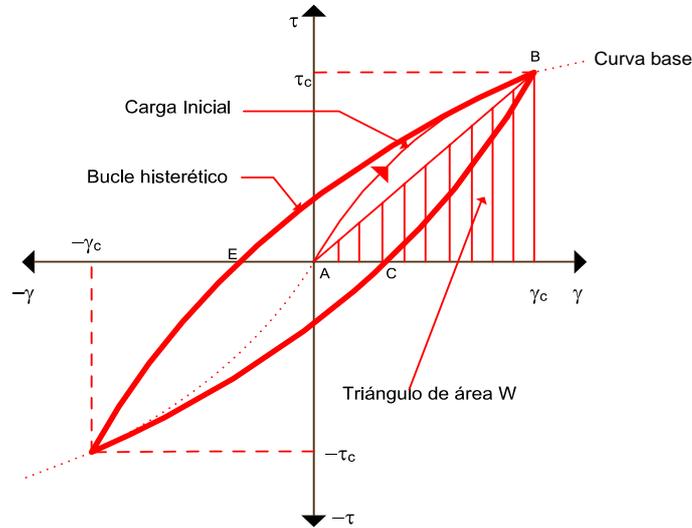


Figura 2.9: Aproximación de las curvas tensión de corte-deformación de corte en el modelo lineal equivalente

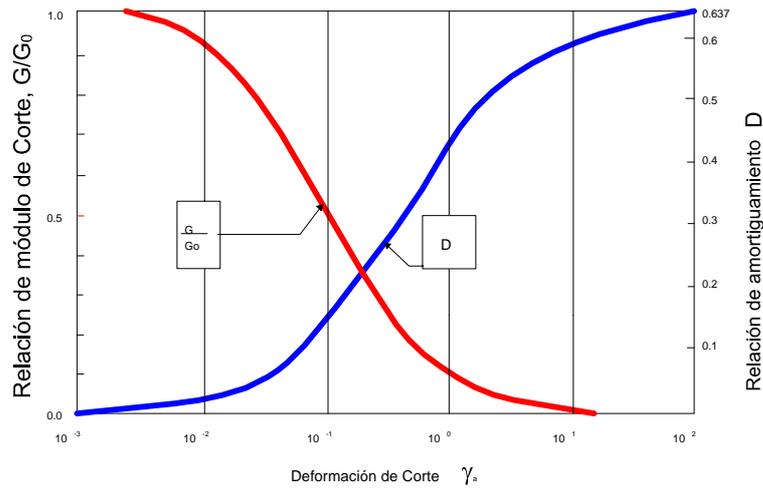


Figura 2.10: Variación del módulo de corte y el amortiguamiento con la deformación de corte

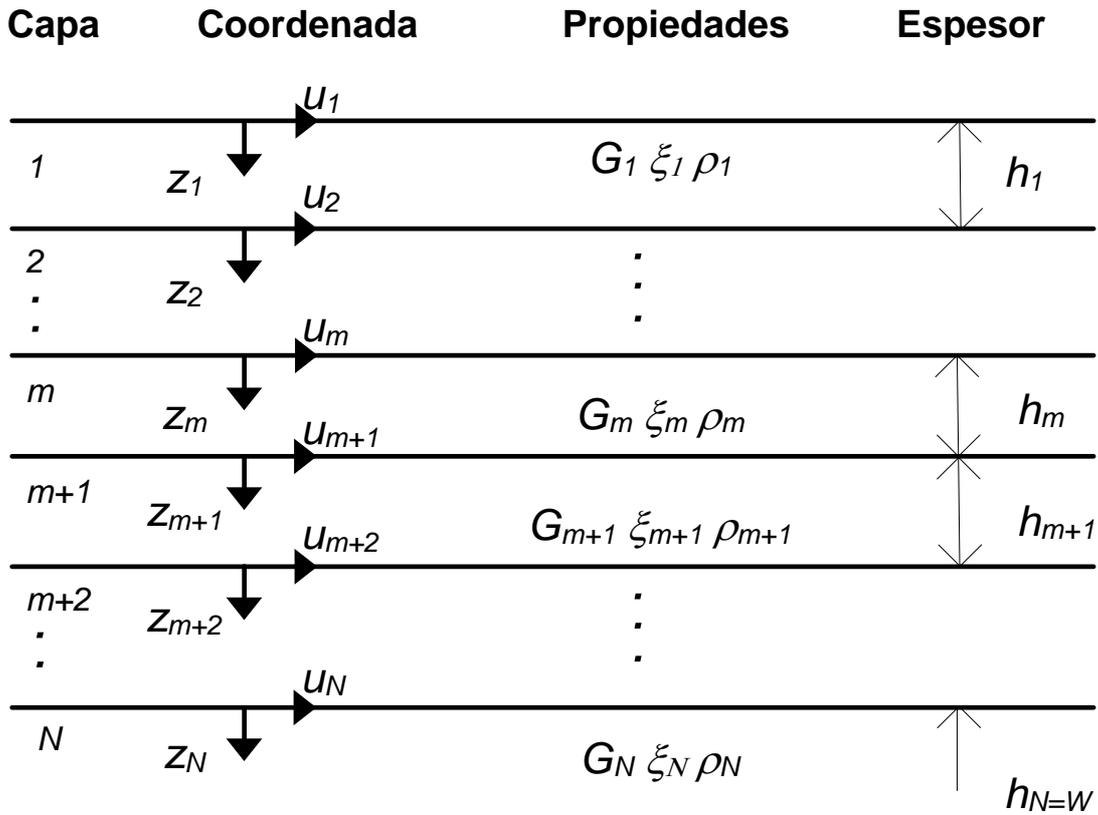


Figura 2.11: Depósito de suelo estratificado para análisis mediante el método unidimensional. G es el módulo de corte máximo, ξ es la relación de amortiguamiento y ρ es la densidad [Bardet et al., 2000]

Debido a que al inicio de los cálculos el nivel de deformaciones no es conocido, se acostumbra utilizar un nivel de deformaciones correspondiente al 60% del máximo valor.

El SHAKE en particular, analiza la respuesta de un sistema suelo-roca formado por capas horizontales y sometidas a la incidencia de una onda vertical de ondas sísmicas S. También supone que el comportamiento cíclico del suelo puede aproximarse por medio de un modelo lineal equivalente. El análisis lineal equivalente de la respuesta del suelo se representa en la figura 2.11. El depósito del suelo está formado por N estratos de suelo, horizontales e indefinidos, de espesor h_i y con unas características de cada estrato: densidad, módulo de corte y la relación de amortiguamiento (relacionable con la viscosidad). La ecuación unidimensional del movimiento asumiendo un material tipo Kelvin-Voighth, está dada por la siguiente expresión:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} \tag{2.8}$$

Donde:

$u(z, t)$ = desplazamiento horizontal a la profundidad z y tiempo t

G = Módulo de corte

η = Viscosidad

En SHAKE, los valores del módulo de corte y de la relación de amortiguamiento son determinados

iterativamente, de manera que estos valores son consistentes con el nivel de deformaciones. Obsérvese que en este análisis no interviene la presión de poros y por tanto no es posible estudiar licuación tal y como se formuló el método en sus inicios.

Método Lineal Equivalente-Generación / Disipación de presión de poros Debido a que el método lineal equivalente no es directamente aplicable a suelos saturados, se acostumbra acoplar los cálculos numéricos con los resultados de ensayos triaxiales cíclicos no drenados donde se presentó licuación [Seed & Idriss, 1982]. El procedimiento consiste básicamente en determinar la historia de tensiones de corte en el tiempo, para diferentes puntos del sistema, asumiendo para ello una condición no drenada. Posteriormente, la historia de tensiones de corte en un punto determinado del sistema es convertida a un número equivalente de tensiones de corte cíclicas (N_{eq}), y comparada con las tensiones de corte cíclicas requerida para causar licuación en muestras de laboratorio, esto para las mismas condiciones de tensiones iniciales encontrada en el campo. Estos resultados son utilizados para considerar la estabilidad de taludes y presas, o para encontrar la susceptibilidad a la licuación de un depósito arenoso.

Desafortunadamente, la técnica propuesta por Seed, presenta algunas incertidumbres, las cuales deberán ser tenidas en cuenta al utilizar esta metodología:

- En primer lugar el método trabaja en tensiones totales y los parámetros de laboratorio se obtienen en términos de tensiones efectivas; por tanto, una elección del módulo en condición drenada, puede conducir a falsas trayectorias de tensiones en la masa de suelo, y por tanto, la historia de tensiones de corte no será válida. Esto desde luego afectará la obtención del número de ciclos equivalentes requeridos para causar licuación.
- En segundo lugar, la anterior limitación conduce a que este método no está en capacidad de predecir adecuadamente las deformaciones que experimentará el terreno si se produce licuación.

Formulación Semi-acoplada

El método parte de las siguientes hipótesis:

- Ecuación de equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + c \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

Donde b_i es el vector de fuerzas másicas y c es el amortiguamiento.

- Ley constitutiva

$$d\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}d\boldsymbol{\epsilon}$$

donde \mathbf{D} es la matriz constitutiva

- Generación de presiones intersticiales

$$dP_w = f(\sigma, \epsilon)$$

Donde P_w es la presión de agua en el poro.

DESRA [Lee & Finn, 1975] y TARA [Siddharthan & Finn, 1982] son los más representativos códigos de elementos finitos que se han desarrollado en la formulación semi-acoplada. Se diferencia del modelo anterior, en el uso de una ecuación constitutiva no lineal, variando el módulo de rigidez volumétrica y el módulo de corte en cada incremento de carga, obteniéndose de esta manera resultados aceptables. La principal mejora en esta formulación es el acoplamiento entre el incremento de presiones intersticiales a las ecuaciones no lineales del movimiento. Tanto DESRA como TARA incluyen un modelo semiempírico para la generación de presiones intersticiales, el cual relaciona la presión intersticial con los cambios volumétricos en condición no drenada. En esta formulación la deformación volumétrica es calculada a partir tanto de la deformación volumétrica total como de la deformación de corte aplicada.

El modelo permite calcular el incremento en las presiones intersticiales, para lo cual incorpora siete parámetros, que son obtenidos a partir de ensayos de corte cíclico simple y ensayos de consolidación. El incremento en presión de poros generada durante cada incremento de carga, es utilizada para calcular la tensión efectiva, la cual a su vez es utilizada en la siguiente iteración para actualizar el módulo elástico; con el fin de poder modelar el proceso de disipación de presión de poros, después del sismo los programas utilizan un mecanismo de difusión unidimensional.

Otro programa similar a los anteriores es el FEAP-CS, el cual está basado en el método de las deformaciones residuales (RSM - residual strain method), descrito por Stamatopoulos [Stamatopoulos et al., 1991], y propuesto inicialmente por Bouckovalas [Bouckovalas et al., 1986], con el fin de analizar el comportamiento de plataformas marinas cimentadas en arenas. El programa utiliza el método de las deformaciones residuales (RSM), para predecir las deformaciones permanentes del terreno, así como la presión de poros durante un sismo. La hipótesis básica del modelo es que las deformaciones residuales pueden ser divididas en dos componentes: una deformación causada por una redistribución promedio de tensiones y aquella causada por la carga cíclica alrededor de una tensión constante promedio.

En conclusión, la formulación semi-acoplada utiliza una ecuación constitutiva no lineal, las cuales son acopladas indirectamente con mecanismos que permiten calcular la generación y disipación de presión de poros. Esta formulación presenta las siguientes limitaciones:

- En primer lugar, el procedimiento para escoger el modelo de generación de presión de poros, no se realiza de una manera consistente, sino que se realiza por tanteos (prueba y error), lo cual demanda tener un gran conocimiento en el uso del modelo.
- En segundo lugar, la metodología es basada en análisis elásticos no lineales, el cual no contiene suficiente disipación histerética durante los procesos de carga y descarga.
- En tercer lugar, debido a que la formulación semi-acoplada son acoplados a nivel global, pero no a nivel de las ecuaciones diferenciales, esta formulación es incapaz de simular la correcta tendencia de la disipación de presión de poros a pesar de utilizar un mecanismo de difusión unidimensional.
- En cuarto lugar, debido a que la simulación de la disipación del exceso de presión de poros es pobre, la historia temporal de desplazamientos también es incorrecta, especialmente en lo concerniente a los desplazamientos verticales.

- Finalmente, debido a que el módulo de corte depende de la tensión de confinamiento y es por tanto variable durante el análisis, el carecer de una correcta disipación de presión de poros, puede originar un retraso en la recuperación de la tensión efectiva, lo cual puede afectar la historia de aceleraciones.

Formulación Acoplada

Esta formulación se basa en la solución de las ecuaciones de Biot, sobre propagación de ondas en un medio elástico saturado. La primera formulación numérica de las ecuaciones de Biot, fue propuesta por Ghaboussi[Ghaboussi & Wilson, 1972], cuya forma algebraica presenta la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{M}_c \\ \mathbf{M}_c^T & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Siendo u, w los desplazamientos de las partículas sólidas y del fluido, \mathbf{K}, \mathbf{E} las matrices de rigidez de las partículas sólidas y del fluido, \mathbf{C} es una matriz de acoplamiento, $\mathbf{M}_s, \mathbf{M}_f$ representan las matrices de masa del sólido y del fluido, mientras que \mathbf{M}_c corresponde a la matriz de masa de acoplamiento. Las matrices de amortiguamiento viscoso son \mathbf{D} y \mathbf{H} , mientras que \mathbf{F} y \mathbf{G} son las fuerzas aplicadas al sólido y fluido respectivamente.

Posteriormente, Zienkiewicz[Zienkiewicz & Shiomi, 1984], introduce una modificación de las variables dada por:

$$\dot{U} = \dot{u} + \frac{\dot{w}}{n}$$

Donde n es la porosidad del material, \dot{U} es la velocidad absoluta del fluido y \dot{w} es la velocidad del fluido en sentido Darcy (relativa a las partículas sólidas) A partir de esta modificación Zienkiewicz propone la conocida formulación **u-p-U**, en la que p corresponde al presión de poros, presentando la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{p} \\ \ddot{U} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{p} \\ \dot{U} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{G}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}_1^T & \mathbf{P} & -\mathbf{G}_2^T \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_f \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Donde $\mathbf{M}_s, \mathbf{M}_f$ representan las matrices de masa del sólido y del fluido, $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ corresponden a las matrices de amortiguamiento, \mathbf{P} es la matriz de compresibilidad del fluido, \mathbf{K} matriz de rigidez de las partículas sólidas, \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 son las matrices de acoplamiento, y \mathbf{f} son vectores de fuerzas exteriores o caudales exteriores.

A la anterior formulación, Zienkiewicz[Zienkiewicz & Shiomi, 1984], propone despreciar la aceleración del fluido, obteniendo de esta forma la formulación **u-p**, la cual presenta la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_p \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Donde \mathbf{M} corresponde a la matriz de masa, \mathbf{C} es la matriz de amortiguamiento, \mathbf{S} es la matriz de compresibilidad, \mathbf{H} es la matriz de permeabilidad, \mathbf{Q} es la matriz de acoplamiento, \mathbf{f}_s es el vector de fuerzas y \mathbf{f}_p es un vector de caudales. Es importante anotar que la presente tesis está basada en la formulación u-p.

Finalmente, si se asume la incompresibilidad del fluido y eliminando \mathbf{p} , de la formulación $\mathbf{u-p-U}$, se obtiene la formulación $\mathbf{u-U}$, la que se puede representar de dos formas; en primer lugar la propuesta por Prevost[Prevost, 1985], la cual tiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{U}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & -\mathbf{Z} \\ -\mathbf{Z}^T & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{U}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_p \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

En segundo lugar, la propuesta de Zienkiewicz[Zienkiewicz & Shiomi, 1984]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{U}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 + \mathbf{K}_1 & -\mathbf{C}_2 + \mathbf{K}_2 \\ -\mathbf{C}_2^T + \mathbf{K}_2^T & \mathbf{C}_3 + \mathbf{K}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{U}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_U \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Donde \mathbf{Z} , \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 son matrices de amortiguamiento, \mathbf{M}_s y \mathbf{M}_f son las matrices de masa del sólido y fluido respectivamente, las restantes matrices son similares a las definidas previamente.

Un resumen interesante de las anteriores formulaciones, en la que se analizan aspectos tales como la estrategia de solución, tipo de elemento, ecuación constitutiva, integración de la ecuación constitutiva, hipótesis de la matriz de masa y amortiguamiento externo, es presentada por Smith [Smith, 1994], en el proyecto VELACS.

Finalmente, es importante destacar los resultados obtenidos por Arulanandan [Arulanandan et al., 1997], en la cual el autor realiza una comparación entre DYSAC2 (tensiones efectivas - acoplado) y el SHAKE (tensiones totales), a raíz del sismo de Loma Prieta, que ocasionó daños importantes en el Distrito de Marina (San Fransisco). El perfil estratigráfico del terreno analizado por el autor, se ilustra en la figura 2.12. El autor llega las siguientes conclusiones en dicho estudio:

- a) Dado que la degradación de las propiedades del suelo ocasionada por el incremento en la presión de poros no se considera directamente en el SHAKE, su aplicación es limitada a sistemas donde no se generen presiones de poros significativas durante el movimiento sísmico. Sin embargo, el programa SHAKE es el de mayor uso en los análisis de dinámica de suelos.
- b) Las aceleraciones máximas calculadas con DYSAC2 o SHAKE en general coinciden razonablemente bien con las medidas en el Distrito de Marina durante el sismo de Loma Prieta (1989). Por lo tanto, para calcular la aceleración máxima en superficie a partir de aceleraciones pico en roca menores que 0.3 g, se puede usar el análisis en tensiones efectivas o totales y los resultados serán similares (figura 2.13). Con la aceleración máxima calculada con el SHAKE y mediante el Procedimiento Simplificado se puede determinar la susceptibilidad a la licuación de un sitio determinado.
- c) El análisis en tensiones totales realizado por el SHAKE no presenta distinción de la respuesta frecuencial entre un sitio licuable y otro no licuable. Por lo tanto, es importante tener en cuenta que los espectros de respuesta en superficie obtenidos a partir del SHAKE, en sitios potencialmente licuables, deben usarse con extremo cuidado, o preferiblemente no deberían usarse.
- d) En los diferentes sitios analizados para el Distrito de Marina se encontró que las aceleraciones espectrales máximas calculadas mediante el SHAKE son mayores a las medidas y obtenidas mediante DYSAC2 (figura 2.14). Adicionalmente, los periodos para los cuales el SHAKE indica las aceleraciones espectrales máximas no corresponden a lo observado en campo.

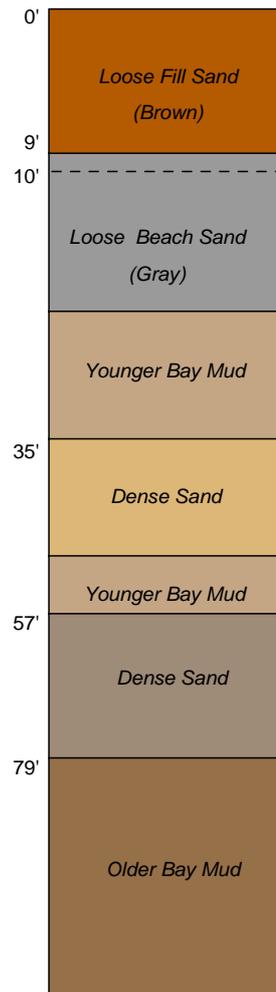


Figura 2.12: Perfil estratigráfico de la perforación BH-2, en el Distrito Marina en San Francisco (profundidades en pies) [Arulanandan et al., 1997]

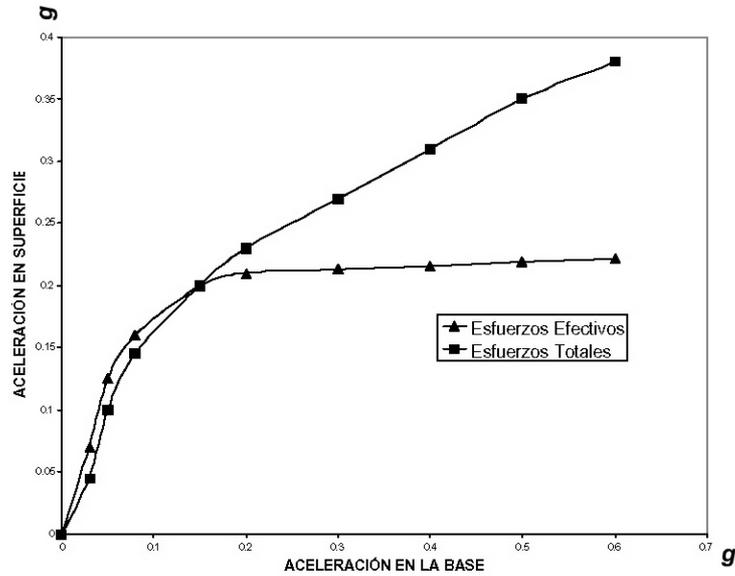


Figura 2.13: Variación de la aceleración máxima en superficie en función de la máxima aceleración en la base. Predicción en tensiones totales (SHAKE) y predicción en tensiones efectivas (DYSAC). [Arulanandan et al., 1997]

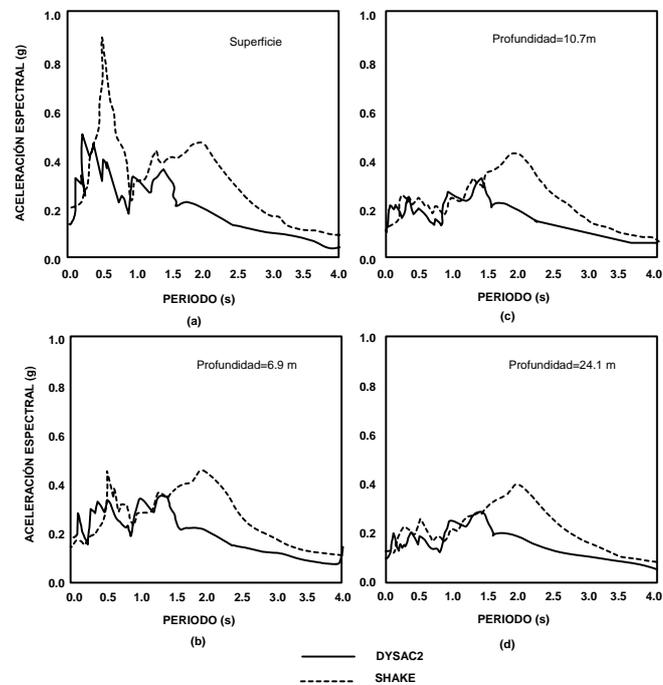


Figura 2.14: Comparación entre los espectros de respuesta obtenidos en tensiones totales (SHAKE), y en tensiones efectivas (DYSAC2), para el Distrito Marina (San Fransisco) [Arulanandan et al., 1997]

Capítulo 3

FORMULACIÓN ACOPLADA DEL PROBLEMA DINÁMICO

3.1 Antecedentes

Las ecuaciones básicas que controlan las propiedades de la interacción suelo-fluido para un medio elástico saturado fueron propuestas inicialmente por Biot [Biot, 1941]. Corresponden básicamente a la teoría de la consolidación [Biot, 1941] y a la propagación de ondas en un medio elástico [Biot, 1956]. La validez de dichas ecuaciones fue llevada a cabo por Green [Green, 1969], en su teoría de mezclas. Posteriormente la generalización de las ecuaciones de Biot para tener en cuenta el comportamiento no lineal del suelo fué realizado por Zienkiewicz [Zienkiewicz et al., 1980],[Zienkiewicz & Shiomi, 1984]. Debido a que el tema ha tenido una amplia difusión tanto en revistas especializadas como textos y tesis doctorales Leung[Leung, 1984], Chan [Chan, 1988], Xie [Xie, 1990], Mira [Mira, 2001], en el presente capítulo se presenta un resumen de las ecuaciones y al lector interesado en la deducción de dichas ecuaciones, se remite a la bibliografía anterior.

3.2 Variables utilizadas en el modelo

Las variables que intervienen en el problema que analizaremos son las siguientes:

- σ_{ij} Tensor de tensiones totales
- p Valor de la presión del agua
- \mathbf{u} Vector de desplazamientos absolutos de las partículas sólidas
- \mathbf{w} Vector de desplazamientos del fluido, relativos a las partículas sólidas
- $\dot{\mathbf{w}}$ Vector de velocidad del fluido en sentido Darcy, relativa a las partículas sólidas
- $\dot{\mathbf{U}}$ Vector de velocidades absolutas del fluido
- ρ Densidad de la mezcla
- ρ_f Densidad del fluido
- ρ_s Densidad de las partículas sólidas

El criterio de signos utilizados en el presente trabajo corresponden a los de la mecánica del continuo, de manera que las tensiones de compresión se consideran negativas. Por el contrario para el fluido, se considera que las presiones de poros de compresión son positivas. En este orden de ideas, es posible

relacionar la velocidad absoluta de la fase líquida con la absoluta de la fase sólida y la relativa entre las dos fases :

$$\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{u}} + \frac{\dot{\mathbf{w}}}{n} \quad (3.1)$$

Donde n es la porosidad del suelo.

Para efectos de análisis se asumen pequeñas deformaciones, de manera que las descripciones euleriana y langragiana coinciden. Además, se supondrá que las densidades se mantienen constantes, aunque en el programa de elementos finitos se presenta una subrutina sobre ley de densidades en el evento de ser variable.

3.3 Ecuaciones básicas

En las expresiones que se presentan a continuación se asume que las tensiones de corte del fluido se desprecian, de manera que las tensiones que interactúan entre el sólido y el fluido son isotrópicas. Las ecuaciones que gobiernan las propiedades de un medio saturado se basan en las siguientes hipótesis:

3.3.1 Ley de tensiones efectivas

En general se asume el principio de tensiones efectivas propuesto por Terzaghi [Terzaghi, 1943] : *Los cambios de volumen y resistencia de un suelo saturado, son debidos a cambios en las tensiones efectivas.*

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \quad (3.2)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker o tensor unitario. La expresión (3.2) asume implícitamente que las partículas sólidas son indeformables y el agua incompresible. En esta expresión se utiliza el criterio de signos de mecánica del continuo.

3.3.2 Tensor de pequeñas deformaciones

Se asume como en mecánica del continuo, que las deformaciones se calculan a partir de las derivadas de los desplazamientos:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.3)$$

donde los subíndices i, j se refieren a las direcciones coordenadas (en 3 dimensiones varían de 1 a 3).

3.3.3 Ecuación constitutiva

La ley constitutiva de un suelo se expresa como la relación existente entre el tensor de tensiones y el de deformaciones. En general esta relación será no lineal, por lo que esta relación deberá ser incremental, es decir, entre incremento de tensiones efectivas y de deformaciones:

$$d\sigma'_{ij} = D_{ijkl}d\epsilon_{kl} \quad (3.4)$$

donde D_{ijkl} representa la ecuación constitutiva del material. En lo que sigue y por comodidad, el tensor D_{ijkl} se escribirá en algunas ocasiones como la matriz, \mathbf{D} , que va a depender del estado inicial de tensiones, así como de los procesos de carga y descarga a los que se verá sometido el terreno durante una excitación sísmica. Nótese que las tensiones que intervienen en la ecuación constitutiva son las efectivas. Por otra parte, las deformaciones que intervienen son las tensionales y no se incluyen las que son debidas a otros fenómenos. En este orden de ideas, se puede obtener el estado tensional en cualquier instante como la suma de las tensiones efectivas acumuladas, de la siguiente manera :

$$\left(\sigma'_{ij}\right)^{n+1} = \left(\sigma'_{ij}\right)^n + \int_0^\epsilon D_{ijkl} d\epsilon_{kl} \quad (3.5)$$

3.3.4 Ecuación de momento

Para la ecuación general de momento se asume que el sistema de coordenadas está unido a la fase sólida y que la aceleración convectiva se aplica únicamente al fluido, pudiéndose expresar de la siguiente manera :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho_s(1-n)\ddot{u}_i + \rho_f n \ddot{U}_i \quad (3.6)$$

Donde ρ_s es la densidad de las partículas sólidas, ρ_f la del fluido y ρ la del conjunto. Sustituyendo en la ecuación 3.6, la ecuación 3.1 y teniendo en cuenta que $\rho = (1-n)\rho_s + n\rho_f$, obtenemos:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i \quad (3.7)$$

Donde b_i representa el vector de fuerzas másicas, \ddot{u}_i y \ddot{w}_i son las componentes de aceleración de las partículas sólidas y fluido respectivamente.

3.3.5 Ecuación de continuidad del agua

El caudal que entra por unidad de volumen, en un volumen de control (tomando positivo el caudal que sale) es $-\nabla \cdot w$; este caudal deberá coincidir con la variación del agua almacenada por unidad de tiempo, en dicho volumen de control. Hay cuatro factores que contribuyen a este cambio [Xie, 1990]:

- a. Cambio total debido a la deformación del suelo en la unidad de tiempo :

$$\frac{\partial \epsilon_{ii}}{\partial t} \quad (3.8)$$

- b. Cambios debidos a la compresión de las partículas sólidas :

$$\frac{(1-n)}{K_s} \frac{dp}{dt} \quad (3.9)$$

donde K_s es la rigidez de las partículas sólidas.

- c. Cambio debido a la compresibilidad del fluido :

$$\frac{n}{K_f} \frac{dp}{dt} \quad (3.10)$$

donde K_f es la rigidez del fluido.

d. Cambio debido a la compresión de las partículas sólidas generadas por variaciones en las tensiones efectivas :

$$-\frac{d\sigma'_{ij}}{3K_s} \quad (3.11)$$

El cambio total, será el efecto de los anteriores factores:

$$-\frac{\partial \dot{w}}{\partial x_i} = \frac{\partial \epsilon_{ii}}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{d\sigma'_{ij}}{3K_s} \quad (3.12)$$

Donde $\frac{1}{Q} = \frac{n}{K_f} + \frac{(1-n)}{K_s}$

3.3.6 Ley de Darcy

La ley de Darcy describe la relación entre la velocidad relativa del fluido respecto a la fase sólida y los gradientes de altura piezométrica. Por tanto, en condiciones dinámicas se deberá añadir el efecto de la aceleración del propio fluido :

$$\dot{w} = -\frac{k_{ij}}{\rho_f g} \left[\frac{\partial p}{\partial x_j} - \rho_f (b_j - \ddot{U}_j) \right] \quad (3.13)$$

Donde k_{ij} es el tensor de permeabilidad y g la aceleración de la gravedad. Por otra parte :

$$\ddot{U}_j = \ddot{u}_j + \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{w}_j}{n} \right) \quad (3.14)$$

La anterior expresión se obtiene al derivar (3.1).

3.4 Resumen de las ecuaciones

Las ecuaciones presentadas en la sección anterior, son aplicables en general a todo tipo de suelos. En resumen estas ecuaciones son :

1. Ecuación de momento de la masa de suelo

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i \quad (3.15)$$

2. Ecuación de continuidad del agua

$$-\frac{\partial \dot{w}}{\partial x_i} = \frac{\partial \epsilon_{ii}}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{d\sigma'_{ij}}{3K_s} \quad (3.16)$$

3. Ley de Darcy

$$\dot{w} = -\frac{k_{ij}}{\rho_f g} \left[\frac{\partial p}{\partial x_j} - \rho_f (b_j - \ddot{U}_j) \right] \quad (3.17)$$

4. Ley de tensiones efectivas

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \quad (3.18)$$

5. Ecuación constitutiva

$$d\sigma'_{ij} = D_{ijkl}d\epsilon_{kl} \quad (3.19)$$

6. Tensor de pequeñas deformaciones

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

A efectos prácticos asumimos que la aceleración relativa del agua con relación a las partículas sólidas es despreciable, es decir:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} \ll \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

La validez de las anteriores hipótesis ha sido discutida por Zienkiewicz [Zienkiewicz et al., 1980]; de manera que para muchos problemas sísmicos, esta aproximación es adecuada [Leung, 1984]. En este orden de ideas las ecuaciones se reducen a:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} &= \rho \ddot{\mathbf{u}} \\ \nabla \cdot [\mathbf{k}(\nabla p - \rho_w(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}))] &= \frac{1}{Q} \dot{p} + \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Donde la última expresión es una combinación de las ecuaciones 3.16 y 3.17, en algunos casos se supone que K_s es muy grande, de manera que $\frac{1}{K_s} \rightarrow 0$.

En las siguientes secciones se presentará la formulación débil utilizando elementos de diferente orden de interpolación y de igual orden, haciendo especial énfasis en estos últimos.

3.5 Formulación u-p utilizando elementos de alto orden

Una fuente importante de inestabilidad numérica asociada al método de Galerkin, ocurre cuando se tiene alguna restricción de incompresibilidad, de manera que el uso de funciones de forma del mismo orden se manifestará en oscilaciones de las presiones. Estas oscilaciones se debe a que no se satisface la condición de Babuska - Brezzi [Babuska, 1971],[Brezzi & Pitkaranta, 1984] para formulaciones mixtas. Los análisis numéricos muestran que esta condición es satisfecha si el orden de interpolación para la presión de poros es un grado menor que los desplazamientos[Zienkiewicz & Wu, 1991]. A continuación se presentará la discretización espacial de las ecuaciones utilizando elementos de diferente orden.

3.5.1 Ecuación de Momento

La forma variacional de la ecuación de momento, está dada por:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3.21)$$

Multiplicando la ecuación 3.21 por la función vectorial \mathbf{v}^1 de prueba e integrando:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \nabla \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \rho \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega = 0$$

Pero

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\delta}_{ij} p$$

De manera que al reemplazar en la ecuación 3.21 obtenemos:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \boldsymbol{\delta}_{ij} \nabla p d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \rho \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega = 0 \quad (3.22)$$

Integrando por partes cada uno de los anteriores términos se tiene:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}') d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}' d\Omega - \int_{\Omega} \nabla (\mathbf{v} p) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} p d\Omega + \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega = 0 \quad (3.23)$$

El teorema de Green de la divergencia de un campo vectorial presenta la siguiente forma [Eriksson et al., 1996]:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

ó en notación indicial:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} d\Omega = \int_{\Gamma} v_k n_k d\Gamma$$

aplicando el teorema de Green en 3.23 se obtiene:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}') \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma}' d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{v} p \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} p d\Omega + \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega = 0 \quad (3.24)$$

Reorganizando términos se obtiene:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma}' d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} p d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{v} (\boldsymbol{\sigma}' - p) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.25)$$

Además:

$$p = N_j^p p_j$$

$$u_k = N_j^u u_{kj}$$

Siendo p_j la presión en el nodo j , u_{kj} el desplazamiento del nodo j en la dirección k , y N^u , N^p las funciones de forma del campo de desplazamientos y presiones, las cuales además son de diferente grado de interpolación con el fin de garantizar la condición BB ([Babuska, 1971], [Brezzi & Pitkaranta, 1984]).

$$\mathbf{v} = \left[\begin{pmatrix} N_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ N_2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_3 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} N_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ N_i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_i \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} N_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ N_n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_n \end{pmatrix} \right]$$

En notación indicial 3.25 se puede expresar como:

$$\int_{\Omega} \rho N_i^u N_j^u d\Omega \ddot{u}_{kj} + \int_{\Omega} \partial_k N_i^u \sigma'_{ki} d\Omega - \int_{\Omega} \partial_k N_i^u N_j^p p_j d\Omega = \int_{\Omega} \rho N_i^u b_j d\Omega + \int_{\Gamma} N_i^u (\sigma'_{ki} - p \delta_{ki}) n_k d\Gamma$$

La anterior ecuación se puede representar en forma matricial como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{P}(\mathbf{u}) - \mathbf{Q}\mathbf{p} = \mathbf{f}_u$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_{\Omega} \rho N_i^u N_j^u d\Omega && \text{(Matriz de masa)} \\ \mathbf{Q} &= \int_{\Omega} \partial_k N_i^u N_j^p d\Omega && \text{(Matriz de acoplamiento)} \\ \mathbf{P}(u) &= \int_{\Omega} \partial_k N_i^u \sigma'_{ki} d\Omega && \text{(Vector debido a la rigidez)} \\ \mathbf{f}_u &= \int_{\Omega} \rho N_i^u b_j d\Omega + \int_{\Gamma} N_i^u (\sigma'_{ki} - p \delta_{ki}) n_k d\Gamma && \text{(Vector de fuerzas)} \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \ddot{u}_{kj} && \text{(Aceleraciones nodales)} \\ \mathbf{p} &= p_j && \text{(Presiones nodales)} \end{aligned}$$

3.5.2 Ecuación de continuidad

Para este caso la ecuación esta dada por la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot \left[\mathbf{k} \nabla p - \rho_w \mathbf{k} \left(\mathbf{b} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) \right] + \frac{\dot{p}}{Q} = 0 \quad (3.26)$$

Multiplicando por una función de prueba q e integrando:

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} q \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla p) d\Omega + \int_{\Omega} q \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{k} \mathbf{b}) d\Omega - \int_{\Omega} q \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{k}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\dot{p}}{Q} d\Omega = 0 \quad (3.27)$$

Integrando por partes cada una de los anteriores términos se tiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} q \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} q \frac{\dot{p}}{Q} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (q \mathbf{k} \nabla p) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla q \mathbf{k} \nabla p d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \nabla (q \rho_w \mathbf{k} \mathbf{b}) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla q \rho_w \mathbf{k} \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(q \rho_w \mathbf{k} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla q \rho_w \mathbf{k} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Aplicando el teorema de Green:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} q \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\dot{p}}{Q} d\Omega - \int_{\Gamma} q \mathbf{k} \nabla p \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla q \mathbf{k} \nabla p d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} q (\rho_w \mathbf{k} \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla q \rho_w \mathbf{k} \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \left(q \rho_w \mathbf{k} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla q \rho_w \mathbf{k} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Tomando como función de test $q = \{N_1 N_2 \dots N_p\}$ los anteriores términos se pueden escribir mediante notación indicial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} q \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} d\Omega &= \int_{\Omega} N_i^p \partial_k N_j^u d\Omega \dot{u}_{kj} \\
\int_{\Omega} q \frac{\dot{p}}{Q} d\Omega &= \int_{\Omega} N_i^p \frac{(N_j^p \dot{p}_j)}{Q} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{N_i^p N_j^p}{Q} d\Omega \dot{p}_j \\
\int_{\Omega} \nabla q \mathbf{k} \nabla p d\Omega &= \int_{\Omega} \partial_k N_i^p k_{kl} \partial_l (N_j^p p_j) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \partial_k N_i^p k_{kl} \partial_l N_j^p d\Omega p_j \\
\int_{\Omega} \nabla q \rho_w \mathbf{k} \mathbf{b} d\Omega &= \int_{\Omega} \partial_k N_i^p \rho_w k_{kl} b_l d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \partial_k N_i^p k_{kl} \rho_w N_j b_{lj} d\Omega \\
\int_{\Omega} \nabla q \rho_w \mathbf{k} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega &= \int_{\Omega} \partial_k N_i^p \rho_w k_{kl} \left(N_j^u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{kj} \right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \partial_k N_i^p \rho_w k_{kl} N_j^u d\Omega \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right)_{kj}
\end{aligned}$$

Para el contorno se tiene que reordenando términos y pasándolos al lado derecho:

$$\int_{\Gamma} q \mathbf{k} \nabla p \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma} (q \rho_w \mathbf{k} \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(q \rho_w \mathbf{k} \mathbf{b} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

Finalmente la anterior ecuación se puede representar de la siguiente manera:

$$\mathbf{Q}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{S} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{H} \mathbf{p} + \mathbf{G} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{f}^p$$

Siendo:

$$\mathbf{Q}^T = \int_{\Omega} N_i^p \partial_k N_j^u d\Omega \quad (\text{Matriz de acoplamiento transpuesta})$$

$$\mathbf{S} = \int_{\Omega} \frac{N_i^p N_j^p}{Q} d\Omega \quad (\text{Matriz de compresibilidad})$$

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} \partial_k N_i^p k_{kl} \partial_l N_j^p d\Omega \quad (\text{Matriz de permeabilidad})$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} \partial_k N_i^p \rho_w k_{kl} N_j^u d\Omega \quad (\text{Matriz de flujo dinámico})$$

$$\mathbf{f}^p = \int_{\Omega} q \mathbf{k} \nabla p \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma} (q \rho_w \mathbf{k} \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(q \rho_w \mathbf{k} \mathbf{b} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

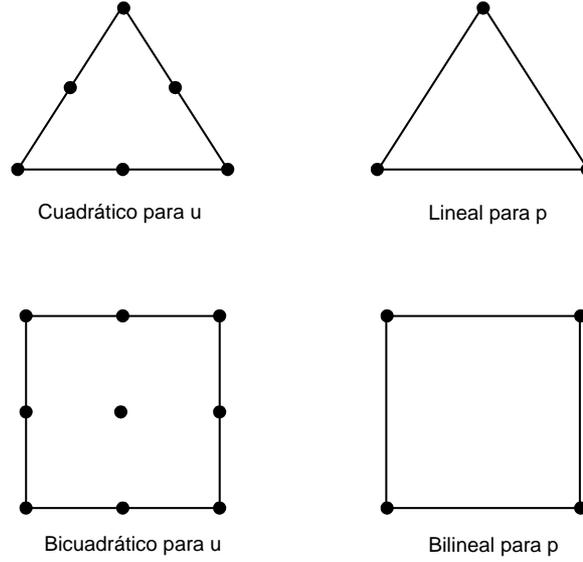


Figura 3.1: Elementos utilizados en formulación u-p, para diferente grado de interpolación.

Es importante anotar que la elección de las funciones de forma N_j^u y N_j^p deben ser de continuidad C_0 . Para tal caso, Chan [Chan, 1988], recomienda los siguientes elementos (Figura 3.1):

- Elemento triángulo cuadrático de 6 nodos para los desplazamientos y elemento triángulo lineal de 3 nodos para la presión del agua.
- Elemento cuadrilátero bicuadrático de 9 nodos para los desplazamientos y elementos cuadrilátero bilineal para la presión del agua.

3.5.3 Discretización Temporal

Obtenida la discretización espacial de la formulación u-p, se hace necesario integrar en el tiempo las dos ecuaciones diferenciales para completar la solución numérica. Para ello se ha utilizado el esquema de Newmark [Newmark, 1959], que consiste en discretizar las derivadas temporales de manera similar al de las diferencias finitas. Para tal fin, se supone que se conocen las variables en el tiempo n y se desea calcularlas en el tiempo $n + 1$, de manera que las ecuaciones algebraicas se pueden expresar como :

$$\mathbf{M}^{n+1} \ddot{\mathbf{u}}^{n+1} + \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' d\Omega_{n+1} - \mathbf{Q}^{n+1} \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{f}_u^{n+1} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{Q}^{\mathbf{T}^{n+1}} \dot{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{H}^{n+1} \mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{S}^{n+1} \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{f}_p^{n+1} \quad (3.31)$$

Ahora bien, la relación entre sucesivos valores de las variables se puede calcular como :

$$\dot{\mathbf{u}}^{n+1} = \dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^n + \beta_1 \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n \quad (3.32)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}^n + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n \quad (3.33)$$

$$\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^n + \Delta t \dot{\mathbf{p}}^n + \theta \Delta t \Delta \dot{\mathbf{p}}^n \quad (3.34)$$

Donde :

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}}^n = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \quad (3.35)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{p}}^n = \dot{\mathbf{p}}^{n+1} - \dot{\mathbf{p}}^n \quad (3.36)$$

Corresponden a las incógnitas del problema, mientras que β_1, β_2 y θ son parámetros que varían entre 0 y 1. Para asegurar la estabilidad incondicional en la solución numérica deben cumplirse las siguientes condiciones [Chan, 1988] :

$$\begin{aligned} \beta_2 &\geq \beta_1 \geq \frac{1}{2} \\ \theta &\geq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Si se supone que las ecuaciones de las expresiones 3.30 y 3.31 son válidas en el tiempo $n + 1$ y reemplazando las ecuaciones 3.32, 3.33 y 3.34 para colocar todas las variables en función de valores en el tiempo n , las incógnitas que quedan son $\Delta \ddot{\mathbf{u}}$ y $\Delta \dot{\mathbf{p}}$. Operando se obtiene :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_u^{n+1} &= \mathbf{M}^{n+1} \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{P}(\mathbf{u}^{n+1}) - \mathbf{Q}^{n+1} \theta \Delta t \Delta \dot{\mathbf{p}}^n - \mathbf{F}_u^{n+1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_p^{n+1} &= \mathbf{Q}^{T(n+1)} \beta_1 \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{H}^{n+1} \theta \Delta t \Delta \dot{\mathbf{p}}^n + \mathbf{S}^{n+1} \Delta \dot{\mathbf{p}}^n - \mathbf{F}_p^{n+1} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Siendo :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_u^{n+1} &= \mathbf{f}_u^{n+1} - \mathbf{M}^{n+1} \ddot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{Q}^{n+1} (\mathbf{p}^n + \Delta t \dot{\mathbf{p}}^n) \\ \mathbf{F}_p^{n+1} &= \mathbf{f}_p^{n+1} - \mathbf{Q}^{T(n+1)} (\dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^n) - \mathbf{H}^{n+1} (\mathbf{p}^n + \Delta t \dot{\mathbf{p}}^n) - \mathbf{S}^{n+1} \dot{\mathbf{p}}^n \end{aligned} \quad (3.39)$$

Donde

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}^{n+1}) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' d\Omega + \mathbf{P}(\mathbf{u}^n) \quad (3.40)$$

3.5.4 Estrategia Utilizada para la solución de la ecuación no lineal

Por simplicidad, un sistema de ecuaciones no lineales (ecuación 3.38) se puede expresar de la siguiente manera [Vila et al., 2001] :

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$\text{Donde } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \\ \Delta \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_u \\ \mathbf{G}_p \end{bmatrix}$$

En cada paso de tiempo la ecuación deberá ser resuelta por un esquema iterativo hasta que se alcance una cierta tolerancia. Si asumimos que la solución en la iteración "n" es conocida, se cumple :

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + d\mathbf{x}^n$$

La cual satisface:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}^{n+1}) = \mathbf{0}$$

Si expandimos la expresión anterior en series de Taylor y despreciando los términos de orden superior, se tiene :

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}^{n+1}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}^n) + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x}^n)}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x}_n + \frac{\partial^2 \mathbf{G}(\mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}^2} (d\mathbf{x}_n)^2 + \dots = \mathbf{0}$$

ó

$$\mathbf{J} d\mathbf{x}_i = -\mathbf{G}(\mathbf{x}_i) \quad (3.41)$$

Donde $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \big|_{x=x_i}$, corresponde a la matriz del Jacobiano, la cual presenta la siguiente forma:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_u}{\partial \Delta \ddot{\mathbf{u}}} & \frac{\partial \mathbf{G}_u}{\partial \Delta \dot{\mathbf{p}}} \\ \frac{\partial \mathbf{G}_p}{\partial \Delta \ddot{\mathbf{u}}} & \frac{\partial \mathbf{G}_p}{\partial \Delta \dot{\mathbf{p}}} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Los términos del Jacobiano son:

$$\frac{\partial \mathbf{G}_u}{\partial \Delta \ddot{\mathbf{u}}} = \mathbf{M} + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 \mathbf{K}$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_u}{\partial \Delta \dot{\mathbf{p}}} = -\mathbf{Q} \theta \Delta t$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_p}{\partial \Delta \ddot{\mathbf{u}}} = \mathbf{Q}^T \beta_1 \Delta t$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_p}{\partial \Delta \dot{\mathbf{p}}} = \mathbf{H} \theta \Delta t + \mathbf{S}$$

Luego la matriz del Jacobiano se convierte en:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \theta \Delta t \\ \mathbf{Q}^T \beta_1 \Delta t & \mathbf{H} \theta \Delta t + \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

La ecuación finalmente queda :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \theta \Delta t \\ \mathbf{Q}^T \beta_1 \Delta t & \mathbf{H} \theta \Delta t + \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(\Delta \ddot{\mathbf{u}}) \\ d(\Delta \dot{\mathbf{p}}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_u \\ \mathbf{G}_p \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

La anterior matriz es asimétrica, pero puede hacerse simétrica mediante la simple multiplicación de un escalar en la segunda fila :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \theta \Delta t \\ -\mathbf{Q}^T \theta \Delta t & -\frac{\theta}{\beta_1} (\mathbf{H} \theta \Delta t + \mathbf{S}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(\Delta \ddot{\mathbf{u}}) \\ d(\Delta \dot{\mathbf{p}}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_u \\ -\frac{\theta}{\beta_1} \mathbf{G}_p \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Nótese que siendo simétrica la anterior matriz, esta simetría se mantendrá para el caso de materiales con regla de flujo asociado. Sin embargo para el caso en que la regla de flujo sea no asociada la matriz de rigidez será no simétrica.

El proceso de cálculo queda ahora definido globalmente: se suponen conocidas las variables en el tiempo "0" (condiciones iniciales) y se avanza en incrementos de tiempo prefijados resolviendo para cada incremento de tiempo un sistema de ecuaciones no lineal representado por (3.45)

3.6 Formulación u-p utilizando elementos de igual orden de interpolación

3.6.1 Antecedentes

Como se anotó en la sección 3.5, una fuente importante de inestabilidad numérica asociada al método de Galerkin ocurre cuando se tiene alguna restricción de incompresibilidad asociado a uno de los campos vectoriales a resolver. Para el caso de suelos, donde la compresibilidad del fluido y la permeabilidad del esqueleto es pequeña, el sistema de ecuaciones discretizada puede contener elementos de la submatriz (p, p) cercanos a cero. En estos problemas se debe cumplir una condición de estabilidad sobre los espacios funcionales donde se interpolará las soluciones de los diferentes campos (Condición de Babuska Brezzi [Babuska, 1971],[Brezzi & Pitkaranta, 1984]), si se usa el método de Galerkin. Este genera el uso de elementos mixtos, los cuales fuerzan de forma muy precisa la incompresibilidad, pero tienen dos desventajas al intentar ser utilizadas para resolver problemas a gran escala: La primera es que uno de los campos debe ser interpolado usando elementos de alto orden, lo cual aumenta el ancho de banda de la matriz del sistema de ecuaciones finales y son costosos de integrar. La segunda es que el sistema resultante este mal condicionado, por lo cual el uso del solvers iterativos (GMRES, Gradiente Conjugado Precondicionado, etc) es casi prohibitivo. En problemas donde se necesiten varios miles de elementos(problemas 3D en Geotecnia) el uso de un solver directo puede ser inviable: El solver directo más barato (LU con almacenamiento en perfil) es de orden $n^2 \log(n)$ siendo n el número de incógnitas a resolver. Debido a lo anterior, el uso de los métodos de estabilización para la restricción de incompresibilidad es imprescindible si se desea abordar problemas de gran tamaño.

La mayoría de estos métodos pasan por añadir una matriz laplaciana (de segundo o de cuarto orden) a la restricción de incompresibilidad, ya sea partiendo de la forma discretizada (esquemas heredados de formulaciones en diferencias finitas [Lohner, 2001]) o modificando la forma variacional del problema (esquemas de Petrov-Galerkin [Codina & Soto, 1997])

3.6.2 Técnicas de Estabilización que permiten la utilización de elementos de igual orden de interpolación

En la sección anterior se mostró que para el caso no lineal se obtenía el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \frac{1}{2}\Delta t^2 \beta_2 \mathbf{K}_T & -\mathbf{Q}\theta\Delta t \\ \mathbf{Q}^T \beta_1 \Delta t & \Delta t \theta \mathbf{H} + \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(\Delta \ddot{\mathbf{u}}) \\ d(\Delta \dot{\mathbf{p}}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_u \\ \mathbf{G}_p \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Se ha verificado que este algoritmo es incondicionalmente estable cuando $\beta_1 \geq \frac{1}{2}$, $\beta_2 \geq \frac{1}{2}$ y, $\theta \geq \frac{1}{2}$, para el caso implícito. Para $\beta_2 = 0$, $\beta_1 \geq \frac{1}{2}$ y $\theta \geq \frac{1}{2}$ se obtiene una solución directa explícita-implícita con estabilidad condicional.

Cuando se alcanza una situación estacionaria en condición no drenada - incompresible ($k \rightarrow 0$, $Q \rightarrow \infty$), la ecuación toma la siguiente forma ($d(\Delta \ddot{\mathbf{u}}) = 0$):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Es claro que si el número de incógnitas de presión n_p es mayor o igual al número de incógnitas de velocidad n_u , el campo de velocidades puede obtenerse de las ecuaciones provenientes de la condición

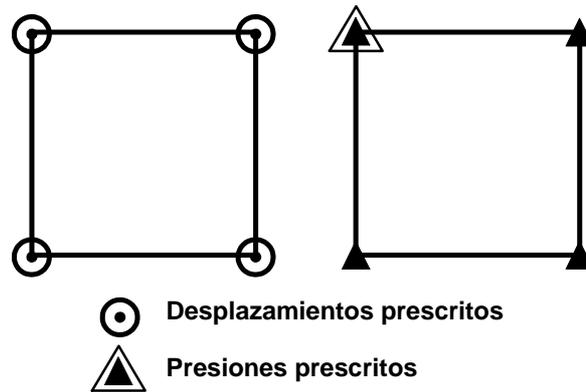


Figura 3.2: Elemento cuadrilátero con igual orden de interpolación para los desplazamientos y las presiones [Pastor et al., 1997]

de incompresibilidad $\mathbf{Q}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}$, o lo que es igual, puede encontrarse un campo de presiones que cumpla $\mathbf{Q}\mathbf{p} = \mathbf{0}$ sin importar el campo de velocidades. Por consiguiente el sistema 3.47 no tiene solución única. Esto obliga al uso de elementos mixtos que cumplan BB (elementos div-estables).

Una condición necesaria pero no suficiente para que un elemento sea div-estable, es que para cualquier partición de elementos finitos, el número de incógnitas de velocidad después de prescribir condiciones de contorno tipo Dirichlet en toda la frontera, sea mayor que el número de incógnitas de presión (n_p): Con el fin de ilustrar la aplicación de esta condición, ilustraremos un par de ejemplos presentados por Pastor [Pastor et al., 1997].

En la figura 3.2 se ilustra un elemento cuadrilátero bilineal, el cual se utiliza para los nodos de desplazamiento y presión. Si prescribimos los desplazamientos sobre el contorno y uno de los nodos de presión, se obtiene cero grados de libertad para los desplazamientos y tres grados de libertad para las presiones. Este tipo de elemento no cumple la condición $n_u > n_p$ y debido a ello, la solución generada por el método de Galerkin puede contener oscilaciones numéricas, que no tienen nada que ver con la física del problema [Soto & Codina, 1997]. Un ejemplo de las oscilaciones espúreas que se presentan cuando se utilizan elementos de igual orden de interpolación se ilustra en la figura 3.3. El problema analizado corresponde a una columna de suelo de 30 metros de espesor, en la que se aplica una carga periódica en la superficie; los autores asumen una permeabilidad de 10^{-7} m/s, con el fin de garantizar una condición no drenada. El resultado final es que en la medida en que se incrementa la incompresibilidad $\left[\frac{1}{Q} = \frac{n}{K_f} + \frac{(1-n)}{K_s} \right]$, se incrementan las oscilaciones (figura 3.3 b). Por otro lado, este fenómeno no se presenta al utilizar elementos de diferente orden de interpolación.

Los autores analizan también el caso en que se utilizan el elemento triángulo, siendo cuadrático para los desplazamientos y lineales para la presión (figura 3.4). Una aplicación en el uso de los anteriores elementos se ilustra en la figura 3.5, donde al imponer restricción en desplazamientos de los nodos del contorno y un nodo de presión se obtiene 14 grados de libertad para los desplazamientos y 6 grados de libertad para la presión, y por tanto se cumple la condición ($n_u = 14$) $>$ ($n_p = 6$). Es posible sin embargo evitar el uso de elementos mixtos (caros computacionalmente) para problemas incompresibles, mediante la utilización de métodos de estabilización. La mayoría de dichos métodos se basan en modificar la forma variacional (o débil) discreta, mediante la adición de algún tipo de Laplaciano discreto a la restricción de incompresibilidad.

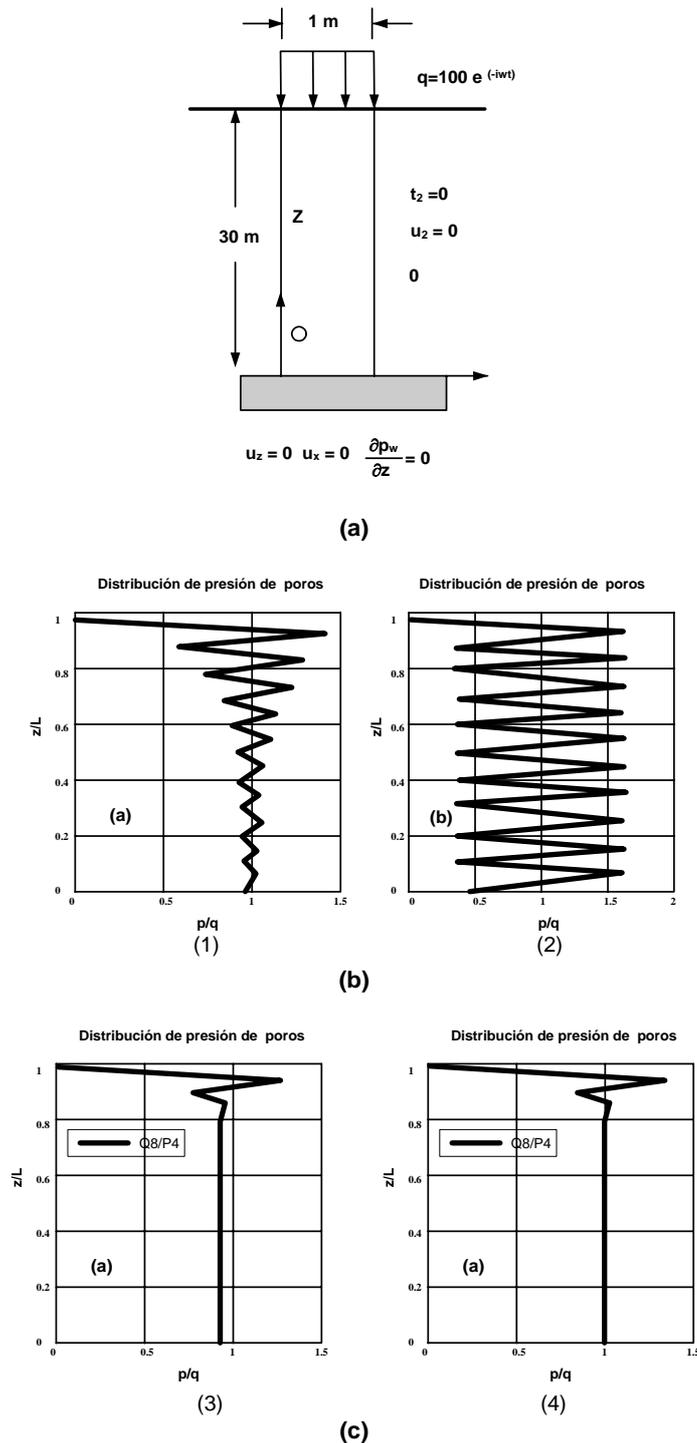


Figura 3.3: a) Condiciones de frontera para una columna de suelo saturada con carga superficial periódica ($q = t_y = 100e^{-i\omega t}$) b) Amplitud de la presión de poros para el problema de la columna de suelo usando 20 elementos Q4P4 con $k = 10^{-7}m/s$ y (1) $Q^* = 10^4MPa$ (2) $Q^* = 10^9MPa$ c) Amplitud de la presión de poros para el problema de la columna de suelo usando 20 elementos Q8P4 con $k = 10^{-7}m/s$ y (3) $Q^* = 10^4MPa$ (4) $Q^* = 10^9MPa$ [Pastor et al., 1997]

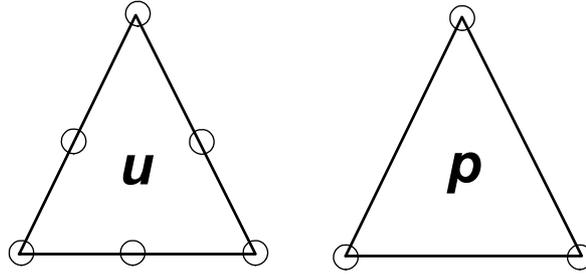


Figura 3.4: Elemento cuadrático para los desplazamientos y lineal para la presión [Pastor et al., 1997]

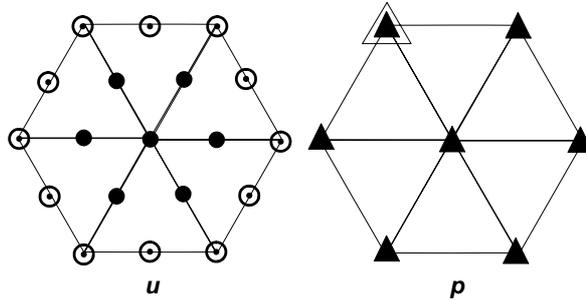


Figura 3.5: Prueba para una malla de seis elementos T6P3 [Pastor et al., 1997]

Dicho Laplaciano puede derivarse de observar qué pasa en el problema de Navier-Stokes continuo (ecuaciones 3.48 y 3.49) si se toma la divergencia de la ecuación de momento (ecuación 3.48) y se aplica la incompresibilidad del flujo $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

$$-\mu \nabla^2 \dot{\mathbf{u}} + \nabla \mathbf{p} = \rho \mathbf{f} \tag{3.48}$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0 \tag{3.49}$$

Donde μ es la viscosidad dinámica del fluido.

Básicamente se obtiene la siguiente ecuación de Poisson para la presión [Soto & Löhner, 2001]:

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot \mathbf{f} \text{ en } \Omega \tag{3.50}$$

con la siguiente condición de contorno:

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{f} + \mu \nabla^2 \dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} \text{ sobre } \Gamma \tag{3.51}$$

El éxito de la mayoría de métodos de estabilización para problemas incompresibles, se debe a que de una forma u otra la restricción de incompresibilidad es modificada usando 3.50. A continuación se hace un breve recuento de algunos métodos existentes.

Método GLS (Galerkin Least Square)

Este método introducido por Hughes y sus colaboradores [Hughes et al., 1986], permite usar elementos de igual orden interpolación para la velocidad y la presión en problemas de fluidos (flujo incompresible),

lo cual simplifica la implementación y ahorra tiempo de cálculo y memoria de computador. El método consiste en añadir a la forma débil obtenida del método de Galerkin, la integral sobre el interior de los elementos del operador de Stokes aplicada a las funciones de prueba (\mathbf{v}, q) , multiplicando por el residuo de las ecuaciones diferenciales y por una matriz de tiempos intrínsecos τ definida para cada elemento. El problema discreto utilizando funciones de prueba para las presiones continuas, se lee entonces como: Encontrar $u \in V_h$ y $p \in Q_h$, tal que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nabla \dot{\mathbf{u}} \nabla \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} q d\Omega \\ &+ \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} [\tau_1^e (-\mu \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla q) \cdot (-\mu \nabla^2 \dot{\mathbf{u}} + \nabla p - \mathbf{f}) + \tau_2^e (\nabla \cdot \mathbf{v}) \cdot (\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}})] d\Omega \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} &\in \mathbf{V}_h \\ \forall q &\in Q_h \end{aligned}$$

La estructura matricial del sistema resultante es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 & -\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_1^t + \mathbf{G}_2^t & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_p \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Donde los subíndices 1 y 2 se refieren a los términos procedentes de Galerkin y a los términos de mínimos cuadrados, respectivamente. \mathbf{K}_1 y \mathbf{K}_2 son las matrices resultantes del término viscoso, \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 son las matrices de presión y \mathbf{G}_1^t y \mathbf{G}_2^t son las matrices resultantes de la condición de incompresibilidad. Como se mencionó anteriormente la estabilización del método GLS sobre la incompresibilidad, y por consiguiente sobre la presión, viene dada por la matriz \mathbf{L}_2 , la cual es una matriz laplaciana discreta multiplicada por el parámetro τ_1 .

Los parámetros τ_1 y τ_2 se diseñan con el fin de obtener un esquema numérico estable y con óptima convergencia. Se demuestra que tomando:

$$\tau_1^e = \frac{\beta h^{e2}}{4\mu} \quad (3.54)$$

Se cumplen dichos requerimientos [Franca & Stenberg, 1991], [Hughes et al., 1986]. En la anterior ecuación h^e es el tamaño del elemento y β es una constante que afecta la exactitud del método, más no su estabilidad. Los valores óptimos se estiman a partir de un análisis de error unidimensional, y son 1/3 para elementos lineales y 1/9 para cuadráticos [Codina, 1992].

Para el caso de suelos saturados, sólo es necesario sumar a la forma débil de la ecuación de continuidad, el operador diferencial de la presión en la ecuación de equilibrio aplicado a las funciones de prueba (test), multiplicado por el residuo de la misma ecuación de equilibrio, y por un tiempo intrínico τ . La ecuación de continuidad final queda como:

$$\int_{\Omega} \rho q \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \int_{\Omega} \rho \nabla q \cdot \mathbf{k}_w \cdot \nabla p + \int_{\Omega} \frac{\rho}{Q} q \frac{\partial p}{\partial t} + \int_{\Omega} \rho \nabla q \cdot \mathbf{k}_w (\mathbf{b} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}) - \int_{\Gamma} q \rho \bar{q} + \int_{\Omega_{int}} \tau \nabla q \cdot R(\mathbf{u}, p) = 0 \quad (3.55)$$

donde ρ , \mathbf{k}_w y Q son la densidad, el tensor de permeabilidad y la compresibilidad del material, respectivamente. q es la función de test, \bar{q} es el flujo a través del contorno a Γ , \mathbf{u} el campo de desplazamientos,

\mathbf{b} la aceleración aplicada (ej. el acelerograma de un sismo) y p la presión. El operador $\int_{\Omega_{\text{int}}}$ se refiere a la integral en el interior de cada elemento (algunos de los términos no están definidos en el contorno de los elementos). Los primeros cinco términos son la forma estándar de Galerkin, y el último es el término estabilizador o de mínimos cuadrados (GLS). La forma diferencial R se refiere al residual de la ecuación de momento. Es decir:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, p) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \nabla p - \rho \mathbf{b} \quad (3.56)$$

La estructura matricial final del problema queda entonces como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{G}_1^t + \mathbf{G}_2^t & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_p \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

La estabilización viene dada por la submatriz \mathbf{L} . El resto de términos adicionales a los de Galerkin deben adicionarse para conservar la consistencia de la formulación. Ésto es, para que la solución del sistema diferencial original siga siendo solución del problema discreto.

El método GLS es muy efectivo para estabilizar problemas incompresibles. Sin embargo presenta dos grandes desventajas: La primera es que es tedioso desde el punto de vista de programación debido a que se deben añadir muchos términos nuevos. El otro gran inconveniente es cuando se utilizan elementos de bajo orden (lineales): Algunos de los términos de R contienen derivadas segundas en el espacio, las cuales no pueden ser representadas de manera directa por funciones de forma lineales. La mayoría de los autores tiende entonces a despreciar estos términos, creando una inconsistencia en el problema discretizado: La solución del problema continuo no satisface la forma discreta final.

Debido a tal inconveniente, se ha desarrollado un método que, aunque basado en el mismo concepto, mantiene la consistencia en el problema discreto. Dicho método ha sido llamado por sus autores *Orthogonal Subgrid Stabilization* OSS [Codina & Blasco, 2000], y es expuesto más adelante.

Dentro de los trabajos pioneros en la utilización de técnicas de estabilización en dinámica de suelos se destaca a Zienkiewicz [Zienkiewicz et al., 1993], quien mediante un algoritmo explícito, realiza un suavizado antes de la discretización espacial con el fin de evitar el uso de formulaciones mixtas en el límite incompresible. El esquema desarrollado por los autores se ha denominado "esquema H^* ", y la matriz a resolver para el caso estacionario toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T & (\mathbf{H}^* - \mathbf{Q}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}) \gamma \Delta t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u \\ f_p^* \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Siendo

$$\mathbf{H}^* = \int (\nabla N_p)^T k (\nabla N_p) d\Omega \quad (3.59)$$

Donde k es la permeabilidad dinámica y γ corresponde al coeficiente en el esquema de Newmark ($\gamma = 1/2$). Sin embargo los autores detectaron grandes oscilaciones cuando el problema era muy no lineal o cuando la diferencia en el tamaño de los elementos era muy grande.

Posteriormente Zienkiewicz [Zienkiewicz et al., 1994], propone una nueva técnica de estabilización denominado por los autores como "método α ". El método consiste básicamente en adicionar a la ecuación de continuidad (3.26) la divergencia de la derivada temporal de la ecuación de momento, multiplicada por una constante de ajuste α .

$$\left[\alpha \nabla \cdot \left\{ \frac{d}{dt} \left(\nabla \cdot \sigma' - \nabla p + \rho b - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right\} \right] \quad (3.60)$$

Después de aplicar Galerkin, para el caso estacionario no drenado, la matriz toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T - \mathbf{L} & \mathbf{H}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_p^* \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^* &= \int_{\Omega} (\nabla q_p) \alpha \nabla q d\Omega \\ \mathbf{L} &= \int_{\Omega} \nabla q \alpha \Omega \\ \alpha &= \frac{\alpha_0 \Delta t_{crit}^2}{\rho} \\ \Delta t_{crit} &= \frac{h}{V_p} \\ V_p &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \end{aligned}$$

Siendo Δt_{crit} , el paso de tiempo crítico, h el tamaño del elemento, V_p velocidad de ondas p y λ y μ las constantes de Lamé y α_o es una constante.

Pastor [Pastor et al., 1997], presenta un método relativamente sencillo en el dominio de la frecuencia utilizando elementos de igual orden de interpolación. Para ello los autores asumen que las fuerzas de cuerpo son nulas al aplicar la divergencia a la ecuación de momento. Finalmente los autores encuentran que para estabilizar la ecuación de continuidad es necesario adicionarle el siguiente término una vez discretizada:

$$\alpha (\mathbf{H}^* - w^2 \mathbf{S}^*)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^* &= \int_{\Omega} \left(\frac{Q^* + \lambda + 2\mu}{Q^*} \right) \nabla^T N^p \cdot \nabla N^p d\Omega \\ \mathbf{S}^* &= \int_{\Omega} \frac{\rho}{Q^*} N^{pT} \cdot N^p d\Omega \end{aligned}$$

Donde

$$\frac{1}{Q^*} = \frac{n}{k_w} + \frac{1-n}{k_s}.$$

Para mostrar la eficiencia de la estabilización propuesta, los autores analizan el caso de una columna de suelo utilizando elementos estabilizados y sin estabilizar (ver figura 3.3).

Con relación al parámetro α los autores lo definen como:

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\Delta t_{crit}}{\rho} \quad (3.62)$$

3.6. FORMULACIÓN U-P UTILIZANDO ELEMENTOS DE IGUAL ORDEN DE INTERPOLACIÓN 41

Siendo Δt_{crit} es el paso del tiempo crítico dado por la relación entre V_p y el tamaño del elemento h y α_0 es una constante que fluctúa entre 0.25-0.50.

Entre otros esquemas muy utilizados se encuentra el método de pasos fraccionados, el cual es utilizado para la condición estacionaria obteniendo la siguiente expresión [Pastor et al., 1997]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q}^T & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_p \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

Donde la matriz diagonal \mathbf{A} presenta la siguiente forma:

$$\mathbf{A} = \theta_1 \theta_2 \Delta t^2 \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{H}^* - \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{Q} \right)$$

Siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_u &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u d\Omega \\ \mathbf{H}^* &= \int_{\Omega} \nabla^T \mathbf{N}_p \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \end{aligned}$$

Nótese que la matriz \mathbf{A} corresponde al término estabilizador. θ_1 y θ_2 son los coeficientes de Newmark.

Huang [Huang et al., 2001], propone un nuevo algoritmo para el caso estacionario, con el fin de evitar la restricción de Babuska-Brezzi; para tal fin, los autores introducen un algoritmo incondicionalmente estable en bloque implícito-implícito (staggered implicit-implicit algorithm). De nuevo, al ejecutar la discretización espacial y al aplicar el procedimiento estándar de Galerkin llega a las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^* = (\mathbf{f}_s^*)_{n+1} - \mathbf{K} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^p - \mathbf{Q} \dot{\mathbf{p}}_1^p \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} + \mathbf{H} \theta \Delta t + \mathbf{H}^* \gamma \theta \Delta t^2) \bar{\mathbf{p}}_{n+1} &= (\mathbf{f}_p)_{n+1} - \mathbf{H}^* \dot{\mathbf{p}}_2^p \gamma \Delta t \\ &\quad - \mathbf{Q}^T (\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^p + \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^* \gamma \Delta t) - \mathbf{H} \bar{\mathbf{p}}_{n+1}^p \end{aligned} \quad (3.65)$$

y

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' d\Omega \right)_{n+1} = (\mathbf{f}_s)_{n+1} - \mathbf{Q} (\bar{\mathbf{p}}_{n+1}^p + \theta t \dot{\mathbf{p}}_{n+1}^p) \quad (3.66)$$

o para un problema lineal elástico

$$(\mathbf{M} + \mathbf{K} \beta \Delta t^2) \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = (\mathbf{f}_s)_{n+1} - \mathbf{K} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^p - \mathbf{Q} (\bar{\mathbf{p}}_{n+1}^p + \theta t \dot{\mathbf{p}}_{n+1}^p) \quad (3.67)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^* &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{1}{\rho} (\nabla \mathbf{N}_p) d\Omega \\ (\mathbf{f}_s^*)_{n+1} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{b}_{n+1} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \tilde{\mathbf{t}}_{n+1}^l d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \mathbf{n} p_1 d\Gamma \\ &\quad (\tilde{t}_i^l = \sigma'_{ij} n_j = \tilde{t}_i^l) \end{aligned}$$

$$(\mathbf{f}_p)_{n+1} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \bar{k} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \rho_f \mathbf{b}_{n+1} d\Omega + \left(\int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial n} d\Gamma \right) \gamma \Delta t$$

$$(p_2 = p_2^p + \dot{p}_{n+1} \theta \Delta t)$$

y $\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}$ es asociado a $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^p$

El proceso de cálculo es el siguiente:

Paso 1: resolver \bar{u}_{n+1}^* explícitamente usando la ecuación 3.64

Paso 2: resolver \bar{p}_{n+1} implícitamente usando la ecuación 3.65

Paso 3: resolver \bar{u}_{n+1} implícitamente usando la ecuación 3.67

Finalmente para el caso estacionario obtienen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q}^T - \mathbf{L}_s & \mathbf{H}^* \gamma \delta \Delta t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p^u \\ \mathbf{f}_p^* \end{bmatrix}$$

Donde

$$\mathbf{L}_s = \mathbf{Q}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \gamma \delta \Delta t^2$$

El anterior esquema evita la restricción mixta cuando $0 \leq \delta \leq 1$.

Método OSS (Orthogonal Subgrid Stabilization)

Como se mencionó anteriormente este esquema se basa en el mismo concepto introducido por el GLS, pero manteniendo la consistencia en el problema discreto. Este método fue introducido en forma fraccionada por Codina [Codina, 2001], [Codina & Blasco, 2000], con el nombre de Orthogonal Subgrid Stabilization (OSS) y modificado por Soto [Soto & Löhner, 2001], [Soto et al., 2002] para hacerlo monolítico. La formulación monolítica presentada por Soto [Soto & Löhner, 2001], [Soto et al., 2001], básicamente consiste en estabilizar la ecuación de continuidad mediante la adición de un término estabilizador (dada por la divergencia de la ecuación de equilibrio) más un preconditionamiento, es decir:

Galerkin + Estabilización + Precondicionamiento

Para su exposición se define primero el gradiente de presión proyectado (o suavizado) $\boldsymbol{\xi}^p = \Pi(\nabla p)$ como [Codina, 2001], [Soto et al., 2001]:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\xi}^p &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla p \\ M^L \boldsymbol{\xi}^p &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla p \\ \xi_{k,i}^p &= \frac{\int_{\Omega} N_i \partial_k p d\Omega}{M_{ii}^L} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Siendo \mathbf{v} la función de test vectorial y M_{ii}^L la matriz de masa diagonal (lumped). Además definamos $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p)$ como:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, p) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \nabla p - \rho \mathbf{b}$$

Estabilización Como se ilustró en la sección anterior, estamos interesados en resolver mediante elementos finitos las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \nabla p = \rho \mathbf{b} \quad (3.69)$$

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla p + \frac{\partial p}{\partial t} \frac{1}{Q} + \rho_w \mathbf{k} \left(\mathbf{b} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (3.70)$$

Como se mencionó anteriormente, la ecuación a estabilizar es la de continuidad, la cual integraremos y le adicionaremos la divergencia de la ecuación de momento ($\int_{\Omega} \tau q \nabla \cdot \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \nabla p - \rho \mathbf{b} \right) d\Omega$) obteniéndose:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla q \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla p d\Omega + \int_{\Omega} \frac{q}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} q \rho_w \mathbf{k} \left(\mathbf{b} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) d\Omega \\ - \int_{\Omega} \tau q \nabla \cdot \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \nabla p - \rho \mathbf{b} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

Siendo τ el tiempo intrínseco, el cual dependiendo del tipo de problema podrá variar. La ecuación de equilibrio 3.69 se puede expresar como:

$$\nabla p = -\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{b} \quad (3.72)$$

Al proyectar el gradiente de presión sobre el espacio de elementos finitos la ecuación 3.72 queda:

$$\boldsymbol{\xi}^p = \Pi(\nabla p) = -\Pi \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) + \Pi(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}') + \Pi(\rho \mathbf{b}) \quad (3.73)$$

Por tanto:

$$\nabla p - \boldsymbol{\xi}^p = \nabla p + \Pi \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) - \Pi(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}') + \Pi(\rho \mathbf{b}) \quad (3.74)$$

Pero si $\rho \ddot{\mathbf{u}}$, $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}'$ y $\rho \mathbf{b}$ pertenecen al espacio de elementos finitos, la siguiente aseveración es válida [Soto & Löhner, 2001],[Soto et al., 2001]:

$$\begin{aligned} \Pi \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) &\simeq \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \\ \Pi(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}') &\simeq \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' \\ \Pi(\rho \mathbf{b}) &\simeq \rho \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Por tanto reemplazando 3.75 en 3.74 se obtiene:

$$\nabla p - \boldsymbol{\xi}^p \equiv \nabla p + \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \rho \mathbf{b} \equiv R(\mathbf{u}, p) \quad (3.76)$$

Es decir:

$$R(\mathbf{u}, p) = \nabla p - \boldsymbol{\xi}^p \quad (3.77)$$

El método OSS entonces consiste en reemplazar $R(\mathbf{u}, p)$ en 3.55 por 3.77, quedando la ecuación débil de continuidad como:

$$\int_{\Omega} \rho q \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \int_{\Omega} \rho \nabla q \cdot \mathbf{k}_w \cdot \nabla p + \int_{\Omega} \frac{\rho}{Q} q \frac{\partial p}{\partial t} + \int_{\Omega} \rho \nabla q \cdot \mathbf{k}_w (\mathbf{b} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}) - \int_{\Gamma} q \rho \bar{q} + \sum_{e=1}^{\eta_{el}} \int_{\Omega_{int}} \tau \nabla q \cdot (\nabla p - \boldsymbol{\xi}^p) = 0 \quad (3.78)$$

El nombre OSS deriva del hecho que $\nabla p - \boldsymbol{\xi}_p$ es la resta del gradiente de presiones real, y su proyección sobre el espacio de elementos finitos. En ese sentido es la proyección ortogonal del gradiente de presiones sobre dicho espacio. La consistencia de la forma (3.78) es directa: Se está añadiendo a los términos de Galerkin un término proporcional al gradiente de presiones, y se esta restando el mismo término calculado de otra forma ($\boldsymbol{\xi}^p$ es el mismo gradiente de presiones pero suavizado). Si se toma un problema uni-dimensional, se calcula el estencil² del último término de 3.78 y se utilizan series de Taylor alrededor de un nodo arbitrario. Se demuestra fácilmente que [Soto & Löhner, 2001]:

$$\int_{\Omega_{int}} \tau \nabla q \cdot (\nabla p - \boldsymbol{\xi}_p) d\Omega_{int} = \frac{3}{12} h^4 \frac{d^4 p_k}{dx^4} + O(h^6)$$

Ésto quiere decir que el término añadido es un término de cuarto orden (proporcional a h^4). La aproximación de Galerkin usando elementos lineales es de segundo orden (proporcional a h^2), por lo cual el nuevo término no daña la exactitud del problema de Galerkin sin estabilizar.

Sólo queda por definir la forma de τ . En problemas de flujo τ es el tiempo local. Ésto es, el tiempo que una partícula salta una hilera de elementos (así lo dicta el análisis de convergencia y estabilidad del problema débil contínuo). Una extrapolación directa al problema de suelos saturados, es tomar el tiempo que las ondas saltan una hilera de elementos. Esa ha sido la práctica seguida en el presente trabajo, por lo cual τ viene dado por:

$$\tau = \frac{h^2}{(\mu + 2\lambda + Q) \Delta t} \quad (3.79)$$

Donde μ y λ son las constantes de Lamé del material. Una vez realizada la discretización temporal el sistema final queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} & 0 \\ \mathbf{G}^T & \tau \mathbf{L} & -\tau \mathbf{G} \\ 0 & -\mathbf{G}^T & \mathbf{M}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Este sistema se puede expresar como:

$$[\mathbf{A}] [\mathbf{v}] = [\mathbf{F}]$$

²Estencil: son los nodos que abarca la ecuación para un nodo dado. Por ejemplo si discretizamos con diferencias finitas centrales en 1D, el término $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ a segundo orden tenemos el siguiente estencil: $u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}$. El estencil para el nodo i incluye los nodos $i - 1$ e $i + 1$.

El anterior sistema se resuelve por Gauss-Seidel (iteraciones sucesivas con el último valor), pero, $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{F}$ converge usando Gauss-Seidel, solo si \mathbf{A} es definida positiva ($\lambda_{\min}(\mathbf{A}) > 0$). Si eliminamos $\boldsymbol{\xi}$ del sistema obtenemos:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{p} \quad (3.81)$$

Reemplazando 3.81 en la segunda ecuación de 3.80 obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^T \dot{\mathbf{u}} + \tau \mathbf{L} \mathbf{p} - \tau \mathbf{G} \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{p} &= \mathbf{f}_p \\ \mathbf{G}^T \dot{\mathbf{u}} + \tau (\mathbf{L} - \mathbf{G} \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{G}^T) \mathbf{p} &= \mathbf{f}_p \end{aligned} \quad (3.82)$$

Sea

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} - \mathbf{G} \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{G}^T$$

El sistema 3.80 queda como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \tau \mathbf{L}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_p \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

El anterior sistema de ecuaciones no converge con Gauss-Seidel, debido a que el sistema esta mal condicionado. Debido a esto, es necesario preconditionar el sistema.

Precondicionamiento Es bien sabido que un esquema de Gauss-Seidel converge si y sólo si el sistema totalmente acoplado es definido positivo. Ésto no se puede garantizar a-priori para el sistema acoplado de suelos (ecuaciones de equilibrio, continuidad y de suavizado de gradientes de presión puestos en un solo sistema). Es más, debido a la tendencia a la incompresibilidad cuando el sistema es no drenado, generalmente el sistema acoplado es altamente mal condicionado. El mal condicionamiento del sistema acoplado viene dado por la ecuación de continuidad, o lo que es igual, por la incompresibilidad (los términos diagonales de dicha ecuación discreta tienden a cero). Por lo tanto un sistema de solución iterativo es imposible de abordar sin el diseño de un buen preconditionador.

Debido a que se requiere resolver las ecuaciones de momento y continuidad desacoplados (Gauss-Seidel por bloques), es necesario preconditionar la ecuación de las presiones para lograr convergencia [Soto, 2002], [Soto & Löhner, 2001]. Dicho preconditionamiento se basa en observar los términos obtenidos de un esquema de pasos fraccionados de segundo orden $O(dt^2)$; Es decir, la ecuación de momento (3.69) se fracciona como:

$$\rho \frac{\hat{\mathbf{u}}^{n+1} - \dot{\mathbf{u}}^n}{\theta dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \nabla p^{n+1} = \rho \mathbf{b} \quad (3.84)$$

$$\rho \frac{\dot{\mathbf{u}}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}^{n+1}}{\theta dt} - \nabla (p^{n+1} - p^n) = 0 \quad (3.85)$$

Siendo $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$ una velocidad intermedia que se introduce con el fin de subdividir la ecuación de momento. Nótese que la suma de las anteriores ecuaciones da la ecuación de momento. Suponiendo $k = 0$ y que $Q \rightarrow \infty$ (Incompresibilidad perfecta), se obtiene de 3.70:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}^{n+1} = 0$$

tomando la divergencia a 3.85 se obtiene:

$$dt\theta\nabla \cdot \nabla (p^{n+1} - p^n) = \rho\nabla \cdot (\dot{\mathbf{u}}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}^{n+1}) \quad (3.86)$$

Por tanto

$$dt\theta\nabla \cdot \nabla (p^{n+1} - p^n) = -\rho\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (3.87)$$

Discretizando 3.87 se tiene:

$$\int_{\Omega} \theta dt \nabla q \cdot \nabla (p^{n+1} - p^n) - \int_{\Gamma} \theta dt q \nabla (p^{n+1} - p^n) \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}^{n+1} = 0 \quad (3.88)$$

El término de contorno es del orden $dt \cdot (p^{n+1} - p^n) = dt \cdot dp \simeq dt^2$ por lo cual puede despreciarse con lo cual 3.88 se reduce a:

$$\int_{\Omega} \theta dt \nabla q \cdot \nabla (p^{n+1} - p^n) d\Omega + \int_{\Omega} pq \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}^{n+1} d\Omega = 0 \quad (3.89)$$

Finalmente la ecuación de continuidad discreta a resolver queda como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho q \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \int_{\Omega} \rho \nabla q \cdot \mathbf{k}_w \cdot \nabla p + \int_{\Omega} \frac{\rho}{Q} q \frac{\partial p}{\partial t} + \int_{\Omega} \rho \nabla q \cdot \mathbf{k}_w (\mathbf{b} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}) \\ & - \int_{\Gamma} q \rho \bar{q} + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_{int}} \tau \nabla q \cdot (\nabla p - \xi^p) + \int_{\Omega} dt \nabla q \cdot (\nabla p^i - \nabla p^{i-1}) = 0 \end{aligned} \quad (3.90)$$

la estabilidad está dada por el penúltimo término, y la positividad (o convergencia del problema desacoplado) por el preconditionamiento (último término de 3.90). Para este último término dt es el tamaño del paso de tiempo, y el superíndice i se refiere a la iteración dentro de un paso de tiempo; Claramente cuando se logra la convergencia el término $(\nabla p^i - \nabla p^{i-1})$ desaparece (tiende a cero). Este término es nuevamente un Laplaciano de presiones, el cual garantiza la positividad del sistema acoplado.

Finalmente cabe recalcar que el desacoplamiento de las ecuaciones de equilibrio y de continuidad, y el preconditionamiento, permiten utilizar diferentes tipos de solucionadores de ecuaciones para cada una de las ecuaciones por separado. Para la ecuación de equilibrio se utiliza un esquema iterativo tipo GMRES con preconditionamiento diagonal [Saad, 1996], y para la de continuidad un esquema de gradientes conjugados con preconditionamiento ILU [Saad, 1996]. Ambos sistemas se almacenan en forma dispersa. El uso de solucionadores iterativos con almacenamiento disperso, permite atacar problemas grandes (varios millones de elementos), utilizando poca memoria computacional. La cantidad de memoria necesitada es aproximadamente 1000 bytes por elemento en 3D. Un millón de elementos necesitará 10^9 bytes, algo totalmente posible hoy en día.

3.7 Programa Desarrollado

El programa desarrollado en lenguaje Fortran 90, se ha denominado SOLDYNA (Soil Dynamics Analysis), presentando las siguientes características:

- Utiliza elementos de igual orden de interpolación tanto para la fase sólida como líquida.

- El uso de elementos de igual orden de interpolación hace necesario el uso de técnicas de estabilización. Para tal fin se propone el uso del método OSS (Orthogonal Subgrid Stabilization), introducido en forma fraccionada por Codina, en problemas de fluidos, y el cual ha mostrado excelentes resultados. El método consiste en estabilizar la ecuación de continuidad mediante la adición de un término estabilizador más un preconditionamiento.
- El programa utiliza para la discretización espacial únicamente el elemento triángulo, por ser este un elemento muy barato desde el punto de vista computacional.
- El programa es muy eficiente y rápido en el proceso de cálculo, ya que permite el uso de solvers iterativos (GMRES y Gradiente Conjugado Precondicionado).

3.8 Conclusiones

- La solución numérica de las ecuaciones de Biot implica la solución de manera acoplada de la ecuación de momento y de la ecuación de continuidad. Debido a que la ecuación de momento incluye derivadas parciales de segundo orden, mientras que la ecuación de continuidad incluye derivadas parciales de primer orden, es necesario cumplir con la condición de Babuska-Brezzi [Babuska, 1971],[Brezzi & Pitkaranta, 1984], con el fin de evitar oscilaciones espúreas que no tienen nada que ver con la física del problema y que se presentan en el caso incompresible. Estas oscilaciones numéricas se pueden evitar de dos maneras: En primer lugar utilizando elementos div-estables (figura 3.1), o utilizando técnicas de estabilización.
- El uso de elementos con diferente grado de interpolación (mixtos), presentan dos desventajas al intentar ser utilizadas para resolver problemas a gran escala: La primera es que uno de los campos debe ser interpolado usando elementos de alto orden, lo cual aumenta el ancho de banda de la matriz del sistema de ecuaciones finales y son costosas de integrar. La segunda es que el sistema resultante está mal condicionado, por lo cual el uso de solvers iterativos es casi prohibitivo. En problemas muy complejos donde se requieran varios miles de elementos el uso de un solver directo parece ser inviable: el solver directo más barato (LU con almacenamiento en perfil), es del orden $n \log(n)$, siendo n el número de incógnitas a resolver.
- Debido a lo anterior se optó el uso de elementos de igual orden de interpolación, ya que estos permiten abordar problemas de gran tamaño. Para esto se optó por utilizar el método denominado OSS (Orthogonal Subgrid Stabilization), consistente en la estabilización de la ecuación de continuidad mediante la adición de un término estabilizador (dado por la divergencia de la ecuación de equilibrio), más un preconditionamiento.

Capítulo 4

MODELO CONCEPTUAL DE LA FORMULACIÓN u-p

4.1 Introducción

La solución de las ecuaciones de Biot [Biot, 1956], bien sea analíticamente para casos sencillos y unidimensionales, o casos complejos mediante elementos finitos, involucra la utilización de un término de acoplamiento, el cual ha sido ampliamente aceptado, pero cuyo significado físico hasta el momento no ha sido adecuadamente explicado. En el presente capítulo se ilustra la solución analítica de las ecuaciones de Biot, mediante un modelo sencillo, desarrollado inicialmente por Ledesma[Ledesma, 1998], y al cual se le han adicionado algunos términos que complican la solución analítica. Es importante destacar que la solución analítica fué complementada con una amplia recopilación de resultados experimentales desarrollados por muchos investigadores. Por último, los análisis se centraron en el caso elástico, motivo por el cual la evidencia experimental corresponde a pruebas de pequeñas deformaciones, tipo Columna Resonante.

4.2 Propagación de ondas en arenas-resultados experimentales

Es ampliamente reconocido que la propagación de ondas de compresión en contraste con las ondas de corte, en un medio elástico saturado, se ven fuertemente afectadas por el agua que ocupa los intersticios de los granos de arena. La comprobación experimental, se inició con los trabajos de Hardin [Hardin & Richart., 1963], tendientes a determinar las ondas de compresión en arenas secas y saturadas sujetas a pruebas de columna resonante. En estas pruebas el autor analizó la influencia de la presión de confinamiento sobre la velocidad de propagación para los casos seco y saturado. De igual manera, presenta los resultados teóricos obtenidos mediante las teorías de Duffy & Mindlin[Duffy & Mindlin, 1957] y Biot [Biot, 1956](figura 4.1). Las anteriores pruebas fueron complementadas con ensayos para determinar la velocidad de las ondas de corte, para un medio seco y saturado; los resultados de tales pruebas se ilustran en la figura 4.2. Finalmente, los autores destacan que la velocidad de propagación de las ondas, se verá afectada por los siguientes aspectos [Hardin & Richart., 1963]:

- **Presión de Confinamiento** Se encontró que las ondas de compresión y de corte varían con la

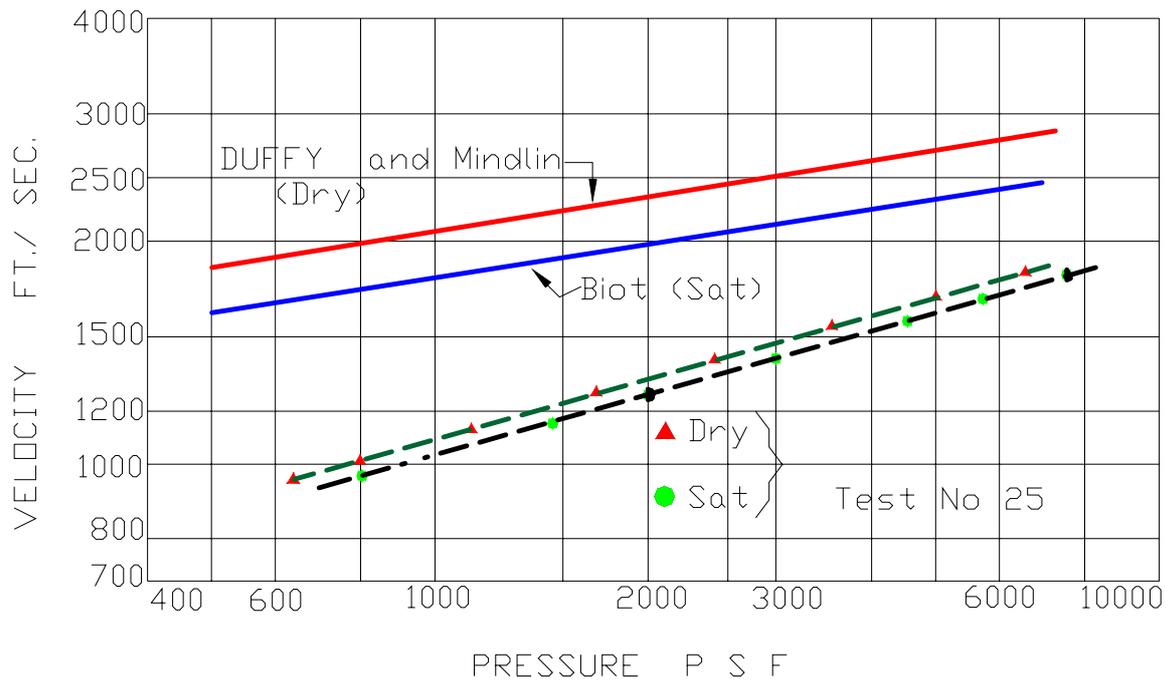


Figura 4.1: Comparación entre los resultados experimentales y teóricos sobre propagación de Ondas de Compresión en la arena de Ottawa, para los casos seco y saturado [Hardin & Richart., 1963]

presión de confinamiento. Los autores muestran resultados tanto para muestras saturadas como secas, encontrando que la velocidad de propagación varía aproximadamente con la presión de confinamiento a la $\frac{1}{4}$.

- Saturación.** La presencia de agua en la arena de Ottawa afecta la velocidad de propagación de dos maneras: disminuye tanto la velocidad de propagación como la rigidez de la arena para bajas presiones de confinamiento (figura 4.1). Los autores encontraron que en general la velocidad para una muestra drenada y saturada, es inferior a la velocidad de propagación de una muestra seca (figura 4.2). Sin embargo pruebas desarrolladas por Paterson [Paterson, 1956] muestran que el efecto de la saturación produce una disminución en la velocidad de propagación del orden del 50%, en lugar del 3 al 9% obtenido por Hardin[Hardin & Richart., 1963].
- Relación de Vacíos y forma de los granos** La velocidad de las ondas de corte para muestras secas de la arena de Ottawa varía linealmente con la relación de vacíos, independiente del tamaño del grano, gradación y densidad relativa (figura 4.3).
- Efecto del tamaño del grano** El tamaño del grano afecta la velocidad en las arenas de manera indirecta, a través de la relación de vacíos; por tanto la velocidad será menor a menor tamaño del grano, ya que la relación de vacíos se verá disminuida. Lo anterior es cierto para arenas uniformes y limpias, si hay variación en el tamaño de las partículas, la hipótesis no es cierta.
- Efecto de la amplitud** El efecto de la amplitud depende de la forma del grano y de la presión de confinamiento, y se verá disminuida en la medida en que se incremente la presión de confinamiento.

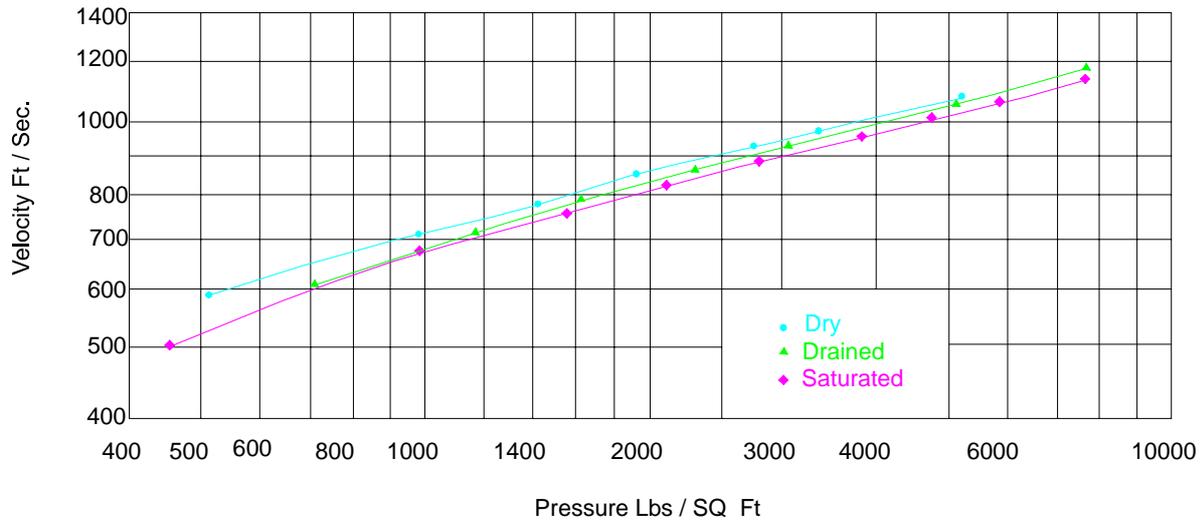


Figura 4.2: Variación de la velocidad de la Onda de Corte con la presión de confinamiento para la arena de Ottawa, para los casos seco y saturado [Hardin & Richart., 1963]

- **Efecto de la frecuencia** Los autores encontraron que si las frecuencias aplicadas varían entre 200 Hz - 2500 Hz, esta no tiene ninguna influencia en los resultados obtenidos.
- **Relación de Poisson** Los valores de relación de Poisson fueron obtenidos a partir de muestras de arena seca; sin embargo la teoría de Biot [Biot, 1956] indica que estos métodos no son aplicables a arenas saturadas.

Ishihara [Ishihara, 1970], calcula los parámetros utilizados por Biot, en la propagación de Ondas en un medio elástico saturado, y las expresa en función de la compresibilidad del agua y las propiedades de las partículas sólidas.

Foster [Foster et al., 1980], realizó una serie de ensayos sobre muestras saturadas ($S = 100\%$) y parcialmente saturadas ($S > 98\%$) en la cámara de pulso, con el fin de determinar la influencia de la saturación en la propagación de las ondas P y S, variando los siguientes parámetros en las muestras: relación de vacíos, tamaño de los vacíos, compresibilidad de las partículas, saturación, forma de las partículas y gravedad específica (G_s). A partir de tales pruebas obtuvo los siguientes resultados:

- Las ondas S, son prácticamente independientes de la saturación del suelo. Este resultado era de esperar teniendo en cuenta que los grados de saturación empleados en los ensayos son muy altos. Para grados de saturación bajos la influencia de la succión cambia este comportamiento de manera apreciable [Pintado, 2002].
- En la medida en que se incrementa la saturación de la muestra, mayor será la velocidad de propagación de la onda P; de igual manera, los resultados se verán afectados en menor grado con la relación de vacíos, como se ilustra en la figura 4.4. Nótese que estos resultados son contrarios a los propuestos por Hardin [Hardin & Richart., 1963].

Bardet y Sayed [Bardet & Sayed, 1993], utilizando la teoría de Biot [Biot, 1956] y Vardoulakis [Vardoulakis & Beskos, 1986], presentan expresiones exactas y aproximadas para la velocidad y atenuación

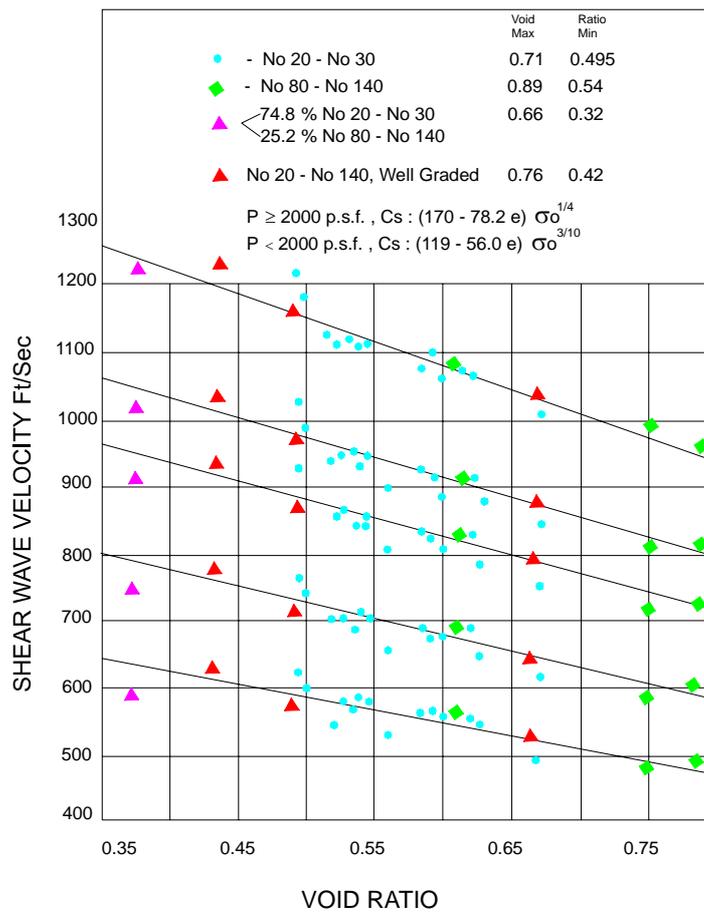


Figura 4.3: Variación de la velocidad de las Ondas de Corte con la relación de vacíos para varias presiones de confinamiento, tamaño de granos y gradación de la arena de Ottawa seca [Hardin & Richart., 1963]

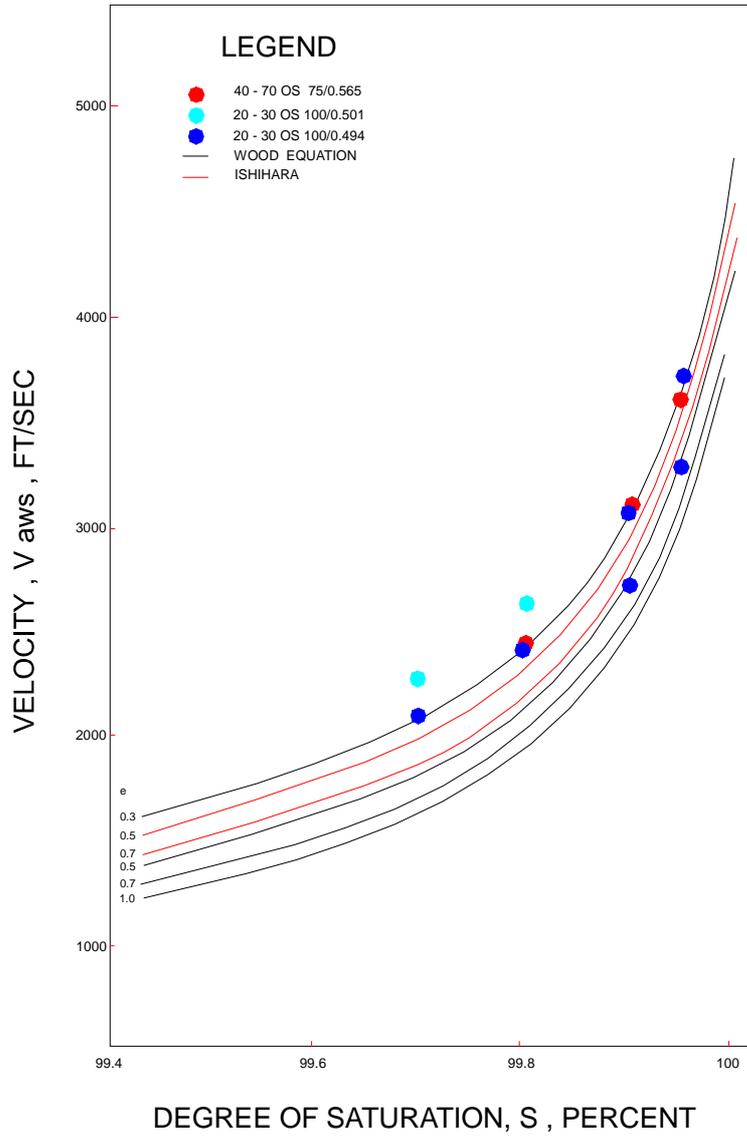


Figura 4.4: Relación entre la velocidad de la onda en el fluido - grado de saturación - relación de vacíos para la arena de Ottawa en la cámara de pulso [Valores teóricos y experimentales], [Foster et al., 1980]

de ondas compresionales en un medio elástico saturado. Los autores obtienen que la solución para el caso unidimensional y armónico es del siguiente tipo:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= Ae^{-\frac{\omega x}{\delta}} e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} \\ w(x, t) &= Be^{-\frac{\omega x}{\delta}} e^{i\omega(t-\frac{x}{c})} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Siendo u, w , los desplazamientos del sólido y del fluido, $i = \sqrt{-1}$, c es la velocidad de onda, δ es un coeficiente de absorción y ω la frecuencia angular. La solución analítica muestra la existencia de dos ondas compresionales; la primera es no dispersiva y se denomina onda rápida, mientras que la segunda se conoce como onda lenta y es dispersiva debido a que su valor depende de la frecuencia.

El autor propone a partir de la solución de Biot [Biot, 1956], un modelo sencillo para calcular la velocidad de propagación y atenuación, tanto rápida como lenta en suelos parcialmente saturados ($S > 98\%$). Como aspecto importante a destacar es que la disminución en la saturación genera una disminución importante en la velocidad de propagación de la onda de compresión. De hecho, la velocidad de propagación de ondas de compresión en una arena con una saturación del 95% es equivalente al de una arena seca(figura 4.5). Además se observa que para tensiones efectivas mayores a 100 kPa, prácticamente todas las curvas asociadas con S entre 0.999 y 0.95 coinciden con la curva $S = 0$. Esta extrema sensibilidad de la velocidad de onda de compresión rápida, explica el que Hardin & Richart[Hardin & Richart., 1963] hayan medido velocidades similares para el caso seco y saturado. Este aspecto es muy importante, porque como veremos más adelante, algo similar sucede con el amortiguamiento para el caso seco y saturado. Con relación a la atenuación, según se observa en la figura 4.6, se concluye desde un punto de vista práctico, que las ondas rápidas no se atenúan cuando estas se propagan en la arena de Ottawa saturada.

4.3 Amortiguamiento en arenas - resultados experimentales

Duffy & Mindlin[Duffy & Mindlin, 1957] obtienen resultados de las relaciones esfuerzo deformación a partir de pruebas experimentales desarrolladas sobre muestras conformadas por esferas. En su análisis tienen en cuenta tanto las fuerzas normales como de corte que se desarrollarán en el contacto entre esferas. Adicionalmente, los autores obtienen expresiones para la velocidad de propagación de las ondas y la disipación de energía a partir de las relaciones esfuerzo-deformación obtenidas. Las velocidades de propagación de las ondas longitudinales fueron obtenidas mediante ensayos de resonancia, mientras que la tasa de disipación de la energía fué obtenida mediante la observación fotográfica de la decadencia de las vibraciones. Con relación a los resultados de disipación de la energía por ciclo encontró que esta varía con el cuadrado de la amplitud, mientras que la teoría de Mindlin y Deresiewicz[Mindlin & Deresiewicz, 1953] predican que la variación es cúbica.

Las primeras investigaciones realizadas para evaluar las características de amortiguamiento de una arena seca, se deben a Hardin[Hardin, 1965], quien mediante la teoría de Kelvin-Voigt, desarrolló un modelo para predecir el amortiguamiento viscoso de una arena seca. El anterior modelo fué validado mediante una serie de ensayos de columna resonante sobre muestras de arena seca. En resumen, los autores determinan que el amortiguamiento viscoso es una función de la presión de confinamiento (σ) y de la deformación de corte (γ), mediante la siguiente expresión:

$$\frac{\mu\omega}{G} = 9\gamma^{1.5}\sigma^{-\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

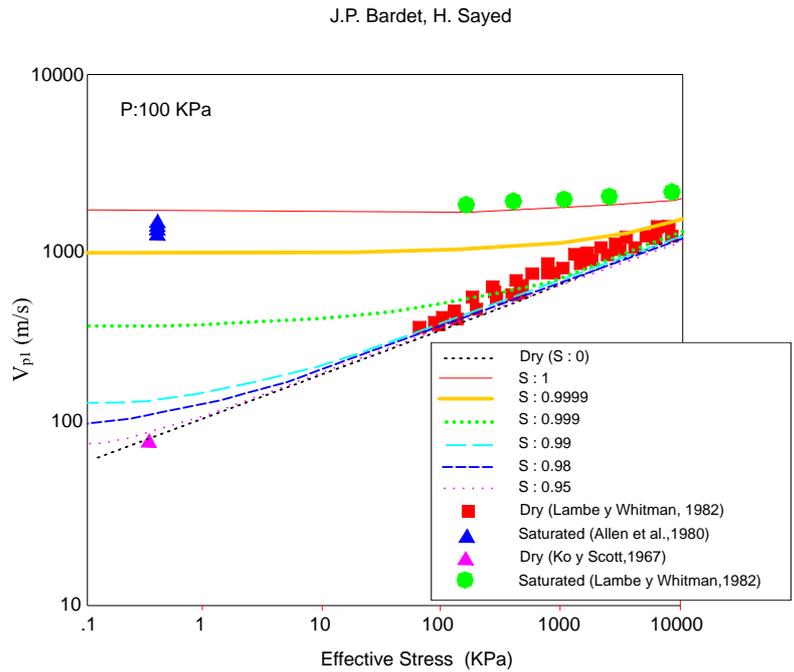


Figura 4.5: Velocidad de la onda rápida en la arena de Ottawa versus la presión de confinamiento para varios grados de saturación [p=100 kPa],[Bardet & Sayed, 1993]

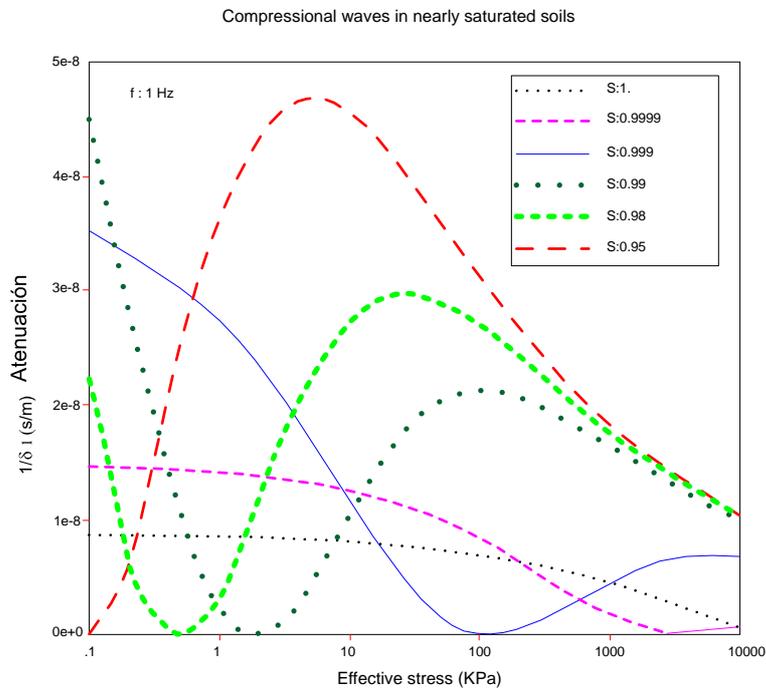


Figura 4.6: Atenuación de la onda rápida de 1 Hz en la arena de Ottawa versus la presión efectiva de confinamiento para varios grados de saturación [Bardet & Sayed, 1993]

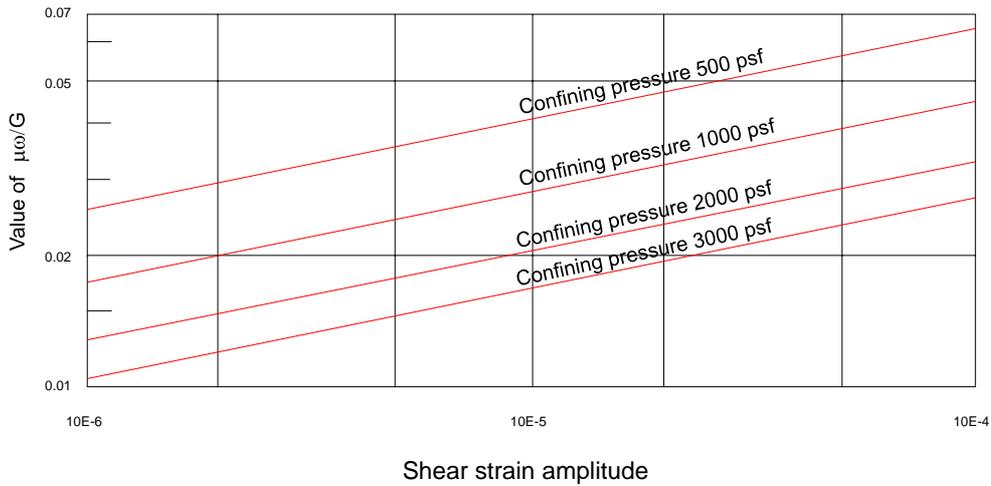


Figura 4.7: Valores sugeridos de $\frac{\mu\omega}{G}$ para arenas secas [Hardin, 1965]

Siendo μ el coeficiente de viscosidad, ω la frecuencia angular, σ es la tensión media en psf y G el módulo de corte en psf. La anterior expresión es válida para presiones de cámara entre 500 psf y 3000 psf, y para frecuencias menores a 600 cps. La figura 4.7, muestra la variación de $\frac{\mu\omega}{G}$ con γ para varias presiones de confinamiento.

Hardin[Hardin & Drnevich, 1972b], muestra que el bucle de histéresis que define la relación tensión-deformación de un suelo, es posible definirlo mediante dos parámetros: el primero corresponde a la pendiente de la línea que une los puntos extremos del bucle, denominado módulo de corte (figura 4.8), mientras que el segundo parámetro corresponde a la relación de amortiguamiento, definida como:

$$D = \frac{A_L}{4\pi A_T} \quad (4.3)$$

Siendo A_L = área del bucle y A_T = área del triángulo ilustrado en la figura 4.9. El autor a partir de resultados experimentales realizados en muestras cilíndricas huecas (hollow cylinder) y columna resonante concluye:

- El módulo de corte disminuye y el amortiguamiento se incrementa con la deformación de corte (figura 4.10).
- La tasa de disminución del módulo o incremento en el amortiguamiento son altos para:
 - * Bajas tensiones efectivas medias.
 - * Altas relaciones de vacíos
 - * Bajo número de ciclos de carga
- El efecto del grado de saturación sobre el amortiguamiento en suelos no cohesivos es pequeño, pero el módulo de suelos no cohesivos se incrementa rápidamente con la disminución del grado de saturación.

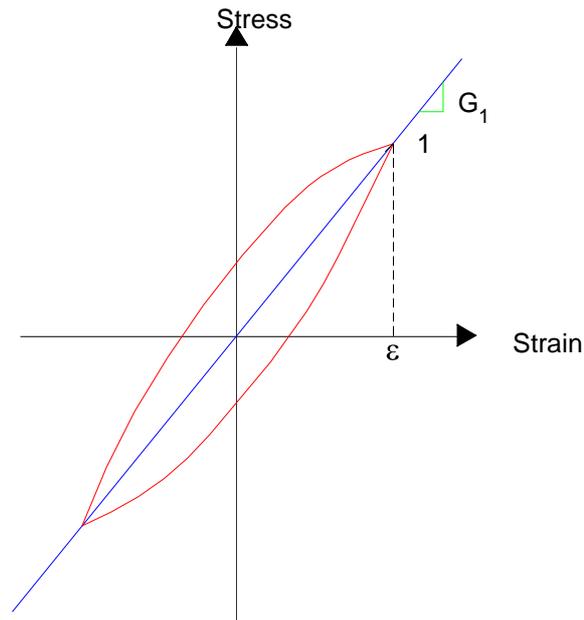


Figura 4.8: Definición del Módulo de Corte

- El módulo de corte se incrementa y el amortiguamiento disminuye con el incremento en σ'_o . Para muy pequeñas amplitudes el módulo varía como $\sqrt{\sigma'_o}$, pero para grandes deformaciones el módulo depende de la resistencia del suelo a la potencia uno. Por otro lado, el amortiguamiento disminuye con $\sqrt{\sigma'_o}$ independiente de la amplitud de la deformación.
- La relación de amortiguamiento disminuye con el de número de ciclos (figura 4.11)

Con la anterior evidencia experimental, Hardin y Drnevich [Hardin & Drnevich, 1972a] proponen que a grandes amplitudes de deformación de corte, el amortiguamiento se aproxima asintóticamente a un valor D_{\max} , asumiendo para ello, que el amortiguamiento presenta una variación de tipo hiperbólico. De hecho, proponen la siguiente relación entre el amortiguamiento y el módulo de corte (figura 4.12):

$$D = D_{\max} \left(1 - \frac{G}{G_{\max}} \right) \quad (4.4)$$

La anterior ecuación se puede observar para un conjunto de bucles histeréticos con diferente nivel en la amplitud de la deformación. Graficando las cantidades $\left(1 - \frac{G}{G_{\max}} \right)$ y D versus la deformación de corte normalizada en escala logarítmica, se observa que el módulo de corte y el amortiguamiento mantienen una distancia constante proporcional a D_{\max} . (figura 4.13).

Asumiendo una relación tensión-deformación de tipo hiperbólico se tiene:

$$\tau = \frac{\gamma}{\frac{1}{G_{\max}} + \frac{\gamma}{\tau_{\max}}} \quad (4.5)$$

Donde τ es la tensión de corte y γ es la deformación de corte. Manipulando la anterior expresión se llega a :

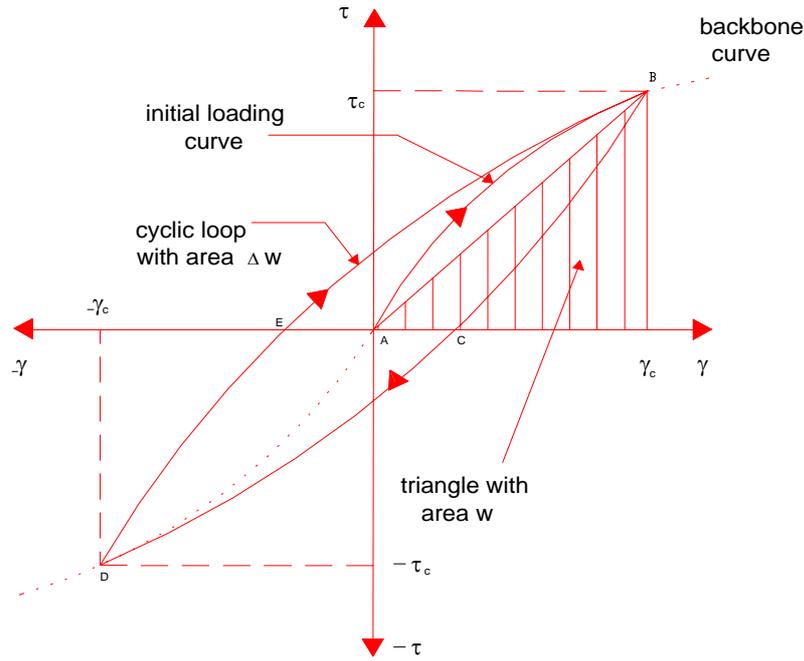


Figura 4.9: Definición del amortiguamiento

$$\frac{G}{G_{\max}} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_r}} \quad (4.6)$$

Siendo $\gamma_r = \frac{\tau_{\max}}{G_{\max}}$; Reemplazando 4.6 en 4.4 se obtiene:

$$D = D_{\max} \left(\frac{\frac{\gamma}{\gamma_r}}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_r}} \right) \quad (4.7)$$

Sin embargo, los resultados experimentales muestran que la relación tensión-deformación no está completamente definida con las expresiones 4.6 y 4.7, por lo que Hardin y Drnevich, la modifican introduciendo un parámetro denominado la deformación hiperbólica, γ_h , definida como:

$$\gamma_h = \frac{\gamma}{\gamma_r} \left(1 + ae^{-b\left(\frac{\gamma}{\gamma_r}\right)} \right) \quad (4.8)$$

Siendo a y b constantes que dependen del tipo de material; finalmente las anteriores expresiones quedan:

$$\frac{G}{G_{\max}} = \frac{1}{1 + \gamma_h} \quad (4.9)$$

$$\frac{D}{D_{\max}} = \frac{\gamma_h}{1 + \gamma_h} \quad (4.10)$$

La forma de las anteriores ecuaciones se ilustran en la figura 4.14.

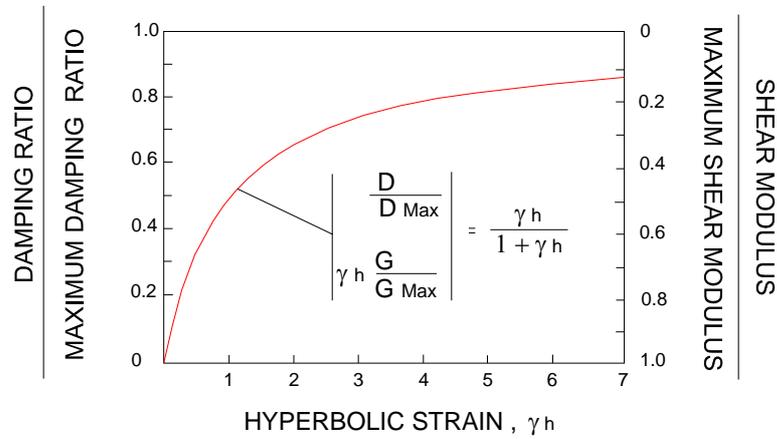


Figura 4.10: Módulo de Corte normalizado y relación de amortiguamiento para todos los suelos versus deformación hiperbólica. La deformación hiperbólica es una medida de la deformación de corte que se define en el ecuación 4.8 [Hardin & Drnevich, 1972b]

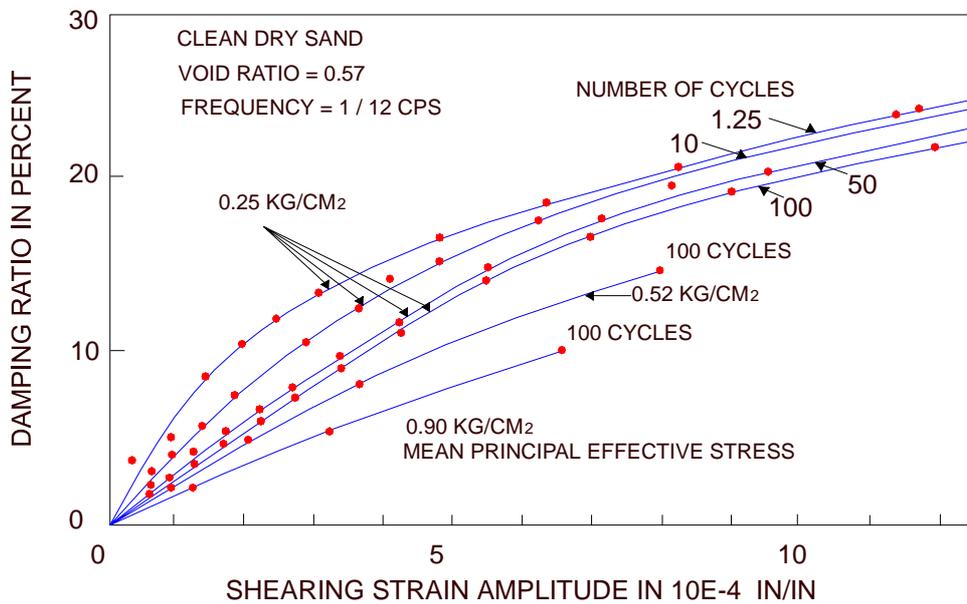


Figura 4.11: Relación entre el amortiguamiento versus la amplitud de la deformación de corte para arenas secas [Hardin & Drnevich, 1972a]

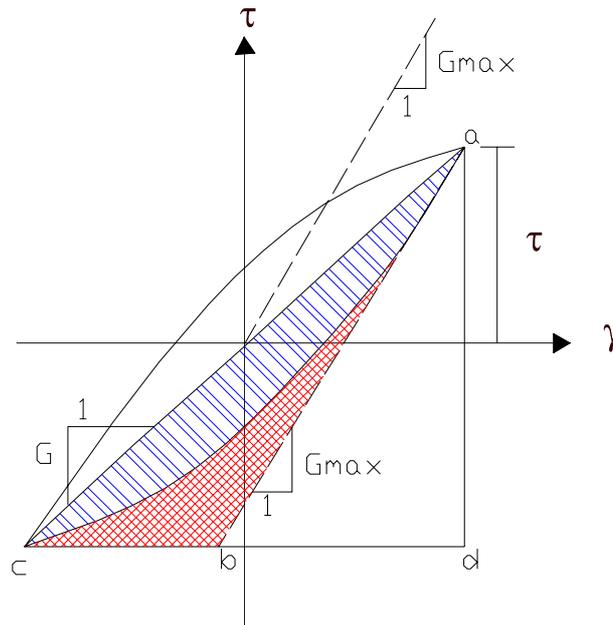


Figura 4.12: Relación geométrica entre el módulo de corte y la relación de amortiguamiento [Hardin & Drnevich, 1972b]

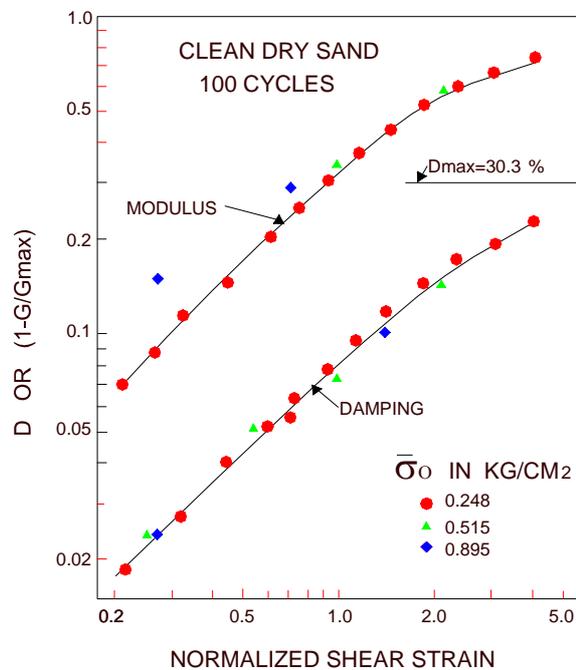


Figura 4.13: Relación entre el módulo y el amortiguamiento en función de la deformación de corte normalizada [Hardin & Drnevich, 1972b]

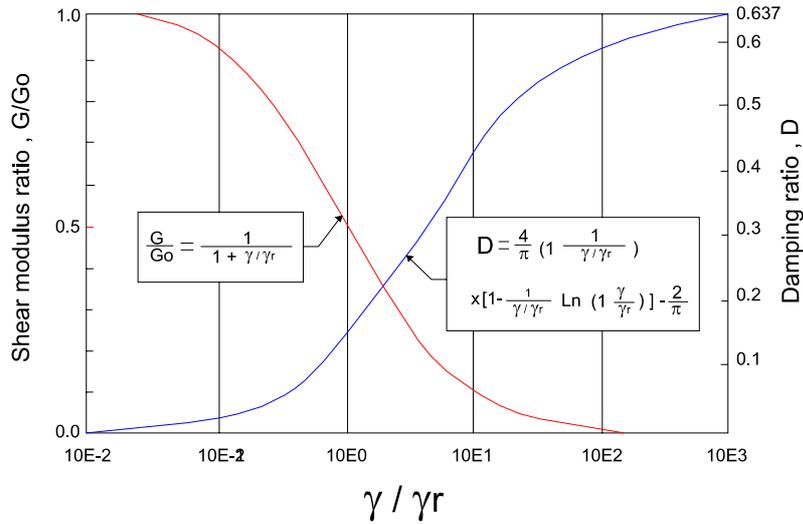


Figura 4.14: Definición del módulo de corte y amortiguamiento [Ishihara, 1996]

Aunque Hardin y Drnevich [Hardin & Drnevich, 1972a], opinan que el efecto de la saturación se puede despreciar para el cálculo del amortiguamiento, recomienda los siguientes valores para el caso de una muestra seca y saturada:

Tipo de Suelo	Valor de a	Valor de b
Arena seca limpia	$a = 0.6 \left(N^{-\frac{1}{6}} \right) - 1.0$	$b = 1 - N^{-\frac{1}{12}}$
Arena limpia saturada	$a = 0.54 \left(N^{-\frac{1}{6}} \right) - 0.9$	$b = 0.65 - N^{-\frac{1}{12}}$

Siendo N el número de ciclos. Finalmente propone los siguiente valores del D_{\max} :

Tipo de Suelo	D_{\max}
Arena seca limpia	$D_{\max} = 33 - 1.5 \log(N)$
Arena limpia saturada	$D_{\max} = 28 - 1.5 \log(N)$

La anterior información fué retomada por Seed[Seed et al., 1984b], [Seed et al., 1986], quien obtuvo curvas teniendo en cuenta la influencia del grado de saturación, pero despreciando la corrección propuesta por Hardin[Hardin & Drnevich, 1972a]. Como nuestro interés es analizar los efectos de la saturación en el amortiguamiento, vamos a reproducir algunos de los resultados obtenidos por Seed[Seed et al., 1984b].

Ejemplo

Supongamos una muestra de arena con la siguiente información:

$$\begin{aligned} \sigma'_{vo} &= 1000 \text{ psf} \\ k_o &= 0.5 \text{ (Coeficiente de empuje al reposo)} \\ e &= 0.5 \text{ (Relación de vacíos)} \\ \phi &= 30^\circ \text{ (Angulo de rozamiento interno)} \end{aligned}$$

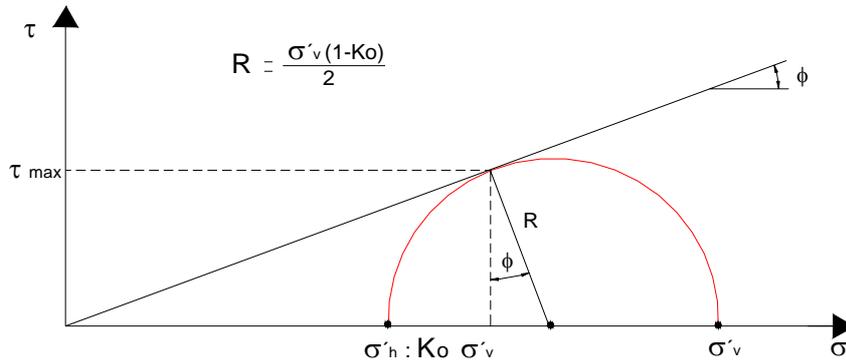


Figura 4.15: Definición de la tensión de corte máxima

El módulo máximo se calcula mediante la siguiente expresión[Seed et al., 1984b]:

$$G_{\max} = 14760 \frac{(2.973 - e)^2}{1 + e} \sqrt{\sigma'_m} \quad (4.11)$$

Siendo

G_{\max} Módulo de corte máximo (psf)

e Relación de vacíos

σ'_m tensión efectiva media (psf)

La tensión de corte máxima se puede obtener de la figura 4.15, deduciéndose el siguiente valor:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma'_v}{2} (1 - k_o) \cos \phi' \quad (4.12)$$

Recordando además que el amortiguamiento máximo para una arena limpia depende de la saturación:

$$D_{\max} = D - 1.5 \log N \quad (4.13)$$

Reemplazando en la expresión 4.7 se obtiene:

$$D = \frac{(D - 1.5 \log N) \frac{\gamma}{G_{\max}}}{1 + \frac{\gamma}{G_{\max}}} = \frac{(D - 1.5 \log N) G_{\max} \gamma}{\tau_{\max} + \gamma G_{\max}} = \frac{(D - 1.5 \log N) G_{\max} \gamma}{\frac{\sigma'_v}{2} (1 - k_o) \cos \phi' + \gamma G_{\max}}$$

$$D = \frac{2 (D - 1.5 \log N) G_{\max} \gamma}{\sigma'_v (1 - k_o) \cos \phi' + 2\gamma G_{\max}} \quad (4.14)$$

Supongamos que vamos a realizar nuestros análisis para $N = 5$ ciclos; al reemplazar los valores del ejemplo en la expresión 4.14 se obtiene:

Caso seco:

$$D = \frac{63.9\gamma}{0.000214 + 2\gamma} \quad (4.15)$$

Caso saturado

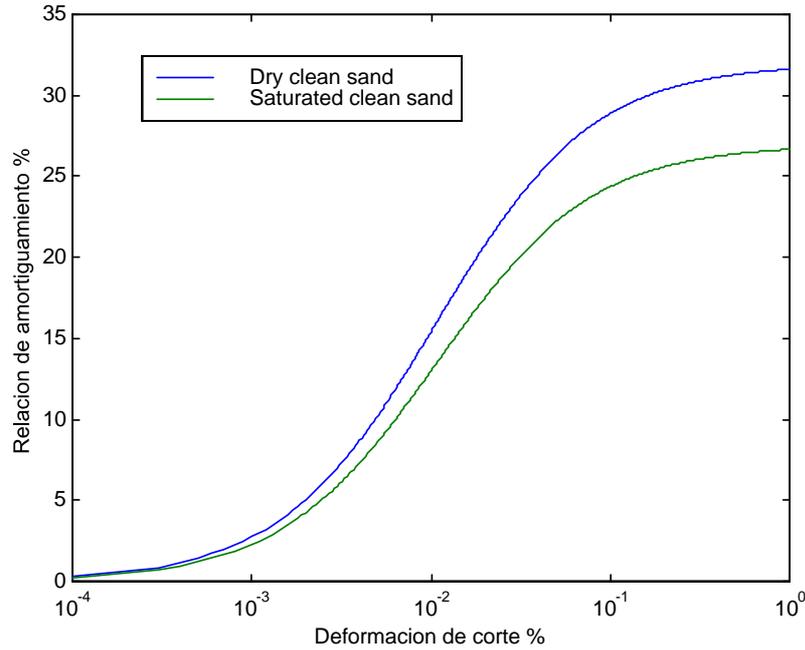


Figura 4.16: Influencia de la saturación en la relación de amortiguamiento

$$D = \frac{53.9\gamma}{0.000214 + 2\gamma} \quad (4.16)$$

Las anteriores ecuaciones se calcularon con Matlab [Hanselman & Littlefield, 1997]. La representación gráfica de los resultados se ilustran en la figura 4.16, que es la misma presentada por Seed y sus colaboradores [Seed et al., 1984b]. De las fórmulas empíricas propuestas por Hardin [Hardin & Drnevich, 1972a], y corroboradas por Seed [Seed et al., 1984b], se concluye (figura 4.16): "El agua no tiene ninguna influencia sobre el amortiguamiento de las arenas, y por el contrario a lo que uno esperaba, una arena seca presenta un amortiguamiento mayor al de una arena saturada".

Edil y Luh [Edil & Luh, 1978], realizó un gran número de ensayos de Columna Resonante en arenas secas, evaluando el afecto de las características del grano (tamaño, gradación, forma, textura de la superficie), y otros, entre los que se destaca, el estado inicial de tensiones, la relación de vacíos, la amplitud de las deformaciones y el número de ciclos de carga. El autor obtiene que los factores que más afectan el amortiguamiento son la tensión principal media, la densidad y la amplitud de las deformaciones. Los autores realizaron 720 ensayos sobre diferentes muestras de arena proponiendo la siguiente expresión para el amortiguamiento:

$$D = D_o (1.131 - 0.0453 \log N) \quad (4.17)$$

Siendo:

$$D_o = 0.70 + 7800\gamma\sqrt{D_r} - 0.36\sqrt[3]{\gamma} \left(\frac{\sigma'_o}{98.07} \right)^3 \quad (4.18)$$

Donde D_r es la densidad relativa, γ es la deformación de corte y σ'_o es la tensión media, con σ'_o en $\frac{KN}{m^2}$.

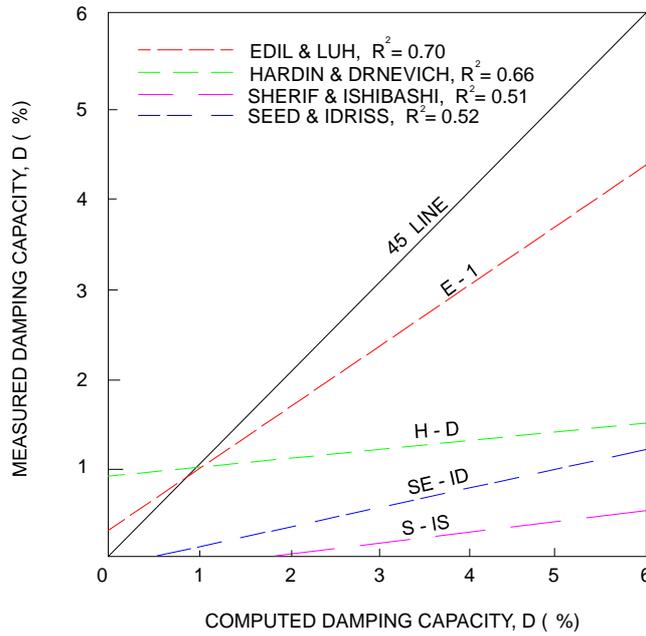


Figura 4.17: Comparación entre las diferentes correlaciones propuestas para el amortiguamiento [R^2 : coeficiente de correlación], [Edil & Luh, 1978]

Nótese que el efecto del agua no es tenido en cuenta por los autores; La comparación entre los resultados obtenidos por Edil y otros investigadores se ilustra en la figura 4.17. Nótese que la discrepancia entre los valores de las diferentes ecuaciones empíricas es alta. Sin embargo la propuesta por Edil es la que presenta un mayor coeficiente de correlación, entre los valores medidos y los calculados.

Bolton y Wilson [Bolton & Wilson, 1990], analizan el efecto del fluido sobre la rigidez y amortiguamiento para muestras de arena de Leighton Buzzard (14/25) en pruebas de columna resonante. A partir de los resultados experimentales proponen que el amortiguamiento total se puede dividir en dos componentes: el primero de carácter histerético debido a las partículas de suelo y el otro presumiblemente viscoso debido al fluido intersticial.

Para corroborar lo anterior, los autores realizan una serie de ensayos sobre muestras secas y saturadas de arena, para lo cual utilizan agua y aceite. Las muestras secas son sometidas a ensayos cuasi-estáticos ($f = 0.001$ Hz) y dinámicos ($f = 45 - 90$ Hz). Los resultados se ilustran en la figura 4.18, concluyendo los autores que existe una buena correspondencia entre las pruebas, de manera que el comportamiento de la arena seca es histerético.

Para el caso saturado concluye que el fluido tiene poco efecto en la rigidez del suelo, mientras que el efecto sobre el amortiguamiento dependerá de la viscosidad del fluido, de manera que el agua tendrá un efecto despreciable, mientras que un aceite incrementa el amortiguamiento en un factor de 2 a 3 (figura 4.19).

Finalmente, el autor define el amortiguamiento viscoso como:

$$D_v = \frac{F_v \eta \omega}{G} \quad (4.19)$$

Si asumimos los siguientes valores:

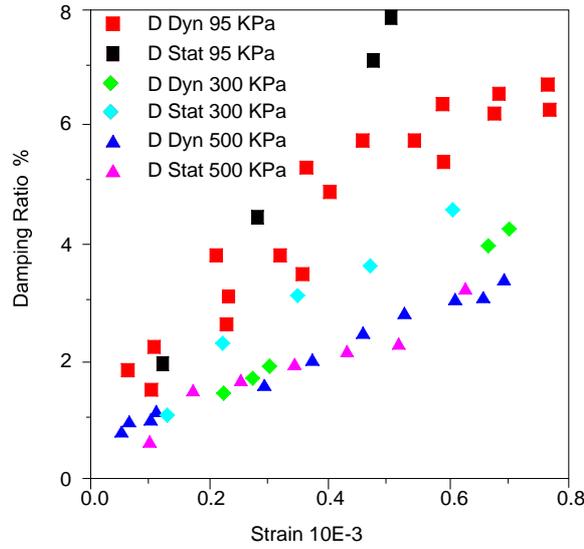


Figura 4.18: Amortiguamiento estático y dinámico para la arena seca. [Bolton & Wilson, 1990]

$F_v = 0.5 \cdot 10^4$ parámetro adimensional, estimado por los autores, y no explican su obtención.

$\eta = 10^{-6} \frac{KNs}{m^2}$ (viscosidad del agua)

$\omega = 150\pi$ correspondiente a 75 Hz y,

$G = 10^5 \frac{kN}{m^2}$ para pequeñas amplitudes

Se obtiene un amortiguamiento viscoso $D_v = 2 \cdot 10^{-5}$, resultado despreciable según los autores. Concluyen finalmente que el amortiguamiento de las arenas es histerético, es decir, no depende de la frecuencia.

Ishibashi y Zhang [Ishibashi & Zhang, 1993], analizaron los resultados obtenidos por muchos investigadores, proponiendo una nueva correlación entre el amortiguamiento y el módulo de corte. Según los autores, las mediciones del amortiguamiento son más sensibles y difíciles que las mediciones del módulo de corte y por tanto, grandes relaciones de amortiguamiento no se pueden obtener hasta las etapas finales del ensayo. De acuerdo a sus análisis el amortiguamiento se puede expresar de la siguiente manera:

$$D = 0.333 \left\{ 0.586 \left(\frac{G}{G_{\max}} \right)^2 - 1.547 \left(\frac{G}{G_{\max}} \right) + 1 \right\} \quad (4.20)$$

La comparación entre la curva propuesta y los resultados obtenidos por diferentes investigadores se ilustra en la figura 4.20. Nótese que esta expresión es muy general y no hace diferenciación entre suelo seco y saturado.

Maher [Maher et al., 1994], evaluó en muestras de arena la influencia del cementante sobre el módulo de corte y el amortiguamiento para pequeñas y grandes deformaciones. Para tal fin, realizó ensayos de columna resonante y triaxiales utilizando como cementantes silicato de sodio, acrylate (AC-400) y poliuretano (CG5610). Las figuras 4.21 y 4.22, ilustran la influencia de la mezcla del cementante sobre el amortiguamiento. Nótese que en la medida en que se incrementa la concentración del cementante, el amortiguamiento disminuye. Los autores no tienen en cuenta el efecto del fluido, lo que significa que su efecto es despreciable frente al efecto de la mezcla.

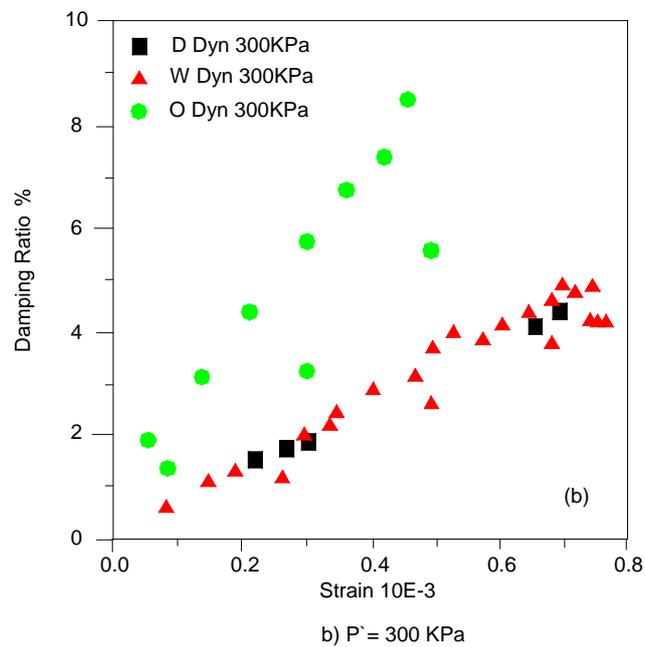
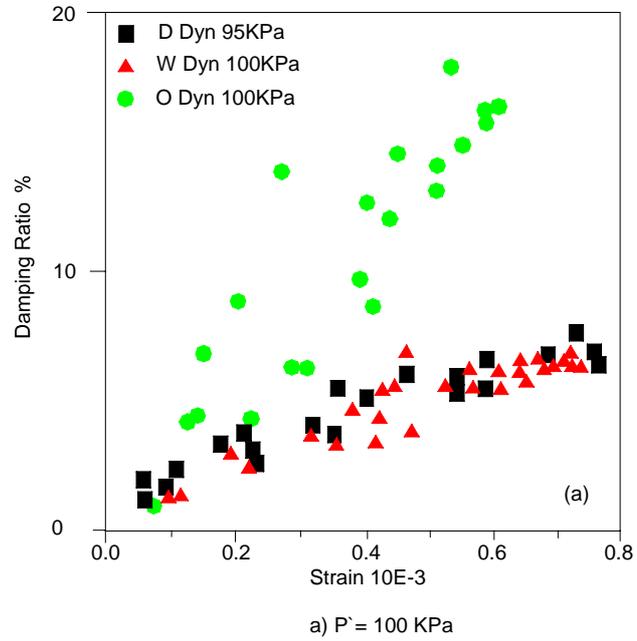


Figura 4.19: Amortiguamiento en suelo seco y saturado con agua y aceite. D: seco, W: agua, O: aceite [Bolton & Wilson, 1990]

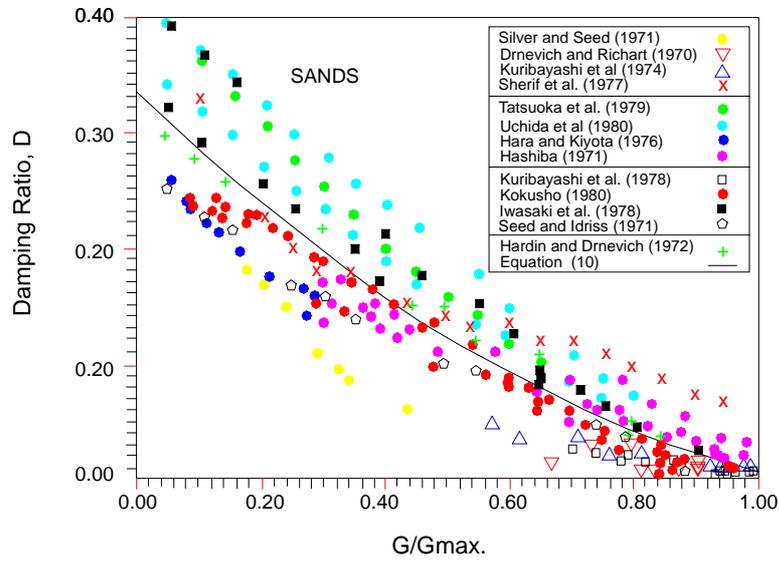


Figura 4.20: Relación entre el amortiguamiento y $\frac{G}{G_{m\acute{a}x}}$ para arenas [Ishibashi & Zhang, 1993]

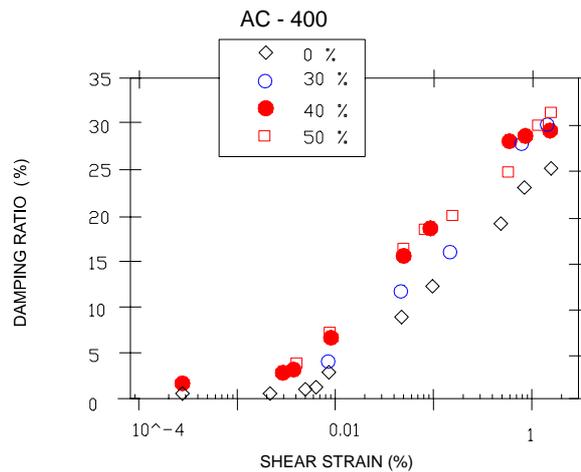


Figura 4.21: Influencia de la mezcla del cementante sobre el módulo de corte y el amortiguamiento (AC = acrylate en porcentaje variable). [Maher et al., 1994]

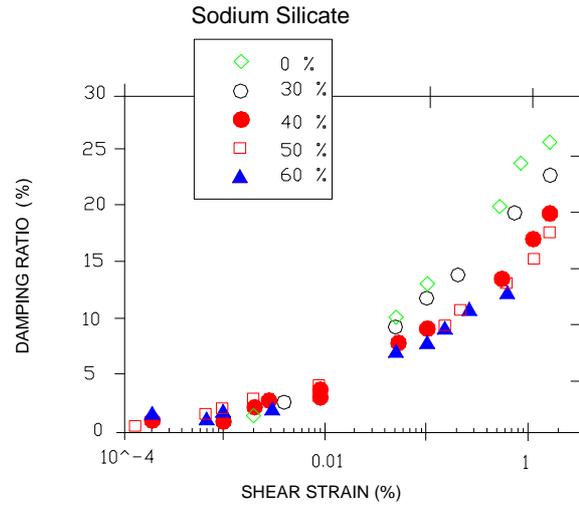


Figura 4.22: Influencia de la mezcla del cementante sobre el módulo de corte y el amortiguamiento [Maher et al., 1994]

Gajo [Gajo, 1995], analiza el efecto del amortiguamiento viscoso para el caso de propagación de ondas sometidas a cargas transitorias pulsantes (pulso sencillo, pulso sinusoidal y pulso triangular). El autor muestra que existen dos casos transitorios extremos: en el primer caso, el medio poroso se comporta como un material de dos fases, lo que implica acoplamiento viscoso nulo; en el segundo caso, el medio poroso se comporta como un material de una sola fase, correspondiente a un amortiguamiento viscoso infinito (figuras 4.23 y 4.24).

Vucetic[Vucetic et al., 1998a], realizó una serie de ensayos de corte simple a volumen constante sobre muestras de arena saturada (arena de Santa Mónica y arena del Valle Antelope). Los autores se limitan a evaluar el efecto de la amplitud de la deformación cíclica, frecuencia de la carga cíclica, la tensión efectiva de consolidación y la relación de sobreconsolidación (OCR). En el artículo, se limitan a validar los resultados obtenidos por Seed[Seed et al., 1984b] (Figura 4.25), pero no analizan el efecto de la saturación.

Rollins[Rollins et al., 1998], realizó ensayos sobre gravas, encontrando que la curva media de amortiguamiento obtenida para las gravas es muy parecida a la reportada por Seed[Seed et al., 1984b]. Como dato importante, el autor sostiene que las curvas D vs γ son relativamente independientes de la alteración de la muestra, el contenido de finos, pero depende de la presión de confinamiento; aquí al igual que algunos casos anteriores no tienen en cuenta el efecto de la saturación (figura 4.26).

Vucetic[Vucetic et al., 1998b], realizó 60 ensayos cíclicos para estudiar el comportamiento del amortiguamiento en dos muestras de arena con diferente forma en la carga cíclica aplicada. Para tal fin, define un nuevo parámetro denominado parámetro de forma θ , el cual esta dado por la siguiente expresión:

$$\theta = \frac{1}{T\gamma_c} \int |\dot{\gamma}| dt \quad (4.21)$$

El significado físico de la anterior expresión se ilustra en la figura 4.27. Algunos de los resultados obtenidos se presentan en la figura 4.28.

Ellis y otros [Ellis et al., 2000] analizan el efecto del fluido en la relación de amortiguamiento para diferentes tipos de arena, como consecuencia de los resultados obtenidos por Elgamal [Elgamal et al.,

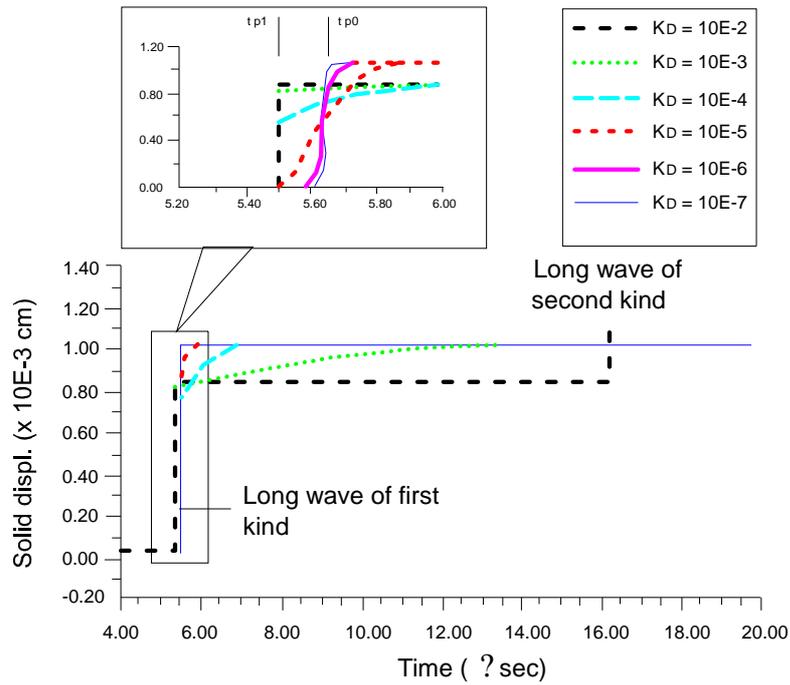


Figura 4.23: Forma del pulso longitudinal en el esqueleto sólido en $x = 1.0$ cm, para diferentes valores de frecuencia en el caso de acoplamiento viscoso ($K_D =$ coeficiente de permeabilidad) [Gajo, 1995]

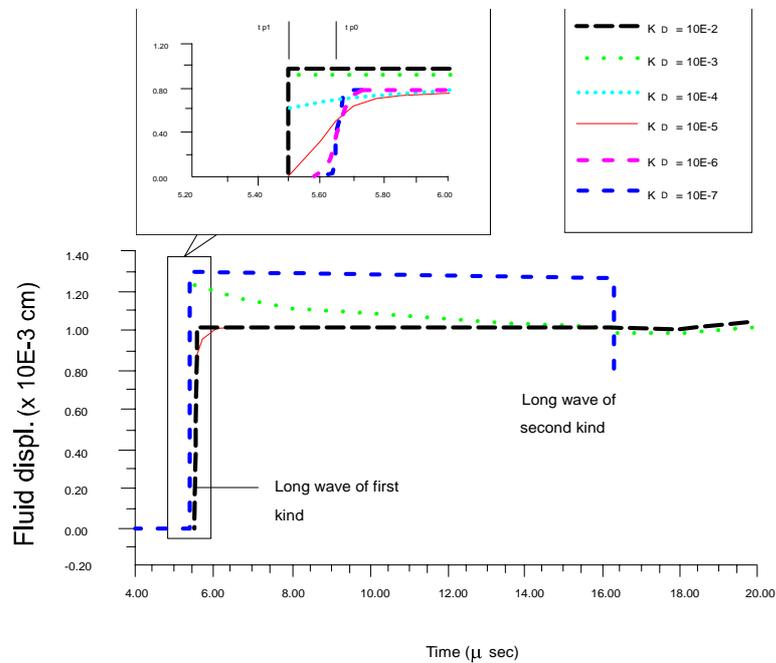


Figura 4.24: Forma del pulso longitudinal en $x = 1$ cm en el fluido, para diferentes valores de frecuencia, en el caso de acoplamiento viscoso ($K_D =$ coeficiente de permeabilidad) [Gajo, 1995]

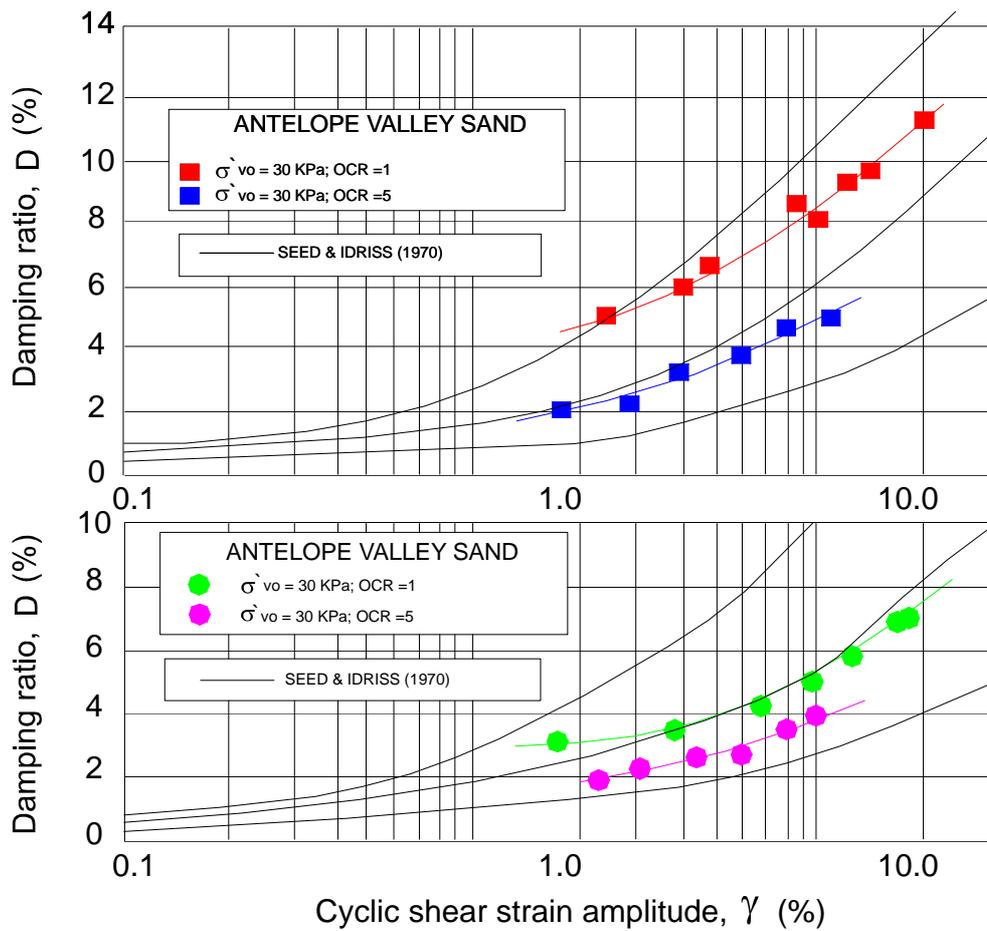


Figura 4.25: Relación D versus γ obtenidas para suelos granulares por ocho investigadores. [Vucetic et al., 1998a]

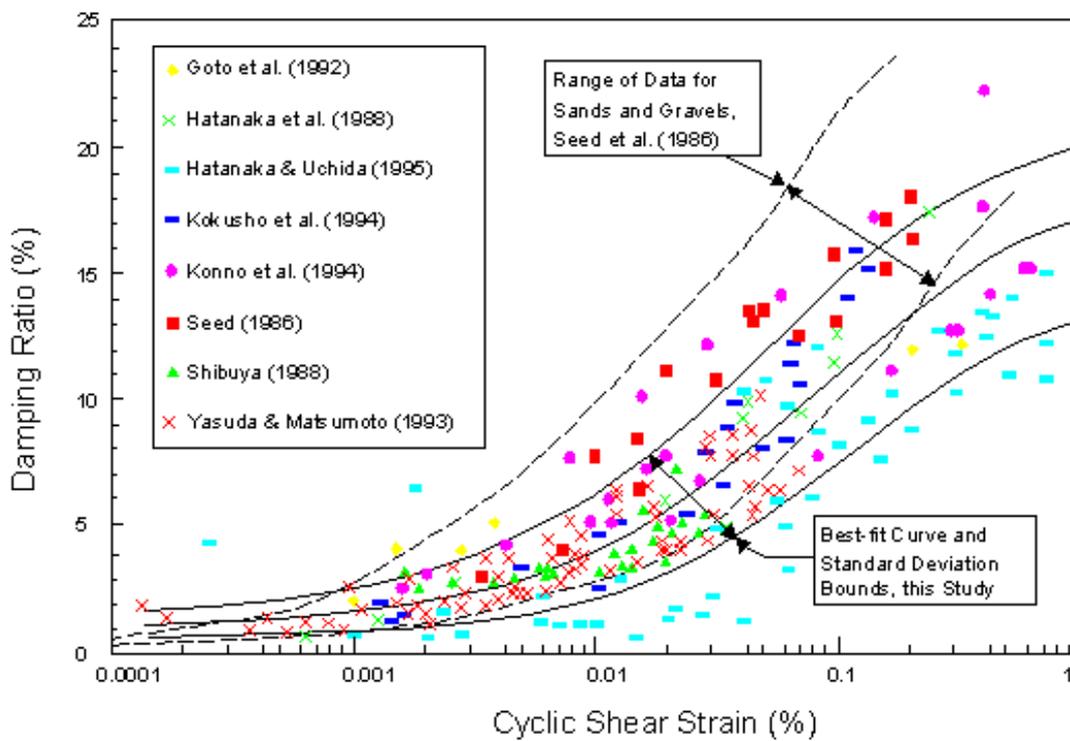


Figura 4.26: Variación del amortiguamiento con la deformación de corte en Gravas. [Rollins et al., 1998]

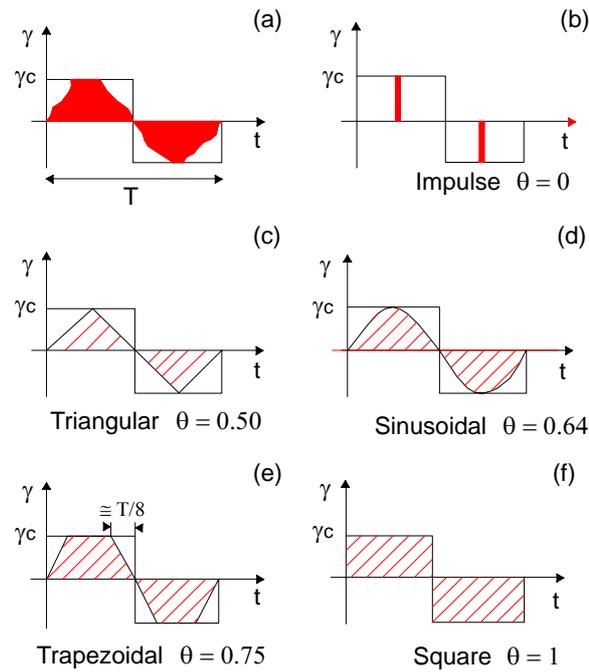


Figura 4.27: Forma de la deformación cíclica en el tiempo [Vucetic et al., 1998b]

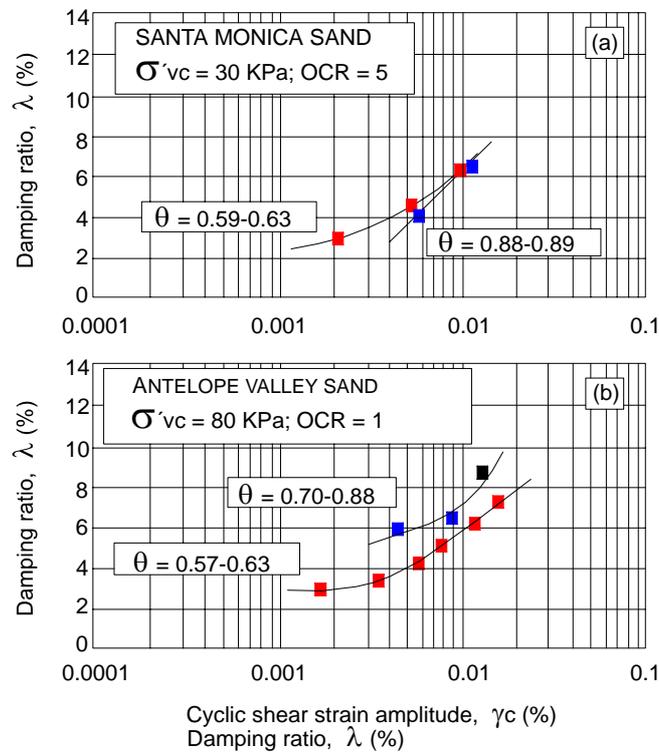


Figura 4.28: Efecto de la forma de la deformación cíclica sobre λ para: a) Arena limpia de Santa Mónica; b) Arena limosa del valle Antelope [Vucetic et al., 1998b].

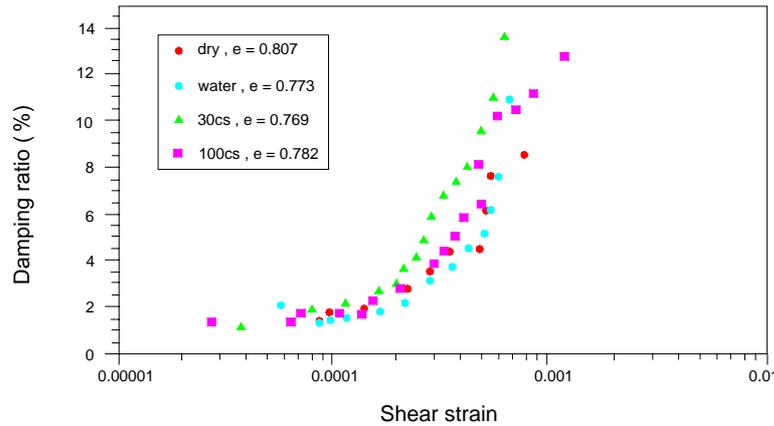


Figura 4.29: Relaciones de amortiguamiento medidas versus deformación de corte, para una arena silíceica gruesa, en condición seca, con agua y con dos tipos de aceite como fluido (30 cs y 100 cs) [Ellis et al., 2000]

1996], que concuerdan con las hipótesis de histéresis propuestas por algunos investigadores. Elgama observó que las excitaciones sísmicas de alta frecuencia daban relaciones de amortiguamiento mayores a las estimadas a partir de las relaciones que asumen histéresis, subestimando de esta manera la respuesta medida.

El autor propone por tanto, que la arena presenta dos tipos de amortiguamiento: en primer lugar el amortiguamiento del esqueleto sólido y en segunda instancia el amortiguamiento viscoso generado por las velocidades de flujo interno ocasionadas por el reacomodamiento de las partículas, el cual se puede incrementar con la frecuencia. Los resultados obtenidos por los autores muestran que hay una significativa componente no histéretica del amortiguamiento (figuras 4.29 a 4.31), afectada por el cambio de viscosidad del fluido. El autor encuentra que la presencia de una alta viscosidad del fluido incrementa el amortiguamiento aún a pequeñas deformaciones. Este fenómeno es aún más notable en la arena fina silíceica como se observa al comparar el amortiguamiento en una arena saturada con agua y otra con 100 cS de aceite (figura 4.32).

Los autores también analizan la expresión propuesta por Bolton [Bolton & Wilson, 1990], para el cálculo del amortiguamiento viscoso (ecuación 4.19). Lo anterior significa que el cambio en el amortiguamiento entre ensayos con diferentes fluidos será:

$$\Delta D = \frac{F_v \Delta \eta \omega}{G} \quad (4.22)$$

donde $\Delta \eta$ es la diferencia en viscosidad entre fluidos.

La ecuación 4.22 implica que el amortiguamiento viscoso es independiente de la deformación si F_v permanece constante, es decir, prevalece un mecanismo de deformación sencilla. Sin embargo, los ensayos realizados por Bransby y Soga [Bransby & Soga, 1996], permiten concluir que una gran proporción de partículas se reacomodan a grandes deformaciones de corte, por lo que F_v se incrementa con las deformaciones de corte y con la disminución en el tamaño de las partículas. (figuras 4.33 y 4.34).

Finalmente Ellis [Ellis et al., 2000], teniendo en cuenta los anteriores resultados experimentales proponen la siguiente expresión para el amortiguamiento viscoso:

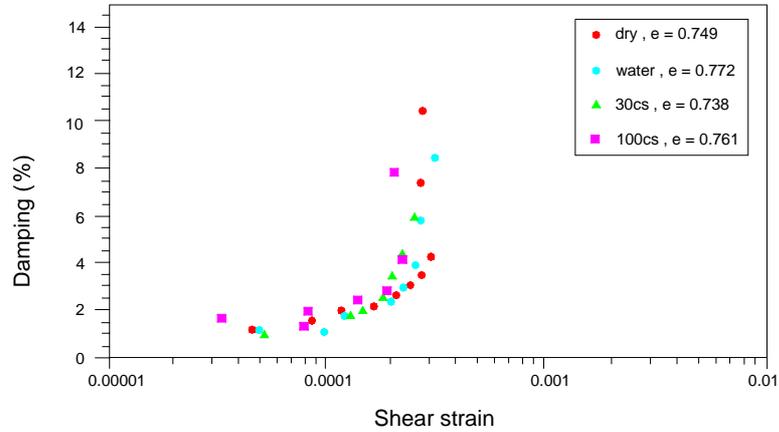


Figura 4.30: Relación de amortiguamiento medida versus deformación de corte para la arena de Toyoura, en condición seca, con agua y con dos tipos de aceite como fluido (30 cs y 100 cs) [Ellis et al., 2000]

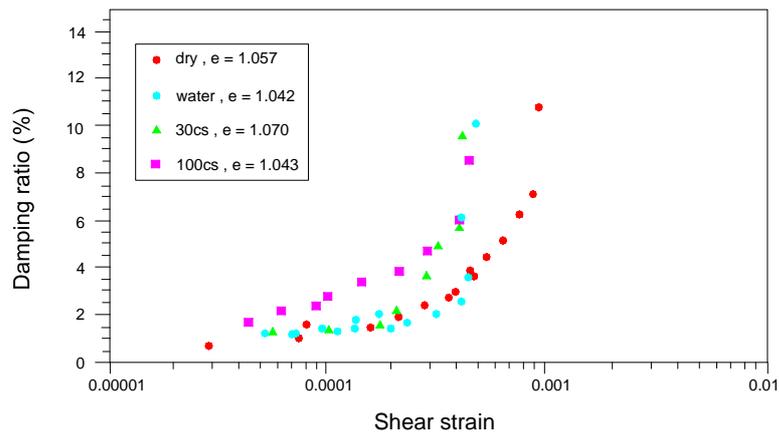


Figura 4.31: Relación de amortiguamiento medida versus deformación de corte sobre arena sílicea fina, en condición seca, con agua y con dos tipos de aceite como fluido (30 cs y 100 cs) [Ellis et al., 2000]

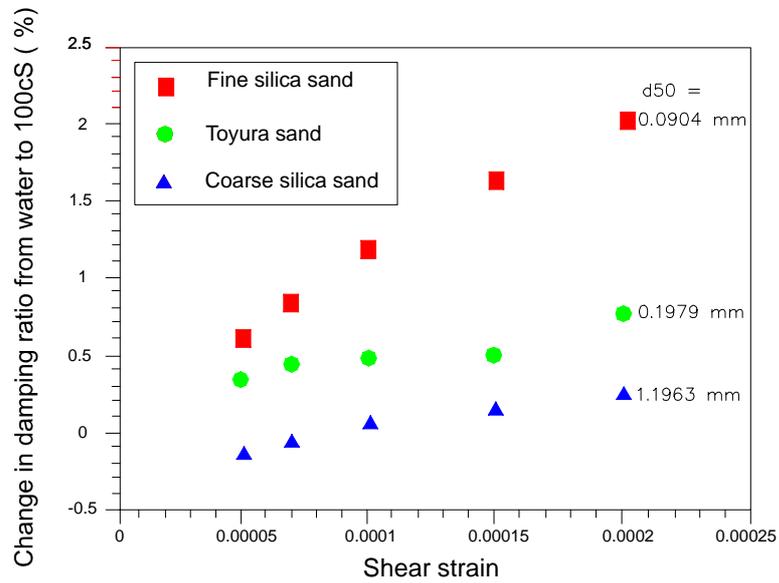


Figura 4.32: Cambio en la relación de amortiguamiento entre muestras de agua y muestras de aceite de 100 cS [Ellis et al., 2000]

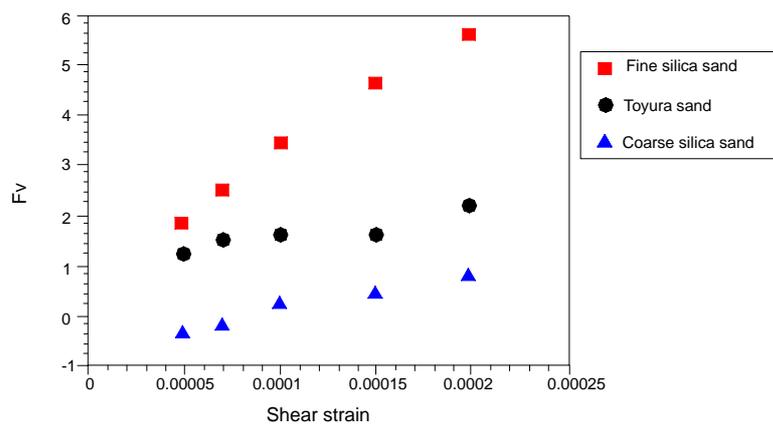


Figura 4.33: Variación de la deformación de corte con F_v [Bransby & Soga, 1996]

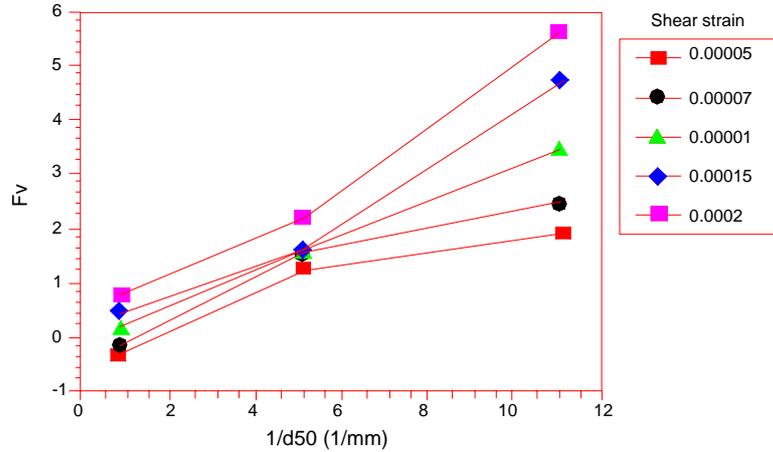


Figura 4.34: Variación de F_v con el tamaño inverso de la partícula [Bransby & Soga, 1996]

$$D_v = C_2 \gamma^{\frac{b}{3}} \left(\frac{1}{d_{50}} \right) \left(\frac{\mu f}{G} \right) \quad (4.23)$$

Donde $C_2 = 14.1 * 10^3$, $\gamma = \text{deformación de corte}$, $b = 2.16$, $d_{50} = \text{tamaño de la partícula}$ en mm, $f = \text{frecuencia}$. Si comparamos la expresión 4.23 con la expresión propuesta por Bolton (ecuación 4.19) encontramos que:

$$F_v = C_2 \left(\frac{1}{d_{50}} \right) \gamma^{\frac{b}{3}} \quad (4.24)$$

Si graficamos la expresión 4.24, con los valores medidos en ensayos de laboratorio, y utilizando $C_2 = 14.1 * 10^3$, $b = 2.13$, se encuentra una buena correlación entre los datos experimentales y la curva propuesta por los autores (figura 4.35). Estos resultados serán de gran utilidad en el modelo que se desarrollará más adelante.

4.4 Soluciones Analíticas

4.4.1 Teoría de Biot

La teoría de Biot [Biot, 1956], está orientada a evaluar la propagación de ondas en un medio elástico poroso, saturado por un fluido viscoso. Las hipótesis utilizadas por Biot en su teoría son las siguientes:

1. El medio poroso está saturado.
2. El fluido es compresible y el flujo a través de los poros genera fricción.
3. El movimiento relativo del fluido a través de los poros es de tipo Poiseuille; esta condición es válida para frecuencias inferiores a f_t , la que a su vez depende de la viscosidad cinemática del fluido y del tamaño de los poros.
4. Se asume que el fluido es un líquido, despreciándose efectos térmicos.

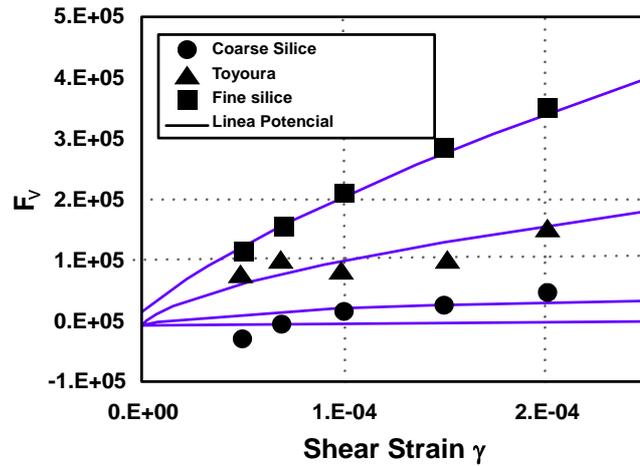


Figura 4.35: Variación de F_v con la amplitud de la deformación de corte y el tipo de arena. Datos experimentales comparados con la expresión 4.23. [Ellis et al., 2000]

5. Las paredes de los poros son impermeables.
6. El suelo es estadísticamente isotrópico.
7. El modelo es válido para pequeñas deformaciones.
8. El tamaño de las partículas sólidas es grande comparado con el tamaño de los poros.

A partir de las anteriores hipótesis Biot [Biot, 1956] propone las siguientes relaciones tensión-deformación para un medio elástico saturado:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= 2G\epsilon_1 + \lambda\epsilon + Q\epsilon \\
 \sigma_2 &= 2G\epsilon_2 + \lambda\epsilon + Q\epsilon \\
 \sigma_3 &= 2G\epsilon_3 + \lambda\epsilon + Q\epsilon \\
 s &= Q'\epsilon + R\epsilon
 \end{aligned}
 \tag{4.25}$$

Donde λ, G son las constantes de Lamé, ϵ es la deformación volumétrica, R es una medida de la presión requerida sobre el fluido para forzar a un cierto volumen de fluido en el suelo mientras el volumen total permanece constante, Q corresponde al acoplamiento entre cambios de volumen del sólido y del fluido (Para el caso isotrópico Biot [Biot, 1956], asume que $Q' = Q$).

Con las anteriores hipótesis se obtiene la ecuación de propagación de ondas en un medio elástico saturado:

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 \epsilon + Q \nabla^2 \epsilon = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \epsilon + \rho_{12} \epsilon)
 \tag{4.26}$$

$$\nabla^2 [Q\epsilon + R\epsilon] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} \epsilon + \rho_{22} \epsilon)
 \tag{4.27}$$

Donde ρ_{11} , ρ_{12} , y ρ_{22} , son coeficientes de masa los cuales tiene en cuenta el hecho de que el flujo del fluido a través de los poros no es uniforme. La solución de las anteriores ecuaciones corresponde a dos ondas dilatacionales y una de rotación. Biot demostró además que existen tres clases de acoplamiento: inercial, viscoso y mecánico, pero que sólo los acoplamientos mecánico e inercial son responsables de la existencia de la dos ondas compresionales. Si el acoplamiento viscoso es muy alto, el movimiento relativo entre las dos fases no existe durante la propagación del pulso, de manera que sólo existe una onda compresional y el material se comporta como un medio de una sola fase. Además encontró que dependiendo del tipo de fenómeno, el acoplamiento viscoso puede ser constante o variable: para problemas de baja frecuencia, el acoplamiento viscoso es constante y está dado por el coeficiente de permeabilidad, pero para problemas de alta frecuencia, el acoplamiento viscoso depende de la frecuencia.

Ishihara [Ishihara, 1968], trata de encontrar significado físico a las constantes propuestas por Biot [Biot, 1956]; el autor propone que para el caso de deformaciones elásticas, las expresiones de Biot se pueden aproximar al de propagación de ondas en un medio elástico. Ishihara [Ishihara, 1968], comenta que algunas de las constantes de la teoría de Biot (ecuaciones 4.25 y 4.26) no son claras, de manera que tales constantes, deberán ser correlacionadas con algunas propiedades de los materiales, digamos del suelo y del agua, para lo cual propone las siguientes expresiones:

$$\alpha = \frac{(n-1)^2 C_p + (n-1) C_s + C_l}{C_b (C_l - C_s) + C_p C_s} \quad (4.28)$$

$$\alpha_c = \frac{-n [(n-1) C_p + C_s]}{C_b (C_l - C_s) + C_p C_s} \quad (4.29)$$

$$k_c = \frac{n C_b}{C_b (C_l - C_s) + C_p C_s} \quad (4.30)$$

Donde C_b corresponde a la compresibilidad volumétrica del esqueleto sólido, C_s es la compresibilidad de las partículas sólidas, C_p compresibilidad de los poros, C_l compresibilidad del fluido y n la porosidad. Ishihara [Ishihara, 1968] anota que las anteriores compresibilidades no son independientes, sino que por el contrario están relacionadas mediante la siguiente expresión:

$$C_b = n C_p + C_s \quad (4.31)$$

Las constantes α , α_c y k_c son las mismas introducidas por Biot [Biot, 1956], y la correspondencia entre las mismas se ilustra en la siguiente tabla 4.1 . Donde en la teoría de Biot [Biot, 1956], λ y G corresponden a las constantes de Lamé de la teoría de la elasticidad. El coeficiente G representa el módulo de corte del material. El coeficiente R es una medida de la presión requerida sobre el fluido para forzar un cierto volumen del fluido en el esqueleto del sólido, mientras el volumen total se mantiene constante, y el coeficiente Q es el acoplamiento existente entre el cambio de volumen del sólido y del fluido.

Por otro lado Skempton [Skempton, 1954] reporta los siguientes valores de compresibilidad para las arenas:

Material	$C_b \left(\frac{cm^2}{Kg} 10^{-6} \right)$	$C_s \left(\frac{cm^2}{Kg} 10^{-6} \right)$
Arena suelta	9000	2.7
Arena densa	1800	2.7

Notación de Biot	Notación de Ishihara
λ	$\alpha - \frac{2}{3}\mu$
Q	α_c
R	k_c
G	μ

Tabla 4.1: Comparación entre la notación de Biot y de Ishihara

MUESTRA DE ARENA SECA

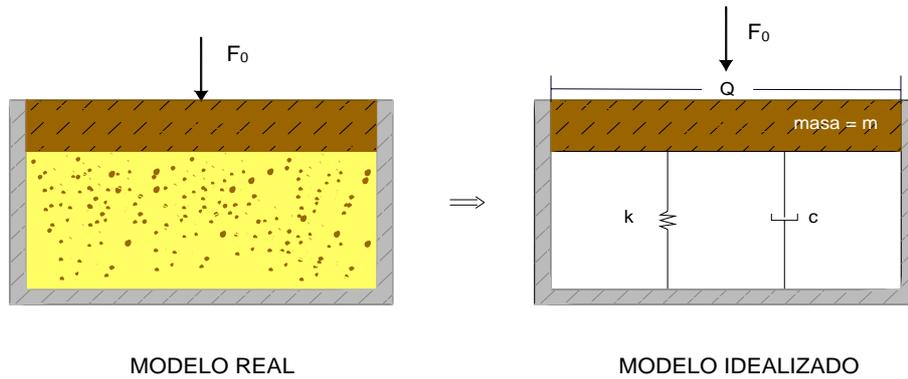


Figura 4.36: Modelo Conceptual - Formulación u-p, caso seco

4.5 Modelo para la Matriz de Acoplamiento

4.5.1 Suelo Seco

Supongamos que tenemos un recipiente que contiene arena suelta seca, la cual es sometida a una carga periodica de frecuencia ω (figura 4.36); La ecuación de equilibrio para este caso será:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = F_o \sin wt \tag{4.32}$$

Donde $m = \text{masa}$, $c = \text{coeficiente de amortiguamiento}$, $K = \text{rigidez}$, $w = \text{frecuencia de la forzante}$

Debido a que se trata de una ecuación diferencial ordinaria, lineal a coeficientes constantes, de segundo orden, no homogénea, tiene solución compuesta de la suma de la solución particular no homogénea más la solución general de la homogénea. Es decir:

$$u(t) = u_g(t) + u_p(t) \tag{4.33}$$

Siendo $u_g(t)$ la solución general de la no homogénea, y $u_p(t)$ la solución particular de la homogénea. A continuación presentaremos la solución analítica de la ecuación 4.32.

Solución particular de la no homogénea

La solución particular puede expresar como:

$$u_p(t) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) \quad (4.34)$$

Siendo A_1 y A_2 constantes a determinar y ω la frecuencia de la forzante. Realizando las correspondientes derivadas y sustituyendo en 4.32 se obtiene:

$$m(-A_1\omega^2 \sin \omega t - A_2\omega^2 \cos \omega t) + c(A_1\omega \cos \omega t - A_2\omega \sin \omega t) + K(A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t) = F_o \sin \omega t \quad (4.35)$$

Operando e igualando las anteriores expresiones se llega finalmente a:

$$(-mA_1\omega^2 - A_2c\omega + KA_1) \sin \omega t = F_o \sin \omega t \quad (4.36)$$

$$(-mA_2\omega^2 - A_1c\omega + KA_2) \cos \omega t = 0 \quad (4.37)$$

De 4.36 se tiene:

$$\left(\frac{K}{m} - \omega^2\right) A_1 - A_2 \frac{c\omega}{m} = \frac{F_o}{m} \quad (4.38)$$

Manipulando 4.37 se obtiene:

$$\left(\frac{K}{m} - \omega^2\right) A_2 + A_1 \frac{c\omega}{m} = 0 \quad (4.39)$$

Despejando A_1 de la anterior ecuación:

$$A_1 = -A_2 \left(\frac{K}{m} - \omega^2\right) \frac{m}{c\omega} \quad (4.40)$$

Sustituyendo la ecuación 4.40, en la ecuación 4.38 obtenemos:

$$-\left(\frac{K}{m} - \omega^2\right) \left(\frac{K}{m} - \omega^2\right) \frac{m}{c\omega} A_2 - \frac{m}{c\omega} A_2 = \frac{F_o}{m} \quad (4.41)$$

Operando se llega a:

$$A_2 = -\frac{F_o c\omega}{(K - \omega^2 m)^2 + c^2 \omega^2} \quad (4.42)$$

De manera similar se obtiene A_1 :

$$A_1 = -\frac{F_o (K - \omega^2 m)}{(K - \omega^2 m)^2 + c^2 \omega^2} \quad (4.43)$$

Por tanto, al reemplazar los valores de A_1 y A_2 en la ecuación 4.34 se obtiene la solución particular:

$$u_p(t) = \frac{F_o (K - \omega^2 m)}{(K - \omega^2 m)^2 + c^2 \omega^2} \sin(\omega t) - \frac{F_o c\omega}{(K - \omega^2 m)^2 + c^2 \omega^2} \cos(\omega t) \quad (4.44)$$

La anterior fórmula se puede expresar como:

$$u_p(t) = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (4.45)$$

Donde la amplitud es:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{\frac{F_o^2 c^2 \omega^2 + F_o^2 (K - \omega^2 m)^2}{[(K - \omega^2 m)^2 + c^2 \omega^2]^2}} = \frac{F_o}{\sqrt{(K - \omega^2 m)^2 + c^2 \omega^2}} \quad (4.46)$$

Pero

$$D = \frac{c}{2\sqrt{Km}} \implies D^2 = \frac{c^2}{4Km} \quad (4.47)$$

Reemplazando en la expresión 4.46 se obtiene:

$$A = \frac{F_o}{\sqrt{K^2 \left(1 - \frac{\omega^2 m}{K}\right)^2 + c^2 \omega^2}} = \frac{\frac{F_o}{K}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4D^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \quad (4.48)$$

Donde $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Sea $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$, reemplazando en la expresión anterior se obtiene finalmente:

$$A = \frac{\frac{F_o}{K}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4D^2 \beta^2}} \quad (4.49)$$

Por otro lado, el ángulo de fase será:

$$\psi = \tan^{-1} \left(-\frac{A_1}{A_2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \beta^2}{2D\beta} \right) \quad (4.50)$$

Finalmente la solución particular será:

$$u_p(t) = \frac{\frac{F_o}{K}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4D^2 \beta^2}} \sin \left[\omega t + \tan^{-1} \left(\frac{1 - \beta^2}{2D\beta} \right) \right] = \frac{\frac{F_o}{K}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4D^2 \beta^2}} \sin [\omega t + \psi] \quad (4.51)$$

Solución general homogénea

Corresponde a la solución de la ecuación:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = 0 \quad (4.52)$$

Supongamos una solución del tipo:

$$u(t) = Ae^{rt} \implies \dot{u}(t) = Are^{rt} \implies \ddot{u}(t) = Ar^2 e^{rt} \quad (4.53)$$

Reemplazando las anteriores expresiones en la ecuación 4.52:

$$r^2 + \frac{c}{m}r + \omega_n^2 = 0 \quad (4.54)$$

La solución será del tipo

$$r = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \omega_n^2} \quad (4.55)$$

De la anterior expresión se obtiene el amortiguamiento crítico:

$$c_c = 2\sqrt{Km} \quad (4.56)$$

De manera que la relación de amortiguamiento se puede definir como:

$$D = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{Km}} \implies c = 2\sqrt{Km}D \quad (4.57)$$

Reemplazando 4.57 en 4.55 se obtiene:

$$r = \omega_n \left(-D \pm \sqrt{D^2 - 1} \right) \quad (4.58)$$

Para la solución de la anterior ecuación, nos limitaremos al caso subamortiguado, es decir $D^2 - 1 < 0$, caso en el cual la fórmula 4.58 toma la siguiente forma:

$$r = \omega_n \left(-D \pm i\sqrt{1 - D^2} \right) \quad (4.59)$$

Siendo la solución general:

$$u(t) = e^{-D\omega_n t} \left(A_3 \exp \left(i\omega_n \sqrt{1 - D^2} t \right) + A_4 \exp \left(-i\omega_n \sqrt{1 - D^2} t \right) \right) \quad (4.60)$$

La que se puede expresar como:

$$u(t) = e^{-D\omega_n t} \left(A_5 \cos \left(\omega_n \sqrt{1 - D^2} t \right) + A_6 \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - D^2} t \right) \right) \quad (4.61)$$

Definiendo la frecuencia amortiguada como $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - D^2}$, y reemplazando en la expresión 4.61, se obtiene:

$$u(t) = e^{-D\omega_n t} [A_5 \cos(\omega_D t) + A_6 \sin(\omega_D t)] \quad (4.62)$$

Que se puede expresar de la siguiente manera:

$$u(t) = e^{-D\omega_n t} [C \sin(\omega_D t + \varphi)] \quad (4.63)$$

Finalmente, la solución general será:

$$u(t) = \frac{\frac{F_0}{K}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4D\beta^2}} \sin[\omega t + \psi] + e^{-D\omega_n t} [C \sin(\omega_D t + \varphi)] \quad (4.64)$$

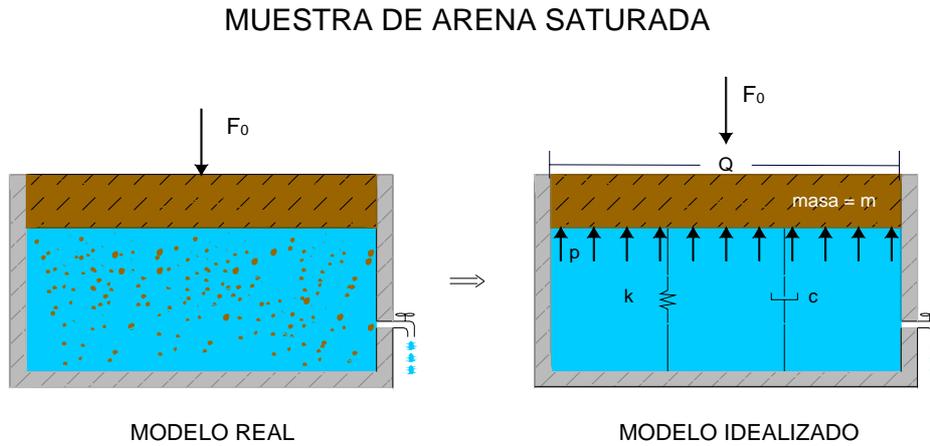


Figura 4.37: Modelo Conceptual - Formulación u-p, caso saturado

Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales para nuestro problema serán:

$t = 0, u_o = 0, \dot{u}_o = 0$; Imponiendo las anteriores ecuaciones en 4.64 y operando se obtiene:

$$\tan \varphi = \frac{\omega_D \sin \psi}{\omega \cos \psi + \omega_n D \sin \psi} \quad (4.65)$$

y,

$$C = - \frac{\frac{F_o}{K} \sin \psi}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4D^2\beta^2} \sin \varphi} \quad (4.66)$$

Utilizando la ley de los senos, la anterior expresión queda finalmente:

$$C = - \frac{\frac{F_o}{K} \sin \psi}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4D^2\beta^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_D \sin \psi}{\omega \cos \psi + \omega_n D \sin \psi} \right)^2} \quad (4.67)$$

4.5.2 Suelo Saturado

Supongamos un recipiente con arena saturada, el cual se puede idealizar como se ilustra en la figura 4.37. Para este caso se requiere plantear tanto la ecuación de equilibrio, como la de continuidad. A continuación se presentarán las expresiones que permiten modelar satisfactoriamente el modelo físico planteado.

Ecuación de momento.

Partiendo del modelo idealizado tenemos:

$$m\ddot{u} = -Ku - c\dot{u} + Qp + f_1(t) \quad (4.68)$$

Donde m es la masa del elemento, Q es el área de contacto entre el fluido y la partícula, p es la presión del fluido ejercida sobre la sección Q . Reordenando terminos, obtenemos la siguiente expresión:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku - Qp = f_1(t) \quad (4.69)$$

Ecuación de Continuidad

Aplicando la ecuación de continuidad a nivel del poro, y observando los factores que hacen cambiar el contenido del agua dentro del mismo tenemos:

- Cambio de volumen por un cambio en du :

$$dV = Qdu \quad (4.70)$$

- Cambio de volumen por la compresibilidad del agua (el agua se comprime y cabe más):

$$dV = V_o \frac{dp}{K_w} = Sdp \quad (4.71)$$

Donde V_o es el volumen de agua en el poro, K_w es el módulo de rigidez volumétrica del fluido. Como se observa S es un parámetro que incluye la compresibilidad (el inverso de la rigidez del fluido), y el volumen del poro.

- Cambio de volumen porque se va agua fuera del poro (efecto de la permeabilidad). El volumen de agua que se escapa sería $q_f dt$, donde q_f es el caudal que sale, que sigue la ley de Darcy, es decir:

$$dV = q_f dt = kA \frac{\Delta \phi}{L} dt \quad (4.72)$$

$$\text{Donde } \phi = z + \frac{p}{\gamma_w}$$

Donde ϕ es el potencial (o altura piezométrica), A es el área de la sección del paso de agua, L es la longitud recorrida por el agua y k es la permeabilidad. En este caso podemos suponer que no influye la cota, es decir, la z en el potencial (sería como suponer que sale el agua horizontal). Por otra parte, el incremento de presiones es la diferencia entre la presión interior p , y la exterior, que puede suponerse nula (la atmosférica). Entonces resulta:

$$dV = qdt = k \frac{A}{\gamma_w} \frac{p}{L} dt = Hpdt \quad \text{siendo } H = \frac{k}{\gamma_w} \frac{A}{L} \quad (4.73)$$

Nótese que el parámetro H en realidad no es la permeabilidad directamente, sino que incluye $A =$ área de salida del agua (sección del "tubo" de salida de agua), y $L =$ longitud recorrida por el agua (algo así como la distancia entre el centro del poro y el "tubo de salida").

Al juntar la contribución al cambio de volumen de las expresiones 4.70 a 4.73 en la unidad de tiempo obtenemos:

$$Q\dot{u} + S\dot{p} + Hp = f_2(t) \quad (4.74)$$

Donde $f_2(t)$ representa un caudal impuesto, variable en el tiempo. Las anteriores ecuaciones se pueden resolver para el caso de $f_1(t)$ periódica y asumiendo que tanto $f_2(t)$ como la compresibilidad S son nulas, obteniéndose:

$$Q\dot{u} + Hp = 0 \implies p = -\frac{Q}{H}\dot{u} \quad (4.75)$$

Reemplazando en 4.69 se obtiene:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku + \frac{Q^2}{H}\dot{u} = f_1(t) \quad (4.76)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku + \frac{Q^2}{H}\dot{u} = F_o \sin wt \quad (4.77)$$

Reordenando términos se obtiene:

$$m\ddot{u} + \left(c + \frac{Q^2}{H}\right)\dot{u} + Ku = F_o \sin wt \quad (4.78)$$

Nótese que la anterior expresión incluye dos términos de amortiguamiento: en primer lugar uno correspondiente al amortiguamiento hysterético representado por c , y otro que representa el amortiguamiento viscoso dado por el término $\frac{Q^2}{H}$. La solución de la ecuación 4.78, es muy similar a la del caso seco, representada por la ecuación 4.64. En este orden de ideas, la solución será:

$$u(t) = \frac{\frac{F_o}{K}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4D\beta^2}} \sin [\omega t + \psi] + e^{-D\omega t} [C \sin (\omega_D t + \varphi)] \quad (4.79)$$

Con:

$$D = D_H + D_v \quad (4.80)$$

Siendo:

D = relación de amortiguamiento total

D_H = relación de amortiguamiento hysterético

D_v = relación de amortiguamiento viscoso.

Los restantes términos: φ y C , están dados por las ecuaciones 4.65 y 4.67.

Con relación a los términos de la ecuación 4.80, tenemos lo siguiente:

$$D_H = \frac{c}{2\sqrt{Km}} \quad (4.81)$$

Nótese que en la expresión anterior el amortiguamiento viscoso depende de Q^2 y H , y por tanto lo podríamos expresar como:

$$c_v = \frac{Q^2}{H} \simeq \frac{Q^2}{\frac{kA}{\gamma_w L}} \simeq \frac{Q^2 \gamma_f L}{kA} \quad (4.82)$$

Es decir, c_v aumenta si disminuye la permeabilidad, sin cambiar el tamaño de las partículas mucho. Adicionalmente, utilizando la fórmula de Kozeny, obtenemos la siguiente expresión para la permeabilidad:

$$k = cte * d^2 \frac{e^3}{1 + e} \frac{\gamma_f}{\mu_f} \quad (4.83)$$

Donde cte es una constante, d es el diámetro de las partículas, e es la relación de vacíos, γ_f es el peso específico del fluido y μ_f la viscosidad del fluido. Por tanto al reemplazar 4.82 en 4.83, obtenemos:

$$c_v = \frac{Q^2 L \mu_f}{cte * d^2 \frac{e^3}{1+e} A} \quad (4.84)$$

Por tanto a mayor viscosidad del fluido, más amortiguamiento (en una relación lineal). La relación de amortiguamiento finalmente quedaría:

$$D_v = \frac{Q^2 L \mu_f (1 + e)}{2\sqrt{Km} cte * d^2 A e^3} \quad (4.85)$$

La anterior expresión se puede comparar con la propuesta por Ellis [Ellis et al., 2000]:

$$D_v = F_v \frac{\mu_f f}{G} \quad (4.86)$$

Igualando 4.85 y 4.86 queda:

$$\frac{Q^2 L}{A} = \left(\frac{2\sqrt{km}}{G} f \right) \left(\frac{e^3}{1+e} cte * d^2 F_v \right) \quad (4.87)$$

La anterior expresión se ha dividido en dos partes, en la primera se presentan parámetros de rigidez, densidad y la frecuencia de la carga aplicada, el segundo paréntesis involucra las propiedades geométricas (tamaño de partículas, tamaño de los poros, etc).

Es decir, la variable Q es función del tamaño de las partículas y del tamaño de los poros. Por otro lado, la viscosidad del fluido depende de la temperatura como se ilustra en la figura 4.38. Sin embargo, los análisis que realizaremos a continuación se harán para una temperatura promedio de 20° C.

Análisis de Resultados

Como lo han mencionado Ellis y otros [Ellis et al., 2000], el amortiguamiento viscoso depende del fluido, el cual es función de la temperatura como se aprecia en la figura 4.38. En general para una temperatura de 20°C, se tienen los siguientes valores típicos:

fluido	Viscosidad $\mu_{ff} 10^{-3} Pa - s$
Aire	0.015
Agua	1.0
Aceite	100

Nótese que la relación de viscosidades entre una muestra saturada (fluido = agua) y una muestra seca (fluido = aire), es de 67, por tanto se debería esperar algún efecto sobre el amortiguamiento del suelo. Con el fin de verificar lo anterior, se simula el comportamiento de la arena de Toyoura, para el caso seco y saturado (agua y aceite). Se ha escogido este material debido a que los resultados experimentales de

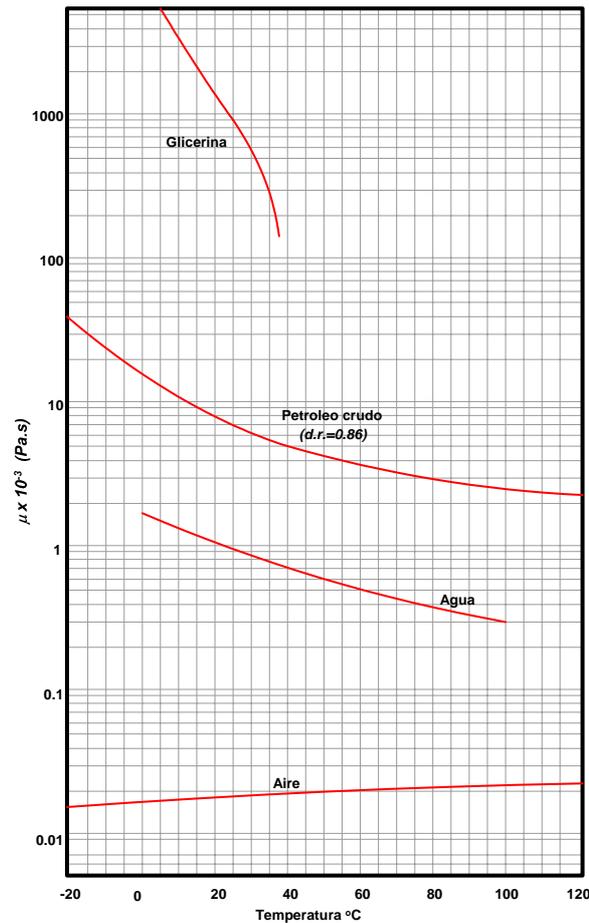


Figura 4.38: Viscosidad de algunos fluidos típicos

Bransby muestran que esta arena es bastante sensible al fluido utilizado. Los parámetros de la arena de Toyoura son los siguientes:

$D_r = 42\%$, $\rho_{sat} = 1803 \frac{Kg}{m^3}$, $d_{50} = 0.0904 \text{ mm}$, $G_{max} = 2.4 \times 10^6 \text{ Pa}$ muestra saturada-aceite, $G_{max} = 3.5 \times 10^6 \text{ Pa}$ muestra saturada-agua, $G_{max} = 6.7 \times 10^6 \text{ Pa}$ muestra seca. Para los anteriores parámetros se tienen las siguientes relaciones de amortiguamiento $D = 17\%$ para arena saturada-aceite, $D = 8\%$ para arena saturada-agua y $D = 4\%$ para arena seca Utilizando las expresiones 4.79 y 4.81, se obtienen los resultados ilustrados en la figura 4.39

De los resultados anteriores se concluye lo siguiente:

- La expresión propuesta por Ellis [Ellis et al., 2000], es válida para deformaciones de corte de hasta $2.5 \cdot 10^{-4}$, ya que para valores superiores los autores no presentan valores de F_v como se desprende de la figura 4.35.
- El fluido sí tiene influencia sobre el comportamiento dinámico de una muestra suelo saturada, aunque esta dependerá en gran medida de la viscosidad del fluido, así como del tamaño de la partícula. En general se observa que a mayor viscosidad del fluido mayor será el amortiguamiento del suelo y menor será la rigidez.

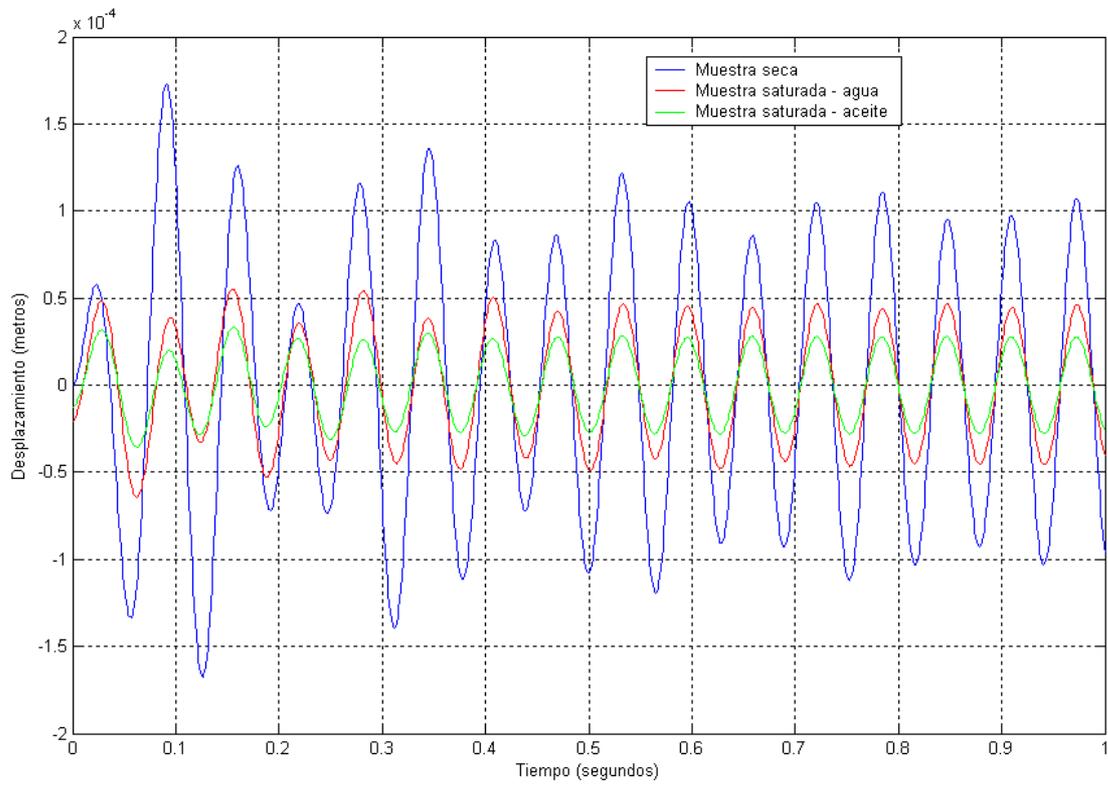


Figura 4.39: Efecto del fluido sobre el amortiguamiento del suelo

- Por otro lado, los resultados experimentales muestran que para deformaciones mayores a $3 * 10^{-4}$ el amortiguamiento viscoso se incrementa de manera importante, pasando de un 2% a un 17%; igualmente, se observa que a menor tamaño de la partícula el efecto del amortiguamiento viscoso cobra importancia.
- Las diferencias en los desplazamientos son realmente pequeñas, pero es indudable que en estudios de efectos locales donde se quieren obtener los espectros de respuesta, el hecho de no considerar el efecto del fluido puede tener efectos importantes en los resultados.
- A partir de la relación 4.82, la relación de amortiguamiento viscoso puede escribirse como:

$$D_v = \frac{c}{c_c} = \frac{Q^2 \gamma_f L}{2kA\sqrt{Km}} \quad (4.88)$$

Obsérvese que:

1. Si aumenta el nivel de deformaciones, y por tanto disminuye la rigidez K , entonces aumenta D_v , lo que coincide con el resultado experimental.
2. Si aumenta el peso específico del fluido, también aumenta D_v , lo que también es consistente con el resultado experimental.

Si se usa la expresión de Kozeny (4.83), entonces 4.88 queda como 4.84 y se observa que

- 1. Si la viscosidad del fluido aumenta entonces D_v aumenta, lo que concuerda con los experimentos.
- 2. Si aumenta el índice de poros, entonces D_v disminuye. En este caso se suele medir un D mayor, pero ello es debido a que el amortiguamiento histerético aumenta.

4.6 Conclusiones

- En la discretización espacial de las ecuaciones de Biot, surge un término denominado matriz Q , y al que comúnmente se le denomina matriz de acoplamiento entre las fase sólida y el fluido. Mediante el desarrollo de un modelo numérico sencillo se llega a la conclusión que esta matriz Q , es realmente función del tamaño de las partículas y del tamaño del poro, y sus componentes tienen dimensiones de superficie [m^2].
- Al utilizar las expresiones propuestas por Seed 1984, para el cálculo del amortiguamiento de una arena seca y una arena saturada, nos encontramos con que la arena seca presenta un amortiguamiento mayor al de una arena saturada (expresiones 4.15 y 4.16). Esto no es totalmente cierto, ya que si asumimos que el amortiguamiento total de la masa de suelo es la suma del amortiguamiento histerético más el amortiguamiento viscoso, la hipótesis de Seed, llevaría a que la viscosidad del aire es mayor a la del agua lo cual no es cierto. Por otro lado, el efecto del amortiguamiento viscoso se incrementa en la medida en que se incrementa la viscosidad del fluido
- El modelo conceptual presentado sirve, por tanto, para entender la dependencia entre los parámetros que intervienen en el sistema acoplado sólido-fluido en condiciones dinámicas.

Capítulo 5

DEFINICIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

5.1 Antecedentes

Se presentan a menudo una gran variedad de problemas en ingeniería en los que no existen condiciones de borde. Ejemplos específicos de ello, se encuentran en aplicaciones tales como la mecánica de fluidos, mecánica de sólidos, electromagnetismo, calor, transferencia de masa, etc. Sin embargo, la situación más frecuente se presenta en geotecnia, donde la modelación del campo lejano involucra dificultades numéricas. Para solucionar esta dificultad, se han desarrollado diversas técnicas que van desde soluciones analíticas del campo lejano [Lysmer & Kuhlmeyer, 1969], [Wood, 1976] hasta elementos de frontera [Brebbia, 1980], [Zienkiewicz et al., 1977].

Una simple aproximación en problemas geotécnicos consiste en el truncamiento del dominio infinito a una distancia finita con una condición de contorno impuesta (Condición de Dirichlet). Sin embargo, la localización del contorno finito es muy importante y la distancia mínima a la región de interés es frecuentemente cuestión de experiencia e intuición ya que la exactitud de la solución dependerá en gran medida de la localización de las condiciones de contorno. Kulhawy [Kulhawy, 1977], por ejemplo, con el fin de simular excavaciones propone que el tamaño de la malla sea del orden de 4 veces la altura del talud con el fin de minimizar las condiciones de borde (figura 5.1). Por otro lado, Chang [Chang, 1979], analiza el efecto de la ubicación de los contornos sobre la respuesta dinámica de presas de tierra; los autores ubican los contornos a diferentes distancias aguas arriba y aguas abajo del cuerpo de la presa, con el fin de verificar a qué distancia se produce la anulación de las ondas. La ubicación de tales contornos se ilustra en la figura 5.2, y los resultados de los análisis en la figura 5.3. El autor concluye que al colocar los contornos a una distancia de 1.5 veces el ancho de la cimentación de la presa, el efecto de reflexión de ondas es prácticamente despreciable. Aún con las anteriores recomendaciones, existe la contraparte sobre la utilización de grandes mallas donde el gasto computacional puede ser muy grande y costoso, aún con la utilización de poderosas máquinas de cómputo.

En el análisis de la respuesta sísmica de un suelo saturado, el modelo computacional está restringido al campo cercano, imponiendo para ello, restricciones tipo Dirichlet y Neumann, con la limitante adicional de reflexión de ondas, que en un momento dado pueden llegar a invalidar los resultados numéricos.

Por otro lado, cuando un modelo computacional bien sea en diferencias finitas o elementos finitos es utilizado para simular un problema dinámico en un medio infinito, es necesario asegurar que el truncamiento del modelo computacional transmita todas las ondas fuera del espacio finito. Se han

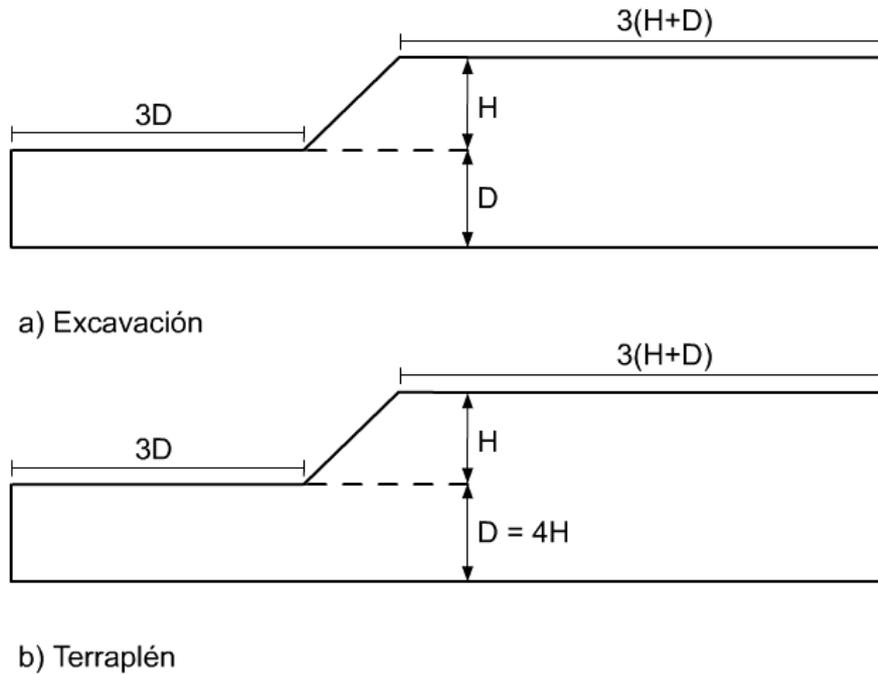


Figura 5.1: Tamaño de la malla para minimizar el efecto de las condiciones de borde (H = altura del talud, D = profundidad de análisis). [Kulhawy, 1977]

desarrollado muchas técnicas para no permitir la reflexión de ondas, destacándose el trabajo pionero de Lysmer [Lysmer & Kuhlmeyer, 1969], quien propone el uso de amortiguadores viscosos para absorber tanto las ondas de compresión como las ondas de corte. Sin embargo la efectividad de estos contornos se ve fuertemente afectada por el ángulo de incidencia de la onda.

En 1977, White [White et al., 1977] desarrolla un contorno unificado el cual difiere del contorno viscoso propuesto por Lysmer, en los coeficientes del contorno, con el fin de evitar la reflexión de ondas que no incidan normales al contorno y extender su uso a materiales anisotrópicos. El contorno unificado propuesto por los autores realmente no presenta ningún beneficio computacional. De hecho, Cohen [Cohen & Jennings, 1983] estudió el contorno unificado y concluyó que numéricamente el contorno unificado no es mejor que el contorno viscoso y que además es más complicado de implementar.

Smith [Smith, 1974], basado en el principio de imágenes virtuales propone un esquema para lograr un contorno no reflectivo. La principal limitante del método es que está restringida a materiales lineales, debido a que el método asume implícitamente el principio de superposición en el dominio de cómputo y además se pueden presentar fallas en la anulación de las ondas.

Shen [Shen, 1988] propone una generalización del contorno Smith, el cual es extendido al caso bidimensional y válido para una sola fase (no tiene en cuenta el efecto del fluido).

En trabajos recientes sin embargo, el efecto del campo lejano es tenido en cuenta de manera aproximada mediante la imposición de contornos artificiales en la interface campo cercano-lejano. Mediante dichos contornos se intenta satisfacer la condición de radiación [Higdon, 1990], de manera que la reflexión de las ondas provenientes de la estructura o del sismo sean eliminadas.

Se han desarrollado varias técnicas para la utilización de elementos absorbentes en el caso de un suelo saturado. Dentro de estas se destaca un modelo sencillo propuesto por Pastor [Pastor et al., 1997],

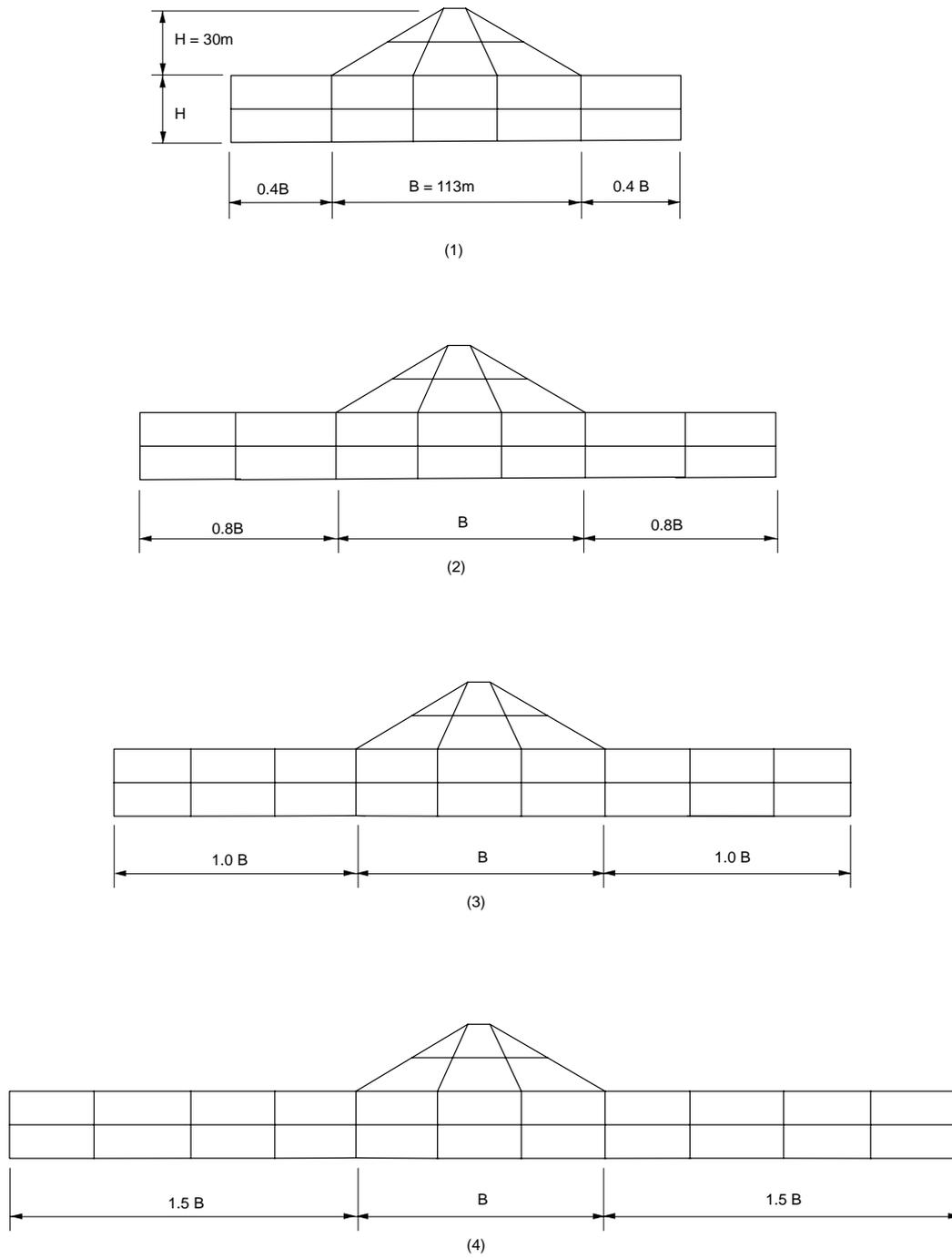


Figura 5.2: Efecto de la ubicación de las condiciones de contorno, en función del ancho de la presa. 1) $0.4B$, 2) $0.8B$, 3) $1.0B$, 4) $1.5B$ [Chang, 1979]

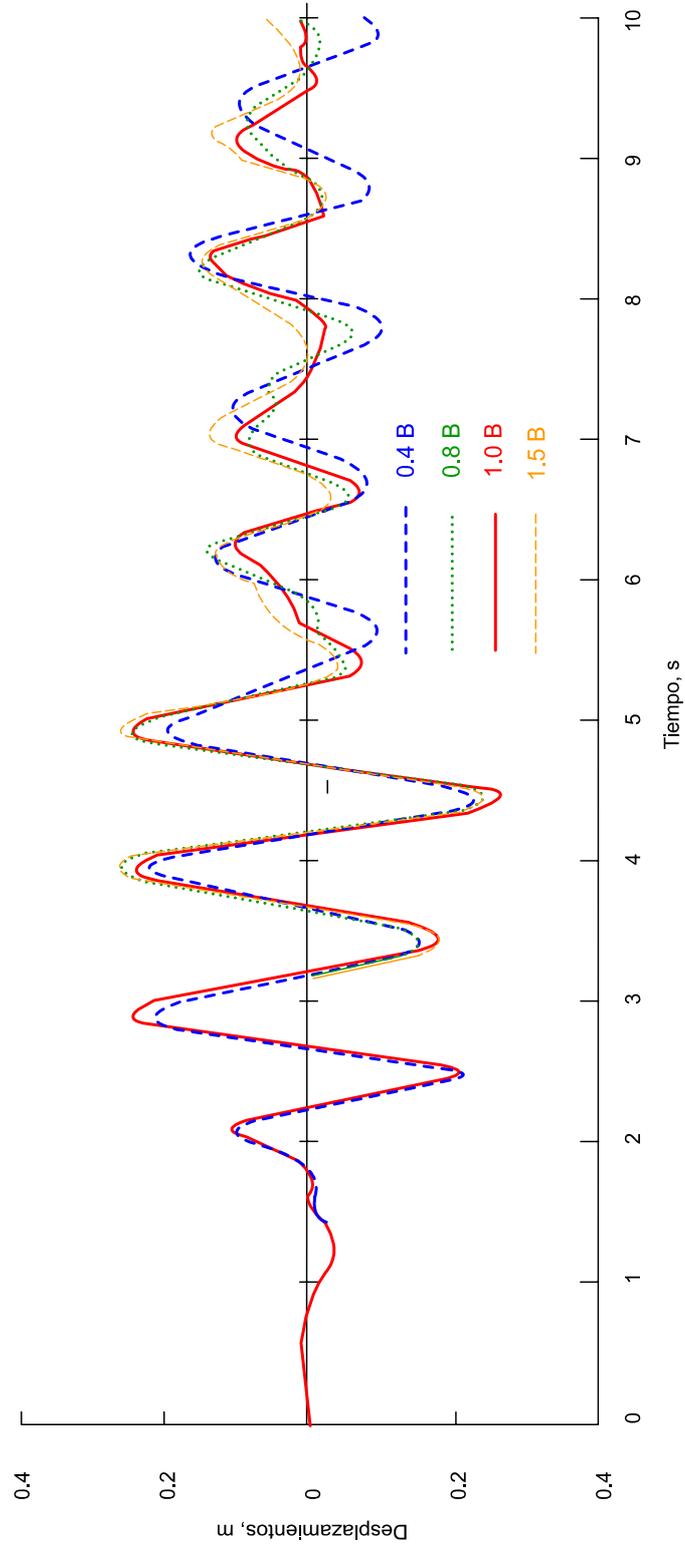


Figura 5.3: Historia temporal de los desplazamientos en la cresta de la presa. [Chang, 1979]

el cual es válido en el dominio de la frecuencia y por tanto aplicado a problemas lineales.

Modelos más elaborados válidos en el dominio del tiempo son los de Akiyoshi [Akiyoshi et al., 1994], Modaressi [Modaressi & Benzenatti, 1994], Akiyoshi [Akiyoshi et al., 1996], Modaressi [Modaressi, 1997] y Gajo [Gajo et al., 1996]. Finalmente es importante destacar que se intentó utilizar elementos infinitos para evitar las reflexiones de las ondas [Bettes, 1992]. Sin embargo, debido que el uso de los elementos infinitos, implica el conocimiento a priori de las funciones de decadencia, no fué posible obtenerlas. Khalili [Khalili et al., 1997],[Khalili et al., 1999] desarrolla un elemento unidimensional infinito que es válido en el dominio de la frecuencia y además restringido para las ondas \mathbf{P} , lo cual limita los análisis a casos elásticos.

5.2 Ecuaciones de Campo

En lo que sigue se presentará el desarrollo matemático utilizado para la obtención del elemento absorbente, para lo cual se utilizará el procedimiento propuesto por Philippacopoulos [Philippacopoulos, 1988], quien encuentra la solución analítica de propagación de ondas en un medio elástico saturado al ser sometido a una carga concentrada periódica ($P_0 e^{i\omega t}$).

La teoría de Biot describe la ecuación del movimiento para un medio poroso saturado. La ecuación diferencial del movimiento y flujo para el caso bidimensional (la extensión al caso 3D es directa), es la siguiente:

$$\mu \nabla^2 u_x + (\mu + \lambda + \alpha Q^2) \frac{\partial e}{\partial x} + \alpha Q \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho u_x + \rho_f w_x) \quad (5.1)$$

$$\mu \nabla^2 u_z + (\mu + \lambda + \alpha Q^2) \frac{\partial e}{\partial z} + \alpha Q \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho u_z + \rho_f w_z) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\alpha Q e + Q \zeta) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_f u_x + \frac{\rho_f}{n} w_x \right) + \frac{\rho_f g}{k} \frac{\partial w_x}{\partial t} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\alpha Q e + Q \zeta) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_f u_z + \frac{\rho_f}{n} w_z \right) + \frac{\rho_f g}{k} \frac{\partial w_z}{\partial t} \quad (5.4)$$

Donde

- λ, μ = Constantes de Lamé
- n = Porosidad
- k = Permeabilidad
- K_s, K_f = Módulo de rigidez del sólido y del fluido
- ρ, ρ_f = Densidad de la mezcla y del fluido
- g = Aceleración de la gravedad
- $\frac{1}{Q} = \frac{n}{K_f} + \frac{(\alpha - n)}{K_s}$
- $\alpha = 1 - \frac{K_d}{K_s}$
- K_d = Módulo de rigidez del esqueleto sólido
- e = Deformación volumétrica del sólido

$$e = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$\zeta =$ Deformación volumétrica del fluido

$$\zeta = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

$u_x, u_z =$ Desplazamiento de las partículas sólidas

$w_x, w_z =$ Desplazamiento del fluido

$g =$ Aceleración de la gravedad

Además:

$$p = -\alpha Qe - Q\zeta \quad (5.5)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + \alpha^2 Q) e + 2\mu e_{zz} + \alpha Q\zeta \quad (5.6)$$

Las ecuaciones 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 las vamos a convertir en una ecuación de onda. Para ello utilizaremos la descomposición de Helmholtz, que nos permite descomponer una onda como la suma del gradiente de un campo escalar más el rotacional de un campo vectorial:

$$u = \nabla\phi + \nabla \times \Psi \quad (5.7)$$

Para el caso tridimensional será:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Realizando operaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_2}{\partial z} \\ u_y &= \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_1}{\partial z} - \frac{\partial\Psi_3}{\partial x} \\ u_z &= \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para el caso bidimensional, que es el que nos interesa (plano x-z), se tiene:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_2}{\partial z} \\ u_z &= \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para nuestro caso las incógnitas son u, w , por tanto, los desplazamientos para el sólido y el fluido serán:

SOLIDO

$$u_x = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \quad (5.11)$$

$$u_z = \frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \quad (5.12)$$

fluido

$$w_x = \frac{\partial \phi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \quad (5.13)$$

$$w_z = \frac{\partial \phi_3}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial x}$$

A continuación vamos a expresar la ecuación 5.1 en términos de los campos escalares y vectoriales, para lo cual reemplazaremos 5.11 y 5.13 en 5.1. Debido a la extensión de las operaciones, sólomente se presentarán los resultados:

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi_2 \quad (5.14)$$

$$\zeta = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} \right) = \nabla^2 \phi_3 \quad (5.15)$$

Para el término $\mu \nabla^2 u_x$, se tiene:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u_x &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right) \right] \right\} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right) \right] \right\} \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi_2 - \mu \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \Psi_2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Términos de la derecha de la ecuación 5.1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_b u_x + \rho_f w_x) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\rho_b \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right) + \rho_f \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Reemplazando 5.14-5.17 en 5.1 se obtiene:

$$\begin{aligned} &\mu \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi_2 - \mu \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \Psi_2 + (\mu + \lambda + \alpha^2 Q) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi_2 + \alpha Q \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi_3 \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Para que la anterior ecuación se cumpla se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mu \nabla^2 \phi_2 + (\mu + \lambda + \alpha^2 Q) \nabla^2 \phi_2 + \alpha Q \nabla^2 \phi_3) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2} \right)$$

y

$$-\frac{\partial}{\partial z} (\mu \nabla^2 \Psi_2) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial t^2} \right)$$

Lo que equivale a:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q) \nabla^2 \phi_2 + \alpha Q \nabla^2 \phi_3 &= \rho \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2} \\ \mu \nabla^2 \Psi_2 &= \rho \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Se obtiene una expresión similar en la ecuación de continuidad. De manera que reemplazando 5.11 y 5.13 en 5.3 y 5.4 se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha Q \nabla^2 \phi_2 + Q \nabla^2 \phi_3 &= \rho_f \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + \frac{\rho_f}{n} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2} + \frac{\rho_f g}{k} \frac{\partial \phi_3}{\partial t} \\ 0 &= \rho_f \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} + \frac{\rho_f}{n} \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial t^2} + \frac{\rho_f g}{k} \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Las ecuaciones 5.19 y 5.20 se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera:

CAMPO ESCALAR (ONDAS P)

$$\begin{vmatrix} (\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q) & \alpha Q \\ \alpha Q & Q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \nabla^2 \phi_2 \\ \nabla^2 \phi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & \frac{\rho_f}{n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_f g}{k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial t} \end{vmatrix} \quad (5.21)$$

CAMPO VECTORIAL (ONDAS S)

$$\begin{vmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \nabla^2 \Psi_2 \\ \nabla^2 \Psi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & \frac{\rho_f}{n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial t^2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_f g}{k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} \end{vmatrix} \quad (5.22)$$

O de una forma más simplificada como:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_p \nabla^2 \Phi &= \mathbf{M} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \mathbf{C} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ \mathbf{k}_s \nabla^2 \Psi &= \mathbf{M} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \mathbf{C} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{vmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & \frac{\rho_f}{n} \end{vmatrix} \\
\mathbf{k}_p &= \begin{vmatrix} (\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q) & \alpha Q \\ \alpha Q & Q \end{vmatrix} \\
\mathbf{k}_s &= \begin{vmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_f g}{k} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

La ecuación 5.23 se puede expresar como:

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \mathbf{C} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mathbf{k}_p \nabla^2 \mathbf{Q} = 0 \tag{ONDAS P}$$

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \mathbf{C} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \mathbf{k}_s \nabla^2 \Psi = 0 \tag{ONDAS S}$$

La solución de ONDAS S no es directa, ya que hay derivadas parciales espaciales y temporales de segundo orden. Por tanto vamos a trabajar en el dominio de la frecuencia, ya que de esta manera eliminamos las derivadas temporales, para lo cual haremos uso de la transformada de Fourier

$$\left[f^F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \right].$$

Tomando la transformada de Fourier a ONDAS S con respecto a x y t se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} e^{-iwt} dt &= w^2 \mathbf{M} \bar{\Phi} \\
\mathbf{C} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t} e^{-iwt} dt &= -\mathbf{C} i w \bar{\Phi} \\
-\mathbf{k}_p \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \phi e^{-iwt} dt &= \mathbf{k}_p \frac{d^2 \bar{\Phi}}{dz^2} - k^2 \mathbf{k}_p \bar{\Phi} \\
\mathbf{M} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} e^{-iwt} dt &= -w^2 \mathbf{M} \bar{\Psi}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

La barra significa que nuestra variable esta en el dominio de la frecuencia. Finalmente en el dominio de la frecuencia la ecuación ONDAS P queda:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} \mathbf{k}_p + \mathbf{A}_p \right) \bar{\Phi} = 0 \tag{5.26}$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} \mathbf{k}_s + \mathbf{A}_s \right) \bar{\Psi} = 0 \tag{5.27}$$

Con:

$$\mathbf{A}_p = w^2 \mathbf{M} - iw \mathbf{C} - k^2 \mathbf{k}_p$$

$$\mathbf{A}_s = w^2 \mathbf{M} - iw \mathbf{C} - k^2 \mathbf{k}_s$$

Siendo w la frecuencia, y k el número de la onda

Consideremos una solución de las ecuaciones 5.26 y 5.27 de la forma:

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_0 \exp(-ipz) \quad (5.28)$$

$$\bar{\psi}_j = \bar{\psi}_{0j} \exp(-ipz) \quad (5.29)$$

Donde $\bar{\Phi}_0, \bar{\psi}_{0j}$ son vectores constantes. Luego sustituyendo 5.28 en 5.26 y 5.29 en 5.27, obtenemos el siguiente problema de valores propios asociados a los sistemas de ondas P y S:

ANÁLISIS DE ONDA P

Diferenciando la primera parte de la ecuación 5.26 obtenemos:

$$\frac{d^2 \bar{\phi}}{dz^2} = -p^2 \bar{\Phi}_0 \exp(-ipz) \quad (5.30)$$

Reemplazando 5.30 y 5.28 en 5.26:

$$\begin{aligned} (-p^2 \mathbf{k}_p + \mathbf{A}_p) \bar{\Phi}_0 \exp(-ipz) &= 0 \\ (-p^2 \mathbf{k}_p + \mathbf{A}_p) \bar{\Phi}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

La ecuación 5.31 es un problema de autovalores, cuya solución no trivial será:

$$\det(-p^2 \mathbf{k}_p + \mathbf{A}_p) = 0 \quad (5.32)$$

Reemplazando expresiones de 5.24 se tiene:

$$\begin{aligned} \det \left| -p^2 \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q) & \alpha Q \\ \alpha Q & Q \end{pmatrix} + w^2 \begin{pmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & \frac{\rho_f^2}{n} \end{pmatrix} - iw \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_f g}{k} \end{pmatrix} - k^2 \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q) & \alpha Q \\ \alpha Q & Q \end{pmatrix} \right| &= 0 \\ \det \left| \begin{array}{cc} -p^2 (\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q) + w^2 \rho - k^2 (\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q) & -p^2 \alpha Q + w^2 \rho_f - k^2 \alpha Q \\ -p^2 (\alpha Q) + w^2 \rho_f - k^2 \alpha Q & -p^2 Q + w^2 \frac{\rho_f^2}{n} - iw \frac{\rho_f g}{k} - k^2 Q \end{array} \right| &= 0 \\ \det \left| \begin{array}{cc} -(p^2 + k^2) (\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q) + w^2 \rho & -(p^2 + k^2) \alpha Q + w^2 \rho_f \\ -(p^2 + k^2) (\alpha Q) + w^2 \rho_f & -(p^2 + k^2) Q + w^2 \frac{\rho_f^2}{n} - iw \frac{\rho_f g}{k} \end{array} \right| &= 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Sea

$$\Lambda^2 = p^2 + k^2$$

Reemplazando en 5.33:

$$\det \begin{vmatrix} -(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q)\Lambda^2 + w^2\rho & -\Lambda^2\alpha Q + w^2\rho_f \\ -\Lambda^2\alpha Q + w^2\rho_f & -\Lambda^2Q + w^2\frac{\rho_f}{n} - iw\frac{\rho_f g}{k} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.34)$$

Operando se llega a la siguiente ecuación algebraica:

$$-\alpha^2 Q^2 \Lambda^4 + \alpha Q w^2 \rho_f \Lambda^2 - w^4 \rho_f + w^2 \rho_f \alpha Q \Lambda^2 + w^2 \rho \left(\frac{w^2 \rho_f}{n} - iw \frac{\rho_f g}{k} \right) = 0 \quad (5.35)$$

La solución de la anterior ecuación es:

$$\Lambda_{1,2}^2 = \frac{w^2}{V_{1,2}^2} \quad (5.36)$$

La anterior ecuación tiene dos raíces:

$$p_{1,2}^2 + k^2 = \frac{w^2}{V_{1,2}^2} \quad (5.37)$$

$$p_{1,2}^2 = \frac{w^2}{V_{1,2}^2} - k^2 \quad (5.38)$$

Obteniéndose las siguientes raíces:

$$p_1^2 = \frac{w^2}{V_1^2} - k^2 \quad \text{y} \quad p_2^2 = \frac{w^2}{V_2^2} - k^2 \quad (5.39)$$

Siendo k el número de onda y V_1, V_2 están dadas por las siguientes expresiones:

$$V_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_1} \quad \text{y} \quad V_2^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_2} \quad (5.40)$$

Donde ρ_1, ρ_2 y ρ_3 representan densidades efectivas dadas por:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_0 - \sqrt{\rho_0 + \frac{\lambda + 2\mu}{Q} \left[\rho_f^2 - \rho \left(\frac{\rho_f}{n} - \frac{i}{kw} \right) \right]} \\ \rho_2 &= \rho_0 + \sqrt{\rho_0 + \frac{\lambda + 2\mu}{Q} \left[\rho_f^2 - \rho \left(\frac{\rho_f}{n} - \frac{i}{kw} \right) \right]} \\ \rho_0 &= \frac{1}{2} \left[\rho - 2\alpha\rho_f + \frac{\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q}{Q} \left(\frac{\rho_f}{n} - \frac{i}{kw} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

Según 5.40 y 5.41, se han encontrado dos ondas P, que son función de las constantes de Lamé, y de un par de densidades ρ_1, ρ_2 dependientes de la frecuencia. Estas ondas son dispersivas y disipativas.

ANÁLISIS DE LA ONDA S

Para este caso, vamos a asumir que la solución de la ecuación 5.27, es del siguiente tipo:

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_0 \exp(-iqz) \quad (5.42)$$

Reemplazando 5.42 en 5.27 y diferenciando obtenemos:

$$\begin{aligned} -q^2 \mathbf{k}_s \bar{\boldsymbol{\psi}}_0 \exp(-iqz) + \mathbf{A}_s \bar{\boldsymbol{\psi}}_0 \exp(-iqz) &= 0 \\ [-q^2 \mathbf{k}_s + \mathbf{A}_s] \bar{\boldsymbol{\psi}}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Que al igual que la ecuación 5.26, es un problema de autovalores, de manera que la solución no trivial requiere:

$$\det |-q^2 \mathbf{k}_s + \mathbf{A}_s| = 0 \quad (5.44)$$

Reemplazando 5.24 en 5.44 se obtiene:

$$\det \left[-q^2 \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + w^2 \begin{pmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & \frac{\rho_f}{n} \end{pmatrix} - iw \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_f g}{k} \end{pmatrix} - k^2 \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \bar{\boldsymbol{\psi}}_0 = 0 \quad (5.45)$$

Operando:

$$\det \begin{vmatrix} -q^2 \mu + w^2 \rho - k^2 \mu & w^2 \rho_f \\ w^2 \frac{\rho_f}{n} & w^2 \frac{\rho_f}{n} - \frac{i w \rho_f g}{k} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.46)$$

Factorizando:

$$\det \begin{vmatrix} -(q^2 + k^2) \mu + w^2 \rho & w^2 \rho_f \\ w^2 \rho_f & w^2 \frac{\rho_f}{n} - \frac{i w \rho_f g}{k} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.47)$$

Sea

$$\Gamma^2 = q^2 + k^2 \quad (5.48)$$

Reemplazando en la anterior expresión y reorganizando términos:

$$\det \begin{vmatrix} -\Gamma^2 \mu + w^2 \rho & w^2 \rho_f \\ w^2 \rho_f & w^2 \frac{\rho_f}{n} - \frac{i w \rho_f g}{k} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.49)$$

Calculando el determinante llegamos a la siguiente expresión:

$$(-\Gamma^2 \mu + w^2 \rho) \left(w^2 \frac{\rho_f}{n} - \frac{i w \rho_f g}{k} \right) - w^4 \rho_f^2 = 0 \quad (5.50)$$

Operando y despejando Γ^2 obtenemos:

$$\Gamma^2 = \frac{w^2}{\mu} \left[\rho - \frac{\rho_f^2}{\left(\frac{\rho_f}{n} - \frac{i w \rho_f g}{k w^2} \right)} \right] \quad (5.51)$$

Multiplicando el denominador y numerador de la anterior expresión por el conjugado:

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \frac{w^2}{\mu} \left[\rho - \frac{\rho_f}{\left(\frac{1}{n} - \frac{i g}{k w} \right)} \frac{\left(\frac{1}{n} + \frac{i g}{k w} \right)}{\left(\frac{1}{n} + \frac{i g}{k w} \right)} \right] \\ \Gamma^2 &= \frac{w^2}{\mu} \left[\rho - \frac{\rho_f \left(\frac{1}{n} + \frac{i g}{k w} \right)}{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{g^2}{(k w)^2} \right)} \right] \end{aligned} \quad (5.52)$$

Luego:

$$\Gamma^2 = q^2 + k^2 = \frac{w_2}{\mu} \rho_3 \quad \text{ó} \quad q^2 = \frac{w_2}{\mu} \rho_3 - k^2 \quad (5.53)$$

Con

$$\rho_3 = \left[\rho - \frac{\rho_f \left(\frac{1}{n} + \frac{ig}{kw} \right)}{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{g^2}{(kw)^2} \right)} \right] \quad (5.54)$$

Finalmente:

$$V_3^2 = \frac{\mu}{\rho_3} \quad (5.55)$$

Nótese que V_3 al igual que V_1 y V_2 también depende de la frecuencia, por tanto es una onda dispersiva y disipativa.

Para un medio de relativamente baja permeabilidad, las velocidades de compresión (ecuaciones 5.40 y 5.55) se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} V_1^2 &\simeq \frac{\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q}{\rho} \\ V_2^2 &\simeq \frac{iwkQ(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q} \\ V_3^2 &\simeq \frac{\mu}{\rho} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Por tanto, la primera onda de compresión llamada P_1 se propaga con una velocidad V_1 independiente de la frecuencia. La segunda onda de compresión denominada P_2 es una onda de atenuación proporcional a la raíz cuadrada de la permeabilidad y la frecuencia. Esta onda disipa energía por difusión del fluido a través de los poros y se atenúa con la distancia z muy rápidamente. La tercera onda denominada onda **S** se propaga con velocidad V_3 , la cual es equivalente a la clásica velocidad de onda de corte de un medio de una sola fase.

Para completar la solución de las ecuaciones 5.26 y 5.27, procederemos a calcular la amplitud de las ondas asociadas con los autovectores de Φ_0 (δ_1 y δ_2) y Ψ_{0j} (δ_3). A continuación presentaremos un resumen del proceso de cálculo:

Amplitud de la Onda S

A partir de la ecuación 5.43 tenemos:

$$\begin{vmatrix} -\Gamma^2 \mu + w^2 \rho & w^2 \rho_f \\ w^2 \rho_f & \frac{w^2 \rho_f}{n} - \frac{iw \rho_f g}{k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\psi}_{01} \\ \bar{\psi}_{02} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.57)$$

Operando:

$$(-\Gamma^2 \mu + w^2 \rho) \bar{\psi}_{01} + w^2 \rho_f \bar{\psi}_{02} = 0 \quad (5.58)$$

pero

$$\Gamma^2 = \frac{w^2}{V_3^2}$$

Reemplazando en 5.58 tenemos:

$$\left(-\frac{w^2}{V_3^2}\mu + w^2\rho\right)\bar{\psi}_{01} + w^2\rho_f\bar{\psi}_{02} = 0 \quad (5.59)$$

Realizando operaciones se obtiene:

$$\rho_f\bar{\psi}_{02} = \bar{\psi}_{01} \left(\frac{\mu}{V_3^2} - \rho\right) \quad (5.60)$$

Sea $\delta_3 = \frac{\bar{\psi}_{02}}{\bar{\psi}_{01}}$, la relación de amplitud de la onda **S**, reemplazando esta expresión en 5.60, obtenemos finalmente:

$$\delta_3 = \frac{\rho}{\rho_f} \left(\frac{\mu}{\rho V_3^2} - 1\right) \quad (5.61)$$

Amplitud de la Onda P

Procediendo de una manera similar a las ondas **S**, haremos uso de la ecuación 5.26, obteniendo la siguiente expresión:

$$\begin{vmatrix} -(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q)\Lambda_1^2 + w^2\rho & -\alpha Q\Lambda_1^2 + w^2\rho_f \\ -\alpha Q\Lambda_1^2 + w^2\rho_f & -Q\Lambda_1^2 + \frac{w^2}{n} - \frac{iw\rho_f g}{k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.62)$$

Desarrollando la primera ecuación tenemos:

$$[-(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q)\Lambda_1^2 + w^2\rho]\phi_{01} + [-\alpha Q\Lambda_1^2 + w^2\rho_f]\phi_{02} = 0 \quad (5.63)$$

Sea $\delta_{1,2} = \frac{\phi_{02}}{\phi_{01}}$, la relación de amplitud de la onda **P**, reemplazando esta expresión en 5.63 y operando obtenemos:

$$\delta_1 = \frac{\phi_{02}}{\phi_{01}} = \frac{(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q)\Lambda_1^2 - w^2\rho}{-\alpha Q\Lambda_1^2 + w^2\rho_f} \quad (5.64)$$

Además $\Lambda_1^2 = \frac{w^2}{V_1^2}$, reemplazando este término en la anterior ecuación:

$$\delta_1 = \frac{\left[(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q)\frac{w^2}{V_1^2} - w^2\rho\right]}{-\alpha Q\frac{w^2}{V_1^2} + w^2\rho} = \frac{\rho \left[\frac{(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q)}{\rho V_1^2} - 1\right]}{\rho_f \left[1 - \frac{\alpha Q}{\rho_f V_1^2}\right]} \quad (5.65)$$

Operando términos, llegamos finalmente a:

$$\delta_1 = -\frac{\rho}{\rho_f} \left(\frac{V_1^2 - \frac{\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q}{\rho}}{\rho_f V_1^2 - \alpha Q}\right) \quad (5.66)$$

De manera similar obtenemos δ_2 :

$$\delta_2 = -\frac{\rho}{\rho_f} \left(\frac{V_2^2 - V_p^2}{\rho_f V_2^2 - \alpha Q}\right) \quad (5.67)$$

A partir de los anteriores resultados (ecuaciones 5.28, 5.29 y 5.61, 5.66, 5.67) los campos escalar y vectorial se pueden expresar como:

Campo escalar

$$\begin{aligned}\phi_1 &= A_1 \exp(-ip_1 z) + A_2 \exp(-ip_2 z) \\ \phi_2 &= A_1 \delta_1 \exp(-ip_1 z) + A_2 \delta_2 \exp(-ip_2 z)\end{aligned}\quad (5.68)$$

Campo vectorial

$$\begin{aligned}\psi_1 &= A_3 \exp(-iqz) \\ \psi_2 &= A_3 \delta_3 \exp(-iqz)\end{aligned}\quad (5.69)$$

Donde $A_1 - A_3$ son constantes de integración, que se obtienen a partir de las condiciones de contorno. Con la anterior solución procederemos a evaluar la presión de poros, desplazamientos y tensiones en el dominio de la frecuencia.

Presión de Poros

La presión de poros está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}P_f &= -\alpha Q e - Q \zeta \\ &= -Q(\alpha \nabla^2 \phi_2 + \nabla^2 \phi_3)\end{aligned}\quad (5.70)$$

Donde

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi_2 &= \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} \\ \nabla^2 \phi_3 &= \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (5.71)$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación 5.5, y reemplazando la ecuación 5.68 en la ecuación 5.70, llegamos a la siguiente expresión:

$$\bar{P}_f = Q [A_1 (\alpha + \delta_1) (k^2 + p_1^2) \exp(-ip_1 z) + A_2 (\alpha + \delta_2) (k^2 + p_2^2) \exp(-ip_2 z)] \quad (5.72)$$

Desplazamientos

Para este caso el desplazamiento u_x está dado por la expresión 5.11, de manera que evaluando, $\frac{\partial \phi_2}{\partial x}$ y $\frac{\partial \Psi_2}{\partial z}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_2}{\partial x} &= -ki [A_1 \exp(-ip_1 z) + A_2 \exp(-ip_2 z)] \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial z} &= A_3 (-iq) \exp(-iqz)\end{aligned}\quad (5.73)$$

Reemplazando 5.73 en 5.11 obtenemos:

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \\ &= -ki [A_1 \exp(-ip_1 z) + A_2 \exp(-ip_2 z)] + A_3 iq \exp(-iqz)\end{aligned}\quad (5.74)$$

El desplazamiento en la dirección u_z está dado por la ecuación 5.12, de manera que operando de forma similar al desplazamiento u_x , obtenemos:

$$u_z = -i [A_1 p_1 \exp(-ip_1 z) + A_2 p_2 \exp(-ip_2 z)] - i [k A_3 \exp(-iqz)] \quad (5.75)$$

Tensiones

A partir de 5.6, 5.14 y 5.15, la tensión σ_{zz} se puede expresar como:

$$\sigma_{zz} = (\lambda + \alpha^2 Q) \nabla^2 \phi_2 + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \alpha Q \nabla^2 \phi_3 \quad (5.76)$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_2 &= -(\lambda + \alpha^2 Q) [(k^2 + p_1^2) A_1 \exp(-ip_1 z) + (k^2 + p_1^2) A_2 \exp(-ip_2 z)] \\ \nabla^2 \phi_3 &= -\alpha Q [A_1 \delta_1 (k^2 + p_1^2) \exp(-ip_1 z) + A_2 \delta_2 (k^2 + p_1^2) \exp(-ip_2 z)] \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -2\mu [A_1 p_1^2 \exp(-ip_1 z) + A_2 p_2^2 \exp(-ip_2 z) + kq A_3 \exp(-iqz)] \end{aligned}$$

Multiplicando por las respectivas constantes, las expresiones anteriores y sumando:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= -[(\lambda + \alpha^2 Q) (k^2 + p_1^2) + \alpha Q \delta_1 (k^2 + p_1^2) + 2\mu p_1^2] A_1 \exp(-ip_1 z) \\ &\quad - [(\lambda + \alpha^2 Q) (k^2 + p_2^2) + \alpha Q \delta_2 (k^2 + p_2^2) + 2\mu p_2^2] A_2 \exp(-ip_2 z) \\ &\quad - [2\mu kq A_3] \exp(-iqz) \end{aligned} \quad (5.77)$$

Para σ_{zx} tenemos:

$$\sigma_{zx} = \mu e_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (5.78)$$

u_x lo calculamos de 5.74 y u_z de 5.75, por tanto, realizando las respectivas derivadas se obtiene:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -kp_1 A_1 \exp(-ip_1 z) - A_2 kp_2 \exp(-ip_2 z) + q^2 A_3 \exp(-iqz) \quad (5.79)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = -kp_1 A_1 \exp(-ip_1 z) - A_2 kp_2 \exp(-ip_2 z) - k^2 A_3 \exp(-iqz) \quad (5.80)$$

Reemplazando las anteriores expresiones se obtiene:

$$\sigma_{zx} = -2\mu k [p_1 A_1 \exp(-ip_1 z) + A_2 p_2 \exp(-ip_2 z)] + \mu A_3 (q^2 - k^2) \exp(-iqz) \quad (5.81)$$

Hemos encontrado expresiones para u_x , u_y , p , σ_{zz} y σ_{zx} para un medio semi-infinito-elástico-saturado siendo las expresiones obtenidas las siguientes:

DESPLAZAMIENTOS

$$u_x = -ki [A_1 \exp(-ip_1 z) + A_2 \exp(-ip_2 z)] + iq A_3 \exp(-iqz) \quad (5.82)$$

$$u_z = -i [A_1 p_1 \exp(-ip_1 z) + A_2 p_2 \exp(-ip_2 z)] - ik A_3 \exp(-iqz)$$

PRESIÓN DE POROS

$$P_f = Q [A_1 (\alpha + \delta_1) (k^2 + p_1^2) \exp(-ip_1 z) + A_2 (\alpha + \delta_2) (k_2^2 + p_2^2) \exp(-ip_2 z)] \quad (5.83)$$

TENSIONES TOTALES

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & - [(\lambda + \alpha^2 Q) (k^2 + p_1^2) + \alpha Q \delta_1 (k^2 + p_1^2) + 2\mu p_1^2] A_1 \exp(-ip_1 z) \\ & - [(\lambda + \alpha^2 Q) (k^2 + p_2^2) + \alpha Q \delta_2 (k^2 + p_2^2) + 2\mu p_2^2] A_2 \exp(-ip_2 z) \\ & - [2\mu k q A_3] \exp(-iqz) \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\sigma_{zx} = -2\mu k [p_1 A_1 \exp(-ip_1 z) + p_2 A_2 \exp(-ip_2 z)] + \mu A_3 (q^2 - k^2) \exp(-iqz) \quad (5.85)$$

Donde A_1, A_2, A_3 son constantes a obtener con las condiciones de contorno.

5.3 Aproximación Paraxial

En esta sección se aplicará la aproximación paraxial desarrollado por Claerbout [Claerbout & Johnson, 1971], y desarrollada específicamente para el problema de reflexión de ondas para una fase sencilla. La aproximación Paraxial surgió al resolver la ecuación de onda escalar bidimensional general:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (5.86)$$

Donde v es la velocidad de propagación. La estabilidad temporal está dada por la ecuación:

$$w = v (k_x^2 + k_z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.87)$$

Mientras que la estabilidad espacial (dirección z), esta dada por:

$$k_z = \pm \frac{w}{v} \left[1 - \frac{v^2 k_x^2}{w^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.88)$$

Siendo ω la frecuencia angular, v la velocidad de propagación y k_x, k_z los número onda. Claramente el problema se presenta cuando $\left[\frac{v k_x}{w} > 1 \right]$ ya que las ondas desaparecen debido a que k_z se vuelve imaginario. Una manera simple de solucionar el problema, es restringir el rango de soluciones para aquellas ondas que se desplazan como un cono con el eje z , que se conocen como ondas paraxiales [Engquist & Majda, 1977].

La aproximación Paraxial de 5.86 consiste en expandir el operador 5.88 como una aproximación racional de $\frac{v k_x}{w}$. Para esto Clayton [Clayton & Enquist, 1977] propone tres aproximaciones para la ecuación 5.88:

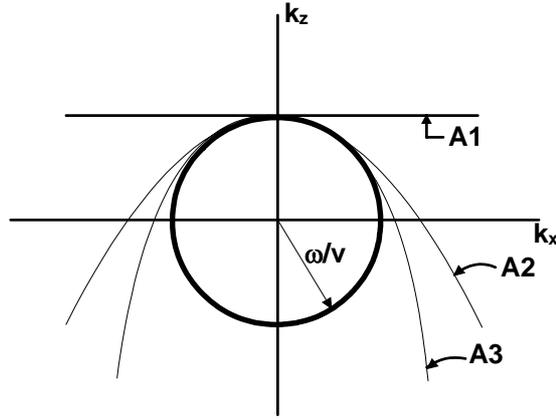


Figura 5.4: Relaciones de dispersión para el caso escalar. Las curvas A_1 , A_2 y A_3 son las relaciones de dispersión para la aproximación paraxial de la ecuación de onda escalar [Clayton & Enquist, 1977]

$$\mathbf{A1} : \frac{vk_z}{w} = 1 + \mathbf{O} \left(\left| \frac{vk_x}{w} \right|^2 \right) \quad (5.89)$$

$$\mathbf{A2} : \frac{vk_z}{w} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{vk_x}{w} \right)^2 + \mathbf{O} \left(\left| \frac{vk_x}{w} \right|^4 \right) \quad (5.90)$$

$$\mathbf{A3} : \frac{vk_z}{w} = \frac{1 - \frac{3}{4} \left(\frac{vk_x}{w} \right)^2}{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{vk_x}{w} \right)^2} + \mathbf{O} \left(\left| \frac{vk_x}{w} \right|^6 \right) \quad (5.91)$$

Finalmente los autores presentan las relaciones de dispersión para la ecuación de onda escalar (figura 5.4), para las tres aproximaciones anteriores. Los autores muestran que la aproximación paraxial es muy exacta para ondas de alta frecuencia y para ondas que inciden al contorno con un bajo ángulo de incidencia. La aplicación de la aproximación paraxial a la teoría de Biot [Biot, 1956], realizada por Akiyoshi [Akiyoshi et al., 1994] y Modaressi [Modaressi & Benzenatti, 1994], es una extrapolación directa de la aproximación de Clayton [Clayton & Enquist, 1977]. Para este caso en particular, se usa una aproximación racional de $\frac{v_i k_j}{w}$ ($i = 1, 3; j = x, y$). Por tanto, la ecuación 5.39 y 5.53 puede ser aproximada como:

$$p_1 = \sqrt{\frac{w^2}{V_1^2} - k^2} \simeq \frac{w}{V_1} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{V_1^2 k^2}{w^2} + \dots \right] \quad (5.92)$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{w^2}{V_2^2} - k^2} \simeq \frac{w}{V_2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{V_2^2 k^2}{w^2} + \dots \right] \quad (5.93)$$

$$q = \sqrt{\frac{w^2}{V_3^2} - k^2} \simeq \frac{w}{V_3} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{V_3^2 k^2}{w^2} + \dots \right] \quad (5.94)$$

En la ecuación 5.56, se observa que V_1 y V_3 son independientes de la frecuencia. A partir de resultados experimentales Natakawa [Nakagawa et al., 1997], muestra que las diferencias existentes entre los valores

de V_1 y V_3 para bajas y altas frecuencias, es inferior al 10% (figura 5.5). Por tal motivo, la simplificación de independizar V_1 y V_3 de la frecuencia es válido, además que permite simplificar cálculos.

Por otro lado, V_2 (onda de compresión de segunda clase como la denomina Biot), incrementa su velocidad con la frecuencia hasta alcanzar un valor máximo a partir del cual V_2 se mantiene constante (figura 5.5). La frecuencia a la cual V_2 mantiene este máximo Biot lo denominó frecuencia crítica y es una función de la permeabilidad y del diámetro de los poros. Experimentalmente y analíticamente se ha encontrado que V_2 se atenúa muy rápidamente, por lo que para efectos prácticos es posible despreciarla, por tanto $V_2 = 0$.

Con el fin de visualizar la aproximación paraxial, consideremos el dominio semi-infinito conformado por dos subdominios: Ω_e (subdominio externo no acotado, excepto en la superficie del terreno) y Ω_i (subdominio interno, acotado)(figura 5.6). Consideremos ahora un punto \mathbf{p} sobre la interface Γ , como se ilustra en la figura 5.6a; donde el vector unitario apuntando hacia afuera g_1 es normal al plano tangente. Asumamos adicionalmente que este vector normal coincide con la dirección z , de manera que este plano tangente a nuestro contorno en el punto \mathbf{p} estará definido por el estado de tensiones $\{\sigma_{zz} \sigma_{zx} \sigma_{zy}\}$ y el flujo q_z .

Tomando una aproximación de orden cero (ver ecuación 5.89) de las ecuaciones 5.92 a 5.94, las expresiones para los desplazamientos (5.82), presiones de poros (5.83) y tensiones (5.84) se pueden aproximar como (despreciando términos de alto orden):

$$\begin{aligned}\bar{u}_x &\simeq -i\frac{w}{V_3}A_4 \exp\left(-i\frac{w}{V_3}z\right) \\ \bar{u}_y &\simeq -i\frac{w}{V_3}A_3 \exp\left(-i\frac{w}{V_3}z\right)\end{aligned}\quad (5.95)$$

$$\begin{aligned}\bar{u}_z &\simeq -i\frac{w}{V_1}A_1 \exp\left(-i\frac{w}{V_1}z\right) \\ \bar{w}_z &\simeq -i\delta_1\frac{w}{V_1}A_1 \exp\left(-i\frac{w}{V_1}z\right)\end{aligned}\quad (5.96)$$

Para las tensiones por otra parte se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{zz} &\simeq -(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q \delta_1) \left(\frac{w}{V_1}\right)^2 A_1 \exp\left(-i\frac{w}{V_1}z\right) \\ \bar{\sigma}_{zx} &\simeq \mu \left(\frac{w}{V_3}\right)^2 A_4 \exp\left(-i\frac{w}{V_3}z\right) \\ \bar{\sigma}_{zy} &\simeq \mu \left(\frac{w}{V_3}\right)^2 A_3 \exp\left(-i\frac{w}{V_3}z\right)\end{aligned}\quad (5.97)$$

Finalmente para la presión de poros se tiene:

$$\bar{p} = Q(\alpha + \delta_1) \left(\frac{w}{V_1}\right)^2 A_1 \exp\left(-i\frac{w}{V_1}z\right)\quad (5.98)$$

Nótese que la demostración era para el caso bidimensional, sin embargo la extrapolación de los anteriores resultados al caso tridimensional es directa. Reemplazando la ecuación 5.95 en 5.97 y 5.98 se obtiene:

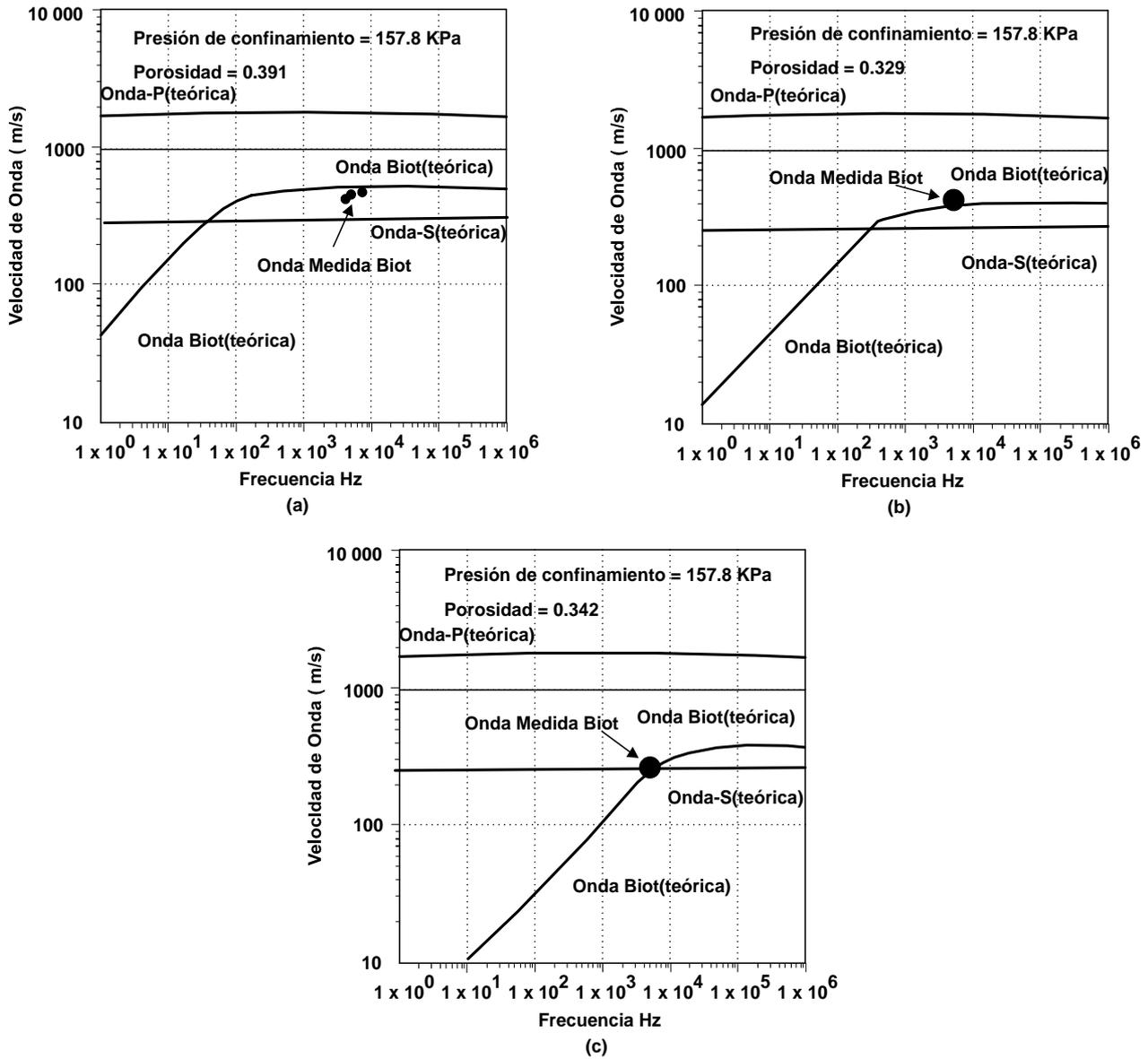
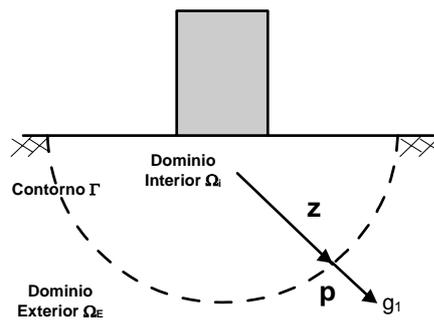
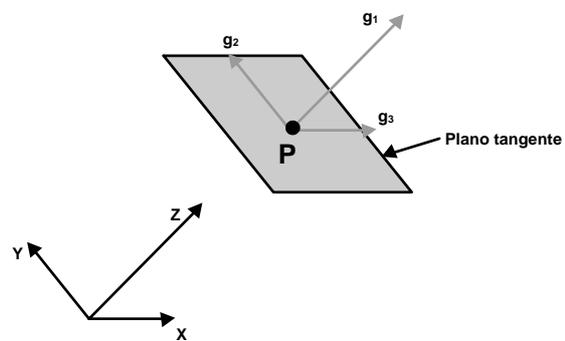


Figura 5.5: Influencia de la frecuencia en V_1 , V_2 , V_3 a) Arena gruesa de Monterrey b) Arena media de Monterrey c) Arena silícea fina. V_1 (Onda P), V_2 (Onda Biot), V_3 (Onda S) [Nakagawa et al., 1997]



a) Definición de un medio semi-infinito típico



b) Definición del plano tangente al contorno

Figura 5.6: Condición de contorno absorbente

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{zz} &\simeq -i\frac{w}{V_1} [(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q) \bar{u}_z + \alpha Q \bar{w}_z] \\
\bar{\sigma}_{zx} &\simeq -i\mu \frac{w}{V_3} \bar{u}_x \\
\bar{\sigma}_{zy} &\simeq -i\mu \frac{w}{V_3} \bar{u}_y \\
p &\simeq iQ \frac{w}{V_1} (\alpha \bar{u}_z + \bar{w}_z)
\end{aligned} \tag{5.99}$$

La ecuación 5.99, es la impedancia en la interfase, representado la acción espectral ejercida por el dominio externo Ω_e , sobre el dominio interno Ω_i cuando el dominio Ω_e es sometido a dispersión de ondas desde Γ hasta el infinito, siendo esta impedancia no local. Aplicando la transformada inversa de Fourier a la ecuación 5.99, se obtiene la solución en el dominio del tiempo:

$$\sigma_{zz} = -\frac{(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q) \partial u_z}{V_1 \partial t} - \frac{\alpha Q \partial w_z}{V_1 \partial t} \tag{5.100}$$

$$\sigma_{zx} = -\frac{\mu \partial u_x}{V_3 \partial t} \tag{5.101}$$

$$\sigma_{zy} = -\frac{\mu \partial u_y}{V_3 \partial t} \tag{5.102}$$

$$p = \frac{\alpha Q \partial u_z}{V_1 \partial t} + \frac{Q \partial w}{V_1 \partial t} \tag{5.103}$$

Nótese que las anteriores expresiones son válidas para la formulación $u - w$. Como estamos interesados en la formulación $u - p$, de la ecuación 5.103, despejamos $\frac{\partial w}{\partial t}$, la reemplazamos en 5.100, y operando obtenemos:

$$\sigma_{zz} = -\frac{(\lambda + 2\mu) \partial u_z}{V_1 \partial t} - \alpha p \tag{5.104}$$

Para evaluar el flujo, procedemos a derivar la expresión 5.98, con relación a z , obteniéndose:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} &= Q \left(\frac{w}{V_1} \right)^2 \left[-i\alpha \left(\frac{w}{V_1} \right) A_1 \exp \left(-i \frac{wz}{V_1} \right) - i\delta_1 \left(\frac{w}{V_1} \right) A_1 \exp \left(-i \frac{wz}{V_1} \right) \right] \\
&= -iQ \left(\frac{w}{V_1} \right)^2 [\alpha \bar{u}_z + \bar{w}_z]
\end{aligned} \tag{5.105}$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier a 5.105, se obtiene:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{Q}{V_1^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \tag{5.106}$$

En la anterior expresión $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$, (hipótesis formulación $u - p$) por tanto, el flujo viene dado por la siguiente expresión:

$$q_z = -k \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{kQ}{V_1^2} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.107)$$

En conclusión, utilizando la aproximación paraxial y un orden de aproximación cero, los contornos absorbentes corresponden a amortiguadores, dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= -\frac{(\lambda + 2\mu)}{V_1} \frac{\partial u_z}{\partial t} - \alpha p \\ \sigma_{zx} &= -\frac{\mu}{V_3} \frac{\partial u_x}{\partial t} \\ \sigma_{zy} &= -\frac{\mu}{V_3} \frac{\partial u_y}{\partial t} \\ q_z &= \frac{kQ}{V_1^2} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5.108)$$

La ecuación 5.108, es idéntica a la obtenida en sus investigaciones por Akiyoshi [Akiyoshi et al., 1994] y Modaressi [Modaressi & Benzenatti, 1994], y su implementación numérica en elementos finitos, se presenta en la siguiente sección.

5.4 Discretización de Ecuación del Movimiento con Contornos Absorbentes

En la formulación discretizada que se presentó en el capítulo 3, se consideraron hasta el momento las siguientes condiciones de contorno:

- Condiciones naturales

Tracciones prescritas

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \hat{\mathbf{t}}) = 0 \quad \text{en } \Gamma_\sigma$$

Presiones prescritas

$$(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_p$$

- Condiciones esenciales

Desplazamientos prescritos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} &= 0 \quad \text{en } \Gamma_u \\ \mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}} &= 0 \quad \text{en } \Gamma_w \end{aligned}$$

Adicionalmente, consideraremos el contorno absorbente (Γ_a) y su implementación en las ecuaciones de momento y continuidad una vez discretizada. Para ello, trabajaremos con el sistema de coordenadas local ilustrado en la figura 5.7, el cual está definido mediante el sistema base $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$.

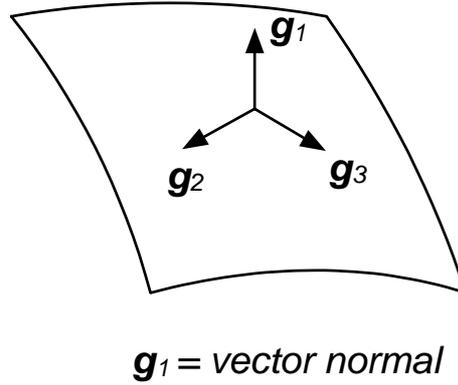


Figura 5.7: Sistema local de coordenadas para el elemento absorbente

Para tener en cuenta el efecto del elemento absorbente en la ecuación de equilibrio le adicionaremos el término $\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} d\Gamma$, donde $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{g} - p \cdot \mathbf{g}_1$

Pero \mathbf{t} la puedo descomponer en la normal y las tangentes de la siguiente manera:

$$\mathbf{t}_{g_1} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{g}_1) \mathbf{g}_1 \quad (5.109)$$

$$\mathbf{t}_{g_2} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{g}_2) \mathbf{g}_2$$

$$\mathbf{t}_{g_3} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{g}_3) \mathbf{g}_3$$

De manera que \mathbf{t} se puede expresar como:

$$\mathbf{t} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{g}_1) \mathbf{g}_1 + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{g}_2) \mathbf{g}_2 + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{g}_3) \mathbf{g}_3 \quad (5.110)$$

ó

$$\mathbf{t} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{g}^m) \mathbf{g}^m$$

en denominación indicial

$$\mathbf{t}_i = (t_k \cdot \mathbf{g}_k^m) \mathbf{g}_i^m \quad (5.111)$$

En el sistema local $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$, la ecuación 5.108, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}_1} = \frac{-\lambda + 2\mu}{V_1} \dot{\mathbf{u}}_1 - \alpha p \quad (5.112)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}_2} = \frac{-\mu}{V_3} \dot{\mathbf{u}}_2$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}_3} = \frac{-\mu}{V_3} \dot{\mathbf{u}}_3$$

$$q_{\mathbf{g}_1} = \frac{\alpha k Q}{V_1^2} \ddot{\mathbf{u}}_1$$

Pero, al reemplazar 5.112 en 5.111 se obtiene:

$$(t_k \cdot \mathbf{g}_k^m) = -\alpha_m (\dot{\mathbf{u}}_k \cdot \mathbf{g}_k^m) - \alpha p (\mathbf{g}_k^1 \cdot \mathbf{g}_k^m)$$

Donde

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \left(\frac{\lambda + 2\mu}{V_1} \right) \\ \alpha_2 &= \left(\frac{\mu}{V_2} \right) \\ \alpha_3 &= \left(\frac{\mu}{V_3} \right)\end{aligned}$$

Finalmente:

$$t_l = -\alpha_m (\dot{u}_k \cdot g_k^m) g_l^m - \alpha p (g_k^1 \cdot g_k^m) g_l^1$$

Al realizar la integral de contorno se obtiene:

$$\int_{\Gamma_a} v_l t_l d\Gamma = - \int_{\Gamma_a} N_l^i [\alpha_m (\dot{u}_k g_k^m) g_l^m + \alpha p (g_k^1 \cdot g_k^m) g_l^1] d\Gamma \quad (5.113)$$

El término absorbente para el flujo, esta dado por:

$$\bar{q} = -nk \nabla p = \frac{\alpha k Q}{V_1^2} \ddot{u} = \alpha_q \ddot{u} \quad (5.114)$$

donde

$$\alpha_q = \frac{\alpha k}{V_1^2} \quad (5.115)$$

Por tanto integrando resulta:

$$\int_{\Gamma_a} q \alpha_q \ddot{u} d\Gamma_a \quad (5.116)$$

Reemplazando la ecuación 5.113 en 3.25 resulta:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad : \quad \boldsymbol{\sigma}' d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} p d\Omega \\ - \int_{\Gamma_a} \mathbf{v} [\alpha_m (\dot{\mathbf{u}}_k \mathbf{g}_k^m) \mathbf{g}_l^m + \alpha p (\mathbf{g}_k^1 \cdot \mathbf{g}_k^m) \mathbf{g}_l^1] d\Gamma_a &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{v} (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{I} p) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (5.117)$$

De igual manera, reemplazando 5.116 en 3.90 la ecuación de continuidad queda como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho q \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \int_{\Omega} \rho \nabla q \cdot \mathbf{k}_w \cdot \nabla p + \int_{\Omega} \frac{\rho}{Q} q \frac{\partial p}{\partial t} + \int_{\Omega} \rho \nabla q \cdot \mathbf{k}_w (\mathbf{b} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}) \\ - \int_{\Gamma} q \rho \bar{q} + \sum_{e=1}^{\eta_{el}} \int_{\Omega_{int}} \tau \nabla q \cdot (\nabla p - \xi^p) + \int_{\Omega} \delta t \nabla q \cdot (\nabla p^i - \nabla p^{i-1}) + \int_{\Gamma_a} q \alpha_q \ddot{u} &= 0 \end{aligned} \quad (5.118)$$

5.5 Discretización temporal

A continuación procederemos a la discretización temporal de las ecuaciones de equilibrio y continuidad, teniendo en cuenta los elementos absorbentes. Asumiendo que las ecuaciones de momento (5.117) y continuidad (5.118) son válidas en t^{n+1} , se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{Q}\mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{P}(\dot{\mathbf{u}}^{n+1}) + \mathbf{C}_s\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{J}\mathbf{p}^{n+1} &= \mathbf{f}_u^{n+1} \\ \mathbf{H}\mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{G}\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{S}\dot{\mathbf{p}}^{n+1} + \mathbf{C}_{sp}\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} &= \mathbf{f}_p^{n+1} \end{aligned} \quad (5.119)$$

Reemplazando 3.32, 3.33 y 3.34 en 5.119 se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\ddot{\mathbf{u}}^n + \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n] - \mathbf{Q}[\mathbf{p}^n + \Delta t\dot{\mathbf{p}}^n + \theta \Delta t \Delta \dot{\mathbf{p}}^n] + \mathbf{P}(u^{n+1}) + \mathbf{C}_s[\dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t\ddot{\mathbf{u}}^n + \beta_1 \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n] + \\ \mathbf{J}[\mathbf{p}^n + \Delta t\dot{\mathbf{p}}^n + \theta \Delta t \Delta \dot{\mathbf{p}}^n] &= \mathbf{f}_u^{n+1} \\ \mathbf{H}[\mathbf{p}^n + \Delta t\dot{\mathbf{p}}^n + \theta \Delta t \Delta \dot{\mathbf{p}}^n] + \mathbf{G}[\ddot{\mathbf{u}}^n + \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n] + \mathbf{Q}^T[\dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t\ddot{\mathbf{u}}^n + \beta_1 \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n] \\ + \mathbf{S}[\dot{\mathbf{p}}^n + \Delta \dot{\mathbf{p}}^n] + \mathbf{C}_{sp}[\ddot{\mathbf{u}}^n + \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n] &= \mathbf{f}_p^{n+1} \end{aligned}$$

Recordando que nuestras incógnitas son $\Delta \dot{u}^{n+1}$ y Δp^{n+1} las anteriores ecuaciones se pueden reorganizar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n - \mathbf{Q}\theta \Delta t \Delta \dot{\mathbf{p}}^n + \mathbf{P}(u^{n+1}) + \mathbf{C}_s\beta_1 \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{J}\theta \Delta t \Delta \dot{\mathbf{p}}^n &= \mathbf{f}_u^{n+1} \\ - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{Q}[\mathbf{p}^n + \Delta t\dot{\mathbf{p}}^n] - \mathbf{C}_s[\dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t\ddot{\mathbf{u}}^n] - \mathbf{J}[\mathbf{p}^n + \Delta t\dot{\mathbf{p}}^n] \end{aligned} \quad (5.120)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}[\theta \Delta t \Delta \dot{\mathbf{p}}^n] + \mathbf{G} \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{Q}^T\beta_1 \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{S} \Delta \dot{\mathbf{p}}^n + \mathbf{C}_{sp} \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n &= \mathbf{f}_p^{n+1} + -\mathbf{H}[\mathbf{p}^n + \Delta t\dot{\mathbf{p}}^n] - \\ \mathbf{G}\ddot{\mathbf{u}}^n - \mathbf{Q}^T[\dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t\ddot{\mathbf{u}}^n] - \mathbf{S}\dot{\mathbf{p}}^n - \mathbf{C}_{sp}\ddot{\mathbf{u}}^n \end{aligned} \quad (5.121)$$

$$\xi_p^{n+1} = \frac{\mathbf{Q}\mathbf{p}^{n+1}}{\mathbf{M}_L} \quad (5.122)$$

Donde se sigue la nomenclatura establecida en el apartado 3.6.2.

5.5.1 Efecto del tamaño de la malla

Cuando se realizan análisis de problemas dinámicos mediante elementos finitos, es necesario tener presente que los resultados se ven fuertemente influenciados por el tamaño del elemento con que discretizamos la malla. A este respecto se han realizado interesantes investigaciones, destacándose las siguientes:

Shingley[Shingley et al., 1967] realizó varios análisis tendientes a determinar la influencia del tamaño del elemento, en la respuesta de una varilla unidimensional sometida a una carga de compresión. Del modelamiento numérico realizado por los autores se destacan los siguientes aspectos:

- Los autores encontraron que los modelos de elementos finitos se comportaban igual a un filtro pasa bajas, el cual impedía el paso de determinadas frecuencias, y que esta frecuencia de corte dependía de la longitud de onda y del tamaño del elemento utilizado en la malla de elementos finitos

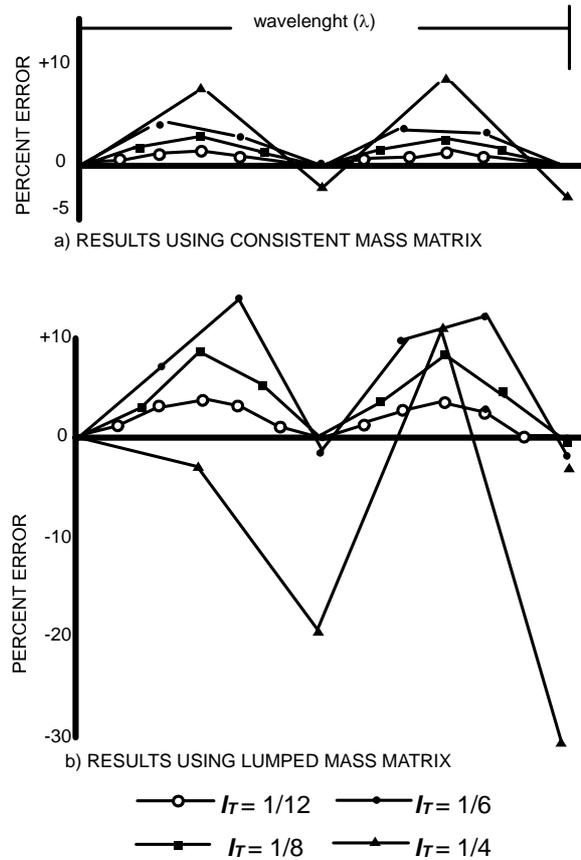


Figura 5.8: Efecto del tamaño del elemento - varilla homogénea [Kuhlemeyer & Lysmer, 1973]

- El modelo numérico no puede responder a excitaciones que superen la frecuencia límite, presentándose un ascenso repentino de las altas frecuencias, las cuales van desfasadas. Este desfase en las altas frecuencias es el responsable de las oscilaciones observadas en la porción rezagada de la respuesta
- Mejoras importantes se obtienen reduciendo el tamaño del elemento. Desafortunadamente, los autores no recomiendan ningún criterio para escoger el tamaño del elemento ideal.

Kuhlemeyer [Kuhlemeyer & Lysmer, 1973], estudia la exactitud de los desplazamientos causados por una onda armónica en una varilla homogénea, para lo cual utiliza matrices de masa consistentes y diagonalizadas. El criterio utilizado para determinar la solución más adecuada, consistió en encontrar la relación entre la longitud del elemento en la dirección de propagación de la onda, l , dividida por la longitud de onda, λ_l , definida como:

$$l_r = \frac{l}{\lambda_l} \quad (5.123)$$

Los autores realizan análisis para cuatro casos, considerando $l_r = \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}$, encontrando lo siguiente (figura 5.8):

- De la figura anterior es claro que $l_r = \frac{1}{4}$, representa el máximo tamaño permisible cuando la matriz de masa diagonalizada es utilizada, involucrando un error cercano al 15% en los desplazamientos calculados.
- Cuando el tamaño del elemento se reduce a $l_r = \frac{1}{12}$, el error es del 1% para matriz de masa consistente, y del 3% para matriz de masa diagonalizada.
- Los autores concluyen que los altos contenidos de frecuencia en problemas transitorios no pueden ser modelados a menos que la dimensión del elemento sea muy pequeña.

Bazant [Bazant & Celep, 1982], analiza el problema de propagación de ondas en una malla de elementos finitos unidimensional, encontrando lo siguiente:

- Se presenta la reflexión de ondas espúreas cuando la onda pasa entre dos elementos de diferente tamaño.
- La matriz de masa consistente da menores reflexiones espúreas que la matriz de masa diagonalizada (lumped mass matrix). (figura 5.9a).
- Por otro lado, para estabilidad numérica (y por tanto eliminación de oscilaciones espúreas en la malla), la matriz de masa diagonalizada es mejor (figura 5.9b).
- Los autores recomiendan utilizar un tamaño del elemento de:

$$H = \frac{\lambda}{10} \text{ matriz de masa diagonalizada}$$

$$H = \frac{\lambda}{6} \text{ matriz de masa consistente}$$

Siendo λ la longitud de onda de la señal y H el tamaño del elemento.

- La reflexión de ondas espúreas es significativa cuando la diferencia de tamaño entre dos elementos adyacentes es superior al 10%.

Posteriormente Celep [Celep & Bazant, 1983], desarrolla una nueva investigación con Bazant, de la que concluyen lo siguiente:

- Los autores recomiendan el uso de elementos de transición entre los elementos de tamaño pequeño y los de gran tamaño, con el fin de minimizar el fenómeno de reflexión de ondas espúreas (son espúreas debido a que en un medio continuo real, estas reflexiones no se presentarían).
- Variando el tamaño del elemento en la zona de transición por una progresión aritmética se obtienen mejores resultados que utilizando una progresión geométrica, pero la diferencia no es significativa.
- Finalmente, los autores recomiendan que si se desea minimizar el efecto de la reflexión de ondas espúreas, el tamaño del elemento deberá fluctuar entre $H = \frac{\lambda}{10}$ y $H = \frac{\lambda}{20}$.

Para las modelizaciones que realizaremos en el capítulo 10, hemos optado por el uso de elementos triangulares con matriz de masa diagonalizada, tamaño del elemento entre $H = \frac{\lambda}{10}$ y $H = \frac{\lambda}{20}$ y elementos de tamaño uniforme en la zona de interés y un aumento transicional del tamaño hasta las zonas alejadas.

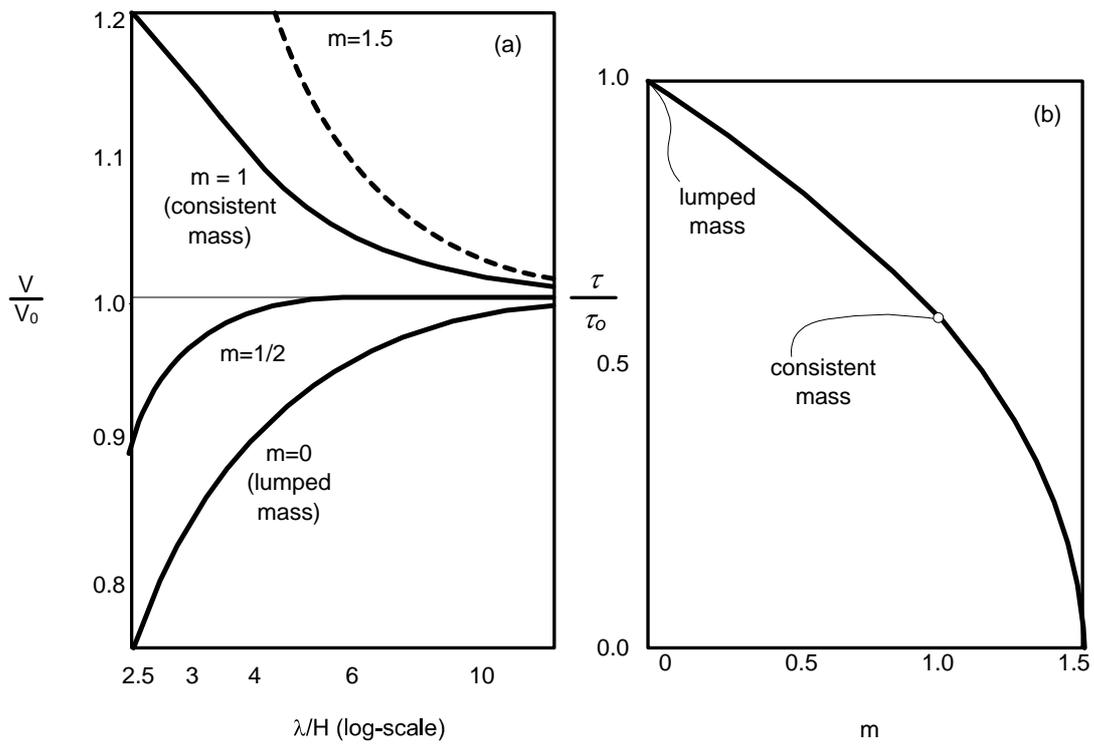


Figura 5.9: a) Dispersión de las ondas debido a la dependencia de la velocidad de onda V sobre la longitud de onda λ (V_0 velocidad de la onda en el continuo). b) Paso de tiempo límite para estabilidad numérica [Bazant & Celep, 1982]

5.6 Ejemplo de Aplicación

Con el fin de verificar la eficiencia del método, se analiza el caso de una columna de suelo utilizando el tipo de estabilización presentado con anterioridad, incluyendo los elementos absorbentes. El análisis se realizó utilizando elemento triángulo lineal. El sistema no simétrico resultante de 5.120 fué resuelto dentro de cada iteración de paso de tiempo usando un solver iterativo tipo GMRES con preconditionamiento diagonal [Saad, 1996], y para el sistema 5.121 se utilizó un gradiente conjugado con preconditionamiento ILU [Saad, 1996], y para el sistema 5.122 se utilizó una matriz de masa diagonal. Para efectos de validación hemos asumido material elástico. Sin embargo cuando se realicen análisis no lineales se utilizará Newton-Raphson completo.

En el análisis se utilizó un ejemplo teórico propuesto por Akiyoshi [Akiyoshi et al., 1994]. Es importante aclarar que algunos de los valores adoptados por los autores no son reales, pero para efectos de comparación se adoptaron valores idénticos. Los datos del problema de interés son los siguientes:

Número de elementos	2148
Carga en superficie	1000 Pa
ρ_s	0.306 $\frac{kg}{m^3}$
ρ_w	0.2977 $\frac{kg}{m^3}$
n (Porosidad)	0.333
s (Saturación)	100%
K_w	39999 kPa
K_s	1.0e ¹⁶ kPa
E	3000. kPa
α (Parámetro Biot)	1.0
ν (Relación de Poisson)	0.2
k_x	4.883e ⁻² $\frac{m^4}{N \cdot s}$
k_y	4.883e ⁻² $\frac{m^4}{N \cdot s}$
GMRES_ iterations	100
PCG_ iterations	1000
Δt	0.01 s

Las condiciones de contorno utilizadas en el análisis convencional y usando elementos absorbentes se ilustran en la figura 5.10. En general la diferencia radica en que en el primero hemos restringido desplazamientos, mientras en el segundo se han instalado elementos absorbentes en la base.

Bajo las anteriores consideraciones se realizaron los respectivos análisis con **SOLDYNA** (**S**oil **D**ynamic **A**nalysis - Desarrollado en la presente tesis, formulación u-p), con el fin de validar el modelo numérico. Los resultados así obtenidos se ilustran en la figura 5.11, destacándose los siguientes aspectos:

- Los desplazamientos coinciden bastante bien con la solución analítica de Simon [Simon et al., 1984] y la solución numérica de Akiyoshi [Akiyoshi et al., 1994] al utilizar elementos absorbentes.

- La restricción en desplazamientos en la base genera la reflexión de ondas que invalidan los resultados numéricos. Nótese como la solución con la condición de Dirichlet (Γ_u) presenta oscilaciones, con un agravante adicional, y es que, en la medida en que transcurre el tiempo esta solución se aleja de la solución real. El problema se agrava para las capas más profundas (Figuras 5.11a, 5.11c y 5.11e).

- Para el caso de las presiones, la solución analítica está alrededor de 1 kPa . Nótese que las diferencias se incrementan en la medida en que aumenta la profundidad, siendo la diferencia apreciable a partir de los 45 metros de profundidad.

- A diferencia de los desplazamientos, las presiones tardan un poco más en estabilizarse y llegar a la solución analítica. Por ejemplo a 5 metros de profundidad llegamos al estacionario en 0.45 segundos, mientras que a grandes profundidades (>45 m.), el estacionario se obtiene a partir de un segundo. Sin embargo para efectos prácticos el modelo reproduce de manera aceptable los resultados obtenidos por [Akiyoshi et al., 1994]. Nótese sin embargo, que la mayor diferencia se presentan en el tiempo de estabilización de las presiones de poros (figuras 5.12 y 5.13), ya que el modelo reproduce de manera exacta los desplazamiento, pero en las presiones, la respuesta no es tan inmediata y se detectan algunas pequeñas reflexiones que son rápidamente absorbidas

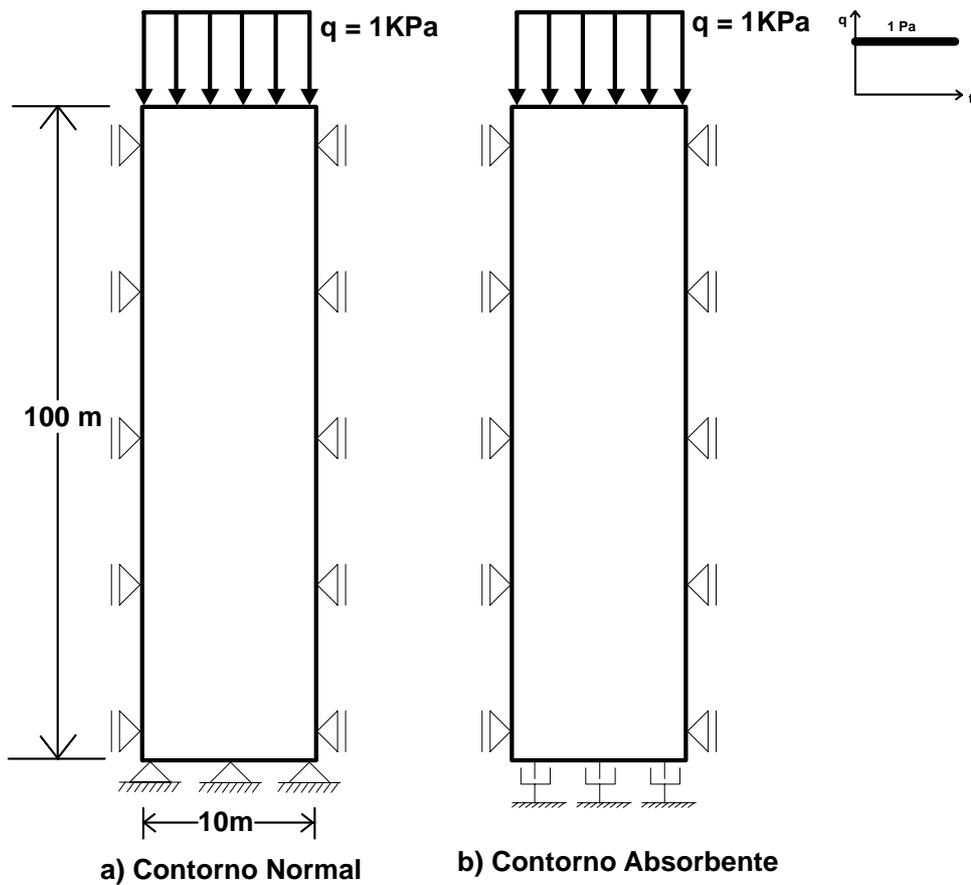
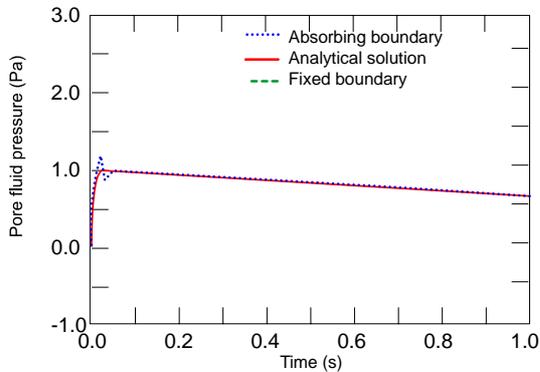
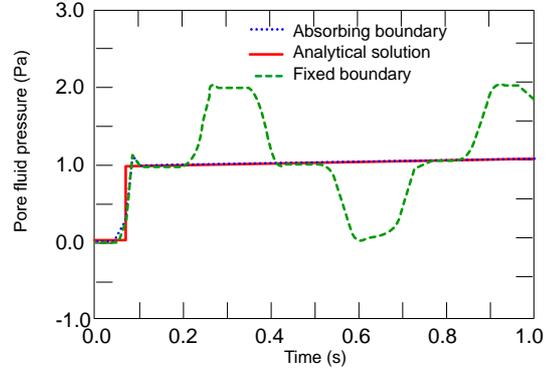


Figura 5.10: Condiciones contorno utilizadas en los análisis

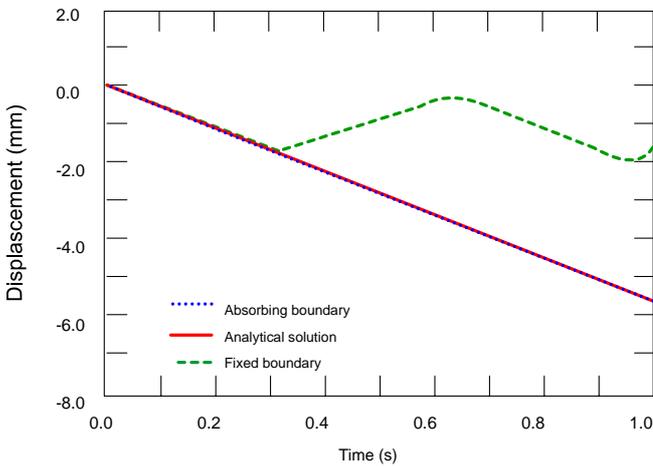


(a) At the depth of 5m

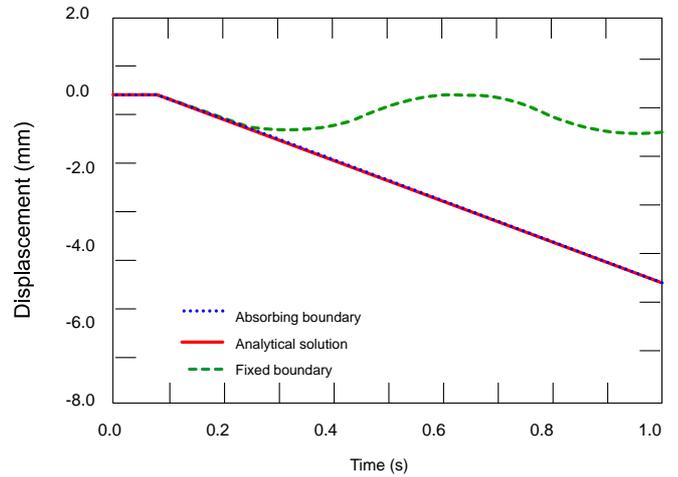


(a) At the depth of 45m

Figura 5.12: Variación de la presión de poros con el tiempo, para el caso de una columna de suelo [Akiyoshi et al., 1994]



(a) At the depth of 5m



(a) At the depth of 45m

Figura 5.13: Variación de los desplazamientos con el tiempo, para el caso de una columna de suelo [Akiyoshi et al., 1994]

Capítulo 6

MODELO CONSTITUTIVO PARA EL COMPORTAMIENTO CÍCLICO

6.1 Antecedentes

Existe en la actualidad una gran variedad de modelos, que han sido propuestos recientemente para caracterizar las propiedades tensión - deformación de los suelos. Todos estos modelos presentan ciertas ventajas y limitaciones que los orientan a aplicaciones particulares. Es por esto, que la ley de Hooke ha sido utilizada sucesivamente en mecánica de suelos para describir las propiedades generales de los suelos en condiciones de carga lejos de rotura, mientras que la ley de Mohr-Coulomb, da una buena predicción del comportamiento del suelo en condiciones cercanas a la resistencia última. Esto se debe a que el flujo plástico para este nivel de cargas últimas domina el comportamiento, mientras que las propiedades elásticas son relativamente de menor importancia.

En general, el criterio para evaluar un modelo debe ser siempre el de considerar el balance entre los requerimientos de rigor desde el punto de vista de la mecánica del continuo, los requerimientos reales de representar las propiedades del suelo desde el punto de vista experimental, así como los requerimientos de simplicidad en la aplicación desde el punto de vista computacional.

Dentro de estos modelos, se caracterizan por su carácter histórico y pionero, los trabajos de Drucker y Prager [Drucker & Prager, 1952], quienes intentaron modelar el comportamiento plástico de los suelos en el marco de la plasticidad clásica [Hill, 1950]. Posteriormente, el grupo de Cambridge [Roscoe & Schofield, 1958], desarrolla la teoría de estado crítico la cual provee las bases para entender y modelar el comportamiento de suelos granulares y suelos blandos en condiciones drenadas y no drenadas y destierra finalmente la afirmación de Terzaghi y Hvorslev acerca de la existencia de cohesión verdadera en suelos sobreconsolidados. Desafortunadamente los modelos del estado crítico desarrollados por el grupo de Cambridge [Roscoe & Schofield, 1958], [Roscoe & Burland, 1968] no pueden simular las presiones de poros y las deformaciones permanentes generadas por la carga cíclica [Carter et al., 1982].

En las dos últimas décadas se ha producido un avance importante en el desarrollo de modelos elasto-plásticos cada vez más complejos con la capacidad de modelar el efecto de la carga cíclica, manteniendo algunas de las características de la plasticidad clásica. Una descripción detallada del desarrollo de estos modelos se encuentra en un trabajo de Pande [Pande & Zienkiewicz, 1982], sobre ecuaciones constitutivas preparada para la XI Conferencia Internacional de Mecánica de Suelos e Ingeniería de Fundaciones. Posteriormente, se desarrollan nuevos eventos como el Simposio Internacional sobre Modelos Numéricos en Geomecánica, y la Segunda Conferencia Internacional sobre Leyes Constitutivas para Materiales de

Ingeniería, en la que se presentan nuevas ecuaciones constitutivas.

En el proyecto VELACS (*Verification of Liquefaction Analysis by Centrifuge Studies*), Dafalias [Dafalias, 1994] presenta un interesante análisis sobre las ecuaciones constitutivas existentes para modelar el comportamiento dinámico de las arenas. El autor caracteriza los modelos de la siguiente manera:

- Modelos Plásticos
 - *Bounding surface models*
 - *Nested-surfaces model*
 - *Modelos de Plasticidad Generalizada*
 - *Modelos de Plasticidad Clásica*
- Modelos de Multimecanismos
- Modelos Directos o Empíricos

Dafalias concluye, que la mayor parte de las ecuaciones constitutivas utilizadas clasifican dentro de los modelos plásticos. A continuación haremos una breve descripción de cuatro grupos de modelos que nos parecieron muy interesantes:

a. Bounding surface models.

Un modelo interesante, y que podríamos catalogar como bounding surface, es el correspondiente a la tercera generación del modelo MIT, desarrollado por Pestana [Pestana & Whittle, 1995] y denominado MIT-S1, el cual modela el comportamiento de arenas, arcillas y limos. El modelo utiliza la misma estructura básica de su predecesor (MIT-E3), pero con cambios significativos en la forma de la bounding surface y en la ley de endurecimiento. El modelo original, es cuestionado por Ganendra y Potts [Ganendra & Potts, 1995], por presentar ciertas ambigüedades e inexactitudes. Adicionalmente, el número de parámetros requeridos por el modelo es muy elevado (15), por lo que su campo de aplicación se reduce al campo investigativo. El nuevo modelo desarrollado por Pestana, utiliza 13 parámetros para el modelamiento de la arena, presentando una buena capacidad predictiva como lo muestra el autor. Una característica importante, es que la ecuación constitutiva depende no solamente del estado de tensiones e historia de tensiones, sino que introduce la relación de vacíos como un nuevo parámetro de estado.

b. Plasticidad Generalizada.

El concepto de plasticidad generalizada fué introducido por Mroz [Mroz & Zienkiewicz, 1981]. Se caracteriza porque no es necesario definir explícitamente la superficie de fluencia ni el potencial plástico, representando una ventaja puesto que no se debe verificar la condición de consistencia. Esto es bastante razonable si se tiene en cuenta que los suelos son materiales que presentan endurecimiento ó ablandamiento por deformación, que son altamente no lineales y que no existe una superficie de fluencia claramente definida. El modelo propuesto inicialmente, ha sido sometido a importantes mejoras, como se puede deducir de las publicaciones subsecuentes aparecidas a partir de 1985. Dentro de estas se destacan las publicaciones de Zienkiewicz, [Zienkiewicz et al., 1985], [Zienkiewicz & Pastor, 1986] y en especial las de Pastor, quien introduce cambios importantes al modelo [Pastor et al., 1985], [Pastor et al., 1987].

c. Modelos Hipoplásticos.

La teoría de la hipoplasticidad fué desarrollada en la Universidad de Karlsruhe para modelar el cambio en el estado de tensiones debidos a la reorganización de los granos causados por un cambio de forma. El modelo inicialmente desarrollado por Gudehus [Gudehus, 1996], ha sido sometido a importantes mejoras, como se desprende del trabajo de [Herle & Gudehus, 1999], y posteriormente de las investigaciones de Niemunis [Niemunis, 2003].

A diferencia de los modelos elastoplásticos la relación entre la tasa de cambio de las tensiones efectivas $\dot{\sigma}$ y la tasa de deformación $\dot{\epsilon}$ está definida por una única ecuación tensorial. A diferencia de las teorías

elastoplásticas, en la teoría hipoplástica no se diferencia explícitamente entre deformaciones elásticas y plásticas y no se hace uso de superficies de fluencia o potencial plástico, lo que hace mucho más fácil su comprensión e implementación numérica. La forma general de la ley constitutiva hipoplástica es de la siguiente manera:

$$\dot{\sigma} = H(\sigma', e, \dot{e}) \quad (6.1)$$

Donde H , es un tensor de segundo orden no lineal de las variables de estado, σ', e , y de la tasa de deformación \dot{e} . En las referencias consultadas sobre este modelo, se encontró que los modelos hipoplásticos tienen una gran capacidad predictiva, para lo cual hacen uso de ocho (8) parámetros [Cudmani, 2004]

d. Modelos de densificación.

Los modelos de densificación usualmente proponen leyes de densificación de arenas secas y proporcionan su cambio de volumen con el incremento de presión de poros. A modo de ejemplo, una teoría endocrónica de densificación de arenas fue propuesta ya en 1977 por Cuéllar et al [Cuéllar et al., 1977]. En muchos casos estos modelos tienen dificultades para simular también el comportamiento dilatante [Blázquez et al., 1980]. Recientemente Blázquez y López Queral [Blázquez & López-Querol, 2006], [López-Querol & Blázquez, 2006], proponen un modelo que combina una ley de densificación con la plasticidad y resuelve este inconveniente. El modelo, es utilizado satisfactoriamente, en la reproducción, de ensayos de corte cíclico en la arena de Nevada y la arena del río Flores. El modelo constitutivo requiere solamente siete parámetros para la calibración. Es indudable que este método parece ser muy prometedor para el análisis del fenómeno de licuación.

Finalmente, reconocemos que las ecuaciones constitutivas es un campo de investigación excitante, sobre el cual se han realizado numerosas publicaciones, aclarando, que en esta sección nos hemos limitado a presentar una pequeña fracción de ellas, dándole un poco de relevancia a las que consideramos más importantes. En lo que sigue profundizaremos en el modelo de Pastor, el cual hemos escogido como ecuación constitutiva en los análisis.

6.2 Teoría de Plasticidad Generalizada

En plasticidad clásica se asume que existe una superficie en el espacio de tensiones llamada **superficie de fluencia** definida por una función [Potts & Zdravkovic, 1999]:

$$F(\sigma, \alpha) = 0 \quad (6.2)$$

tal que para todo estado de tensiones dentro de esa superficie, los incrementos de deformación son puramente elásticos. Cuando el estado de tensiones toca la superficie F ocurren deformaciones plásticas si el incremento de tensiones está dirigido hacia afuera de F . No se admiten estados de tensión fuera de la superficie de fluencia y por consiguiente cuando el incremento de tensiones está dirigido hacia fuera de la superficie de fluencia esta debe expandirse para que el nuevo estado de tensiones esté nuevamente sobre F . Matemáticamente esto se expresa:

$$dF(\sigma, \alpha) = 0 \quad (6.3)$$

Esta condición se denomina **condición de consistencia** y la expansión de F se conoce como **ley de rigidización**. El vector α contiene una serie de parámetros que determinan la posición, la forma y el tamaño de la superficie F . Estos parámetros en general se hacen depender de las deformaciones

plásticas o bien del trabajo plástico y para definir el modelo es necesario, además de definir la superficie de fluencia, establecer la función:

$$\alpha = \alpha(\epsilon^p) \text{ o bien } \alpha = \alpha(W^p) \quad (6.4)$$

conocida como **ley de rigidización**.

El incremento de deformación total es la suma de deformaciones elásticas más deformaciones plásticas:

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (6.5)$$

La deformación plástica está dada por:

$$d\epsilon^p = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (6.6)$$

Donde Q se denomina Potencial Plástico y λ es un multiplicador.

Para muchos materiales y en particular para arenas, es muy difícil establecer la forma de la superficie de fluencia y la ley de rigidización porque el paso del comportamiento puramente elástico a elastoplástico no es evidente [Wood, 1996]. Los materiales granulares muestran un comportamiento marcadamente no lineal desde muy bajos niveles de tensión y además cuando se aplican ciclos de carga y descarga se producen fenómenos de histéresis. Por esto, asumir una región de comportamiento puramente elástico en un material granular impone importantes restricciones a la capacidad de predicción del modelo.

En la teoría de la plasticidad generalizada propuesta por Mroz [Mroz & Zienkiewicz, 1981], se prescinde de la superficie de fluencia y la ley de endurecimiento. Se plantea una relación constitutiva del mismo tipo que en plasticidad clásica pero sin basarse en el mecanismo de la superficie de fluencia antes explicado:

$$d\epsilon = \mathbf{C}(\sigma, \alpha, \lambda) : d\sigma \quad (6.7)$$

El tensor constitutivo \mathbf{C} depende del estado de tensiones σ y de unos parámetros de estado α que tiene en cuenta la influencia de la historia de tensiones en el comportamiento de material. Si se desea formular un modelo constitutivo para reproducir deformaciones irrecuperables, el tensor \mathbf{C} debe depender además de la dirección del incremento de tensiones $\lambda = \frac{d\sigma}{(d\sigma:d\sigma)^{\frac{1}{2}}}$ ya que si no fuera así al aplicar dos incrementos $d\sigma$ y $-d\sigma$ tendríamos:

$$d\epsilon = \mathbf{C} : d\sigma + \mathbf{C} : (-d\sigma) = 0 \quad (6.8)$$

y por tanto no habría deformaciones irreversibles.

La dependencia de \mathbf{C} con λ podrá plantearse con total generalidad, es decir, que $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\lambda)$ sea una función continua. Este tipo de relación la utiliza el modelo incremental de Darve [Darve et al., 1988]. En plasticidad generalizada se utiliza una relación mucho más sencilla de tipo discontinuo. Se divide el espacio del incremento de tensiones (6 dimensiones) en dos subespacios o zonas tensoriales [Darve & Dendani, 1988], uno llamado carga y otro llamado descarga. En concordancia con estos dos subespacios se define un tensor constitutivo \mathbf{C}_L para incrementos correspondientes al subespacio de incrementos de carga y otro \mathbf{C}_U para descarga. Darve [Darve & Dendani, 1988] denomina a este tipo de modelos **incrementalmente bilineales**. Cabe señalar que esta subdivisión del espacio de incremento

de tensiones en carga y descarga es idéntica a la utilizada en plasticidad clásica, donde esa separación esta materializada con la superficie de fluencia.

En plasticidad generalizada, la dependencia de \mathbf{C} con la dirección del incremento de cargas se hace definiendo en cada punto del espacio de tensiones una dirección de carga mediante un vector $\mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$. Luego:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n} > \mathbf{0} & \text{ carga} \\ d\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n} < \mathbf{0} & \text{ descarga} \\ d\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{ carga neutra} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Las expresiones propuestas para los tensores constitutivos \mathbf{C}_L y \mathbf{C}_U son:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_L &= \mathbf{C}^e + \frac{\mathbf{n}_{gL} \otimes \mathbf{n}}{H_L} \\ \mathbf{C}_U &= \mathbf{C}^e + \frac{\mathbf{n}_{gU} \otimes \mathbf{n}}{H_U} \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde \mathbf{C}^e es el tensor elástico: $\mathbf{C}^e = (D^e)^{-1}$, y $H_{L/U}$ es una función escalar del estado de tensiones y de los parámetros de estado α :

$$H_{L/U} = H_{L/U}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \quad (6.11)$$

y $\mathbf{n}_{gL/U}$ es una dirección definida en todos los puntos del espacio de tensiones. El incremento de deformaciones queda:

$$d\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C}_{L/U} : d\boldsymbol{\sigma} \quad (6.12)$$

El caso límite $d\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n} = \mathbf{0}$ se denomina carga neutra y la ecuación 6.12, en este caso se reduce a:

$$d\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C}^e : d\boldsymbol{\sigma} \quad (6.13)$$

y como el incremento de deformaciones dado por la ecuación 6.13 no depende de la dirección del incremento de tensiones, se puede concluir que las deformaciones en este caso son reversibles y por tanto elásticas. Por lo tanto \mathbf{C}^e cumple la función de un tensor de deformabilidad elástico.

Si $\mathbf{C}^e : d\boldsymbol{\sigma}$ es el incremento de deformaciones elásticas, de la ecuación 6.10 podemos deducir que:

$$\frac{\mathbf{n}_{gL/U} \otimes \mathbf{n}}{H_{L/U}} : d\boldsymbol{\sigma} = d\boldsymbol{\epsilon}^p \quad (6.14)$$

es el incremento de deformaciones plásticas. Además $d\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n}$ es la proyección del incremento de tensiones en la dirección de carga, un escalar y $H_{L/U}$ es otro escalar, por lo que finalmente podemos deducir que $\mathbf{n}_{gL/U}$ es la dirección del incremento de deformaciones plásticas. Por analogía con plasticidad clásica se llama a $H_{L/U}$ módulo plástico. El criterio de carga/descarga de la ecuación 6.14, funciona bien para el caso en que sólo hay rigidización (hardening), esto es cuando un incremento de deformación positivo corresponde un incremento de tensión también positivo. En el caso opuesto se dice que hay reblandecimiento (softening). Para poder tratar este tipo de comportamiento es necesario modificar el criterio carga/descarga de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{\sigma}^e : \mathbf{n} > \mathbf{0} & \text{ carga} \\
d\boldsymbol{\sigma}^e : \mathbf{n} < \mathbf{0} & \text{ descarga} \\
d\boldsymbol{\sigma}^e : \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{ carga neutra}
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Donde $d\boldsymbol{\sigma}^e$ es un incremento de tensión de prueba definido como:

$$d\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}^e d\boldsymbol{\epsilon}^e \tag{6.16}$$

Aparentemente los modelos de plasticidad generalizada tienen la ventaja de no necesitar de la determinación de la forma de la superficie de fluencia ni de la ley de rigidización, pero en cambio hay que resolver otros dos problemas completamente análogos como son la determinación de la dirección de carga $\mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ y el módulo plástico $H_{L/U}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$. Si bien en plasticidad generalizada al no necesitar la condición de consistencia, se dispone de más libertad para especificar la función $H_{L/U}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$, también es cierto que su significado físico es menos evidente que en plasticidad clásica y por ello, los parámetros del modelo son más difíciles de determinar y en general su relación con las propiedades físicas del material es poco clara.

Una ventaja real de los modelos de plasticidad generalizada es que pueden simular comportamientos imposibles de reproducir con plasticidad clásica como son la ocurrencia de deformaciones plásticas en descarga y recarga (dentro de la región elástica en modelos de plasticidad clásica), comportamiento observado en ensayos en arenas. Una última observación es que su implementación en programas de cálculo numérico es más sencilla que los modelos de plasticidad clásica porque no necesitan cumplir con la condición de consistencia y por tanto se eliminan los llamados algoritmos de retorno [Borja & Lee, 1990].

6.3 El Modelo de Pastor-Zienkiewicz para arenas

Se supone válido el principio de tensiones efectivas, definido como:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \tag{6.17}$$

Donde p es la presión del agua en los poros y δ_{ij} es el delta de Kronecker. Para este caso adoptamos como positivas las tensiones de compresión.

El modelo está formulado en términos de los invariantes de tensión q y p' que se definen como:

$$\begin{aligned}
p' &= I_1 \text{ Tensión media efectiva} \\
q &= \sqrt{3J_2} \text{ Tensión desviadora}
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Donde

$$\begin{aligned}
I_1' &= \frac{\sigma'_{ii}}{3} \\
J_2 &= \frac{s'_{ij}s'_{ij}}{2} \\
s'_{ij} &= \sigma'_{ij} - I_1'\delta_{ij}
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Los incrementos de deformación conjugados a p' y q son respectivamente:

$$\begin{aligned}
d\epsilon_v &= d\epsilon_{ii} \\
d\epsilon_s &= \frac{2}{3}d\epsilon'_{ij}d\epsilon'_{ij} \\
d\epsilon'_{ij} &= d\epsilon_{ij} - \frac{d\epsilon_{ii}}{3}
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Siendo $d\epsilon_v$ la deformación volumétrica y $d\epsilon_s$ la deformación desviadora. Para el caso del estado de tensiones en un ensayo triaxial p' , $d\epsilon_v$ y q , $d\epsilon_s$ toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
p' &= \frac{\sigma'_a + 2\sigma'_r}{3} \\
d\epsilon_v &= d\epsilon_a + 2d\epsilon_r \\
q &= \sigma'_a - \sigma'_r \\
d\epsilon_s &= \frac{2}{3}(d\epsilon_a - d\epsilon_r)
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Donde los subíndices se refieren a la tensión axial y radial respectivamente.

Para definir el modelo en el marco de la plasticidad generalizada, es necesario establecer para cada punto del espacio de tensiones la dirección de carga $\mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma})$ y la dirección de las deformaciones plásticas $\mathbf{n}_g(\boldsymbol{\sigma})$ en carga y descarga y además una función para el módulo plástico $\mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$ en carga y descarga. Se asume en este caso que las direcciones de carga y de deformación plástica no dependen de los parámetros α de la historia del material.

Para establecer la dirección de las deformaciones plásticas (el equivalente al potencial plástico en plasticidad clásica) se parte de mediciones experimentales de la dilatancia, la cual se define como:

$$d = -\frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_s^p} \tag{6.22}$$

Donde el superíndice p indica deformaciones plásticas. Los resultados experimentales muestran que la dilatancia depende únicamente de la relación de tensiones $\eta = \frac{q}{p}$ pero no del nivel de tensiones. Distintos autores han propuesto para la dilatancia expresiones de tipo[Nova & Wood, 1979]:

$$d_g = (1 + \alpha_g)(M_g - \eta) \tag{6.23}$$

donde M_g es el valor de η para el cual $d = 0$

Luego la dirección de deformación plástica en carga se define:

$$n^{gL} = \begin{bmatrix} n_p^{gL} \\ n_q^{gL} \\ n_\theta^{gL} \end{bmatrix}$$

siendo:

$$\begin{aligned} n_p^{gL} &= \frac{d_g}{\sqrt{1 + d_g^2}} \\ n_q^{gL} &= \frac{1}{\sqrt{1 + d_g^2}} \\ n_\theta^{gL} &= -\frac{qM_g \cos 3\theta}{2\sqrt{1 + d_g^2}} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Para definir la dirección de carga se utiliza una expresión similar:

$$n = \begin{bmatrix} n_p \\ n_q \\ n_\theta \end{bmatrix}$$

siendo:

$$\begin{aligned} n_p &= \frac{d_f}{\sqrt{1 + d_f^2}} \\ n_q &= \frac{1}{\sqrt{1 + d_f^2}} \\ n_\theta &= -\frac{qM_f \cos 3\theta}{2\sqrt{1 + d_f^2}} \end{aligned} \quad (6.25)$$

donde:

$$d_f = (1 + \alpha) (M_f - \eta) \quad (6.26)$$

En este caso d_f y M_f no tiene ningún significado físico. M_f es simplemente la relación de tensiones para la cual la dirección de carga es vertical y d_f es una variable interna. Si se tratara de un modelo de plasticidad clásica, deberíamos integrar las expresiones de \mathbf{n}_{gl} y \mathbf{n} para obtener las ecuaciones del potencial plástico y de la superficie de fluencia respectivamente. Haciendo esto llegaríamos a :

Potencial Plástico

$$G = q - M_g p' \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \left(1 - \left(\frac{p'}{p_c'} \right)^\alpha \right) \quad (6.27)$$

Superficie de Fluencia

$$F = q - M_f p' \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \left(1 - \left(\frac{p'}{p_c} \right)^\alpha \right) \quad (6.28)$$

Aunque en plasticidad generalizada no necesitamos de estas superficies para definir el modelo, vemos que definir las direcciones \mathbf{n}_{gl} y \mathbf{n} es completamente análogo a definir el potencial plástico y la superficie de fluencia. En el caso del modelo PZC ambas expresiones son idénticas y lo único que diferencia del potencial plástico y superficie de fluencia es el parámetro M . Tomando $M_g = M_f$ el modelo se asemeja al de plasticidad asociada.

Es interesante señalar que si tomáramos $\alpha = 0$ en lugar de las expresiones 6.27 y 6.28 obtendríamos la superficie de fluencia del modelo Cam-Clay. En el modelo PZ α toma un valor 0.45 y el aspecto que tienen el potencial plástico y la superficie de fluencia se muestran en la figura 6.1. La expresión del potencial plástico 6.27 es idéntica a la utilizada por Nova en su modelo para arenas [Nova & Wood, 1979] para valores de $\eta > \frac{M}{2}$. Para estados de tensión correspondientes a $\eta < \frac{M}{2}$ Nova [Nova & Wood, 1979] propone una relación entre la dilatación y η de tipo hiperbólico (en lugar de la ecuación 6.23) que tiene la característica de dar deformaciones desviadoras plásticas nulas para incrementos de tensión a lo largo del eje hidrostático p' (compresión isotrópica). Este comportamiento parece más realista que lo que resulta del modelo PZ que predice la ocurrencia de deformación desviadora para compresión isotrópica como se deduce de la figura 6.1.

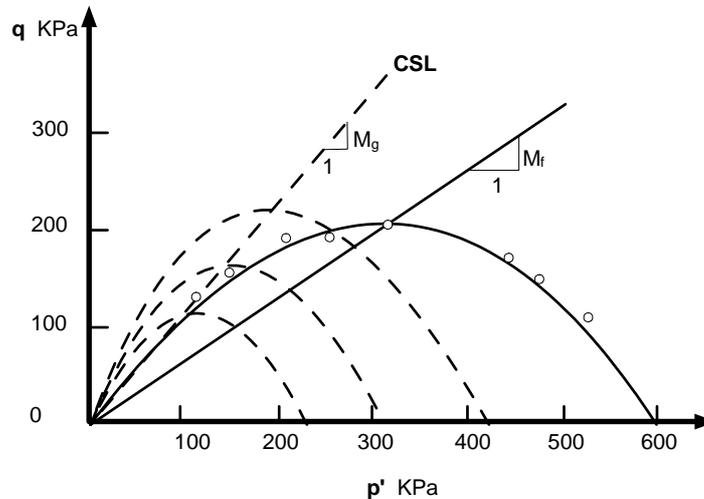


Figura 6.1: Superficie de fluencia y potencial plástico implícitos en el modelo PZC [Pastor et al., 1990]

La expresión para el módulo plástico H_L propuesta por el autor, pretende tener en cuenta los siguientes comportamientos observados en ensayos:

- Al aplicar una deformación desviadora creciente, el estado final del material granular se alcanza sobre la línea de estado crítico. En el modelo se asume que la línea de estado crítico coincide con $\eta = M_g$.

- La falla no ocurre necesariamente cuando la línea de estado crítico se cruza por primera vez. Es decir que son posibles los estados de tensiones con $\eta > M_g$ aunque el estado final esté sobre la línea de estado crítico.

- El carácter puramente friccionante del material granular exige que haya una frontera que separe los estados de tensión posibles de los imposibles. Llamaremos a esta frontera superficie de falla (o línea de falla para los estados de tensiones triaxiales).

Pastor[Pastor et al., 1990] propusieron la siguiente expresión para el módulo plástico que es capaz de reproducir las tres características de comportamiento antes enumeradas.

$$H_L = H_o p' H_f (H_v + H_s) H_{DM} \quad (6.29)$$

donde

$$\begin{aligned} H_f &= \left(1 - \frac{\eta}{\eta_f}\right)^4 \\ \eta_f &= \left(1 + \frac{1}{\alpha_f}\right) M_f \\ H_v &= \left(1 - \frac{\eta}{M_g}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_s &= \beta_o \beta_1 e^{-(\beta_o \xi)} \\ \xi &= \int \|\ d\epsilon_s^p \|\ \\ H_{DM} &= \left(\frac{\zeta_{\max}}{\zeta}\right)^\gamma \\ \zeta &= p' \left(1 - \frac{\eta}{\eta_f}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Siendo $H_o, M_g, M_f, \beta_o, \beta_1, \gamma, \alpha$ parámetros del modelo

Las anteriores expresiones tienen las siguientes propiedades:

- El factor H_f anula el módulo plástico H cuando $\eta = \eta_f$ y por lo tanto la relación de tensiones η_f constituye la superficie de falla (una recta que parte del origen en el espacio $p' - q$ como se ve en la figura 6.1).

- H_v se anula sobre la línea de estado crítico y toma valores negativos para $\eta > M_g$. H_s es siempre positivo y su valor tiende a cero a medida que aumenta la variable ξ denominada de "memoria continua" y que es la deformación desviadora plástica acumulada. La suma de ambos ($H_v + H_s$) permite que el camino de tensiones en el plano $p' - q$ cruce la línea de estado crítico sin que H_L se haga nulo, y cuando la deformación desviadora es lo suficientemente grande, H se haga negativo (reblandecimiento, softening) y el estado de tensiones vuelva a la línea de estado crítico.

- La variable ζ que es el equivalente al parámetro de rigidización de los modelos de plasticidad clásica, es en realidad idéntica a la superficie de fluencia dada por la ecuación 6.28, donde p'_c se ha reemplazado por ζ . ζ_{\max} es el máximo valor de ζ alcanzado durante la historia de carga del material y se llama **variable de memoria discreta**. H_{DM} incorpora la influencia del máximo nivel de tensiones alcanzado cuando la historia de carga involucra ciclos de carga y descarga.

En los modelos de plasticidad clásica, se asume que en descarga, el material se comporta elásticamente; Sin embargo, se ha observado en ensayos triaxiales no drenados que en descarga ocurren

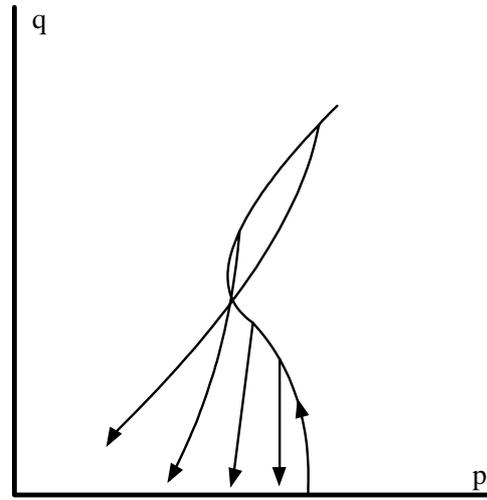


Figura 6.2: Descarga de una arena en condiciones no-drenadas desde distintas relaciones de tensión [Ishihara & Okoda, 1982]

efectivamente deformaciones plásticas [Ishihara & Okoda, 1982]. Este comportamiento se ilustra esquemáticamente en la figura 6.2. Si se tiene en cuenta que en ensayos no drenados la trayectoria de tensiones en régimen elástico en el plano $p' - q$ es vertical, se deduce de esta, que cuanto mas alta sea la relación de tensiones desde donde se inició la descarga η_u , más se aparta el comportamiento del material del régimen elástico. Otro aspecto que se debe resaltar es que en descarga el comportamiento es siempre contractivo y por lo tanto las presiones de poro que se generan son siempre positivas.

Para el caso de descarga, Pastor [Pastor et al., 1990] propusieron la siguiente expresión para el módulo plástico:

$$\begin{aligned} \text{Si } \left| \frac{M_g}{\eta_u} \right| \geq 1 \quad H_u &= H_{uo} \left(\frac{M_g}{\eta_u} \right)^{\gamma_u} \\ \text{Si } \left| \frac{M_g}{\eta_u} \right| \leq 1 \quad H_u &= H_{uo} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Donde η_u es el valor de η donde se inició la descarga y H_{uo} , γ_u son parámetros del modelo. La dirección de deformación plástica en descarga se define como:

$$n^{gU} = \begin{bmatrix} n_p^{gU} \\ n_q^{gU} \\ n_\theta^{gU} \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
n_p^{gU} &= -\text{abs} \left[\frac{d_g}{\sqrt{1+d_g^2}} \right] \\
n_q^{gU} &= \frac{1}{\sqrt{1+d_g^2}} \\
n_\theta^{gU} &= -\frac{qM_g \cos 3\theta}{2\sqrt{1+d_g^2}}
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Es interesante observar que si en las anteriores ecuaciones tomamos los parámetros $\gamma = \gamma_u = \infty$ el modelo de plasticidad generalizada se reduce a uno de plasticidad clásica. Obviamente si se quisieran hacer cálculos con este modelo se debería añadir una condición de consistencia, sin embargo el modelo PZ se puede transformar en un modelo cuasi-elastoplástico sin necesidad de una condición de consistencia tomando para ello valores muy grandes de γ y γ_u .

Finalmente los módulos elásticos Volumétrico y de Corte se asumen dependientes de p' de la siguiente manera [Pastor et al., 1990]:

$$\begin{aligned}
K_{ev}^e &= H_{evop} \frac{p'}{p_o} \\
G_{ev}^e &= H_{esop} \frac{p'}{p_o}
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Donde H_{evop} y H_{esop} son parámetros del modelo y p_o' es una presión de referencia.

En vista de que el modelo PZ se formuló para reproducir el comportamiento bajo cargas cíclicas parece importante señalar que la ley constitutiva elástica que resulta de los módulos de la ecuación 6.33 es no conservativa [Zytynski et al., 1978], y por ello para ciertas trayectorias de tensión, el modelo puede disipar o generar energía. En la referencia de Pastor [Pastor et al., 1988], se utiliza un módulo G^e constante en conjunto con el K^e de la expresión 6.33. En este caso la parte elástica del modelo resulta de acuerdo con las observaciones experimentales y además puede implicar coeficientes de Poisson negativos para bajas tensiones lo cual es físicamente inadmisibles [Gens & Potts, 1988]. En un modelo de plasticidad generalizada no parece importante que la parte elástica disipe energía puesto que no existe una región puramente elástica y las deformaciones elásticas siempre van acompañadas de deformaciones plásticas que "encubren" la disipación espúrea; sin embargo si la trayectoria de tensiones que se sigue produce generación de energía en lugar de disipación, los resultados pueden ser inadecuados.

6.4 Predicciones del modelo de Pastor-Zienkiewicz

A continuación se presentan las aplicaciones del modelo en el plano triaxial. Con el fin de visualizar adecuadamente los resultados, se presenta la deducción de las expresiones utilizadas [Ledesma, 1997]:

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}^e \cdot \mathbf{n}^g \cdot \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{D}^e}{H + \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{D}^e \cdot \mathbf{n}^g}$$

$$\mathbf{D}^e = \begin{bmatrix} H_{ev} & 0 \\ 0 & H_{es} \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

$$\begin{bmatrix} dp' \\ dq \end{bmatrix} = [\mathbf{D}_{ep}] \begin{bmatrix} d\varepsilon_v \\ d\varepsilon_s \end{bmatrix}$$

donde

$$p' = \frac{\sigma'_1 + 2\sigma'_3}{3}$$

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (6.35)$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3$$

$$\varepsilon_s = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$$

Reemplazando las anteriores expresiones se obtiene:

$$\mathbf{D}_{ep} = \begin{bmatrix} H_{ev} & 0 \\ 0 & H_{es} \end{bmatrix} - \frac{1}{H + H_{ev}n_g^p n_f^p + H_{es}n_g^q n_f^q} \begin{bmatrix} H_{ev}^2 n_g^p n_f^p & H_{ev} H_{es} n_g^p n_f^q \\ H_{ev} H_{es} n_g^q n_f^p & H_{ev}^2 n_g^q n_f^q \end{bmatrix}$$

operando se tiene:

$$D_{ep} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} H \cdot H_{ev} + H_{ev} \cdot H_{es} n_g^q n_f^q & -H_{ev} \cdot H_{es} n_g^p n_f^q \\ -H_{ev} \cdot H_{es} n_g^q n_f^p & H \cdot H_{es} + H_{ev} \cdot H_{es} n_g^q n_f^q \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Siendo:

$$\Delta = H + H_{ev}n_g^p n_f^p + H_{es}n_g^q n_f^q \quad (6.37)$$

6.4.1 Ensayo No drenado-Deformación controlada: ε_1

Para este caso $d\varepsilon_v = 0$ y $d\varepsilon_s = d\varepsilon_1$, Utilizando 6.36, se obtiene:

$$dp' = -\frac{1}{\Delta} H_{ev} n_g^p n_f^p d\varepsilon_1 \quad (6.38)$$

$$dq = \frac{1}{\Delta} (H \cdot H_{es} + H_{ev} H_{es} n_g^q n_f^q) d\varepsilon_1$$

6.4.2 Ensayo Drenado - Deformación controlada: ε_1

Para este caso se tiene $du = 0$ y $dp' = \frac{dq}{3}$; Reemplazando en 6.35, se obtiene:

$$dp' = \frac{1}{\Delta} (H \cdot H_{ev} + H_{ev} H_{es} n_g^q n_f^q) d\varepsilon_v - \frac{1}{\Delta} (H_{ev} H_{es} n_g^p n_f^q) d\varepsilon_s \quad (6.39)$$

$$dq = -\frac{1}{\Delta} (H_{ev} H_{es} n_g^q n_f^p) d\varepsilon_v + \frac{1}{\Delta} (H \cdot H_{es} + H_{ev} H_{es} n_g^p n_f^p) d\varepsilon_s$$

Siendo:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 2HH_{es} + 2H_{ev}H_{es}n_g^p n_f^p + 6H_{ev}H_{es}n_g^p n_f^q - 9HH_{ev} - 9H_{ev}H_{es}n_g^q n_f^q - 3H_{ev}H_{es}n_g^q n_f^p \\ \Delta_2 &= 18HH_{ev} + 18H_{ev}H_{es}n_g^q n_f^q + 6H_{ev}H_{es}n_g^q n_f^p + 2HH_{es} + 2H_{ev}H_{es}n_g^p n_f^p + 6H_{ev}H_{es}n_g^p n_f^q\end{aligned}$$

$$d\varepsilon_s = (d\varepsilon_1) \frac{9HH_{ev} + 9H_{ev}H_{es}n_g^q n_f^q + 3H_{ev}H_{es}n_g^q n_f^p}{9HH_{ev} + HH_{es} + 9H_{ev}H_{es}n_g^q n_f^q + 3H_{ev}H_{es}n_g^q n_f^p + H_{ev}H_{es}n_g^p n_f^p + 3H_{ev}H_{es}n_g^p n_f^q} \quad (6.40)$$

$$d\varepsilon_v = (d\varepsilon_1) \frac{3HH_{es} + 3H_{ev}H_{es}n_g^p n_f^p + 9H_{ev}H_{es}n_g^p n_f^q}{9HH_{ev} + 9H_{ev}H_{es}n_g^q n_f^q + 3H_{ev}H_{es}n_g^q n_f^p + HH_{es} + H_{ev}H_{es}n_g^p n_f^p + 3H_{ev}H_{es}n_g^p n_f^q}$$

La variable $d\varepsilon_3$ está dada por:

$$d\varepsilon_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} d\varepsilon_1$$

y dp' , dq pueden ser calculados usando sus valores.

6.5 Parámetros del modelo

El modelo posee 9 parámetros:

- El modelo utiliza como parámetros elásticos K_{ev} y G_{es} . Se determinan mediante procedimientos convencionales con ensayos de carga y descarga. K_{ev} generalmente se hace variar con la presión efectiva de confinamiento con una expresión tal como la 6.33. Respecto a G_{es} se lo puede hacer independiente de la presión efectiva de confinamiento, o bien hacerlo dependiente de ésta como en 6.33. Esta última es hipoeástica, aunque en este modelo no hay un dominio puramente elástico.
- H_o constituye un módulo plástico para una trayectoria isotrópica (es necesario aclarar que salvo por el producto de los parámetros β_0 y β_1), este módulo se podría evaluar en una forma similar a la utilizada para arcillas:

$$H_o = \frac{1 + e}{\lambda - \kappa} \quad (6.41)$$

Siendo λ y κ las pendientes de la curva de carga virgen y de la recarga, respectivamente. Pero en arenas se observa una fuerte dependencia de λ con la presión de confinamiento p' , por ello Pastor, Zienkiewicz y Chan [Pastor et al., 1990] sugieren que H_o es un parámetro experimental que se obtiene por ajuste de ensayos isotrópicos. Lo que no queda muy claro es que se argumenta [Pastor et al., 1990] una fuerte no-linealidad de λ con la presión de confinamiento y a cambio se sugiere un parámetro H_o constante.

- α es el parámetro que se utiliza para el ajuste lineal entre d y η . Este tipo de ajuste se obtiene a partir de ensayos triaxiales drenados despreciando la influencia de las deformaciones elásticas. Este valor suele variar entre 0.4 y 0.5. 0.45 es un valor muy utilizado. Sin embargo, los ensayos drenados realizados en la arena Tumaco, muestran que $\alpha = 0.60$.

- M_g . Este parámetro corresponde a CSL [Pastor et al., 1990]. Se la puede obtener de ensayos triaxiales no-drenados observando el cambio de comportamiento de contractivo a dilatante o bien a partir del ángulo de fricción efectivo movilizado para grandes deformaciones. También se le puede obtener de ensayos drenados en función del ángulo de fricción movilizado para condiciones residuales.
- M_f . Se ha notado experimentalmente que las arenas muy densas presentan un comportamiento que puede considerarse asociado, por ello los autores del modelo proponen que el cociente entre M_f y M_g sea una medida de la densidad relativa del material, sugiriendo [Pastor et al., 1990]:

$$\frac{M_f}{M_g} = D_R$$

- Los parámetros de endurecimiento por deformaciones desviadoras plásticas β_0 y β_1 , se obtienen mediante prueba y error, generalmente son independientes de la densidad relativa.
- γ se obtiene mediante un procedimiento de prueba y error.
- H_{u0} y γ_u son los parámetros de descarga y se obtienen a partir de ensayos con cargas y posterior descargas desde diferentes nivel de tensiones.
- β_0 (adimensional) Toma usualmente un valor de 4.2 y el rango recomendado es entre 1.5 y 5.0. Este puede ser cero para análisis estáticos
- β_1 (adimensional) Usualmente toma el valor de 0.2 y el rango recomendado es entre 0.1 y 0.2

6.6 Simulación de ensayos con el Modelo

A diferencia de los modelos de plasticidad clásica, el modelo PZ permite que ocurran deformaciones plásticas en descarga y en recarga (dentro de lo que en un modelo de plasticidad clásica sería la región elástica). Además se fuerza a que las deformaciones en descarga sean de contracción. Esta característica permite reproducir el incremento de presión de poros durante la aplicación de una carga cíclica hasta llegar a la licuación en el caso de una arena suelta o a la movilidad cíclica en el caso de una arena densa. Este comportamiento no puede ser modelado con los modelos de plasticidad clásica porque la aplicación de una carga cíclica dentro de la región elástica no produce un incremento de presión de poros en absoluto (la trayectoria de tensiones resulta vertical). A continuación se presentan los resultados de las predicciones del Modelo de Pastor para la arena de Tumaco en ensayos triaxiales cíclicos. Para tal fin se utilizarán los parámetros obtenidos en el capítulo anterior, y a partir de ellos, se intentará reproducir el comportamiento ante carga cíclica. En el capítulo 8 se describen los detalles experimentales de los triaxiales cíclicos realizados con la arena de Tumaco.

Se intentó reproducir los ensayos correspondientes a $\frac{\sigma_d}{2\sigma_c} = 0.15, 0.2$ y 0.3 , donde σ_d es la tensión desviadora y σ_c es la tensión media. Los parámetros utilizados en las diferentes pruebas se ilustran en la tabla 6.1, los cuales se obtuvieron de las pruebas de laboratorio. Con los anteriores parámetros se procedió a realizar la respectiva modelación, obteniéndose los resultados ilustrados en las figuras 6.3 a 6.5, destacándose los siguientes aspectos:

Parámetro\Ensayo	DYN1	DYN2	DYN3
$K_{evo}(MPa)$	4.0	1.7	1.4
$G_{eso}(MPa)$	15	15	15
M_f	1.0	1	0.50
M_g	1.5	1.5	1.23
H_0	280	280	280
β_0	0.5	0.5	1.5
β_1	0.2	0.2	0.2
β_2	5.0	5.0	5.0
H_{uo}	57.0	57.0	57.0
γ_u	1.0	1.0	1.0
α	0.62*	0.62*	0.62*

Tabla 6.1: Parámetros del Modelo Pastor-Zienkiewicz

- El modelo P-Z reproduce de manera acertada las trayectorias de tensiones y la movilidad cíclica, con una reproducción adecuada en el número de ciclos.
- Las curvas tensión-deformación al igual que las anteriores, se reproducen de manera aceptable.
- En la medida en que se incrementa el número de ciclos se observa que al modelo se le dificulta reproducir la movilidad cíclica

6.7 Aspectos Computacionales

6.7.1 Transformación al sistema cartesiano

Las expresiones presentadas con anterioridad, se han definido en términos de las invariantes:

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} p \\ J \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (6.42)$$

Siendo[Gens, 1997]:

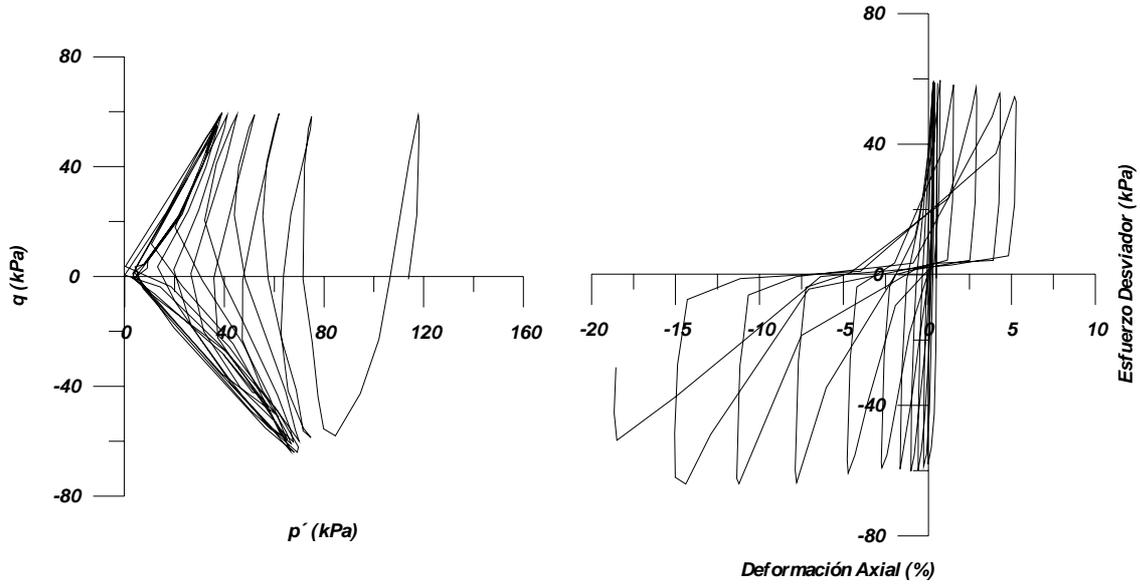
$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

$$J^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_x - p)^2 + (\sigma_y - p)^2 + (\sigma_z - p)^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)] = \frac{1}{2} tr(s^2) \quad (6.43)$$

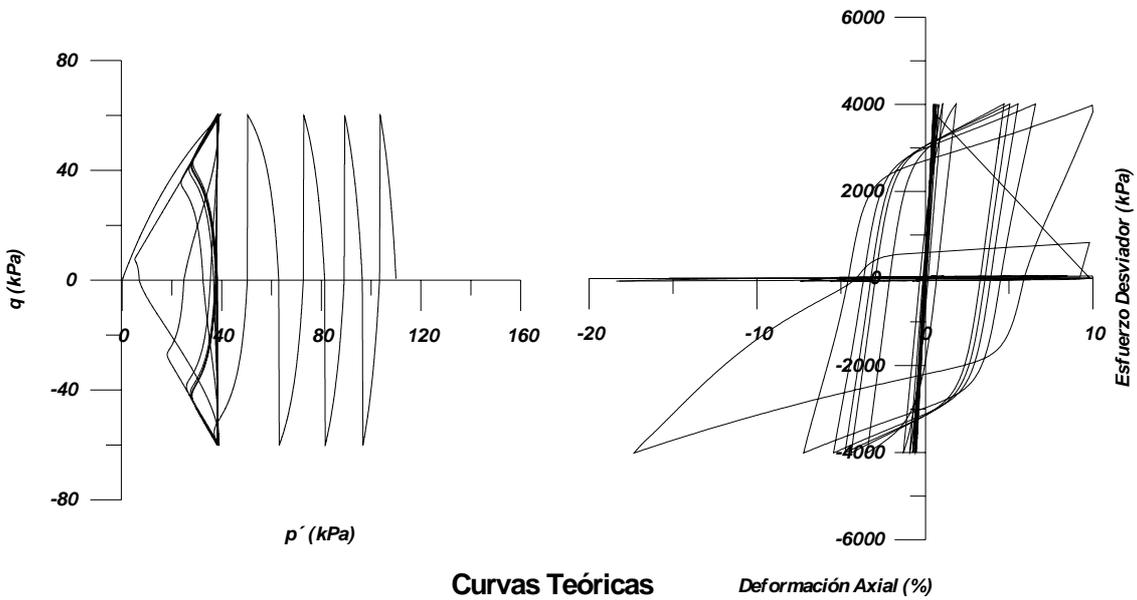
$$\theta = -\frac{1}{3} \sin^{-1} \left\{ \frac{3\sqrt{3} \det s}{2 J^3} \right\}$$

Sin embargo, para propósitos de cálculo en un código de elementos finitos, es necesario transformar las anteriores expresiones del espacio de las invariantes al sistema cartesiano. Para ello, definiremos el estado de tensiones en el espacio de las invariantes por la expresión 6.43, mientras que las tensiones en el sistema cartesiano estará definido por:

**ARENA DE TUMACO
TX Calculados BARCELONA
DYN1**



Curvas Experimentales



Curvas Teóricas

Figura 6.3: Comparación entre los resultados experimentales y la predicción del modelo $\left(\frac{\sigma'_d}{2\sigma_c} = 0.3\right)$

**ARENA DE TUMACO
TX Calculados BARCELONA
DYN2**

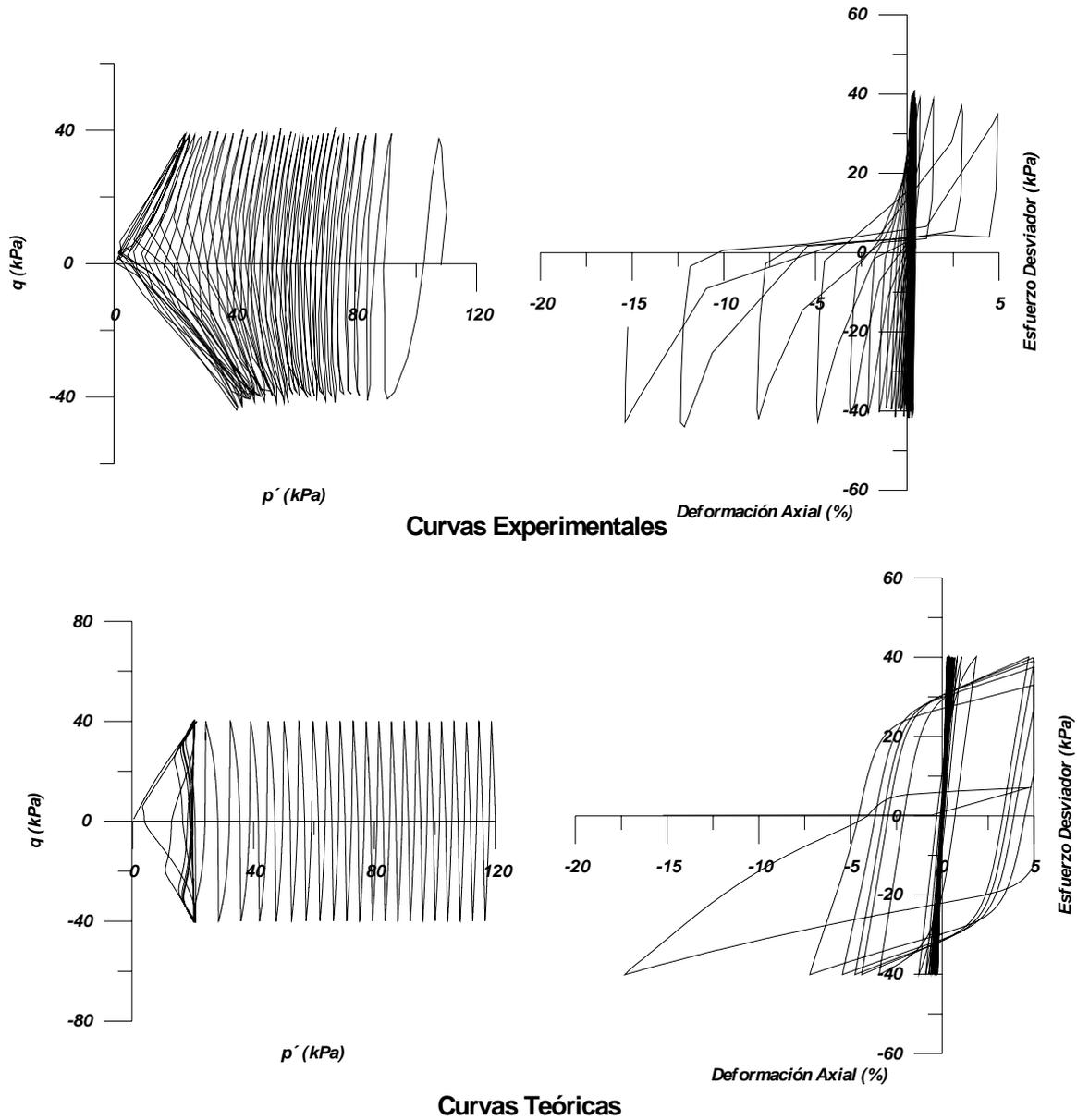
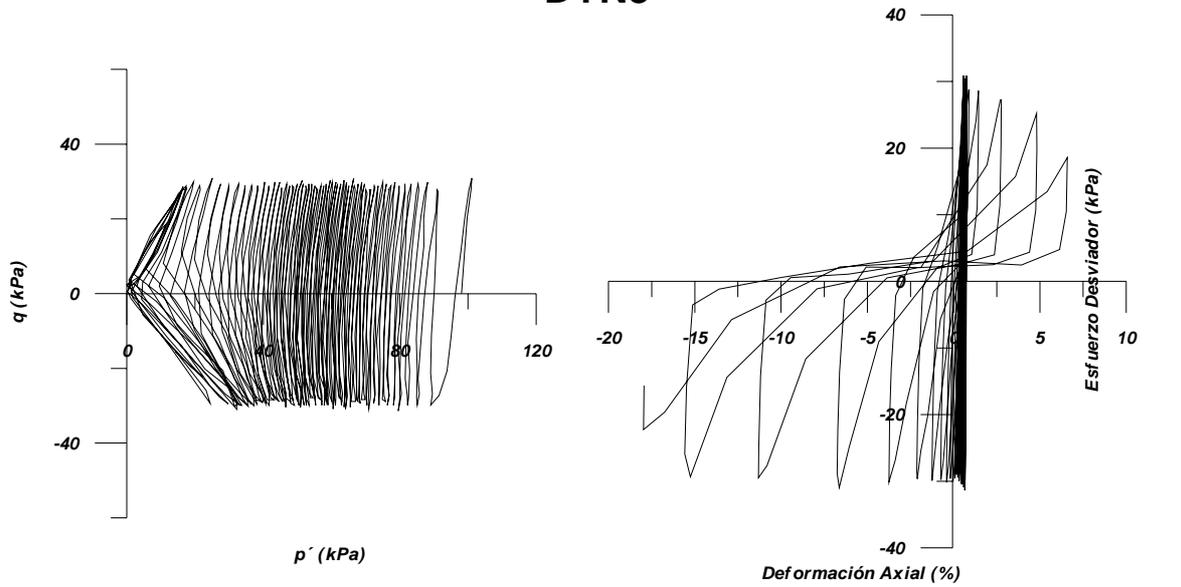
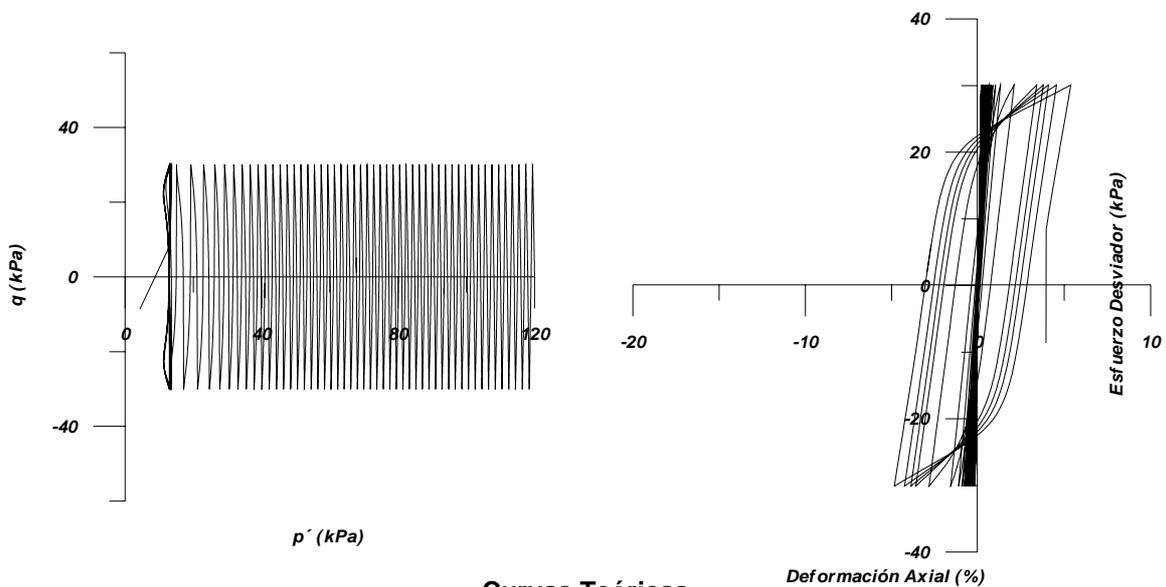


Figura 6.4: Comparación entre los resultados experimentales y la predicción del modelo $\left(\frac{\sigma'_d}{2\sigma_c} = 0.2\right)$

ARENA DE TUMACO TX Calculados BARCELONA DYN3



Curvas Experimentales



Curvas Teóricas

Figura 6.5: Comparación entre los resultados experimentales y la predicción del modelo $\left(\frac{\sigma'_d}{2\sigma_c} = 0.15\right)$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

La invariancia de $\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}$ requiere que se cumpla la siguiente relación [Chan, 1988]

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} = \mathbf{d}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \hat{\mathbf{n}} \quad (6.45)$$

Siendo \mathbf{n} y $\hat{\mathbf{n}}$ la dirección de los vectores de carga definidos en el espacio cartesiano y en el espacio de las invariantes, con:

$$d\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} \quad (6.46)$$

Sustituyendo en la expresión 6.45, se obtiene:

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \hat{\mathbf{n}} \quad (6.47)$$

De igual manera se tiene:

$$\mathbf{n}_g = \left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \hat{\mathbf{n}}_g \quad (6.48)$$

Donde \mathbf{n}_g y $\hat{\mathbf{n}}_g$ son los vectores de flujo plástico definidos en el espacio cartesiano y en el espacio de las invariantes; Detalles de tales transformaciones se presentan en Chan [Chan, 1988]. El término $\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)$, corresponde a las derivadas de las invariantes, las cuales se explican en detalle en [Zienkiewicz et al., 1999] y [Gens, 1997], presentando la siguiente forma:

$$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2J} \begin{bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{zz} \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cos \theta J^3} \begin{bmatrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \\ \varkappa_3 \\ \varkappa_4 \\ \varkappa_5 \\ \varkappa_6 \end{bmatrix} + \frac{3\sqrt{3} \det \mathbf{s}}{2J^5 2 \cos 3\theta} \begin{bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{zz} \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{yz} \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{1}{3} [2s_{yy}s_{zz} - s_{zz}s_{xx} - s_{xx}s_{yy} - (2\tau_{yx}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2)] \\ \varkappa_2 &= \frac{1}{3} [2s_{xx}s_{zz} - s_{yy}s_{xx} - s_{xx}s_{yy} - (2\tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2)] \\ \varkappa_3 &= \frac{1}{3} [2s_{xx}s_{yy} - s_{zz}s_{xx} - s_{zz}s_{yy} - (2\tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)] \\ \varkappa_4 &= 2 [\tau_{yz}\tau_{xz} - s_{zz}\tau_{xy}] \\ \varkappa_5 &= 2 [\tau_{xy}\tau_{yz} - s_{yy}\tau_{xz}] \\ \varkappa_6 &= 2 [\tau_{xy}\tau_{zx} - s_{xx}\tau_{xy}] \end{aligned}$$

Las anteriores expresiones son las que se utilizan para el caso de análisis tridimensionales.

6.8 Conclusiones

De lo expuesto anteriormente se concluye:

- En comparación con la plasticidad clásica, la teoría de la plasticidad generalizada permite una mayor libertad para especificar los mecanismos que gobiernan el comportamiento del modelo. Esta característica permite reproducir comportamientos que no pueden tratarse con modelos de plasticidad clásica como son la ocurrencia de deformaciones plásticas en descarga, fenómenos de histéresis bajo carga cíclica, licuación y movilidad cíclica.
- La ventaja señalada en el primer punto proviene de formular el modelo sin basarse en un mecanismo rígido como es la superficie de fluencia y su condición de consistencia. Esto tiene como principal desventaja que algunos parámetros del modelo no tengan ningún significado físico, por lo que es necesario investigar más sobre este punto. Por ejemplo el parámetro α que los autores recomiendan de $\alpha = 0.45$, para la arena de Tumaco fue de $\alpha = 0.62$.
- Los parámetros del modelo no están vinculados a la densidad del material, lo cual implica que la misma arena a densidades iniciales diferentes es considerada como otro material, con otro conjunto de parámetros. Por tal motivo, Bahda [Bahda et al., 1997] propone unos nuevos parámetros de estado (I_v e I_d) que los define como el parámetro de estado volumétrico y el parámetro de estado desviador respectivamente.
- El modelo de Pastor-Zienkiewicz tiene una gran capacidad para reproducir comportamientos característicos de materiales granulares en condiciones drenadas y no drenadas, tanto bajo carga monotónica como cíclica.

- El modelo de PZ en ensayos no drenados, si bien al pasar por el cambio de comportamiento tiende a alejarse de M_g , luego retorna y en condiciones residuales regresa a M_g . En este tipo de ensayo los parámetros de endurecimiento (β_0 y β_1) juegan un papel importante ya que de acuerdo a sus valores será la tendencia de la trayectoria a regresar en una forma más o menos pronunciada una vez superada M_g .
- El principal inconveniente del modelo se presenta en el momento de realizar predicciones lo cual parece estar vinculado a que algunos de los parámetros no se pueden obtener directamente de ensayos y no tienen un claro significado físico, utilizando para ello el procedimiento de prueba y error para su obtención. Este sistema permite excelentes ajustes pero no muy buenas predicciones. Por otra parte posee la ventaja de no tener que definirse una superficie de fluencia y no tener que verificarse la condición de consistencia siendo computacionalmente eficiente al implementarse en un programa de elementos finitos.
- El modelo ha experimentado mejoras dentro de las que se destacan:
 - Bahda [Bahda et al., 1997] propone un modelo de doble endurecimiento con unos parámetros de estados nuevos en el contexto de la plasticidad generalizada; según los autores el número de parámetros se incrementa de 9 a 11, haciendo posible reproducir el comportamiento cíclico de una arena suelta, media o densa.
 - Zienkiewicz [Zienkiewicz et al., 1999], propone un modelo de densificación modificado, con el fin de modelar la movilidad cíclica, sin embargo al igual que el modelo de Bahda, se presenta un incremento importante en el número de parámetros del modelo por lo cual no se tuvieron en cuenta.

Capítulo 7

INSTRUMENTACIÓN SÍSMICA INSTALADA EN TUMACO (COLOMBIA)

7.1 Antecedentes

La isla de Tumaco se ha visto históricamente sometida a fuertes movimientos sísmicos, que han ocasionado la destrucción de un sinnúmero de viviendas así como la pérdida de muchas vidas humanas. Los principales eventos que han afectado al municipio son los siguientes [Ramirez, 1975] :

1906 - Enero 31. Este terremoto está considerado entre los 10 que más energía han liberado en toda la historia sísmica del mundo, con una área de influencia de 300.000 Km². Los estudios realizados concluyen que el movimiento principal fue precedido de cuatro sacudidas fuertes siendo la duración del movimiento telúrico de 4 a 5 minutos, y el temblor de tierra fue tan repentino que los habitantes fueron arrojados a tierra; durante estos instantes se produjo la licuación de las arenas con la consecuente destrucción de numerosas viviendas, la pérdida de vidas humanas fue nula. Media hora después de finalizado el terremoto se generó una ola de 5 metros de altura que se estrelló contra dos islas situadas al frente de Tumaco, que evitaron la destrucción del municipio, sin embargo esto no evitó que 400 personas perecieran ahogadas.

1979 - Diciembre 12. Un violento terremoto de magnitud superior a 7 en la escala de Richter estremeció la costa pacífica; en Tumaco las viviendas y edificios localizados a lo largo de la calle del comercio se vinieron a tierra y por lo menos el 90% de las casas quedaron agrietadas, algunas presentaron hundimientos importantes lo cual es signo de la licuación de los depósitos arenosos. El terminal marítimo y el muelle resultaron destruidos como consecuencia del embate de las olas que siguieron al terremoto y por lo menos 300 víctimas entre muertos y desaparecidos.

Tomando como referencia los anteriores registros históricos se concluye que el municipio de Tumaco en el evento de un sismo fuerte se verá afectado por los siguientes fenómenos:

- La alta susceptibilidad a la licuación de sus depósitos arenosos y,
- Los tsunamis que se presentan algunos minutos después de finalizado el temblor.

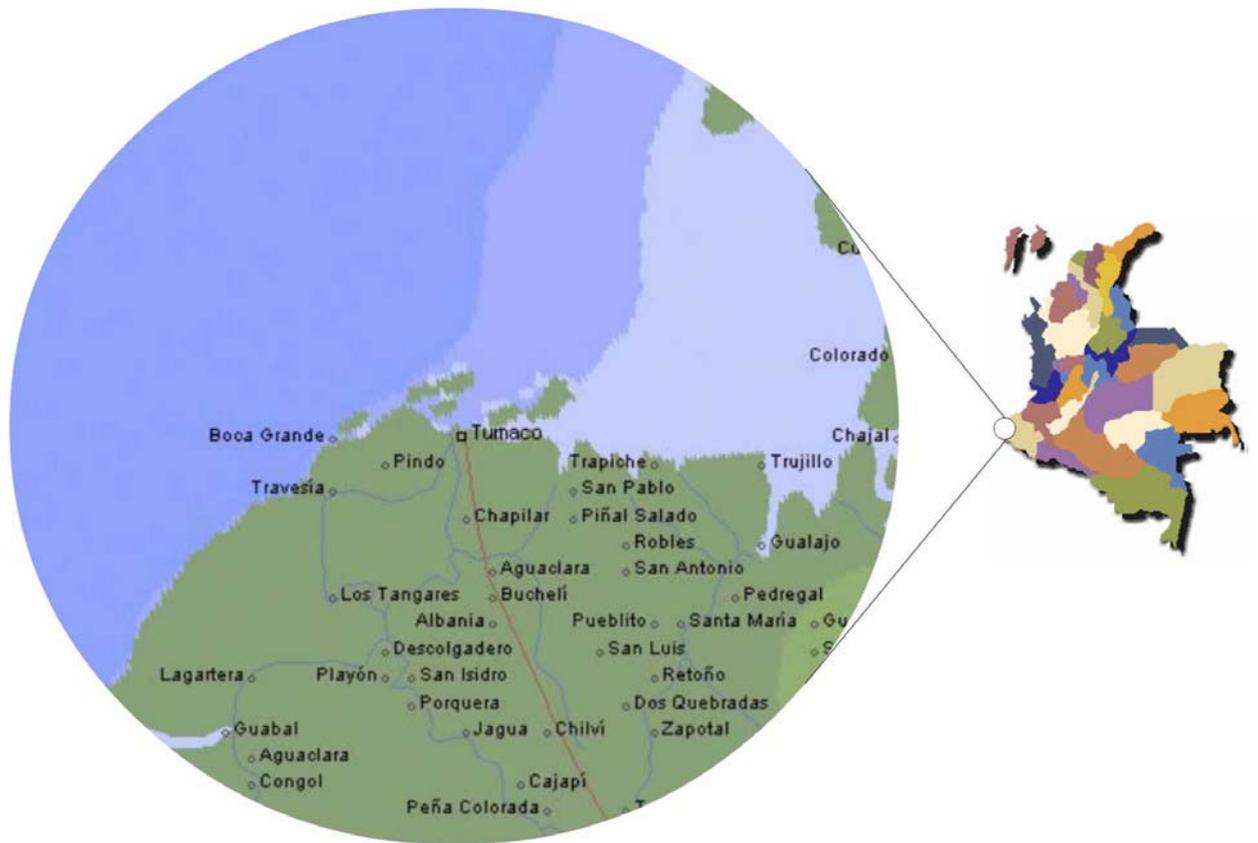


Figura 7.1: Localización Tumaco

7.2 Introducción

El municipio de Tumaco está localizado a 300 Kms al suroccidente de Bogotá, sobre la costa pacífica (figura 7.1); está conformado por un par de islas cuya superficie no supera los 10 Km², presentando un régimen de lluvia media anual de 2245 mm al año.

Teniendo en cuenta que Tumaco representa un punto estratégico para las exportaciones Colombianas, se vio la necesidad de estudiar el comportamiento mecánico de los depósitos arenosos. Por tal motivo, INGEOMINAS financió la instalación una red de sismógrafos y acelerógrafos, complementadas con una serie de piezómetros cuya finalidad sería medir las presiones de poros ocasionadas por las cargas sísmicas. Esta oportunidad se aprovechó para estudiar también, en campo y en laboratorio, las propiedades de la arena de Tumaco.

7.3 Aspectos Tectónicos

7.3.1 Subducción de la Placa de Nazca en la zona de Nariño

El territorio colombiano está ubicado en una zona donde convergen tres principales placas tectónicas. Al sureste de los Andes se encuentra la placa Suramericana, al norte se encuentra la placa del Caribe

y al occidente de los Andes se encuentra la placa de Nazca, la cual, converge hacia el este, a 6 cm/año, movimiento relativo con el NW de la placa Suramericana [Muñoz & Bermúdez, 2001] (figura 7.2). Una parte del desplazamiento entre la placa Nazca (oceánica) y la placa Suramericana se absorbe a lo largo de la zona de subducción de la placa oceánica bajo la orogénesis Andina. Varios autores postulan que la placa de Nazca se hunde dentro del manto bajo las cordilleras Central y Occidental, con un ángulo promedio de 35 ° hacia el este. La geometría de esta zona de subducción ha sido analizada por medio de sismos de profundidad intermedia (entre 100 y 200 km), que sugieren que la placa presenta distintos segmentos separados probablemente por fracturas dentro del manto litosférico [AIS300, 1996].

El segmento del Cauca, cuyo azimut es N30°E, corresponde a la porción de placa oceánica de Nazca que subduce bajo el territorio colombiano. Este segmento está limitado al sur por el segmento del Ecuador que presenta una orientación oblicua sugiriendo un rompimiento de la placa oceánica en el límite entre Ecuador y Colombia

En el Segmento del Cauca se han originado sismos de diversas magnitudes asociados con distintos procesos de deformación inherentes a la subducción. En primer lugar existe una sismicidad cuyos epicentros están localizados a más de 30 km "mar adentro", asociados al movimiento a lo largo de las fallas normales generadas por la flexión de la placa oceánica. El gran sismo de Tumaco de 1906 parece corresponder a este mecanismo de deformación.

En segundo lugar se tienen fallas inversas y de rumbo a lo largo de la zona de contacto entre las placas oceánica y continental (zona de Benioff). El sismo significativo más reciente ocurrido en dicho segmento fue el 12 de diciembre de 1979 con magnitud de Ms entre 7.7 y 7.9. Este sismo generó un tsunami que produjo grandes daños y víctimas en el suroccidente del país [AIS300, 1996].

Según el Estudio General de Amenaza Sísmica de Colombia [AIS300, 1996]: "El segmento del Cauca constituye probablemente la fuente sismogénica de más destrucción en el país; la magnitud última posible para los sismos originados allí puede ser del orden de 8.6 en la escala Ms. No se ha establecido el límite superior de la magnitud de referencia en este segmento; no obstante, algunas consideraciones de orden físico y geométrico mueven a los autores a presumir que este segmento es el más activo pudiendo generar los sismos de mayor magnitud".

7.3.2 Sistemas de fallas intracontinentales en Nariño

La convergencia relativa de Nazca y Suramérica también es absorbida a lo largo de grandes sistemas de fallas intracontinentales, que se observan a lo largo y ancho de las Cordilleras [Paris & Romero, 1994]. Estas falla atraviesan la corteza terrestre y son responsables de la sismicidad superficial en nuestro territorio. Los principales sistemas de fallas son de tipo inverso y de rumbo, y tienen una dirección dominante paralela al eje de las cordilleras (N-S a N-NE). Cerca a la ciudad de Tumaco se destacan las fallas de Tumaco y Remolino - El Charco

7.4 Aspectos Sismológicos

7.4.1 Instrumentación Sismológica

Dada la gran actividad sísmica del país, desde el año de 1987, el INGEOMINAS inició el proyecto Red Sismológica Nacional de Colombia (RSNC), que comprendía la instrumentación sísmica y la ampliación de la instrumentación volcánica del país con sismógrafos y acelerógrafos. Fruto de este esfuerzo, el año

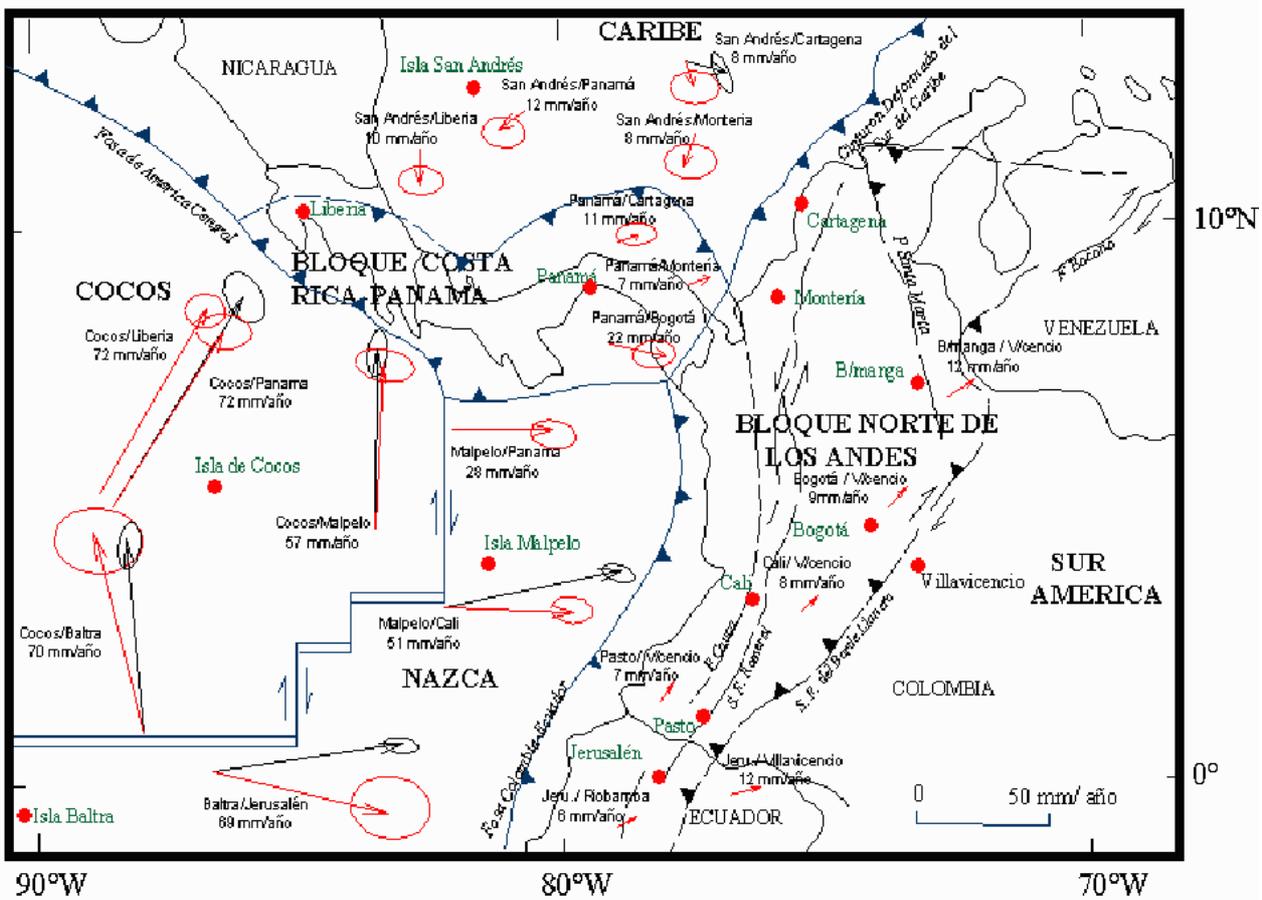


Figura 7.2: Tectónica de Placas en Colombia [Muñoz & Bermúdez, 2001]

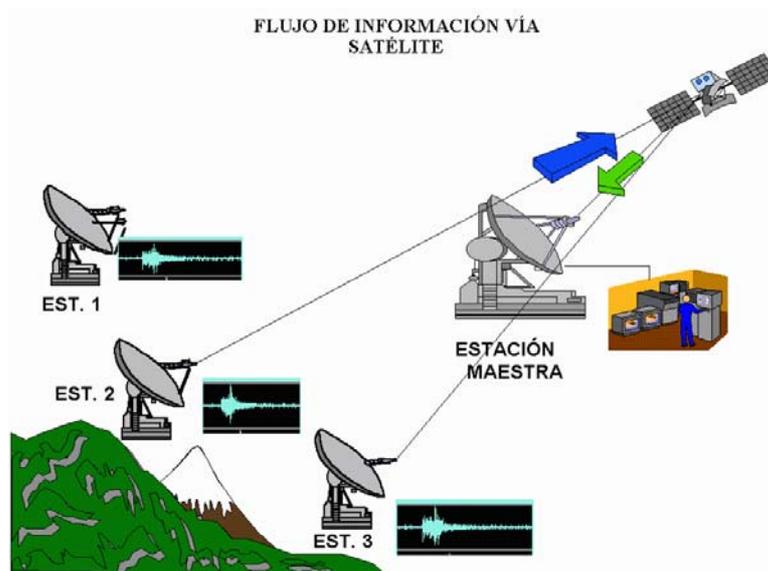


Figura 7.3: Flujo de transmisión de datos de la RSNC

de 1993 se dió inicio a la operación de algunas de las hoy 19 estaciones sismológicas y 120 acelerógrafos que están instalados en el país.

Fue así como empezó el funcionamiento de la estación Tumaco, ubicada en el Cerro El Morro, de esta ciudad. Esta estación al igual que las restantes cuenta con un sistema de transmisión de datos satelital, el cual mediante una antena de 2.4 metros de diámetro, transmite la señal sísmica al satélite INTELSAT VI, quien a su vez la envía al Centro Nacional de Datos en las instalaciones del INGEOMINAS en la ciudad de Bogotá (figura 7.3). Significa esto, que en tiempo real se reciben las 19 señales de igual número de estaciones, con las cuales en cuestión de minutos, la RSNC puede localizar un evento que haya ocurrido en el territorio nacional.

En la figura 7.4 y en la tabla 7.1 se muestran los 10 eventos sísmicos representativos del área de Tumaco desde 1906 hasta Julio de 1998 [Nacional, 1999]

AÑO	MES	DIA	Tiempo(ut)	Latitud	Longitud	Profundidad(km)	Magnitud Ms	Ubicación
1906	01	31	15:36:00.00	1.00	-81.50		8.2	O. Pacífico
1924	10	18	23:05:27.00	2.50	-80.00		6.7	O. Pacífico
1925	06	07	23:41:42.00	3.00	-78.00	170	6.8	
1935	12	24	12:24:05.00	3.00	-79.00		6.8	O. Pacífico
1942	05	15	18:12:5.60	1.17	-79.26		7.0	O. Pacífico
1947	07	14	07:01:00.00	1.38	-77.29		7.0	
1958	01	19	14:07:01.50	1.22	-79.37	40	7.8	O. Pacífico
1958	02	01	16:10:16.00	1.68	-79.31		6.9	O. Pacífico
1958	02	01	20:45:52.00	1.68	-79.19	46	6.7	O. Pacífico
1979	12	12	07:59:03.30	1.68	-79.36	24	7.7	O. Pacífico

Tabla 7.1: Eventos sísmicos del área de Tumaco [Nacional, 1999] .

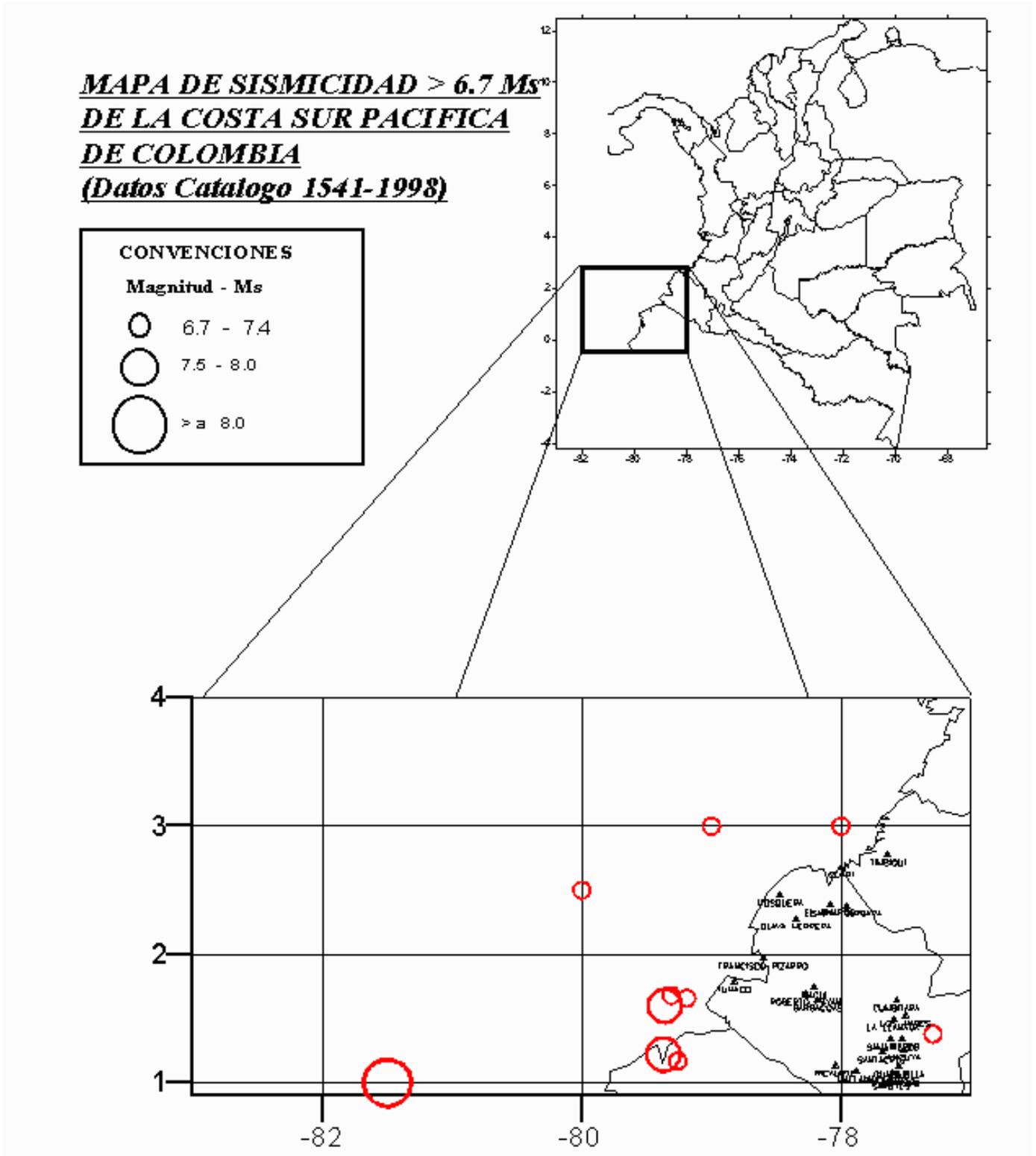


Figura 7.4: Eventos históricos registrados en la Costa Sur Pacífica de Colombia, con magnitudes Ms mayores a 6.7 [Nacional, 1999]

7.4.2 Definición del sitio a instrumentar

Tumaco está conformada por dos islas: isla de Tumaco e isla del Morro. La primera actividad que se desprendió del presente trabajo, fue escoger el sitio más adecuado para la instalación de los equipos. Al analizar la situación de la isla de Tumaco, se concluyó que la elevada densidad de estructuras impedía la construcción de obras adicionales. Por tal motivo se optó por escoger la isla del Morro, la cual se encuentra más deshabitada y representa un punto estratégico por la seguridad de los equipos (figura 7.5).

7.5 Actividades de Campo

Para la instalación de los equipos, fue necesario llevar a cabo las siguientes actividades previas: levantamiento topográfico, ensayos de refracción sísmica, perforaciones y finalmente la instalación de los equipos.

7.5.1 Levantamiento Topográfico

Con el fin de conocer en detalle las irregularidades del terreno en superficie, se realizó un levantamiento topográfico detallado comprendido entre el Cerro el Morro y el Batallón de Infantería. El trazado en planta de dicho levantamiento se observa en la figura 7.5, mientras que el perfil topográfico del mismo se ilustra en la figura 7.6. El tramo analizado fue de 1.6 Km. Adicionalmente se llevaron a cabo otras actividades como perforaciones, ensayos de refracción sísmica y microtrepidaciones, las cuales se explicarán en detalle en el siguiente capítulo.

7.5.2 Instalación de los Equipos de Precisión.

Antes de instalar los equipos, se realizó una exhaustiva revisión bibliográfica sobre instrumentaciones similares realizadas en otras partes del mundo. Una de las primeras fue la realizada en Kyoto por Ishihara [Ishihara et al., 1981], donde 2 años después de instalados los equipos se presentó un sismo de magnitud 4.5, que generó incrementos importantes en la presión de poros, pero que no causó la licuación del depósito arenoso (figura 7.7). Posteriormente, el Servicio Geológico de los Estados Unidos realizó una instrumentación al sureste de California, en el sitio denominado Wildlife [Youd & Holzer, 1994] . La instrumentación consta de dos acelerógrafos (uno en superficie y otro a 7.5 metros de profundidad) y seis transductores de presión de poros (figura 7.8). Lo que hace especialmente interesante esta instrumentación fue que el 24 de noviembre de 1987 se generó un sismo de magnitud de 6.6 que causó la licuación de la arena. Sin embargo, debido a que los piezómetros sólo empezaron a registrar excesos de presión de poros 13.6 segundos después de dispararse los acelerógrafos, se presentaron serias discrepancias sobre la veracidad de los datos recolectados ([Youd & Holzer, 1994], [Hushmand et al., 1991], [Zeghal & Elgamal, 1994], [Hushmand et al., 1992]). De hecho, Hushmand & Scoot 1991, realizaron una serie de ensayos " in situ " con el fin de demostrar que las respuestas de los piezómetros presentaba un desfase en el tiempo con relación a las cargas sísmicas. La figura 7.9 presenta el dispositivo utilizado por Hushmand para comprobar la eficiencia de los piezómetros, y en la figura 7.10, se ilustran los resultados de las pruebas.

Otro sector donde ocurrió licuación de arenas que se encontraba instrumentado corresponde a la ciudad de Kobe, durante el sismo Hyogoken-Nanbu ocurrido en 1995. En este sector, se instalaron



Figura 7.5: Ubicación de las perforaciones ejecutadas en Tumaco

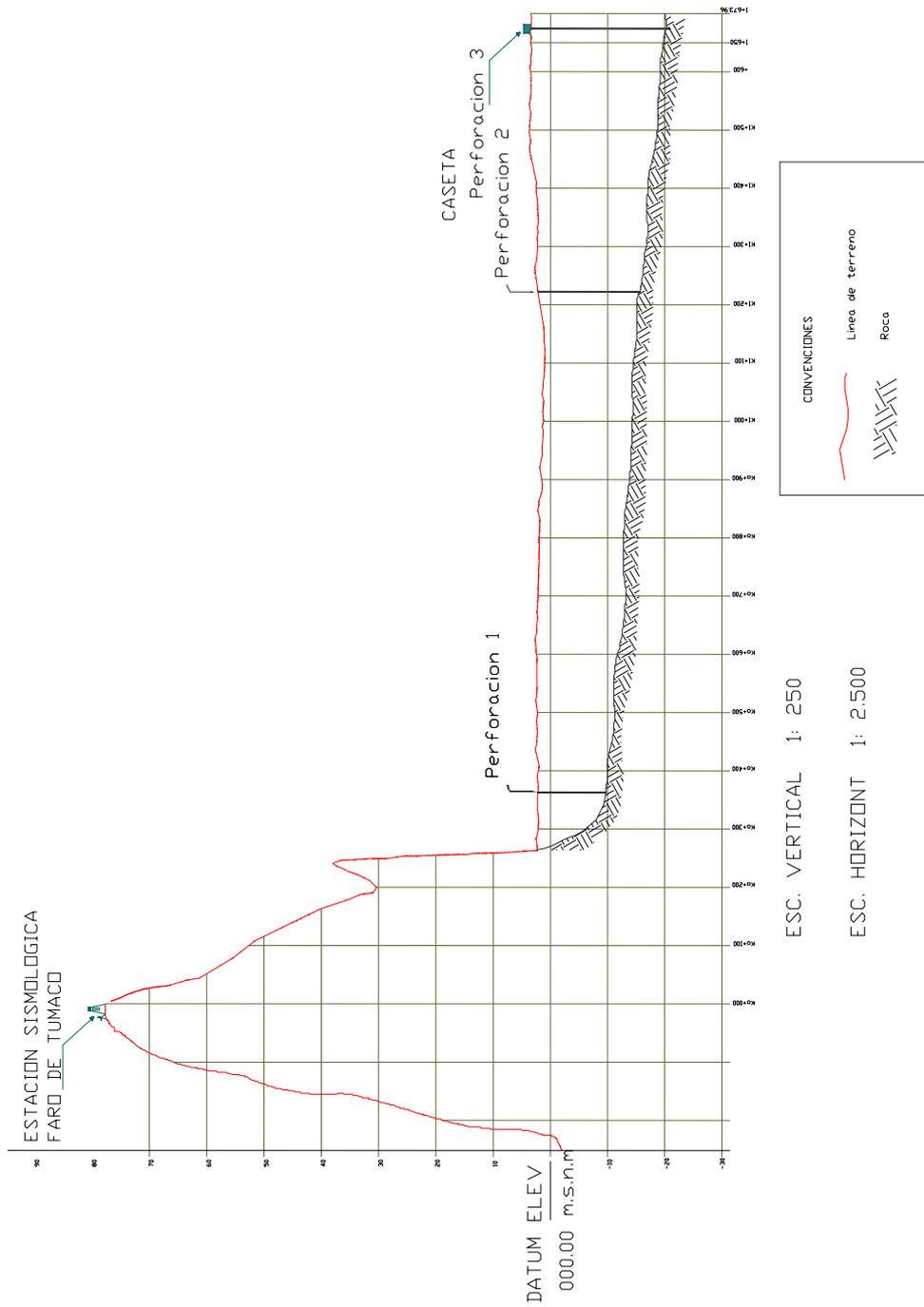


Figura 7.6: Perfil Topografico Faro Tumaco - Batallón de Ingeniería

acelerómetros localizados en superficie, 16 m , 32 m y 83 metros de profundidad (figura 7.11); desafortunadamente no se instalaron transductores de presión de poros. Los registros obtenidos para las componentes E-W y N-S se ilustran en la figura 7.12. Mediante un procedimiento sencillo, Elgamal [Elgamal et al., 1996], desarrolló una técnica numérica que permite evaluar la historia de tensiones y además, predice la generación del exceso de presión de poros.

Esto como es de suponer, nos llevó a tener muy en cuenta aspectos tales como la técnica utilizada para la instalación de los equipos, las observaciones y recriminaciones de la partes, así como las recomendaciones dadas por Dunnicliff [Dunnicliff, 1980] para este tipo de instrumentación.

Para la construcción de la caseta se tuvo en cuenta la sugerencia hecha por Ishihara [Ishihara et al., 1981], sobre la necesidad de separar el bloque de concreto donde quedará instalado el acelerógrafo de la placa de concreto de la caseta.

En términos generales para la instalación de los equipos fue necesario llevar a cabo las siguientes actividades:

- Construcción de la caseta
- Perforación para la instalación del acelerógrafo (down-hole)
- Perforaciones para la instalación de los piezómetros
- Instalación de equipos y conexiones eléctricas
- Pruebas de funcionamiento

Construcción de la Caseta

Uno de los aspectos que más preocupó durante esta fase, fue el comportamiento de la estructura donde quedarán instalados los equipos ante una eventual carga sísmica; esto implica desde luego, que el depósito de arena en inmediaciones de la caseta no se licúe, o si se licuaba, los efectos fueran mínimos (se podían permitir hundimientos, más no el volcamiento de la caseta). Para ello, se optó por realizar una excavación a 0.50 metros de profundidad complementadas con 4 excavaciones a 2 metros de profundidad en diámetro de 0.25 metros (figura 7.13). Las excavaciones así realizadas fueron posteriormente rellenadas con material granular compactado y su finalidad era:

- a. Densificar el terreno para mejorar sus propiedades geotécnicas.
- b. Los pilotes de grava actuaran como filtros que en un momento determinado permitieran disipar el exceso de presión de poros; esta idea surgió a raíz del comportamiento de las arenas del municipio de Murindó las cuales se licuaron durante el sismo de 1988.

Construidos estos pilotes de grava se procedió a compactar con material granular los 0.50 metros restantes; finalmente se construyó la placa en concreto, la cual es totalmente independiente de la base donde quedará instalado el acelerógrafo (figura 7.14) Los detalles finales de la configuración de la caseta se presentan en las figuras 7.15 y 7.16.

Perforación para instalación de acelerógrafo

Esta perforación se realizó en 6" y se utilizó revestimiento hasta los 15 metros; de ahí en adelante es más limosa por lo cual solo se utilizó bentonita para el sostenimiento de las paredes. La roca se encontró a los 24.5 metros, pero se continuó hasta los 27 metros de profundidad.

Finalizada esta tarea se procedió a colocar la tubería de PVC en 4"; durante el proceso de instalación de la tubería se presentaron algunos derrumbes, haciéndose necesaria la inyección de agua a presión.

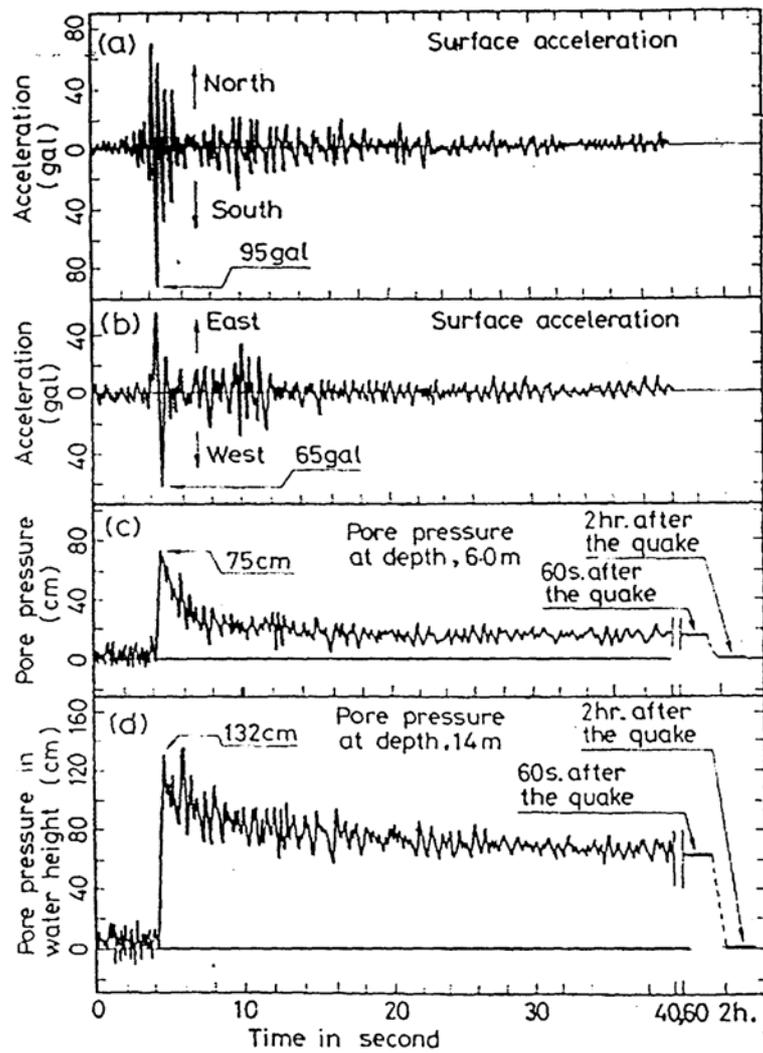


Figura 7.7: Aceleraciones en superficie y registro de presión de poros, durante el sismo del 25 de septiembre de 1980 [Ishihara et al., 1981]

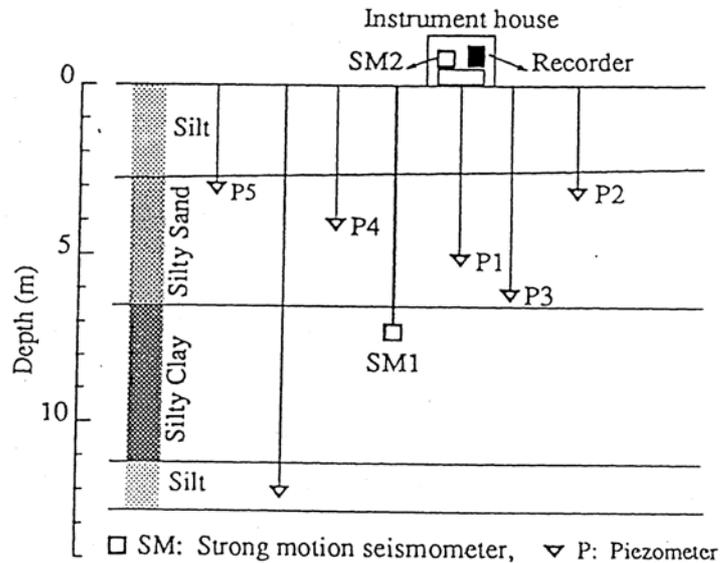


Figura 7.8: Sección transversal de la instrumentación en Wildlife [Youd & Holzer, 1994]

Una vez instalada la tubería, se depositaron bolsas con cemento para el sellamiento del fondo de la excavación (figura 7.17), estas bolsas se reventaron posteriormente con ligeros golpes de la tubería de perforación.

Por último se instaló el sensor de marca Kinometrics, el cual quedó localizado a 25.5 metros de profundidad (figura 7.18). Las características del sensor son las siguientes (figura 7.19):

La frecuencia de muestreo es de 200 muestras por segundo y el umbral de disparo del acelerógrafo superior es de 20 gales, mientras que, el umbral del acelerógrafo inferior es de 0.2 gales ($1gal = 1\frac{cm}{s^2}$). Una vez instalados los equipos se detectó que el umbral de disparo del acelerógrafo inferior era muy bajo por lo cual se decidió incrementarlo a 5 gales, y la frecuencia de muestreo se disminuyó a 100 muestras por segundo.

Perforación para la instalación de piezómetros

Se realizaron cinco perforaciones adicionales, una para un piezómetro de Casagrande, el cual se tomará como punto de control (figura 7.20), y las cuatro restantes para los piezómetros piezoresistivos, cuyas principales características y ubicación se ilustran en las figuras 7.21 y 7.22. Los piezómetros utilizados son marca DRUCK tipo PMP 203, con un voltaje de trabajo entre 10 y 24 voltios. La sensibilidad está comprendida entre 0 y 5 voltios; las principales características de los transductores de presión se encuentran en la tabla 7.2.

El proceso de instalación de los piezómetros fue el siguiente:

- Se realizó la perforación en 4" hasta la profundidad de interés siendo todas las perforaciones revestidas en camisa de 4"; el proceso de avance fue por percusión y lavado con la respectiva toma de muestras cada metro. Es importante anotar que para el lavado se utilizó agua limpia.

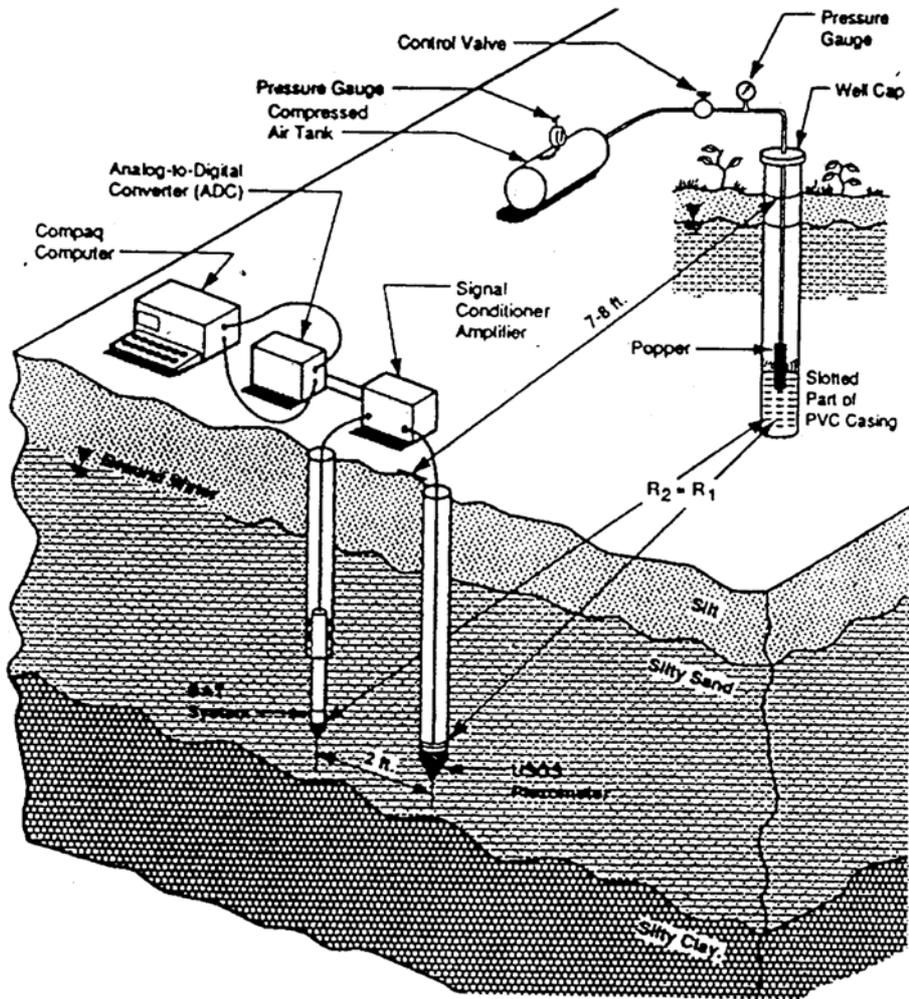


Figura 7.9: Esquema del dispositivo utilizado por Hushmand et al, para verificar la eficiencia de los piezómetros del Wildlife [Hushmand et al., 1992]

Longitud del cable (m)	Profundidad de Instalación (m)	Rango de Precisión
7.0	3.0	0 - 2 bares
10.0	5.4	0 - 3.5 bares
14.0	8.4	0 - 5 bares
17.0	11.4	0 - 7 bares

Tabla 7.2: Características de los piezómetros

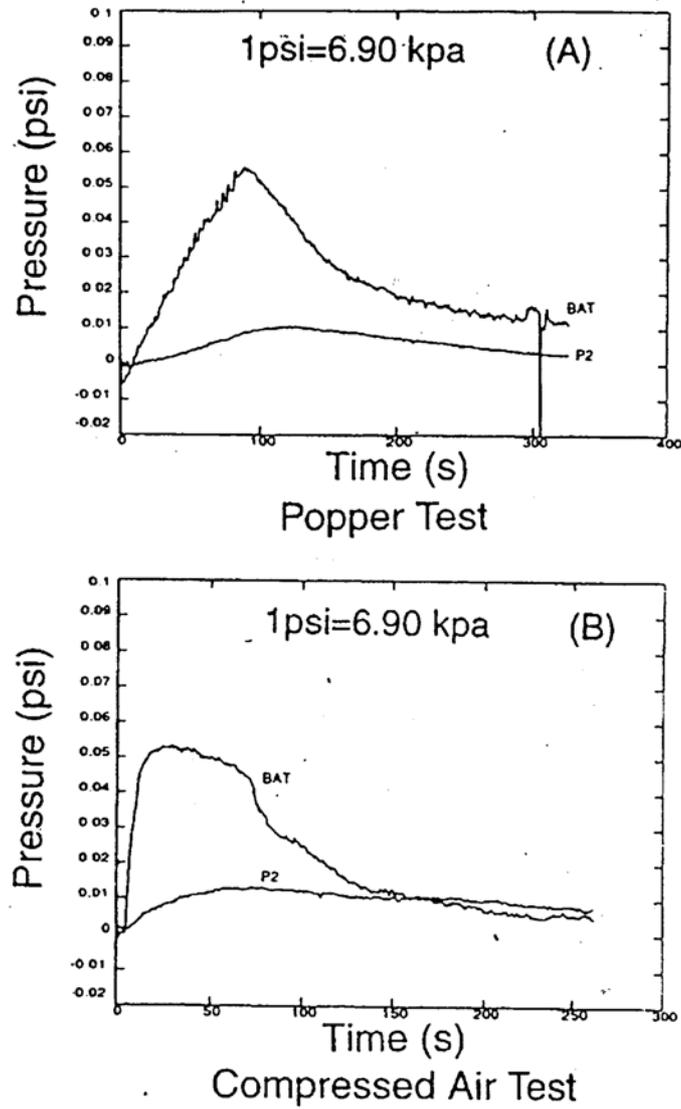


Figura 7.10: Comparación de los registros de presión de poros obtenidos por los piezómetros BAT (desarrollado por [Hushmand et al., 1992]) y el P2 (desarrollado por el Servicio Geológico de los Estados Unidos).

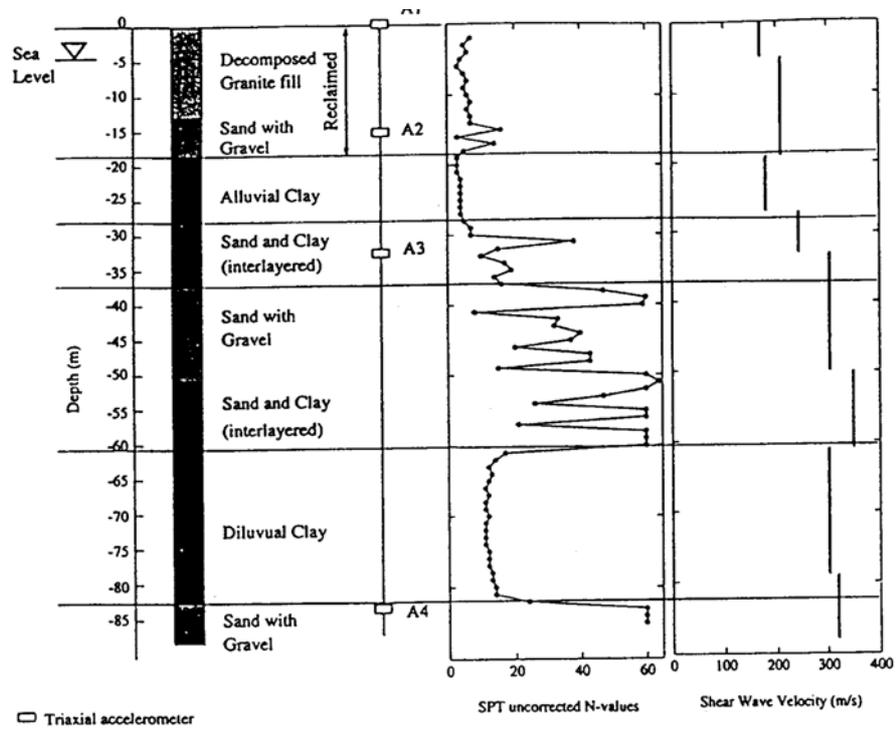


Figura 7.11: Perfil estratigráfico e instrumentación en Kobe (Elgamal & Parra, 1996)

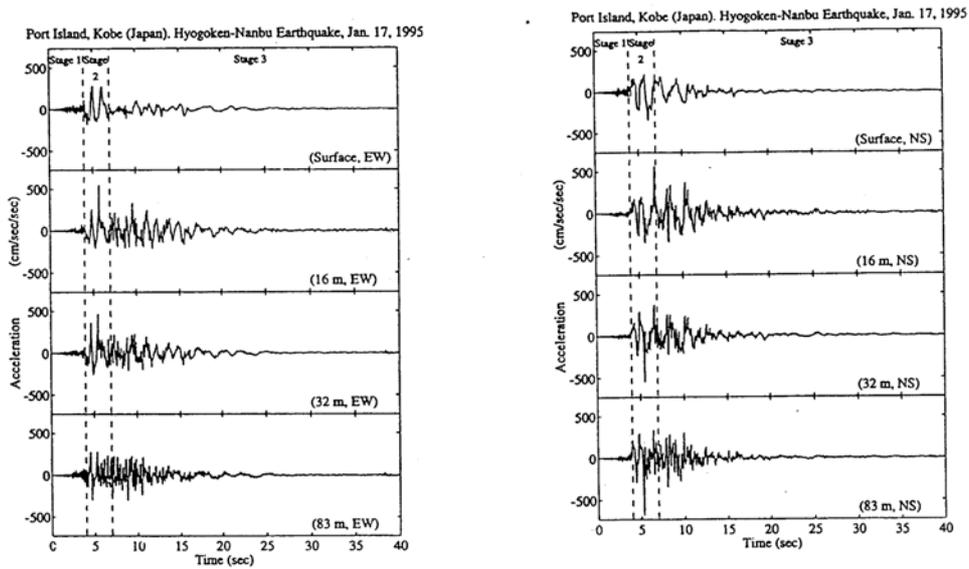


Figura 7.12: Registro de los componentes N-S y E-W a diferentes profundidades (Elgamal & Parra, 1996)



Figura 7.13: Construcción de los drenes de grava



Figura 7.14: Construcción de la cimentación de la caseta

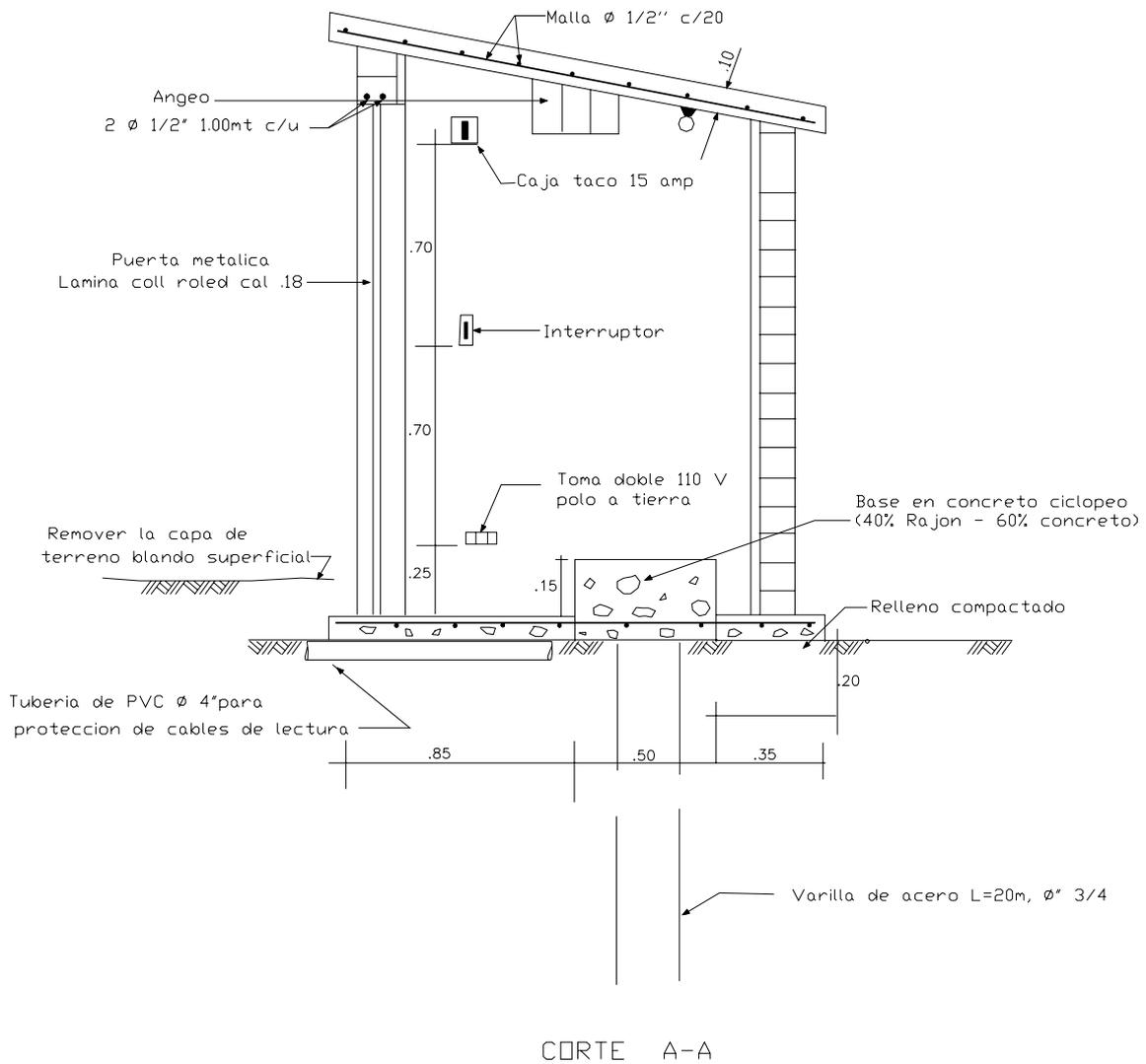


Figura 7.15: Corte configuración de la caseta

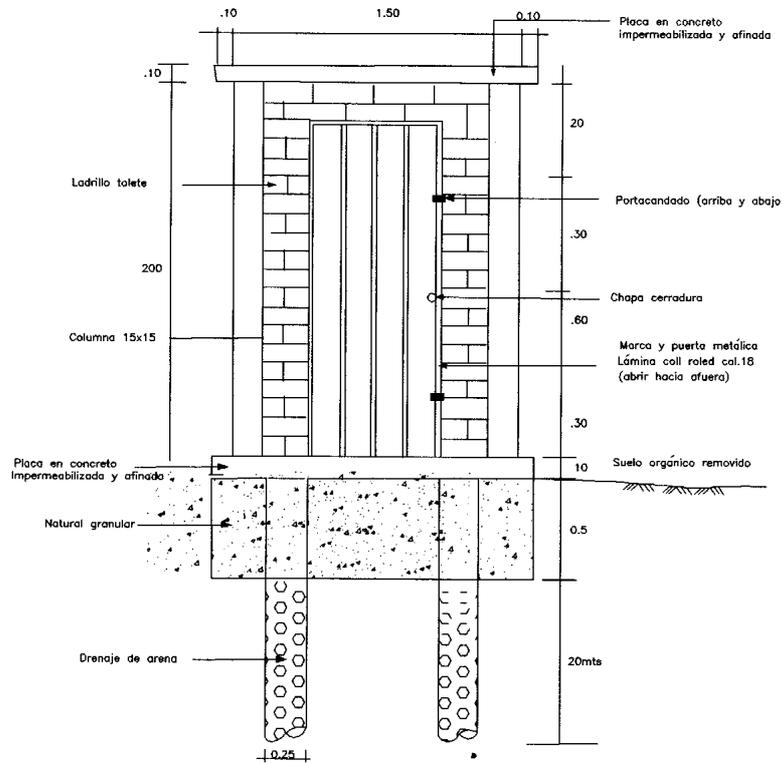


Figura 7.16: Fachada principal de la caseta para estación de acelerógrafo



Figura 7.17: Sellamiento del fondo de la excavación



Figura 7.18: Instalación sensores

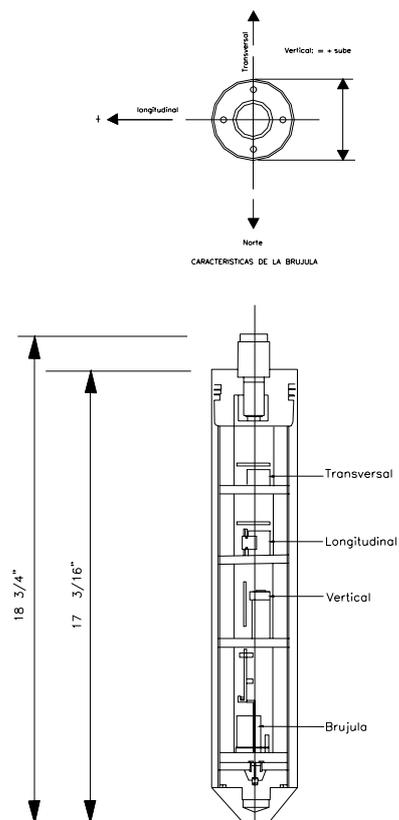


Figura 7.19: Características del acelerógrafo instalado a 25m de profundidad

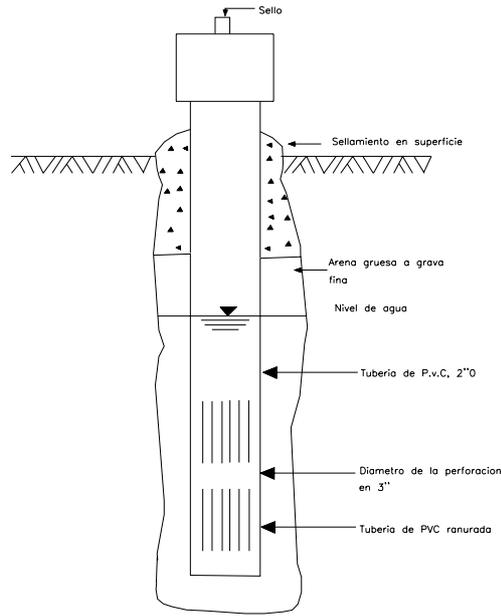


Figura 7.20: Esquema pozo de observación

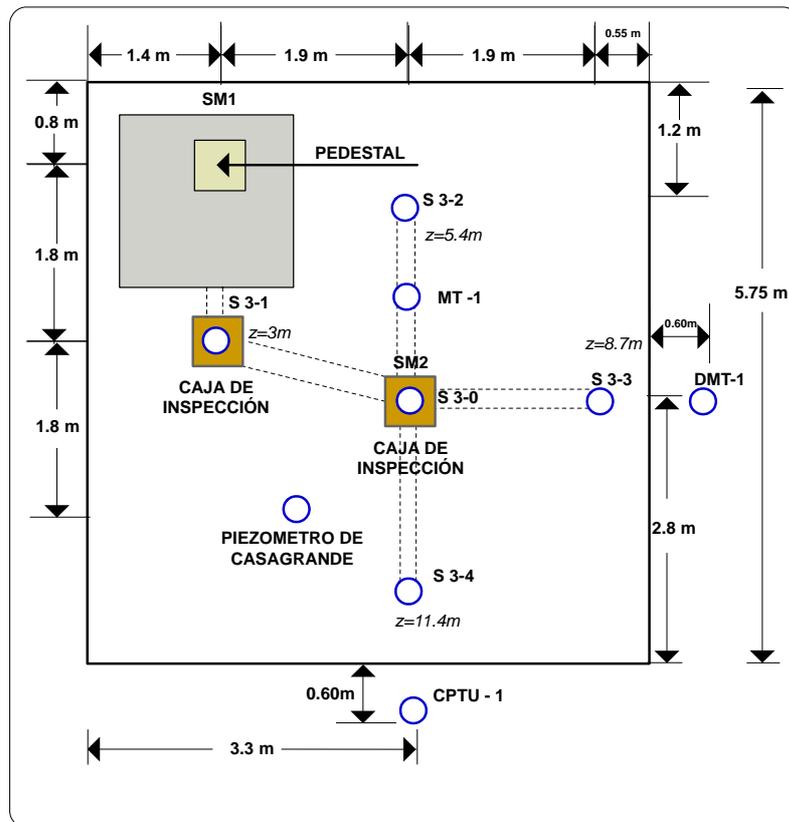


Figura 7.21: Ubicación de la instrumentación instalada en Tumaco. SM1 acelerógrafo en superficie, SM2 acelerógrafo en roca, S sondeo con piezómetro, CPTU como sísmico, DMT Dilatómetro de Marchetti, MT Microtrepidaciones

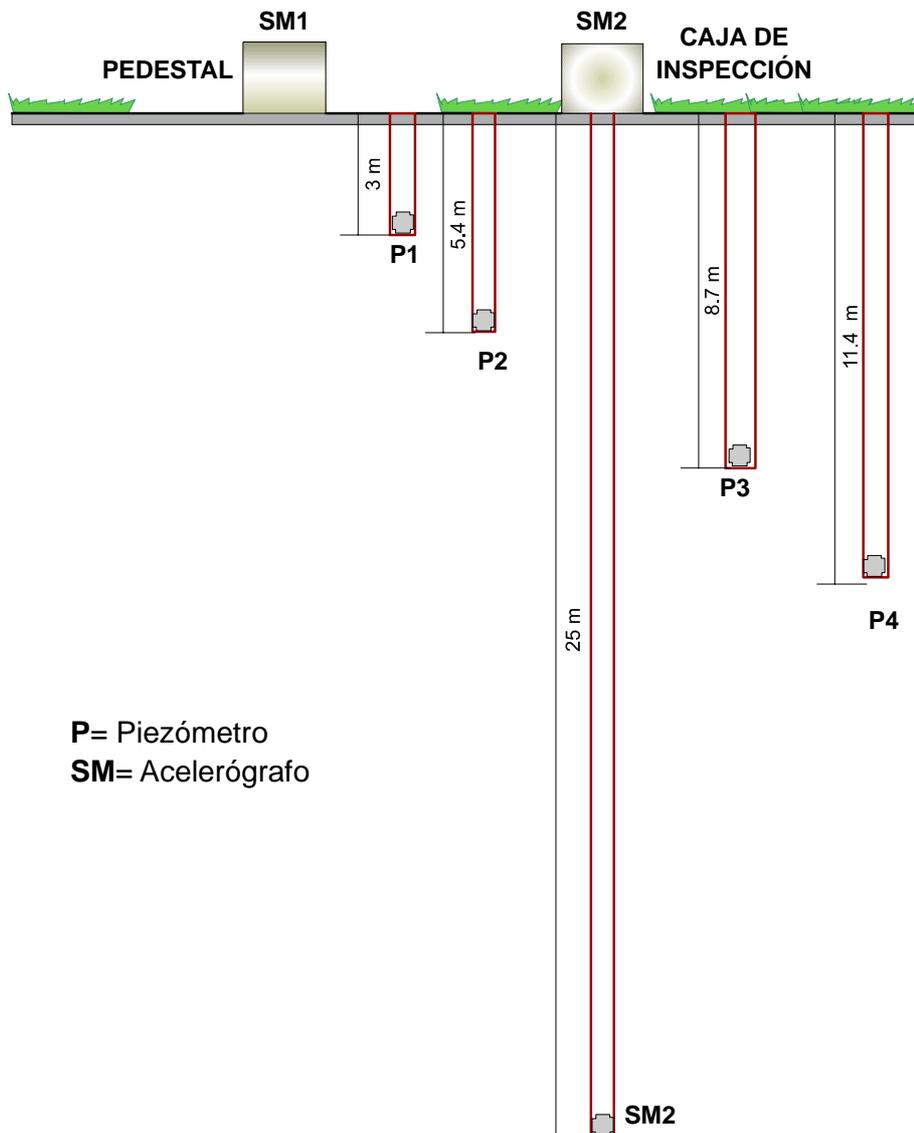


Figura 7.22: Perfil de la Instrumentación (esquemático)

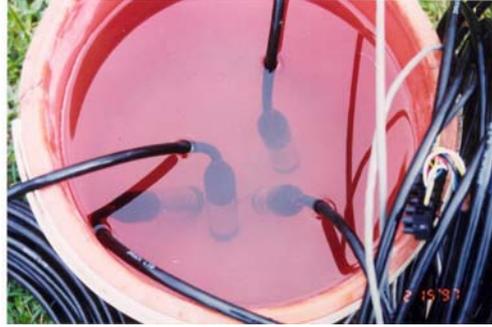


Figura 7.23: Saturación de piezómetros con agua de-aireada

- Se comprobó que la profundidad era la deseada, porque en algunas ocasiones se produjo flujo hacia la perforación, haciéndose necesario lavar el pozo; controlado este parámetro, se depositó material granular en un espesor de 60 cms.
- Saturación de los piezómetros con agua de-aireada (figura 7.23). Para llevar a cabo esta actividad se calentó agua a una temperatura de 100 °C, dejándose reposar hasta adquirir la temperatura ambiente; posteriormente se depositaron los piezómetros en el agua de-aireada durante 6 horas. Sin embargo este tiempo tan largo fue más por seguridad, ya que se había comprobado que las respuestas de los piezómetros era rápida y que la saturación de los dispositivos era casi inmediata.
- Instalación un pozo de observación con el fin de hacer controles periódicos de la posición del nivel freático. El nivel freático se detectó a 1.50 metros de profundidad.
- Instalación de los piezómetros verificando nuevamente la profundidad a la que quedaron instalados.
- Instalación de material granular en un espesor de 1.0 metros, con el fin de proteger el piezómetro de eventuales obturaciones por los granos de arena (figura 7.24 y 7.25).
- Recubierto el piezómetro con material granular, se levantó la camisa un metro, procediéndose luego a instalar la tubería de PVC de 2" de diámetro.
- Con el fin de aislar el piezómetro, se depositaron de manera sistemática esferas de bentonita, hasta completar un sello de 50 cms de espesor. Para el piezómetro a 3 metros de profundidad, se presentaron algunos problemas durante su instalación, lo que hizo necesaria la extracción del piezómetro y volver a reperfurar.

Instalación de equipos y conexiones eléctricas

Finalizada la instalación del acelerógrafo y de los piezómetros se procedió a proteger los respectivos cables, mediante tuberías de PVC de 2" y 4" de diámetro; para efectos de mantenimiento estos tubos se conectan a dos cajas de inspección como se ilustra en la figura 7.21.

Finalmente todas las conexiones llegan a la caseta, donde se encuentra instalado el acelerógrafo y los dispositivos de registro que correspondían inicialmente a dos tarjetas de 5 Mb cada una. Debido a que uno de los aspectos a investigar es la etapa de consolidación una vez finalizado el sismo, se cambiaron las tarjetas de memoria por dos de 40 Mb cada una. La forma como la información es recolectada por los diferentes canales es ilustrada en la tabla 7.3.

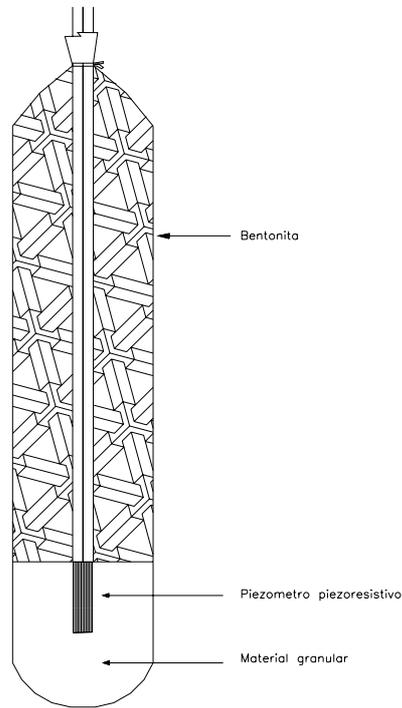


Figura 7.24: Piezómetro integral con arena y bentonita



Figura 7.25: Protección piezómetro con material granular

Es importante aclarar que la grabación depende de la superación de un cierto umbral, el cual está controlado por el sensor inferior, que se dispara a los 0.5 gales. Una vez se presenta el sismo, el acelerógrafo graba 5 segundos antes del disparo (pre-evento) y 20 segundos después del disparo (post-evento). Una vez finalizado el sismo se programó para que grabara los 5 segundos adicionales para conocer disipación de presión de poros. Teniendo en cuenta que este tiempo es insuficiente para efectos de análisis, se incrementó la capacidad de las tarjetas a 80 Mb, de manera que el tiempo de grabación durante la fase de consolidación fuera de 15 minutos, los cuales se consideran suficientes dada la alta permeabilidad de la arena.

Por último, instalados los equipos se colocó una malla para proteger, apoyada en una serie de tubos galvanizados de 2 pulgadas de diámetro y 3 metros de altura (figura 7.26).



Figura 7.26: Instalación final de la caseta de instrumentación

Pruebas de funcionamiento

El acelerógrafo contiene un dispositivo que permite simular un sismo, con lo cual se controla el correcto funcionamiento de todos los canales. Mediante esta calibración fue posible registrar la presión hidrostática existente en cada uno de los piezómetros, la cual fue comparada con la obtenida mediante un piezómetro de observación instalado previamente. Otra prueba que se realizó fue dejar caer un martillo de 140 libras en caída libre en varias ocasiones, comprobándose la respuesta en la componente vertical de los acelerógrafos; algo similar sucedió con los piezómetros donde se registró un pequeño incremento en la presión de poros.

7.6 Conclusiones

- La literatura especializada sobre la instrumentación de zonas susceptibles de sufrir licuación mediante acelerógrafos en roca y superficie, complementados con piezómetros conectados a los

Canal	Registro
1	Acelerógrafo superficial E-W
2	Acelerógrafo superficial Vertical
3	Acelerógrafo superficial N-S
4	Acelerógrafo profundo E-W
5	Acelerógrafo profundo Vertical
6	Acelerógrafo profundo N-S
7	Piezómetro a 3.0 metros
8	Piezómetro a 5.4 metros de profundidad
9	Desactivado
10	Piezómetro a 8.6 metros de profundidad
11	Piezómetro a 11.6 metros de profundidad
12	Desactivado

Tabla 7.3: Distribución de los canales

acelerógrafos es relativamente poca. Esto se puede deber a que realmente existen pocas instrumentaciones de este tipo en el mundo, o que hay sitios instrumentados, pero hasta el momento no se han reportado registros importantes.

- La instrumentación instalada en Tumaco consta de un acelerógrafo en roca y otro en superficie marca Kinematics de 12 canales, los seis primeros canales registran las seis componentes de aceleraciones, mientras que los últimos canales, se le conectaron cuatro piezómetros piezoresistivos.
- Durante el montaje de los equipos se tuvieron en cuenta los problemas que surgieron en la instalación en otras partes del mundo. Esto con el fin de no repetir los mismos errores.
- La instrumentación ha estado funcionando correctamente desde Julio de 1997. Desafortunadamente no se han registrado desde entonces eventos importantes, solo un pequeño sismo que se comenta en el capítulo 10.

