

**ADVERTIMENT.** La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX ([www.tesisenxarxa.net](http://www.tesisenxarxa.net)) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

**ADVERTENCIA.** La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR ([www.tesisenred.net](http://www.tesisenred.net)) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

**WARNING.** On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX ([www.tesisenxarxa.net](http://www.tesisenxarxa.net)) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS  
CANALES Y PUERTOS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DEL TERRENO,  
CARTOGRÁFICA Y GEOFÍSICA

**MODELACION DE PROBLEMAS GEOTECNICOS  
HIDROMECHANICOS  
UTILIZANDO  
EL METODO DEL PUNTO MATERIAL.**

**TESIS DOCTORAL  
PRESENTADA POR:**  
Francisco Zabala

**DIRIGIDA POR:**  
Eduardo Alonso Perez de Agreda  
Barcelona, Octubre de 2010

## CONTENIDO

	Página
<b>Resumen.</b>	
<b>Agradecimientos.</b>	
<b>I. Introducción.</b>	
I.1 Métodos sin malla.	1
I.2 Método del punto material. (MPM)	2
<b>II Análisis de problemas hidromecánicos acoplados.</b>	13
II.1. Extensión del Método del Punto Material a problemas hidromecánicos acoplados.	13
II.2. Formulación del problema acoplado presión-desplazamiento.	13
II.3 Ecuaciones simplificadas.	17
II.4 Discretización de las ecuaciones correspondientes al fluido utilizando el MPM.	17
II.5 Algoritmo de cálculo.	21
II.6 Estabilidad de la solución.	21
II.7 Consolidación unidimensional para pequeñas deformaciones.	27
II.8 Amortiguamiento adaptable.	30
<b>III. Análisis de localización de deformaciones.</b>	32
III.1. Aproximación mediante la teoría de la plasticidad independiente de la velocidad de carga.	33
III.2. Análisis de discontinuidades de desplazamientos en MPM.	36
<b>IV. Deformaciones finitas y grandes desplazamientos.</b>	43
IV.1 Problemas de deformaciones finitas y grandes desplazamientos.	43
IV.2 Consolidación unidimensional para deformaciones finitas.	47
IV.3 Problema de muro elástico impulsado por un líquido.	54
<b>V. Análisis de la falla progresiva de la presa de Aznalcóllar.</b>	58
<b>VI. Análisis de presas de materiales sueltos utilizando el MPM.</b>	85
VI.1 Introducción	85
VI.2 Métodos de análisis dinámico de presas de materiales sueltos.	88
VI.2 Análisis dinámico de una presa de grava con pantalla de hormigón.	91
<b>VII. Comentarios finales.</b>	104
<b>Referencias.</b>	106

## RESUMEN

En esta tesis se trata de la adaptación del Método del Punto Material al análisis de problemas geotécnicos incluyendo el comportamiento hidromecánico de materiales en condición saturada. El Método del Punto Material ó MPM (Sulsky et al. 1994, Sulsky et al. 1996) combina ventajas del método de los elementos finitos y de los métodos de partículas. Podría describirse como una extensión del método de los elementos finitos en el que se utiliza una malla para resolver las ecuaciones de gobierno, mientras que el continuo ó el material se representan mediante “puntos materiales” ó “partículas” langrangianas de masa fija. En el MPM la información que transportan las partículas: cantidad de movimiento, tensión, deformación etc. se “proyecta” en la malla para cada paso de la solución. Esta cubre íntegramente el dominio del problema y en ella se imponen las condiciones de contorno. Luego de resolver en la malla las formas discretas de las ecuaciones de gobierno, se actualiza la posición de las partículas y la información que transportan. Así, al final de cada paso, la malla puede descartarse porque toda la información la transportan las partículas. Se evitan al mismo tiempo la distorsión de la malla para grandes desplazamientos (mesh tangling) y los problemas de convección. El método se adapta especialmente a problemas dinámicos de grandes desplazamientos y deformaciones finitas e incorpora en forma natural un algoritmo de contacto sin deslizamiento que facilita su utilización en problemas de interacción entre sólidos.

El análisis de problemas geotécnicos hidromecánicos utilizando el MPM requiere del desarrollo de algoritmos para resolver el acoplamiento entre el esqueleto de suelo y las fases agua y/o aire y de la regularización del problema de localización de deformaciones para evitar que las soluciones dependan en forma patológica de la malla, que en el caso del MPM es una malla “soporte”. En este trabajo se ha desarrollado un algoritmo explícito, en el marco del Método del Punto Material, que resuelve el problema acoplado presión de poros-desplazamiento. Además se ha adaptado al MPM un procedimiento numérico para la introducción de discontinuidades fuertes en la malla soporte (Wells et al. 2001, Wells et al. 2002). Se ha continuado con el desarrollo del código Geopart (Zabala et al, 2004) que utiliza una versión explícita del MPM con un algoritmo incrementalmente objetivo para deformaciones finitas que incluye: construcción, análisis acoplado presión-desplazamiento en tensiones efectivas y modelos constitutivos sencillos.

En general el colapso de presas de materiales sueltos es inadmisibles. Las presas utilizadas para almacenar agua se ubican en muchos casos, aguas arriba de ciudades importantes, en zonas donde la amenaza sísmica puede ser muy alta. Por otro lado el porcentaje mayor de los colapsos ocurridos en el mundo corresponde a los de presas de residuos mineros. En particular el colapso de la presa de residuos mineros de Aznalcóllar, (Alonso et al. 2006, Alonso et al. 2006, Gens et al. 2006) que se toma en esta tesis como caso de estudio, causó un daño ambiental muy importante. Este es un caso muy interesante por sus características de rotura progresiva, que ha sido generada por la construcción extendida durante muchos años del dique y la existencia de una arcilla frágil de muy baja permeabilidad en su fundación. La simulación y explicación del mecanismo de colapso observado en Aznalcollar no es trivial. Se ha modelado la construcción de la presa y el proceso de su falla progresiva hasta el colapso.

Además se ha estudiado el comportamiento dinámico con grandes deformaciones de una presa de grava con pantalla de hormigón ubicada una zona donde la amenaza sísmica es muy elevada.

## AGRADECIMIENTOS

Quisiera acordarme de todos los que me ayudaron a completar esta aventura. Agradezco a mi familia que estuvo dividida durante mis estancias en Barcelona, mis hijos mayores Andrés, Alejandra y Gabriel en San Juan ayudando a que las cosas fueran lo mejor posible y mi mujer Graciela, que me acompañó siempre con mi hijo menor Nicolás creciendo entre Cataluña y San Juan.

Los integrantes del Instituto de Investigaciones Antisísmicas de la Universidad Nacional de San Juan, Argentina, también me apoyaron mucho. Especialmente les debo a mis amigos y compañeros de camino, Luciano Oldecop y Jorge Santalucía, que me reemplazaron en diferentes ocasiones y me alentaron a terminar el doctorado

Tengo que agradecer a los viejos y nuevos amigos del Departamento de Ingeniería del Terreno de la Universidad Politécnica de Cataluña. Cada vez que volvía a Barcelona me recibieron como si no hubieran pasado varios meses ó un año de ausencia. No voy a hacer una lista de todos porque seguro que dejo alguno afuera.

Quiero agradecer también a Eduardo Alonso por su entusiasmo inmenso que mueve a avanzar todos los días y las atenciones y ayuda recibidas de Ignacio Carol.

A todos muchas gracias.

# I. INTRODUCCION

## I.1 Métodos sin malla.

En los últimos años se han desarrollado métodos “sin malla” para los cuales la generación de los modelos matemáticos se reduce naturalmente a la generación de puntos ó nudos y su distribución, no existiendo relaciones ó conectividades fijas entre los puntos como en el método de los elementos finitos. Entre los numerosos métodos existentes se incluyen:

- El método DEM (Distinct Element Method, Cundall & Strack, 1979), en donde los sólidos se tratan como un conjunto discontinuo de partículas de forma variable y tamaño finito y las interacciones entre ellas se efectúan por sus contactos. Las posiciones de las partículas se determinan en forma explícita y se requiere de la detección de los contactos para el cálculo de las fuerzas entre partículas. Este método ha sido muy utilizado y ampliado al análisis discontinuo de sólidos deformables discretizados mediante el método de los elementos finitos. (DDA-Discontinuos Deformation Analysis Jing, 1998)
- Los métodos "Smooth particle hydrodynamics" method (SPH) (Monaghan, 1988), "Element-free Galerkin method" (EFG) (Belytschko et al., 1994) y "Reproducing kernel particle methods" (RKPM) (Liu et al., 1995, 1996; Chen et al., 1996) son métodos que modelan el continuo y donde los puntos materiales se asocian a funciones radiales que se usan como interpolantes de las variables de campo.
- Los métodos derivados de la familia de “partículas en celda” que provienen de la evolución de métodos utilizados en dinámica de fluidos: Material Point Method (Sulsky and Schreyer, 1996) y Lagrangian Integration Point Finite element method (L. Moresi, F. Dufour, H.-B. Muhlhaus 2001) son métodos en los que un conjunto de puntos materiales o partículas lagrangianas trasportan la masa y las variables tensión, deformación etc.. Se utiliza una malla soporte para la solución de las ecuaciones de equilibrio que puede descartarse al final del intervalo de tiempo evitando al mismo tiempo la distorsión de la malla y los problemas de convección.

- El enfoque de diferencias finitas denominado Lagrangian Particle Finite Difference Method (K.Konagai and J. Johansson, 2001) utiliza partículas lagrangianas que transportan las variables y la masa que se mapean para el próximo intervalo de tiempo sobre una red euleriana estacionaria.
- El “método de los elementos finitos sin malla” (Idelsohn et al., 2003) que ha sido probado en varios problemas de flujo e interacción fluido – estructura, utiliza una formulación lagrangiana y elementos finitos definidos a través de una teselación extendida de Delaunay.

Algunos de estos métodos han sido aplicados a la solución de problemas geotécnicos aunque existen escasas aplicaciones en donde se tenga en cuenta el comportamiento acoplado hidromecánico.

## **I.2 El Método del Punto Material.**

El Método del Punto Material o MPM (Sulsky et al. 1994, Sulsky et al. 1996) es una técnica de modelación que combina ideas y procedimientos de los métodos de partículas y del método de los elementos finitos. Evolucionó desde un método “particle-in-cell” de análisis de problemas de dinámica de fluidos llamado Fluid Implicit Particle (FLIP) (Harlow, 1964). Con el MPM, un cuerpo se modela como una colección de partículas no conectadas entre sí. Estas partículas transportan la masa y todas las variables necesarias para definir el estado del cuerpo. La interacción entre las partículas, es decir la resolución de las ecuaciones del movimiento, se produce en los nodos de una malla similar a las utilizadas por el método de los elementos finitos.

El MPM se adapta bien a la modelación de problemas dinámicos de grandes deformaciones en los que ocurre generación o pérdida de contacto entre cuerpos diferentes. Es sencilla su implementación por la similitud de varios de sus supuestos fundamentales y tecnologías matemáticas con aquellos que sustentan al método de los elementos finitos. Ha sido aplicado a problemas de simulación de membranas (York et al. 1999), materiales granulares a nivel micromecánico, (Bardenhagen et al. 2000), (Bardenhagen et al. 2001), (Cummins et al. 2002), fractura, (Guo et al. 2004, Nairn 2003) (Wang et al. 2005), impacto (Ma et al. 2006), simulación de tejidos blandos (Ionescu et al. 2006), penetración, y otros fenómenos de contacto entre cuerpos, transmisión de ondas de choque y análisis de vibraciones de alta frecuencia. Algunas

aplicaciones interesantes se han desarrollado en ingeniería geotécnica. En este campo se ha utilizado para la modelación de anclajes en suelos (Coetzee et al. 2005), modelación de la carga de excavadoras (Coetzee et al. 2007), problemas de flujo granular en un silo (Wieckowski 1999), simulación de experimentos relacionados con deformaciones inducidas por movimientos de fallas (Johansson et al. 2007), análisis de propagación y alcance de flujos de suelo inducidos por terremotos (Konagai et al., 2004), respuesta de geomembranas a asentamiento de rellenos (Zhou et al. 1999). Además una versión cuasi estática del MPM se ha desarrollado para grandes deformaciones en geomecánica (Vermeer, 2008).

En el MPM el material contenido inicialmente en una región  $\Omega_0$  se discretiza dividiéndolo en partículas ó puntos materiales. A cada partícula se le asigna una masa inicial, cuyo valor se mantiene fijo durante todo el proceso de cálculo, asegurando así la conservación de la masa. Otras propiedades iniciales del material, como velocidad, deformación y tensiones, son también asignadas a los puntos materiales.

Las ecuaciones de movimiento no se resuelven en los puntos materiales, sino que se utiliza una malla de soporte, construida para cubrir íntegramente el dominio del problema. Esta malla está compuesta por elementos del mismo tipo que los utilizados en el método de los elementos finitos (Figura I.1). Por simplicidad, es común utilizar elementos cuadriláteros regulares de cuatro nodos. Para resolver las ecuaciones de movimiento en la malla, en cada paso del análisis se ponderan, de la misma forma que en el método de residuos ponderados, las cantidades transportadas por los puntos materiales utilizando funciones de forma asociadas a los nudos de la malla (Schreyer, Sulsky and York 2000). De esa manera puede considerarse que las cantidades transportadas se “mapean” ó proyectan a los nodos de la malla al ponderarlas con funciones de forma típicas del método de elementos finitos.

Las condiciones de contorno se imponen en los nodos de la malla y las ecuaciones de movimiento se resuelven en forma incremental en ésta. Luego se actualizan las cantidades de los puntos materiales mediante la interpolación de los resultados de la malla, utilizando para esto las mismas funciones de forma. La información asociada a la malla no es necesaria para el siguiente paso del análisis por lo que puede ser descartada, con la sola precaución de conservar las condiciones de contorno que se hayan establecido a nivel de la malla.

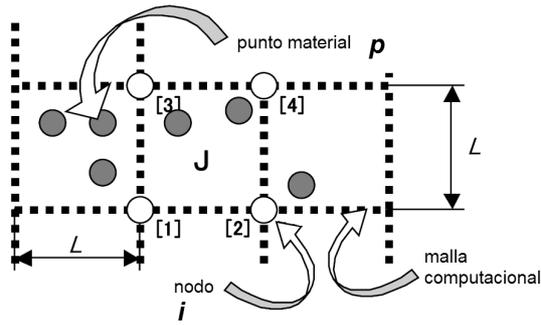


Figura I.1 – Componentes de una discretización utilizando el Método del Punto Material.

### Ecuaciones diferenciales de gobierno.

Una región de un cuerpo sólido o fluido ocupa un volumen  $\Omega_0$  en un instante inicial arbitrario  $t_0$ , y un volumen  $\Omega_t$  en cualquier instante posterior  $t$ . Los puntos materiales en la configuración original tienen coordenadas  $\mathbf{X}$  y su posición actual es  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ . Sea  $\rho(\mathbf{x}, t)$  la densidad de masa para la posición  $\mathbf{x}$  y el instante  $t$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)$  el desplazamiento,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  la velocidad para la misma posición y el mismo instante. Se define  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  como el tensor de tensiones de Cauchy en la posición  $\mathbf{x}$  y el instante  $t$ . La conservación de la masa requiere que:

$$\dot{\rho} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{I.1})$$

donde el punto superpuesto indica derivación respecto del tiempo y el operador  $\nabla \cdot$  indica el cálculo de la divergencia.

La conservación de la cantidad de movimiento se expresa por:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (\text{I.2})$$

donde  $\mathbf{b}$  es el vector de fuerzas de cuerpo por unidad de masa, y  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{u}}$  es el vector de aceleraciones.

Para completar la formulación se requiere de leyes constitutivas que relacionen las tensiones de cada material con las deformaciones o las tasas de deformación, y de condiciones iniciales y de contorno.

La relación constitutiva puede escribirse en términos de tensiones y deformaciones utilizando el módulo tangente  $\mathbf{D}$ , que se relaciona con las tensiones y deformaciones a través de las expresiones:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{I.3})$$

Es conveniente definir una tensión específica por unidad de densidad:

$$\mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} \quad (\text{I.4})$$

Para problemas linealmente elásticos,  $\mathbf{D}$  es el tensor de elasticidad. Para problemas no lineales, adopta una forma compleja, y en general evoluciona con el tiempo.

Las condiciones en el contorno del continuo  $\partial\Omega$  adoptan dos formas:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{g}(t) \text{ en } \partial\Omega_u \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} &= \boldsymbol{\tau}(t) \text{ en } \partial\Omega_\tau \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

En las ecuaciones (I.5),  $\mathbf{n}$  es la normal al contorno, y éste se ha dividido en dos partes:  $\Omega_u$ , la parte sobre la que se prescriben desplazamientos, y  $\Omega_\tau$ , la parte sobre la que se prescriben esfuerzos.

### Forma discreta de las ecuaciones de gobierno.

El continuo se discretiza dividiéndolo porciones ó elementos, cada porción o elemento contiene una cantidad fija de masa para cualquier tiempo. En el MPM, estos elementos de masa se representan con un conjunto de  $N_p$  puntos materiales o “partículas”, a cada uno de los cuales se le asigna una cantidad de masa  $m_p$ , con  $p = 1, 2, \dots, N_p$ . La posición de uno cualquiera de los puntos en el instante  $t$  se denota con  $\mathbf{x}_p(t)$ . La densidad de masa puede escribirse como una suma de masas puntuales:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=1}^{N_p} m_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t)) \quad (\text{I.6})$$

donde  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t))$  es una función delta de Dirac en unidades de inversa de volumen (Brannon and Chen 2002). La definición de la ecuación (I.6) permite recuperar la masa de la región  $\Omega_0$  mediante la integración de la densidad en el volumen deformado de la región  $\Omega_t$ . Como  $m_p$  es una cantidad fija, la conservación de la masa se satisface automáticamente.

Por razones prácticas se definen las funciones de forma  $N_i(\mathbf{x})$  usualmente en una malla de elementos cuadriláteros isoparamétricos de cuatro nodos, asociadas a los nodos de la malla  $i = 1, 2, \dots, N_n$ , donde  $N_n$  designa al número total de nodos. Las coordenadas de cualquier punto del dominio pueden interpolarse a partir de las coordenadas nodales, utilizando las funciones de forma:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{x}_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (\text{I.7})$$

Partiendo de la forma integral débil de la expresión (I.2), y utilizando la ecuación (I.6), es posible obtener una expresión discreta de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento mediante la aplicación del método de residuos ponderados de Galerkin (Schreyer, Sulsky and Zhou 1995).

$$\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{a} \, d\Omega = - \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{S} : \nabla \mathbf{w}_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{w}_i \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\Gamma + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{b} \, d\Omega \quad (\text{I.8})$$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{v}_i(t) N_i(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{a}_i(t) N_i(\mathbf{x})$$

$$w_i = N_i$$

En virtud de las propiedades de la función delta de Dirac (Ecuación (I.6)), las integrales de la forma débil de la Ecuación (I.8) se convierten en sumatorias, con lo que se obtiene una ecuación para cada nodo de la malla, en cada intervalo de tiempo  $t^k$  del análisis.

La integral correspondiente a las fuerzas de inercia puede escribirse como:

$$\int_{\Omega_i} \rho w_i \mathbf{a} \, d\Omega = \int_{\Omega_i} \sum_{p=1}^{N_p} m_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t)) N_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{a}_j(t) N_j(\mathbf{x}) \, d\Omega \quad (\text{I.9})$$

$$\int_{\Omega_i} \rho w_i \mathbf{a} \, d\Omega = \sum_{j=1}^{N_n} \sum_{p=1}^{N_p} m_p N_i(\mathbf{x}) N_j(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j(t)$$

Resultando la ecuación (I.8) :

$$\sum_{j=1}^{N_n} m_{ij}^k \mathbf{a}_j^k = \mathbf{f}_i^{\text{int},k} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k}, \quad i = 1, \dots, N_n \quad (\text{I.10})$$

En la ecuación (I.10),  $m_{ij}$  es una matriz de masa consistente,  $\mathbf{a}_j$  es el vector de aceleraciones en el nodo  $j$ , y  $\mathbf{f}_i^{\text{int}}$  y  $\mathbf{f}_i^{\text{ext}}$  son los vectores de fuerzas internas y externas en el nodo  $i$ , respectivamente.

La matriz de masa consistente tiene la forma dada por:

$$m_{ij}^k = \sum_{p=1}^{N_p} m_p N_i(\mathbf{x}_p^k) N_j(\mathbf{x}_p^k) \quad (\text{I.11})$$

La matriz de masa varía en el tiempo en función de las partículas que se encuentren en las celdas tributarias al nudo, y debe ser calculada para cada paso del análisis. Para reducir el costo computacional del procedimiento, puede utilizarse una matriz de masas diagonal, que se obtiene simplemente sumando las filas de la matriz consistente (Zienkiewicz and Taylor, 2004):

$$m_i^k = \sum_{p=1}^{N_p} m_p N_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (\text{I.12})$$

Utilizando esta forma de la matriz de masa, las ecuaciones de movimiento se desacoplan, y puede escribirse para un nodo:

$$m_i^k \mathbf{a}_i^k = \mathbf{f}_i^{\text{int},k} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k} \quad (\text{I.13})$$

o su equivalente en términos de cantidad de movimiento:

$$\frac{d\mathbf{q}_i^k}{dt} = \mathbf{f}_i^{\text{int},k} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k} \quad (\text{I.14})$$

Donde  $\mathbf{q}_i^k = m_i^k \mathbf{v}_i^k$  (I.15) es la cantidad de movimiento del  $i$ -ésimo nodo en el instante  $t^k$ .

### Algoritmos de cálculo.

Es posible seleccionar métodos de integración explícitos ó implícitos de las ecuaciones de movimiento (I.13) ó (I.14).

Si se utiliza un algoritmo explícito de integración en el tiempo (Euler hacia delante) para la ecuación (I.14), se obtiene el incremento de cantidad de movimiento del nodo  $i$  en el instante  $t^k$ :

$$\Delta\mathbf{q}_i^k = \Delta t (\mathbf{f}_i^{\text{int},k} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k}) \quad (\text{I.16})$$

En la ecuación (I.16), el vector de fuerzas externas se obtiene con los procedimientos usuales del método de los elementos finitos, y de la misma forma el vector de fuerzas internas se evalúa mediante:

$$\mathbf{f}_i^{\text{int},k} = -\sum_{p=1}^{N_p} m_p \mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{S}_p^k \quad (\text{I.17})$$

En la ecuación (I.17), el gradiente de las funciones de forma  $\mathbf{G}_{ip}^k$  se calcula con

$$\mathbf{G}_{ip}^k = \nabla N_i(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p^k} \quad (\text{I.18})$$

La cantidad de movimiento actualizada en un nodo será entonces:

$$\mathbf{q}_i^{k*} = \mathbf{q}_i^k + \Delta\mathbf{q}_i^k = \mathbf{q}_i^k + (\mathbf{f}_i^{\text{int},k} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k}) \Delta t \quad (\text{I.19})$$

La cantidad de movimiento nodal  $\mathbf{q}_i^k$  puede determinarse con las cantidades de movimiento de los puntos materiales  $\mathbf{q}_p^k = m_p \mathbf{v}_p^k$ , donde  $\mathbf{v}_p^k$  es la velocidad que transportan las partículas al comienzo del intervalo.

$$\mathbf{q}_i^k = \sum_{p=1}^{N_p} \mathbf{q}_p^k N_i(\mathbf{x}_p^k) = \sum_{p=1}^{N_p} m_p \mathbf{v}_p^k N_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (\text{I.20})$$

La ecuación (I.20) implica una suma de las cantidades de movimiento de los puntos materiales ponderada por las funciones de forma del elemento.

Los incrementos de desplazamiento y velocidad nodales pueden ahora calcularse:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_i^k &= \frac{\Delta \mathbf{q}_i^k}{m_i^k} \\ \Delta \mathbf{u}_i^k &= \Delta t \mathbf{v}_i^{k*} = \Delta t \frac{\mathbf{q}_i^{k*}}{m_i^k} \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

Las posiciones y velocidades de los puntos materiales se actualizan interpolando las correspondientes cantidades nodales con las funciones de forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p^{k+1} &= \mathbf{x}_p^k + \sum_{i=1}^{N_n} \Delta \mathbf{u}_i^k N_i(\mathbf{x}_p^k) = \mathbf{x}_p^k + \Delta t \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\mathbf{q}_i^{k*}}{m_i^k} N_i(\mathbf{x}_p^k) \\ \mathbf{v}_p^{k+1} &= \mathbf{v}_p^k + \sum_{i=1}^{N_n} \Delta \mathbf{v}_i^k N_i(\mathbf{x}_p^k) = \mathbf{v}_p^k + \Delta t \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\Delta \mathbf{q}_i^k}{m_i^k} N_i(\mathbf{x}_p^k) \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

El incremento de deformación en los puntos materiales se calcula con los gradientes de velocidad nodal:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^k &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{N_n} \left[ \mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_i^{k*} + \left( \mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_i^{k*} \right)^T \right] \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_p^k + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^k \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

El incremento de deformación se utiliza para calcular el incremento de tensión a través de las relaciones constitutivas que se hayan postulado:

$$\boldsymbol{\sigma}_p^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \Delta \boldsymbol{\sigma}_p^k \quad (\text{I.24})$$

Aquí finaliza el paso de integración. Toda la información perteneciente a la malla (excepto la necesaria para definir las condiciones de contorno) puede descartarse, y se comienza un nuevo ciclo utilizando la información transportada por los puntos materiales para inicializar la nueva malla.

Como el esquema de integración es explícito, la estabilidad numérica de la solución exige que el intervalo de tiempo sea menor que el valor de intervalo de tiempo crítico  $\Delta t_{crit} = \frac{T_{min}}{\pi}$ , donde  $T_{min}$  es el menor período de vibración del sistema. Este valor no se dispone normalmente y en lugar de este requisito se utiliza la condición de Courant-Friedrichs-Levy (CFL). Entonces el intervalo de integración  $\Delta t$  debe ser menor que el intervalo crítico  $\Delta t_{crit}$

$$\Delta t_{crit} = \frac{l}{c_p} \quad (\text{I.25})$$

$l$ : menor dimensión de un elemento de la malla

$c_p$ : velocidad de la onda de presión

$$c_p = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad (\text{I.26})$$

Para desarrollar un algoritmo implícito puede escribirse la ecuación de movimiento evaluando las fuerzas internas y externas en un tiempo intermedio  $\theta \Delta t$  del intervalo de tiempo  $\Delta t$  de manera que  $0 \leq \theta \leq 1$ .

La ecuación (I.13) puede escribirse (Sulsky et al. 2004)

$$m_i^k \frac{v_i^{L,imp} - v_i^k}{\Delta t} = \theta \mathbf{f}_i^k + (1-\theta) \mathbf{f}_i^L \quad (\text{I.27})$$

Donde  $\mathbf{f}_i^L = \mathbf{f}_i^{L,int} + \mathbf{f}_i^{L,ext}$  es la fuerza no balanceada, suma de las fuerzas internas y externas, al final del paso lagrangeano de la solución y  $\mathbf{f}_i^k$  es la misma fuerza para el paso anterior. Si  $\theta = 0$  se obtiene el algoritmo explícito y si  $\theta = 1$  el método de

integración es completamente implícito. El algoritmo solo es incondicionalmente estable cuando  $\theta = 1$

Las fuerzas no balanceadas al final del intervalo no se conocen hasta resolver las velocidades, desplazamientos en los nudos, deformaciones y tensiones en las partículas, para el paso de la solución, por lo que se requiere de un procedimiento iterativo que minimice el residuo del sistema de ecuaciones. Las ecuaciones pueden linealizarse calculando la matriz de rigidez tangente (Guilkey et al. 2003) ó mediante una estimación de la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones (Cummins et.al, 2002) (Sulsky et al. 2004).

### **Variación de las fuerzas internas por cambio de celda de las partículas**

La formulación del MPM original tiene el inconveniente de generar “ruido” en la solución (Banderhagen, 2004) al producirse el pasaje de una partícula desde una celda a otra. Este ruido se debe a la discontinuidad del gradiente de las funciones de interpolación de las velocidades que intervienen en el cálculo de las fuerzas internas. Una partícula que transporta una tensión determinada y que genera fuerzas internas en los nudos de una celda en el instante  $k$  de la solución, en el instante  $k+1$ , puede desaparecer de la celda y pasar a la siguiente. Cuando esto sucede, en los nudos comunes entre las celdas el aporte de fuerza interna de la partícula cambia de sentido, para la misma tensión en la partícula, por el cambio de signo del gradiente de la función de interpolación. Además durante la solución ocurre que el número de partículas que se encuentran en celdas vecinas puede ser diferente y por lo tanto aun con un campo de tensión constante se genera un gradiente artificial de tensiones si no se tiene en cuenta el cambio de densidad media de las celdas. Estos inconvenientes de la formulación original del MPM han sido subsanados con un método denominado GIMP (generalized interpolation material point method) (Banderhagen, 2004) en el que la masa de la partícula se supone distribuida y no concentrada en un punto permitiendo continuidad de los gradientes de las funciones de interpolación y una transición suave de las fuerzas internas de las celdas a medida que la partícula pasa de una a otra celda.

La inestabilidad de la solución asociada a este efecto puede ser admisible para problemas en donde la cantidad de movimiento es elevada pero no lo es para el caso de problemas cuasi-estáticos o de muy bajas velocidades del conjunto de las partículas.

En esta tesis se han utilizado otras formas diferentes de la que se propone en el método GIMP para evitar este ruido. Un procedimiento simple surge de considerar que en cada celda la tensión es constante y corresponde al promedio de las tensiones de las partículas que en el instante  $k$  se encuentran en la celda. En este caso las fuerzas internas se pueden obtener de forma similar que el método de los elementos finitos cuando en los cuadriláteros bilineales se utiliza un punto de integración, es decir se utiliza la tensión promedio de las partículas que se encuentran en la celda y el gradiente calculado en el centro de la celda para obtener las fuerzas internas en los nudos. Otro procedimiento alternativo podría ser la obtención, antes de calcular las fuerzas internas, de un campo de tensiones proyectado en la malla con valores nodales de las tensiones y utilizando las mismas funciones de forma que para los desplazamientos. Este campo puede obtenerse por mínimos cuadrados en cada instante de la solución y luego utilizar los procedimientos estándar de integración numérica del MEF.

## II. ANÁLISIS DE PROBLEMAS HIDROMECAÑICOS ACOPLADOS

### II.1. Extensi3n del m3todo del punto material a problemas hidromec3nicos acoplados.

En este cap3tulo se extiende el M3todo del Punto Material al tratamiento de problemas acoplados suelo-fluido. Se considera que cada part3cula se compone de una mezcla saturada suelo-l3quido 3 suelo-l3quido-gas dejando para trabajos futuros de investigaci3n el desarrollo del m3todo con part3culas diferentes para cada fase, es decir part3culas de esqueleto de suelo, part3culas de l3quido y part3culas de gas. Es este caso para un medio poroso las part3culas deber3an compartir un espacio “mezcla” e interactuar mediante sus fuerzas mutuas y se establecer3an por separado las ecuaciones de equilibrio de las part3culas de fluido, de las de esqueleto de suelo y de las de gas. Ese tratamiento permitir3a obtener en forma separada cantidades de movimiento de cada fase sin despreciar las aceleraciones relativas como se hace m3s adelante.

Se asume en lo que sigue que las part3culas transportan todas las variables necesarias para representar el estado del continuo en un instante dado incluyendo la presi3n de poros asociada a cada part3cula.

### II.2. Formulaci3n del problema acoplado presi3n-desplazamiento.

La formulaci3n de las ecuaciones que describen el comportamiento bajo cargas de un medio poroso saturado fue desarrollada primero por Biot (1941) y luego extendida por Zienkiewicz y otros (1980,1984).

Las tensiones totales sobre el suelo saturado pueden escribirse utilizando el principio de tensi3n efectiva (Terzaghi):

$$\sigma = \sigma' - p \mathbf{m} \quad (\text{II.1})$$

$\sigma'$ : tensi3n efectiva (positiva para tracciones)

$\sigma$  : tensi3n total

$p$  : presi3n de poros (positiva para compresi3n)

$m_{ij} = \delta_{ij}$

$\delta_{ij}$  : delta de Kronecker

Si se considera la deformación volumétrica de la fase sólida bajo la presión del fluido y la correspondiente variación de la tensión efectiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - \alpha p \mathbf{m} \quad (\text{II.2})$$

donde:  $\alpha = 1 - \frac{K_t}{K_s}$

$K_t$  := módulo de compresibilidad del esqueleto del suelo.

$K_s$  : módulo de compresibilidad del material constituyente de los granos

$K_t \ll K_s$  para suelos  $\alpha \cong 1$

**m**: tensor esférico unitario

La relación entre tensiones efectivas aplicadas al esqueleto del suelo y deformaciones es altamente no-lineal y por lo tanto las leyes constitutivas se formulan en forma incremental.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{II.3})$$

### **Ecuaciones de equilibrio de la mezcla.**

Estas ecuaciones se escriben para un volumen de control de la mezcla suelo-fluido en la configuración actual.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} = \text{fuerzas de inercia sobre la mezcla}$$

$\boldsymbol{\sigma}$  : tensor de tensiones totales(Cauchy): tensiones sobre el esqueleto sólido + presión en el fluido

$\mathbf{b}$  : fuerzas de volumen

$\rho$  : densidad de la mezcla

$$\rho = (1-n) \rho_s + n \rho_f \quad (\text{II.4})$$

$n$  : porosidad

$\rho_s$  : densidad del sólido

$\rho_f$  : densidad del fluido

Las aceleraciones del esqueleto de suelo deben considerarse como derivadas materiales porque utilizaremos una representación lagrangeana de la cinemática del movimiento. Si se considera un sistema de coordenadas fijo al esqueleto de suelo para referir la velocidad relativa del fluido respecto del esqueleto de suelo, la aceleración del fluido incluirá la derivada convectiva de la velocidad relativa del fluido respecto del suelo. La fuerza de inercia sobre un punto será la suma de la fuerza de inercia sobre el esqueleto sólido mas la aplicada sobre el fluido.

$$(1-n)\rho_s\ddot{\mathbf{u}} + n\rho_f [\ddot{\mathbf{u}} + (\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w})/n] \quad (\text{II.5})$$

$\frac{w_i}{n}$  : velocidad media del fluido relativa al esqueleto sólido.

$w_i$  : velocidad del fluido en el sentido de Darcy ( caudal /área transversal)

$(\dot{w}_i + w_j w_{i,j})/n$  : aceleración media del fluido relativa al esqueleto sólido.

$w_j w_{i,j}$  : derivada convectiva de la velocidad

Reemplazando la densidad de la mezcla  $\rho$  en la ecuación de equilibrio obtenemos:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} + \rho_f (\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{w} \nabla \cdot \mathbf{w})/n \quad (\text{II.6})$$

### **Ecuación de continuidad del fluido.**

La ecuación de conservación de la fase fluida sin considerar variación de la densidad del fluido es:

$$\dot{\epsilon}_v + \nabla \cdot \mathbf{w} + n \frac{\dot{p}}{K_f} + (1-n) \frac{\dot{p}}{K_s} - \frac{\dot{\sigma}_{ii}}{3} \frac{1}{K_s} = 0 \quad (\text{II.7})$$

$\nabla \cdot \mathbf{w}$  : divergencia de la velocidad

$\dot{\epsilon}_v$  : variación de la deformación volumétrica del esqueleto de suelo

$n \frac{\dot{p}}{K_f}$  : variación de la deformación volumétrica del fluido

$(1-n)\frac{\dot{p}}{K_s} - \frac{\dot{\sigma}'_{ii}}{3} \frac{1}{K_s}$  : variación de la deformación volumétrica de las partículas.

$\frac{\dot{\sigma}'_{ii}}{3} = K_t * \dot{\varepsilon}_{ii}$  : variación de la tensión esférica efectiva (positiva para tracción)

$$\alpha = 1 - \frac{K_t}{K_s}$$

$\frac{n}{K_f} + (1-n)\frac{1}{K_s} = 1/Q$  : módulo de compresibilidad combinado del fluido y de la fase

sólida

Entonces puede escribirse: 
$$\alpha \dot{\varepsilon}_v + \nabla \cdot \mathbf{w} + \frac{\dot{p}}{Q} = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\alpha \cong 1 \quad \frac{1}{Q} \cong \frac{n}{K_f} \quad (\text{II.9})$$

### Ecuación de equilibrio del fluido.

$$-\nabla p - \mathbf{R} + \rho_f \mathbf{b} = \rho_f \mathbf{a} + \rho_f (\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{w} \nabla \cdot \mathbf{w}) / n \quad (\text{II.10})$$

donde  $\mathbf{R}$  = Fuerza de filtración por unidad de área

y por la Ley de Darcy  $\frac{k_{ij}}{\gamma_f} R_j = w_i$

$k_{ij}$  = tensor de permeabilidad. (coeficientes de permeabilidad )

$\gamma_f$  : peso específico del fluido

Por lo que puede escribirse una expresión generalizada de la ley de Darcy que tiene en cuenta la aceleración del fluido:

$$w_i = -\frac{k_{ij}}{\gamma_f} [p_{,j} - \rho_f b_j + \rho_f \ddot{u}_j + \rho_f (\dot{w}_j + w_k w_{j,k}) / n] \quad (\text{II.11})$$

### II.3 Ecuaciones simplificadas.

Las ecuaciones de gobierno pueden simplificarse si se desprecian los términos correspondientes a la aceleración relativa del fluido respecto del esqueleto de suelo. Estas aceleraciones son muy pequeñas en el caso de materiales de baja permeabilidad y para las frecuencias de las acciones sísmicas, por lo tanto pueden despreciarse en la mayoría de los análisis. Las ecuaciones simplificadas son las siguientes.

Ecuación de equilibrio de la mezcla suelo-fluido:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (\text{II.12})$$

Ecuación de continuidad:

$$\dot{\varepsilon}_v + \nabla \cdot \mathbf{w} + \frac{\dot{p}}{Q} = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$\alpha \cong 1 \quad \frac{l}{Q} \cong \frac{n}{Kf}$$

Ecuación de Darcy:

$$\mathbf{w} = -\frac{\mathbf{k}}{\gamma_f} [\nabla p - \rho_f \mathbf{b} + \rho_f \mathbf{a}] \quad (\text{II.14})$$

Estas ecuaciones junto con las relaciones entre tensión, deformación y desplazamiento y las condiciones de borde pueden discretizarse y resolverse numéricamente tomando como incógnitas los desplazamientos y la presión de poros  $p$ .

### II.4 Discretización de las ecuaciones correspondientes al fluido utilizando el MPM.

Se calcula el incremento de presiones de poro en la partícula en forma explícita, usando la ecuación de continuidad, en función de su deformación volumétrica y de la divergencia de la velocidad relativa del fluido respecto del esqueleto de suelo en la ubicación de la partícula. De la ecuación de continuidad (II.13).

$$\Delta p + Q(\dot{\varepsilon}_v + \nabla \cdot \mathbf{w}) \Delta t = \Delta p + Q(\Delta \varepsilon_v + \nabla \cdot \mathbf{w} \Delta t) \quad (\text{II.15})$$

Donde:

$\Delta\varepsilon_v$ : incremento de deformación volumétrica en un punto del continuo mezcla

$\Delta p$ : incremento de la presión de poros al final del intervalo de tiempo  $\Delta t$

Con las condiciones de contorno impuestas en la malla:

$$\text{En } \Gamma_p : p - \bar{p} = 0$$

$$\text{En } \Gamma_w : k \frac{\partial p}{\partial n} - \bar{w} = w_n - \bar{w} = 0$$

Aplicando a la ecuación (II.15) el método de Galerkin estándar con funciones de ponderación, definidas en la malla soporte para las presiones, iguales a las utilizadas para la interpolación de los desplazamientos se puede escribir:

$$\int_{\Omega_t} N_i [\Delta p + Q(\Delta\varepsilon_v + \nabla \cdot \mathbf{w} \Delta t)] d\Omega - \int_{\Gamma_w} N_i (w_n - \bar{w}) \Delta t d\Gamma = 0 \quad (\text{II.16})$$

Las condiciones de contorno de presión se imponen en la malla soporte.

Integrando por partes,

$$\int_{\Omega_t} N_i \nabla \cdot \mathbf{w} \Delta t d\Omega = \int_{\Gamma_t} N_i \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \Delta t d\Gamma - \int_{\Omega_t} \nabla N_i \cdot \mathbf{w} \Delta t d\Omega \quad (\text{II.17})$$

Resulta:

$$\int_{\Omega_t} N_i \Delta p d\Omega + \int_{\Omega_t} Q \Delta\varepsilon_v d\Omega + \int_{\Omega_t} \nabla N_i \cdot \mathbf{w} \Delta t d\Omega + \int_{\Gamma_w} N_i \bar{w} \Delta t d\Gamma = 0 \quad (\text{II.18})$$

Utilizando funciones de ponderación nulas en el contorno de presión.

El incremento de presión  $\Delta p_p$  de la partícula se aproxima a partir de la variación de presión  $\Delta p_j$  en los nudos con las mismas funciones de forma:

$$\Delta p_p^k = \sum_{j=1}^{N_n} \Delta p_j^k N_j(\mathbf{x}_p^k) \quad (\text{II.19})$$

$\Delta p_j^k$ : incremento de presión en el nudo  $j$  de la malla para el instante  $k$ .

$\Delta p_p^k$ : incremento de presión en la partícula para el instante  $k$ .

Reemplazando las integrales de la ecuación (II.18) por sumatorias sobre las partículas puede calcularse el incremento de presión en los nudos de la malla. La primera de las integrales resulta:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} N_i \Delta p \, d\Omega &= \sum_{p=1}^{N_p} N_i(\mathbf{x}_p^k) \Delta p_p^k V_p = \sum_{p=1}^{N_p} N_i(\mathbf{x}_p^k) \sum_{j=1}^{N_n} \Delta p_j^k N_j(\mathbf{x}_p^k) V_p \\ &= \sum_{j=1}^{N_n} \Delta p_j^k \sum_{p=1}^{N_p} N_i(\mathbf{x}_p^k) N_j(\mathbf{x}_p^k) V_p = \sum_{j=1}^{N_n} \Delta p_j^k V_{ij}^k \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

En donde  $V_p$ : volumen de la partícula. En lugar de calcular una matriz de masa  $m_{ij}$  calculamos una matriz de volumen  $V_{ij}$  que también puede diagonalizarse por suma de filas para dar una matriz diagonal  $V_i$  de la misma manera que la matriz de masa.

$$\begin{aligned} V_{ij} &= \sum_{p=1}^{N_p} N_i(\mathbf{x}_p^k) N_j(\mathbf{x}_p^k) V_p \\ V_i^k &= \sum_{p=1}^{N_p} N_i(\mathbf{x}_p^k) V_p \\ \sum_{p=1}^{N_p} N_i(\mathbf{x}_p^k) \Delta p_p^k V_p &= \sum_{j=1}^{N_n} \Delta p_j^k V_{ij} \cong \Delta p_i^k V_i \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

De esa manera puede calcularse en forma explícita el incremento de presión en los nudos de la malla:

$$\Delta p_i^{k+1} = \frac{1}{V_i} \mathcal{Q} \left[ \sum_{p=1}^{N_p} N_i(\mathbf{x}_p^k) (\Delta \varepsilon_p^k + \nabla N_i \cdot \mathbf{w}_p^k \Delta t) V_p + \int_{\Gamma_q} N_i \bar{w} \Delta t d\Gamma \right] \quad (\text{II.22})$$

Para calcular las velocidades de flujo en cada partícula utilizamos la ecuación de Darcy.

$$\mathbf{w}_p^k = -\frac{\mathbf{k}}{\gamma_f} \left[ \nabla p(\mathbf{x}_p^k) - \rho_f \mathbf{b} + \rho_f \mathbf{a}_p^k \right] \quad (\text{II.23})$$

El gradiente de las presiones se evalúa utilizando el campo de presión en los nudos de la malla a partir de las presiones que transportan las partículas. Este campo de presiones puede aproximarse de la misma forma que el incremento de presión utilizando:

$$p_p^k = \sum_{j=1}^{N_n} p_j^k N_j(\mathbf{x}_p^k) \quad (\text{II.24})$$

$p_j^k$ : presión en el nudo  $j$  de la malla para el instante  $k$ .

$p_p^k$ : presión en la partícula para el instante  $k$ .

$$\sum_{p=1}^{N_p} N_i(\mathbf{x}_p^k) p_p^k V_p = \sum_{j=1}^{N_n} p_j^k V_{ij} \cong p_i^k V_i \quad (\text{II.25})$$

$$p_i^k = \frac{1}{V_i} \sum_{p=1}^{N_p} N_i(\mathbf{x}_p^k) p_p^k V_p \quad (\text{II.26})$$

Por lo tanto puede calcularse el gradiente con la expresión:

$$\nabla p(\mathbf{x}_p^k) = \sum_{i=1}^{N_n} p_i^k \nabla N_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (\text{II.27})$$

Finalmente para actualizar las presiones en las partículas usamos:

$$p_p^{k+1} = p_p^k + \sum_{j=1}^{N_n} \Delta p_j^{k+1} N_j(\mathbf{x}_p^{k+1}) \quad (\text{II.28})$$

## **II.5 Algoritmo de cálculo.**

En un esquema explícito, a partir de las presiones que transportan las partículas, obtenidas en el paso anterior  $k$ , se calculan las presiones en los nudos con la ecuación (II.26). El esquema de cálculo de estas presiones es similar al utilizado para obtener las cantidades de movimiento en los nudos. A partir de este campo de presiones en la malla se obtiene el gradiente de las presiones con la ecuación (II.27) y la velocidad de flujo en correspondencia de la coordenada de la partícula con la ecuación de Darcy (II.23). La variación de presión en los nudos se calcula con la ecuación (II.22). Los términos, en esta última ecuación, de incremento de deformación volumétrica, divergencia de la velocidad y flujo externo impuesto se acumulan en los nudos sumando para las partículas. Las condiciones de contorno de presión se imponen en la malla. Por último se actualizan los valores de presión en las partículas con la ecuación (II.28) para utilizarlos en el paso siguiente. Al final del intervalo las presiones en los nudos no son necesarias y pueden descartarse ya que las partículas transportan nuevamente la presión de poros.

## **II.6 Estabilidad de la solución.**

En la malla soporte que comúnmente se utiliza en el MPM se utilizan las mismas funciones de forma bi-lineales del elemento cuadrático lineal del método de los elementos finitos y por lo tanto los elementos que componen la malla sufren de los mismos inconvenientes. Estos inconvenientes incluyen: bloqueo volumétrico de la solución para materiales cuasi-incompresibles cuando se utilizan cuatro partículas por celda, que es similar a utilizar 4 puntos de integración en el Método de los Elementos Finitos, bloqueo de corte (shear locking), inestabilidad de presiones para problemas cuasi-incompresibles y de baja permeabilidad, y la aparición de modos de energía nula (hourglassing) cuando se utiliza una partícula por celda, que en el MEF es similar al uso de un punto de integración.

Es conocido que las aproximaciones mixtas presión desplazamiento sufren de problemas de inestabilidad del campo de presiones si no se cumple con la condición de Babuska-Brezzi. Esta impone que un elemento, en el contexto del marco del Método de los Elementos Finitos, es estable si el número de grados de libertad utilizados para interpolar las presiones es menor que el utilizado para interpolar los desplazamientos. Por ejemplo resultan estables sin procedimientos especiales de estabilización los

elementos que utilizan ocho nudos para interpolar los desplazamientos y cuatro para las presiones.

El MPM en su versión original tiene el inconveniente adicional de generar “ruido” en la solución (Banderhagen, 2004, Zhou et al. 1999) al producirse el pasaje de una partícula desde una celda a otra como se ha descrito en el Capítulo I. Un procedimiento simple para evitar este tipo de inestabilidad surge de considerar que en cada celda la tensión es constante y corresponde al promedio de las tensiones de las partículas que en el instante  $k$  se encuentran en la celda sin importar su número. En este caso las fuerzas internas se obtienen de la misma forma que en el método de los elementos finitos cuando se utiliza un punto de integración, usando el gradiente de las funciones de forma calculado en el centro de la celda.

Por otro lado debe considerarse que cuando se encuentran más ó menos partículas en una celda que la cantidad original de partículas por celda, la densidad media de la celda aumenta ó disminuye y por lo tanto las fuerzas internas debidas al aporte de esa celda y calculadas con la ecuación (I.17) se pueden aproximar de la siguiente forma:

$$\mathbf{f}_{i-celda}^{int,k} = - \sum_{p=1}^{N_{p-celda}^k} m_p \mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{S}_p^k = - \sum_{p=1}^{N_{p-celda}^k} m_p \mathbf{G}_{ip}^k \frac{\sigma_p^k}{\rho_{celda}^k} = \sum_{p=1}^{N_{p-celda}^k} \mathbf{G}_{ip}^k \sigma_p^k \frac{V_{celda}}{N_{p-celda}^k} \quad (II.29)$$

$$\rho_{celda}^k = \frac{N_{p-celda}^k m_p}{V_{celda}}$$

Donde :

$\rho_{celda}^k$  : densidad media en la celda en el paso  $k$

$N_{p-celda}^k$  : numero de partículas en la celda para el paso  $k$

$V_{celda}$  : volumen de la celda (fijo)

Los gradientes en correspondencia con la posición de cada partícula pueden aproximarse con el gradiente en el centro del elemento. Utilizar un gradiente constante para todo el elemento es equivalente al procedimiento de promediar la tensión de las partículas que se encuentren en una celda.

En los ejemplos de los capítulos IV, V y VI, que se han procesado con el código GEOPART (Zabala et al., 2004), para evitar el bloqueo de la solución y al mismo tiempo obtener un comportamiento estable, se calculan las fuerzas internas de la celda y

los incrementos de presión y de tensión efectiva de todas las partículas que se encuentren en una celda en un instante  $k$ , a partir del gradiente de desplazamientos calculado en el centro del elemento de la malla soporte.

El procedimiento de cálculo de las presiones descrito es completamente explícito y ha resultado estable para los valores de permeabilidad utilizados en la modelación del colapso de la presa de Aznalcollar que se describe en el Capítulo V.

La Figura II.1.a muestra una zapata rígida sobre un material poroso saturado de agua con permeabilidad nula. Este problema se ha resuelto con 4 partículas por celda utilizando, para calcular las fuerzas internas, la tensión promedio y el gradiente de las funciones de forma en el centro del elemento. Se ha impuesto una velocidad de descenso de las partículas de la zapata y se resuelven desplazamientos, deformaciones y tensiones. La Figura II.2.a y II.2.b muestran las distribuciones de presión de poros para un material elástico y para un material elastoplástico de Mohr Coulomb con cohesión y fricción. Se comprueba que el procedimiento es estable y no aparecen oscilaciones de presión. La Figura II.3 corresponde a los contornos de deformación plástica equivalente para la zapata sobre el material de Mohr-Coulomb. Si se altera la forma de obtener las fuerzas internas calculando los gradientes en las posiciones de las partículas, se obtiene la inestabilidad de presión clásica que se muestra en la Figura II.5.

#### **Algoritmo alternativo para el cálculo de las presiones.**

Una formulación alternativa se obtiene calculando la presión de la partícula en forma directa. De igual forma que en el procedimiento descrito en punto II.5, se calculan los valores nodales de la presión de poros para el paso  $k$  usando la ecuación (II.26) y el gradiente de las presiones con la (II.27), luego se calculan las velocidades de flujo  $\mathbf{w}_p^k$  en correspondencia con la posición de la partícula y la divergencia de estas velocidades. Utilizando la deformación volumétrica y la divergencia de la velocidad se actualiza la presión en la partícula en forma directa para el paso  $k+1$  sin calcular los incrementos de presiones en los nudos.

$$p_p^{k+1} = p_p^k + Q \left( \Delta \varepsilon_{v_p}^k + \nabla N_i \cdot \mathbf{w}_p^k \Delta t \right) \quad (\text{II.30})$$

Las condiciones de contorno de presión y de flujo se imponen en la malla para el instante  $k$ .

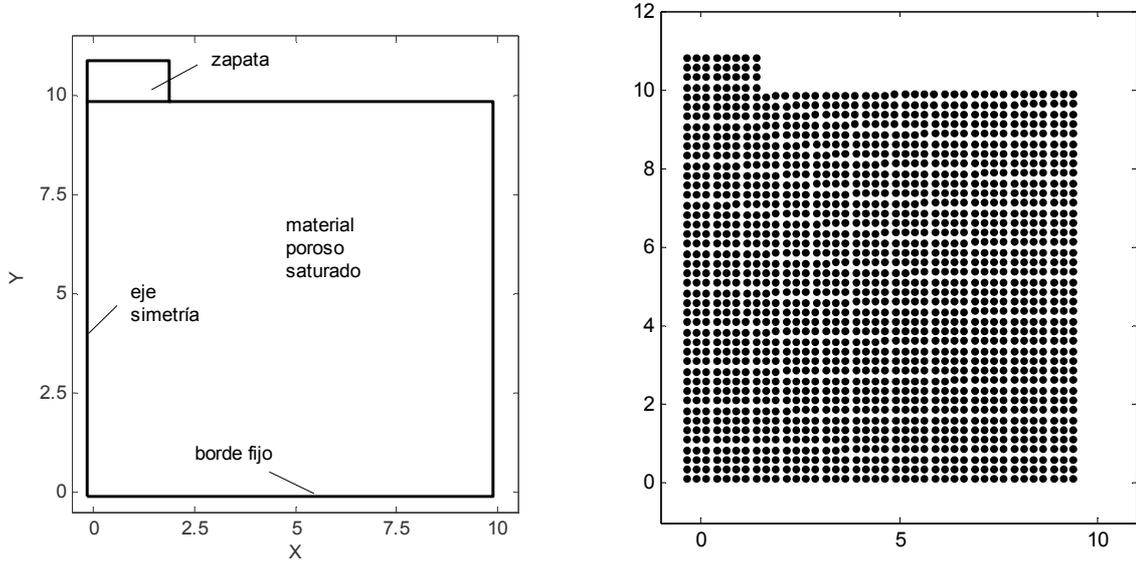


Figura II.1 Zapata rígida sobre material poroso saturado.  
a) Geometría b) Modelo de partículas

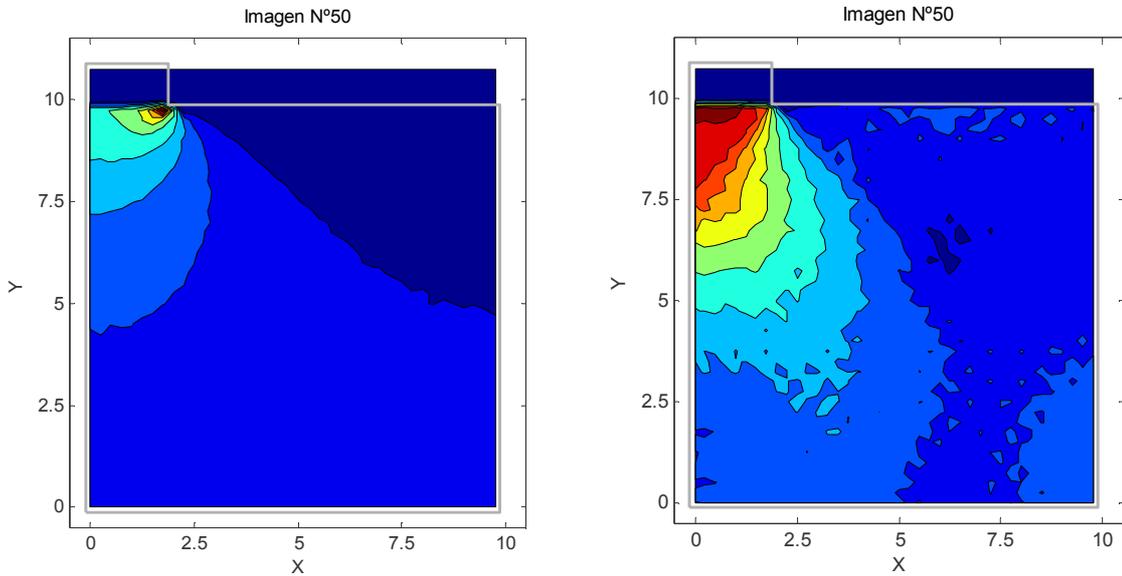


Figura II.2. Contornos de presión de poros para la zapata sobre un material de permeabilidad nula. a) Material elástico b) Material de Mohr Coulomb.

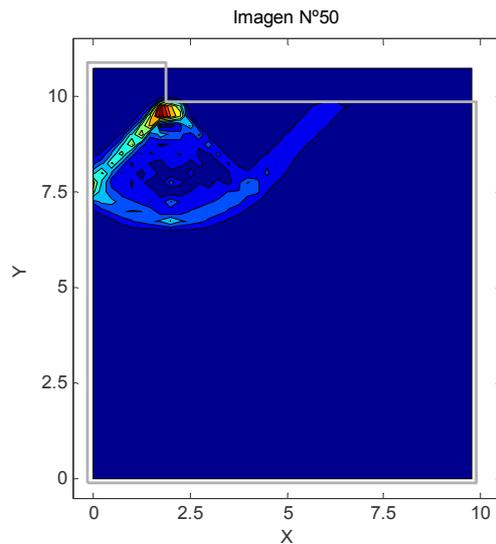


Figura II.3 Contornos de deformación plástica equivalente para el material Mohr  
Coulomb

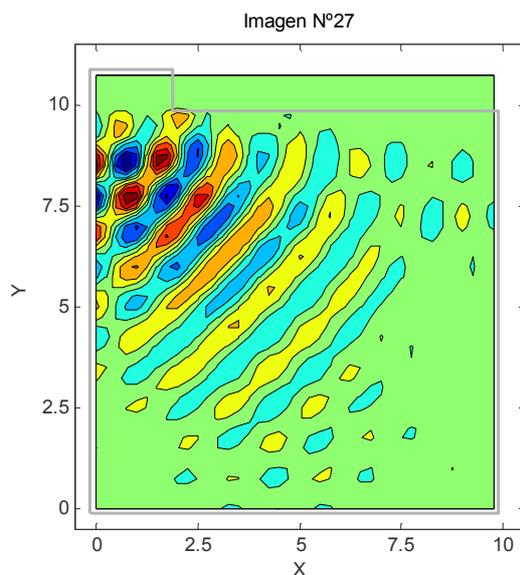


Figura II.4 Inestabilidad de presión.

### **Estabilidad para una carga impulsiva.**

En este apartado se comparan los resultados para una columna de suelo (Figura II.5) con los obtenidos por Mira et al. 2003 con elementos finitos Q8P4 (8 grados de libertad de desplazamientos y 4 de presión) con el objetivo de comprobar la estabilidad del algoritmo de cálculo propuesto. En la Figura II.6 se comparan la distribución de presiones calculada luego de 1 segundo de aplicación de una carga impulsiva con y sin el procedimiento de estabilización utilizado en esa referencia. En la Figura II.7 se muestra la solución para el mismo problema con el MPM y el procedimiento propuesto.

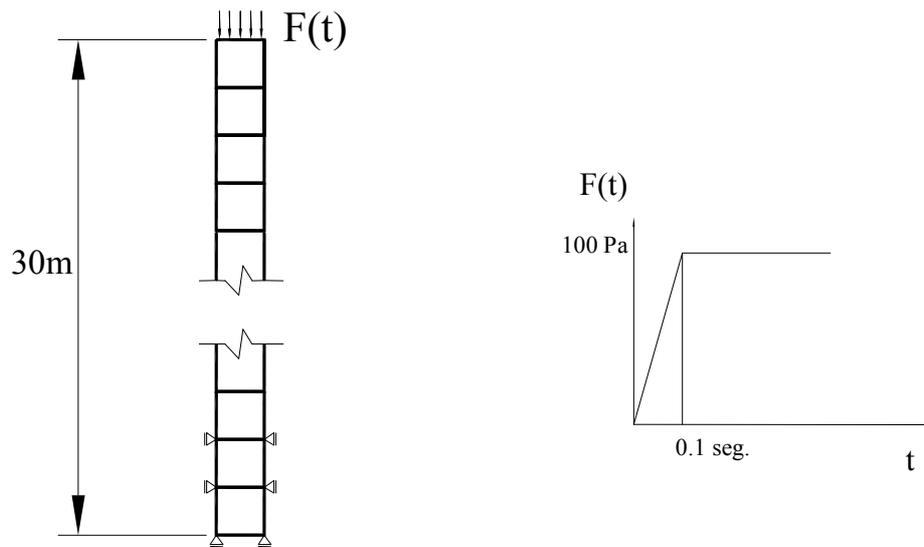


Figura II.5. Columna de suelo y carga impulsiva utilizada para analizar estabilidad de presiones.

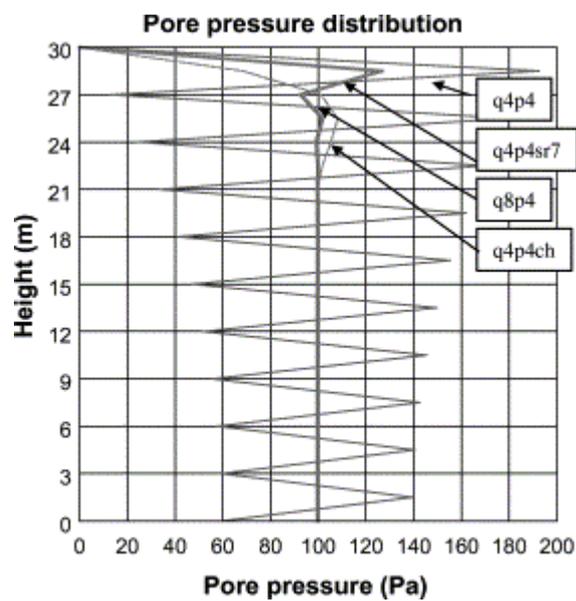


Figura II.6. Distribución de presiones obtenidas con y sin estabilización..

( $t=1$  seg  $k=10^{-7}$  m/s and  $Q^*=10^4$  MPa). (Mira et al. 2003)

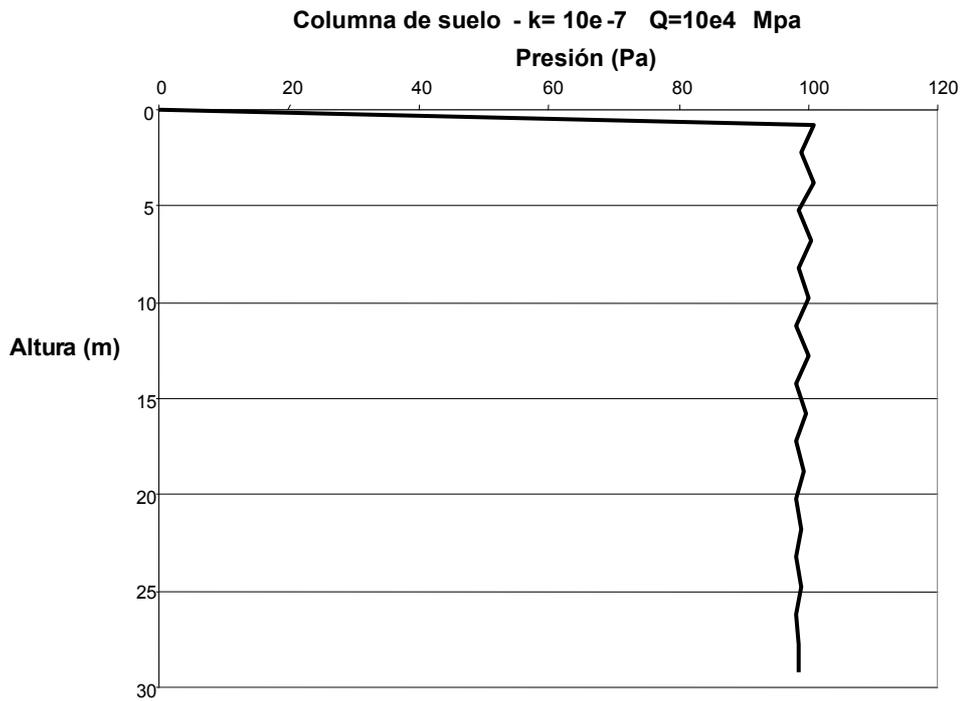


Figura II.7. Distribución de presiones obtenida con el procedimiento propuesto para el Método del Punto Material (t=1seg).

Este ejemplo indica que el algoritmo es razonablemente estable en el rango de módulos de compresibilidad y permeabilidades consideradas.

### II.7 Consolidación unidimensional para pequeñas deformaciones.

Se ha utilizado la misma columna de suelo para obtener la distribución de presiones en altura en función del tiempo y comparar con la solución de Terzaghi.

El intervalo de integración  $\Delta t$  debe ser menor que el intervalo crítico  $\Delta t_{crit}$  y este está condicionado por la compresibilidad del conjunto suelo-fluido.

$$\Delta t_{crit} = \frac{l}{c_p} \quad (\text{II.31})$$

$l$ : dimensión de la malla

$c_p$ : velocidad de la onda de presión

$$c_p \approx \sqrt{\frac{Q}{\rho}} \quad (\text{II.32})$$

Este intervalo es tan pequeño que hace imposible la obtención de resultados para los tiempos de consolidación correspondientes a las permeabilidades típicas de los problemas geotécnicos ya que el número de pasos de integración se elevaría muchísimo. Para resolver este problema se puede obtener una aproximación pseudoestática amplificando artificialmente la densidad de manera de obtener un intervalo de integración mayor, siempre que limitemos los efectos dinámicos, es decir que la carga sobre la mezcla suelo-fluido se aplique sin oscilaciones y sin amplificación ó sobreimpulso. Para esto es posible amortiguar el sistema cerca del amortiguamiento crítico ó aplicar la carga de una manera lenta respecto de las frecuencias propias del sistema. En este ejemplo se aplicó la carga en forma instantánea usando un amortiguamiento tipo Raleigh proporcional a la masa que, para el primer periodo de la columna de suelo, produjese un amortiguamiento del orden del 100% del crítico. En este caso es sencilla la obtención de una estimación del amortiguamiento porque el primer periodo de la columna puede calcularse como:

$$T_1 = 4H \sqrt{\frac{\rho}{E^*}} \quad (\text{II.33})$$

$$E^* = Q + K + \frac{4}{3}G$$

$H$  : longitud de la columna de suelo

$\rho$  : densidad

$K$ : módulo de compresibilidad volumétrica del suelo

Si se utiliza un amortiguamiento de Raleigh proporcional a la masa:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} \quad (\text{II.34})$$

$\mathbf{C}$  : matriz de amortiguamiento

$\mathbf{M}$  : matriz de masa

$\alpha$  : coeficiente de proporcionalidad

Diagonalizando la matriz de amortiguamiento con el primer modo de vibración puede obtenerse

$$2\omega_1\zeta_1 = \alpha \quad (\text{II.35})$$

$\omega_1$  : frecuencia del modo 1

Si  $\zeta_1 = 1$  : cantidad de amortiguamiento para el primer modo (100%)

Por lo tanto  $\alpha = 2\omega_1$

En la Figura II.8 se comparan la variación de presión con la profundidad en la columna de suelo de altura H, impermeable en el fondo, para 3 tiempos de consolidación, calculadas con la solución de Terzaghi y las obtenidas con el MPM.

Se observa que el procedimiento numérico se comporta con una leve disipación de presiones adicional a la solución de Terzaghi. Desde el punto de vista práctico esto último no influirá en las estimaciones de presión considerando los rangos de variación e incertidumbres asociadas a las permeabilidades de campo.

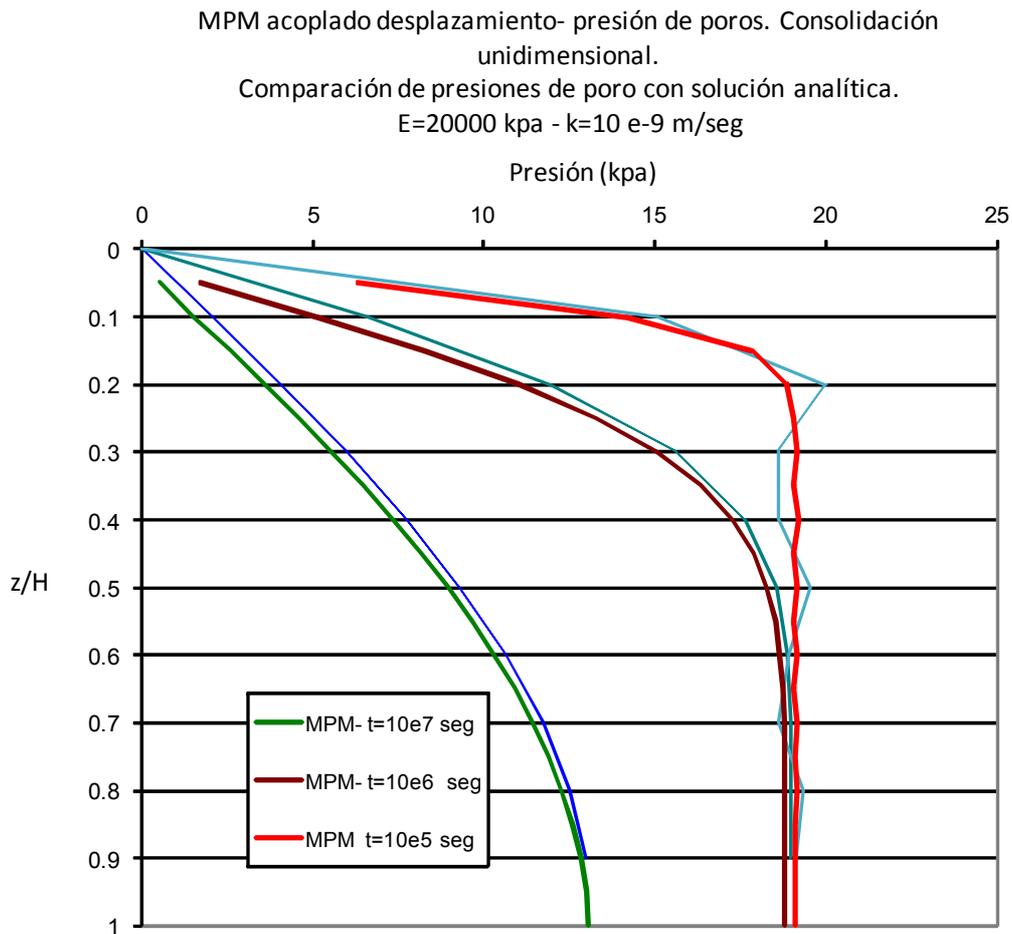


Figura II. 8. Comparación de resultados de consolidación unidimensional

### II.8 Amortiguamiento adaptable.

El tipo de aproximación dinámica utilizado en el apartado anterior para la solución de problemas estáticos se denomina “relajación dinámica”. Existen varios códigos que la utilizan como base para la solución de problemas pseudoestáticos a partir de esquemas dinámicos explícitos (Flac, LS-Dyna ).

Para obtener durante el proceso en forma automática y adaptable una estimación de la primera frecuencia propia del sistema se puede utilizar el cociente de Raleigh (Metzger 2003)

$$\omega_1 = \frac{\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}}{\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{u}} \quad (\text{II.36})$$

Como en la versión explícita del MPM no formamos la matriz de rigidez tangente podemos calcular:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{int}}^k - \mathbf{F}_{\text{int}}^{k-1} \quad (\text{II.37})$$

y utilizando el incremento del vector de velocidades en lugar del de desplazamientos:

$$\omega_1 = \frac{\Delta \mathbf{v}^T (\mathbf{F}_{\text{int}}^k - \mathbf{F}_{\text{int}}^{k-1}) / \Delta t}{\Delta \mathbf{v}^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{v}} \quad (\text{II.38})$$

Para un amortiguamiento del 100%  $\alpha = 2\omega_1$ .

En el código GEOPART se ha implementado un procedimiento de relajación dinámica adaptable utilizando esta estimación de la primera frecuencia propia.

### III. ANÁLISIS DE LOCALIZACIÓN DE DEFORMACIONES.

El objetivo de este capítulo es la selección y descripción de algunas estrategias para el tratamiento del fenómeno de la localización de deformaciones que puedan adaptarse al contexto del MPM y que permitan detectar en forma natural, sin hipótesis previas, mecanismos de colapso en estructuras geotécnicas en general.

El problema de la localización de deformaciones ha sido estudiado intensamente desde hace varias décadas desde el punto de vista teórico, mediante aplicaciones numéricas y en ensayos de laboratorio. En lo que sigue se han particularizado para el MPM dos estrategias conocidas para regularizar la solución, es decir para obtener soluciones consistentes no dependientes de la malla utilizada. La malla en el caso del MPM es la malla soporte. En primer lugar se muestra un ejemplo en el que se ha utilizado una aproximación continua para simular el fenómeno de la localización, para esto se supone que las deformaciones localizadas pueden distribuirse en el elemento como deformaciones plásticas. En este caso el trabajo disipado por el vector tracción en la discontinuidad (fractura ó superficie de deslizamiento) debe ser igual al disipado en el volumen del elemento de la malla soporte y por lo tanto el módulo plástico de ablandamiento debe ser calibrado con el tamaño de los elementos de la malla (Huang et al., 1995), (Zienkiewicz et al., 1999). En segundo lugar se utiliza un procedimiento utilizado en el MEF que permite la introducción de saltos de desplazamiento en una malla convencional, este procedimiento se adapta en este capítulo a las características de la formulación explícita del MPM y de los problemas dinámicos.(Wells et al. 2001, Wells et al. 2002)

#### **III.1. Aproximación mediante la teoría de la plasticidad independiente de la velocidad de carga.**

En esta sección se presenta un problema que demuestra la capacidad de esta aproximación en el MPM para representar adecuadamente problemas de localización de deformaciones. Otros ejemplos se describen en Zabala et al, 2004.

El problema corresponde a una fundación rígida que está ubicada en la parte superior de un talud puramente cohesivo en condición de deformación plana. El material se supone incompresible y con ablandamiento por deformación. La geometría y condiciones de borde se muestran en la Figura III.1. Este ejemplo tiene una solución teórica, y además ha sido analizado (Huang et al, 1995) utilizando elementos finitos con mallas

adaptables. Se ha utilizado una ecuación constitutiva elastoplástica sin endurecimiento, aplicando una aproximación suavizada al criterio de fluencia de Mohr – Coulomb (Abbo and Sloan, 1995). Se impone la condición de deformación plana y se utiliza un módulo de Poisson  $\nu = 0.49$  para simular incompresibilidad. En el ejemplo se hace referencia a la deformación plástica equivalente, que se define con:

$$\varepsilon_{eq}^p = \left( \frac{2}{3} \mathbf{e}_{ij}^p \mathbf{e}_{ij}^p \right)^{1/2} \quad (\text{III.1})$$

donde  $\mathbf{e}_{ij}^p$  es la parte desviadora del tensor de deformaciones plásticas.

$$\mathbf{e}_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^p \quad (\text{III.2})$$

Los parámetros mecánicos del suelo han sido elegidos de manera que  $E/c=2000$  donde  $E$  es el módulo de Young y  $c$  la cohesión del material. El peso propio de los materiales se desprecia. La zapata rígida se ha modelado con un material elástico en deformación plana, con un módulo de Young 100 veces mayor que el asignado al material del suelo. Se ha controlado la velocidad de descenso de la zapata, y la reacción se obtuvo integrando las tensiones verticales a lo largo del contorno inferior del suelo.

El comportamiento de ablandamiento por deformación se describe mediante un módulo plástico  $H$  definido por la pendiente del gráfico  $q$  vs.  $\varepsilon_{ef}^p$ . Siendo  $q$  el desviador de tensión definido por:

$$q = \left( \frac{3}{2} \mathbf{s}_{ij} \mathbf{s}_{ij} \right)^{1/2} \quad (\text{III.3})$$

Donde  $\mathbf{s}_{ij}$  son las tensiones desviadoras  $\mathbf{s}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}$ .

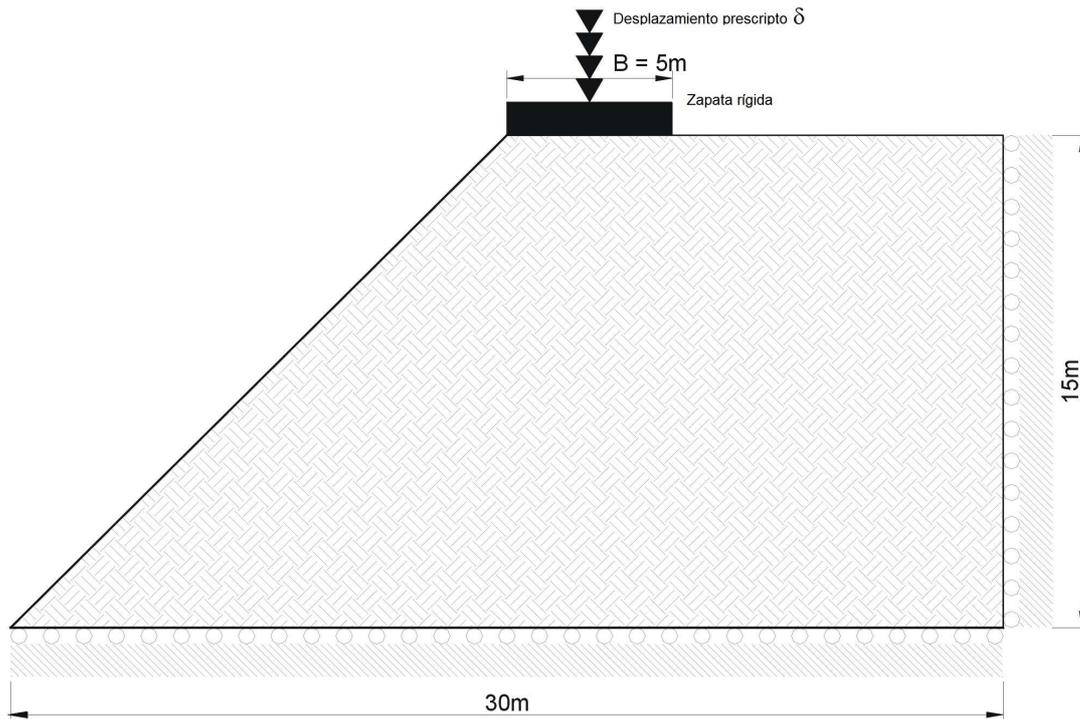


Figura III.1: Talud con fundación rígida .Geometría y condiciones de borde.

El problema se analizó con cuatro diferentes tamaños de malla  $h$  iguales a  $1.000m$ ,  $0.625m$ ,  $0.500m$  and  $0.250m$ , resultando en un total de 340, 876, 1375 y 5530 partículas respectivamente. Los resultados se muestran en la Figura III.3 para un modulo plástico  $H=-250$ . La parte a) de la Figura III.3 muestra la dependencia de la reacción en la base, en función del desplazamiento de la zapata, con el tamaño de la malla. Los modelos fueron analizados nuevamente introduciendo un modulo dependiente del tamaño de la malla. Los nuevos resultados se calcularon con  $H = H_0 h/d$ , donde  $H_0$  es el módulo plástico original y  $d$  es una dimensión característica adoptada en este caso igual a  $0.500m$ . Estos resultados se muestran en la parte (b) de la Figura III.3 donde puede observarse que la consideración del modulo de ablandamiento dependiente del tamaño del elemento impide la dependencia de la solución con el tamaño de la malla. La reacción pico es muy próxima al valor teórico  $\frac{F}{B \cdot c} = 2 + \pi/2$  para todos los análisis.

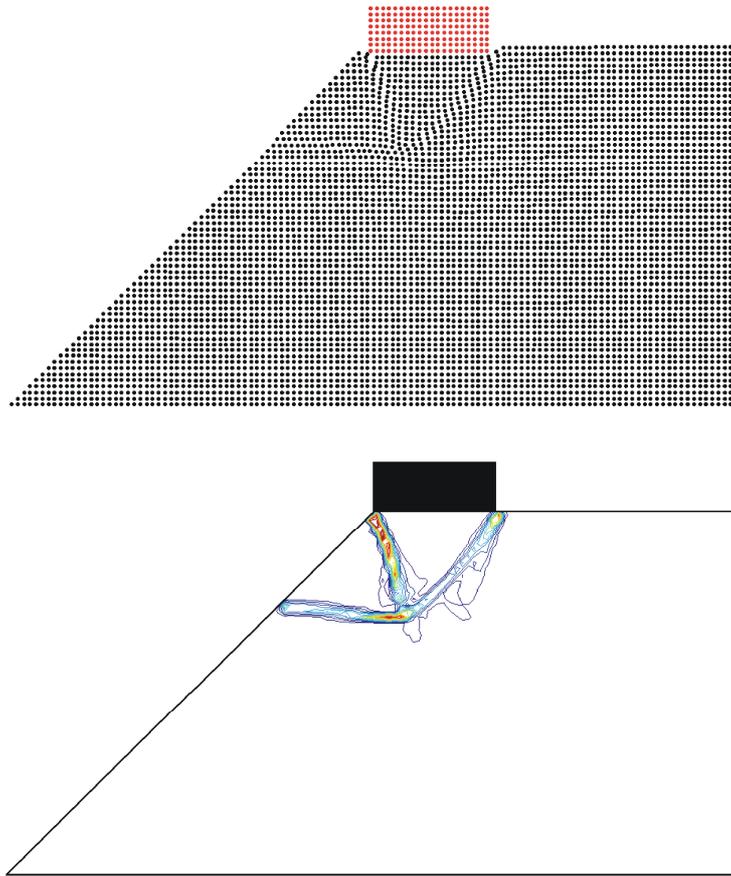


Fig. III.2: Talud con fundación rígida. Configuración deformada del modelo de puntos materiales y contornos de deformaciones plásticas de corte efectivas para  $h = 0.500m$ .

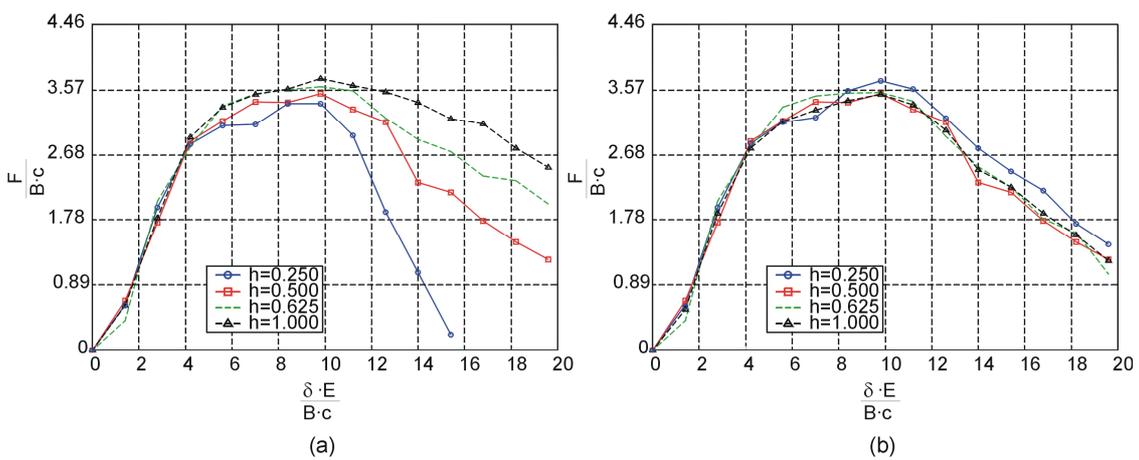


Figura. III.3. Talud con fundación rígida. Reacción en función del desplazamiento prescrito para: (a)  $H = -250$ , y (b)  $H = H_0 h / d$ .

El ejemplo muestra que es posible representar fenómenos de localización de deformaciones aún con discretizaciones sencillas. Se debe notar que no aparece, en este y otros ejemplos (Zabala et al. 2004), sensibilidad por alineación de la malla en la ubicación de las zonas de localización, debido a la disposición regular de la malla soporte sin direcciones preferentes que generen orientaciones ficticias de las deformaciones plásticas.

Sin procedimientos de regularización existe dependencia con el tamaño de la malla. Esta dependencia tiene dos formas, por un lado el tamaño de la zona de concentración de deformaciones cambia con el tamaño de la malla y en segundo lugar, con mayor importancia práctica, en caso de materiales con ablandamiento por deformación la solución no es objetiva.

### **III.2 Análisis de discontinuidad de desplazamientos en MPM.**

En este apartado se adapta una formulación, desarrollada para el MEF, al MPM que permite la introducción de saltos de desplazamiento en una malla convencional (Wells et al. 2001, Wells et al. 2002). En este caso la malla es la de elementos rectangulares que se usa normalmente en el MPM. El trazado de la discontinuidad es completamente independiente de la malla y el salto de desplazamiento en la grieta ó superficie de deslizamiento se representa con grados de libertad adicionales de los nudos existentes.

#### **Cinemática de una discontinuidad de desplazamiento**

El campo de desplazamientos se supone compuesto de la suma de una función regular  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  que representa el campo cuando no existen discontinuidades y una función  $[\mathbf{u}](\mathbf{x}, t)$  que describe el salto de desplazamiento que se produce en la discontinuidad  $\Gamma_d$  (Figura III.4).

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\Gamma_d} [\mathbf{u}](\mathbf{x}, t) \quad (\text{III.4})$$

Donde  $\mathcal{H}_{\Gamma_d}$  es la función de Heaviside centrada en la discontinuidad de manera que:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\Gamma_d} &= 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ \mathcal{H}_{\Gamma_d} &= 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^- \end{aligned}$$

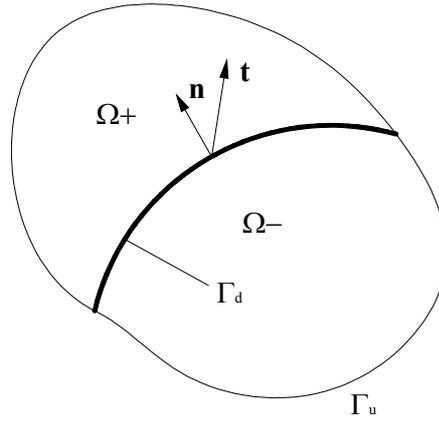


Figura III.4 Dominio  $\Omega$  y discontinuidad  $\Gamma_d$

### Forma débil de la ecuación de equilibrio dinámico

Aplicando el principio de los trabajos virtuales para un desplazamiento virtual  $\boldsymbol{\eta}$  podemos obtener una forma variacional del equilibrio dinámico.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\eta} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \rho d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\eta} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (\text{III.5})$$

Suponemos que el desplazamiento virtual está compuesto también por una función regular  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  y un salto de desplazamiento  $[\boldsymbol{\eta}]$ .

$$\boldsymbol{\eta} = \hat{\boldsymbol{\eta}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d} [\boldsymbol{\eta}] \quad (\text{III.6})$$

$\hat{\boldsymbol{\eta}}$ : parte continua del desplazamiento virtual

$[\boldsymbol{\eta}]$ : desplazamiento virtual adicional para simular la discontinuidad de desplazamiento

El gradiente simétrico del desplazamiento virtual ó deformación virtual puede expresarse utilizando las propiedades de la función de Heaviside como:

$$\nabla^s \boldsymbol{\eta} = \nabla^s \hat{\boldsymbol{\eta}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d} (\nabla^s [\boldsymbol{\eta}]) + \delta_{\Gamma_d} ([\boldsymbol{\eta}] \otimes \mathbf{n})^s \quad (\text{III.7})$$

Donde:

$\mathbf{n}$  : normal a la superficie de discontinuidad

$\delta_{\Gamma_d}$  :delta de Dirac

Por lo tanto:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^s \hat{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{K}_{\Gamma_d} (\nabla^s [\boldsymbol{\eta}]) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta_{\Gamma_d} ([\boldsymbol{\eta}] \otimes \mathbf{n})^s : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \quad (\text{III.8})$$

Por las propiedades de la función delta de Dirac:

$$\int_{\Omega} \delta_{\Gamma_d} ([\boldsymbol{\eta}] \otimes \mathbf{n})^s : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma_d} [\boldsymbol{\eta}] \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (\text{III.9})$$

La ecuación integral queda:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \, \rho \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{K}_{\Gamma_d} [\boldsymbol{\eta}] \cdot \ddot{\mathbf{u}} \, \rho \, d\Omega = \\ & \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{K}_{\Gamma_d} [\boldsymbol{\eta}] \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (\text{III.10}) \\ & - \int_{\Omega} \nabla^s \hat{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathcal{K}_{\Gamma_d} (\nabla^s [\boldsymbol{\eta}]) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Gamma_d} [\boldsymbol{\eta}] \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma \end{aligned}$$

Donde:

$\int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \, \rho \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{K}_{\Gamma_d} [\boldsymbol{\eta}] \cdot \ddot{\mathbf{u}} \, \rho \, d\Omega$  : Trabajo virtual de las fuerzas de inercia

$\int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{K}_{\Gamma_d} [\boldsymbol{\eta}] \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma$  : Trabajo virtual de las fuerzas externas, fuerzas

volumétricas  $\mathbf{b}$  y fuerzas en los contornos  $\bar{\mathbf{t}}$

$-\int_{\Omega} \nabla^s \hat{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathcal{K}_{\Gamma_d} (\nabla^s [\boldsymbol{\eta}]) : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Gamma_d} [\boldsymbol{\eta}] \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma$  : Trabajo virtual de las fuerzas

internas debidas a las tensiones y de las fuerzas  $\mathbf{t}$  en la discontinuidad  $\Gamma_d$

Teniendo en cuenta las propiedades de “partición de la unidad” de las funciones de forma, utilizadas tanto en el MEF como en el MPM, se puede escribir:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a} + \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{N}\mathbf{b} \quad (\text{III.11})$$

Donde  $\mathbf{N}$  es la matriz de funciones de forma usada para obtener el desplazamiento en función de los desplazamientos nodales. Los desplazamientos  $\mathbf{a}$  de los nodos corresponden a la parte regular de la solución y los  $\mathbf{b}$  corresponden a grados de libertad adicionales de los nodos.

Tomando variaciones de  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  con  $[\boldsymbol{\eta}] = 0$

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \ddot{\mathbf{u}} \rho d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (\text{III.12})$$

y a la inversa variaciones de  $[\boldsymbol{\eta}]$  con  $\hat{\boldsymbol{\eta}} = 0$  y limitando la integración al dominio  $\Omega^+$  se puede prescindir de la función de Heaviside.

$$\int_{\Omega^+} \mathbf{N}^T \ddot{\mathbf{u}} \rho d\Omega = \int_{\Omega^+} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\Omega^+} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (\text{III.13})$$

Reemplazando el campo de aceleraciones  $\ddot{\mathbf{u}}$  en la ecuación (III.12)

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{a}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{N}\ddot{\mathbf{b}} \quad (\text{III.14})$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{N}\ddot{\mathbf{a}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d} \mathbf{N}\ddot{\mathbf{b}}) \rho d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \rho d\Omega \ddot{\mathbf{a}} + \int_{\Omega^+} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \rho d\Omega \ddot{\mathbf{b}} \quad (\text{III.15})$$

y definiendo las matrices de masa :

$$\mathbf{M}_a = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \rho d\Omega \quad (\text{III.16})$$

$$\mathbf{M}_b = \int_{\Omega^+} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \rho d\Omega \quad (\text{III.17})$$

Se tiene:

$$\mathbf{M}_a \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{b}} = F_{ext,a} + F_{int,a}$$

$$F_{ext,a} = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega \quad (\text{III.18})$$

$$F_{int,a} = - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega$$

De igual forma se puede expresar la ecuación (III.13).

$$\mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{b}} = F_{ext,b} + F_{int,b}$$

$$F_{ext,b} = \int_{\Omega^+} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega \quad (\text{III.19})$$

$$F_{int,b} = \int_{\Omega^+} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, d\Gamma$$

Utilizando la expresión  $\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=1}^{N_p} m_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t))$  y diagonalizando las matrices de masa se pueden escribir las masas en el nudo  $i$ :

$$m_{i,a}^k = \sum_{p=1}^{N_p} m_p N_i(\mathbf{x}_p^k)$$

$$m_{i,b}^k = \sum_{p=1}^{N_p \in \Omega^+} m_p N_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (\text{III.20})$$

Resultando el sistema de ecuaciones:

$$m_{i,a} \ddot{a}_i + m_{i,b} \ddot{b}_i = f_{i,ext,a} - f_{i,int,a}$$

$$m_{i,b} \ddot{a}_i + m_{i,b} \ddot{b}_i = f_{i,ext,b} - f_{i,int,b} \quad (\text{III.21})$$

Que se resuelve de la siguiente forma:

$$(m_{i,a} - m_{i,b}) \ddot{a}_i = (f_{i,ext,a} - f_{i,int,a}) - (f_{i,ext,b} - f_{i,int,b})$$

$$m_{i,b} \ddot{b}_i = (f_{i,ext,b} - f_{i,int,b}) + m_{i,b} \ddot{a}_i \quad (\text{III.22})$$

Las variaciones de la cantidad de movimiento pueden resolverse en forma explícita:

$$\Delta q_{i,a} = (m_{i,a} - m_{i,b}) \Delta v_{i,a} = \left[ (f_{i,ext,a} - f_{i,int,a}) - (f_{i,ext,b} - f_{i,int,b}) \right] \Delta t \quad (\text{III.23})$$

$$\Delta q_{i,b} = m_{i,b} \Delta v_{i,b} = (f_{i,ext,b} - f_{i,int,b}) \Delta t - \Delta q_{i,a}$$

$\Delta q_{i,a}$ : incremento de la cantidad de movimiento del nudo para la solución regular.

$\Delta v_{i,a}$ : incremento de velocidad del nudo para la solución regular.

La introducción de una discontinuidad de desplazamiento en la malla soporte es sencilla, no es necesario el remallado y el algoritmo puede resumirse de la siguiente forma:

- a- Las masas de los nudos  $m_{i,a}$  y las fuerzas  $f_{i,ext,a}$  y  $f_{i,int,a}$  corresponden a la solución normal en el MPM (todo el dominio  $\Omega$  sin saltos)
- b- Detectada la discontinuidad en un elemento de la malla se calculan las masas de los nudos correspondiente a los grados de libertad adicionales  $m_{i,b}$  (dominio  $\Omega^+$ ) y las fuerzas  $f_{i,ext,b}$  y  $f_{i,int,b}$ . El vector tracción por unidad de superficie en la interfase se obtiene en función de una ley discreta tensión desplazamiento a partir del salto de desplazamiento calculado en la interfase, por ejemplo la desarrollada por Carol et al., 1997.
- c- Se obtiene la variación de la cantidad de movimiento  $\Delta q_{i,a}$  y  $\Delta q_{i,b}$
- d- Las velocidades de las partículas se calculan a partir de las variaciones de la cantidad de movimiento teniendo en cuenta que las cantidades  $\Delta q_{i,b}$  solo se aplican a las partículas que se encuentran en el dominio  $\Omega^+$

Para utilizar con éxito este procedimiento hay que detectar las celdas que tienen una discontinuidad y calcular la normal a esa discontinuidad. Desde el punto de vista de la implementación la discontinuidad se ha supuesto como una línea recta en el caso bidimensional ó como un plano en tres dimensiones que intercepta la celda por lo cual dentro de una celda la normal es constante. La detección de una celda con una discontinuidad se realiza considerando una junta ó interfase potencial de espesor nulo y dirección variable en el elemento, y evaluando su resistencia, en forma similar al concepto de “segmento cohesivo”, (Remmers et al. 2003, Remmers et al. 2008)(Borst et

al. 2006), con la siguiente superficie de carga hiperbólica inicial  $F=0$  (Carol et al,1997)

$$F = \sigma_T^2 - (c - \sigma_N \tan \phi)^2 + (c - \chi \tan \phi)^2 = 0 \quad (\text{III.24})$$

Donde la resistencia a tracción  $\chi$ , la cohesión  $c$  y el ángulo de fricción inicial  $\phi$  son parámetros del modelo constitutivo de la interfase. El vector tracción por unidad de superficie en la discontinuidad es  $\mathbf{t} = [\sigma_N, \sigma_T]^T$ , y también  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ . Los parámetros del modelo evolucionan con las componentes normal y tangencial del salto de desplazamiento  $\mathbf{u}_{\Gamma_d} = [u_N, u_T]^T$ .

La detección de celdas con discontinuidad puede realizarse a partir de la tensión promedio en la celda, para el paso  $k$  de la solución, variando la dirección de la normal y maximizando la función  $F$  de carga inicial. Cuando  $F \geq 0$  se inserta la discontinuidad en la malla. El material que transportan las partículas puede considerarse elástico ó que responde a un comportamiento elastoplástico con ó sin daño.

Las discontinuidades se pueden trasportar a otras celdas de la misma manera que las partículas manteniendo como variables propias, a medida que avanza la solución, el desplazamiento relativo y el vector tracción en la interfase.

## IV. DEFORMACIONES FINITAS Y GRANDES DESPLAZAMIENTOS

### IV.1. Problemas de deformaciones finitas y grandes desplazamientos.

El MPM se adapta especialmente a los problemas de deformaciones finitas y de grandes desplazamientos, de la misma manera que otros métodos sin malla, porque no sufre de las distorsiones de malla que presenta el MEF cuando se representa la cinemática del problema en forma lagrangiana.

En este capítulo se desarrolla un algoritmo de integración objetivo para formulaciones de plasticidad incremental (Simo y Hughes, 1998) en el marco del MPM. En la representación lagrangeana ó material del movimiento  $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  se tiene:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{IV.1})$$

$\mathbf{X}$  : coordenadas materiales

$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  : coordenadas espaciales

$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  : campo de desplazamientos

$\Omega_0$  : configuración de referencia

$\Omega_k$  : configuración para el paso de solución  $k$

La aproximación de las coordenadas espaciales en un punto intermedio entre las configuraciones  $k$  y  $k+1$  puede escribirse:

$$\mathbf{x}^{k+\theta} = (1 - \theta)\mathbf{x}^k + \theta)\mathbf{x}^{k+1} \quad (\text{IV.2})$$

para  $0 \leq \theta \leq 1$  y por lo tanto el gradiente de la deformación:

$$\mathbf{F}^{k+\theta} = (1 - \theta)\mathbf{F}^{k+1} + \theta)\mathbf{F}^k \quad (\text{IV.3})$$

El cálculo de las fuerzas internas, externas y de inercia se realiza en la configuración actual a partir de la forma débil que surge de aplicar el principio de los trabajos virtuales

$$\int_{\Omega_{k+1}} \boldsymbol{\eta} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \rho d\Omega = \int_{\Omega_{k+1}} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_{k+1}} \boldsymbol{\eta} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega_{k+1}} \nabla^s \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (\text{IV.4})$$

$\boldsymbol{\eta}$ : desplazamiento virtual

$\Omega_{k+1}$ : dominio para el paso  $k+1$

La configuración para el paso  $k+1$  es desconocida y se obtiene cuando se resuelve el paso de integración  $k+1$ .

### Relaciones cinemáticas:

Aplicando la descomposición multiplicativa del movimiento entre  $k$  y  $k+\theta$ .

$$\mathbf{F}^{k+\theta} = \mathbf{f}^{k+\theta} \mathbf{F}^k \quad (\text{IV.5})$$

Donde  $\mathbf{f}_{k+\theta}$  es el gradiente de la deformación relativo a la configuración  $k$ , definimos el gradiente:

$$\mathbf{h}^{k+\theta} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^{k+\theta})}{\partial \mathbf{x}^{k+\theta}} = \nabla^{k+\theta} \tilde{\mathbf{u}} \quad (\text{IV.6})$$

$\tilde{\mathbf{u}}$ : campo incremental de desplazamiento referido a la configuración  $k+\theta$

Se puede demostrar (Simo y Hughes, 1998) que el tensor velocidad de deformación

$\mathbf{d}_{k+\theta}$  puede escribirse como:

$$\mathbf{d}^{k+\theta} = \frac{1}{2\Delta t} \left[ \mathbf{h}^{k+\theta} + \mathbf{h}^{k+\theta T} + (1-2\theta) \mathbf{h}^{k+\theta T} \mathbf{h}^{k+\theta} \right] \quad (\text{IV.7})$$

que puede particularizarse para una integración implícita con  $\theta = 1/2$  como:

$$\mathbf{d}^{k+1/2} = \frac{1}{2\Delta t} \left[ \mathbf{h}^{k+1/2} + \mathbf{h}^{k+1/2 T} \right] \quad (\text{IV.8})$$

### Tasas objetivas del tensor de Cauchy y del tensor de Kirchhoff

Con el objeto de preservar la invarianza de los incrementos ó tasas de tensión cuando se aplica la transformación de coordenadas entre la configuración original y la actual y

obtener un algoritmo incrementalmente objetivo se puede utilizar una tasa objetiva del tensor de tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  ó del tensor de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$  donde  $J$  es el jacobiano de la transformación de coordenadas.

### Derivada de Lie de la tensión de Kirchhoff

La derivada de Lie de un tensor espacial se define derivando respecto del tiempo a la transformación geométrica “hacia atrás” del tensor (pull back) y realizando la transformación geométrica “hacia delante” (push forward) de ese resultado. Puede demostrarse que la derivada de Lie de la tensión de Kirchhoff es una tasa objetiva de esa tensión.

$$L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T \quad (\text{IV.9})$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{IV.10})$$

$\mathbf{S}$ : segundo tensor de Piola-Kirchhoff que puede interpretarse como la transformación “hacia atrás” del tensor de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$

Para un incremento de tensión elástico es posible calcular el incremento del segundo tensor de Piola-Kirchhoff como:

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{D} : \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{D} : \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F} \quad (\text{IV.11})$$

$\mathbf{D}$ : tensor de elasticidad en la configuración original

$\dot{\mathbf{C}}$ : velocidad de incremento (tasa) del tensor derecho de deformación elástica de Cauchy-Green

$\dot{\mathbf{S}}$ : velocidad de incremento (tasa) del segundo tensor de Piola-Kirchhoff

$\mathbf{d}$ : tensor velocidad de deformación

Reemplazando en la derivada de Lie:

$$\mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{D} : \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{c}^{elast} : \mathbf{d} \quad (\text{IV.12})$$

$\mathbf{c}^{elast}$  : tensor elasticidad espacial

Si se asume que:  $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$

$$L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}^{elast} : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) \quad (IV.13)$$

Donde  $\mathbf{d}^p$  es la parte plástica del tensor velocidad de deformación  $\mathbf{d}$ .

### Aproximación a la derivada de Lie

Se puede obtener la siguiente aproximación algorítmica de la derivada de Lie (Simo y Hughes, 1998).

$$L_v \boldsymbol{\tau}^{k+\theta} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{f}^{k+\theta} \left[ \mathbf{f}^{k+1} {}^{-1} \boldsymbol{\tau}^{k+1} \mathbf{f}^{k+1} {}^{-T} - \boldsymbol{\tau}^k \right] \mathbf{f}^{k+\theta} {}^T \quad (IV.14)$$

Donde  $\mathbf{f}^{k+\theta} = \mathbf{F}^k {}^{-1} \mathbf{F}^{k+\theta}$  y  $\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{F}^k {}^{-1} \mathbf{F}^{k+1}$  y la expresión alternativa:

$$L_v \boldsymbol{\tau}^{k+\theta} = \frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{f}}^{k+\theta} {}^{-1} \left[ \boldsymbol{\tau}^{k+1} - \mathbf{f}^{k+1} \boldsymbol{\tau}^k \mathbf{f}^{k+1} {}^T \right] \tilde{\mathbf{f}}^{k+\theta} {}^{-T} \quad (IV.15)$$

Donde  $\tilde{\mathbf{f}}^{k+\theta}$  es el gradiente de la deformación relativo a la configuración  $k+1$ .

$$\tilde{\mathbf{f}}^{k+\theta} = \mathbf{F}^{k+1} \mathbf{F}^{k+\theta} {}^{-1} \quad (IV.16)$$

Si usamos un algoritmo explícito ( $\theta = 0$ ) tenemos que  $\mathbf{F}_{k+\theta} = \mathbf{f}_{k+\theta} \mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k$  y  $\mathbf{f}_{k+\theta} = \mathbf{1}$ .

Por lo tanto la ecuación (IV.14) se expresa como

$$L_v \boldsymbol{\tau}^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \left[ \mathbf{f}^{k+1} {}^{-1} \boldsymbol{\tau}^{k+1} \mathbf{f}^{k+1} {}^{-T} - \boldsymbol{\tau}^k \right] \quad (IV.17)$$

### Algoritmo explícito para deformaciones finitas en MPM.

- 1- Se adopta una formulación lagrangeana actualizada (updated lagrangian) donde la configuración de referencia es la configuración para el paso  $k$ .

$$m_i^k \frac{v_i^L - v_i^k}{\Delta t} = \mathbf{f}_{i,ext}^k + \mathbf{f}_{i,int}^k \quad (IV.18)$$

- 2- Se calculan masas y cantidad de movimiento en los nudos  $i$ . Las fuerzas internas  $\mathbf{f}_{i,int}^k$  se calculan a partir de las tensiones obtenidas en el paso anterior.
- 3- Se calculan las velocidades en los nudos  $v_i^L$
- 4- Se calcula el gradiente de la deformación  $\mathbf{f}_p^{k+1}$  y el incremento de deformación en las partículas  $p$ ,  $\mathbf{e}_p^{k+1}$ .

$$\mathbf{f}_p^{k+1} = I + \Delta t \sum_{i=1}^{N_n} \nabla(N_i(x_p^k) \mathbf{v}_i^L) \quad (IV.19)$$

$$\mathbf{e}_p^{k+1} = \frac{1}{2} \left[ I - (\mathbf{f}_p^{k+1})^{-T} (\mathbf{f}_p^{k+1})^{-1} \right] \quad (IV.20)$$

- 5- Se evalúa la ecuación constitutiva para cada partícula en la configuración  $k$  (de referencia) y a partir de la ecuación (IV.17) se obtiene:

$$L_v \boldsymbol{\tau}^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \left[ \mathbf{f}^{k+1} \boldsymbol{\tau}^{k+1} \mathbf{f}^{k+1}{}^{-T} - \boldsymbol{\tau}^k \right] = \mathbf{c}^k : \mathbf{d}^{k+1}$$

$$\boldsymbol{\tau}_p^{k+1} = \mathbf{f}_p^{k+1} \left( \boldsymbol{\tau}_p^k + \mathbf{c}_p^k : \mathbf{d}_p^{k+1} \Delta t \right) \mathbf{f}_p^{k+1}{}^T \quad (IV.21)$$

$\mathbf{c}_p^k$  : tensor elastoplástico tangente del material de la partícula  $p$  evaluado en el paso  $k$

Si el material no es isotrópico el tensor elastoplástico  $\mathbf{c}_p^{k+1}$  debe rotarse con el tensor rotación para utilizarlo en el paso siguiente.

- 6- Calculamos luego  $\boldsymbol{\sigma}_p^{k+1} = \frac{1}{J_p^{k+1}} \boldsymbol{\tau}_p^{k+1}$  con  $J_p^{k+1} = \det(\mathbf{f}_p^{k+1})$

## IV. 2 Consolidación unidimensional para deformaciones finitas.

El problema de consolidación de un estrato de suelo considerando deformaciones finitas ha sido planteado y resuelto en forma analítica y numérica por varios autores. Gibson

(1967,1981) y otros derivaron la ecuación de gobierno para consolidación unidimensional primaria para grandes deformaciones de un estrato grueso saturado:

$$-\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_w}-1\right)\frac{d}{de}\left(\frac{k(e)}{1+e}\right)\frac{\partial e}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k(e)}{\gamma_w(1+e)}\frac{\partial \sigma'}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial z}\right)+\frac{\partial e}{\partial t}=0 \quad (\text{IV.22})$$

Donde:

$e$  : relación de vacíos en la configuración deformada

$k(e)$  : permeabilidad variable con la relación de vacíos

$\gamma_s$  : peso específico de la fracción sólida

$\gamma_w$  : peso específico del agua

$z$  : coordenada material medida desde la parte superior del estrato en la configuración deformada (corresponde a la altura de volumen sólido)

$\sigma'$  : tensión efectiva

Esta formulación permite tener en cuenta la no-linealidad tensión-deformación del material y la variación de la permeabilidad con la relación de vacíos. La aplicación principal es la predicción de la consolidación bajo peso propio de materiales finos y blandos dragados ó materiales de residuos mineros.

A partir de esta ecuación se han obtenido soluciones analíticas considerando que los términos variables:

$$g(e)=\frac{k(e)}{\gamma_w(1+e)}\frac{\partial \sigma'}{\partial e} \quad (\text{IV.23}): \text{coeficiente de consolidación para deformaciones finitas}$$

$$\lambda(e)=-\frac{d}{de}\left(\frac{de}{d\sigma'}\right) \quad (\text{IV.24}): \text{constante de linearización}$$

Las hipótesis anteriores son válidas solo para rangos limitados de relación de vacíos  $e$ . Reemplazando las relaciones (IV.23) y (IV.24) en la ecuación de gobierno puede obtenerse la ecuación lineal:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial z^2}+\lambda(\gamma_s-\gamma_w)\frac{\partial e}{\partial z}=\frac{1}{g}\frac{\partial e}{\partial t} \quad (\text{IV.25})$$

Esta ecuación ha sido resuelta en forma analítica por diferentes autores (Gibson, 1981), (Morris, 2002) y en forma numérica (Cargill, 1984).

Por otro lado se han obtenido soluciones mediante el Método de los Elementos Finitos y una formulación lagrangeana actualizada (updated lagrangian UL) basada en la tasa objetiva de tensión de Jaumman (Meroi et al, 1995) con un módulo de elasticidad constante.

Para comparar estas soluciones con las obtenidas utilizando el MPM se ha utilizado una columna de suelo saturado de 10 m de altura (Figura IV.1) en deformación plana y con drenaje superior similar a la considerada por Meroi et al, (1995), con un módulo de elasticidad  $E=1000$  MPa, coeficiente de Poisson igual a cero y una permeabilidad  $k=1e-8$  m/s. No se considera el peso propio del estrato y se carga en su parte superior con una carga distribuida  $q$ . En la figura se muestra la malla soporte que corresponde a este ejemplo, se han impedido los desplazamientos horizontales de todos los nudos y el desplazamiento vertical de los nudos de la base fija. Se han usado 4 partículas por celda. Para asegurar la condición de contorno de presión en la parte superior de la columna, a medida que las partículas se desplazan hacia abajo moviéndose en la malla, se asigna durante el proceso en forma automática, presión igual a la atmosférica a los nudos superiores de la celda donde se encuentren las partículas superiores. Es decir que la condición de contorno de presión que se impone en la malla soporte se va variando durante la solución. En este modelo se ha aplicado la carga superior, variando su valor en forma lineal desde cero hasta  $q$ , en un tiempo que corresponde a  $0.02T_v$ , siendo  $T_v$  el factor de tiempo adimensional. La solución se ha obtenido para un tiempo total que corresponde a  $2T_v$ .

$$T_v = \frac{C_v t}{H_0^2} \quad (\text{IV.26})$$

$C_v$  : coeficiente de consolidación

$t$  : tiempo

$H_0$  : altura inicial de la columna de suelo

Si se considera un módulo de elasticidad constante el desplazamiento unidimensional final teórico puede resolverse utilizando la deformación logarítmica.

$$e_x = \int_{H_0}^H \frac{dH}{H} = \ln(H / H_0) = \ln \lambda_x \quad (\text{IV.27})$$

$e_x$  deformación logarítmica

$H_0$  : altura inicial de la columna de suelo

$H$  : altura final

$\lambda_x$  : alargamiento (stretch)

El área transversal  $A=A_0$  no cambia y el volumen se transforma mediante el jacobiano de transformación de coordenadas  $J$ .

$$AH = JA_0H_0$$

La tensión aplicada  $\sigma_x$  es constante en toda la columna e igual a :

$$\sigma_x = E \ln(\lambda_x) \quad (\text{IV.28})$$

En la Figura IV.2 se muestra la comparación de los resultados obtenidos para la columna de suelo con el MPM y con la ecuación (IV.28).

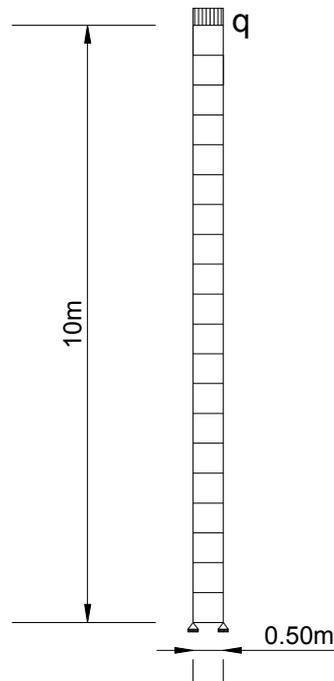


Figura IV.1 Malla soporte de MPM para una columna de suelo

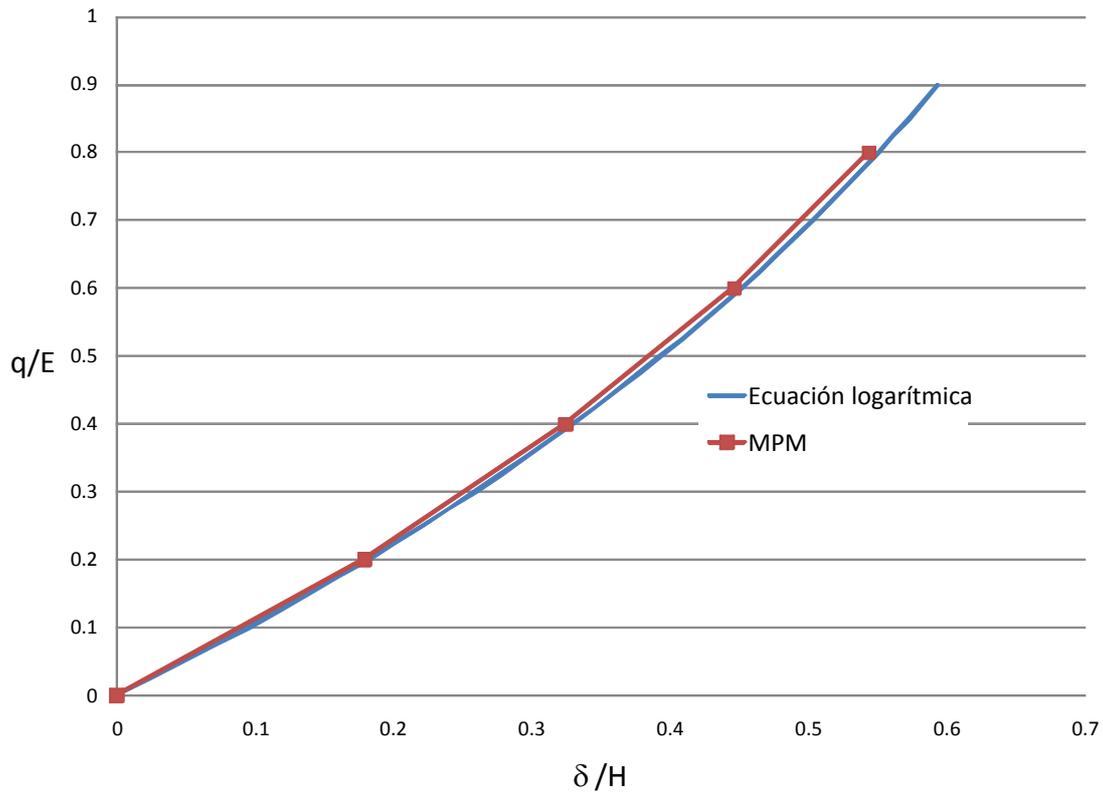


Figura IV.2. Comparación de la solución con el MPM y la solución analítica.

Las Figuras IV.3 y IV.4 muestran el desplazamiento de una partícula de la parte superior del estrato en función del factor de tiempo a dimensional  $T_v$  para una relación  $q/E=0.4$ . Este resultado es muy similar al obtenido por Meroi (1995) para permeabilidad constante.

La forma de la gráfica de la figura IV.4 cuando se representa el factor de tiempo en escala logarítmica muestra la diferencia de comportamiento entre la etapa de carga hasta  $0.02 T_v$  y el resto del tiempo de consolidación que no puede apreciarse con la escala de tiempo lineal.

La Figura IV.5 muestra la variación de presión de poros en función del tiempo de una partícula ubicada en la mitad del estrato en la configuración original.

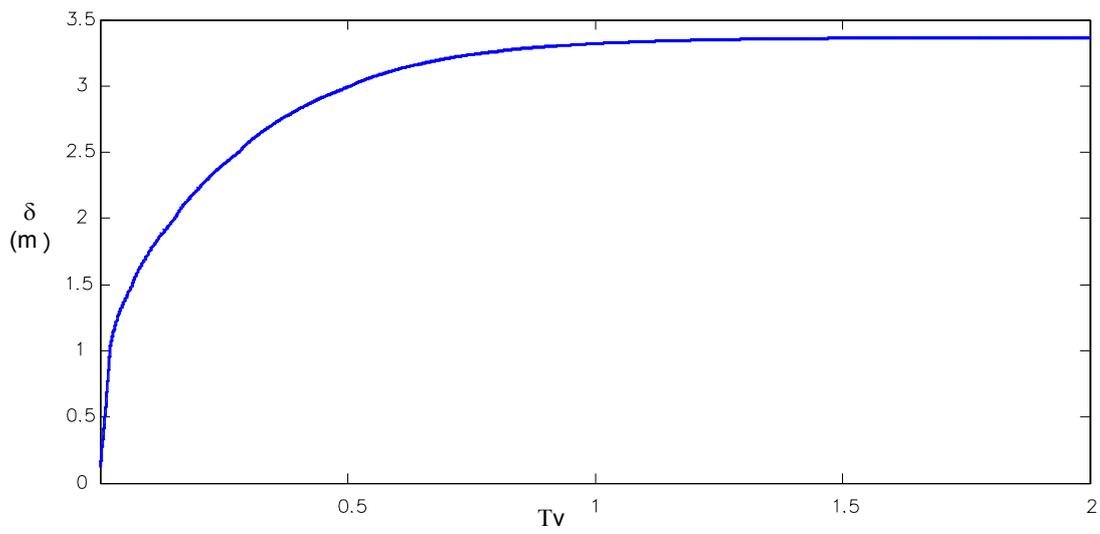


Figura IV.3. Desplazamiento de las partículas superiores del modelo en función del tiempo adimensional  $Tv$ .

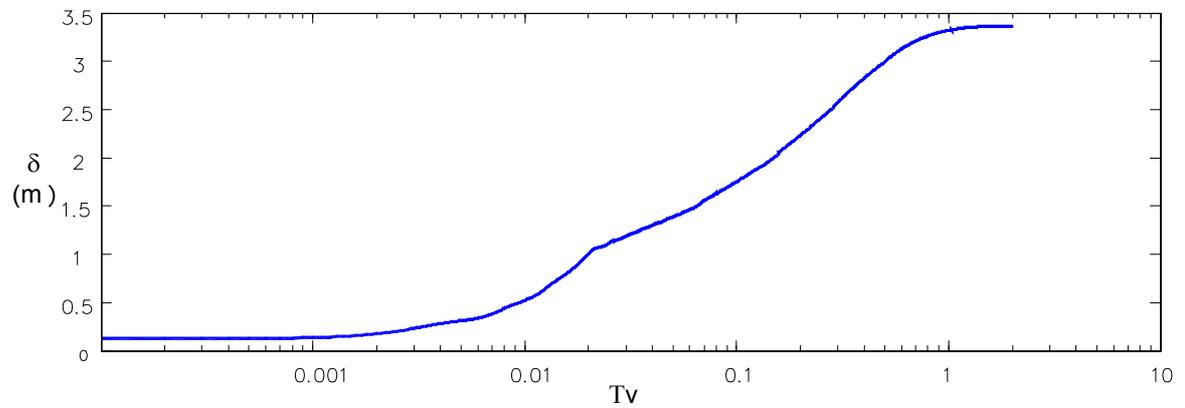


Figura IV.4 Desplazamiento de las partículas superiores del modelo en función del tiempo adimensional  $Tv$  en escala logarítmica.

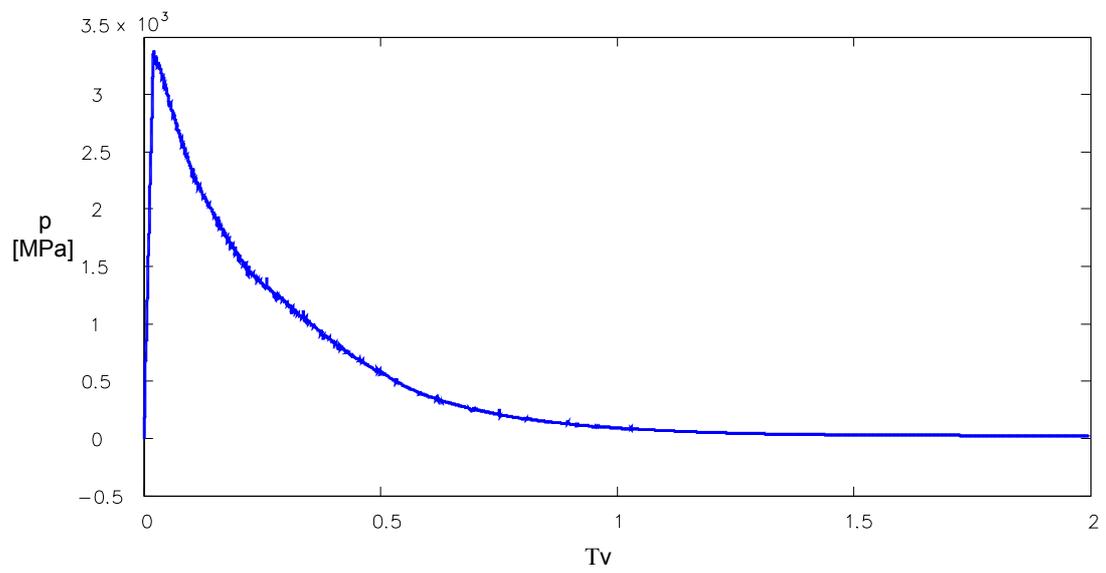


Figura IV.5. Presión de poros de una partícula en la mitad del estrato para la configuración original en función del factor de tiempo adimensional  $T_v$ .

### IV.3 Problema de muro elástico impulsado por un líquido.

Para estudiar un problema bidimensional de grandes desplazamientos con el algoritmo explícito desarrollado y al mismo tiempo evaluar la estabilidad del esquema de cálculo de las fuerzas internas con un líquido cuasi-incompresible se ha resuelto el problema que se muestra en la Figura IV.6. Consiste en un muro elástico ó dique empotrado en su base sometido a la presión de un líquido pesado, con un módulo de compresibilidad igual al del agua que, una vez establecido el equilibrio, se libera en forma instantánea suprimiendo la condición de vínculo de los nudos en la base en el sentido horizontal. El modelo se construyó con 9 partículas por celda y sus dimensiones se muestran en la figura. En la Figura IV.7 se muestran las configuraciones del modelo de partículas en algunos instantes de tiempo posteriores a la liberación de la base y el movimiento del dique junto con el del líquido.

Se puede observar que el procedimiento descrito en el Capítulo II para evaluar las fuerzas internas, que se calculan con el promedio de las tensiones en las partículas que se encuentran en una celda y el gradiente calculado en el centro del elemento, resulta razonablemente estable como puede comprobarse en el gráfico de la Figura IV.8 que muestra la velocidad en función del tiempo de una partícula del dique y en la Figura IV.9 que muestra la distribución de presiones para un paso de la solución. Si en cambio se utiliza el algoritmo original del MPM se comprueba que el comportamiento del modelo es más inestable como se puede ver en la Figura IV.10 donde se comparan la velocidad de la misma partícula del dique para el procedimiento original del MPM y el procedimiento descrito en el capítulo II.

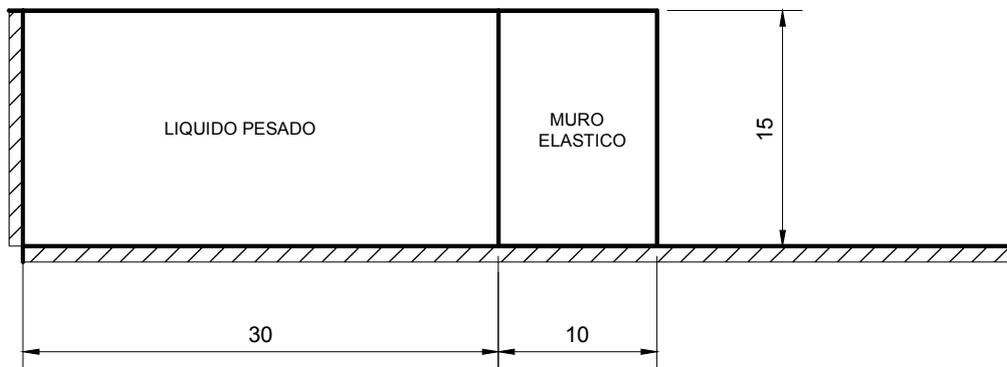


Figura IV.6. Problema de muro elástico impulsado por líquido.

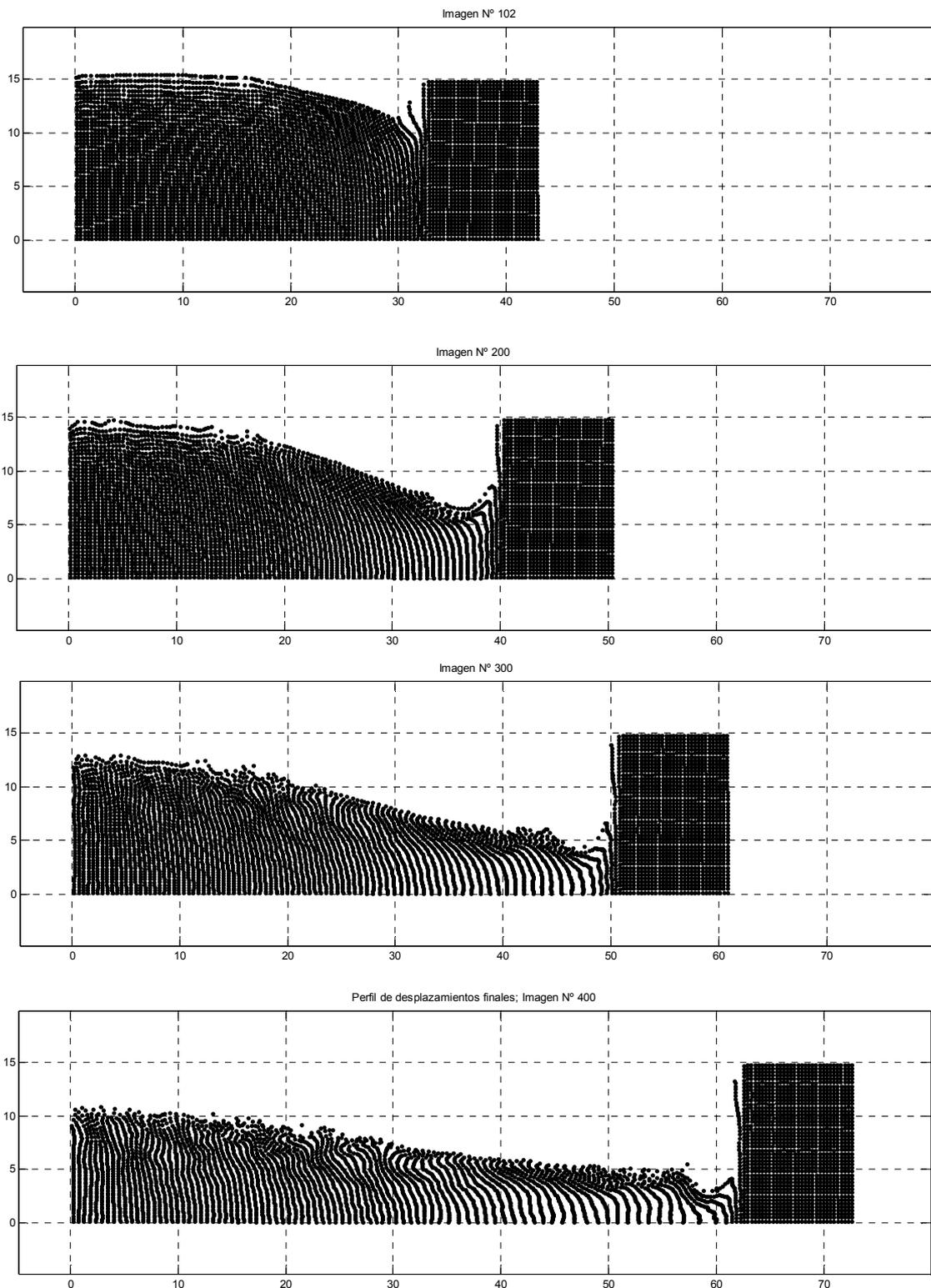


Figura IV.7. Desplazamientos de un muro por empuje de líquido.

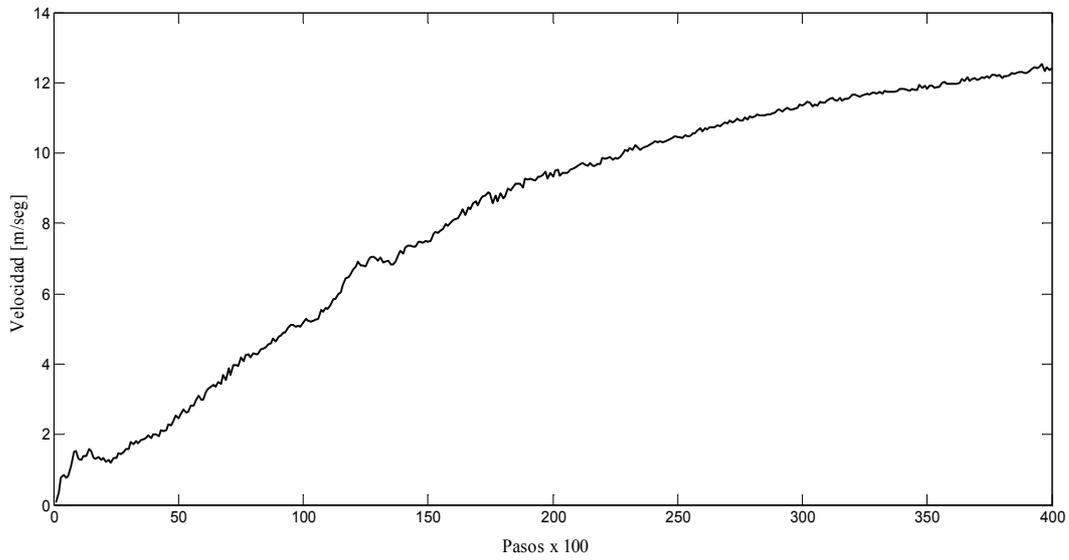


Figura IV.8. Velocidad horizontal de una partícula ubicada en el muro.

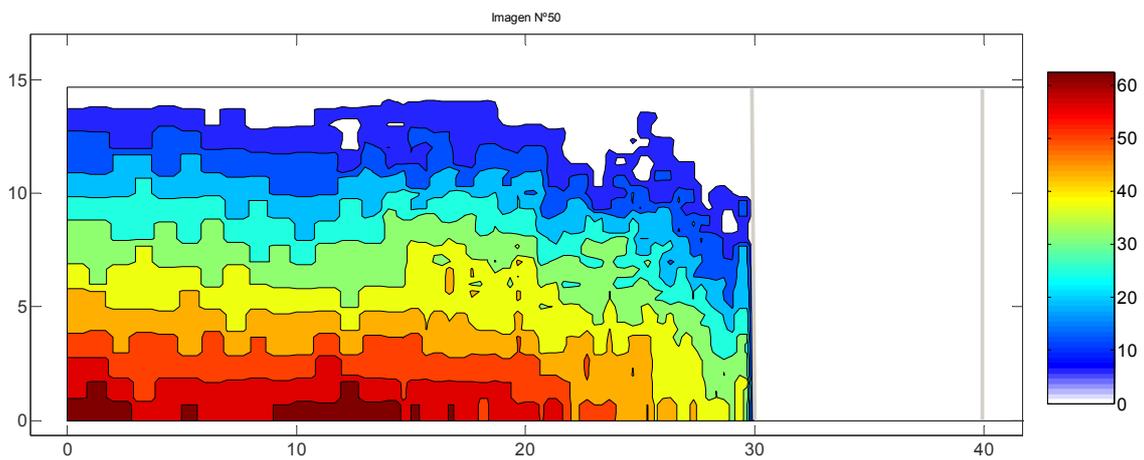


Figura IV.9. Distribución de presiones para el paso 5000 graficadas en la posición inicial de las partículas.

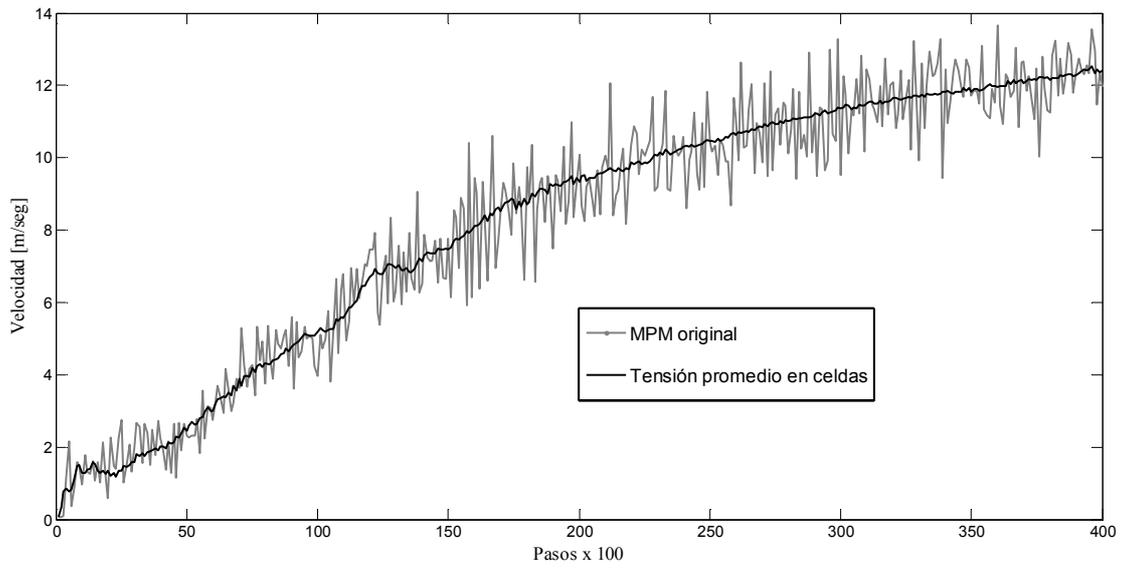


Figura IV. 10. Comparación de la velocidad horizontal de una partícula ubicada en el muro

## V. ANÁLISIS DE LA FALLA PROGRESIVA DE LA PRESA DE AZNALCÓLLAR. (Zabala y Alonso, 2010).

La presa de residuos mineros de Aznalcóllar falló en forma repentina y catastrófica en abril de 1998 (Alonso, E. E. & Gens, A. ,2006a). Esta presa se construyó en forma continua a partir del año 1978 hasta su colapso. La Figura V.1 muestra una sección transversal del deslizamiento interpretada de datos de perforaciones y de la topografía de superficie. La presa falló por su fundación con una superficie de deslizamiento prácticamente horizontal y se desplazó alrededor de 50 m permitiendo el vertido de colas piríticas acidas contenidas en la laguna sur al Rio Agrio, causando un grave daño ambiental. Los materiales de fundación se detallan en la Tabla V.I.

Tabla V.I. Materiales de fundación de la presa.

Material	Prof. (m)
Gravas y arenas del Rio Agrio	0-4
Arcillas marinas carbonatadas de alta plasticidad (margas azules del Guadalquivir)	4-75
Gravas y areniscas.	75-82
Pizarras	>82

A partir de los estudios de campo y los análisis realizados (Alonso, E. E. & Gens, A. 2006a y Gens, A. & Alonso, E. E. 2006) se ha concluido que la presa ha fallado por la combinación de las siguientes circunstancias:

- a- Muy baja permeabilidad de la arcilla y por consiguiente persistencia de altas presiones de poros en la fundación durante la construcción del dique y llenado de la balsa hasta el colapso.
- b- Comportamiento cuasi-frágil de la arcilla con dos mecanismos diferentes de ablandamiento. Primero una caída brusca de la resistencia bajo deformación asociada a pérdida de cementación y posible rotura microestructural, que se ha observado en ensayos en la caja de corte para desplazamientos del orden de 1mm, y luego a partir de este desplazamiento, un segundo mecanismo con disminución paulatina de resistencia. Este comportamiento se ha interpretado

como una pérdida de cohesión en la superficie de deslizamiento ó fractura que ocurre prácticamente sin desplazamiento relativo, para la escala del problema, y una reducción menos brusca del ángulo de fricción que termina en un ángulo de fricción residual para grandes desplazamientos.

- c- Método de construcción con recrecimiento hacia aguas abajo que genera en el pie del talud tensiones de corte cada vez mayores, sin aumento de resistencia en la misma proporción por el proceso de consolidación asociado, combinado con una variación brusca en el ritmo de construcción por aumento rápido de ancho de coronamiento del dique, durante una etapa de la obra e inclinación pronunciada del talud de aguas abajo.

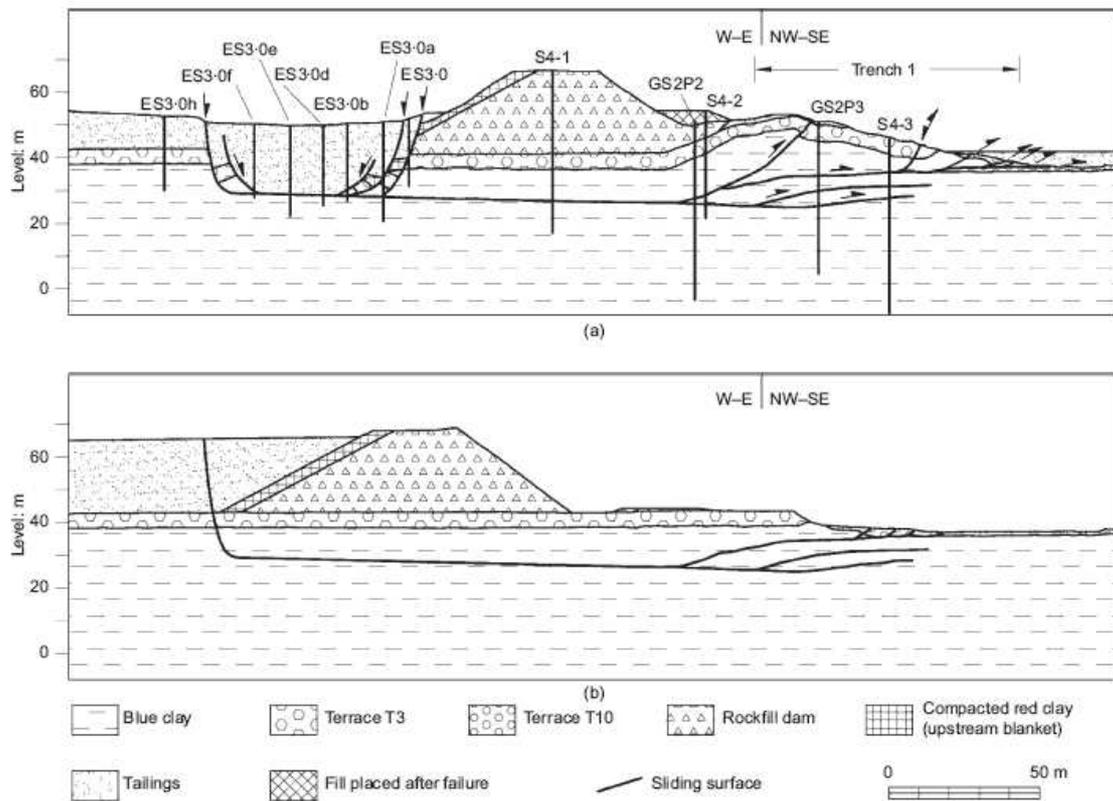


Figura VI.1. Sección transversal del deslizamiento

- a- Geometría antes del deslizamiento como se interpreta de datos de perforaciones y de la topografía de la superficie.
- b- Reconstrucción de la posición de la superficie de deslizamiento antes del colapso. (Alonso, E.E & Gens, A., 2006a)

Estas características del caso han generado una falla de tipo progresiva cuyo mecanismo de rotura no se simula adecuadamente sin recurrir a los métodos numéricos. El modelo

numérico debería ser capaz de simular el comportamiento acoplado hidromecánico durante la construcción de la presa, el comportamiento cuasi-frágil de la arcilla de fundación, y de obtener una solución que no dependa de la malla utilizada. Además se requiere una discretización adecuada que permita capturar las superficies de falla. La arcilla marina de la fundación es muy homogénea y las capas de sedimentación que buzan 2°-4° en la dirección del desplazamiento de rotura prácticamente no se distinguen. En los artículos de las referencias (Alonso, E. E. & Gens, A. 2006, Gens, A. & Alonso, E. E. 2006) se ha concluido que la mayor parte de la superficie de rotura ha seguido un plano de sedimentación. En base un análisis convencional de elementos finitos realizado se ha opinado que alguna disminución de resistencia a lo largo de los planos de sedimentación, comparada con la resistencia pico de la matriz del material, fue necesaria para iniciar la rotura. El desarrollo de la superficie de rotura se atribuyó a un mecanismo de rotura progresiva que comenzó en una etapa temprana de la construcción del dique y que terminó en una rotura repentina que no fue precedida de señales observables. Esta interpretación se basó esencialmente en un análisis de consolidación elástico de las condiciones de tensión durante el avance de la construcción y alguna evidencia obtenida de los resultados de los análisis de equilibrio límite. El análisis de elementos finitos que se reporta en Gens y Alonso (2006) no fue capaz de simular la ubicación de la superficie de rotura en su posición real que se ha definido muy bien mediante las observaciones de campo. Tampoco fue capaz de seguir el desarrollo de la rotura progresiva. Para reproducir la falla se tuvo que introducir artificialmente una capa débil en la posición de la superficie de rotura porque de otra forma el análisis de elementos finitos predecía una falla de tipo circular. En el momento que se realizaron los análisis reportados se consideró que la presencia de un plano de sedimentación que tuviera una resistencia reducida ó dañada inducida por tensiones de corte previas pudo ser la causa de la ubicación real de la superficie de falla y de la iniciación del mecanismo de rotura progresiva. En cambio el análisis simple de consolidación elástica realizado brindaba argumentos para una explicación alternativa que considera que la ubicación de la superficie de falla fue una consecuencia de la geometría del problema, del proceso de consolidación y del comportamiento constitutivo de la arcilla de fundación. Por lo tanto dos aspectos importantes de la falla de Aznalcóllar: la razón de la ubicación y forma de la superficie de deslizamiento y el proceso de falla progresiva no recibieron una respuesta adecuada.

### Modelo de partículas de la presa de Aznalcóllar.

La Figura V.2 muestra el dominio considerado para la simulación de la falla progresiva de la presa. Se ha utilizado una malla cuadrada de 1m x 1m que cubre todo el dominio de la solución. La malla, con un tamaño de 300 x 102 celdas, se extiende en el espacio bidimensional aun a las zonas vacías donde no existe material. Los materiales de la fundación, presa y relleno de residuos se discretizan con partículas. Para obtener los resultados que se muestran más adelante se han utilizado dos modelos, uno que corresponde a considerar 1 partícula inicial por celda con 26915 partículas y otro con 4 partículas por celda, en las zonas donde se producen desplazamientos importantes, que alcanza 50540 partículas. Entre uno y otro modelo no existen diferencias de precisión en los resultados por mejora en la discretización porque la malla utilizada para ambos es la misma. El número mayor de partículas por celda permite que no se produzcan “huecos” en la discretización ó desconexiones de partículas que se generan cuando durante la solución queda alguna celda sin partículas. Los nudos del borde de la fundación se consideraron fijos.

Para simular el proceso de construcción de la presa se han utilizado 15 etapas cuya geometría se muestra en la Figura V.3. En la Tabla V.II se describe la evolución de esa geometría en el tiempo a medida que se aplican las etapas consideradas para su construcción

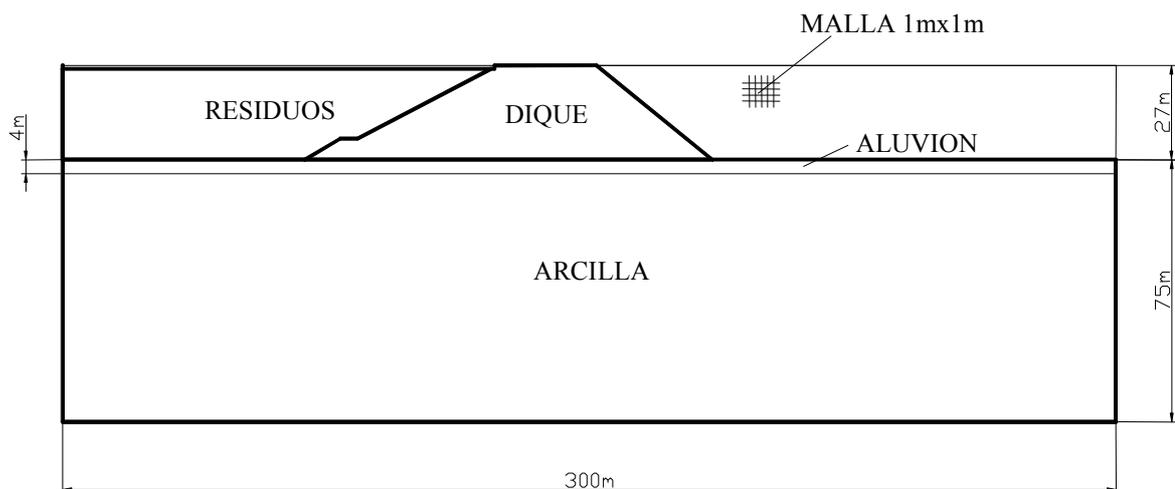
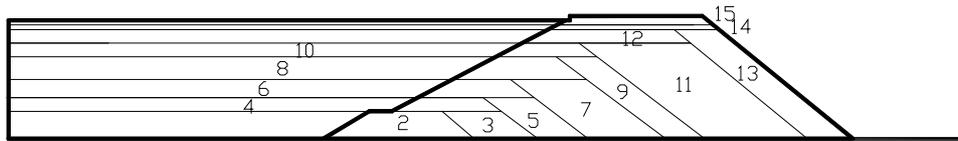


Figura V.2. Presa de Aznalcóllar. Dominio considerado en el modelo.



1

Figura V.3. Etapas de construcción

Tabla V.II: Construcción de la presa.

Etapa	Altura presa (m)	Altura residuos (m)	Ancho coronamiento (m)	Tiempo (días)
1	0	0	0	0
2	6	6	16	100
3	6	6	29	600
4	9	9	14	1125
5	9	9	25.5	1525
6	13	13	14	2005
7	13	13	29.4	2280
8	18	18	14	2430
9	18	18	22.1	3025
10	21	21	14	3525
11	21	21	37	3835
12	24	24	27.7	3985
13	24	24	37.5	4135
14	25	25	34.2	6600
15	27	26	29	7300

La estabilidad numérica de la solución, en la versión explícita del MPM, exige que se satisfaga la condición de Courant-Friedrichs-Levy (CFL). Para ello el intervalo de integración  $\Delta t$  debe ser menor que el intervalo crítico  $\Delta t_{crit}$

$$\Delta t_{crit} = \frac{l}{c_p} \quad (V.1)$$

$l$ : dimensión de la malla

$c_p$ : velocidad de la onda de presión de la mezcla suelo-fluido

$$c_p = \sqrt{\frac{Q + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad (V.2)$$

$Q$  : Módulo de compresibilidad combinado de las fases sólida y fluida.

$G$  : Módulo de corte de la fase sólida.

$\rho$  : Densidad de la mezcla suelo fluido.

Esta condición impone un intervalo de tiempo pequeño en general y más pequeño aún en materiales saturados. En este caso el intervalo crítico es completamente incompatible con los tiempos de la construcción y consolidación. El problema durante la construcción es cuasi-estático ya que las fuerzas de inercia en esa etapa no son relevantes porque las aceleraciones son muy pequeñas. Es por ello que para las etapas de construcción se ha escalado la densidad de los materiales manteniendo sus pesos específicos y por lo tanto, reduciendo la aceleración de la gravedad en la misma escala. Esta técnica se completa con la adición de amortiguamiento artificial a las ecuaciones discretas para suprimir la respuesta dinámica (ver relajación dinámica). En el proceso de construcción se ha utilizado un intervalo de tiempo  $\Delta t = \frac{1}{4} dia$ .

Al final de la construcción se obtiene un estado de tensión, presión de poros y estado de plastificación en las partículas con reducción de resistencias cuando corresponde. A partir de ese momento se retiran el escalado de la masa y de la aceleración de la gravedad, y el amortiguamiento necesario para obtener soluciones cuasi-estáticas para cada etapa de la construcción y se utiliza un  $\Delta t$  compatible con la condición CFL. El modelo pasa a un comportamiento dinámico prácticamente sin disipación de presiones de poros que simula la rotura utilizando muchos pasos de solución muy pequeños y muy pocos segundos de tiempo real.

### **Ecuaciones constitutivas de los materiales**

Los residuos almacenados en la balsa y el material de aluvión se han modelado utilizando la ecuación constitutiva de Mohr-Coulomb no asociada. El dique se ha considerado elástico en razón de su comportamiento durante la falla la presa, que ocurrió sin deformaciones plásticas observables. El dique se movió esencialmente como un cuerpo rígido. Para la arcilla se ha utilizado una modificación de la ecuación constitutiva de Mohr-Coulomb no asociada. La disminución brusca de resistencia al

alcanzar la resistencia pico, observada en los ensayos realizados en caja de corte (Figura V.4) (Alonso E.E. & Gens A., 2006a), se simula anulando la cohesión cuando el estado de tensión alcanza la superficie de fluencia de Mohr-Coulomb. La disminución progresiva del ángulo de fricción se modela utilizando una función exponencial decreciente con la deformación de corte plástica equivalente  $\varepsilon_{eq}^p$  desde su valor pico (24°) hasta el valor residual (11°) (Figura V.5) (Alonso E.E. & Gens A., 2006).

$$\phi' = \phi'_{res} + (\phi'_{peak} - \phi'_{res}) e^{-\eta \cdot \varepsilon_{eq}^p} \quad (V.3)$$

donde  $\phi'_{peak}$  y  $\phi'_{res}$  son los ángulos de fricción efectivos pico y residual y  $\eta$  es un parámetro constante.

La deformación plástica equivalente se define como:

$$\varepsilon_{eq}^p = \left( \frac{2}{3} \mathbf{e}^p : \mathbf{e}^p \right)^{1/2} \quad (V.4)$$

$\mathbf{e}^p$  : tensor de pequeñas deformaciones desviadoras

Los valores de coeficiente de consolidación y la permeabilidad derivada de este coeficiente se obtuvieron de los artículos de referencia ( $c_v = 0.001 \text{ cm}^2/\text{s}$ ;  $k = 2 \cdot 10^{-11} \text{ m/s}$ ). La capa superior de material aluvial y el acuífero inferior en contacto directo con la arcilla azul del Guadalquivir constituyen contornos de libre drenaje para la arcilla. Los parámetros utilizados en la modelación se resumen en la Tabla V.III. El alto valor de peso unitario saturado del material de relave minero se debe a la presencia de piritita como principal mineral constituyente. Se adoptó un ángulo de dilatación cero.

Con el objetivo de regularizar en forma aproximada el problema se ha utilizado el concepto de fractura distribuida en un elemento de la malla. El trabajo plástico disipado en un elemento de la malla debe ser igual a la energía de fractura disipada en la grieta ó superficie de deslizamiento. Por lo tanto el módulo plástico de ablandamiento depende del tamaño de la malla. La resistencia de esta fractura distribuida se supone función del desplazamiento relativo en la discontinuidad. Se ha calibrado la constante de la función exponencial  $\eta=100$ , utilizada para simular la disminución del ángulo de fricción, de

manera de obtener una relación tensión de corte-desplazamiento, en la zona plástica de ablandamiento por deformación para el tamaño fijo del elemento de la malla utilizado (1m x 1m), que corresponda aproximadamente a la relación tensión de corte-desplazamiento de los ensayos de corte directo de la arcilla. (Figura V.6)

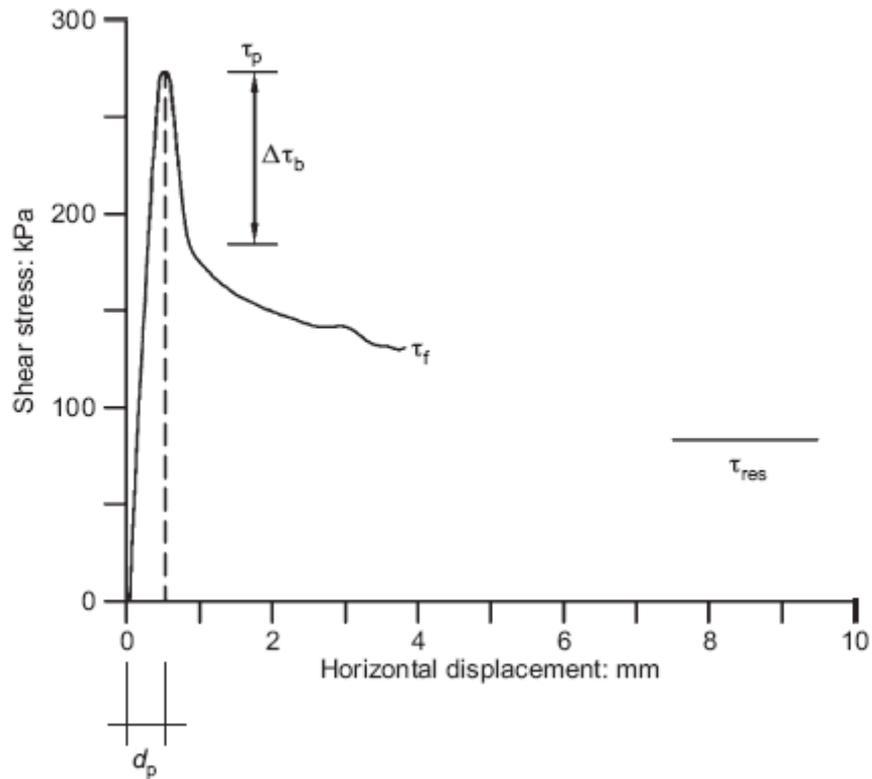


Figura V.4. Ensayo de corte directo de una muestra de la arcilla de fundación. Tensión normal efectiva 400 kPa. (Alonso E.E. & Gens A., 2006)

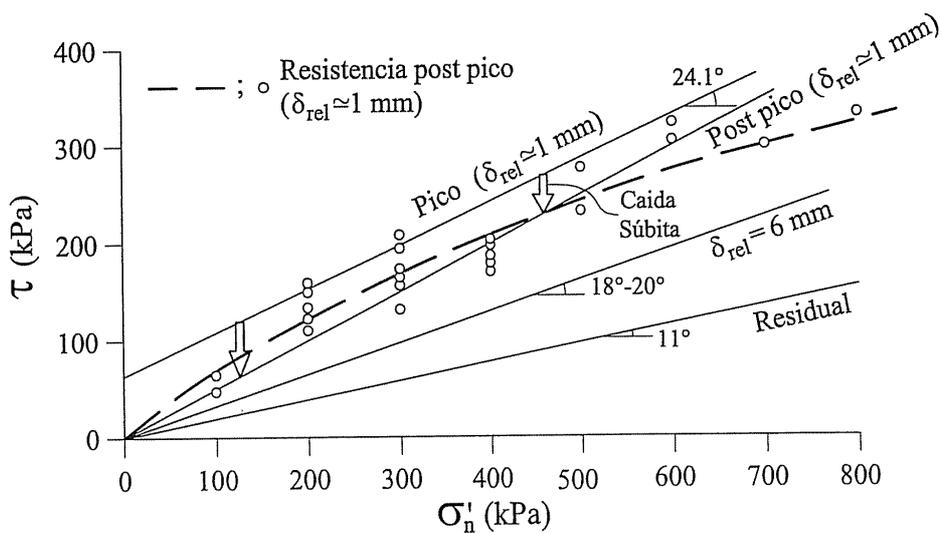


Figura V.5. Síntesis de la resistencia al corte de la arcilla a partir de ensayos de corte directo (Alonso E.E. & Gens A., 2006)

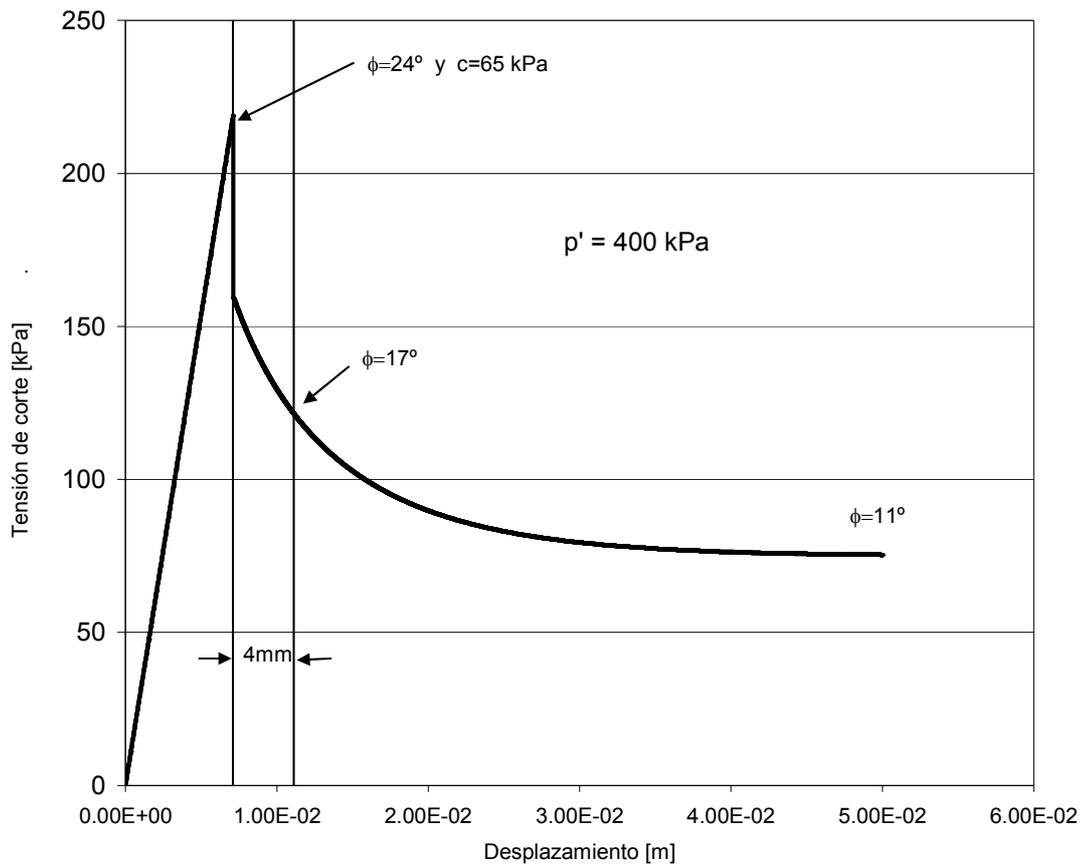


Figura V.6. Relación tensión de corte-desplazamiento para una partícula de arcilla en una celda de 1mx1m.

Tabla V.III: Parámetros de los materiales utilizados en la modelación

Material	$\gamma_s$ [kN/m <sup>3</sup> ]	C [kPa]	$\phi_{max}$	$\phi_{res}$	$\eta$	k [m/seg]	Cv [cm/seg <sup>2</sup> ]
Arcilla	20	65	24	11	100	2. e-11	0.001
Aluvi3n	20	0	35	35	-	2. e-06	-
Dique	20	Elástico	-	-	-	-	-
Residuos mineros	31	0	37	37	-	-	-

$\gamma_s$ : peso unitario saturado

C: Cohesi3n.

$\phi_{max}$  : Angulo de fricci3n m3ximo.

$\phi_{res}$  : Angulo de fricci3n residual

$\psi = 0$  : Angulo de dilatancia.

$\eta$ : constante

k=permeabilidad

$$\phi = \phi_{res} + (\phi_{max} - \phi_{res}) \cdot e^{-\eta \cdot \varepsilon_{eq}^p}$$

$\varepsilon_{eq}^p$  : Deformación desviadora plástica equivalente

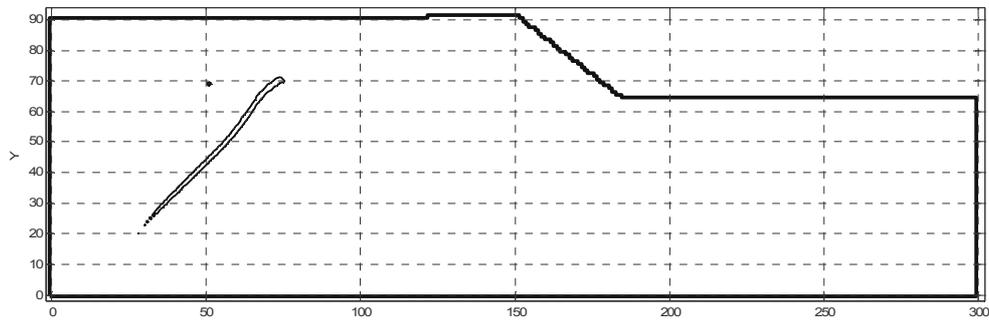
### **Simulación del proceso de construcción y rotura.**

Se han analizado dos casos diferentes manteniendo los valores de resistencia de los materiales y variando el coeficiente de empuje en reposo  $K_0$  de la arcilla de fundación para analizar su influencia en el proceso de rotura progresiva. Las tensiones horizontales no fueron medidas en la arcilla de fundación. El origen Miocénico de la arcilla de fundación y la actividad tectónica conocida (Alonso & Gens 2006a ) indican que el coeficiente de empuje  $K_0$  estaría cercano a 1. Los dos casos corresponden a  $K_0 = 0.5$  y a  $K_0 = 1.0$ .

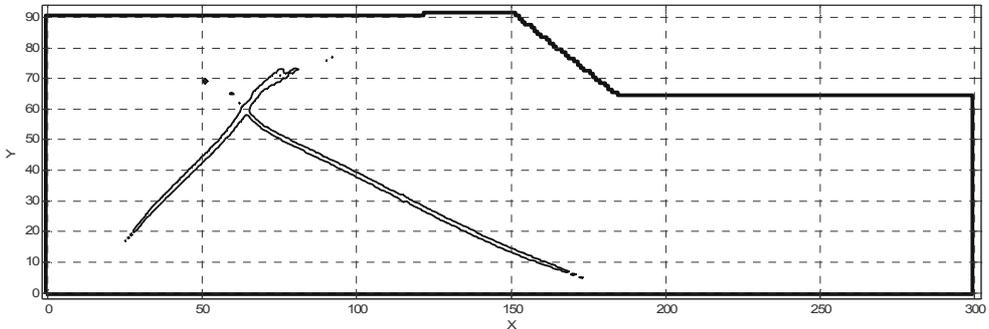
En la secuencia de Figuras V.7-a –V.7-g se muestran curvas de igual deformación plástica equivalente en las partículas para un coeficiente de consolidación  $C_v = 1 \times 10^3$  cm/seg<sup>2</sup> y un coeficiente de empuje en reposo  $K_0=0.50$ . Se han graficado dos niveles de deformación plástica equivalente: 1% y 5 %, para distinguir las zonas de mayor intensidad de deformaciones. El contorno correspondiente al 1% se establece primero, a medida que las deformaciones se acumulan se desarrolla un contorno más delgado del 5% dentro de las áreas encerradas por el contorno del 1%.

La Figura V.7-a muestra las deformaciones plásticas (contorno del 1%) del modelo al final de la etapa 12 cuando el dique alcanza una altura de 24m y el ancho del coronamiento es de 27.7m. Se muestra una zona de localización de deformaciones que asociamos a una primera superficie de deslizamiento ó “grieta” diagonal, debida a la aplicación de la carga del relleno sobre la fundación Esta carga es una tensión total importante (750 kpa) aplicada por los residuos a la fundación. En la siguiente figura (V.7-b) aparece otra zona diagonal aproximadamente perpendicular a la inicial. Cuando se completa la etapa 14 (Figura V.7-c) aparece al pie del talud una “superficie” que avanza desde aguas abajo hacia aguas arriba. Esta “superficie” se convierte en horizontal a una profundidad de 18 m desde la superficie del terreno (Figura V.7-d). Las dos bandas diagonales iniciales evolucionan definiendo una “cuña” activa aguas arriba del dique. En la segunda etapa del análisis la “grieta” horizontal sigue avanzando hacia aguas arriba hasta conectarse con las grietas diagonales originadas al principio del análisis (Fig.V.7-e, V.7-f). En este momento un mecanismo cinemáticamente admisible se desarrolla completamente. Es interesante notar el desarrollo de una zona de corte en

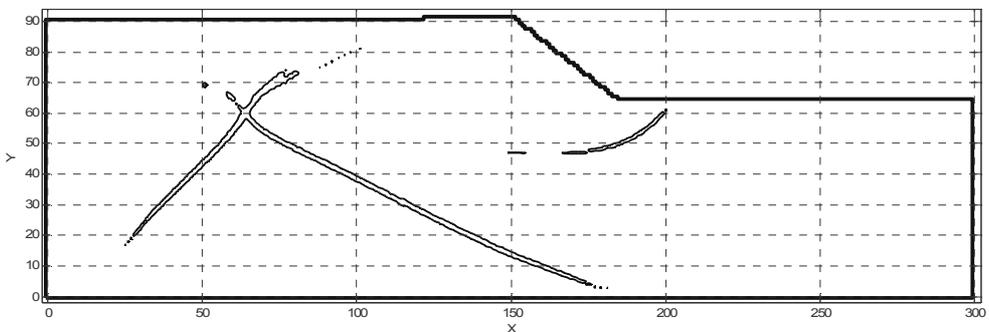
el contacto entre el dique y los residuos. Este contacto fue responsable de la falla de los residuos ubicados directamente sobre el talud de aguas arriba cuando el dique se deslizó hacia delante. Luego al final del análisis aparecen otras zonas de localización de deformaciones complementarias que “conectan” zonas débiles en el modelo. El patrón de “agrietamiento” obtenido está influenciado por los contornos del modelo a medida que las grietas diagonales se propagan. (Fig. V.7-g). El modelo predice también un mecanismo circular de falla más profundo conectado también con las zonas iniciales de agrietamiento diagonal. La zona “pasiva” de salida aparece muy cortada y varias bandas subparalelas se desarrollan.



a)

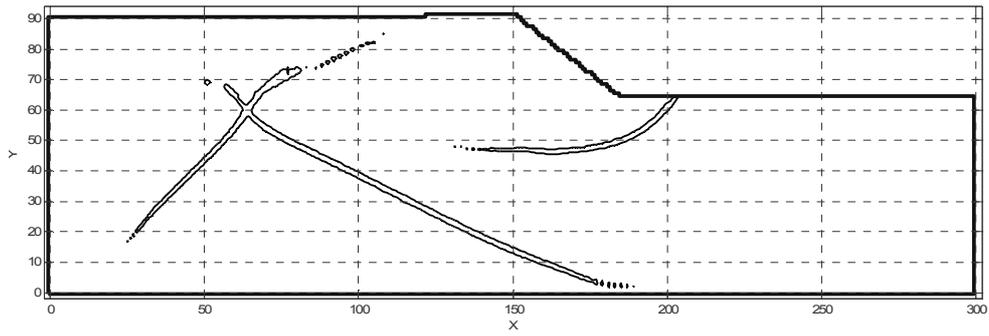


b)

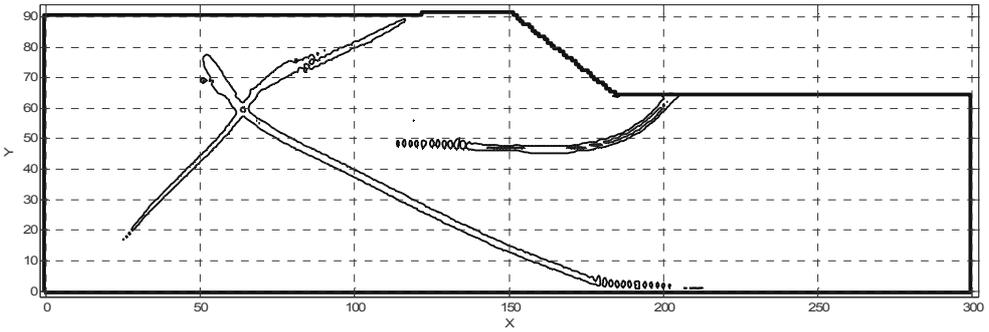


c)

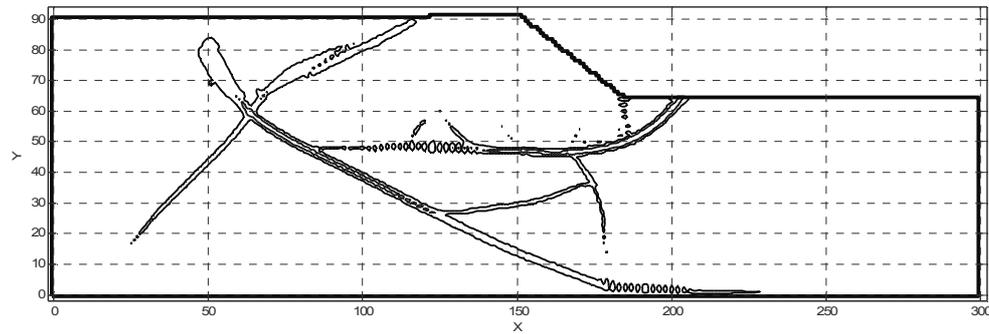
Figura V.7: Secuencia de curvas de igual deformación plástica equivalente 1% y 5%.  
 $C_v=0.001$  y  $K_0=0.5$



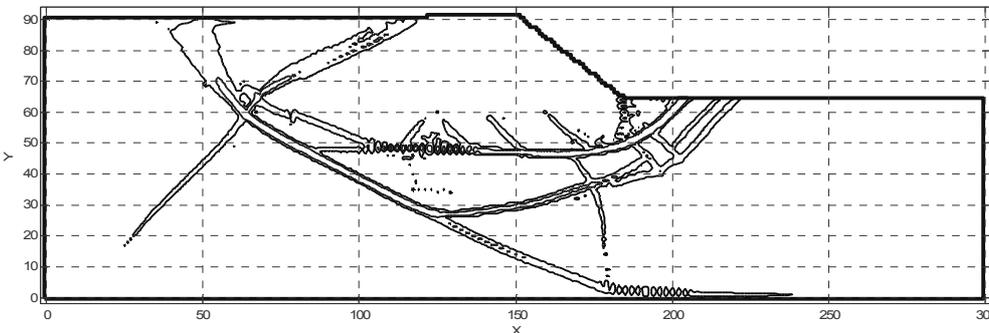
d)



e)



f)



g)

Figura V. 7: Secuencia de curvas de igual deformación plástica equivalente 1% y 5%.  
 $C_v=0.001$  y  $K_0=0.5$

La Figura V.8 muestra curvas de nivel del ángulo de fricción al final del análisis. Se han graficado las curvas correspondientes a un valor intermedio de  $17^\circ$  y al valor del ángulo residual igual a  $11^\circ$ . Como referencia un ángulo de fricción efectivo cercano a  $17^\circ$  fue identificado por Gens y Alonso (2006) como el ángulo promedio que resulta en un factor de seguridad igual a 1 en un análisis convencional de equilibrio límite (método de dovelas de Morgenstern-Price) cuando se considera la superficie de falla real derivada de observaciones de campo. Las zonas de ángulo de fricción igual ó menor que  $17^\circ$  siguen, como es de esperar, el patrón de agrietamiento que indican las Figuras V.7 a-g de contornos de deformación plástica equivalente. Las curvas correspondientes a  $11^\circ$  tienen una distribución similar pero se extienden menos en la zona agrietada. Estos resultados confirman que un mecanismo de falla completo puede desarrollarse con un ángulo de fricción promedio mayor a  $11^\circ$ .

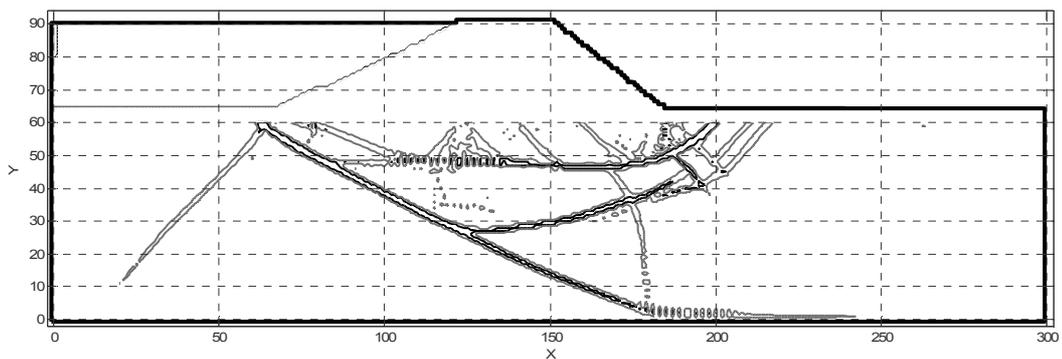
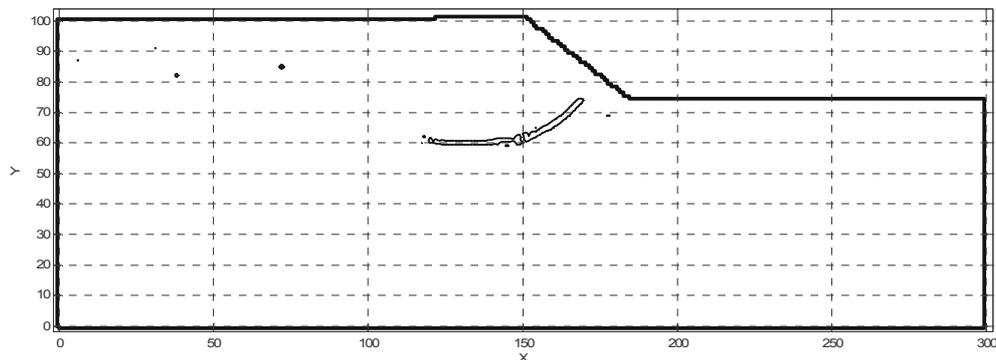


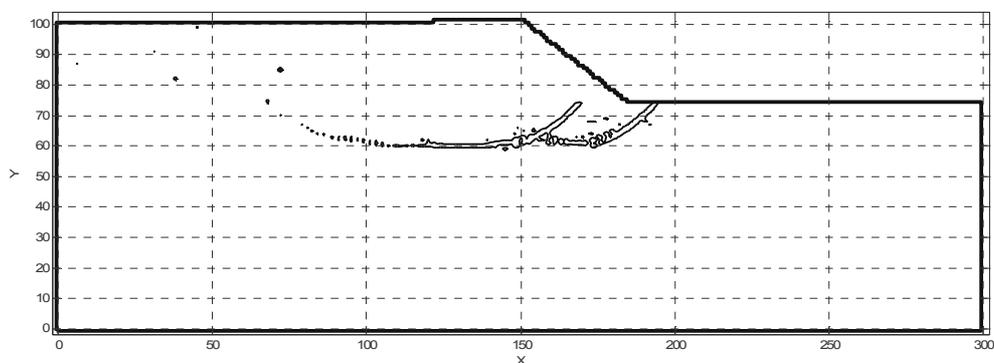
Figura V.8: Curvas de nivel de igual ángulo de fricción en las partículas.

Las Figuras V.9-a a V.9-e muestran curvas de igual deformación plástica equivalente para un  $K_0=1$  valor que podría resultar aceptable en vista de la historia geológica de la arcilla marina. Bajo esta hipótesis la arcilla de fundación está libre inicialmente de tensiones desviadoras. En este caso no se observa un “agrietamiento” en sentido diagonal en la zona de la balsa de residuos. Esto es una consecuencia directa del estado inicial de tensiones. La figura V.9-a muestra el patrón de “agrietamiento” al final de la etapa 12. Las figuras V. 9-b y V.9-c corresponden a estados intermedios durante las etapas 13 y 14. La zona inicial de concentración de deformaciones se inicia al pie del talud al final de la etapa 12, se propaga hacia aguas arriba en forma circular transformándose rápidamente en horizontal. Su progresión hacia aguas arriba se muestra en las figuras V.8-a, V.8-b y V.8-c. El resultado más interesante es que la superficie de deslizamiento horizontal se ubica a una profundidad de 15m muy cercana a la

profundidad real del plano de deslizamiento observado. Las Figuras V.9-b y V.9-c corresponden a estados intermedios durante las etapas 13 y 14, donde aparece otra zona de concentración de deformaciones de tipo circular al pie del talud mientras se sigue propagando hacia aguas arriba la zona inicial. La banda de corte horizontal se dobla hacia arriba en la posición del pie del talud de aguas arriba del dique. Luego se propaga en el relleno de residuos con un ángulo de aproximadamente  $60^\circ$  con la horizontal. Una cuña activa se genera en el depósito de residuos al final del periodo de simulación. La Figura V.9-d corresponde al final de la etapa 14 y la Figura V.9-e al final del análisis. En este caso no se observan influencias de los bordes por tener el estrato de arcilla una tensión de corte inicial menor que impide el “agrietamiento” para profundidades mayores. El mecanismo de deslizamiento que indica la configuración final de deformaciones plásticas equivalentes es muy similar al observado en la falla real. La zona pasiva en el pie del talud se compone de un número de superficies de ruptura subparalelas. Esta característica fue observada en las trincheras excavadas después de la falla. (Figura V.1)



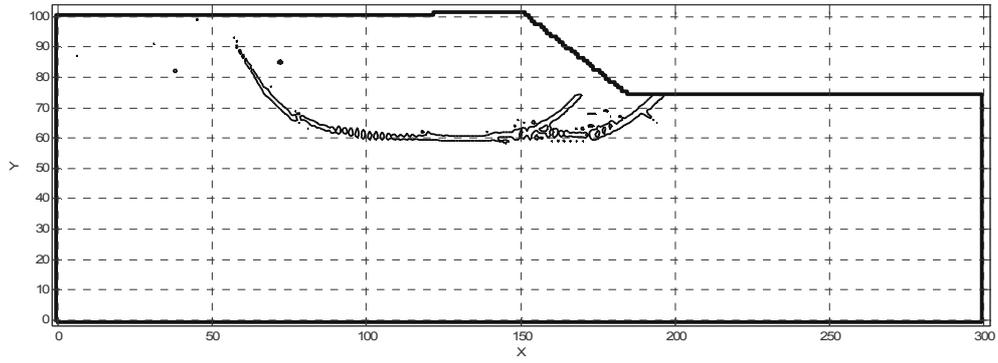
a)



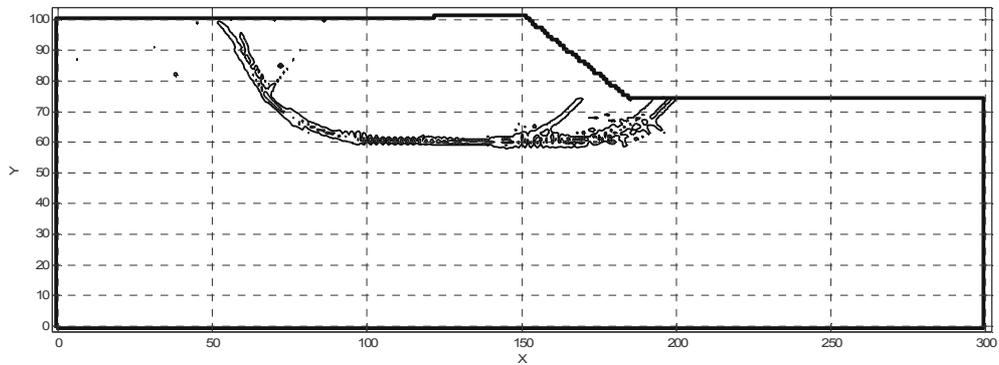
b)

Figura V.9: Secuencia de curvas de igual deformación plástica equivalente 1% y 5%.

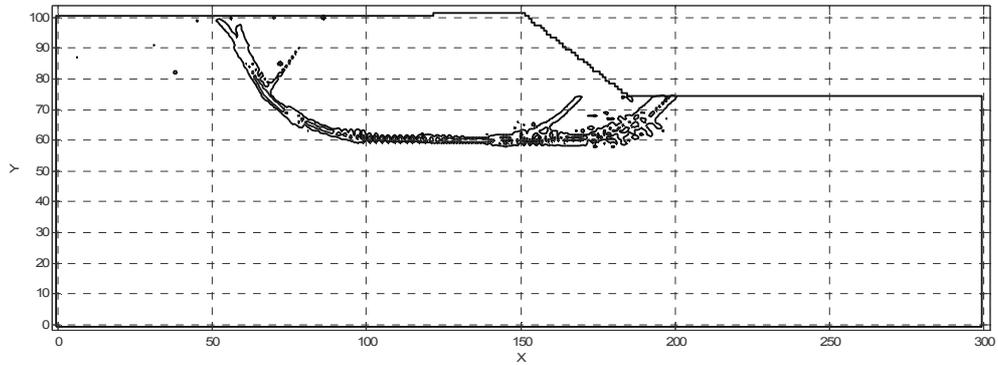
$$K_0 = 1$$



c)



d)



e)

Figura V.9: Secuencia de curvas de igual deformación plástica equivalente 1% y 5%.

$K_0 = 1$

### Distribución de presiones de poros

Las presiones de poros no fueron registradas durante la vida del dique. Piezómetros de cuerda vibrante se instalaron rápidamente luego de la falla en secciones transversales del dique que permanecieron estables y también bajo las secciones de dique fallado y

deslizado. Las mediciones se pudieron reproducir con buena precisión con un modelo de consolidación unidimensional. También se comprobó que un modelo de elementos finitos bidimensional acoplado proporcionaba esencialmente los mismos resultados (Gens y Alonso, 2006).

Se ha aplicado, en el borde inferior del estrato de fundación modelado, una condición de contorno de presión hidrostática, que se ha considerado fija durante la construcción. Esta hipótesis se basa en datos de campo del acuífero que se ubica bajo el estrato de arcilla. Un piezómetro profundo instalado en las arenas bajo la arcilla midió una presión de poros equivalente a la altura de la capa de arcilla. En el borde superior la condición de contorno es variable e igual, para aguas arriba del dique, a la altura de los residuos, que siempre se mantuvieron bajo agua para cada etapa. Aguas abajo de la pantalla vertical impermeable se consideró una superficie de agua libre en la parte superior de la capa de material aluvial.

La Figura V.10 muestra la distribución de presiones de poros para la arcilla de fundación en una vertical por la zona de la balsa de residuos, lejos del dique, para el fin de las etapas 9,13 y 15. Con el fin de comparar se han graficado además las presiones calculadas con la solución de Terzaghi para la misma secuencia de construcción. Además se grafica un punto para la etapa 15 que representa la presión medida a la profundidad aproximada de la superficie de deslizamiento en una sección no fallada al norte de la zona de falla. El ajuste es bueno. La disipación unidimensional debería sobreestimar de alguna forma las presiones de poros reales porque no incluye efectos bidimensionales. Esto se refleja en las figuras. Las presiones de poros calculadas se incrementan en profundidad debido al efecto combinado de la distribución de presión hidrostática inicial y de las cargas del material de residuos y del dique. Los gráficos muestran también el efecto de drenaje del acuífero inferior aunque esto no afecta las presiones de poros desarrolladas en la superficie de deslizamiento.

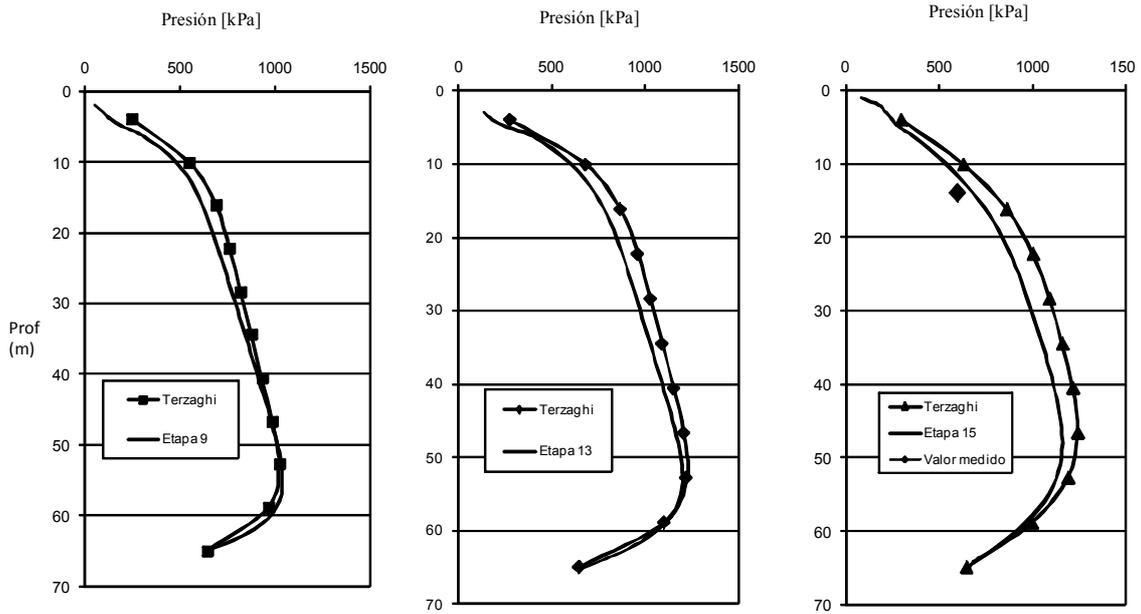


Figura V.10. Distribución vertical de presión de poros en la arcilla al final de las etapas 9, 13 y 15.

La Figura V.11 muestra la respuesta de presión de poros en función del tiempo para una partícula ubicada en la zona de la balsa de residuos, lejos del dique, a la profundidad de la superficie de rotura real observada (14 m desde la superficie del terreno original). La disipación de presiones a lo largo de los años es muy limitada por la muy baja permeabilidad de la arcilla. Se observan los incrementos de presión correspondientes a las etapas de construcción. Estos incrementos prácticamente resultan sin oscilaciones ya que se ha aplicado amortiguamiento artificial y también se nota la disminución de presión por efecto de la consolidación.

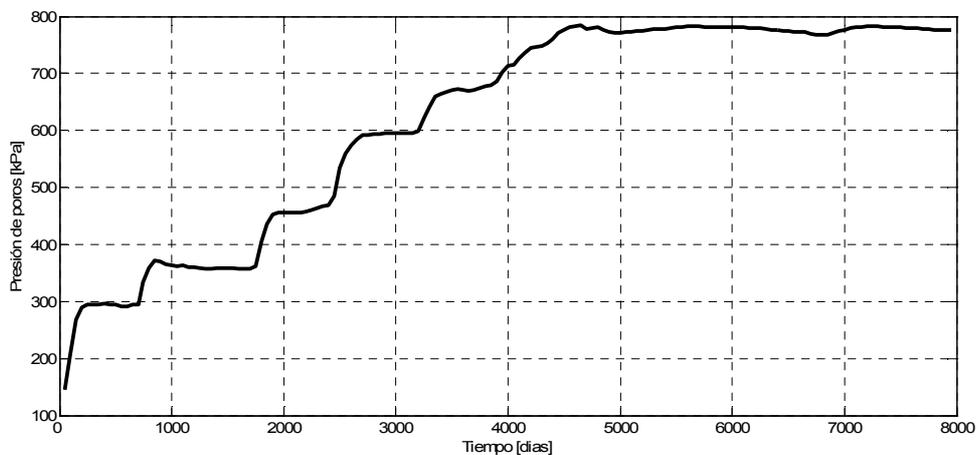


Figura V.11. Evolución de la presión de poros para una partícula en la zona de la balsa de residuos a una profundidad de 14 m desde el nivel de terreno.

### **Secuencia de rotura progresiva.**

Los contornos de deformación plástica graficados en la Figura V.9 para  $K_0 = 1$  muestran claramente el desarrollo de una superficie de deslizamiento que lleva eventualmente a la falla de la presa. El proceso se genera en un material marcadamente frágil y por lo tanto debería desarrollarse un fenómeno de rotura progresiva. Este fenómeno se analiza en este punto examinando la evolución del estado de tensión en la posición de la superficie de rotura a medida que el dique se construye. La secuencia de las Figuras V.12-a a V.12-f corresponde a tiempos particulares durante la construcción del dique: el final de las etapas 9, 10, 11, 12, 13 y 15. Se muestra además la forma del dique para cada una de esas etapas y el nivel del reservorio. Los números en las secciones transversales identifican las etapas de construcción. Los gráficos muestran los puntos para los que se alcanza, a medida que avanza la construcción, el 98% de la resistencia al corte. En esas figuras se han graficado contornos del cociente entre la tensión de corte calculada y la resistencia al corte, que evoluciona durante la solución, para valores comprendidos entre 0.98 y 1. Estos contornos marcan la posición de zonas falladas en la fundación. La resistencia puede corresponder a la resistencia pico, residual ó a condiciones intermedias luego de la resistencia pico.

La Figura V.12-a corresponde al final de la etapa 9 cuando la altura de la presa alcanza 18 m. En esta Figura aparece una zona bajo la presa donde se ha alcanzado la resistencia de la arcilla a una profundidad de 15m desde la superficie original del terreno, muy próxima a la posición real observada. Esta zona luego se propaga hacia aguas abajo y aguas arriba a medida que progresa la construcción. La rama de aguas abajo se tuerce hacia arriba y aflora en la vecindad del pie del talud de aguas abajo (Figura V.12c). Al final de la etapa 12 (Figura V.12d) la zona fallada se extiende esencialmente desde el pie del dique hasta aproximadamente la mitad de la distancia de la base del dique en dirección aguas arriba. En este momento la banda desarrollada en términos de deformación plástica equivalente acumulada se muestra en la Figura 9a. Las dos formas son similares como puede esperarse. El gráfico de la Figura V.12d muestra la existencia de una zona plana tensionada en la dirección hacia aguas arriba que se ampliará en las siguientes etapas (Figuras V.12e y V.12f). Paralelamente la banda de corte progresa en la dirección hacia aguas arriba y luego se tuerce.

La secuencia de rotura de la arcilla en puntos representativos de la superficie de falla se muestra en la Figura V.13. En esta figura se muestra la ubicación de los puntos [1] a [5] en la superficie de falla horizontal a la profundidad de 15 m. La numeración sigue la

secuencia de falla. En la Figura V.14 se muestran las deformaciones horizontales de corte para estos puntos y además el tiempo en días para el cual alcanzan su resistencia al corte. Antes de alcanzar las condiciones de resistencia pico las deformaciones de corte son muy bajas. Luego las deformaciones de corte calculadas son altas (6% a 16%) a medida que el dique aumenta su altura.

En las figuras V.15-a a V.15 f se muestran los gráficos de desviador  $q$  en función de la deformación de corte horizontal  $\gamma_{xy}$  de los puntos seleccionados y los correspondientes caminos de tensión trazados en el espacio  $p' = (\sigma'_1 + 2\sigma'_3)/3; q = \sigma_1 - \sigma_3$ . También están indicados en el espacio de tensiones las envolventes de falla para compresión triaxial y extensión para las condiciones pico ( $c' = 65$  kPa;  $\phi'_{peak} = 26.4^\circ$ ) y residuales ( $c' = 0$  kPa;  $\phi'_{res} = 11^\circ$ ).

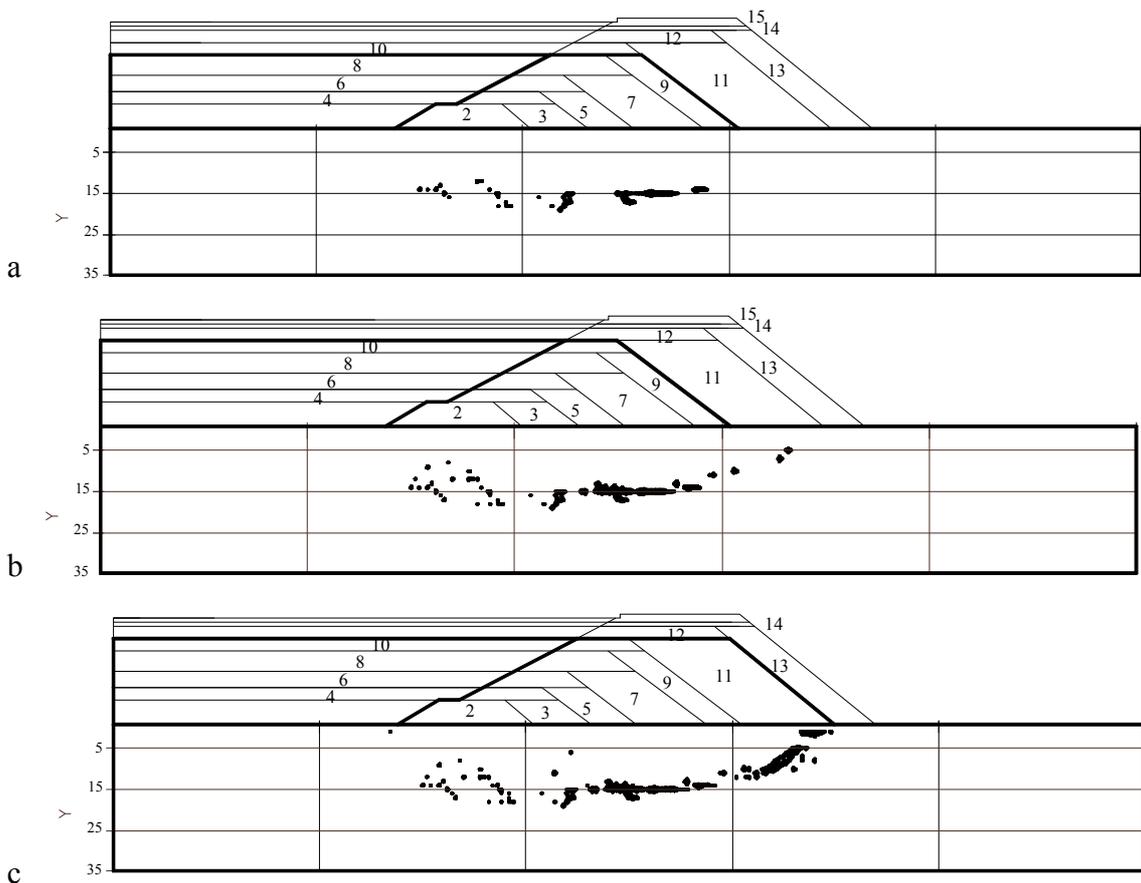


Figura V.12. Secuencia de las zonas donde se alcanza la resistencia de la arcilla para diferentes etapas de la construcción.

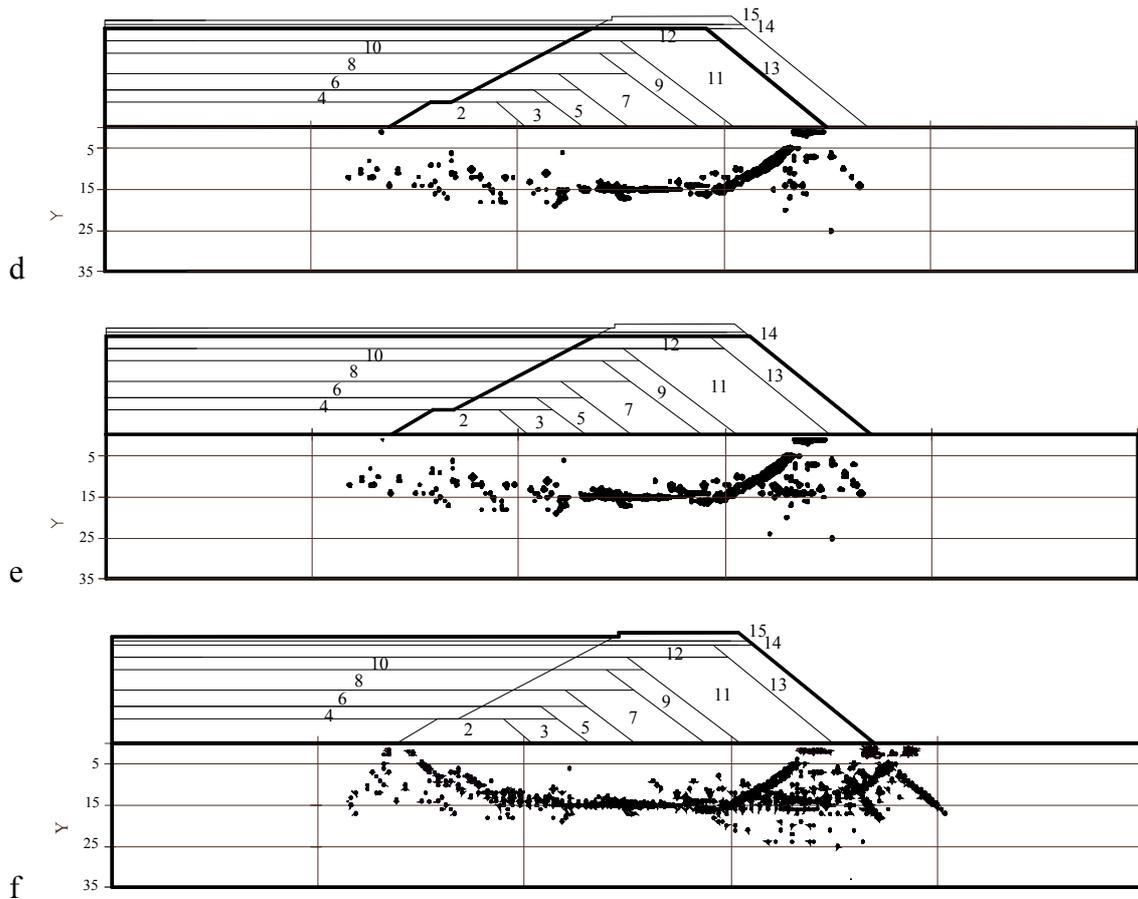


Figura V.12- Secuencia de las zonas donde se alcanza la resistencia de la arcilla para diferentes etapas de la construcción.

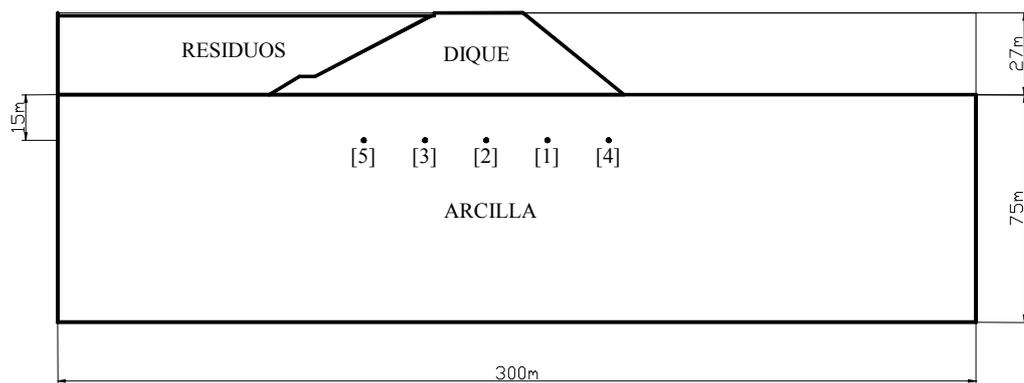


Figura V.13. Secuencia de falla de puntos a una profundidad de 15 m desde la superficie original del terreno.

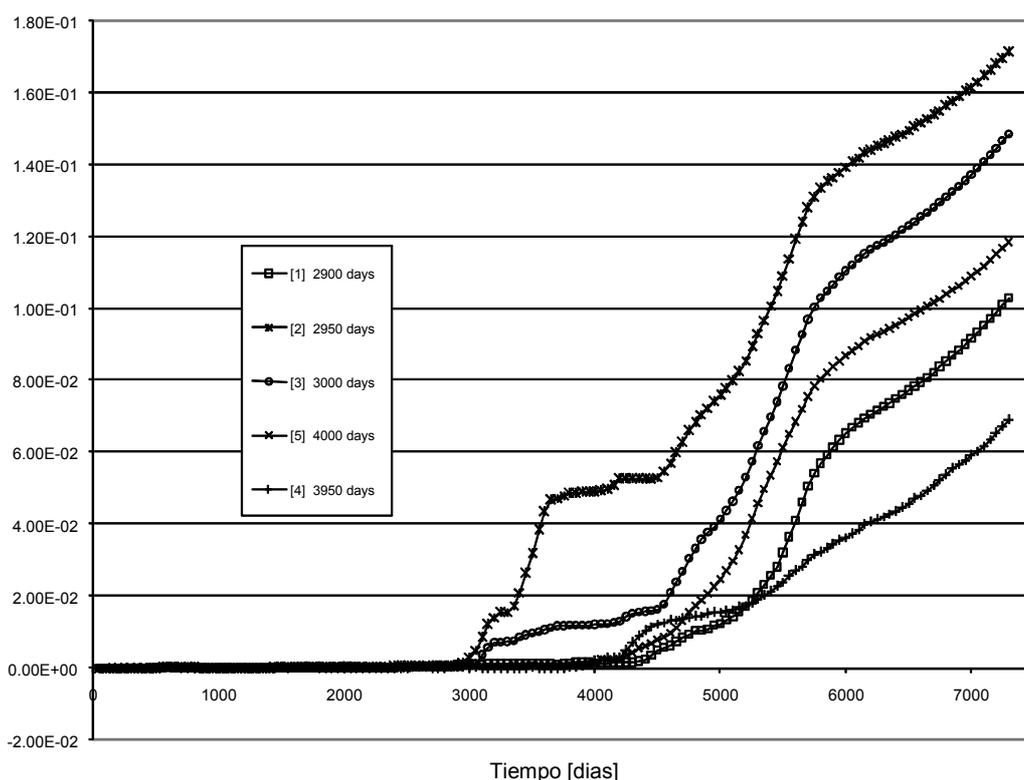


Figura V.14. Deformación de corte horizontal en función del tiempo de construcción.

Los valores de desviador  $q$  tienen un valor de pico muy agudo para deformaciones pequeñas (aprox. 0.15%). Los valores siguientes de  $q$  dependen del ángulo de fricción variable y del cambio de presión efectiva durante la construcción.

Las líneas de trazos en los gráficos de camino de tensión corresponden a la resistencia triaxial en compresión y las de puntos a la resistencia triaxial en extensión. Estas líneas se ha graficado primero para las condiciones iniciales con cohesión  $C=65$  kPa y ángulo de fricción pico  $\phi_{max}$  y luego para las condiciones residuales con cohesión cero y ángulo de fricción residual  $\phi_{res}$ . Los desviadores en los puntos considerados alcanzan los valores de resistencia entre las de compresión y extensión triaxiales y evolucionan con la solución terminando en condiciones residuales en una forma compleja. En el punto 2 la resistencia pico se alcanza en una etapa temprana y los puntos siguientes de tensión siguen la degradación de resistencia a medida que el dique se construye en una forma relativamente directa. Sin embargo el punto 5 cercano a la laguna de residuos experimenta una sucesión de picos de tensión desviadora como consecuencia de la redistribución de tensiones asociada a la fluencia y ablandamiento de las áreas vecinas. La resistencia pico se alcanza en condiciones de extensión cuando la progresión de la

banda alcanza la posición [5]. Luego la degradación rápida de resistencia mueve hacia abajo el camino de tensión. Los detalles reales de cada uno de los caminos de tensión representados son una consecuencia de la degradación de resistencia, la evolución geométrica del dique, el proceso de consolidación y la transferencia de tensión asociada a la falla progresiva y a la localización de deformaciones en la banda de corte.

### **Simulación de los grandes desplazamientos del dique.**

La presa de Aznalcóllar se movió una distancia de 50m luego de su falla inicial. La transición entre un estado estable a estado de movimiento con aceleración se ha atribuido a una combinación de dos efectos: el estado final en el proceso de falla progresiva, cuando la cohesión se ha perdido y la fricción se reduce en la superficie de rotura y el incremento de empuje de los residuos sobre el dique debido a su licuación. Existen evidencias de la licuación de los residuos durante la falla del dique (Alonso E.E. & Gens A., 2006). Estas incluyen la presencia de pequeños volcanes distribuidos en la superficie del depósito de residuos, inmediatamente aguas arriba del dique desplazado. Esta observación fue realizada el día después de la rotura. Una vez desarrollada la superficie de falla los residuos impulsaron el dique y parte de la fundación con movimiento horizontal y al mismo tiempo llenaron el hueco generado por una grieta vertical (Figura V.1)

El proceso de licuación de los residuos no se ha modelado en este punto. Se ha considerado que al final de la construcción los residuos licuan y se comportan como un líquido pesado. A partir de ese momento se retiran la escala de masa y de aceleración de la gravedad y el amortiguamiento agregado se reduce a un valor pequeño de 2%. Luego de este momento el modelo se convierte en dinámico prácticamente sin disipación de presiones de poro y simula la falla utilizando muchos pasos de tiempo pequeños.

La Figura V.16 muestra el modelo unos pocos segundos luego de la licuación de los residuos sin amplificación de los desplazamientos de las partículas. El dique se desplaza aproximadamente 4 metros. La zona oscura de la figura tiene inicialmente cuatro partículas por celda y el resto una. En esta figura es posible ver la “superficie de falla” como un efecto óptico. Además una superficie circular más profunda aparece en esta etapa de la solución que contribuye al desarrollo de las cuñas pasivas aguas abajo del dique. La Figura V.17 muestra un detalle de la cuña pasiva que se levanta a medida que el movimiento progresa. Se observa claramente la formación de bandas de localización de deformaciones. La Figura V.18 muestra un detalle del movimiento de los residuos

durante los primeros segundos iniciales. Una zona cortada se desarrolla en los residuos y el talud de aguas arriba del dique. Una cuña de residuos se moviliza e inicia una subsidencia mientras el dique acelera hacia adelante y una zona de separación de partículas parece la iniciación de una fractura de tracción. El pie de aguas arriba del talud del dique es un punto crítico. Todas las bandas de corte convergen a ese punto en una forma natural.

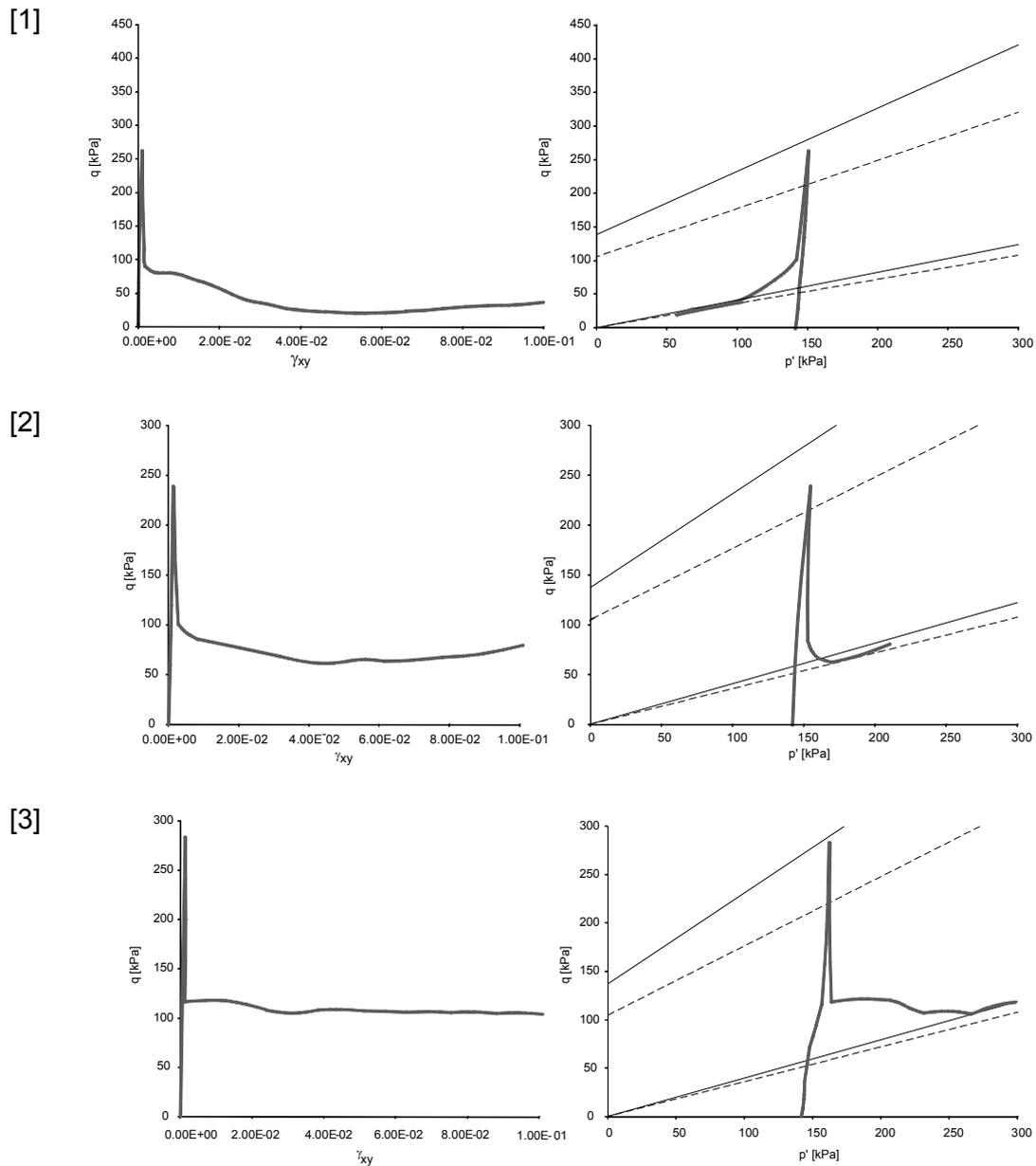
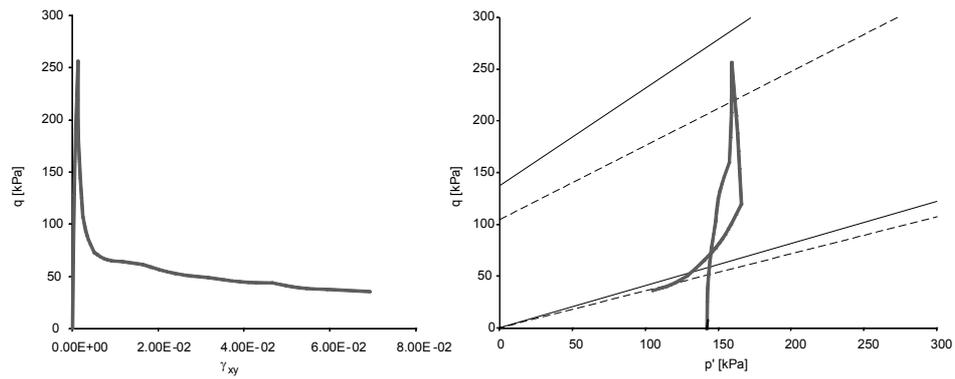


Figura V.15. Desviador  $q$  en función de la deformación horizontal  $\gamma_{xy}$  y desviador  $q$  en función de la presión efectiva  $p'$  en puntos de la superficie de falla horizontal

[4]



[5]

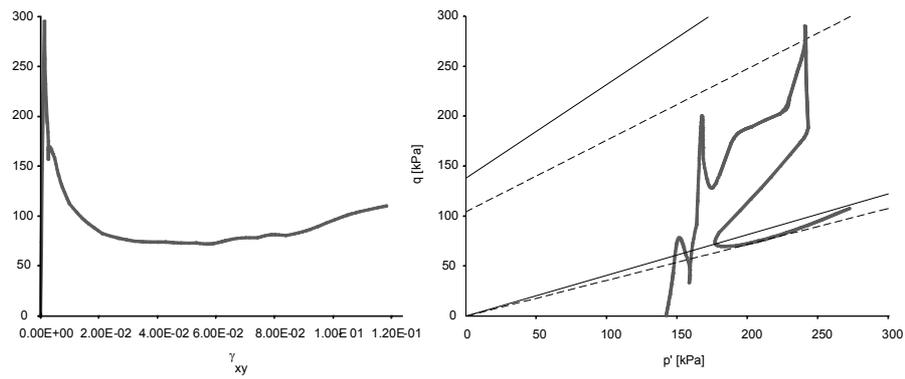


Figura V.15. Desviador  $q$  en función de la deformación horizontal  $\gamma_{xy}$  y desviador  $q$  en función de la presión efectiva  $p'$  en puntos de la superficie de falla horizontal.

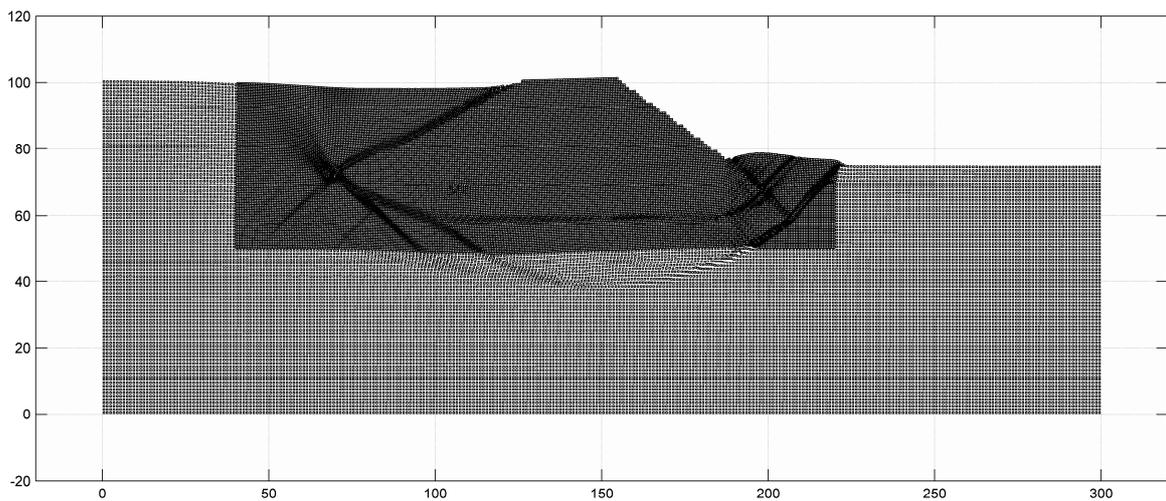


Figura V.16. Modelo de partículas pocos segundos luego de la licuación de los residuos.

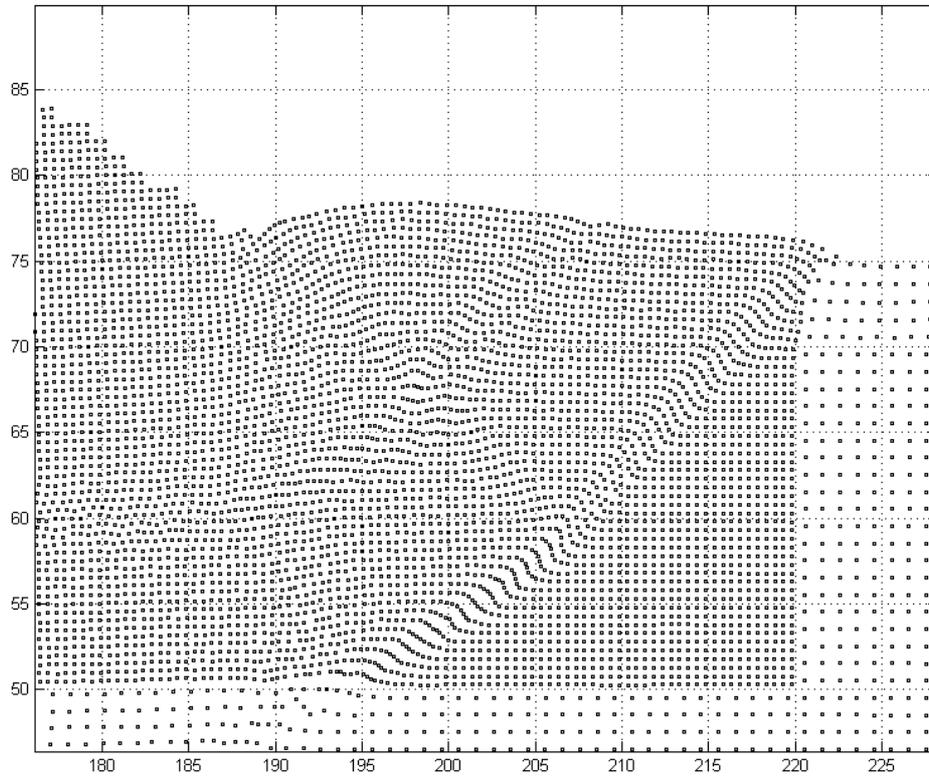


Figura V.17. Desplazamientos de las partículas. Cuña pasiva

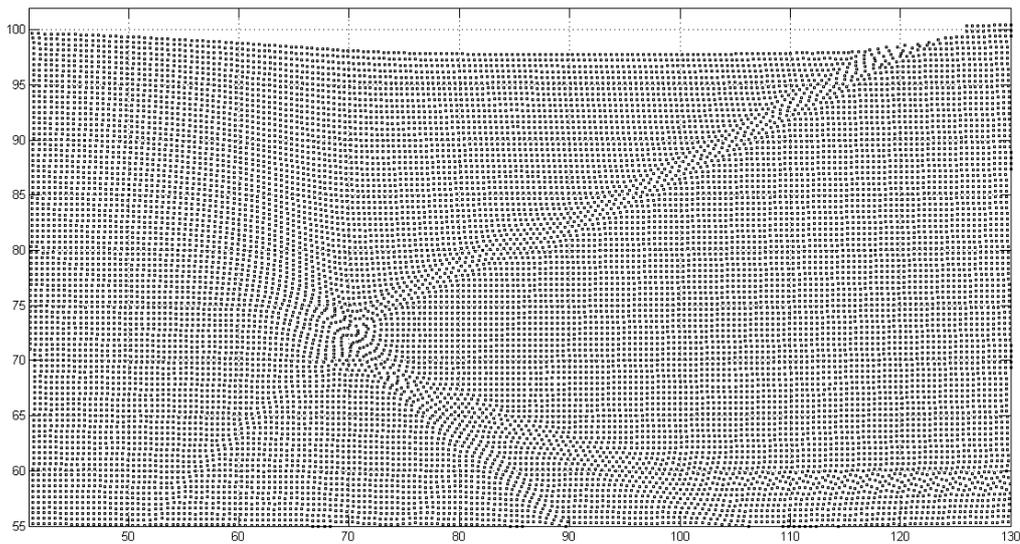


Figura V.18. Desplazamiento de las partículas. Movimiento de los residuos.

### **Conclusiones de este análisis**

Se ha aplicado una versión explícita del Método del Punto Material, extendida para tratar el problema acoplado hidromecánico suelo-fluido, a un proceso complejo de construcción y rotura progresiva que termina en colapso. La metodología utilizada ha permitido simular con buena aproximación el mecanismo de colapso real de la presa de Aznalcóllar. En este análisis no se han hecho hipótesis previas sobre la ubicación, forma y profundidad de la superficie de deslizamiento y esas características han sido obtenidas naturalmente de la modelación matemática. Se ha encontrado que la geometría de las bandas de localización depende del estado de tensión inicial. Para un  $K_0 = 1$ , que es una hipótesis aceptable para una arcilla miocénica sobreconsolidada el mecanismo de colapso es similar al observado.

La interacción entre la fragilidad de la arcilla, la baja disipación de presiones de poro y el proceso de construcción ha generado una falla progresiva en un área horizontal bajo el dique. La falla de la arcilla de fundación comienza bajo el pie del talud de aguas abajo del dique durante su construcción en una etapa temprana (cuando el dique alcanza una altura aproximada de 15m). Los puntos donde la resistencia de la arcilla se alcanza se concentran en una banda estrecha aproximadamente 15m bajo la superficie del suelo natural. En esos puntos la resistencia pico se alcanza y por lo tanto un proceso de transferencia de tensión se inicia. A medida que el dique aumenta su altura estas zonas se agrupan en una banda de ruptura localizada que se establece completamente 11 años luego de la iniciación de la construcción del dique, cuando este alcanza la altura de 24m. Esta banda evoluciona hacia el pie del talud de aguas abajo del dique y simultáneamente en la dirección hacia aguas arriba hacia el depósito de residuos. En las etapas finales de la ruptura la banda se tuerce hacia arriba en la posición del pie del talud de aguas arriba del dique y cruza los residuos con un talud de gran pendiente. Estos resultados indican que la estratificación de la arcilla y la posible existencia de una zona débil ó naturalmente cizallada no influirían mayormente en la iniciación de la rotura. Se debe tener en cuenta que el modelo de ablandamiento por deformación fue calibrado con la respuesta de corte de la matriz de la arcilla. La estratificación no ha influido mayormente pero si ha tenido alguna influencia, de hecho la superficie de deslizamiento principal parece seguir un plano de sedimentación que buza suavemente ( $2^\circ$ ) en la dirección del movimiento. Esta observación sugiere que una vez que el mecanismo de falla progresiva se inició fue más fácil seguir un plano de estratificación.

El MPM se adapta bien a la simulación de grandes desplazamientos y del movimiento del dique después de la falla, que no se ha resuelto en este apartado. De cualquier forma es interesante mostrar la iniciación del movimiento, una vez que los residuos se han supuesto licuados. Nuevas bandas de corte se generan y contribuyen a representar mejor la compleja geometría de la cuña pasiva que se desarrolla hacia aguas abajo debido al empuje del dique. En la zona de los residuos una cuña de residuos se aísla, desliza sobre el talud de aguas arriba del dique y se separa del resto de los residuos en un fenómeno combinado de ruptura por corte y tracción. Luego la cuña de residuos inicia un movimiento hacia abajo que se captura con el modelo.

La geometría de la falla es marcadamente similar a la observada que se muestra en la Figura V.1.

Se destaca que la rotura progresiva se ha simulado en dos regímenes. Uno cuasi-estático con aceleraciones muy pequeñas que permite observar la propagación de las “grietas” a medida que la construcción de la presa avanza y otro dinámico en el que estas superficies de deslizamiento se propagan rápidamente y se moviliza el conjunto del dique y los residuos mineros retenidos.

## **VI. ANALISIS DINAMICO DE PRESAS DE MATERIALES SUELTOS UTILIZANDO EL MPM.**

### **VI. 1 Introducción.**

El colapso de una presa de aguas ó de residuos es inadmisibile ya que puede provocar pérdidas de vidas e importantes daños materiales y ambientales.

Hasta la década de 1960, en el diseño y verificación de las presas de materiales sueltos, la acción sísmica solo se tenía en cuenta como una fuerza horizontal estática en la verificación de la estabilidad de los taludes. En el año 1966, H. B.Seed propuso una nueva metodología para analizar el problema, a partir de observaciones del comportamiento de presas sometidas a terremotos.

La falla de la presa Lower San Fernando en 1971, que obligó a la evacuación de 80.000 personas, puso en evidencia que en ciertos casos, la estabilidad de las presas de materiales sueltos puede ser muy susceptible a la acción de cargas dinámicas. Cuarenta segundos después de terminado el terremoto de San Fernando, todo el talud de aguas arriba y la cresta se deslizaron dentro de embalse provocando una pérdida de resguardo de 9 mts. El deslizamiento fue provocado por la licuación de parte del material del espaldón.

Numerosas presas de residuos mineros han fallado por efecto de un terremoto. Entre los ejemplos más trágicos está el de la presa El Cobre (Chile) de 35 m de altura que estaba fuera de uso al momento de su rotura. El terremoto de La Ligua (28/03/1965) provocó su falla por licuación. Un millón trescientos mil metros cúbicos de lodo viajaron 12 Km valle abajo, provocando la destrucción de un pueblo y la muerte de 300 personas. Los sismos de Chile del 3 de marzo de 1985 y de Perú del 12 de noviembre de 1996 también causaron la falla de varias presas mineras. Recientemente, en el terremoto de Chile del 27 de febrero de 2010, fallaron varias presas mineras y el caso más grave fue el de la presa de Las Palmas que causó la muerte de 4 personas.

Para tener una idea de las acciones dinámicas que pueden esperarse en zonas de alta amenaza sísmica se puede citar al Comité ICOLD Seismic Aspects of Dam Design (Wieland, 1999). Este destaca que los datos sismológicos disponibles en la actualidad

indican que, en el área epicentral de un terremoto destructivo, se pueden esperar valores de aceleración máxima de 1g para un evento de Magnitud 6 o mayor.

El análisis de la seguridad de las presas de materiales sueltos bajo cargas sísmicas requiere de la consideración de diversos factores entre los que se encuentran: el nivel de agitación sísmica, las condiciones de fundación, las características de los materiales que conforman el cuerpo de la presa y su fundación y la tipología y geometría de la sección transversal. En general se trata de verificar la estabilidad general de la presa y de evaluar las deformaciones remanentes para comprobar si son compatibles con el resguardo adoptado y si el agrietamiento consecuente puede ser controlado para mantener la impermeabilidad del órgano de cierre o la evacuación de los caudales resultantes. La información necesaria para este análisis proviene de un estudio de amenaza sísmica, de la geometría de la presa y el vaso, de la exploración de la fundación, de ensayos in situ y de ensayos de laboratorio.

En la práctica internacional se han distinguido en general dos escenarios de verificación para acciones sísmicas. Uno corresponde a una acción de servicio para presas con importancia económica, determinada por el denominado sismo de operación normal (Operating Basis Earthquake, OBE), para el cual usualmente no se admiten daños y se prescribe que la presa debe seguir operando. Este nivel de verificación puede fijarse considerando una cierta probabilidad de excedencia de un nivel de movimiento durante la vida útil de la estructura y por lo tanto se requiere de un análisis de amenaza sísmica de tipo probabilístico. Las consecuencias de una falla generada por este terremoto son de tipo económico y es posible, según las circunstancias del caso, seleccionar un nivel de agitación más o menos severo a partir de un análisis económico.

El segundo escenario de verificación corresponde al de evaluación de la seguridad de la presa. Es posible definir un Terremoto de Evaluación de Seguridad (Safety Evaluation Earthquake, SEE), denominado también terremoto máximo de diseño (Maximum Design Earthquake, MDE) para el que se pretende que la presa mantenga su capacidad de almacenamiento aunque se produzcan daños severos. Para intentar predecir el comportamiento de una presa para este nivel de verificación será necesario considerar a la presa cercana al colapso, y por lo tanto serán de esperar grandes deformaciones permanentes y agrietamiento.

La mayor parte de los daños observados en presas de materiales sueltos se deben al fenómeno de licuación en los materiales de la presa ó de su fundación. Se pueden citar varios ejemplos de fallas debidas a este fenómeno tanto en presas de almacenamiento de agua como en las de residuos mineros. El terremoto de Izu-Ohshim\_kinkai en 1978 (Mg 7) en Japón causo el colapso de dos presas de residuos mineros de la compañía Mochikoshi. Estas presas fueron construidas mediante la técnica de recrecimiento hacia aguas arriba. Uno de los diques falló por licuación de los residuos que conformaban el dique durante el terremoto y el segundo alrededor de 24 horas de producido el sismo. La falla de este último se estima que se produjo debido al ascenso de la superficie freática por la licuación de depósitos existentes debajo del dique. (Ishihara, 1984).

El terremoto de Bhuj de magnitud  $M_w=7.6$  en India, del 26 de enero de 2001 generó daños por licuación en diversas presas de riego ubicadas a diferentes distancias del epicentro. (Singh, 2005). La presa de Chang (15.5 m de altura) sufrió un colapso casi completo debido a la licuación de su fundación y la de Shivilakha (18m de altura) fue también severamente dañada. Estas presas se ubican a 13 y 28 km respectivamente del epicentro y ambas fueron afectadas por aceleraciones máximas del terreno de aproximadamente 0.50 g. En general las presas afectadas por este sismo, fundadas sobre aluviones sueltos, se han mantenido sin daños importantes para aceleraciones máximas del terreno menores de 0.2 g (Krinitzsky E.L. y M.E. Hynes ,2002).

Las condiciones de fundación influyen en forma decisiva en la seguridad sísmica de las presas de materiales sueltos. La densidad in situ de materiales granulares es la magnitud de mayor interés ya que de esta propiedad depende la resistencia a la licuación o resistencia cíclica y la resistencia de estado crítico o residual. Para el terremoto de seguridad en un sitio determinado, en la mayor parte de los casos, los materiales de fundación granulares aumentan su presión de poros residual hasta valores cercanos al 100% de la presión efectiva previa al terremoto. De ahí la importancia de que los materiales de fundación tengan una densidad elevada para que su comportamiento sea dilatante, con resistencias residuales que garanticen la estabilidad de la presa. La presencia de estratos de material contractivo que bajo cargas de terremoto pueden licuar y disminuir su resistencia a valores de resistencia residual menores que las tensiones estáticas preexistentes, puede ocasionar la falla de los taludes o deformaciones tan grandes que impliquen el sobrepaso de la presa.

## **VI.2 Métodos de análisis dinámico de presas de materiales sueltos.**

La especificación de terremotos muy intensos para la verificación de presas de materiales sueltos ha generado nuevos desafíos en el campo del análisis de su comportamiento dinámico y del desarrollo de herramientas numéricas adecuadas.

Hasta hace algunos años se consideraba como un objetivo de diseño y verificación la limitación de las presiones de poros que genera la acción del terremoto en el cuerpo de la presa y su fundación, de tal manera que en ningún caso se llegue a la situación de pérdida total de la presión efectiva (coeficiente de incremento de presión de poros  $ru=100\%$ ). En esta filosofía se basó inicialmente el método de Seed-Lee-Idriss, (Seed,1966) y aplicado al análisis de gran cantidad de presas en el mundo (Sheffield, Seed et al, 1969; San Fernando, Seed et al, 1973; Oroville, Banerjee et al, 1979).

Si hacemos la hipótesis que la zona saturada del material de una presa se encuentra en condiciones no drenadas, lo cual es razonable debido a la corta duración de las acciones sísmicas, se puede contar con la resistencia del material licuado, denominada por diferentes autores, resistencia de estado constante, residual ó de estado crítico, para evitar el deslizamiento. Es decir, cualquiera sea el movimiento sísmico que sufra la estructura y cualquiera sea la distribución de presión de poros resultante, si llegara a provocarse un deslizamiento, basta que se alcance una cierta deformación de corte para alcanzar la resistencia de estado constante del material. Por lo tanto si se verifica la estabilidad de la presa en condiciones estáticas con dicha resistencia, se asegura su estabilidad. La principal objeción que puede hacerse a esta afirmación es que para evitar el colapso de la presa no basta con asegurar que toda superficie potencial de falla sea estable considerando resistencias de estado constante, sino que además deben evaluarse los desplazamientos requeridos para el desarrollo de esta resistencia, ya que si estos desplazamientos disminuyen el resguardo de la presa, podría ocurrir un colapso por sobrepaso del agua del embalse. Además esas deformaciones pueden ocasionar la pérdida de impermeabilidad del órgano de cierre hidráulico de la presa por agrietamiento y su falla por tubificación o erosión. Por lo tanto la estimación de las deformaciones permanentes para el terremoto de verificación se convierte en un objetivo de mucha importancia si se quiere evaluar la seguridad sísmica de una presa de materiales sueltos.

Para simular el comportamiento dinámico de presas de materiales sueltos con el objetivo de analizar su estabilidad y obtener estimaciones de las deformaciones

permanentes se deberán tener en cuenta varios aspectos del problema como el fenómeno de generación de presiones de poro debido a la aplicación de tensiones de corte dinámicas, y el comportamiento elastoplástico hidromecánico con degradación sucesiva de rigidez y resistencia a medida que la presión de poros crece, en materiales contractivos, y degradación de rigidez en materiales de comportamiento dilatante. Por lo tanto se plantea un problema altamente complejo y no lineal que requiere de un planteamiento matemático y numérico adecuado junto con un modelo constitutivo que represente el material granular.

Se debe tener en cuenta que pueden ocurrir mecanismos de falla que impliquen la localización de deformaciones, es decir, fallas de deslizamiento. Es importante señalar que, a menos que se utilicen técnicas especiales, en general los modelos por elementos finitos usuales no pueden reproducir adecuadamente este tipo de fallas. Es deseable que los métodos de análisis numérico, además de resolver el problema acoplado de generación y disipación de presiones de poro, evolucionen para conseguir representar mecanismos de falla que involucren localización de deformaciones, superficies de deslizamiento y grietas que pueden desarrollarse durante un terremoto.

La Tabla VI.1 muestra algunas características de los métodos de análisis del comportamiento de presas de materiales sueltos y su posible evolución, desde el análisis dinámico lineal equivalente usado en los 80, hasta nuevos métodos que permitan considerar con facilidad grandes deformaciones y desplazamientos como por ejemplo la utilización de un método de partículas. Este último tipo de métodos de análisis puede proporcionar mejores estimaciones de la posición y forma de las zonas de localización de deformaciones, es decir superficies de falla y grietas y tener en cuenta los grandes desplazamientos asociados a la condición cercana al colapso.

Aunque la predicción y la evaluación de los fenómenos de localización de deformaciones son fundamentales en el análisis del colapso de las estructuras geotécnicas, es raro encontrar métodos de cálculo precisos en la práctica habitual de la ingeniería. Habitualmente, los casos que involucran localización de deformaciones son evaluados mediante métodos de equilibrio límite, o aplicando los teoremas del colapso plástico de estructuras, que no son capaces de predecir la ubicación ni la forma de las superficies en las que se localizan las deformaciones. Además, estos métodos no proporcionan información sobre la deformación alcanzada en la falla.

Tabla VI.1. Posible evolución de los modelos para el análisis de seguridad de presas de materiales sueltos.

Tipo de análisis.	Análisis dinámico de un modelo de elementos finitos lineal equivalente.(1960-)	Análisis no-lineal acoplado en tensiones efectivas de un modelo de elementos finitos ó diferencias finitas.(1990-)	Análisis no-lineal acoplado que considere en forma adecuada la localización de deformaciones y grandes desplazamientos
Resultados del análisis	<p>Estimación de la distribución de presión de poros al final del sismo.</p> <p>Estimación de la respuesta de aceleración.</p>	<p>Generación y disipación de presión de poros instante a instante.</p> <p>Respuesta de aceleración.</p> <p>Deformaciones permanentes</p>	<p>Generación y disipación de presión de poros instante a instante.</p> <p>Respuesta de aceleración.</p> <p>Deformaciones permanentes.</p> <p>Deformaciones localizadas.</p> <p>Detección de mecanismos de colapso.</p>
Verificaciones de seguridad	<p>Análisis de estabilidad post-terremoto en tensiones efectivas.</p> <p>Análisis de desplazamientos tipo Newmark utilizando la respuesta de aceleración.</p>	<p>Análisis de estabilidad post-terremoto con resistencias residuales.</p> <p>Análisis de desplazamientos de Newmark.</p> <p>Estimación de pérdida de resguardo.</p>	<p>Análisis de estabilidad post-terremoto con resistencias residuales.</p> <p>Desplazamientos permanentes.</p> <p>Estimación de pérdida de resguardo.</p>
Características de los modelos	<p>Errores en el cálculo de la respuesta dinámica.</p> <p>“Elástico”, sin estimación de deformaciones plásticas.</p>	<p>Estimación de deformaciones plásticas.</p> <p>Pobre detección y definición de zonas localizadas: superficies de falla y grietas.</p> <p>Dependencia de la malla.</p> <p>Necesidad de técnicas de regularización</p>	<p>Necesidad de técnicas de regularización.</p> <p>Posibilidad de consideración de grandes desplazamientos e interacción de masas de suelo.</p>

### **VI.3 Análisis dinámico de una presa de grava con pantalla de hormigón.**

La seguridad sísmica de las presas de materiales sueltos está fuertemente condicionada por la magnitud de los desplazamientos finales del cuerpo de la presa y de su fundación luego de un terremoto destructivo. Para un sismo muy intenso estos desplazamientos permanentes se deben a la combinación de desplazamientos generados por deformaciones plásticas volumétricas y de corte distribuidas dentro de la estructura y su fundación, y a los causados por el deslizamiento de masas de suelo a lo largo de una ó varias superficies de falla. Los procedimientos numéricos utilizados en la práctica normalmente no consideran el fenómeno de localización de deformaciones en estas superficies de falla y tampoco la dependencia de la solución con el tamaño de la malla de elementos finitos ó de diferencias finitas utilizada. En general los códigos usados actualmente para el análisis dinámico no lineal permiten tener una estimación de la distribución de deformaciones y la respuesta dinámica, sin considerar adecuadamente la localización de deformaciones plásticas. Además, en algunos de los procedimientos numéricos utilizados en la práctica, no se considera el cambio de configuración de la presa causado por los grandes desplazamientos.

Un modelo computacional diseñado para representar la localización de deformaciones plásticas debe resolver correctamente dos grandes dificultades (Zienkiewicz, Huang & Pastor 1995). La primera de ellas atañe a los modelos constitutivos empleados, que deben ser matemáticamente consistentes. Esto implica que deben ser capaces de describir el comportamiento del material de manera tal que no exista una dependencia patológica de la solución con el tamaño de la discretización adoptada. Esta dificultad se trata normalmente aplicando técnicas de regularización, que introducen un tamaño interno característico en las ecuaciones. La segunda dificultad surge debido a que la región en la que se concentran las deformaciones es generalmente una banda angosta en comparación con el tamaño de la estructura modelada, y a que además no se conoce a priori la posición de dicha región. La estrategia de análisis adoptada debe ser capaz de detectar y representar la zona en la que se concentran las deformaciones y aún así mantener la complejidad de la discretización en un nivel adecuado a la capacidad de cálculo disponible. Los modelos de elementos finitos utilizan varios procedimientos para analizar los problemas de localización de deformaciones sin introducir complejidades excesivas en las mallas empleadas. Estos procedimientos incluyen el uso

de funciones de forma capaces de representar una discontinuidad en el campo de desplazamientos, y la generación automática de mallas adaptables, que capturan las discontinuidades mediante refinamiento de la discretización en la zona de localización de deformaciones.

En el análisis dinámico de modelos de elementos finitos de presas de materiales sueltos no parece práctico resolver los problemas numéricos que surgen del fenómeno de localización de deformaciones utilizando mallas adaptables en conjunto con algún procedimiento de regularización. Las cargas externas cambian en cada instante a lo largo de la historia de aceleración, generando condiciones variables de localización a la masa de suelo. En otras palabras, durante el movimiento pueden aparecer diferentes superficies de falla en el talud de aguas arriba o en el de aguas abajo, y activarse ó no según la evolución de las aceleraciones impuestas por el terremoto. Por otro lado la zona de concentración de deformaciones ó superficie de falla tiene un tamaño que se reduce a unos pocos diámetros nominales de las partículas del material de espaldón, mientras que la necesidad de obtener resultados en forma rápida hace que las mallas de elementos finitos ó diferencias finitas tengan elementos de tamaño mínimo en el orden de 1 a 2 m.

En este capítulo se ha aplicado el Método del Punto Material al análisis de seguridad de una presa de grava con pantalla de hormigón en la búsqueda de un método que permita regularizar en forma aproximada el problema de localización de deformaciones, obtener resultados que no sufran de sensibilidad al trazado de la malla y que al mismo tiempo resuelva en forma sencilla problemas de deformaciones finitas.

En la última década se ha difundido en el mundo el uso de presas de materiales sueltos con pantalla de hormigón (CFRD: Concrete Faced Rockfill Dam). En esta tipología el elemento de cierre hidráulico es una pantalla de hormigón de poco espesor colocada sobre el talud de aguas arriba de la presa. En muchos casos los materiales utilizados para su construcción son gravas con importantes contenidos de finos y se fundan directamente sobre el aluvión del río recurriendo a un muro pantalla de hormigón para impedir el flujo en la fundación. Existen muy pocos datos de su comportamiento bajo acciones sísmicas y solo se dispone hasta ahora del caso de Zipingpu. En el terremoto de Sinchuan, China del 12 de mayo de 2008, la presa Zipingpu, de 156m de altura y

finalizada en 2006, una de las más altas presas de enrocado con pantalla de hormigón, sufrió daños muy importantes en las losas de la cara de hormigón y en el coronamiento. La distancia del epicentro de este terremoto de Magnitud  $M_w=8$  se ubicó a 17 Km de la presa generando aceleraciones en la base de la estructura mayores a 0.50g. Nunca antes una presa de este tipo había sido sometida a un terremoto destructivo.

Es previsible que, bajo una acción sísmica de alta intensidad, se produzcan grandes deformaciones y desplazamientos que podrían no implicar la inestabilidad de la presa desde el punto de vista mecánico, pero si el sobrepaso ó el agrietamiento de los órganos de cierre. Estas presas son, por su diseño, más esbeltas que las de núcleo central impermeable, en las que los taludes son más tendidos, por lo que pueden esperarse mayores amplificaciones de aceleración en el coronamiento. A su favor tienen que durante un sismo, el material de la presa debería permanecer no saturado, y por lo tanto en el cuerpo de la presa no existiría el fenómeno de licuación ó de movilidad cíclica que modifica la resistencia y/o la rigidez del material granular. En la fundación el problema es diferente porque se encontrará en condiciones saturadas y las deformaciones ó la pérdida de resistencia, debidas a la movilidad cíclica ó a la licuación, pueden afectar la estabilidad de la presa y la integridad del muro colado que en muchos casos cierra el aluvión hasta la roca.

La Figura VI.1 muestra un modelo de la presa Los Caracoles, ubicada en la Provincia de San Juan, en la República Argentina. Esta es una presa de grava con pantalla de hormigón, fundada en aluvión del río. La pendiente del talud de aguas abajo es 1:1.7 (vertical:horizontal), y la pendiente del talud de aguas arriba es 1:1.5. El modelo de partículas que se muestra en la figura tiene 31156 partículas y una malla soporte de 2mx2m con 4 partículas por celda en su configuración inicial.

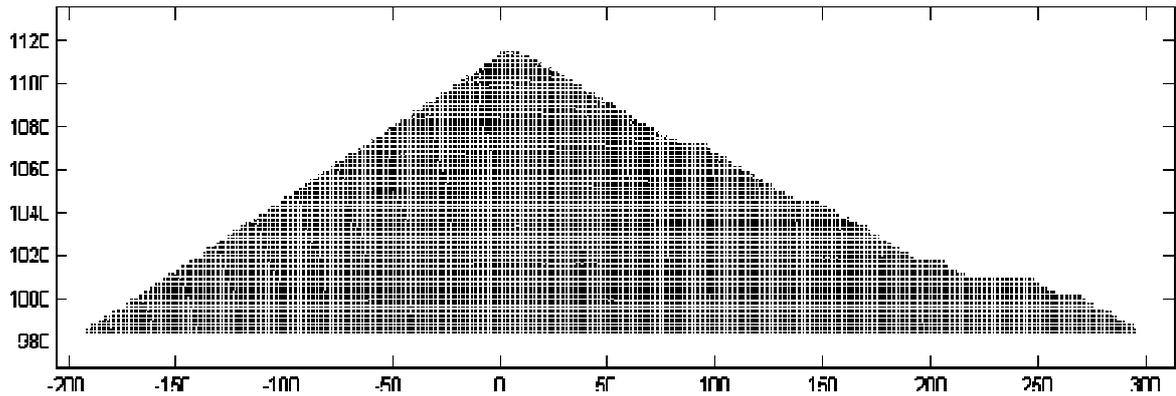


Figura VI.1. Modelo de partículas de una presa de grava con pantalla de hormigón (cara de aguas arriba a la izquierda), escalas en metros.

### Modelo constitutivo

La representación de los materiales que se ha utilizado en este análisis responde a la teoría clásica de la plasticidad en medios continuos, basada en superficies de fluencia que separan la zona de comportamiento elástico lineal de la zona de comportamiento plástico. Se ha utilizado una aproximación suavizada al criterio de fluencia de Mohr-Coulomb, propuesta por Abbo y Sloan (1995), y definida en las ecuaciones VI.1. Esta relación constitutiva evita los problemas de falta de unicidad de las soluciones numéricas asociados a superficies de fluencia que presentan esquinas o angulosidades, y a la vez se aproxima razonablemente a la superficie de fluencia definida por el criterio de Mohr-Coulomb (Figura VI.2).

$$F = p \cdot \sin(\phi) + \sqrt{J_2 \cdot K(\theta)^2 + a^2 \cdot (\sin \phi)^2} - c \cdot \cos \phi = 0$$

$$K(\theta) = \begin{cases} A - B \cdot \sin(3\theta) & |\theta| > 25^\circ \\ \cos \theta - \frac{1}{3} \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi & |\theta| \leq 25^\circ \end{cases} \quad (\text{VI.1})$$

$$A = 1,4321 + 0,4069 \cdot \text{sign } \theta \cdot \sin \phi$$

$$B = 0,5443 \cdot \text{sign } \theta + 0,6739 \cdot \sin \phi$$

$$a = 0,005 \cdot \cot \phi$$

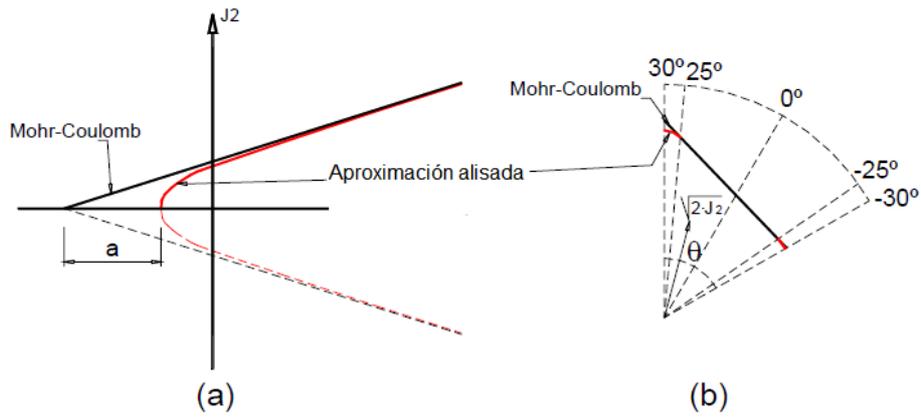


Figura VI.2. Superficie de fluencia de Abbo y Sloan. (a) Intersección con un plano donde  $\theta = cte$ . (b) Intersección con un plano donde  $p = cte$ .

En la Ecuación (VI.1)  $c$  y  $\phi$  representan la cohesión y el ángulo de fricción interna del modelo.  $J_2$  es el segundo invariante del tensor de tensiones desviadoras,  $\theta$  es el ángulo de Lode. Para representar el ablandamiento por deformación se ha considerado el ángulo de fricción  $\phi$  post-fluencia como una función exponencial decreciente de la deformación desviadora plástica  $\epsilon_{eq}^p$ :

$$\phi = \phi_{res} + (\phi_{max} - \phi_{res}) \cdot e^{-\eta \cdot \epsilon_{eq}^p} \quad (VI.2)$$

En la ecuación (VI.2)  $\phi_{res}$  y  $\phi_{max}$  representan el ángulo de fricción residual y el ángulo de fricción pico y  $\eta$  es un parámetro del modelo. La dependencia del ángulo de fricción pico con la relación entre la presión inicial de confinamiento  $p'$  y la presión atmosférica  $p_a$  se tuvo en cuenta mediante la ecuación VI.3.

$$\phi_{max} = 50^\circ - 2.4 \ln \left( \frac{p'}{p_a} \right) \quad (VI.3)$$

La ecuación (VI.3) se ajusta a los datos experimentales obtenidos de ensayos realizados en el material de la presa. Se usó un módulo de Young constante igual a 500MPa, y para tener en cuenta la disipación de energía a bajos niveles de deformación se consideró un

amortiguamiento viscoso proporcional a la masa, igual al 5% del amortiguamiento crítico para el periodo fundamental del modelo.

En este trabajo se ha utilizado el concepto de grieta ó superficie de deslizamiento distribuida en la celda, es decir que la deformación plástica concentrada en una superficie de deslizamiento se distribuye en toda la celda. Para obtener una respuesta de ablandamiento por deformación objetiva que no dependa del tamaño de la celda se ha calibrado el parámetro  $\eta$  de manera que para el tamaño de la celda utilizado (2m x 2m), se tenga una relación tensión-desplazamiento de la superficie de deslizamiento que represente aproximadamente el comportamiento de ablandamiento del material. En la figura VI.3 se muestra una gráfica tensión principal mayor en función del desplazamiento, obtenida con  $\eta = 100$  y  $\phi_{res} = 45^\circ$ , con una presión de confinamiento inicial igual a 400 kPa.

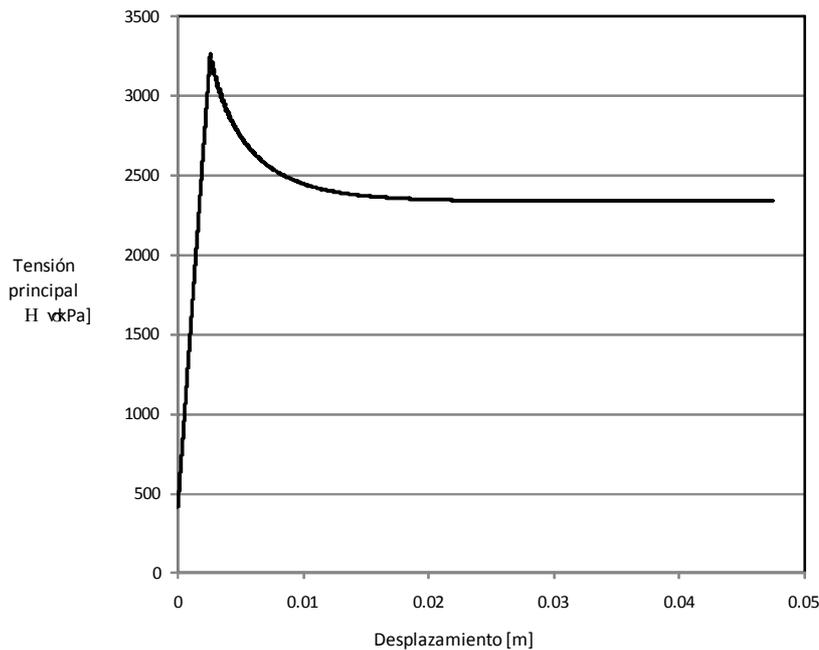


Figura VI.3. Relación tensión-desplazamiento.

### Análisis bajo cargas estáticas

En las figuras VI.4 y VI.5 se muestra la distribución de las tensiones verticales y horizontales en el cuerpo de la presa, debidas al peso propio y la carga de agua del embalse. Como puede observarse existe una zona inferior bajo la pantalla de hormigón con altas compresiones que se deben a la carga de agua. Estas presiones confinan y aumentan la rigidez de los materiales en esa zona, por lo que es menos probable que allí se produzcan deformaciones plásticas. En cambio la zona del talud de aguas abajo está mucho menos comprimida y por lo tanto es razonable esperar allí mayores deformaciones.

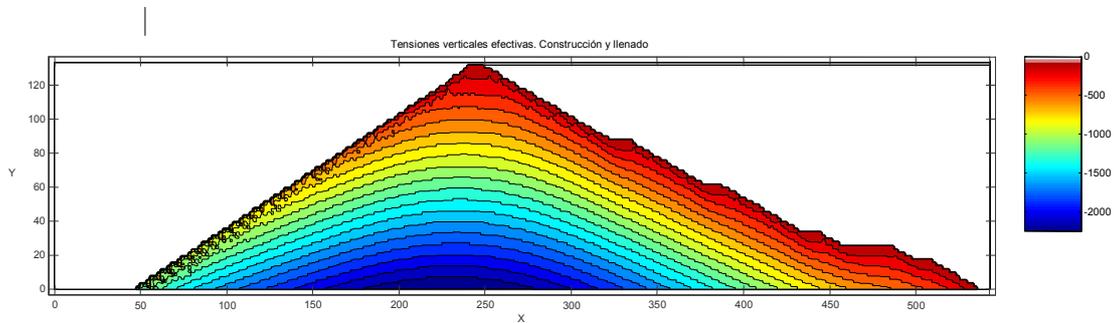


Figura VI.4. Tensiones verticales efectivas. Peso propio y carga de agua [kPa].

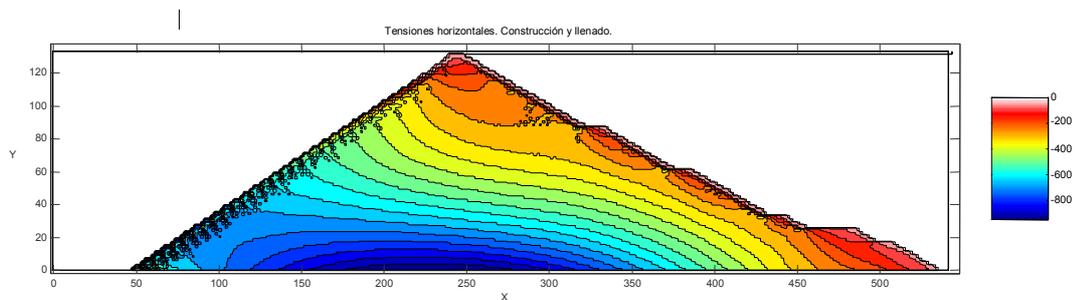


Figura VI.5. Tensiones normales horizontales. Peso propio y carga de agua [kPa].

### Respuesta dinámica a un pulso senoidal.

Con el objetivo analizar el comportamiento del modelo y de detectar los mecanismos de falla bajo cargas dinámicas, se aplicó en la base un pulso senoidal de aceleración con 0.3 g de amplitud y periodo 1.5 seg. La Figura VI.6 muestra la respuesta de desplazamiento horizontal y vertical del coronamiento. La Figura VI.7 muestra la

distribución de deformaciones plásticas equivalentes en las partículas representada en la configuración original. Esta distribución indica que el modelo responde con plastificación y deslizamiento en la zona de menores compresiones del talud de aguas abajo tal como se esperaba.

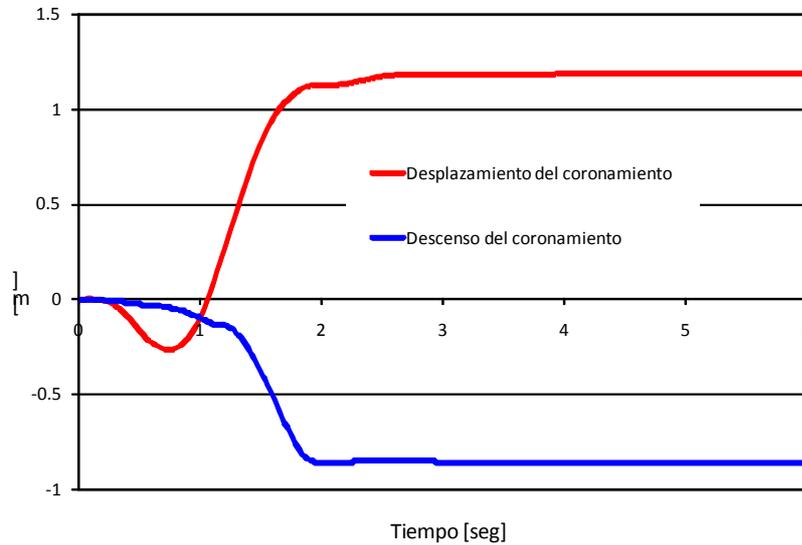


Figura VI.6. Evolución de los desplazamientos horizontal y vertical del coronamiento.  
Pulso senoidal de aceleración en la base

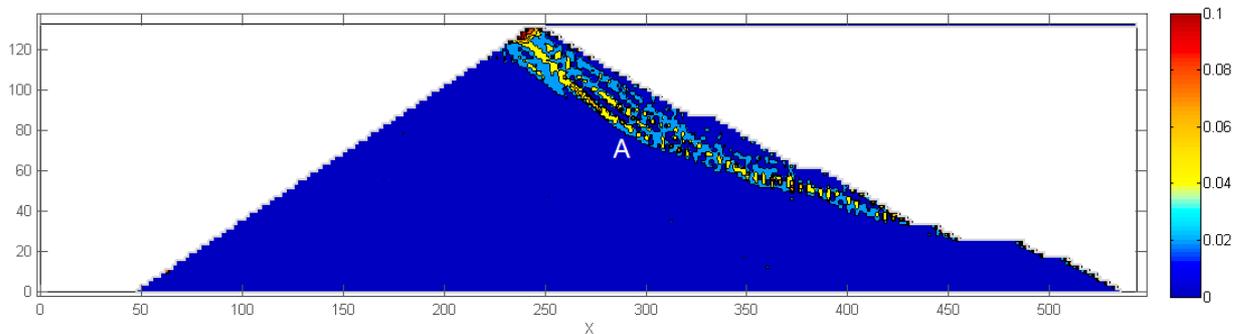


Figura VI.7. Deformaciones plásticas equivalentes.  
Pulso senoidal de aceleración en la base.

Para estudiar la influencia del porcentaje de amortiguamiento viscoso utilizado para simular la disipación de energía del material en régimen elástico se obtuvieron resultados para 0%, 5% y 15%. En la Figura VI.8 se muestra la variación del descenso del coronamiento para los valores de amortiguamiento considerados. La influencia del amortiguamiento en los resultados de descenso del coronamiento es muy alta y por lo

tanto su estimación para el caso de un modelo simple como el de Morh-Coulomb es crítica para obtener resultados confiables.

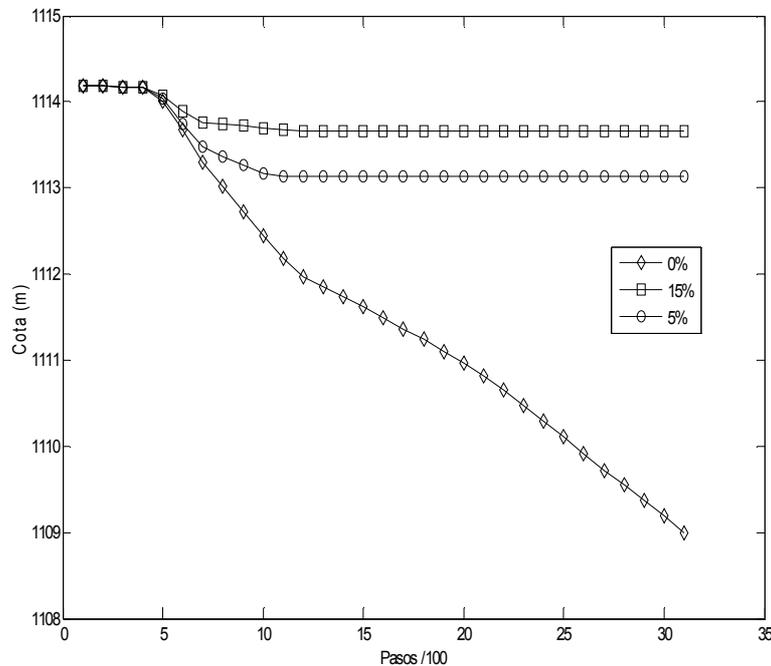


Figura VI.8. Variación del descenso del coronamiento con el porcentaje de amortiguación.

### Comparación con el método de Newmark

A partir de la historia de aceleraciones absolutas en el punto A (indicado en la figura VI.7), se ha calculado el desplazamiento de bloque deslizante utilizando el método de Newmark (Newmark, 1965). La Figura VI.9 muestra la respuesta de aceleración absoluta en la masa de suelo en el punto A, ubicado bajo la zona de deslizamiento. Esta es la aceleración que se transmite a la masa de suelo limitada inferiormente por la superficie de deslizamiento hasta que la cuña se desliza. La Figura VI.10 muestra las superficies de falla consideradas en el cálculo de la aceleración horizontal estática de deslizamiento mediante equilibrio límite. En la Figura VI.11 se compara el desplazamiento calculado con el método de Newmark para una aceleración de falla de 0.22g con el desplazamiento horizontal del coronamiento obtenido con el modelo de partículas. Los desplazamientos obtenidos con el modelo son mayores que los calculados con el método de Newmark, principalmente porque en el modelo se activan varias “superficies” de deslizamiento. El desarrollo en el tiempo del desplazamiento es

similar para ambos métodos. En este caso el análisis de bloque deslizando solo permite obtener una descripción cualitativa de la evolución del deslizamiento.

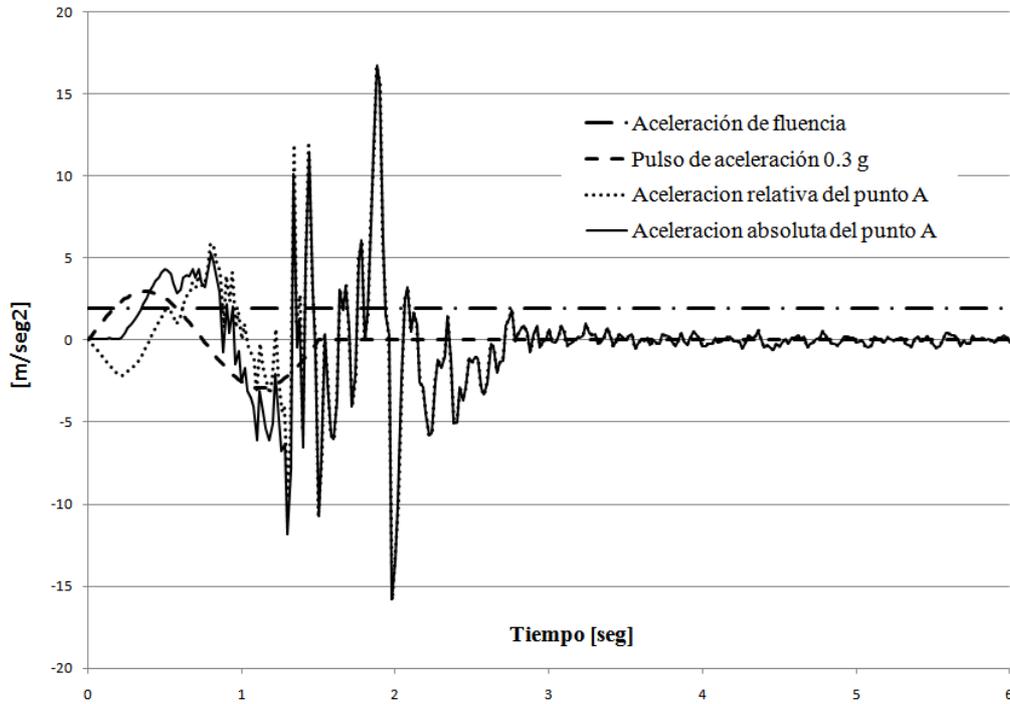


Figura VI.9. Aceleración relativa y absoluta del punto A.

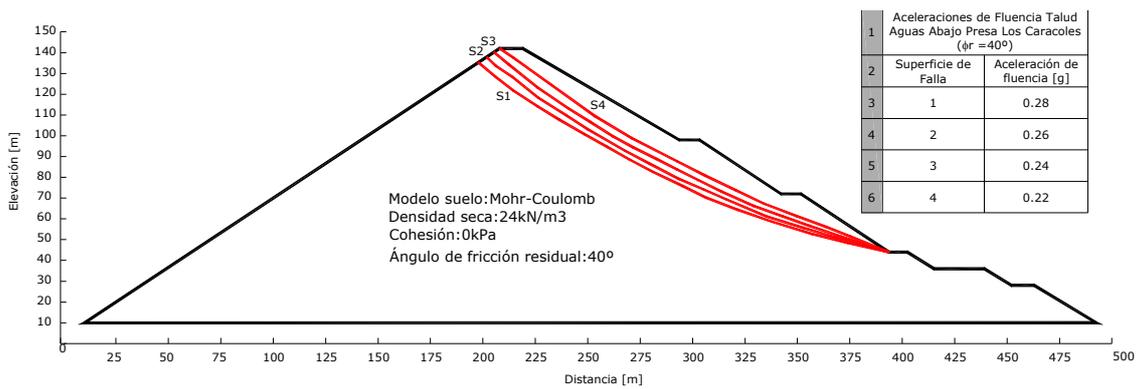


Figura VI.10. Aceleración de falla para varias superficies, calculada mediante equilibrio límite.

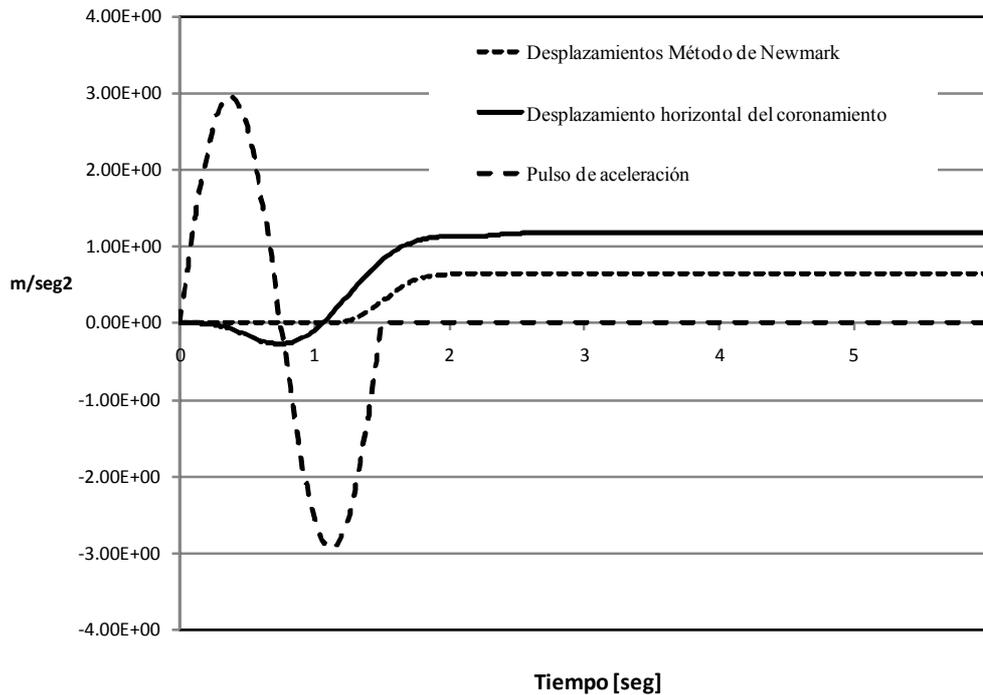


Figura VI.11. Método de Newmark. Desplazamiento del coronamiento para un pulso senoidal de aceleración en la base.

### Respuesta dinámica para el registro del sismo de Chi-Chi de 1999

En la Figura VI.13 se muestra la distribución de deformaciones plásticas equivalentes al final de la historia de aceleración de base correspondiente al registro TCU068W del terremoto de Chi-Chi de 1999 (figura VI.12). Se observa que, al igual que en el análisis anterior, se establece una “superficie” de deslizamiento también en la zona de bajas compresiones del espaldón de aguas abajo y se concentran mayores deformaciones plásticas en el coronamiento. La Figura VI.14 muestra las historias de descenso y desplazamiento horizontal del coronamiento. Se destaca el gran incremento que se produce en coincidencia con el pulso de velocidad del registro.

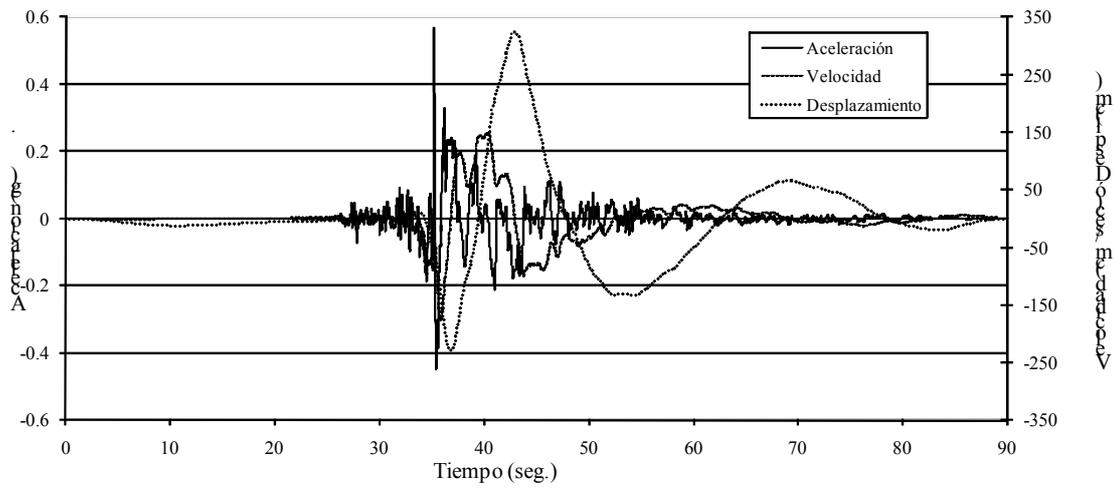


Figura VI.12. Historias de aceleración, velocidad y desplazamiento del terreno para el registro TCU068W del terremoto de Chi-Chi del 20/09/1999.

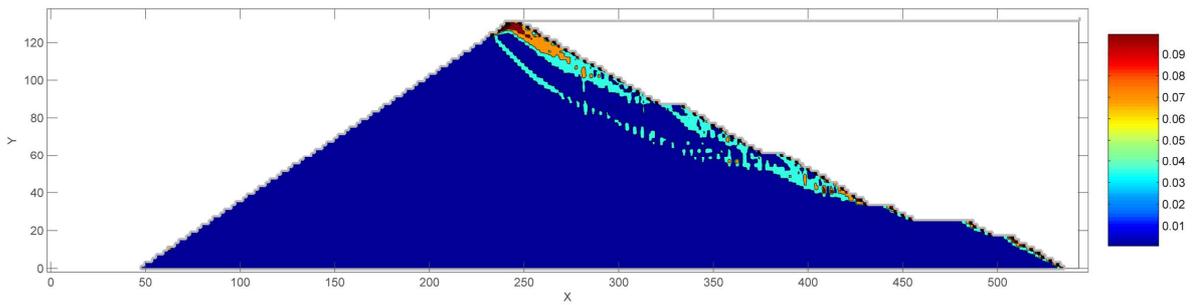


Figura VI.13. Deformaciones plásticas equivalentes al final de la historia de aceleraciones de la base correspondiente al registro TCU068W.

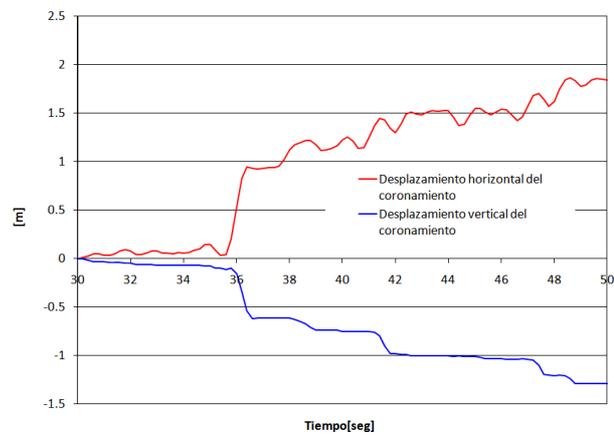


Figura VI.14. Desplazamiento horizontal y descenso del coronamiento.

### **Conclusiones de este análisis.**

Se ha generado un modelo de partículas de la Presa Los Caracoles que se encuentra en construcción en la Provincia de San Juan, Argentina. En principio no se ha considerado la fundación para evitar la complejidad de la modelación del problema acoplado y obtener resultados preliminares de descenso del coronamiento. El método del punto material permite la detección de mecanismos de colapso sin la adopción de hipótesis previas. En forma sencilla puede obtenerse una respuesta objetiva de ablandamiento por deformación, utilizando el concepto de superficie de deslizamiento distribuida y calibrando la rama de ablandamiento de la ecuación constitutiva para obtener una relación tensión-desplazamiento en la superficie de deslizamiento que represente la correspondiente relación del material. Los resultados no son sensibles a la geometría de la malla soporte ya que esta es uniforme y no tiene direcciones preferentes. Al mismo tiempo se consideran en forma automática, con solo adoptar un incremento de tensión objetivo, las grandes deformaciones. Los resultados obtenidos para el análisis de la Presa Los Caracoles son coherentes con un modelo conceptual de comportamiento de una presa de materiales sueltos con pantalla de hormigón. Se obtienen deslizamientos en la zona de coronamiento y en la zona de bajas compresiones del talud de aguas abajo sin la aparición de deformaciones plásticas en la zona altamente comprimida bajo la pantalla de hormigón.

## VII.COMENTARIOS FINALES

El Método del Punto Material puede considerarse como una variante del Método de los Elementos Finitos mejor adaptada a los problemas que involucran grandes deformaciones y grandes desplazamientos. Tiene ventajas claras para el análisis dinámico de estructuras geotécnicas, el análisis de desplazamientos luego de un colapso, el análisis del alcance y configuración de flujos rápidos y deslizamientos y la evaluación de sus consecuencias. Esto es porque como en otros métodos de partículas, la conectividad entre los puntos que representan el continuo es producto de la solución y no está fija como en el MEF.

Para su aplicación a problemas geotécnicos en los que se encuentren materiales saturados se han formulado en esta tesis algoritmos para calcular las presiones de poros que han resultado razonablemente estables. Esto supone superar una dificultad muy importante porque el MPM padece de problemas similares al MEF, inestabilidad de presión, bloqueo de la solución para materiales cuasi-incompresibles y modos de energía nulos cuando se utiliza una partícula por celda, con el agregado de la inestabilidad generada por el cambio de celda de las partículas en el MPM original.

El desarrollo de aplicaciones del MPM al análisis del comportamiento termo-hidromecánico de materiales no saturados es directo, ya que es posible asignar a las partículas otras variables como la temperatura, el grado de saturación, la porosidad etc. que se transportan con ellas y que pueden proyectarse a la malla en cada paso de la solución para resolver las ecuaciones de balance.

La versión explícita del MPM se adapta muy bien al análisis de la rotura progresiva de materiales cuasi-frágiles como se pudo comprobar con el análisis del mecanismo de colapso de la presa de Aznalcollar que se describe en el Capítulo V. Con el MPM se abre la posibilidad de predecir el mecanismo de colapso de una estructura geotécnica sin hipótesis previas y hasta cierto punto sin dependencia de la malla, y luego continuar con el análisis de la evolución de los desplazamientos de los materiales deslizados para el estudio de las consecuencias de la falla.

Uno de los temas no explorados en esta tesis es la modelación de interfases entre suelo y estructuras y el contacto entre materiales diferentes, en esto también el MPM puede tener ventajas significativas porque no se requiere de la detección de contactos debido a que la interacción entre las partículas se resuelve en la malla.

## REFERENCIAS.

- ABBO, A.J. SLOAN, S.W. 1995 A smooth hyperbolic approximation to the Mohr-Coulomb yield criterion. *Computers & Structures* 54(3) 427-441.
- ALONSO, E. E. and A. GENS. ISSN 0016-8505. 2006a. Aznalcollar Dam Failure. Part 1: Field Observations and Material Properties. *Geotechnique*. 56(3), pp 165-183.
- ALONSO, E. E. and A. GENS. ISSN 0016-8505. 2006b. Aznalcollar Dam Failure. Part 3: Dynamics of the Motion. *Geotechnique*. 56(3), pp 203-10.
- BANARJEE N.G., H.B. SEED Y C.K. CHAN. 1979. "Cyclic behavior of dense coarse-grained materials in relation to the seismic stability of dams". Reporte No. UCB/EERC 79/13. Universidad de California, Berkeley
- BARDENHAGEN, S. G. and E. M. KOBER. ISSN 1526-1492. 2004. The Generalized Interpolation Material Point Method. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. 5(6), pp 477-95.
- BARDENHAGEN, S. G. ISSN 0021-9991. 2002. Energy Conservation Error in the Material Point Method for Solid Mechanics. *Journal of Computational Physics*. 180(1), pp 383-403.
- BARDENHAGEN, S. G., A. D. BRYDON, and J. E. GUILKEY. ISSN 0022-5096. 2005. Insight into the Physics of Foam Densification Via Numerical Simulation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 53(3), pp 597-617.
- BARDENHAGEN, S. G., D. R. GREENING, and K. M. ROESSIG. ISSN 0094-243X. 2004. The Material Point Method and Simulation of Wave Propagation in Heterogeneous Media. *AIP Conference Proceedings*. (706), pp 187-92.
- BARDENHAGEN, S. G., et al. ISSN 1526-1492. 2001. An Improved Contact Algorithm for the Material Point Method and Application to Stress Propagation in Granular Material. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. 2(4), pp 509-22.
- BARDENHAGEN, S. G., J. U. BRACKBILL, and D. SULSKY. ISSN 0045-7825. 2000. Material-Point Method for Granular Materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 187(3), pp 529-541.
- BELYTCHKO T., Y. KRONGAUZ, D. ORGAN, M. FLEMING AND P. KRYSL, Meshless methods: an overview and recent developments. *Comput Methods Appl Mech Eng* 139 (1996), PP. 3-47.
- BELYTSCHKO T., Y.Y. LU AND L. GU, Element-free Galerkin method. *Int J Numer Methods Eng* 37 (1994), pp. 229-256.
- BIOT M. A., (1941) General theory of three dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.* 12, 155-164
- BORST, R. d., J. J. C. REMMERS, and A. NEEDLEMAN. ISSN 0013-7944. 2006. Mesh-Independent Discrete Numerical Representations of Cohesive-Zone Models. *Engineering Fracture Mechanics*. 73(2), pp 160-177.
- BRANNON R. & CHEN Z., "An Evaluation of the Material Point Method", SAND Report SAND2002-0482, Sandia Laboratories, 2002.
- CARGILL, K. W.(1984). Prediction of consolidation of very soft soil. *ASCE Journal of Geotechnical Eng.*, Vol 110, N°6 pp, 775–795.
- CAROL, I., M. LOPEZ, and O. ROA. ISSN 0029-5981. 2001. Micromechanical Analysis of Quasi-Brittle Materials using Fracture-Based Interface Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 52(1), pp 193-215.
- CAROL, I., PRAT P.C. and LOPEZ C.M. (1997) A normal- shear cracking model. Application to discrete crack analysis. *Journal of Engineering Mechanics*.

- CHAN A. H. C., PASTOR M., SCHREFLER B. A., SHIOMI T. & ZIENKIEWICZ O. C., "Computational Geomechanics with Special Reference to Earthquake Engineering", John Wiley & Sons, Chichester, 1999.
- CHEN J.S., C. PAN, C.T. WU AND W.K. LIU, Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures. *Comput Methods Appl Mech Eng* 139 (1996), pp. 195-227.C.A.
- CHEN, Z., et al. ISSN 0013-7944. 2002. An Evaluation of the MPM for Simulating Dynamic Failure with Damage Diffusion. *Engineering Fracture Mechanics*. 69(17), pp 1873-1890.
- CHEN, Z., et al. ISSN 0044-2275. 2005. A Bifurcation-Based Decohesion Model for Simulating the Transition from Localization to Decohesion with the MPM. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*. 56(5), pp 908-30.
- COETZEE, C. J., A. H. BASSON, and P. A. VERMEER. ISSN 0022-4898. 2007. Discrete and Continuum Modelling of Excavator Bucket Filling. *Journal of Terramechanics*. 44(2), pp 177-186.
- COETZEE, C. J., P. A. VERMEER, and A. H. BASSON. ISSN 0363-9061. 2005. The Modelling of Anchors using the Material Point Method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 29(9), pp 879-895.
- CUMMINS, S. J. and J. U. BRACKBILL. ISSN 0021-9991. 2002. An Implicit Particle-in-Cell Method for Granular Materials. *Journal of Computational Physics*. 180(2), pp 506-48.
- CUNDALL, P.A.. STRACK, O.D.L. 1979. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29:47–65,
- ELGAMAL A,Z. YANG, E. PARRA. Computational modeling of cyclic mobility and post-liquefaction site response. *Soil Dynamics ad Earthquake Engineering* 22(2002) 259-271
- GENS, A. and E. E. ALONSO. ISSN 0016-8505. 2006. Aznalcollar Dam Failure. Part 2: Stability Conditions and Failure Mechanism. *Geotechnique*. 56(3), pp 185-201.
- GIBSON R.E., ENGLAND G.L., HUSSEY M.J.L. 1967. The theory of one dimensional consolidation of saturated clays: I. Finite non-linear consolidation of thin homogeneous layers. *Geotechnique*,17(2) pp:261–73.
- GIBSON, R. E., SCHIFFMAN, R. L., AND CARGILL, K. W. 1981. "The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays. II. Finite nonlinear consolidation of thick homogeneous layers." *Can. Geotech. J.*, 18(2),pp: 280–293.
- GUILKEY, J. E. and J. A. WEISS. ISSN 0029-5981. 2003. Implicit Time Integration for the Material Point Method: Quantitative and Algorithmic Comparisons with the Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 57(9), pp 1323-38.
- GUO, Y. and J. A. NAIRN. ISSN 1526-1492. 2004. Calculation of J-Integral and Stress Intensity Factors using the Material Point Method. *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*. 6(3), pp 295-308.
- GUO, Y. J. and J. A. NAIRN. ISSN 1526-1492. 2006. Three-Dimensional Dynamic Fracture Analysis using the Material Point Method. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. 16(3), pp 141-55.
- HARLOW F.H. 1964. The particle-in-cell computing method in fluid dynamics. *Methods in Computational Physics*, 3, 319-343.
- HU, W. and Z. CHEN. ISSN 0045-7949. 2003. A Multi-Mesh MPM for Simulating the Meshing Process of Spur Gears. *Computers & Structures*. 81(20), pp 1991-2002.

- HU, W. and Z. CHEN. ISSN 0734-743X. 2006. Model-Based Simulation of the Synergistic Effects of Blast and Fragmentation on a Concrete Wall using the MPM. *International Journal of Impact Engineering*. 32(12), pp 2066-96.
- HUANG M., PASTOR M. AND ZIENKIEWICZ O. C. 1995. Localization Problems in Plasticity using Finite Elements with Adaptive Remeshing. *Int. J. Numer. Analyt. Geomec.* 19 pp 127-148.
- HUANG, M., et al. ISSN 0029-5981. 2004. On the Stable Finite Element Procedures for Dynamic Problems of Saturated Porous Media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 61(9), pp 1421-50.
- IDELSOHN S., OÑATE E., DEL PIN, A Lagrangian meshless finite element method applied to fluid–structure interaction problems. *Computers and Structures* 81 (2003) 655–671
- IONESCU, I., et al. ISSN 0148-0731. 2006. Simulation of Soft Tissue Failure using the Material Point Method. *Journal of Biomechanical Engineering*. 128(6), pp 917-924.
- ISHIHARA, K., (1984) Post-earthquake failure of a tailings dam due to liquefaction of the pond deposit, *Proceedings, Vol. 3, International Conference on Case Histories in Geotechnical Engineering*, Rolla, Missouri, USA; May 1984
- JING L., 1998. Formulation of discontinuous deformation analysis (DDA)-an implicit discrete element model for block systems. *Eng Geol*;49:371-81.
- JOHANSSON, J. & K. KONAGAI (2007). Fault induced permanent ground deformations: experimental verification of wet and dry soil, numerical findings' relation to field observations of tunnel damage and implications for design. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 27(10), 938-956.
- KHOEI, A.R., AZAMI A. R., and HAERI S. M.. ISSN 0266-352X. 2004. Implementation of Plasticity Based Models in Dynamic Analysis of Earth and Rockfill Dams: A Comparison of Pastor-Zienkiewicz and Cap Models. *Computers and Geotechnics*. 31(5), pp 385-410.
- KONAGAI K., J. JOHANSSON. 2001. Two dimensional Lagrangian Particle Finite Difference Method for modeling large soil deformations. *Structural Eng./ Earthquake Eng.*, JSCE, Vol. 18, No. 2, 105s-110s.
- KONAGAI, K., JOHANSSON J. & ITOH H. (2004) Pseudo-three dimensional lagrangian particle finite difference method for modeling earthquake induced soil flows, 13th World Conference on Earthquake Engineering. No 547
- KRAMER S.L. 1996). “Geotechnical Earthquake Engineering”. Prentice Hall, Upper Saddle River.
- KRINITZSKY E.L. Y M.E. HYNES (2002). The Bhuj, India, earthquake: lessons learned for earthquake safety of dams on alluvium. *Engineering Geology*, 66, 163–196
- LANCELLOTTA R. (1995), *Geotechnical Engineering*. A. A. Balkema, Rotterdam.
- LI, X., X. HAN, and M. PASTOR. ISSN 0045-7825. 2003. An Iterative Stabilized Fractional Step Algorithm for Finite Element Analysis in Saturated Soil Dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 192(35), pp 3845-59.
- LING, H. I. and S. YANG. ISSN 0733-9399. 2006. Unified Sand Model Based on the Critical State and Generalized Plasticity. *Journal of Engineering Mechanics*. 132(12), pp 1380-1391.
- LIU K.W., S. JUN AND Y.F. ZHANG, Reproducing kernel particle methods. *Int J Numer Eng* 20 (1995), pp. 1081-1106.

- LOVE, E. and D. L. SULSKY. ISSN 0029-5981. 2006. An Energy-Consistent Material-Point Method for Dynamic Finite Deformation Plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 65(10), pp 1608-1638.
- LU, H., et al. ISSN 1478-6435. 2006. Multiscale Simulation from Atomistic to Continuum - Coupling Molecular Dynamics (MD) with the Material Point Method (MPM). *Philosophical Magazine*. 86(20), pp 2971-2994.
- MA, J., et al. ISSN 1526-1492. 2006. Multiscale Simulation of Nanoindentation using the Generalized Interpolation Material Point (GIMP) Method, Dislocation Dynamics (DD) and Molecular Dynamics (MD). *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*. 16(1), pp 41-55.
- MA, J., H. LU, and R. KOMANDURI. ISSN 1526-1492. 2006. Structured Mesh Refinement in Generalized Interpolation Material Point (GIMP) Method for Simulation of Dynamic Problems. *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*. 12(3), pp 213-227.
- MA, S., X. ZHANG, and X. QIU. ISSN 1001-1455. 2006. Three-Dimensional Material Point Method for Hypervelocity Impact. *Baozha Yu Chongji/Explosion and Shock Waves*. 26(3), pp 273-278.
- MABSSOUT, M., M. I. HERREROS, and M. PASTOR. ISSN 0029-5981. 2006. Wave Propagation and Localization Problems in Saturated Viscoplastic Geomaterials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 68(4), pp 425-447.
- MARCUSON, W. F., P. F. HADALA Y R. H. LEDBETTER (1996). "Seismic rehabilitation of earth dams". *ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Eng.*, Vol 122, No. 1, 7-20.
- MEROI, E.A.; SCHREFLER, B.A.; ZIENKIEWICZ, O.C. 1995. Large strain static and dynamic semisaturated soil behavior. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v 19, n 2, p 81-106,
- METZGER, D. R. ISSN 0029-5981. 2003. Adaptive Damping for Dynamic Relaxation Problems with Non-Monotonic Spectral Response. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 56(1), pp 57-80.
- MIRA, P., et al. ISSN 0045-7825. 2003. A New Stabilized Enhanced Strain Element with Equal Order of Interpolation for Soil Consolidation Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 192(37), pp 4257-4277.
- MONAGHAN J.J., An introduction to SPH. *Comput Phys Commun* 48 (1988), pp. 89-96.
- MORESI L., F. DUFOUR, H.-B. MUHLHAUS. (2001) A Lagrangian integration point finite element method for large deformation modeling of viscoelastic geomaterials. *Comp. Physics*,
- MORRIS P. H (2002). Analytical Solutions of Linear Finite-Strain One-Dimensional Consolidation. *ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Eng.*, Vol 128, No. 4
- NAIRN, J. A. ISSN 1526-1492. 2003. Material Point Method Calculations with Explicit Cracks. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. 4(6), pp 649-63.
- NEWMARK N. M. & ROSENBLUETH E., "Fundamentos de Ingeniería Sísmica", 1° ed., Editorial Diana, México D. F, 1976.
- NEWMARK, N. (1965). "Effects of earthquakes on dams and embankments". *Geotechnique*, Vol. 15, No. 2, 139-160.
- PASTOR M., O. C. ZIENKIEWICZ Y A. H. CHAN (1990). Generalized plasticity and the modelling of soil behaviour. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 14, 151-190.

- PASTOR, M., et al. ISSN 1082-5010. 2000. Fractional Step Algorithm Allowing Equal Order of Interpolation for Coupled Analysis of Saturated Soil Problems. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*. 5 pp 511-534.
- QUECEDO, M., M. PASTOR, and O. C. ZIENKIEWICZ. ISSN 0045-7949. 2000. Application of a Fractional Step Method to Localization Problems. *Computers & Structures*. 74 pp 535-45.
- REMMERS, J. J. C., R. DE BORST, and A. NEEDLEMAN. ISSN 0022-5096. 2008. The Simulation of Dynamic Crack Propagation using the Cohesive Segments Method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 56(1), pp 70-92.
- REMMERS, J. J. C., R. DE BORST, and A. NEEDLEMAN. ISSN 01787675. 2003. A Cohesive Segments Method for the Simulation of Crack Growth. *Computational Mechanics*. 31(1-2), pp 69-77.
- SCHREYER H. L., SULSKY D. AND YORK A. R. (2000). Fluid-membrane interaction based on the material point method. *Int J. Numer. Methods Eng.*, v. 48, p. 901-924.
- SCHREYER H. L., SULSKY D. AND ZHOU S-J (1995). Application of a particle-in-cell method to solid mechanics. *Comput. Phys. Commun.*, v. 87, p. 236-252.
- SCHREYER, H. L., D. L. SULSKY, and S. ZHOU. ISSN 0045-7825. 2002. Modeling Delamination as a Strong Discontinuity with the Material Point Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 191(23), pp 2483-2507.
- SEED, H. B., KENNETH, L. Y M. IDRIS. (1969). "Analysis of Sheffield Dam Failure". *ASCE Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, Vol.95, No.SM6.
- SEED, H.B., LEE, K.L., IDRIS, I.M. Y MAKDISI, F.I. (1973). "Analysis of the slide in the San Fernando dams during the earthquake of february 9, 1971". EERC Report No. 73-02, U. of California, Berkeley.
- SEED, H.B.; KENNETH,L.(1966)."A method for earthquake resistant design of earth dams", *Journal of he Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol.92, No.SM1.
- SEED,H.B. (1981). "Earthquake-Resistant Design of Earth Dams", *International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, Vol III, St. Louis, Missouri.
- SHEN, L. and Z. CHEN. ISSN 0020-7683. 2005. A Multi-Scale Simulation of Tungsten Film Delamination from Silicon Substrate. *International Journal of Solids and Structures*. 42(18), pp 5036-56.
- SHEN, L. and Z. CHEN. ISSN 1526-1492. 2005. A Silent Boundary Scheme with the Material Point Method for Dynamic Analyses. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. 7(3), pp 305-20.
- SHEN, Y. -, et al. ISSN 0020-7403. 2000. Localization of Plastic Deformation Along Grain Boundaries in a Hardening Material. *International Journal of Mechanical Sciences*. 42(11), pp 2167-89.
- SINGH R. , DEBASIS R., SUDHIR K. JAIN (2005). Analysis of earth dams affected by the 2001 Bhuj Earthquake. *Engineering Geology* 80 (2005) 282– 291
- SIMO J., C. and HUGHES T.J.R.1998. *Computational Elasticity*. Springer-Verlag New York.
- SULSKY AND H.L. SCHREYER, Axisymmetric form of the material point method with applications to upsetting and Taylor impact problems. *Comput Methods Appl Mech Eng* 139 (1996), pp. 409-429.

- SULSKY D, SCHREYER HL, ZHOU S-J, (1995 ) “Application of a particle-in-cell method to solid mechanics”, *Computer Physics Communications*; 87: 236-252.
- SULSKY D., SCHREYER H. L. & YORK A. R., "Fluid-Membrane Interaction Based on the Material Point Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, pp. 901-924, 2000.
- SULSKY, D. 2003. A Numerical Study of Compaction of Dry Granular Material. pp 81-9.
- SULSKY, D. and A. KAUL. ISSN 0045-7825. 2004. Implicit Dynamics in the Material-Point Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 193(12), pp 1137-1170.
- SULSKY, D. and H. L. SCHREYER. ISSN 0045-7825. 1996. Axisymmetric Form of the Material Point Method with Applications to Upsetting and Taylor Impact Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 139(1), pp 409-29.
- SULSKY, D. L. and E. LOVE. ISSN 0045-7825. 2006. An Unconditionally Stable, Energy-Momentum Consistent Implementation of the Material-Point Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 195(33), pp 3903-25.
- SULSKY, D., Z. CHEN, and H. L. SCHREYER. ISSN 0045-7825. 1994. A Particle Method for History-Dependent Materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 118(1), pp 179-96.
- TAN, H. and J. A. NAIRN. ISSN 0045-7825. 2002. Hierarchical, Adaptive, Material Point Method for Dynamic Energy Release Rate Calculations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 191(19), pp 2095-2109.
- VERMEER P. A., BEUTH L. & BENZ T. A. (2008) Quasi-static method for large deformation problems in geomechanics. The 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG) Goa, India
- WANG, B., et al. ISSN 1537-6494. 2005. Two-Dimensional Mixed Mode Crack Simulation using the Material Point Method. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 12(6), pp 471-84.
- WEISS, J. A., J. E. GUILKEY, and J. B. HOYING. ISSN 0021-9290. 2006. Computational Modeling of Multicellular Constructs with the Material Point Method. *Journal of Biomechanics*. 39(11), pp 2074-86.
- WELLS, G. N., L. J. SLUYS, and R. DE BORST. ISSN 00295981. 2002. Simulating the Propagation of Displacement Discontinuities in a Regularized Strain-Softening Medium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 53(5), pp 1235-1256.
- WELLS, G. N. and L. J. SLUYS. ISSN 0029-5981. 2001 A New Method for Modelling Cohesive Cracks using Finite Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 50(12), pp 2667-82.
- WIECKOWSKI, Z. ISSN 0045-7825. 2004. The Material Point Method in Large Strain Engineering Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 193(39), pp 4417-4438.
- WIECKOWSKI, Z. ISSN 1428-6394. 2003. Modelling of Silo Discharge and Filling Problems by the Material Point Method. *TASK Quarterly*. 7(4), pp 701-21.
- WIELAND, M. (1999) “Position Paper on Earthquake Safety of Large Dams”. Comité ICOLD: Seismic Aspects of Dam Design.
- XUE, L., et al. ISSN 0965-0393. 2006. Micromechanics Simulations of the Viscoelastic Properties of Highly Filled Composites by the Material Point Method (MPM).

- Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. 14(4), pp 703-720.
- YANG, W. and Z. GUO. ISSN 0020-7403. 2006. MPM/MD Handshaking Method for Multiscale Simulation and its Application to High Energy Cluster Impacts. International Journal of Mechanical Sciences. 48(2), pp 145-59.
- YORK, A. R. I., D. SULSKY, and H. L. SCHREYER. ISSN 0029-5981. 1999. Material Point Method for Simulation of Thin Membranes. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 44(10), pp 1429-1456.
- YORK, A. R. I., D. SULSKY, and H. L. SCHREYER. ISSN 0029-5981. 2000. Fluid-Membrane Interaction Based on the Material Point Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 48(6), pp 901-924.
- ZABALA,F., RODARI R. y OLDECOP L., 2004 ISSN 1806-3985 Localización de deformaciones en estructuras utilizando el Metodo del Punto Material. Revista Engenharia Estrutural. UPF.
- ZABALA,F. y ALONSO, E.E..Progressive failure of aznalcollar dam using the material point method. Geotechnique (aceptado para su publicación) 2010
- ZHANG, H. W. and B. A. SCHREFLER. ISSN 0363-9061. 2002. Analytical and Numerical Investigation of Uniqueness and Localization in Saturated Porous Media. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 26(14), pp 1429-1448.
- ZHOU, S. J., H. L. SCHREYER, Z. CHEN, and D. SULSKY. 1995. Application of the Material Point Method to Localization Problems. 2 pp 1207-1210.
- ZHOU, S., J. STORMONT, and Z. CHEN. ISSN 0363-9061. 1999. Simulation of Geomembrane Response to Settlement in Landfills by using the Material Point Method. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 23(15), pp 1977-1994.
- ZIENKIEWICZ O.C., CHANG C.T. & BETTESS P. (1980). Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils. Géotechnique 30, No. 4, 385–395
- ZIENKIEWICZ O.C., SHIOMI T., (1984) Dynamic behavior of saturated porous media: the generalized Biot formulation and its numerical solution, Int. J. Numer. Anal. Methods Geo-mech. 8, 71–96.
- ZIENKIEWICZ O. C., CHAN A. H. C., PASTOR M., SCHREFLER B. A., SHIOMI T., 1999, Computational Geomechanics with Special Reference to Earthquake Engineering. John Wiley and Sons, Chichester.
- ZIENKIEWICZ O. C & TAYLOR R. L., 2004, "El Método de los Elementos Finitos (Vol. 1)", 5º ed.,