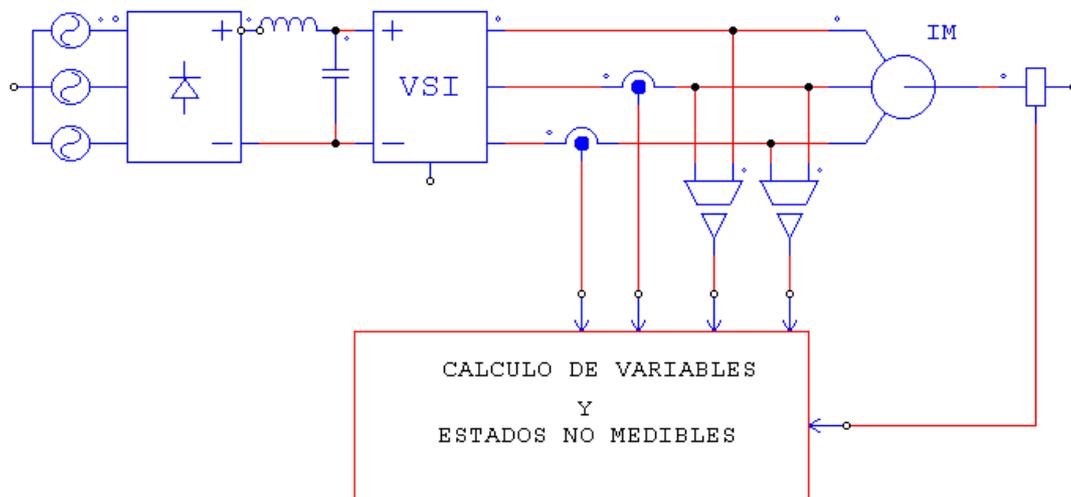




UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUNYA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

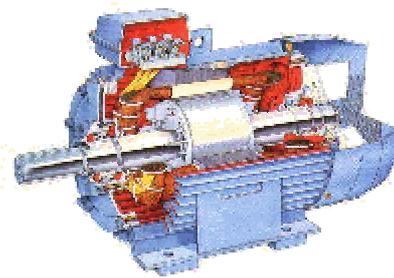
APORTACIÓN A LA DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS DE LOS MODELOS EN LA MÁQUINA ASÍNCRONA PARA UNA MEJOR IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES NO MENSURABLES INCIDENTES EN SU CONTROL



Ramón Bargalló Perpiñá

Directores de la Tesis : Joan Llaverías Sanmartí
Angel Luis Orille Fernández

Barcelona, Julio del 2001



“En Física, como en las otras ciencias, puede demostrarse *propter quid*; sin embargo el orden de la Ciencia quiere que se empiece por las cosas más conocidas y fáciles y, por tanto, hay que proceder, en general, del efecto a la causa: a *posteriori*, pues, conoceremos la materia, la forma y la mayoría de las cosas, pues no podemos probarlo todo a *priori*”

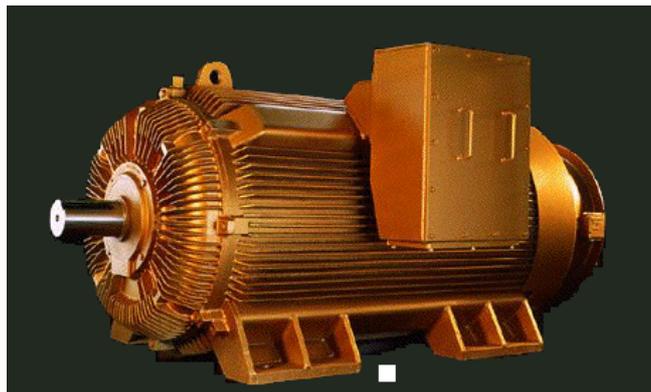
Guillermo de Occam
Filósofo Inglés
(1295-1349/50)

.....

Porque en la ciencia, como en la naturaleza, a menudo lo que funciona es la solución más simple, la obvia.

Anónimo

INTRODUCCIÓN



INTRODUCCIÓN

A MODO DE INTRODUCCIÓN

Al analizar el funcionamiento de las máquinas eléctricas dudamos acerca de la elección de, uno u otro, conjunto de variables, modelos, o conjunto de parámetros. En este trabajo se han encontrado, frecuentemente, resultados que contradicen lo medido experimentalmente, o tiempos de cálculo muy diversos según el modelo adoptado o el tipo de simulación realizada; cosa por otra parte lógica en un ámbito que admite aportaciones de mejora.

La necesidad de una buena modelización actualmente se plantea como una premisa para obtener un mejor control y un adecuado dimensionado de los accionamientos; con este fin se aborda este trabajo determinando la secuenciación que sigue.

En primer lugar (**Capítulo 1**) se repasan los *antecedentes y estado actual*. Seguidamente se ha planteado (**Capítulo 2**) el estudio de *modelos de máquinas asíncronas con caracterización de la saturación*; existen diversos modelos que lo posibilitan a costa de una mayor o menor dificultad de cálculo y resolución. La línea escogida toma un modelo transformado que reduce el número de parámetros a encontrar o estimar; en algunos de los modelos planteados se reduce la carga de cálculo necesaria para su resolución. Asimismo se plantea el análisis de *sensibilidad* de la respuesta (**Capítulo 3**) respecto a las variaciones de los parámetros; es evidente que habrá parámetros que tendrán escasa influencia en la respuesta del sistema, así como otros que influirán de forma directa e inmediata en la misma.

Una vez establecido el modelo, o modelos a utilizar, deben encontrarse los parámetros de los mismos. Una primera parte se dedica a la *determinación de parámetros mediante ensayos fuera de línea* (**Capítulo 4**), lo que permite aproximarnos a la solución deseada. La *determinación de parámetros mediante ensayos en línea y técnicas de estimación en tiempo real* (**Capítulo 5**), junto con la consideración, en su caso, de observadores para variables auxiliares como el flujo, permiten cerrar el capítulo de estimación de parámetros.

La *determinación de variables auxiliares como los pares electromagnético y de carga* (**Capítulo 6**), es el objetivo final del trabajo. La aplicación de observadores y estimadores permite la obtención de las variables deseadas, resultando un modelo más preciso y exacto.

A modo de aplicación se ha obtenido un medidor de par en régimen transitorio; aspecto colateral del trabajo que resulta relevante dado que no se dispone, actualmente, de un medidor de par con estas características. El equipo desarrollado se basa en un conjunto que comprende máquina de corriente continua y sistema de control.

Finalmente se aborda la modelización conjunta del sistema convertidor-máquina-carga (**Capítulo 7**). No se pretende analizar a fondo la modelización del convertidor, ello podría ser objeto de un estudio más específico; no obstante la influencia que tiene el tipo de señal aplicada a la máquina, aconseja su consideración con el fin de obtener resultados más reales que una suposición de alimentación sinusoidal permitirían.

Se finaliza con un *capítulo final de discusiones* (**Capítulo 8**) de los resultados obtenidos, a los que siguen aquellas aplicaciones que se entienden como mejoradas por este trabajo, así como las pertinentes conclusiones, tal como indica el gráfico siguiente.

Cierra el documento una *relación bibliográfica* (**Bibliografía**) relevante y un apartado de anexos donde se añaden deducciones matemáticas prolíficas tales como las de las *ecuaciones de sensibilidad* (**Anexo I**), el *cálculo de las ganancias del observador* (**Anexo II**) las *características de las máquinas ensayadas* (**Anexo III**) y *el método de los mínimos cuadrados. Aplicaciones* (**Anexo IV**).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la CICYT TAP97-0969-C03-03.

Gracias a todos los compañeros que me han animado y criticado; recuerdo frases del tipo:

“No entiendo nada pero esas ecuaciones tienen un aspecto formidable”

“¿Sirve para algo?”

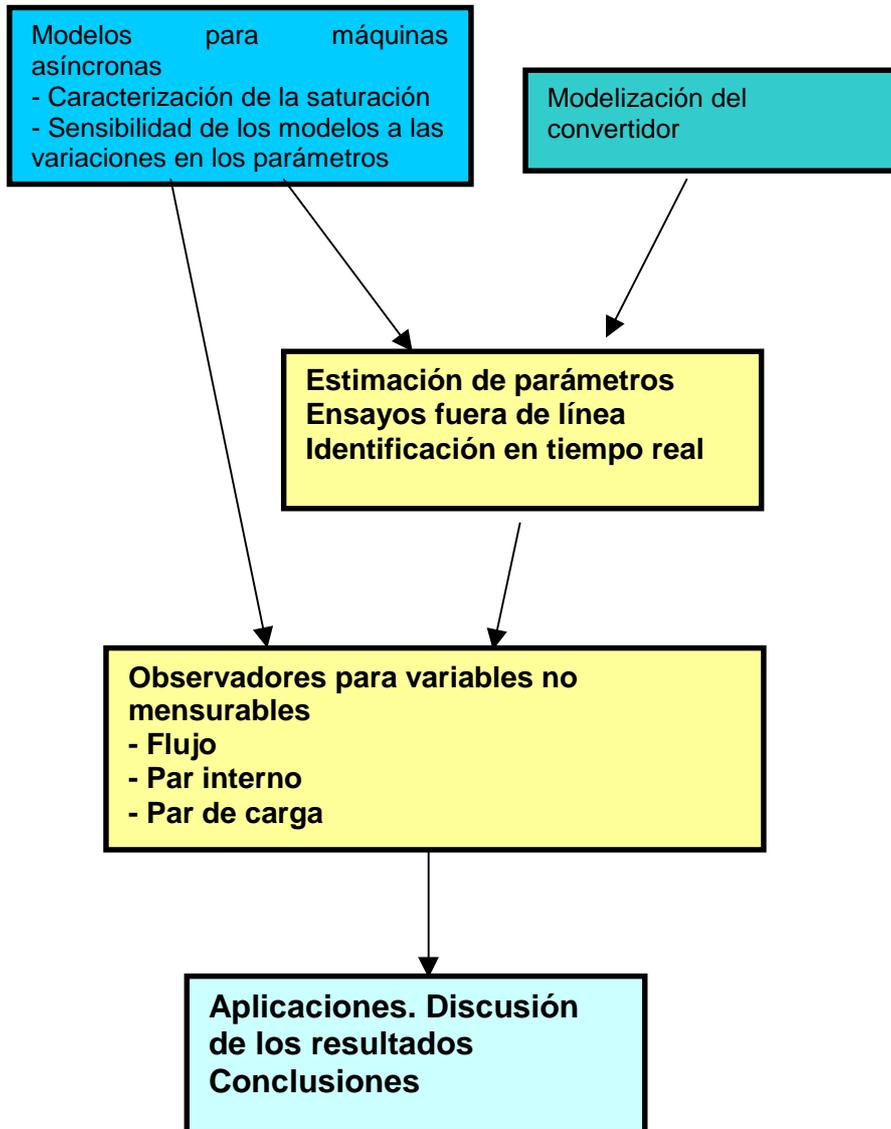
“ Y esto, ¿qué te aporta?”

“Asegura el resultado porque no puede estar bien, es demasiado fácil”.

Gracias por el sarcasmo que ha servido para replantearme temas que, evidentemente, no serían lo que son sin estos comentarios.

Gracias a los que me han ayudado a solucionar los inevitables problemas que suele acarrear el desarrollo de equipos experimentales.

Finalmente, gracias a los que me rodean y que han soportado mi malhumor cuando las cosas no salían como deseaba.



ÍNDICE

Ninguno	1) _____ _____	1. _____ _____	◆ _____ _____
Artículo I. Título _____	1) Título 1 _____ _____	I. Título 1 _____ _____	Capítulo 1 Título _____
Sección 1.01 T _____	1.1 Título 2 _____ _____	A. Título 2 _____ _____	Título 2 _____ _____
(a) Título 3 _____ _____	1.1.1 Título 3 _____ _____	1. Título 3 _____ _____	Título 3 _____ _____

ÍNDICE GENÉRICO

LISTA DE SÍMBOLOS

1. ANTECEDENTES Y ESTADO ACTUAL	1.1
2. MODELOS DE MÁQUINAS ASÍNCRONAS CON CONSIDERACIÓN DE LA SATURACIÓN	2.1
3. SENSIBILIDAD	3.1
4. OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS POR ENSAYOS FUERA DE LÍNEA	4.1
5. OBTENCIÓN DE VARIABLES NO MEDIBLES Y PARÁMETROS EN SERVICIO	5.1
6. APLICACIONES	6.1
7. MODELIZACIÓN DEL CONVERTIDOR	7.1
8. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS. CONCLUSIONES Y APORTACIONES	8.1
BIBLIOGRAFÍA	B.1
ANEXO I. EXPRESIONES PARA EL CÁLCULO DE LA SENSIBILIDAD	AI
ANEXO II. CALCULO DE LA GANANCIA DEL OBSERVADOR. FÓRMULA DE ACKERMANN	AII
ANEXO III. MÁQUINAS ENSAYADAS	AIII
ANEXO IV. EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS RECURSIVOS. APLICACIONES	AIV

1. ANTECEDENTES Y ESTADO ACTUAL	2
Modelos	2
Métodos. Observación y estimación de estados	4
Aplicaciones. Equipo para la medida del par en régimen Transitorio	5
PALABRAS CLAVE	5
2. MODELOS PARA LA MÁQUINA ASÍNCRONA CON CONSIDERACIÓN DE LA SATURACIÓN	3
MODELIZACIÓN DE LOS EFECTOS DE LA SATURACIÓN	7
ECUACIONES DE LA MÁQUINA TENIENDO EN CUENTA LA SATURACIÓN.	
CONSIDERACIÓN DE DIVERSOS CONJUNTOS DE VARIABLES DE ESTADO.	9
Variables de estado corrientes de estator y rotor. Modelo 1.	10
Variables de estado los flujos de estator y rotor. Modelo 2.	11
Variables de estado la corriente de estator y El flujo magnetizante. Modelo 3.	13
Variables de estado las corrientes de estator y el flujo del rotor. Modelo 4.	14
Variables de estado la corriente de estator y la magnetizante. Modelo 5.	15
MODELOS SIMPLIFICADOS.	16
MODELOS CON SATURACIÓN DEPENDIENTE DE LAS COMPONENTES DEL PROPIO EJE.	16
Variables de estado corrientes de estator y rotor. Modelo 6	16
Variables de estado los flujos de estator y rotor. Modelo 7.	17
Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 8.	18
Variables de estado la corriente del estator y el flujo del rotor. Modelo 9.	19
Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 10.	20
MODELOS EN T Y EN I	21
Variables de estado las corrientes de estator y rotor. Modelo 11.	23
Variables de estado los flujos de estator y rotor. Modelo 12.	24
Variables de estado la corriente de estator y el flujo magnetizante. Modelo 13.	25
Variables de estado las corrientes de estator y el flujo del rotor. Modelo 14.	26
Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 15.	27
Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 16	28
Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 17.	29
Variables de estado la corriente de estator y el flujo magnetizante. Modelo 18.	30
Variables de estado la corriente de estator y el flujo de rotor. Modelo 19.	30
Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 20.	31
Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 21.	32
Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 22.	33
Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 23	34
Variables de estado la corriente del estator y el flujo del rotor. Modelo 24.	35
Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 25.	36
Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 26.	37
Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 27.	38
<u>APORTACION A LA DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS DE LOS MODELOS EN LA MÁQUINA ASÍNCRONA PARA UNA MEJOR IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES NO MENSURABLES INCIDENTES EN SU CONTROL</u>	

<i>Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 28.</i>	39
<i>Variables de estado la corriente del estator y el flujo de rotor. Modelo 29.</i>	39
<i>Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 30.</i>	40
MODELOS BASADOS EN LA ORIENTACIÓN DEL CAMPO.	41
<i>Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 31.</i>	41
<i>Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 32.</i>	42
<i>Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 33.</i>	43
<i>Variables de estado la corriente del estator y el flujo del rotor. Modelo 34.</i>	43
<i>Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 35.</i>	44
<i>Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 36.</i>	45
<i>Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 37.</i>	45
<i>Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 38.</i>	46
<i>Variables de estado la corriente del estator y el flujo del rotor. Modelo 39.</i>	47
<i>Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 40.</i>	47
<i>Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 41.</i>	48
<i>Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 42.</i>	48
<i>Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 43.</i>	49
<i>Variables de estado la corriente del estator y el flujo de rotor. Modelo 44.</i>	49
<i>Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 45</i>	49
RESUMEN COMPARATIVO DE LOS DISTINTOS MODELOS.	50
MODELOS BASADOS EN LA ORIENTACIÓN DEL CAMPO.	52
MODELOS BASADOS EN LA ORIENTACIÓN DEL CAMPO. MODELOS TIPO $\Gamma(I)$. CANCELACIÓN DE L_{SL}.	52
MODELOS BASADOS EN LA ORIENTACIÓN DEL CAMPO. MODELOS TIPO $\Gamma(II)$. CANCELACIÓN DE L_{RL}.	53
CONCLUSIONES.	53
3. SENSIBILIDAD	2
<i>Ecuaciones de sensibilidad de un sistema dinámico.</i>	2
<i>Aplicación al caso de una bobina saturada.</i>	4
<i>Aplicación a las ecuaciones de la máquina asíncrona.</i>	10
CONCLUSIONES.	31
4. OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS POR ENSAYOS FUERA DE LÍNEA	2
<i>Ensayos a potencia útil nula</i>	2
<i>Modelización de la saturación.</i>	6
<i>Caracterización mediante polinomios [Justus 91].</i>	7
<i>Aplicación a la caracterización de la curva de saturación de un transformador.</i>	10
<i>Aplicación a la modelización de características de saturación para la máquina asíncrona.</i>	12
<i>Trabajo en vacío.</i>	13
<i>Trabajo a rotor frenado.</i>	14
<i>Resultados experimentales de contrastación.</i>	16
CONCLUSIONES.	22

5. OBTENCIÓN DE VARIABLES NO MEDIBLES Y PARÁMETROS EN SERVICIO	2
<i>Observador para el flujo de la máquina asíncrona.</i>	3
<i>Modelo discreto para el observador.</i>	6
<i>Estimación de los parámetros(coeficientes) del modelo.</i>	44
<i>Parámetros(coeficientes) eléctricos.</i>	44
<i>Estimación del par electromagnético. Estimación de parámetros(coeficientes) mecánicos.</i>	46
<i>Contrastación experimental.</i>	47
MODELO COMPLETO	48
<i>Modelo reducido.</i>	60
CONCLUSIONES.	72
<i>Modelo completo:</i>	73
<i>Modelo reducido:</i>	73
<i>Parámetros mecánicos:</i>	73
6. APLICACIONES.	2
<i>Equipo para la determinación del par instantáneo.</i>	2
<i>Control por corriente de la máquina de corriente continua.</i>	3
<i>Estimación del par de carga.</i>	4
<i>Estimación del par electromagnético de la máquina asíncrona.</i>	
<i>Resultados de simulación.</i>	5
<i>Contrastación experimental.</i>	8
CONCLUSIONES.	10
7. MODELIZACIÓN DEL CONVERTIDOR	2
<i>Función de conexión [Hautier 99].</i>	2
<i>Funciones de conversión.</i>	3
<i>Generalización de la modelización.</i>	7
<i>Conversión de tensiones.</i>	9
<i>Conversión de corrientes.</i>	10
<i>Aplicación a las estructuras convertidoras clásicas.</i>	11
<i>Convertidor 2/2.</i>	11
<i>Convertidor 3/2.</i>	12
<i>Convertidor 2/3.</i>	13
<i>Formulación del sistema completo de ecuaciones.</i>	14
<i>Aplicación a la modelización del transformador trifásico.</i>	16
<i>Aplicación al caso del conjunto convertidor+filtro de entrada+carga R+L+E.</i>	18
<i>Aplicación al caso del conjunto convertidor+filtro de entrada+máquina asíncrona+carga.</i>	20
<i>Aplicación al conjunto ondulator de corriente+filtro de salida +carga accionada.</i>	27
<i>Función generatriz de conversión.</i>	31
<i>Estructuras de control basadas en las funciones generatrices de modulación.</i>	36
<i>Aportación experimental: caso del conjunto máquina asíncrona+convertidor+carga.</i>	37
CONCLUSIONES	40

8. DISCUSIÓN DE RESULTADOS. CONCLUSIONES Y APORTACIONES	2
<i>Modelos de máquinas asíncronas considerando la saturación.</i>	2
<i>Sensibilidad.</i>	3
<i>Obtención de los parámetros por ensayos fuera de línea.</i>	4
<i>Obtención de variables no medibles y parámetros en servicio.</i>	4
<i>Modelo completo:</i>	6
<i>Modelo reducido:</i>	7
<i>Parámetros mecánicos:</i>	7
<i>Modelización del convertidor.</i>	8
<i>Aplicaciones.</i>	8
<i>Futuros desarrollos.</i>	9
BIBLIOGRAFIA	2
LIBROS	2
<i>Máquinas Eléctricas. Teoría. Modelización. Control</i>	2
<i>Convertidores. Modelización. Control</i>	3
<i>Identificación de sistemas</i>	3
<i>Sensibilidad</i>	4
<i>Control no Lineal. Técnicas. Observadores.</i>	4
TESIS DOCTORALES	4
ARTÍCULOS, PONENCIAS, COMUNICACIONES	5
<i>Artículos sobre modelización de máquinas. Obtención de parámetros y observación de variables no medibles y estados</i>	5
<i>Artículos sobre Control de Máquinas Asíncronas</i>	7
<i>Artículos históricos sobre modelización de máquinas y convertidores</i>	7
PROYECTOS FINAL DE CARRERA	8
ANEXO I. EXPRESIONES PARA EL CÁLCULO DE LA SENSIBILIDAD	AI
ANEXO II. CALCULO DE LA GANANCIA DEL OBSERVADOR. FÓRMULA DE ACKERMANN	AII
ANEXO III. MÁQUINAS ENSAYADAS	AIII
<i>Características de las máquinas ensayadas.</i>	2
<i>Ensayos en vacío y cortocircuito a frecuencia nominal</i>	2
<i>Máquina nº1</i>	2
<i>Máquina nº2</i>	3
<i>Máquina nº3</i>	4
<i>ensayo a rotor frenado realizado a frecuencia de deslizamiento. máquina nº 2</i>	5
<i>ensayo en carga. máquina nº 2</i>	7
<i>Ficha del ensayo</i>	9
ANEXO IV. EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS RECURSIVOS. APLICACIONES	2
<i>Caracterización en línea.</i>	2
<i>Determinación de parámetros</i>	3
<i>Caso 1: $N = np$</i>	3
<i>Caso 2: $N \neq np$</i>	3
<i>Método de los mínimos cuadrados</i>	4
<i>Estimación Recursiva de Mínimos Cuadrados.</i>	5
RESTRICCIONES AL MÉTODO	7
<i>Aplicación al caso de un transformador</i>	8
<i>resultados de simulación</i>	9
<i>Contrastación experimental. aplicación al caso de un transformador en vacío</i>	29
CONCLUSIONES	34

LISTADO DE SIMBOLOS**Variables****Tensiones**

V, u	tensión (V)
v	vector tensión (V) – en el sentido matricial del termino
u_{sA}, u_{sB}, u_{sC}	tensión estatórica, fases a, b, c respectivamente (V)
u_{rA}, u_{rB}, u_{rC}	tensión rotórica, fases a, b, c (V)
\underline{u}_s	vector espacial de tensión estatórica; ref. fija (V)
\underline{u}_r	vector espacial de tensión rotórica; ref. fija (V)
\underline{u}_{sg}	vector espacial de tensión estatórica; ref. genérica (V)
\underline{u}_{rg}	vector espacial de tensión rotórica; ref. genérica (V)
\underline{u}_{s0}	tensión homopolar (V)
$\underline{u}_{s0}, \underline{u}_{r0}$	tensión homopolar estatórica, rotórica (V)
u_{sx}	tensión estatórica; componente real (V)
u_{sy}	tensión estatórica; componente imaginaria (V)
u_{rx}	tensión rotórica; componente real (V)
u_{ry}	tensión rotórica; componente imaginaria (V)

Corrientes

i	corriente (A)
i_{sA}, i_{sB}, i_{sC}	corriente estatórica, fases a, b, c (A)
i_{rA}, i_{rB}, i_{rC}	corriente rotórica, fases a, b, c (A)
\underline{i}_s	vector espacial de corriente estatórica; referencia fija (A)
\underline{i}_r	vector espacial de corriente rotórica; ref. fija (A)
\underline{i}_{sg}	vector espacial de corriente estatórica; ref. genérica (A)
\underline{i}_{rg}	vector espacial de corriente rotórica; ref. genérica (A)
\underline{i}_{s0}	corriente homopolar (A)
$\underline{i}_{s0}, \underline{i}_{r0}$	corriente homopolar estatórica, rotórica (A)
\underline{i}_{mg}	corriente magnetizante; ref. genérica (A)
\underline{i}_{msg}	corriente magnetizante estatórica; ref. genérica (A)
\underline{i}_{mrg}	corriente magnetizante rotórica; ref. genérica (A)
Δi	variación de corriente (A)
i_{mx}	corriente magnetizante; componente real (A)
i_{my}	corriente magnetizante; componente imaginaria (A)
i_{sx}	corriente estatórica; componente real (A)
i_{sy}	corriente estatórica; componente imaginaria (A)
i_{rx}	corriente rotórica; componente real (A)
i_{ry}	corriente rotórica; componente imaginaria (A)

Flujos

Ψ	flujo (Vs)
$\Psi_{sA}, \Psi_{sB}, \Psi_{sC}$	flujo estatórico, fases a, b, c (Vs)
$\Psi_{rA}, \Psi_{rB}, \Psi_{rC}$	flujo rotórico, fases a, b, c (Vs)
$\underline{\Psi}_s$	vector espacial de flujo estatórico; ref. fija (Vs)
$\underline{\Psi}_r$	vector espacial de flujo rotórico; ref. fija (Vs)
$\underline{\Psi}_{sg}$	vector espacial de flujo estatórico; ref. genérica (Vs)
$\underline{\Psi}_{rg}$	vector espacial de flujo rotórico; ref. genérica (Vs)
$\underline{\Psi}_{s0}$	vector espacial de flujo homopolar estatórico; ref. genérica (Vs)
$\underline{\Psi}_{r0}$	vector espacial de flujo homopolar rotórico; ref. genérica (Vs)
$\Delta\Psi$	variación de flujo (Vs)
Ψ_{mx}	flujo magnetizante; componente real (Vs)
Ψ_{my}	flujo magnetizante; componente imaginaria (Vs)
Ψ_m	flujo magnetizante (Vs)
Ψ_{sx}	flujo estatórico; componente real (Vs)
Ψ_{sy}	flujo estatórico; componente imaginaria (Vs)
Ψ_s	flujo estatórico (Vs)
Ψ_{rx}	flujo rotórico; componente real (Vs)
Ψ_{ry}	flujo rotórico; componente imaginaria (Vs)
Ψ_r	flujo rotórico (Vs)
Ψ_N	flujo nominal (Vs)

Par, velocidad

M_e	par electromagnético, par interno (Nm)
M_c	par de carga (Nm)
n	velocidad de rotación (min^{-1})
ω_r	velocidad de rotación (eléctrica) (rad/s)
ω_{rm}	velocidad mecánica de rotación (rad/s)
ω, ω_g	velocidad genérica del sistema de coordenadas (rad/s)
θ_r	ángulo eléctrico (rad)
θ_{rm}	ángulo mecánico (rad)

Parámetros**Eléctricos**

L	coef. de autoinducción (H)
L_{ss}, L_s	coeficiente de autoinducción estatórico ($=L_{sl}+L_{sm}$) (H)
L_{rr}, L_r	coeficiente de autoinducción rotórico ($=L_{rl}+L_{rm}$) (H)
L_m	coef. de inducción mútua estator-rotor (H)
L_{ddm}	coef. de acoplamiento estator-rotor; eje directo (H)
L_{qqm}	coef. de acoplamiento estator-rotor; eje en cuadratura (H)
L_{dq}	coef. de acoplamiento entre ejes
L_{sl}	inductancia de dispersión estatórica (H)
L_{rl}	inductancia de dispersión rotórica (H)
L'_{sl}	inductancia de dispersión estatórica; modelo $\Gamma(II)$ (H)
L'_{rl}	inductancia de dispersión rotórica; modelo $\Gamma(I)$ (H)
L'_m	inductancia mútua; modelos $\Gamma(I), \Gamma(II)$ (H)
$L(i)$	inductancia dinámica (H)
$L_m(i)$	inductancia estática (H)
L_{s0}, L_{r0}	coef. autoinducción homopolar estatórico, rotórico (H)
[M]	matriz de acoplamiento
$[M_s], [M_r], [M_{sr}]$	matriz de acoplamiento estatórico, rotórico, estator-rotor
M_s, M_r	coeficiente de inducción mútua estatórico, rotórico (H)
R_s, r_s	resistencia estatórica (fase) (Ω)
R_r, r_r	resistencia rotórica (fase) (Ω)
R_{s0}, R_{r0}	resistencia homopolar estatórica, rotórica (Ω)

Mecánicos

J	momento de inercia (kgm^2)
ρ	coeficiente de rozamiento (Nm/rad/s)

Constructivos

D	diámetro en el entrehierro (m)
l	longitud axial (m)
N_s, N_r	número de espiras equivalentes por fase de estator, rotor
P, p	pares de polos
δ	espesor del entrehierro (m)
σ_{sl}, σ_{rl}	coef. de dispersión del estator, rotor

Saturación

a	relación de reducción estator-rotor
$a_1, a_2, a_3, a, b,$ n, m	coeficientes característicos de la función de saturación
$f(i)$	función de saturación
$g(\Psi)$	función de saturación
I^*	corriente en p.u.
I_N	corriente para la cual se obtiene el flujo nominal Ψ_N (A)
$i_{\mu c}$	corriente coercitiva (A)
$i_{\mu sat}$	corriente de saturación (A)
k_a, k_b, k_c, k_d, k_e	parámetros característicos de la modelización del ciclo de histéresis
Ψ_r	flujo remanente (Vs)
Ψ_{sat}	flujo de saturación (Vs)
Ψ^*	flujo en p.u.

Modelización del convertidor

f_{ci}	función de conexión del interruptor i
$f_g(k,t)$	función generatriz muestreada
F	matriz de funciones de conexión
$F_c(s)$	función de transferencia para la función generatriz de conversión
F_0	matriz de funciones de conexión en conducción discontinua
F_r	matriz reducida de funciones de conexión
G_e	vector de magnitudes a conmutar $(V_s I_s)^T$
G_m	vector de magnitudes conmutadas $(V_m I_m)^T$
i_{ci}	corriente que atraviesa el interruptor i (A)
i_c	corriente a conmutar (A)
I_s, I_m	vectores de corrientes (V)
m_g	función generatriz de conversión
m_{ij}	funciones compuestas de conversión
M_i	matriz reducida de funciones compuestas de conversión para corrientes
M_r	matriz de conversión (generalizada)
M_u	matriz reducida de funciones compuestas de conversión para tensiones
n_j	funciones simples de conversión
R_{cv}	matriz relación de conversión entre función de conexión y
v_c	tensión a conmutar (V)
v_{ci}	tensión entre bornes del interruptor i (V)
V_0	vector tensión en régimen discontinuo (V)
V_s, V_m	vectores de tensiones (V)

Ecuaciones de estado; observadores; identificación

A	matriz del sistema
B, B _e , B _m	matriz de entradas
C, C _s	matriz de observación
D, D _e , D _m	matriz de transferencia directa
e(k)	error de medida
F	matriz del sistema (tiempo discreto)
G	matriz de entrada (tiempo discreto)
h	período de muestreo
K(k)	ganancia del algoritmo de adaptación
K	ganancia del observador
k _{sx} , k _{sy} , k _{rx} , k _{ry}	ganancias del observador
P(λ)	polinomio característico
P(k)	matriz de covariancias
W _o	matriz de observabilidad
X	vector de estados
Y	vector de salidas
y(k)	conjunto de medidas
^	todas las variables que llevan circunflejo son observadas
δ	operador delta
φ(k)	conjunto de funciones consideradas para la identificación
θ	vector de parámetros a estimar
γ	ganancia del observador
ε	error

Sensibilidad

γ _k ^j	sensibilidad de la variable de estado k respecto del parámetro j
σ _k ^j	sensibilidad de la variable de salida k respecto del parámetro j
p ₀	vector de parámetros

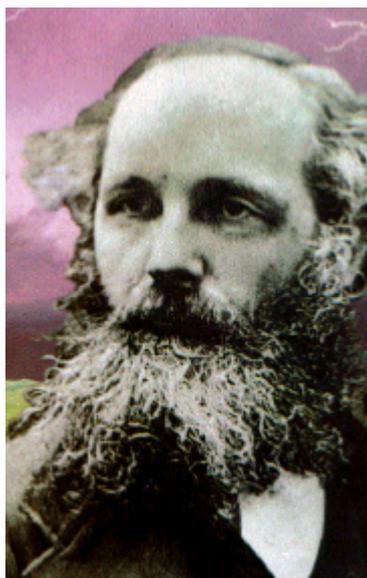
Varios

C	capacidad (F)
P _{Fe}	perdidas en el hierro (W)
P _{vacio}	perdidas en vacío (W)
Q _μ	potencia magnetizante (var)
R _{Fe}	resistencia de pérdidas en el hierro (Ω)
X _μ	reactancia magnetizante (Ω)
Z _b	impedancia equivalente en vacío (Ω)
Z _{cc}	impedancia de cortocircuito (rotor frenado) (Ω)
α	relación entre pérdidas y potencia magnetizante
φ	desfase tensión-corriente (°)
μ	ángulo formado por el vector corriente magnetizante respecto el eje de referencia (°)

Constantes

$\underline{a}, \underline{a}^2$	operadores vectoriales de giro 120° y 240° respectivamente
μ_0	permeabilidad del vacío (= $4\pi 10^{-7}$ H/m)
π	3.1415926535

ANTECEDENTES Y ESTADO ACTUAL



1. ANTECEDENTES Y ESTADO ACTUAL

<i>1. ANTECEDENTES Y ESTADO ACTUAL</i>	2
<i>Modelos</i>	2
<i>Métodos. Observación y estimación de estados</i>	4
<i>Aplicaciones. Equipo para la medida del par en régimen transitorio</i>	5
<i>PALABRAS CLAVE</i>	5

1. ANTECEDENTES Y ESTADO ACTUAL

En los últimos años el aumento de las aplicaciones con control de velocidad y/o posición de las máquinas eléctricas, ha puesto de manifiesto la necesidad de modelización del conjunto convertidor+máquina+carga accionada y del estudio en detalle del algoritmo de control aplicado.

Actualmente las investigaciones apuntan a la minimización del número de sensores para la realización del control de las máquinas eléctricas. La determinación de una o más variables de estado no mensurables, incluye el tópico relacionado con la determinación de los parámetros del modelo de máquina: resistencias, inductancias y su nivel de saturación, presente en mayor o menor medida en todos los regímenes de funcionamiento de la misma.

Por otra parte, los mejores conocimientos en teoría de control y la aplicación de algoritmos y técnicas de control no lineal (adaptativo, óptimo, etc.), requieren una elevada exactitud en el conocimiento de los parámetros en juego para lograr una convergencia adecuada a la solución correcta.

Modelos

La transformación de la energía en un convertidor electromecánico es un fenómeno de estructura compleja que comprende aspectos electromagnéticos, mecánicos y térmicos; la imbricación de los mismos introduce grandes dificultades tanto en su concepción y cálculo como en la predeterminación de su comportamiento. Para describir el fenómeno físico se recurre a modelos.

El modelo es una estructura conceptual que sugiere un marco de ideas para conjuntos de descripciones, de otro modo no estructuradas, que promueven la inteligibilidad del fenómeno real. Explicar la realidad de un fenómeno físico puede realizarse mediante modelos distintos, aunque siempre los resultados del modelo diferirán del fenómeno real; ya que si no fueran diferentes la estructura original sería observacionalmente obvia; esta diferencia se reduce con la utilización de técnicas descriptivas más refinadas.

Podemos considerar dos clases de modelos en el ámbito de las máquinas eléctricas:

- Modelos Físico – matemáticos, basados en la formulación del campo electromagnético a partir de las ecuaciones de Maxwell y su resolución por técnicas numéricas del tipo elemento finito o diferencia finita. Se utilizan principalmente en el cálculo y diseño así como en el estudio del comportamiento de las máquinas eléctricas.
- Modelos Paramétrico – físicos, basados en la formulación concentrada de los parámetros electromagnéticos. Son utilizados principalmente para el estudio del comportamiento de las máquinas y dispositivos eléctricos.

Además en cualquier máquina o dispositivo eléctrico existen unas variables externas cuyas magnitudes son de fácil y económica medida (tensión, corriente, velocidad), y otras internas no mensurables (flujo, par).

El estudio lleva a la determinación del modelo, o modelos, a utilizar en función del control y/o método de determinación de los parámetros deseado, así como la definición del conjunto de los mismos, sus valores nominales, las leyes de variación que los afectan y el efecto sobre otras magnitudes de interés. Es evidente que, dadas las aplicaciones a considerar, se tendrán en cuenta los modelos del segundo tipo. Asimismo al considerar que todas las máquinas trabajan en régimen de saturación ha de tenerse en cuenta el estudio y caracterización de la misma.

La consideración de funciones del tipo $\Psi = \varphi(i)$ - saturación (figura 1)- resulta de interés para valorar los efectos de la saturación en la respuesta del sistema y la variabilidad de los parámetros correspondientes a los modelos. En casos especiales, un modelo linealizado de la máquina y un control más complejo pueden dar una mejor solución al problema.

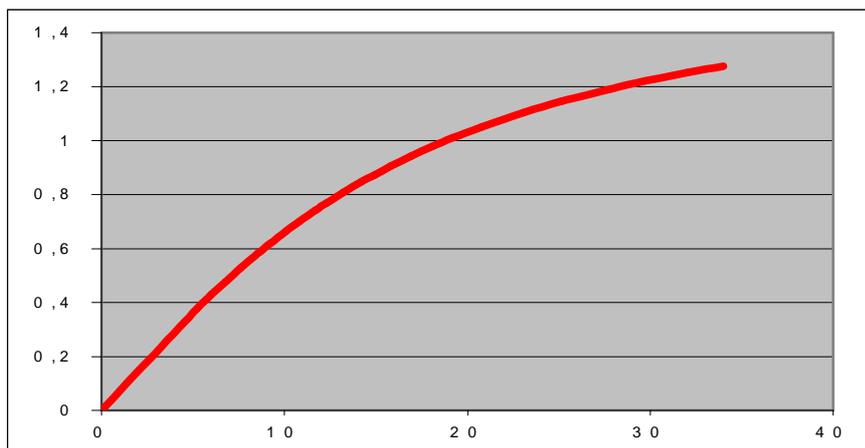


Figura 1 $\Psi = \varphi(i)$

En la literatura se encuentran dos tipos de modelos:

- Basados en técnicas de orientación del campo, lo que limita la validez de dicho modelo.
- Basados en las expresiones generales pero asumiendo el conocimiento del resto de variables del modelo y usualmente sin indicar como se han obtenido las características, aspecto primordial de cara a su aplicación.

Ambas formulaciones dan solución en casos particulares (básicamente para simulación de respuestas únicamente); los modelos que se plantearan seguidamente no presentan ninguna limitación en cuanto a su aplicación, ya que se han formulado de forma que el sistema resultante no necesite la resolución de una restricción algebraica, hecho que invalida el modelo para su aplicación en tiempo real.

La modelización del comportamiento del elemento accionador (convertidor, red) debe ser tratada con especial dedicación; la aplicación de señales con alto contenido armónico y variaciones bruscas de valor conlleva la consideración de las no linealidades en el comportamiento de la máquina.

Métodos. Observación y estimación de estados

La determinación de los parámetros puede realizarse mediante medidas externas (modelos de función o matriz de transferencia), a partir de señales tipificadas, o del estudio del servicio y comportamiento frente a variaciones de consigna; lo que lleva a descripciones de tipo circuital para el comportamiento del sistema. También puede hacerse a partir del estudio de la distribución del campo en la máquina (modelos en elementos finitos - EF). En cada caso debe valorarse la aproximación realizada y las limitaciones de cada método. En [Brule 00] se plantea la equivalencia de resultados entre los modelos basados en EF y los resultantes de la formulación circuital sobre la base de establecer el control de la máquina. Al ser el objetivo final el control del sistema, este trabajo se basará exclusivamente en modelos de tipo circuital.

Una vez establecido el método, o métodos más adecuados para la determinación de los parámetros, debe determinarse el conjunto, o conjuntos, de modelos considerados para su aplicación a la estimación y/o observación de los estados o magnitudes no mensurables del modelo y su viabilidad para la realización del control de la máquina.

El deficiente conocimiento de los parámetros de la máquina y las soluciones adoptadas, cuando existen, tiene unas implicaciones en el control evidentes que se comprueba por el gran número de publicaciones actuales sobre el tema, así como por la necesidad de complicar el algoritmo de control para obviar, o minimizar, los efectos de las desviaciones respecto a los valores nominales supuestos de los parámetros.

El conocimiento del modelo de funcionamiento del conjunto convertidor+máquina accionada+carga, permitirá detectar, y/o prevenir, los funcionamientos anómalos del sistema. El seguimiento de la evolución de las variables de estado de interés puede permitir un mantenimiento preventivo del sistema accionado, así como la detección de averías de funcionamiento, y de la modificación del algoritmo de control resultante para la optimización del punto de trabajo del sistema según criterios a determinar.

Aplicaciones. Equipo para la medida del par en régimen transitorio

Un aspecto clave en la tesis ha sido la determinación del par. Pero,

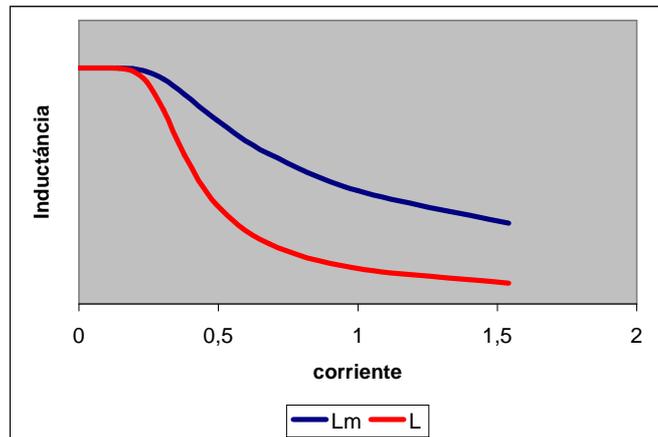
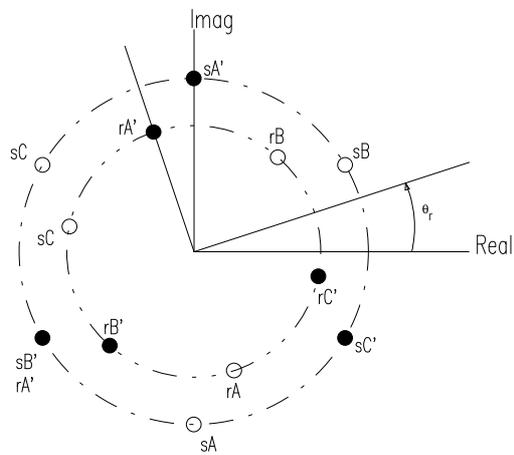
¿ Cómo determinar que el par calculado mediante un observador es el correcto?

Una solución es contrastar el par calculado con el medido mediante un medidor de par en régimen transitorio; la no-disponibilidad del mismo junto con su elevado coste hace que nos planteemos el ***cómo medir el par***, lo cual nos lleva al desarrollo de un equipo para la imposición del par de carga deseado, junto con su obtención a partir de las medidas procedentes de una máquina de corriente continua controlada en corriente. El resultado final es un equipo que permite ensayar cualquier accionamiento con la posibilidad de imponer una ley de variación arbitraria del par de carga aplicado, junto con la obtención por cálculo del par accionador en el eje del sistema.

PALABRAS CLAVE

Máquina de inducción, Modelos con saturación, Sensibilidad de los modelos, Determinación de parámetros, Mínimos cuadrados, Observadores adaptativos, Observador del par, Medida del par en régimen transitorio, Modelización del convertidor, Funciones de conexión, Funciones de conversión.

MODELOS DE MÁQUINAS ASÍNCRONAS CON CONSIDERACIÓN DE LA SATURACIÓN



2. Modelos de máquinas asíncronas con consideración de la saturación

2. MODELOS PARA LA MÁQUINA ASÍNCRONA CON CONSIDERACIÓN DE LA SATURACIÓN.....	3
MODELIZACIÓN DE LOS EFECTOS DE LA SATURACIÓN.....	6
ECUACIONES DE LA MÁQUINA TENIENDO EN CUENTA LA SATURACIÓN. CONSIDERACIÓN DE DIVERSOS CONJUNTOS DE VARIABLES DE ESTADO.....	8
Variables de estado corrientes de estator y rotor. Modelo 1.....	9
Variables de estado los flujos de estator y rotor. Modelo 2.....	10
Variables de estado la corriente de estator y el flujo magnetizante. Modelo 3.....	13
Variables de estado las corrientes de estator y el flujo del rotor. Modelo 4.....	14
Variables de estado la corriente de estator y la magnetizante. Modelo 5.....	15
MODELOS SIMPLIFICADOS.....	16
MODELOS CON SATURACIÓN DEPENDIENTE DE LAS COMPONENTES DEL PROPIO EJE.....	16
Variables de estado corrientes de estator y rotor. Modelo 6.....	16
Variables de estado los flujos de estator y rotor. Modelo 7.....	17
Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 8.....	18
Variables de estado la corriente del estator y el flujo del rotor. Modelo 9.....	19
Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 10.....	20
MODELOS EN T Y EN G.....	21
Variables de estado las corrientes de estator y rotor. Modelo 11.....	23
Variables de estado los flujos de estator y rotor. Modelo 12.....	24
Variables de estado la corriente de estator y el flujo magnetizante. Modelo 13.....	25
Variables de estado las corrientes de estator y el flujo del rotor. Modelo 14.....	26
Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 15.....	27
Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 16.....	28
Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 17.....	29
Variables de estado la corriente de estator y el flujo magnetizante. Modelo 18.....	30
Variables de estado la corriente de estator y el flujo de rotor. Modelo 19.....	30
Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 20.....	31
Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 21.....	32
Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 22.....	33
Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 23l.....	34
Variables de estado la corriente del estator y el flujo del rotor. Modelo 24.....	35
Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 25.....	36
Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 26.....	37
Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 27.....	38
Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 28.....	39
Variables de estado la corriente del estator y el flujo de rotor. Modelo 29.....	39
Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 30.....	40
MODELOS BASADOS EN LA ORIENTACIÓN DEL CAMPO.....	41
Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 31.....	41
Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 32.....	42
Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 33.....	43
Variables de estado la corriente del estator y el flujo del rotor. Modelo 34.....	43
Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 35.....	44
Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 36.....	45
Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 37.....	45
Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 38.....	46
Variables de estado la corriente del estator y el flujo del rotor. Modelo 39.....	47
Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 40.....	47
Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 41.....	48
Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 42.....	48
Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 43.....	49

<i>Variables de estado la corriente del estator y el flujo de rotor. Modelo 44.</i>	49
<i>Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 45</i>	49
<i>RESUMEN COMPARATIVO DE LOS DISTINTOS MODELOS.</i>	50
<i>MODELOS BASADOS EN LA ORIENTACIÓN DEL CAMPO.</i>	52
<i>MODELOS BASADOS EN LA ORIENTACIÓN DEL CAMPO. MODELOS TIPO G(I). CANCELACIÓN DE L_{SL}.</i>	52
<i>MODELOS BASADOS EN LA ORIENTACIÓN DEL CAMPO. MODELOS TIPO G(II). CANCELACIÓN DE L_{RL}.</i>	53
<i>CONCLUSIONES.</i>	53

2. Modelos para la máquina asíncrona con consideración de la saturación

En el desarrollo de cualquier modelo debe partirse de unas hipótesis básicas que limitan el alcance del mismo.

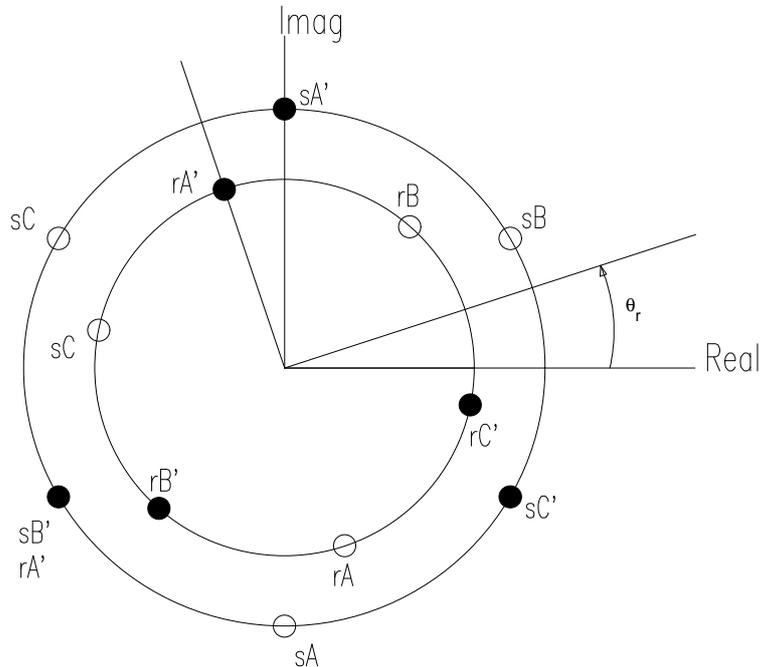


Figura 1 Máquina eléctrica elemental

Las ecuaciones de la máquina asíncrona (figura 1) expresadas en la referencia natural son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 u_{sA} &= R_s \cdot i_{sA} + \frac{d\Psi_{sA}}{dt} & ; u_{rA} &= R_r \cdot i_{rA} + \frac{d\Psi_{rA}}{dt} \\
 u_{sB} &= R_s \cdot i_{sB} + \frac{d\Psi_{sB}}{dt} & u_{rB} &= R_r \cdot i_{rB} + \frac{d\Psi_{rB}}{dt} \\
 u_{sC} &= R_s \cdot i_{sC} + \frac{d\Psi_{sC}}{dt} & u_{rC} &= R_r \cdot i_{rC} + \frac{d\Psi_{rC}}{dt}
 \end{aligned} \quad (1)$$

Si tomamos como punto de partida las siguientes consideraciones que, en su caso, se verán alteradas o eliminadas:

- permeabilidad del hierro infinita
- no-existencia de armónicos de campo
- ancho del entrehierro despreciable
- construcción simétrica

estamos definiendo una determinada idealización de la máquina.

Si se considera la relación entre flujos y corrientes para el caso ideal anterior:

$$[\Psi] = [M] \cdot [i] \quad ; \quad [\Psi] = [\Psi_{sA} \quad \Psi_{sB} \quad \Psi_{sC} \quad \Psi_{rA} \quad \Psi_{rB} \quad \Psi_{rC}]^t$$

$$[i] = [i_{sA} \quad i_{sB} \quad i_{sC} \quad i_{rA} \quad i_{rB} \quad i_{rC}]^t$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_s & M_{sr} \\ M_{rs} & M_r \end{bmatrix}$$

$$[M_s] = \begin{bmatrix} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{bmatrix} ; \quad [M_r] = \begin{bmatrix} L_r & M_r & M_r \\ M_r & L_r & M_r \\ M_r & M_r & L_r \end{bmatrix}$$

$$[M_{sr}] = [M_{rs}]^t = \begin{bmatrix} M_{sr} \cdot \cos q_r & M_{sr} \cdot \cos(q_r + \frac{2 \cdot p}{3}) & M_{sr} \cdot \cos(q_r + \frac{4 \cdot p}{3}) \\ M_{sr} \cdot \cos(q_r + \frac{4 \cdot p}{3}) & M_{sr} \cdot \cos q_r & M_{sr} \cdot \cos(q_r + \frac{2 \cdot p}{3}) \\ M_{sr} \cdot \cos(q_r + \frac{2 \cdot p}{3}) & M_{sr} \cdot \cos(q_r + \frac{4 \cdot p}{3}) & M_{sr} \cdot \cos q_r \end{bmatrix} \quad (2)$$

juntamente con la ecuación del movimiento mecánico:

$$M_e - M_c = J \frac{d\mathbf{w}_{rm}}{dt} ; \quad \mathbf{q}_r = P \cdot \mathbf{q}_{rm} ; \quad \mathbf{w}_{rm} = \frac{d\mathbf{q}_{rm}}{dt} \quad (3)$$

donde:

$$L_s = L_{sl} + L_{sm} ; \quad L_r = L_{rl} + L_{rm} ; \quad M_s = -L_{sm} / 2 ; \quad M_r = -L_{rm} / 2 ;$$

$$M_{sr} = \sqrt{L_{sm} \cdot L_{rm}}$$

$$M_c = M_{caga} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{w}_{rm} \quad (4)$$

El modelo descrito es complejo y de difícil resolución: han de resolverse 8 ecuaciones diferenciales no lineales de coeficientes variables en el tiempo; además debe invertirse una matriz [M] de orden 6 para cada incremento de tiempo.

A partir de la definición de vector espacial [Kovacs 84]:

$$\underline{i}_s = \frac{2}{3} (\underline{i}_{sa} + a \cdot \underline{i}_{sb} + a^2 \cdot \underline{i}_{sc}) \quad (5)$$

se pueden obtener las siguientes expresiones para el estator y rotor, según una referencia genérica:

$$\underline{u}_{sg} = R_s \cdot \underline{i}_{sg} + \frac{d}{dt} \underline{\Psi}_{sg} + j \cdot \omega_g \cdot \underline{\Psi}_{sg} \quad (6)$$

$$\underline{u}_{rg} = R_r \cdot \underline{i}_{rg} + \frac{d}{dt} \underline{\Psi}_{rg} + j \cdot (\omega_g - \omega_r) \cdot \underline{\Psi}_{rg} \quad (7)$$

En el caso que exista componente homopolar, debe añadirse la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{s0} \\ i_{r0} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{R_{s0}}{L_{s0}} & 0 \\ 0 & \frac{R_{r0}}{L_{r0}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{s0} \\ i_{r0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{s0} \\ u_{r0} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$u_{s0} = \frac{u_{sA} + u_{sB} + u_{sC}}{3} \quad u_{r0} = \frac{u_{rA} + u_{rB} + u_{rC}}{3}$$

juntamente con las ecuaciones del par y de equilibrio mecánico:

$$M_e = -\frac{3}{2} \cdot P \cdot \underline{\Psi}_{rg} \times \underline{i}_{rg} \quad (9)$$

$$J \cdot \frac{d\omega_{rm}}{dt} = M_e - M_c; \quad \omega_r = P \cdot \omega_{rm} \quad (10)$$

El circuito equivalente correspondiente a las ecuaciones anteriores, es el siguiente;

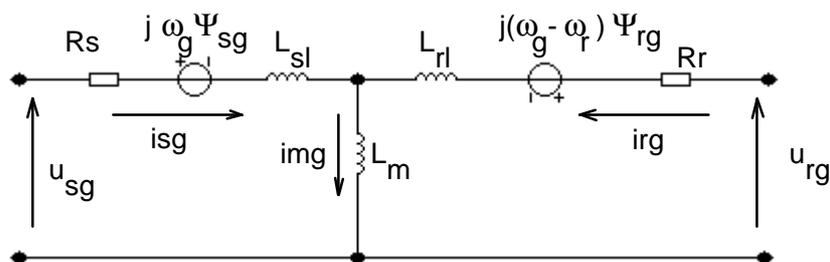


Figura 2 Esquema para el régimen transitorio.

Los parámetros del modelo referidos al estator, partiendo de las simplificaciones aceptadas, y de acuerdo con las dimensiones geométricas, son:

$$L_{sm} = N_s^2 \cdot \frac{2 \cdot m_0 \cdot \ell \cdot D}{d \cdot p} \quad ; \quad L_{rm} = N_r^2 \cdot \frac{2 \cdot m_0 \cdot \ell \cdot D}{d \cdot p}$$

$$\frac{L_{sm}}{L_{rm}} = \left(\frac{N_s}{N_r} \right)^2 \quad ; \quad L_m = \frac{3}{2} \cdot M_{sr} = N_s \cdot N_r \cdot \frac{3 \cdot m_0 \cdot \ell \cdot D}{d \cdot p} \quad (11)$$

$$L_{ss} = L_{sl} + \frac{3}{2} \cdot L_{sm} = L_{sl} + L_m \quad ; \quad L_{rr} = L_{rl} + \frac{3}{2} \cdot L_{rm} = L_{rl} + L_m$$

En caso de despreciar la saturación, se pueden plantear las siguientes equivalencias:

$$\underline{\Psi}_{sg} = L_{ss} \cdot \underline{i}_{sg} + L_m \cdot \underline{i}_{rg} \quad ; \quad \underline{\Psi}_{rg} = L_{rr} \cdot \underline{i}_{rg} + L_m \cdot \underline{i}_{sg} \quad (12)$$

$$\underline{i}_{mg} = \underline{i}_{sg} + \underline{i}_{rg} \quad ; \quad \underline{\Psi}_{mg} = L_m \cdot (\underline{i}_{sg} + \underline{i}_{rg}) \quad ; \quad \underline{\Psi}_{slg} = L_{sl} \cdot \underline{i}_{sg} \quad (13)$$

$$\underline{i}_{msg} = \frac{\underline{\Psi}_{sg}}{L_m} = \underline{i}_{rg} + (1 + \mathbf{s}_{sl}) \cdot \underline{i}_{sg} \quad ; \quad \underline{i}_{mrg} = \frac{\underline{\Psi}_{rg}}{L_m} = \underline{i}_{sg} + (1 + \mathbf{s}_{rl}) \cdot \underline{i}_{rg}$$

El modelo, basado en la máquina idealizada, es válido siempre que no exista saturación, o bien en el caso en que esta no tenga un efecto relevante en la respuesta del sistema:

- trabajo en régimen permanente
- trabajo a flujo constante

Modelización de los efectos de la saturación

La consideración de la saturación del núcleo magnético conlleva la sustitución de la relación lineal:

$$\mathbf{y} = L \cdot \mathbf{i}$$

por otra que incluya la posibilidad de modificación de las inductancias con la corriente, como puede verse en la expresión que sigue:

$$\mathbf{y} = L(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} \quad (14)$$

En el desarrollo de las expresiones de la derivada del flujo, aparecerán dos términos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(L(i) \cdot i)}{dt} = L(i) \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot \frac{dL(i)}{di} \cdot \frac{di}{dt} \quad (15)$$

Al primer coeficiente se le denomina inductancia estática:

$$L_m(i) = \frac{y(i)}{i} \quad (16)$$

Al segundo se le llama inductancia dinámica:

$$L(i) = \frac{d\Psi(i)}{di} = \frac{1}{\frac{di(\Psi)}{d\Psi}} \quad (17)$$

Si se considera la característica de saturación de la figura 3, la inductancia estática, para un punto cualquiera, corresponde a la pendiente de la recta que une el origen con dicho punto, es decir:

$$L_m = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \quad (18)$$

mientras que la dinámica se corresponde con:

$$L = \frac{\Delta y}{\Delta i} \quad (19)$$

De las expresiones anteriores, se deduce que la inductancia estática es superior a la dinámica, es decir $L_m > L$

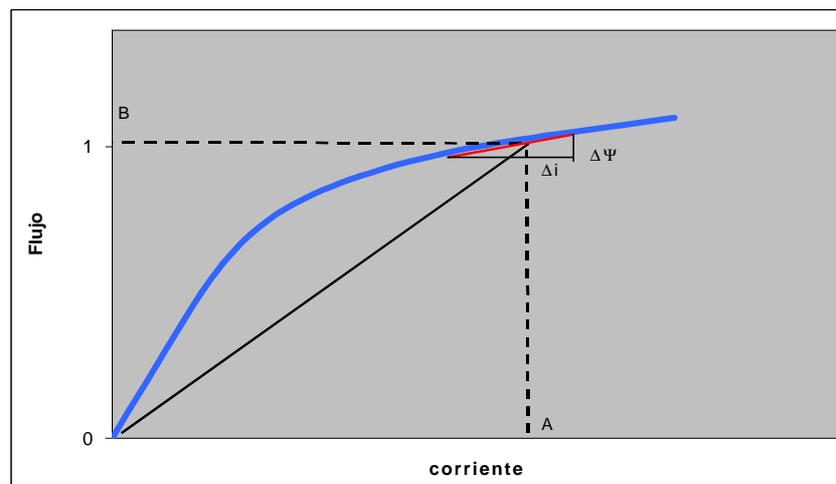


Figura 3 Definición de inductancia dinámica y estática.

En la figura 4 se muestran ambas.

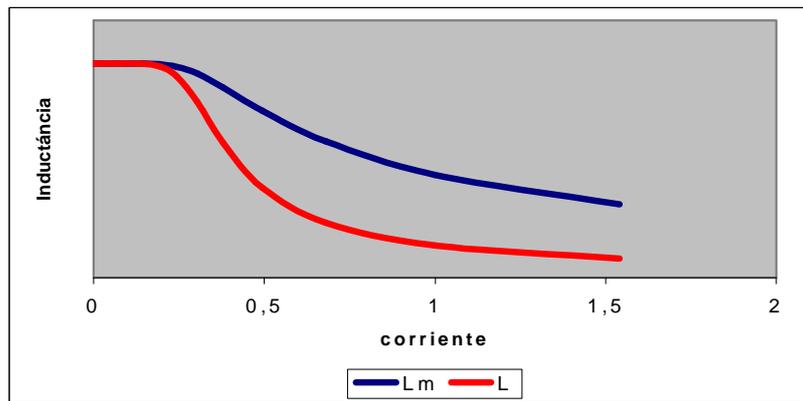


Figura 4 inductancia estática (L_m) y dinámica (L).

En este caso la relación (12) debe expresarse como sigue:

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_{sg} &= L_{sl} \cdot \underline{i}_{sg} + \Psi_m(i_m) \quad ; \quad \underline{\Psi}_{rg} = L_{rl} \cdot \underline{i}_{rg} + \Psi_m(i_m) \\ \Psi_m(i_m) &= f(i_m) \end{aligned} \quad (20)$$

relación fundamental ya que liga el flujo estático y rotórico con el flujo común en el entrehierro de la máquina y con las corrientes que recorren los devanados (a partir de la característica de saturación $\Psi_m(i_m)$).

Asimismo la relación (13) entre corrientes puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \underline{i}_s + \underline{i}_r &= \underline{i}_m \\ \frac{\Psi_s - \Psi_m}{L_{sl}} + \frac{\Psi_r - \Psi_m}{L_{rl}} &= \underline{i}_m = g(\Psi_m) \end{aligned} \quad (21)$$

Dado que el estado magnético de la máquina es global, solo pueden ser relacionados el flujo total en el entrehierro (Ψ_m) mediante la corriente de magnetización i_m que es proporcional a la capa de corriente en el entrehierro.

La ecuación (21) traduce la restricción algebraica más importante que aparecera en la modelización que sigue. Para el caso lineal esta puede deshacerse y sustituirse en las ecuaciones de estado que modelizan la máquina, sean cuales sean las variables de estado consideradas. En los casos que consideraremos existen conjuntos de variables de estado en los que esta simplificación no es posible; estos modelos NO pueden ser considerados útiles a efectos de control ya que para cada intervalo de cálculo debe resolverse una ecuación algebraica NO lineal, en la que no es posible indicar a priori el tiempo de resolución de la misma.

Modelización de los efectos de la saturación. Consideración de diversos conjuntos de variables de estado.

La aplicación de las consideraciones anteriores al modelo de la máquina, lleva al siguiente conjunto de ecuaciones para el estator y el rotor:

$$\underline{u}_{sg} = R_s \cdot \underline{i}_{sg} + \frac{d}{dt} \underline{\Psi}_{sg} + j \cdot \underline{\omega}_g \cdot \underline{\Psi}_{sg} \quad (22)$$

$$\underline{u}_{rg} = R_r \cdot \underline{i}_{rg} + \frac{d}{dt} \underline{\Psi}_{rg} + j \cdot (\underline{\omega}_g - \underline{\omega}_r) \cdot \underline{\Psi}_{rg} \quad (23)$$

juntamente con la ecuación mecánica:

$$M_e = -\frac{3}{2} \cdot P \cdot \underline{\Psi}_{rg} \times \underline{i}_{rg} \quad (24)$$

$$J \cdot \frac{d\underline{\omega}_{rm}}{dt} = M_e - M_c; \quad \underline{\omega}_r = P \cdot \underline{\omega}_{rm} \quad (25)$$

Se introducen relaciones para la saturación de la forma:

$$\Psi = f(i) = a_1 \cdot \arctan(a_2 \cdot i) + a_3 \cdot i \quad (26)$$

o bien:

$$\frac{i}{I_N} = g(\Psi) = a \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right) + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \quad (27)$$

se obtienen expresiones para las inductancias, del tipo:

$$L_m = \frac{a_1 \cdot \arctan(a_2 \cdot i)}{i} + a_3 \quad (28)$$

o bien:

$$L_m = \frac{\Psi}{I_N \cdot \left(a \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right) + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right)} \quad (29)$$

igualmente, para la inductancia dinámica:

$$L = \frac{a_1 \cdot a_2}{1 + (a_2 \cdot i)^2} + a_3 \quad (30)$$

$$L = \frac{1}{I_N \cdot \left(\frac{a}{\Psi_N} + b \cdot n \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^{n-1} \right)} \quad (31)$$

Variables de estado corrientes de estator y rotor. Modelo 1.

Si se desarrollan las expresiones anteriores separando parte real e imaginaria, se llega a:

$$\frac{di}{dt} = M^{-1} \cdot v - M^{-1} \cdot A \cdot i \quad (32)$$

con

$$v = (u_{sx} \quad u_{sy} \quad u_{rx} \quad u_{ry})^t \quad i = (i_{sx} \quad i_{sy} \quad i_{rx} \quad i_{ry})^t \quad (33)$$

$$A = \begin{pmatrix} R_s & -\mathbf{w}_g \cdot (L_m + L_{sl}) & 0 & -\mathbf{w}_g \cdot L_m \\ \mathbf{w}_g \cdot (L_m + L_{sl}) & R_s & \mathbf{w}_g \cdot L_m & 0 \\ 0 & -(\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_m & R_r & -(\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot (L_m + L_{rl}) \\ (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_m & 0 & (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot (L_m + L_{rl}) & R_r \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$M = \begin{pmatrix} L_{sl} + L_{ddm} & L_{dq} & L_{ddm} & L_{dq} \\ L_{dq} & L_{sl} + L_{qqm} & L_{dq} & L_{qqm} \\ L_{ddm} & L_{dq} & L_{rl} + L_{ddm} & L_{dq} \\ L_{dq} & L_{qqm} & L_{dq} & L_{rl} + L_{qqm} \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$L_{ddm} = L \cdot \cos^2 \mathbf{m} + L_m \cdot \sin^2 \mathbf{m}$$

$$L_{qqm} = L \cdot \sin^2 \mathbf{m} + L_m \cdot \cos^2 \mathbf{m} \quad (36)$$

$$L_{dq} = (L - L_m) \cdot \cos \mathbf{m} \cdot \sin \mathbf{m}$$

$$L = \frac{d\Psi_m}{di_m} \quad ; \quad L_m = \frac{\Psi_m}{i_m} \quad (37)$$

$$\tan \mathbf{m} = \frac{i_{my}}{i_{mx}} \quad (38) \quad \Psi_m = f(i_m) \quad (39)$$

$$\Psi_m = \sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2} \quad ; \quad i_m = \sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2} \quad (40)$$

$$i_{mx} = i_{sx} + i_{rx} \quad ; \quad i_{my} = i_{sy} + i_{ry} \quad (41)$$

$$\Psi_{mx} = L_m \cdot i_{mx} \quad ; \quad \Psi_{my} = L_m \cdot i_{my}$$

En el modelo anterior, aparecen unos coeficientes de autoinducción L_{dq} que representan el efecto de la saturación cruzada debido a la interacción entre flujos de ejes. Si se desprecia la saturación $L = L_m$ desaparece el termino cruzado. Obsérvese que ello supone tener un termino adicional en las ecuaciones de cada eje, debido a la corriente que circula por la bobina correspondiente al otro eje. La dificultad del método estriba en que el conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales que definen el modelo debe resolverse para cada incremento de tiempo ralentizando, de esta forma, el proceso de cálculo.

Variables de estado los flujos de estator y rotor. Modelo 2.

Eligiendo, como variables de estado, otro conjunto de variables puede simplificarse la resolución del sistema anterior. En el caso de considerar como variables los flujos de estator y rotor, se llega al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_{sx} &= u_{sx} - R_s \cdot \frac{\Psi_{sx} - \Psi_{mx}}{L_{sl}} - \mathbf{w}_g \cdot \Psi_{sy} \\ \frac{d}{dt} \Psi_{sy} &= u_{sy} - R_s \cdot \frac{\Psi_{sy} - \Psi_{my}}{L_{sl}} + \mathbf{w}_g \cdot \Psi_{sx} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_{rx} &= u_{rx} - R_r \cdot \frac{\Psi_{rx} - \Psi_{mx}}{L_{rl}} - (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot \Psi_{ry} \\ \frac{d}{dt} \Psi_{ry} &= u_{ry} - R_r \cdot \frac{\Psi_{ry} - \Psi_{my}}{L_{rl}} + (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot \Psi_{rx} \end{aligned} \quad (43)$$

Ecuaciones que, formalmente, son más sencillas que las obtenidas a partir del conjunto de variables corrientes, pero a las que falta añadir una restricción algebraica sobre los flujos:

$$\frac{\Psi_{sg}}{L_{sl}} + \frac{\Psi_{rg}}{L_{rl}} - \Psi_m \cdot \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_{rl}} \right) = \underline{i}_m = g(\Psi_m) \quad (44)$$

$$\frac{\underline{i}_m}{I_N} = g(\Psi_m) = a \cdot \left(\frac{\Psi_m}{\Psi_N} \right) + b \cdot \left(\frac{\Psi_m}{\Psi_N} \right)^n \quad (45)$$

conjunto de ecuaciones implícitas que se deben resolver para cada paso de cálculo!

Separando partes real e imaginaria, se llega a:

$$\frac{\Psi_{sx}}{L_{sl}} + \frac{\Psi_{rx}}{L_{rl}} - \Psi_{mx} \cdot \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_{rl}} \right) = i_{mx} = g(\Psi_m) \cdot \frac{\Psi_{mx}}{\Psi_m} = g(\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}) \cdot \frac{\Psi_{mx}}{\Psi_m} \quad (46)$$

$$\frac{\Psi_{sy}}{L_{sl}} + \frac{\Psi_{ry}}{L_{rl}} - \Psi_{my} \cdot \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_{rl}} \right) = i_{my} = g(\Psi_m) \cdot \frac{\Psi_{my}}{\Psi_m} = g(\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}) \cdot \frac{\Psi_{my}}{\Psi_m} \quad (47)$$

Si se intenta resolver el conjunto de ecuaciones resultante de otra forma, por ejemplo, a partir de la consideración de la inductancia estática función del flujo, con:

$$\underline{\Psi}_m = L_m(\Psi_m) \cdot \underline{i}_m \quad (48)$$

se obtiene:

$$\Psi_m = \frac{\frac{\Psi_{sg}}{L_{sl}} + \frac{\Psi_{rg}}{L_{rl}}}{\left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m(\Psi_m)} \right)} \quad (49)$$

también se llega a una ecuación implícita que debe resolverse para cada paso de cálculo.

Esto, actualmente, no es una gran limitación; existen poderosos programas de cálculo y resolución de sistemas para el caso de un conjunto de ecuaciones diferenciales sometidas a una restricción algebraica (MATLAB, SIMULINK, PSPICE, VISSIM, etc.). El problema subyacente es la inaplicabilidad del método para realizar el control de la máquina en tiempo real: no podemos definir el tiempo de cálculo del algoritmo porque ignoramos el tiempo que invertirá el programa en resolver la ecuación implícita anterior, peor aún, no sabemos si la solución encontrada será correcta o única.

Variables de estado la corriente de estator y el flujo magnetizante. Modelo 3.

Tras muchas transformaciones algebraicas, se llega al conjunto de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} L_{sl} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & L_{sl} & 0 & 1 \\ -L_{rl} & 0 & (1+L_{rl} \cdot \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{mx}}) & -L_{rl} \cdot \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{my}} \\ 0 & -L_{rl} & -L_{rl} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{mx}} & (1+L_{rl} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{my}}) \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{pmatrix} -r_s & \mathbf{w}_g \cdot L_{sl} & 0 & \mathbf{w}_g \\ -\mathbf{w}_g \cdot L_{sl} & -r_s & -\mathbf{w}_g & 0 \\ -r_r & -(\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & 0 & -(\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \\ (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & -r_r & (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_r \cdot g_x + (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} \cdot g_y \\ -r_r \cdot g_y - (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} \cdot g_x \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{50}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 g_x(\Psi_m) &= g(\Psi_m) \cdot \frac{\Psi_{mx}}{\Psi_m} = g(\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}) \cdot \frac{\Psi_{mx}}{\Psi_m} = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{mx}}{\Psi_N} + b \cdot \frac{(\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi_N^n} \cdot \Psi_{mx} \right] \\
 g_y(\Psi_m) &= g(\Psi_m) \cdot \frac{\Psi_{my}}{\Psi_m} = g(\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}) \cdot \frac{\Psi_{my}}{\Psi_m} = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{my}}{\Psi_N} + b \cdot \frac{(\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi_N^n} \cdot \Psi_{my} \right]
 \end{aligned} \tag{51}$$

además, deben calcularse las derivadas siguientes:

$$\frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{my}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{my}} \tag{52}$$

obsérvese la complejidad del modelo resultante. En este caso, no debe resolverse ninguna ecuación implícita para cada paso de cálculo; sin embargo el modelo es muy complicado.

Variables de estado las corrientes de estator y el flujo del rotor. Modelo 4.

Las ecuaciones resultantes son las que siguen:

$$\begin{aligned} L_{sl} \cdot \frac{di_s}{dt} &= \underline{u}_s - (r_s + j \cdot \omega \cdot L_{sl}) \cdot \underline{i}_s - \left(\frac{d\Psi_m}{dt} + j \cdot \omega \cdot \underline{\Psi}_m \right) \\ \frac{d\Psi_r}{dt} &= \underline{u}_r - \left(r_r \cdot \frac{\Psi_r - \Psi_m}{L_{rl}} \right) - j \cdot (\omega - \omega_r) \cdot \underline{\Psi}_r \end{aligned} \quad (53)$$

sometidas a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \Psi_m &= f(i_m) = f(i_s + i_r) = f\left(i_s + \frac{\Psi_r - \Psi_m}{L_{rl}}\right) \\ \frac{d\Psi_m}{dt} &= \frac{d}{dt} f(i_m) \end{aligned} \quad (54)$$

aplicando como ejemplo al primer caso de aproximación por saturación:

$$\Psi_m = a_1 \cdot \arctan(a_2 \cdot i_m) + a_3 \cdot i_m = a_1 \cdot \arctan\left(a_2 \cdot \left[i_s + \frac{\Psi_r - \Psi_m}{L_{rl}}\right]\right) + a_3 \cdot \left(i_s + \frac{\Psi_r - \Psi_m}{L_{rl}}\right) \quad (55)$$

$$\frac{d\Psi_m}{dt} = \left\{ \frac{a_1 \cdot a_2}{1 + a_2^2 \cdot \left(i_s + \frac{\Psi_r - \Psi_m}{L_{rl}}\right)^2} + a_3 \right\} \cdot \left(\frac{di_s}{dt} + \frac{1}{L_{rl}} \cdot \left[\frac{d\Psi_r}{dt} - \frac{d\Psi_m}{dt} \right] \right) \quad (56)$$

resulta una función y una ecuación diferencial implícitas que deben ser resueltas para cada paso de cálculo.

Es un modelo realmente difícil de resolver.

Variables de estado la corriente de estator y la magnetizante. Modelo 5.

Después de muchas transformaciones algebraicas, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} L_{sl} & 0 & L + \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{mx} & -\frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{my} \\ 0 & L_{sl} & \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{my} & L + \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{mx} \\ -L_{rl} & 0 & L_{rl} + \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{mx} + L & -\frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{my} \\ 0 & L_{rl} & \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{my} & L_{rl} + \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{mx} + L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{di_{sx}}{dt} \\ \frac{di_{sy}}{dt} \\ \frac{di_{mx}}{dt} \\ \frac{di_{my}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} - \\
 - \begin{pmatrix} r_s & -\mathbf{w} \cdot L_{sl} & 0 & -\mathbf{w} \cdot L \\ \mathbf{w} \cdot L_{sl} & r_s & \mathbf{w} \cdot L & 0 \\ -r_r & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & r_r & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot (L_{rl} + L) \\ -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & -r_r & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot (L_{rl} + L) & r_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \end{pmatrix} \quad (57)$$

donde:

$$\begin{aligned} L &= h(i_m) \\ \frac{\partial L}{\partial i_m} &= \frac{\partial h(i_m)}{\partial i_m} \end{aligned} \quad (58)$$

resulta un modelo complicado pero resoluble.

Modelos simplificados.

La resolución de los modelos anteriores se puede simplificar considerando una serie de hipótesis adicionales:

- Saturación dependiente únicamente de las componentes del propio eje, es decir:

$$\begin{aligned} \Psi_{mx} &= f_x(i_{mx}); & \Psi_{my} &= f_y(i_{my}) \\ i_{mx} &= g_x(\Psi_{mx}); & i_{my} &= g_y(\Psi_{my}) \end{aligned} \quad (59)$$

Este método puede parecer poco ortodoxo, pero puede dar una solución a los modelos anteriores en que era preciso resolver una ecuación algebraica para cada paso de cálculo. Además, se puede plantear que las funciones representantes de la saturación tengan coeficientes distintos para cada eje.

- Consideración de un modelo de la máquina que tenga menos parámetros. Este caso se verá en el apartado que sigue. El método, además, permite la valoración experimental de los parámetros desconocidos.

Modelos con saturación dependiente de las componentes del propio eje.

Variables de estado corrientes de estator y rotor. Modelo 6

Tras muchas transformaciones algebraicas, se obtiene:

$$\frac{di}{dt} = M^{-1} \cdot v + M^{-1} \cdot (A \cdot i + \Omega \cdot \Psi) \quad (60)$$

con

$$v = (u_{sx} \quad u_{sy} \quad u_{rx} \quad u_{ry})^t \quad i = (i_{sx} \quad i_{sy} \quad i_{rx} \quad i_{ry})^t \quad (61)$$

$$\Psi = (\Psi_{mx} \quad \Psi_{my})^t \quad (62)$$

$$A = \begin{pmatrix} -R_s & \mathbf{w}_g \cdot L_{sl} & 0 & 0 \\ -\mathbf{w}_g \cdot s_l & -R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_r & (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} \\ 0 & 0 & -(\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & -R_r \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{w} \\ -\mathbf{w} & 0 \\ 0 & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \\ -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) & 0 \end{pmatrix} \quad (64)$$

$$M = \begin{pmatrix} L_{sl} + L_{mx} & 0 & L_{mx} & 0 \\ 0 & L_{sl} + L_{my} & 0 & L_{my} \\ L_{mx} & 0 & L_{rl} + L_{mx} & 0 \\ 0 & L_{my} & 0 & L_{rl} + L_{my} \end{pmatrix} \quad (65)$$

$$L_{mx} = \frac{d\Psi_{mx}}{di_{mx}} \quad L_{my} = \frac{d\Psi_{my}}{di_{my}} \quad (66)$$

$$\Psi_{mx} = f_x(i_{mx}); \quad \Psi_{my} = f_y(i_{my}) \quad (67)$$

$$i_{mx} = i_{sx} + i_{rx} \quad ; \quad i_{my} = i_{sy} + i_{ry} \quad (68)$$

el cual resulta manejable.

Variables de estado los flujos de estator y rotor. Modelo 7.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_{sx} &= u_{sx} - R_s \cdot \frac{\Psi_{sx} - \Psi_{mx}}{L_{sl}} - w_g \cdot \Psi_{sy} \\ \frac{d}{dt} \Psi_{sy} &= u_{sy} - R_s \cdot \frac{\Psi_{sy} - \Psi_{my}}{L_{sl}} + w_g \cdot \Psi_{sx} \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_{rx} &= u_{rx} - R_r \cdot \frac{\Psi_{rx} - \Psi_{mx}}{L_{rl}} - (w_g - w_r) \cdot \Psi_{ry} \\ \frac{d}{dt} \Psi_{ry} &= u_{ry} - R_r \cdot \frac{\Psi_{ry} - \Psi_{my}}{L_{rl}} + (w_g - w_r) \cdot \Psi_{rx} \end{aligned} \quad (70)$$

Ecuaciones que, formalmente, son más sencillas que las obtenidas a partir del conjunto de las variables de estado corriente, pero a las que hace falta añadir una restricción algebraica sobre los flujos:

$$\frac{\Psi_{sx}}{L_{sl}} + \frac{\Psi_{rx}}{L_{rl}} - \Psi_{mx} \cdot \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_{rl}} \right) = i_{mx} = g(\Psi_{mx}) \quad (71)$$

$$\frac{\Psi_{sy}}{L_{sl}} + \frac{\Psi_{ry}}{L_{rl}} - \Psi_{my} \cdot \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_{rl}} \right) = i_{my} = g(\Psi_{my}) \quad (72)$$

ecuaciones implícitas que se deben resolver para cada paso de cálculo.

Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 8.

Después de varias transformaciones algebraicas, se llega al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} L_{sl} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & L_{sl} & 0 & 1 \\ -L_{rl} & 0 & (1 + L_{rl} \cdot \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{mx}}) & 0 \\ 0 & -L_{rl} & 0 & (1 + L_{rl} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{my}}) \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{pmatrix} -r_s & \mathbf{w}_g \cdot L_{sl} & 0 & \mathbf{w}_g \\ -\mathbf{w}_g \cdot L_{sl} & -r_s & -\mathbf{w}_g & 0 \\ -r_r & -(\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & 0 & (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \\ (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & -r_r & -(\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_r \cdot g_x + (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} \cdot g_y \\ -r_r \cdot g_y - (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} \cdot g_x \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{73}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 g_x(\Psi_{mx}) &= a \cdot \frac{\Psi_{mx}}{\Psi_N} + b \cdot \frac{(\Psi_{mx})^n}{\Psi_N^n} \\
 g_y(\Psi_{my}) &= a \cdot \frac{\Psi_{my}}{\Psi_N} + b \cdot \frac{(\Psi_{my}^2)^n}{\Psi_N^n}
 \end{aligned} \tag{74}$$

además, deben calcularse las derivadas siguientes:

$$\frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{my}} \tag{75}$$

Obsérvese la complejidad del modelo resultante. En este caso no debe resolverse ninguna ecuación implícita para cada paso de cálculo pero, sin embargo, el modelo es muy complejo.

Variables de estado la corriente del estator y el flujo del rotor. Modelo 9.

Las ecuaciones resultantes, son las que siguen:

$$\begin{pmatrix}
 L_{sl} + \frac{df_x}{di_{mx}} & 0 & \frac{1}{L_{rl}} \cdot \frac{df_x}{di_{mx}} & 0 \\
 1 + \frac{1}{L_{rl}} \cdot \frac{df_x}{di_{mx}} & & 1 + \frac{1}{L_{rl}} \cdot \frac{df_x}{di_{mx}} & \\
 0 & L_{sl} + \frac{df_y}{di_{my}} & 0 & \frac{1}{L_{rl}} \cdot \frac{df_y}{di_{my}} \\
 0 & 1 + \frac{1}{L_{rl}} \cdot \frac{df_y}{di_{my}} & 1 + \frac{1}{L_{rl}} \cdot \frac{df_y}{di_{my}} & \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -r_s & \mathbf{w} \cdot L_{sl} & 0 & 0 \\ -\mathbf{w} \cdot L_{sl} & -r_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r_r}{L_{rl}} & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \\ 0 & 0 & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) & -\frac{r_r}{L_{rl}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{w} \\ -\mathbf{w} & 0 \\ -\frac{r_r}{L_{rl}} & 0 \\ 0 & -\frac{r_r}{L_{rl}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{pmatrix}$$

(76)

con:

$$\Psi_{mx} = f_x(i_{mx}); \quad \Psi_{my} = f_y(i_{my}) \quad (77)$$

deben calcularse las siguientes derivadas:

$$\frac{df_x}{di_{mx}}; \quad \frac{df_y}{di_{my}} \quad (78)$$

Es un modelo realmente difícil.

Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 10.

Tras varias transformaciones, se llega a:

$$\begin{pmatrix} L_{sl} & 0 & L_x + \frac{\partial L_x}{\partial i_{mx}} \cdot i_{mx} & 0 \\ 0 & L_{sl} & 0 & L_y + \frac{\partial L_y}{\partial i_{my}} \cdot i_{my} \\ -L_{rl} & 0 & L_{rl} + \frac{\partial L_x}{\partial i_{mx}} \cdot i_{mx} + L_x & 0 \\ 0 & L_{rl} & 0 & L_{rl} + \frac{\partial L_y}{\partial i_{my}} \cdot i_{my} + L_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{di_{sx}}{dt} \\ \frac{di_{sy}}{dt} \\ \frac{di_{mx}}{dt} \\ \frac{di_{my}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_s & -\mathbf{w} \cdot L_{sl} & 0 & -\mathbf{w} \cdot L_y \\ \mathbf{w} \cdot L_{sl} & r_s & \mathbf{w} \cdot L_x & 0 \\ -r_r & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & r_r & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot (L_{rl} + L_y) \\ -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & -r_r & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot (L_{rl} + L_x) & r_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \end{pmatrix} \quad (79)$$

donde:

$$\begin{aligned} L_x &= h_x(i_{mx}); & L_y &= h_y(i_{my}) \\ \frac{\partial L_x}{\partial i_{mx}} &= \frac{\partial h_x(i_{mx})}{\partial i_{mx}}; & \frac{\partial L_y}{\partial i_{my}} &= \frac{\partial h_y(i_{my})}{\partial i_{my}} \end{aligned} \quad (80)$$

resulta un modelo complicado pero resoluble.

Modelos en T y en Γ .

Dada la imposibilidad práctica de separar la determinación de los fenómenos inductivos de estatorl y rotor, resulta conveniente plantear un cambio de variables que elimine una de las componentes del esquema equivalente (L_{sl} o L_{rl}). Designando por **a** la relación de reducción de rotor a nuevo estator equivalente, se pueden escribir las siguientes equivalencias:

$$\underline{i}'_{rg} = \frac{\underline{i}_{rg}}{a}; \underline{\Psi}'_{rg} = a \cdot \underline{\Psi}_{rg}; R'_r = a^2 \cdot R_r \quad (81)$$

Este cambio de variable mantiene el balance de potencias [Bargalló 96].

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_{sg} &= L_{sl} \cdot \underline{i}_{sg} + L_m \cdot (\underline{i}_{sg} + a \cdot \underline{i}'_{rg}) \\ &= L'_m \cdot (\underline{i}_{sg} + \underline{i}'_{rg}) \end{aligned} \quad (82)$$

$$\text{con } L'_m = a \cdot L_m$$

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}'_{rg} &= a^2 \cdot L_{rl} \cdot \underline{i}'_{rg} + a \cdot L_m \cdot \underline{i}_{sg} + a^2 \cdot L_m \cdot \underline{i}'_{rg} \\ &= L'_{rl} \cdot \underline{i}'_{rg} + L'_m \cdot (\underline{i}_{sg} + \underline{i}'_{rg}) \end{aligned} \quad (83)$$

$$L'_{rl} = a \cdot (a \cdot (L_r + L_m) - L_m) \quad (84)$$

$$L'_{sl} = (L_{sl} + L_m - a \cdot L_m) \quad (85)$$

Eligiendo adecuadamente el valor de la relación **a**, se puede eliminar un parámetro. Haciendo $a = \frac{L_{ss}}{L_m}$, se obtiene el esquema de la figura 5 en el que se ha eliminado la inductancia de dispersión estática. A este modelo se le denominará tipo $\Gamma(I)$.

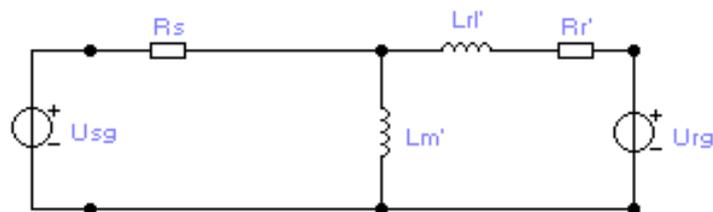


Figura 5 Modelo en $\Gamma(I)$.

Para $a = \frac{L_m}{L_r}$ se elimina la inductancia de dispersión rotórica (figura 6). A este modelo se le denominará tipo $\Gamma(II)$.

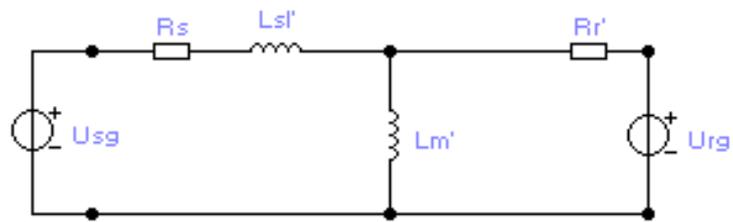


Figura 6 Modelo en $\Gamma(II)$.

Mediante estos modelos, con un parámetro menos, es más sencillo resolver el problema de la caracterización de la saturación.[P24], [P26].

Modelos tipo $\Gamma(I)$. Cancelación de L_{sl} .

En este caso el flujo estatórico se identifica con el de magnetización:

$$\Psi_s = \Psi_m \quad (86)$$

Variables de estado las corrientes de estator y rotor. Modelo 11.

$$\frac{di}{dt} = M^{-1} \cdot v - M^{-1} \cdot A \cdot i \quad (87)$$

con:

$$v = (u_{sx} \quad u_{sy} \quad u_{rx} \quad u_{ry})^t \quad i = (i_{sx} \quad i_{sy} \quad i_{rx} \quad i_{ry})^t \quad (88)$$

$$A = \begin{pmatrix} R_s & -\mathbf{w}_g \cdot L_m & 0 & -\mathbf{w}_g \cdot L_m \\ \mathbf{w}_g \cdot L_m & R_s & \mathbf{w}_g \cdot L_m & 0 \\ 0 & -(\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_m & R_r & -(\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot (L_m + L_{rl}) \\ (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_m & 0 & (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot (L_m + L_{rl}) & R_r \end{pmatrix} \quad (89)$$

$$M = \begin{pmatrix} L_{ddm} & L_{dq} & L_{ddm} & L_{dq} \\ L_{dq} & L_{qqm} & L_{dq} & L_{qqm} \\ L_{ddm} & L_{dq} & L_{rl} + L_{ddm} & L_{dq} \\ L_{dq} & L_{qqm} & L_{dq} & L_{rl} + L_{qqm} \end{pmatrix} \quad (90)$$

$$L_{ddm} = L \cdot \cos^2 \mathbf{m} + L_m \cdot \sin^2 \mathbf{m}$$

$$L_{qqm} = L \cdot \sin^2 \mathbf{m} + L_m \cdot \cos^2 \mathbf{m} \quad (91)$$

$$L_{dq} = (L - L_m) \cdot \cos \mathbf{m} \cdot \sin \mathbf{m}$$

$$L = \frac{d\Psi_m}{di_m} \quad L_m = \frac{\Psi_m}{i_m} \quad (92)$$

$$\tan \mathbf{m} = \frac{i_{my}}{i_{mx}} \quad (93) \quad \Psi_m = f(i_m) \quad (94)$$

$$\Psi_m = \sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2} \quad ; \quad i_m = \sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2} \quad (95)$$

$$i_{mx} = i_{sx} + i_{rx} \quad ; \quad i_{my} = i_{sy} + i_{ry} \quad (96)$$

$$\Psi_{mx} = L_m \cdot i_{mx} \quad ; \quad \Psi_{my} = L_m \cdot i_{my}$$

El sistema sigue siendo de resolución complicada.

Variables de estado los flujos de estator y rotor. Modelo 12.

Una vez simplificadas, las ecuaciones quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_s}{dt} &= \underline{u}_s - r_s \cdot \left(\frac{\Psi_s - \Psi_r}{L_{rl}} + g(\Psi_s) \right) - j \cdot \omega \cdot \Psi_s \\ \frac{d\Psi_r}{dt} &= \underline{u}_r - r_r \cdot \left(\frac{\Psi_r - \Psi_s}{L_{rl}} \right) - j \cdot (\omega - \omega_r) \cdot \Psi_r\end{aligned}\quad (97)$$

que una vez desarrolladas se representan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_{sx}}{dt} &= u_{sx} - r_s \cdot \left(\frac{\Psi_{sx} - \Psi_{rx}}{L_{rl}} + g_x(\Psi_s) \right) + \omega \cdot \Psi_{sy} \\ \frac{d\Psi_{sy}}{dt} &= u_{sy} - r_s \cdot \left(\frac{\Psi_{sy} - \Psi_{ry}}{L_{rl}} + g_y(\Psi_s) \right) - \omega \cdot \Psi_{sx} \\ \frac{d\Psi_{rx}}{dt} &= u_{rx} - r_r \cdot \left(\frac{\Psi_{rx} - \Psi_{sx}}{L_{rl}} \right) + (\omega - \omega_r) \cdot \Psi_{ry} \\ \frac{d\Psi_{ry}}{dt} &= u_{ry} - r_r \cdot \left(\frac{\Psi_{ry} - \Psi_{sy}}{L_{rl}} \right) - (\omega - \omega_r) \cdot \Psi_{rx}\end{aligned}\quad (98)$$

con:

$$\begin{aligned}g_x(\Psi_s) &= g(\Psi_s) \cdot \frac{\Psi_{sx}}{\Psi_s} = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{sx}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{sx}^2 + \Psi_{sy}^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi_N^n} \right) \cdot \Psi_{sx} \right] \\ g_y(\Psi_s) &= g(\Psi_s) \cdot \frac{\Psi_{sy}}{\Psi_s} = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{sy}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{sx}^2 + \Psi_{sy}^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi_N^n} \right) \cdot \Psi_{sy} \right]\end{aligned}\quad (99)$$

Si se compara con el modelo 2, este resulta mucho más sencillo ya que no es necesaria la resolución de una ecuación algebraica para cada paso de integración.

Variables de estado la corriente de estator y el flujo magnetizante. Modelo 13.

Después de algunas operaciones algebraicas, se llega al conjunto de ecuaciones que sigue:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -L_{rl} & 0 & (1+L_{rl} \cdot \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{mx}}) & -L_{rl} \cdot \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{my}} \\ 0 & -L_{rl} & -L_{rl} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{mx}} & (1+L_{rl} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{my}}) \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{pmatrix} -r_s & 0 & 0 & \mathbf{w}_g \\ 0 & -r_s & -\mathbf{w}_g & 0 \\ -r_r & -(\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & 0 & (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \\ (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & -r_r & -(\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_r \cdot g_x + (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} \cdot g_y \\ -r_r \cdot g_y - (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} \cdot g_x \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{100}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 g_x(\Psi_m) &= g(\Psi_m) \cdot \frac{\Psi_{mx}}{\Psi_m} = g(\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}) \cdot \frac{\Psi_{mx}}{\Psi_m} = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{mx}}{\Psi_N} + b \cdot \frac{(\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi_N^n} \cdot \Psi_{mx} \right] \\
 g_y(\Psi_m) &= g(\Psi_m) \cdot \frac{\Psi_{my}}{\Psi_m} = g(\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}) \cdot \frac{\Psi_{my}}{\Psi_m} = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{my}}{\Psi_N} + b \cdot \frac{(\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi_N^n} \cdot \Psi_{my} \right]
 \end{aligned} \tag{101}$$

además, deben calcularse las derivadas:

$$\frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{my}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{my}} \tag{102}$$

En este caso, no debe resolverse ninguna ecuación implícita para cada paso de cálculo pero, sin embargo, el modelo es de gran complejidad.

Variables de estado las corrientes de estator y el flujo del rotor. Modelo 14.

Las ecuaciones resultantes, son las que siguen:

$$\begin{pmatrix} -\left(1 + L_{rl} \cdot \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{sx}}\right) \cdot L_{rl} & -L_{rl}^2 \cdot \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{sy}} & \left(1 + L_{rl} \cdot \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{sx}}\right) & L_{rl} \cdot \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{sy}} \\ -L_{rl}^2 \cdot \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{sx}} & -\left(1 + L_{rl} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{sy}}\right) \cdot L_{rl} & L_{rl} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{sx}} & \left(1 + L_{rl} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{sy}}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_r & \mathbf{w} \cdot L_{rl} & 0 & -\mathbf{w} \\ -\mathbf{w} \cdot L_{rl} & -r_r & \mathbf{w} & 0 \\ -r_r & 0 & 0 & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \\ 0 & -r_r & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{w} \cdot L_{rl} \cdot g_x \\ \mathbf{w} \cdot L_{rl} \cdot g_y \\ r_r \cdot g_x \\ r_r \cdot g_y \end{pmatrix}$$

(103)

donde:

$$g_x(\Psi_m) = g(\Psi_m) \cdot \frac{\Psi_{mx}}{\Psi_m} = g(\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}) \cdot \frac{\Psi_{mx}}{\Psi_m} = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{mx}}{\Psi_N} + b \cdot \frac{(\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi_N^n} \cdot \Psi_{mx} \right]$$

$$g_y(\Psi_m) = g(\Psi_m) \cdot \frac{\Psi_{my}}{\Psi_m} = g(\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}) \cdot \frac{\Psi_{my}}{\Psi_m} = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{my}}{\Psi_N} + b \cdot \frac{(\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi_N^n} \cdot \Psi_{my} \right]$$

(104)

y deben calcularse las derivadas siguientes:

$$\frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{my}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{my}}$$

(105)

Es un modelo realmente complicado.

Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 15.

Después de transformaciones algebraicas, se llega a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & L + \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{mx} & -\frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{my} \\ 0 & 0 & \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{my} & L + \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{mx} \\ -L_{rl} & 0 & L_{rl} + \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{mx} + L & -\frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{my} \\ 0 & L_{rl} & \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{my} & L_{rl} + \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{mx} + L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{di_{sx}}{dt} \\ \frac{di_{sy}}{dt} \\ \frac{di_{mx}}{dt} \\ \frac{di_{my}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} r_s & 0 & 0 & -\mathbf{w} \cdot L \\ 0 & r_s & \mathbf{w} \cdot L & 0 \\ -r_r & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & r_r & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot (L_{rl} + L) \\ -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & -r_r & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot (L_{rl} + L) & r_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \end{pmatrix} \quad (106)$$

donde:

$$\begin{aligned} L &= h(i_m) \\ \frac{\partial L}{\partial i_m} &= \frac{\partial h(i_m)}{\partial i_m} \end{aligned} \quad (107)$$

resulta un modelo complicado pero resoluble.

Modelos tipo Γ (II). Cancelación de L_{rl} .

En este caso, el flujo rotórico se identifica con el de magnetización:

$$\Psi_r = \Psi_m \quad (108)$$

Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 16.

Después de varias transformaciones elementales se llega a:

$$\frac{di}{dt} = M^{-1} \cdot v - M^{-1} \cdot A \cdot i \quad (109)$$

con:

$$v = (u_{sx} \quad u_{sy} \quad u_{rx} \quad u_{ry})^t \quad i = (i_{sx} \quad i_{sy} \quad i_{rx} \quad i_{ry})^t \quad (110)$$

$$A = \begin{pmatrix} R_s & -w_g \cdot (L_m + L_{sl}) & 0 & -w_g \cdot L_m \\ w_g \cdot (L_m + L_{sl}) & R_s & w_g \cdot L_m & 0 \\ 0 & -(w_g - w_r) \cdot L_m & R_r & -(w_g - w_r) \cdot (L_m) \\ (w_g - w_r) \cdot L_m & 0 & (w_g - w_r) \cdot (L_m) & R_r \end{pmatrix} \quad (111)$$

$$M = \begin{pmatrix} L_{sl} + L_{ddm} & L_{dq} & L_{ddm} & L_{dq} \\ L_{dq} & L_{sl} + L_{qqm} & L_{dq} & L_{qqm} \\ L_{ddm} & L_{dq} & L_{ddm} & L_{dq} \\ L_{dq} & L_{qqm} & L_{dq} & L_{qqm} \end{pmatrix} \quad (112)$$

$$L_{ddm} = L \cdot \cos^2 m + L_m \cdot \sin^2 m$$

$$L_{qqm} = L \cdot \sin^2 m + L_m \cdot \cos^2 m \quad (113)$$

$$L_{dq} = (L - L_m) \cdot \cos m \cdot \sin m$$

$$L = \frac{d\Psi_m}{di_m} \quad L_m = \frac{\Psi_m}{i_m} \quad (114)$$

$$\tan m = \frac{i_{my}}{i_{mx}} \quad (115) \quad \Psi_m = f(i_m) \quad (116)$$

$$\Psi_m = \sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2} \quad ; \quad i_m = \sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2} \quad (117)$$

$$i_{mx} = i_{sx} + i_{rx} \quad ; \quad i_{my} = i_{sy} + i_{ry} \quad (118)$$

$$\Psi_{mx} = L_m \cdot i_{mx} \quad ; \quad \Psi_{my} = L_m \cdot i_{my}$$

Modelo de complejidad similar al n° 1.

Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 17.

Una vez simplificadas, las ecuaciones quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_s}{dt} &= \underline{u}_s - r_s \cdot \left(\frac{\Psi_s - \Psi_r}{L_{sl}} \right) - j \cdot \omega \cdot \Psi_s \\ \frac{d\Psi_r}{dt} &= \underline{u}_r - r_r \cdot \left(\frac{\Psi_s - \Psi_r}{L_{sl}} - g(\Psi_r) \right) - j \cdot (\omega - \omega_r) \cdot \Psi_r\end{aligned}\quad (119)$$

que una vez desarrolladas se representan como siguen:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_{sx}}{dt} &= u_{sx} - r_s \cdot \left(\frac{\Psi_{sx} - \Psi_{rx}}{L_{sl}} \right) + \omega \cdot \Psi_{sy} \\ \frac{d\Psi_{sy}}{dt} &= u_{sy} - r_s \cdot \left(\frac{\Psi_{sy} - \Psi_{ry}}{L_{sl}} \right) - \omega \cdot \Psi_{sx} \\ \frac{d\Psi_{rx}}{dt} &= u_{rx} - r_r \cdot \left(\frac{\Psi_{sx} - \Psi_{rx}}{L_{sl}} - g_x(\Psi_{rs}) \right) + (\omega - \omega_r) \cdot \Psi_{ry} \\ \frac{d\Psi_{ry}}{dt} &= u_{ry} - r_r \cdot \left(\frac{\Psi_{sy} - \Psi_{ry}}{L_{sl}} - g_y(\Psi_r) \right) - (\omega - \omega_r) \cdot \Psi_{rx}\end{aligned}\quad (120)$$

con:

$$\begin{aligned}g_x(\Psi_s) &= g(\Psi_s) \cdot \frac{\Psi_{sx}}{\Psi_s} = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{sx}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{sx}^2 + \Psi_{sy}^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi_N^n} \right) \cdot \Psi_{sx} \right] \\ g_y(\Psi_s) &= g(\Psi_s) \cdot \frac{\Psi_{sy}}{\Psi_s} = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{sy}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{sx}^2 + \Psi_{sy}^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi_N^n} \right) \cdot \Psi_{sy} \right]\end{aligned}\quad (121)$$

Si se compara con el modelo 2, este resulta mucho más sencillo ya que no es necesaria la resolución de una ecuación algebraica para cada paso de integración.

Variables de estado la corriente de estator y el flujo magnetizante. Modelo 18.
Variables de estado la corriente de estator y el flujo de rotor. Modelo 19.

Tras varias operaciones algebraicas, se llega al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} L_{sl} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & L_{sl} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s & \mathbf{w} \cdot L_{sl} & 0 & -\mathbf{w} \\ -\mathbf{w}_g \cdot L_{sl} & -r_s & \mathbf{w} & 0 \\ -r_r & 0 & 0 & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \\ 0 & -r_r & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_r \cdot g_x \\ -r_r \cdot g_y \end{pmatrix} \quad (122)$$

Donde:

$$g_x(\Psi_m) = g(\Psi_m) \cdot \frac{\Psi_{mx}}{\Psi_m} = g(\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}) \cdot \frac{\Psi_{mx}}{\Psi_m} = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{mx}}{\Psi_N} + b \cdot \frac{(\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi_N^n} \cdot \Psi_{mx} \right]$$

$$g_y(\Psi_m) = g(\Psi_m) \cdot \frac{\Psi_{my}}{\Psi_m} = g(\sqrt{\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2}) \cdot \frac{\Psi_{my}}{\Psi_m} = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{my}}{\Psi_N} + b \cdot \frac{(\Psi_{mx}^2 + \Psi_{my}^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\Psi_N^n} \cdot \Psi_{my} \right] \quad (123)$$

Obsérvese la relativa simplicidad del modelo resultante.

Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 20.

Después de varias transformaciones elementales, se llega a:

$$\begin{pmatrix} L_{sl} & 0 & L + \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{mx} & -\frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{my} \\ 0 & L_{sl} & \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{my} & L + \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{mx} \\ 0 & 0 & \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{mx} + L & -\frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{my} \\ 0 & 0 & \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{my} & \frac{\partial L}{\partial i_m} \cdot i_{mx} + L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{di_{sx}}{dt} \\ \frac{di_{sy}}{dt} \\ \frac{di_{mx}}{dt} \\ \frac{di_{my}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} r_s & -\mathbf{w} \cdot L_{sl} & 0 & -\mathbf{w} \cdot L \\ \mathbf{w} \cdot L_{sl} & r_s & \mathbf{w} \cdot L & 0 \\ -r_r & 0 & r_r & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot (L) \\ 0 & -r_r & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot (L) & r_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \end{pmatrix} \quad (124)$$

donde:

$$\begin{aligned} L &= h(i_m) \\ \frac{\partial L}{\partial i_m} &= \frac{\partial h(i_m)}{\partial i_m} \end{aligned} \quad (125)$$

Resulta un modelo complicado pero resoluble.

Modelos tipo $\Gamma(I)$ ($L_{sl} = 0$) sin consideración de la saturación cruzada.

En este caso, el flujo estático se identifica con el de magnetización:

$$\Psi_s = \Psi_m \quad (126)$$

Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 21.

Tras varias operaciones algebraicas se llega a:

$$\frac{di}{dt} = M^{-1} \cdot v + M^{-1} \cdot (A \cdot i + \Omega \cdot \Psi) \quad (127)$$

con:

$$v = (u_{sx} \quad u_{sy} \quad u_{rx} \quad u_{ry})^t \quad i = (i_{sx} \quad i_{sy} \quad i_{rx} \quad i_{ry})^t \quad (128)$$

$$\Psi = (\Psi_{mx} \quad \Psi_{my})^t \quad (129)$$

$$A = \begin{pmatrix} -R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_r & (w_g - w_r) \cdot L_{rl} \\ 0 & 0 & -(w_g - w_r) \cdot L_{rl} & -R_r \end{pmatrix} \quad (130)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \\ 0 & (w - w_r) \\ -(w - w_r) & 0 \end{pmatrix} \quad (131)$$

$$M = \begin{pmatrix} L_{mx} & 0 & L_{mx} & 0 \\ 0 & L_{my} & 0 & L_{my} \\ L_{mx} & 0 & L_{rl} + L_{mx} & 0 \\ 0 & L_{my} & 0 & L_{rl} + L_{my} \end{pmatrix} \quad (132)$$

$$L_{mx} = \frac{d\Psi_{mx}}{di_{mx}} \quad ; \quad L_{my} = \frac{d\Psi_{my}}{di_{my}} \quad (133)$$

$$\Psi_{mx} = f_x(i_{mx}); \quad \Psi_{my} = f_y(i_{my}) \quad (134)$$

$$i_{mx} = i_{sx} + i_{rx} \quad ; \quad i_{my} = i_{sy} + i_{ry} \quad (135)$$

que resulta un modelo muy manejable.

Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 22.

Una vez simplificadas las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_s}{dt} &= \underline{u}_s - r_s \cdot \left(\frac{\Psi_s - \Psi_r}{L_{rl}} + g(\Psi_s) \right) - j \cdot \omega \cdot \Psi_s \\ \frac{d\Psi_r}{dt} &= \underline{u}_r - r_r \cdot \left(\frac{\Psi_r - \Psi_s}{L_{rl}} \right) - j \cdot (\omega - \omega_r) \cdot \Psi_r\end{aligned}\quad (136)$$

que una vez desarrolladas se representan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_{sx}}{dt} &= u_{sx} - r_s \cdot \left(\frac{\Psi_{sx} - \Psi_{rx}}{L_{rl}} + g_x(\Psi_s) \right) + \omega \cdot \Psi_{sy} \\ \frac{d\Psi_{sy}}{dt} &= u_{sy} - r_s \cdot \left(\frac{\Psi_{sy} - \Psi_{ry}}{L_{rl}} + g_y(\Psi_s) \right) - \omega \cdot \Psi_{sx} \\ \frac{d\Psi_{rx}}{dt} &= u_{rx} - r_r \cdot \left(\frac{\Psi_{rx} - \Psi_{sx}}{L_{rl}} \right) + (\omega - \omega_r) \cdot \Psi_{ry} \\ \frac{d\Psi_{ry}}{dt} &= u_{ry} - r_r \cdot \left(\frac{\Psi_{ry} - \Psi_{sy}}{L_{rl}} \right) - (\omega - \omega_r) \cdot \Psi_{rx}\end{aligned}\quad (137)$$

con:

$$\begin{aligned}g_x(\Psi_{sx}) &= I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{sx}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{sx})^n}{\Psi_N^n} \right) \right] \\ g_y(\Psi_{sy}) &= I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{sy}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{sy})^n}{\Psi_N^n} \right) \right]\end{aligned}\quad (138)$$

Este modelo resulta muy simple y sencillo de calcular.

Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 23I

Después de algunas transformaciones algebraicas, se llega al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -L_{rl} & 0 & (1+L_{rl} \cdot \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{mx}}) & 0 \\ 0 & -L_{rl} & 0 & (1+L_{rl} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{my}}) \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{pmatrix} -r_s & 0 & 0 & \mathbf{w}_g \\ 0 & -r_s & -\mathbf{w}_g & 0 \\ -r_r & -(\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & 0 & (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \\ (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & -r_r & -(\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_r \cdot g_x + (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} \cdot g_y \\ -r_r \cdot g_y - (\mathbf{w}_g - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} \cdot g_x \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{139}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 g_x(\Psi_{sx}) &= I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{sx}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{sx})^n}{\Psi_N^n} \right) \right] \\
 g_y(\Psi_{sy}) &= I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{sy}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{sy})^n}{\Psi_N^n} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{140}$$

además, deben calcularse las derivadas siguientes:

$$\frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{my}} \tag{141}$$

Variables de estado la corriente del estator y el flujo del rotor. Modelo 24.

Las ecuaciones resultantes, son las que siguen:

$$\begin{pmatrix} -\left(1 + L_{rl} \cdot \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{sx}}\right) \cdot L_{rl} & 0 & \left(1 + L_{rl} \cdot \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{sx}}\right) & 0 \\ 0 & -\left(1 + L_{rl} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{sy}}\right) \cdot L_{rl} & 0 & \left(1 + L_{rl} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{sy}}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_r & \mathbf{w} \cdot L_{rl} & 0 & -\mathbf{w} \\ -\mathbf{w} \cdot L_{rl} & -r_r & \mathbf{w} & 0 \\ -r_r & 0 & 0 & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \\ 0 & -r_r & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{w} \cdot L_{rl} \cdot g_x \\ \mathbf{w} \cdot L_{rl} \cdot g_y \\ r_r \cdot g_x \\ r_r \cdot g_y \end{pmatrix} \quad (142)$$

donde:

$$\begin{aligned} g_x(\Psi_{sx}) &= I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{sx}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{sx})^n}{\Psi_N^n} \right) \right] \\ g_y(\Psi_{sy}) &= I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{sy}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{sy})^n}{\Psi_N^n} \right) \right] \end{aligned} \quad (143)$$

y deben calcularse las derivadas siguientes:

$$\frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{sx}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{sy}} \quad (144)$$

Es un modelo complicado.

Además deben resolverse las siguientes ecuaciones implícitas:

$$\begin{aligned} \Psi_{sx} &= \Psi_{rx} - L_{rl} \cdot (g_x(\Psi_{sx}) - i_{sx}) \\ \Psi_{sy} &= \Psi_{ry} - L_{rl} \cdot (g_y(\Psi_{sy}) - i_{sy}) \end{aligned} \quad (145)$$

Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 25.

Después de muchas operaciones algebraicas, se llega a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & L_x + \frac{\partial L_x}{\partial i_{mx}} \cdot i_{mx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_y + \frac{\partial L_y}{\partial i_{my}} \cdot i_{my} \\ -L_{rl} & 0 & L_{rl} + \frac{\partial L_x}{\partial i_{mx}} \cdot i_{mx} + L_x & 0 \\ 0 & L_{rl} & 0 & L_{rl} + \frac{\partial L_y}{\partial i_{my}} \cdot i_{my} + L_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{di_{sx}}{dt} \\ \frac{di_{sy}}{dt} \\ \frac{di_{mx}}{dt} \\ \frac{di_{my}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} - \\
 - \begin{pmatrix} r_s & 0 & 0 & -\mathbf{w} \cdot L_y \\ 0 & r_s & \mathbf{w} \cdot L_x & 0 \\ -r_r & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & r_r & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot (L_{rl} + L_y) \\ -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & -r_r & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot (L_{rl} + L_x) & r_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \end{pmatrix} \quad (146)$$

donde:

$$\begin{aligned} L_x &= h(i_{mx}); & L_y &= h(i_{my}) \\ \frac{\partial L_x}{\partial i_{mx}} &= \frac{\partial h(i_{mx})}{\partial i_{mx}}; & \frac{\partial L_y}{\partial i_{my}} &= \frac{\partial h(i_{my})}{\partial i_{my}} \end{aligned} \quad (147)$$

Resulta un modelo complicado pero resoluble.

Modelos tipo $\Gamma(\text{II})$ ($L_{rl} = 0$) sin consideración de la saturación cruzada.

En este caso, el flujo rotórico se identifica con el de magnetización:

$$\Psi_r = \Psi_m \quad (148)$$

Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 26.

Después de varias transformaciones algebraicas, se llega a:

$$\frac{di}{dt} = M^{-1} \cdot v + M^{-1} \cdot (A \cdot i + \Omega \cdot \Psi) \quad (149)$$

con:

$$v = (u_{sx} \quad u_{sy} \quad u_{rx} \quad u_{ry})^t \quad i = (i_{sx} \quad i_{sy} \quad i_{rx} \quad i_{ry})^t \quad (150)$$

$$\Psi = (\Psi_{mx} \quad \Psi_{my})^t \quad (151)$$

$$A = \begin{pmatrix} -R_s & \mathbf{w}_g \cdot L_{sl} & 0 & 0 \\ -\mathbf{w}_g \cdot L_{sl} & -R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_r \end{pmatrix} \quad (152)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{w} \\ -\mathbf{w} & 0 \\ 0 & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \\ -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) & 0 \end{pmatrix} \quad (153)$$

$$M = \begin{pmatrix} L_{sl} + L_{mx} & 0 & L_{mx} & 0 \\ 0 & L_{sl} + L_{my} & 0 & L_{my} \\ L_{mx} & 0 & L_{mx} & 0 \\ 0 & L_{my} & 0 & L_{my} \end{pmatrix} \quad (154)$$

$$L_{mx} = \frac{d\Psi_{mx}}{di_{mx}} \quad ; \quad L_{my} = \frac{d\Psi_{my}}{di_{my}} \quad (155)$$

$$\Psi_{mx} = f_x(i_{mx}); \quad \Psi_{my} = f_y(i_{my}) \quad (156)$$

$$i_{mx} = i_{sx} + i_{rx} \quad i_{my} = i_{sy} + i_{ry} \quad (157)$$

que resulta un modelo manejable.

Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 27.

Una vez simplificadas, las ecuaciones quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_s}{dt} &= \underline{u}_s - r_s \cdot \left(\frac{\Psi_s - \Psi_r}{L_{sl}} \right) - j \cdot \mathbf{w} \cdot \Psi_s \\ \frac{d\Psi_r}{dt} &= \underline{u}_r - r_r \cdot \left(\frac{\Psi_s - \Psi_r}{L_{sl}} - g(\Psi_r) \right) - j \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot \Psi_r\end{aligned}\quad (158)$$

que una vez desarrolladas se representan en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_{sx}}{dt} &= u_{sx} - r_s \cdot \left(\frac{\Psi_{sx} - \Psi_{rx}}{L_{sl}} \right) + \mathbf{w} \cdot \Psi_{sy} \\ \frac{d\Psi_{sy}}{dt} &= u_{sy} - r_s \cdot \left(\frac{\Psi_{sy} - \Psi_{ry}}{L_{sl}} \right) - \mathbf{w} \cdot \Psi_{sx} \\ \frac{d\Psi_{rx}}{dt} &= u_{rx} - r_r \cdot \left(\frac{\Psi_{sx} - \Psi_{rx}}{L_{sl}} - g_x(\Psi_{ry}) \right) + (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot \Psi_{ry} \\ \frac{d\Psi_{ry}}{dt} &= u_{ry} - r_r \cdot \left(\frac{\Psi_{sy} - \Psi_{ry}}{L_{sl}} - g_y(\Psi_{ry}) \right) - (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot \Psi_{rx}\end{aligned}\quad (159)$$

con:

$$\begin{aligned}g_x(\Psi_{rx}) &= I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{rx}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{rx})^n}{\Psi_N^n} \right) \right] \\ g_y(\Psi_{ry}) &= I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{ry}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{ry})^n}{\Psi_N^n} \right) \right]\end{aligned}\quad (160)$$

Si se compara con el modelo 2, este resulta mucho más sencillo ya que no es necesaria la resolución de una ecuación algebraica para cada paso de integración.

Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 28.
Variables de estado la corriente del estator y el flujo de rotor. Modelo 29.

Tras muchas transformaciones algebraicas, se llega al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} L_{sl} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & L_{sl} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -r_s & \mathbf{w} \cdot L_{sl} & 0 & -\mathbf{w} \\ -\mathbf{w}_g \cdot L_{sl} & -r_s & \mathbf{w} & 0 \\ -r_r & 0 & 0 & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \\ 0 & -r_r & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{mx} \\ \Psi_{my} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_r \cdot g_x \\ -r_r \cdot g_y \end{pmatrix} \quad (161)$$

Donde:

$$g_x(\Psi_{rx}) = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{rx}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{rx})^n}{\Psi_N^n} \right) \right]$$

$$g_y(\Psi_{ry}) = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{ry}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{ry})^n}{\Psi_N^n} \right) \right] \quad (162)$$

Obsérvese la relativa simplicidad del modelo resultante.

Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 30.

Después de muchas transformaciones algebraicas se llega a:

$$\begin{pmatrix} L_{sl} & 0 & L_x + \frac{\partial L_x}{\partial i_{mx}} \cdot i_{mx} & 0 \\ 0 & L_{sl} & 0 & L + \frac{\partial L_y}{\partial i_{my}} \cdot i_{my} \\ 0 & 0 & \frac{\partial L_x}{\partial i_{mx}} \cdot i_{mx} + L_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial L_y}{\partial i_{my}} \cdot i_{my} + L_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{di_{sx}}{dt} \\ \frac{di_{sy}}{dt} \\ \frac{di_{mx}}{dt} \\ \frac{di_{my}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_s & -w \cdot L_{sl} & 0 & -w \cdot L_y \\ w \cdot L_{sl} & r_s & w \cdot L_x & 0 \\ -r_r & 0 & r_r & -(w - w_r) \cdot (L_y) \\ 0 & -r_r & (w - w_r) \cdot (L_x) & r_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{mx} \\ i_{my} \end{pmatrix} \quad (163)$$

donde:

$$\begin{aligned} L_x &= h(i_{mx}); & L_y &= h(i_{my}) \\ \frac{\partial L_x}{\partial i_{mx}} &= \frac{\partial h(i_{mx})}{\partial i_{mx}}; & \frac{\partial L_y}{\partial i_{my}} &= \frac{\partial h(i_{my})}{\partial i_{my}} \end{aligned} \quad (164)$$

Resulta un modelo complicado pero resoluble.

Modelos basados en la orientación del campo.

Si se considera el eje de rotación girando a velocidad ω_g y concordante con el vector representativo del flujo, o corriente magnetizante, este tendrá una componente única:

$$i_m = i_{mx} + j \cdot 0 \quad (165)$$

$$i_m = i_{sx} + i_{rx}; \quad 0 = i_{sy} + i_{ry} \quad (166)$$

La ventaja de esta transformación es doble:

- Reducción del sistema original de quinto orden a uno de cuarto orden
- La saturación puede expresarse en función de una única componente:

$$\Psi_m = f(i_m); \quad L_m = h(i_m); \quad i_m = g(\Psi_m) \quad (167)$$

según el conjunto de variables elegidas.

Como contrapartida debe calcularse la velocidad para cada instante de tiempo considerado y pueden existir problemas de arranque de la simulación.

Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 31.

Las ecuaciones de la máquina, expresadas en la nueva referencia vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} L_{sl} + L_m + \frac{dL_m}{d_{im}} \cdot (i_{sx} + i_{rx}) & 0 & L_m + \frac{dL_m}{d_{im}} \cdot (i_{sx} + i_{rx}) \\ 0 & L_{sl} & 0 \\ L_m + \frac{dL_m}{d_{im}} \cdot (i_{sx} + i_{rx}) & 0 & L_{sl} + L_m + \frac{dL_m}{d_{im}} \cdot (i_{sx} + i_{rx}) \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{rx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s & \mathbf{w} \cdot L_{sl} & 0 \\ -\mathbf{w} \cdot (L_{sl} + L_m) & -r_s & -\mathbf{w} \cdot L_m \\ -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & 0 & -r_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{rx} \end{pmatrix} \quad (168)$$

donde la velocidad de los ejes viene determinada a partir de la siguiente expresión:

$$\mathbf{w} = \frac{u_{ry} + \frac{L_{rl}}{L_{sl}} \cdot u_{sy} - \left(r_r + \frac{L_{rl}}{L_{sl}} \cdot r_s \right) \cdot i_{sy} + \mathbf{w}_r \cdot \frac{L_{rl}}{L_{sl}} \cdot ((L_{rl} + L_m) \cdot i_{rx} + L_m \cdot i_{sx})}{\frac{L_{rl}}{L_{sl}} \cdot [(L_{sl} + L_m) \cdot i_{sx} + L_m \cdot i_{rx}] + (L_{rl} + L_m) \cdot i_{rx} + L_m \cdot i_{sx}} \quad (169)$$

Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 32.

Las ecuaciones transformadas quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_{sx}}{dt} &= u_{sx} - \frac{r_s}{L_{sl}} \cdot (\Psi_{sx} - \Psi_{mx}) + \mathbf{w} \cdot \Psi_{sy} \\ \frac{d\Psi_{sy}}{dt} &= u_{sy} - \frac{r_s}{L_{sl}} \cdot (\Psi_{sy}) - \mathbf{w} \cdot \Psi_{sx} \\ \frac{d\Psi_{rx}}{dt} &= u_{rx} - \frac{r_r}{L_{rl}} \cdot (\Psi_{rx} - \Psi_{mx}) + (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot \Psi_{ry}\end{aligned}\quad (170)$$

conjuntamente con la siguiente restricción algebraica:

$$\frac{\Psi_{sx}}{L_{sl}} + \frac{\Psi_{rx}}{L_{rl}} - \Psi_{mx} \cdot \left(\frac{1}{L_{sl}} + \frac{1}{L_{rl}} \right) = i_m = g(\Psi_m) \quad (171)$$

y la expresión para la determinación de la velocidad indicada a continuación:

$$\mathbf{w} = \frac{u_{ry} + \frac{L_{rl}}{L_{sl}} \cdot u_{sy} - \Psi_{ry} \cdot \left(\frac{r_r}{L_{rl}} + \frac{r_s}{L_{sl}} \cdot \frac{L_{rl}}{L_{sl}} \right) + \mathbf{w}_r \cdot \Psi_{rx}}{\Psi_{rx} + \frac{L_{rl}}{L_{sl}} \cdot \Psi_{sx}} \quad (172)$$

Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 33.

Después de algunas operaciones algebraicas, se llega a:

$$\begin{pmatrix} L_{sl} & 0 & 1 \\ 0 & L_{sl} & 0 \\ -L_{rl} & 0 & 1 + L_{rl} \cdot \frac{dg}{d\Psi_m} \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s & \mathbf{w} \cdot L_{sl} & 0 \\ -\mathbf{w} \cdot L_{sl} & -r_s & 0 \\ r_r & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_r \end{pmatrix} \cdot g(\Psi_m) \quad (173)$$

junto con la expresión para el cálculo de la velocidad:

$$\mathbf{w} = \frac{u_{ry} + \frac{L_{rl}}{L_{sl}} \cdot u_{sy} - (r_r + \frac{L_{rl}}{L_{sl}} \cdot r_s) \cdot i_{sy} + \mathbf{w}_r \cdot (L_{rl} \cdot (g(\Psi_m) - i_{sx} + \Psi_m))}{L_{rl} \cdot g(\Psi_m) + \Psi_m} \quad (174)$$

Variables de estado la corriente del estator y el flujo del rotor. Modelo 34.

$$\begin{pmatrix} L_{sl} + \frac{\frac{df}{di_m}}{1 + \frac{1}{L_{rl}} \cdot \frac{df}{di_m}} & 0 & \frac{1}{L_{rl}} \cdot \frac{df}{di_m} \\ 0 & L_{sl} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{rx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s & \mathbf{w} \cdot L_{sl} & 0 \\ -\mathbf{w} \cdot L_{sl} & -r_s & 0 \\ 0 & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & -\frac{r_r}{L_{rl}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_{rx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w} \cdot f(i_m) \\ \frac{r_r}{L_{rl}} \cdot f(i_m) \end{pmatrix} \quad (175)$$

junto con:

$$\mathbf{w} = \frac{u_{ry} + \frac{L_{rl}}{L_{sl}} \cdot u_{sy} + \left(r_r - \frac{L_{rl}}{L_{sl}} \cdot r_s \right) \cdot i_{sy} + \mathbf{w}_r \cdot \Psi_{rx}}{L_{rl} \cdot i_{sx} + \frac{L_{rl}}{L_{sl}} \cdot f(i_m) + \Psi_{rx}} \quad (176)$$

Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 35.

$$\begin{pmatrix} L_{sl} & 0 & \frac{dL_m}{di_m} \cdot i_m + L_m \\ 0 & L_{sl} & 0 \\ -L_{rl} & 0 & L_{rl} \cdot \left(1 + \frac{dL_m}{di_m} \cdot i_m + L_m\right) \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s & \mathbf{w} \cdot L_{sl} & 0 \\ -\mathbf{w} \cdot L_{sl} & -r_s & -\mathbf{w} \cdot L_m \\ r_r & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & -r_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_m \end{pmatrix} \quad (177)$$

conjuntamente con:

$$\mathbf{w} = \frac{u_{ry} + \frac{L_{rl}}{L_{sl}} \cdot u_{sy} + \left(r_s \cdot \frac{L_{rl}}{L_{sl}} - r_r \right) \cdot i_{sy} + \mathbf{w}_r \cdot ((L_{rl} + L_m) \cdot i_m - L_{rl} \cdot i_{sx})}{\left(\frac{L_{rl}}{L_{sl}} \cdot L_m + L_{rl} + L_m \right) \cdot i_m + (L_{sl} - L_{rl}) \cdot i_{sx}} \quad (178)$$

Modelos de control por orientación del campo. Transformación tipo $\Gamma(I)$. Cancelación de L_{sl} .

Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 36.

Después de alguna transformación, se llega a:

$$\begin{pmatrix} \frac{dL_m}{di_m} \cdot i_m + L_m & \frac{dL_m}{di_m} \cdot i_m + L_m & 0 \\ 0 & L_{rl} & \frac{dL_m}{di_m} \cdot i_m + L_m \\ 0 & 0 & L_{rl} \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s & 0 & 0 \\ 0 & -r_r & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} \\ 0 & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & -r_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ 0 \\ -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_m \cdot i_m \end{pmatrix} \quad (179)$$

junto con:

$$\mathbf{w} = \frac{u_{sy} + r_s \cdot i_{ry}}{L_m \cdot (i_{sx} + i_{rx})} \quad (180)$$

Resulta un modelo muy sencillo y conceptualmente claro.

Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 37.

Una vez simplificadas las ecuaciones, quedan:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_{sx}}{dt} &= u_{sx} - r_s \cdot \left(\frac{\Psi_{sx} - \Psi_{rx}}{L_{rl}} + g_x(\Psi_s) \right) \\ \frac{d\Psi_{rx}}{dt} &= u_{rx} - r_r \cdot \left(\frac{\Psi_{rx} - \Psi_{sx}}{L_{rl}} \right) + (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot \Psi_{ry} \\ \frac{d\Psi_{ry}}{dt} &= u_{ry} - r_r \cdot \left(\frac{\Psi_{ry}}{L_{rl}} \right) - (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot \Psi_{rx} \end{aligned} \quad (181)$$

junto con:

$$\mathbf{w} = \frac{u_{sy} - r_s \cdot \left(g(\Psi_m) - \frac{\Psi_{ry}}{L_{rl}} \right)}{\Psi_{sx}} \quad (182)$$

Este modelo resulta muy simple y sencillo de calcular.

Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 38.

Después de algunas transformaciones, se llega a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -L_{rl} & 0 & 1 + L_{rl} \cdot \frac{dg}{d\Psi_m} \\ 0 & -L_{rl} & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s & 0 & 0 \\ r_r & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & 0 \\ (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & r_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -r_r \cdot g(\Psi_m) \\ -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot \Psi_m \end{pmatrix} \quad (183)$$

Junto con:

$$\mathbf{w} = \frac{u_{sy} - r_s \cdot i_{sy}}{\Psi_m} \quad (184)$$

que también resulta muy sencillo.

Variables de estado la corriente del estator y el flujo del rotor. Modelo 39.

Se llega a:

$$\begin{pmatrix} \frac{df}{di_m} & \frac{1}{L_{rl}} \cdot \frac{df}{di_m} & 0 \\ 1 + \frac{1}{L_{rl}} \cdot \frac{df}{di_m} & 1 + \frac{1}{L_{rl}} \cdot \frac{df}{di_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r_r}{L_{rl}} & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \\ 0 & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) & -\frac{r_r}{L_{rl}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r_r}{L_{rl}} \cdot f(i_m) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (185)$$

junto con:

$$\mathbf{w} = \frac{u_{sy} - r_s \cdot i_{sy}}{\Psi_m} \quad (186)$$

Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 40.

Se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dL_m}{di_m} \cdot i_m + L_m \\ -L_{rl} & 0 & L_{rl} + \frac{dL_m}{di_m} \cdot i_m + L_m \\ 0 & -L_{rl} & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{rx} \\ u_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s & 0 & 0 \\ r_r & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & -r_r \\ (\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} & r_r & -(\mathbf{w} - \mathbf{w}_r) \cdot L_{rl} + L_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (187)$$

junto con:

$$\mathbf{w} = \frac{u_{sy} - r_s \cdot i_{sy}}{L_m \cdot i_m} \quad (188)$$

Modelos de control por orientación del campo. Transformación tipo $\Gamma(\text{II})$. Cancelación de L_{rl} .

Variables de estado las corrientes del estator y rotor. Modelo 41.

Las ecuaciones transformadas conducen al siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} L_{sl} + L_m + \frac{dL_m}{d_{im}} \cdot (i_{sx} + i_{rx}) & 0 & L_m + \frac{dL_m}{d_{im}} \cdot (i_{sx} + i_{rx}) \\ 0 & L_{sl} & 0 \\ L_m + \frac{dL_m}{d_{im}} \cdot (i_{sx} + i_{rx}) & 0 & L_{sl} + L_m + \frac{dL_m}{d_{im}} \cdot (i_{sx} + i_{rx}) \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{rx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s & \mathbf{w} \cdot L_{sl} & 0 \\ -\mathbf{w} \cdot (L_{sl} + L_m) & -r_s & -\mathbf{w} \cdot L_m \\ 0 & 0 & -r_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{rx} \end{pmatrix} \quad (189)$$

donde la velocidad de los ejes viene determinada a partir de la siguiente expresión:

$$\mathbf{w} = \frac{u_{ry} - r_r \cdot i_{sy}}{L_m \cdot (i_{rx} + i_{sx})} \quad (190)$$

Variables de estado los flujos del estator y rotor. Modelo 42.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{r_s}{L_{sl}} & 0 & \frac{r_s}{L_{sl}} \\ 0 & -\frac{r_s}{L_{sl}} & \mathbf{w} \\ \frac{r_r}{L_{sl}} & 0 & -\frac{r_r}{L_{sl}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{rx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_r \cdot g(\Psi_r) \end{pmatrix} \quad (191)$$

junto con:

$$\mathbf{w} = \frac{u_{ry} + \frac{r_r}{L_{sl}} \cdot \Psi_{sy}}{\Psi_r} + \mathbf{w}_r \quad (192)$$

Variables de estado la corriente del estator y el flujo magnetizante. Modelo 43.
Variables de estado la corriente del estator y el flujo de rotor. Modelo 44.

Después de algunas transformaciones algebraicas, se llega a:

$$\begin{pmatrix} L_{sl} & 0 & 1 \\ 0 & L_{sl} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s & \mathbf{w} \cdot L_{sl} & 0 \\ -\mathbf{w} \cdot L_{sl} & -r_s & 0 \\ r_r & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ \Psi_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_r \end{pmatrix} \cdot g(\Psi_m) \quad (193)$$

juntamente con la expresión para el cálculo de la velocidad:

$$\mathbf{w} = \frac{u_{ry} - r_r \cdot i_{sy}}{\Psi_m} + \mathbf{w}_r \quad (194)$$

Variables de estado las corrientes del estator y magnetizante. Modelo 45

Finalmente, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} L_{sl} & 0 & \frac{dL_m}{di_m} \cdot i_m + L_m \\ 0 & L_{sl} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dL_m}{di_m} \cdot i_m + L_m \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{rx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s & \mathbf{w} \cdot L_{sl} & 0 \\ -\mathbf{w} \cdot L_{sl} & -r_s & -\mathbf{w} \cdot L_m \\ r_r & 0 & -r_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_m \end{pmatrix} \quad (195)$$

junto con:

$$\mathbf{w} = \frac{u_{ry} + r_r \cdot i_{sy}}{L_m \cdot i_m} + \mathbf{w}_r \quad (196)$$

Resumen comparativo de los distintos modelos.

Modelo	Ecuaciones implícitas o algebraicas	Derivadas de funciones de la saturación	VARIABLES NO MENSURABLES (Necesidad de observador de estados)
0 (lineal)	NO	NO	SI (variable según el conjunto de variables considerado)

Modelos con consideración de la saturación cruzada.

1	SI	$L = h(i_m); \quad \frac{\partial L}{\partial i_m} = \frac{\partial h(i_m)}{\partial i_m}$	$i_{rx}; \quad i_{ry}$
2	SI	NO	$\Psi_{sx}; \quad \Psi_{sy}; \quad \Psi_{rx}; \quad \Psi_{ry}$
3	NO	$\frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{my}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{my}}$	$\Psi_{mx}; \quad \Psi_{my}$
4	SI	SI	$\Psi_{rx}; \quad \Psi_{ry}$
5	NO	$L = h(i_m); \quad \frac{\partial L}{\partial i_m} = \frac{\partial h(i_m)}{\partial i_m}$	$i_{mx}; \quad i_{my}$

Modelos sin consideración de la saturación cruzada.

6	NO	$L_{mx} = \frac{d\Psi_{mx}}{di_{mx}} \quad L_{my} = \frac{d\Psi_{my}}{di_{my}}$	$i_{rx}; \quad i_{ry}$
7	SI	NO	$\Psi_{sx}; \quad \Psi_{sy}; \quad \Psi_{rx}; \quad \Psi_{ry}$
8	NO	$\frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{my}}$	$\Psi_{mx}; \quad \Psi_{my}$
9	NO	$\frac{df_x}{di_{mx}}; \quad \frac{df_y}{di_{my}}$	$\Psi_{rx}; \quad \Psi_{ry}$
10	NO	$\frac{\partial L_x}{\partial i_{mx}} = \frac{\partial h_x(i_{mx})}{\partial i_{mx}}; \quad \frac{\partial L_y}{\partial i_{my}} = \frac{\partial h_y(i_{my})}{\partial i_{my}}$	$i_{mx}; \quad i_{my}$

Modelos tipo $\Gamma(I)$. Cancelación de L_{sl} . Consideración de la saturación cruzada.

11	SI	$L = h(i_m); \quad \frac{\partial L}{\partial i_m} = \frac{\partial h(i_m)}{\partial i_m}$	$i_{rx}; \quad i_{ry}$
12	NO	NO	$\Psi_{sx}; \quad \Psi_{sy}; \quad \Psi_{rx}; \quad \Psi_{ry}$
13	NO	$\frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{my}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{my}}$	$\Psi_{mx}; \quad \Psi_{my}$
14	NO	$\frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{my}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{my}}$	$\Psi_{rx}; \quad \Psi_{ry}$
15	NO	$L = h(i_m); \quad \frac{\partial L}{\partial i_m} = \frac{\partial h(i_m)}{\partial i_m}$	$i_{mx}; \quad i_{my}$

Modelos tipo $\Gamma(II)$. Cancelación de L_{rl} . Consideración de la saturación cruzada.

16	SI	$L = h(i_m); \quad \frac{\partial L}{\partial i_m} = \frac{\partial h(i_m)}{\partial i_m}$	$i_{rx}; \quad i_{ry}$
17	NO	NO	$\Psi_{sx}; \quad \Psi_{sy}; \quad \Psi_{rx}; \quad \Psi_{ry}$
18	NO	NO	$\Psi_{mx}; \quad \Psi_{my}$
19	NO	NO	$\Psi_{rx}; \quad \Psi_{ry}$
20	NO	$L = h(i_m); \quad \frac{\partial L}{\partial i_m} = \frac{\partial h(i_m)}{\partial i_m}$	$i_{mx}; \quad i_{my}$

Modelos tipo $\Gamma(I)$. Cancelación de L_{sl} . Sin consideración de la saturación cruzada.

21	NO	$L_{mx} = \frac{d\Psi_{mx}}{di_{mx}} \quad L_{my} = \frac{d\Psi_{my}}{di_{my}}$	$i_{rx}; \quad i_{ry}$
22	NO	NO	$\Psi_{sx}; \quad \Psi_{sy}; \quad \Psi_{rx}; \quad \Psi_{ry}$
23	NO	$\frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{my}}$	$\Psi_{mx}; \quad \Psi_{my}$
24	SI	$\frac{\partial g_x}{\partial \Psi_{mx}}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial \Psi_{my}}$	$\Psi_{rx}; \quad \Psi_{ry}$
25	NO	$L_x = h(i_{mx}); \quad L_y = h(i_{my})$ $\frac{\partial L_x}{\partial i_{mx}} = \frac{\partial h(i_{mx})}{\partial i_{mx}}; \quad \frac{\partial L_y}{\partial i_{my}} = \frac{\partial h(i_{my})}{\partial i_{my}}$	$i_{mx}; \quad i_{my}$

Modelos tipo $\Gamma(II)$. Cancelación de L_{rl} . Sin consideración de la saturación cruzada.

26	NO	$L_{mx} = \frac{d\Psi_{mx}}{di_{mx}} \quad L_{my} = \frac{d\Psi_{my}}{di_{my}}$	$i_{rx}; i_{ry}$
27	NO	NO	$\Psi_{sx}; \Psi_{sy}; \Psi_{rx}; \Psi_{ry}$
28	NO	NO	$\Psi_{mx}; \Psi_{my}$
29	NO	NO	$\Psi_{rx}; \Psi_{ry}$
30	NO	$L_x = h(i_{mx}); \quad L_y = h(i_{my})$ $\frac{\partial L_x}{\partial i_{mx}} = \frac{\partial h(i_{mx})}{\partial i_{mx}}; \quad \frac{\partial L_y}{\partial i_{my}} = \frac{\partial h(i_{my})}{\partial i_{my}}$	$i_{mx}; i_{my}$

Modelos basados en la orientación del campo.

31	SI	$\frac{dL_m}{di_m}$	$i_{rx}; i_{ry}$
32	SI	NO	$\Psi_{sx}; \Psi_{sy}; \Psi_{rx}; \Psi_{ry}$
33	SI	$\frac{dg}{d\Psi_m}$	$\Psi_{mx}; \Psi_{my}$
34	SI	$\frac{df}{di_m}$	$\Psi_{rx}; \Psi_{ry}$
35	SI	$L = h(i_m); \quad \frac{\partial L}{\partial i_m} = \frac{\partial h(i_m)}{\partial i_m}$	$i_{mx}; i_{my}$

Modelos basados en la orientación del campo. Modelos tipo $\Gamma(I)$. Cancelación de L_{sl} .

36	SI	$L = h(i_m); \quad \frac{\partial L}{\partial i_m} = \frac{\partial h(i_m)}{\partial i_m}$	$i_{rx}; i_{ry}$
37	SI	NO	$\Psi_{sx}; \Psi_{sy}; \Psi_{rx}; \Psi_{ry}$
38	SI	$\frac{dg}{d\Psi_m}$	$\Psi_{mx}; \Psi_{my}$
39	SI	$\frac{df}{di_m}$	$\Psi_{rx}; \Psi_{ry}$
40	SI	$L = h(i_m); \quad \frac{\partial L}{\partial i_m} = \frac{\partial h(i_m)}{\partial i_m}$	$i_{mx}; i_{my}$

Modelos basados en la orientación del campo. Modelos tipo Γ (II). Cancelación de L_{rl} .

41	SI	$L = h(i_m); \quad \frac{\partial L}{\partial i_m} = \frac{\partial h(i_m)}{\partial i_m}$	$i_{rx}; \quad i_{ry}$
42	SI	NO	$\Psi_{sx}; \quad \Psi_{sy}; \quad \Psi_{rx}; \quad \Psi_{ry}$
43	SI	NO	$\Psi_{mx}; \quad \Psi_{my}$
44	SI	NO	$\Psi_{rx}; \quad \Psi_{ry}$
45	SI	$L = h(i_m); \quad \frac{\partial L}{\partial i_m} = \frac{\partial h(i_m)}{\partial i_m}$	$i_{mx}; \quad i_{my}$

Conclusiones.

A la vista de los resultados y debido a la necesidad de determinar los parámetros de la forma más sencilla posible, se pueden deducir las siguientes consideraciones:

- La ecuación (21) traduce la relación entre corriente de magnetización y flujo total en el entrehierro. Para el caso lineal esta relación o RESTRICCIÓN ALGEBRAICA puede deshacerse y sustituirse en las ecuaciones de estado que modelizan la máquina, sean cuales sean las variables de estado consideradas. En los casos que consideraremos existen conjuntos de variables de estado en los que esta simplificación no es posible; estos modelos NO pueden ser considerados útiles a efectos de control ya que para cada intervalo de cálculo debe resolverse una ecuación algebraica NO lineal, en la que no es posible indicar a priori el tiempo de resolución de la misma.
- Los modelos que no consideran la saturación cruzada resultan más sencillos de resolver y más prácticos para su inclusión dentro de algoritmos de determinación de parámetros.
- Los modelos simplificados (tipo Γ), resultan aún más sencillos de tratamiento.
- En relación a la caracterización y determinación de los parámetros los modelos tipo Γ (I) resultan más interesantes ya que la caracterización de la saturación es más sencilla

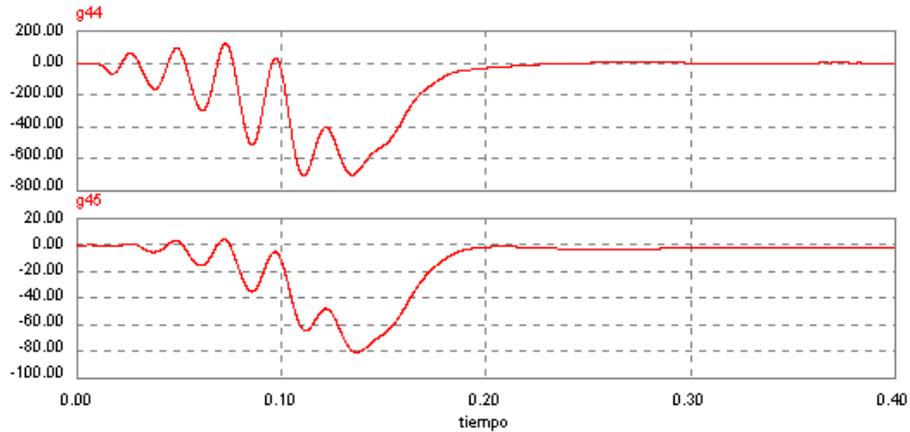
De las consideraciones anteriores, se deduce que los modelos más adecuados de cara a los objetivos perseguidos, son los nº 21 a 25. Dentro de estos el modelo nº 24 no resulta adecuado debido a la restricción algebraica que presenta.

Los modelos nº 23 y nº 25, resultan complejos de resolución. Finalmente queda la comparación entre los modelos nº 21 (con variables de estado las corrientes del estator y rotor) y nº 22 (con variables de estado los flujos del estator y rotor). En los capítulos que siguen, se detalla el uso de tales modelos para la determinación de los parámetros, tanto en tiempo real como mediante ensayos fuera de línea.

SENSIBILIDAD

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{p_0} \cdot \gamma + \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_{p_0}$$

$$\sigma = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{p_0} \cdot \gamma + \left(\frac{\partial g}{\partial p} \right)_{p_0}$$



3. SENSIBILIDAD

<i>3. Sensibilidad</i>	2
<i>Ecuaciones de sensibilidad de un sistema dinámico [Eslami 94], [Rosenwasser 00].</i>	2
<i>Aplicación al caso de una bobina saturada.</i>	4
<i>Aplicación a las ecuaciones de la máquina asíncrona.</i>	10
<i>Conclusiones.</i>	31

3. Sensibilidad

Los modelos considerados en el capítulo anterior presentan ciertas características que hacen que resulten muy afectados por las variaciones de los parámetros; de tal manera que simulaciones sobre la misma máquina realizadas con diferentes modelos pueden dar resultados discrepantes y tiempos de cálculo muy distintos. Para analizar el problema, se debe evaluar la sensibilidad tanto estática (en régimen permanente) como dinámica.

El análisis de las funciones de sensibilidad, permite estimar los errores en las salidas ante variaciones de los parámetros, así como su influencia en la respuesta global del sistema.

Un modelo menos sensible a las variaciones de los parámetros, será más útil para la realización de algoritmos de control y, a su vez, se pondrá en evidencia que parámetros son más delicados en su valoración posterior. En los capítulos que siguen se realiza la identificación en tiempo real de los parámetros de los modelos; si los parámetros en juego afectan poco a la respuesta del sistema, este resulta muy robusto y, por tanto, se pueden admitir discrepancias en su valoración respecto el valor nominal o exacto, según el caso.

Ecuaciones de sensibilidad de un sistema dinámico [Eslami 94], [Rosenwasser 00].

Dado un sistema cualquiera, descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, t, u, p_o) \quad ; \quad x(t_0) = x^0 \\ y &= g(x, t, u, p) \end{aligned} \quad (1)$$

y el sistema, con parámetros desviados de su valor nominal:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, u, p) \quad x(t_0) = x^0 \quad (2)$$

El cambio de los valores del vector de estados debido a la variación de los parámetros, viene dado por:

$$\Delta x(t, p) = \left(\frac{\partial x}{\partial p} \right)_{p_0} \cdot \Delta p = \gamma(t, p_0) \cdot \Delta p \quad (3)$$

Igualmente, para la función de salida:

$$\Delta y(t, p) = \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right)_{p_0} \cdot \Delta p = \sigma(t, p_0) \cdot \Delta p \quad (4)$$

Las ecuaciones de sensibilidad del sistema, pueden plantearse como:

- Funciones de sensibilidad de las variables de estado respecto a la variación de los parámetros:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{p_0} \cdot \gamma + \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_{p_0} \quad (5)$$

- Funciones de sensibilidad de las salidas respecto a la variación de los parámetros:

$$\sigma = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{p_0} \cdot \gamma + \left(\frac{\partial g}{\partial p} \right)_{p_0} \quad (6)$$

Si el número de variables de estado es N, M el de salidas y P el de parámetros, la matriz γ tiene dimensiones NxP, la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ NxN, la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)$ NxP, la matriz σ MxP, el jacobiano $\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)$ MxN y el jacobiano $\left(\frac{\partial g}{\partial p} \right)$ MxP.

Valores de sensibilidad en régimen permanente

En régimen permanente, se cumplirá que:

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0 \quad (7)$$

entonces:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{p_0} \cdot \gamma_{RP} + \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_{p_0} = 0 \quad (8)$$

$$\gamma_{RP} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{p_0}^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_{p_0} \quad (9)$$

suponiendo que la matriz jacobiana no sea singular.

Los valores de la sensibilidad para las variables de salida se expresan como:

$$\sigma_{RP} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{p_0} \cdot \gamma_{RP} + \left(\frac{\partial g}{\partial p} \right)_{p_0} \quad (10)$$

Aplicación al caso de una bobina saturada.

Supongamos el caso de una bobina saturada alimentada a partir de una fuente de tensión.

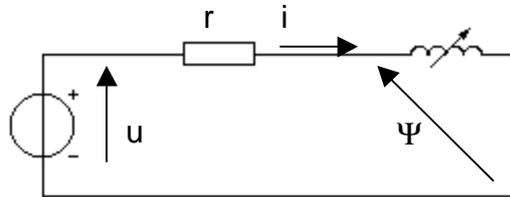


Figura 1. Modelo de bobina saturada.

las ecuaciones que gobiernan el sistema, son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= u - r \cdot i \\ \frac{i}{I_N} &= a \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \end{aligned} \quad (11)$$

que expresadas en formato normalizado conducen a:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= u - r \cdot I_N \cdot \left(a \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \\ i &= I_N \cdot \left(a \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$x = \Psi \quad y = i \quad p = (r \ a \ b)$$

$$f(x, t, u, p) = u - r \cdot I_N \cdot \left(a \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \quad (13)$$

$$g(x, t, u, p) = I_N \cdot \left(a \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \begin{pmatrix} \gamma_r \\ \gamma_a \\ \gamma_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} \end{pmatrix} \quad (14) \quad \frac{\partial y}{\partial p} = \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_a \\ \sigma_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial a} \\ \frac{\partial y}{\partial b} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \Psi} = -r \cdot I_N \cdot \left(a \cdot \frac{1}{\Psi_N} + n \cdot b \cdot \left(\frac{\Psi^{n-1}}{\Psi_N^n} \right) \right) \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \Psi} = I_N \cdot \left(a \cdot \frac{1}{\Psi_N} + n \cdot b \cdot \left(\frac{\Psi^{n-1}}{\Psi_N^n} \right) \right) \quad (16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_N \cdot \left(a \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \\ -r \cdot I_N \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right) \\ -r \cdot I_N \cdot \left(\left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial g}{\partial p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} \\ \frac{\partial g}{\partial a} \\ \frac{\partial g}{\partial b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_N \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right) \\ I_N \cdot \left(\left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \end{pmatrix} \quad (17)$$

El sistema a resolver, es el siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma_r \\ \gamma_a \\ \gamma_b \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} - r \cdot I_N \cdot \left(a \cdot \frac{1}{\Psi_N} + n \cdot b \cdot \left(\frac{\Psi^{n-1}}{\Psi_N^n} \right) \right) \cdot \begin{pmatrix} \gamma_r \\ \gamma_a \\ \gamma_b \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I_N \cdot \left(a \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \\ -r \cdot I_N \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right) \\ -r \cdot I_N \cdot \left(\left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_a \\ \sigma_b \\ i \end{pmatrix} = I_N \cdot \left(a \cdot \frac{1}{\Psi_N} + n \cdot b \cdot \left(\frac{\Psi^{n-1}}{\Psi_N^n} \right) \right) \cdot \begin{pmatrix} \gamma_r \\ \gamma_a \\ \gamma_b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I_N \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right) \\ I_N \cdot \left(\left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \\ I_N \cdot \left(a \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \end{pmatrix} \quad (18)$$

La resolución del sistema para $U = 311 \text{ V}$; $R = 0.942 \text{ } \Omega$; $a = 0.48$; $b = 0.52$; $(\Psi_N = 1.927 \text{ Wb}; I_N = 330 \text{ A})$ ha dado los resultados reflejados en las figuras siguientes:

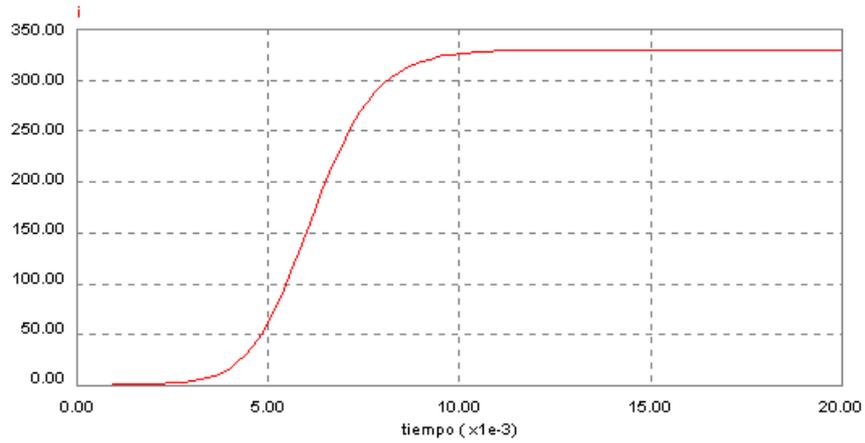


Figura 2. Corriente en la bobina.

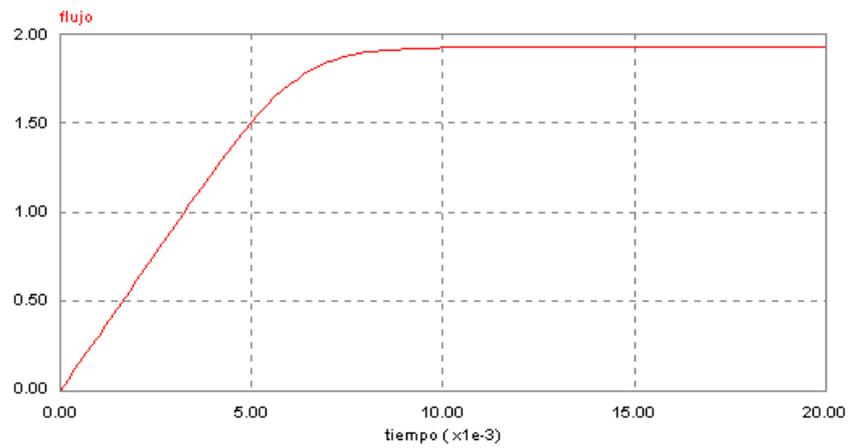


Figura 3. Flujo.

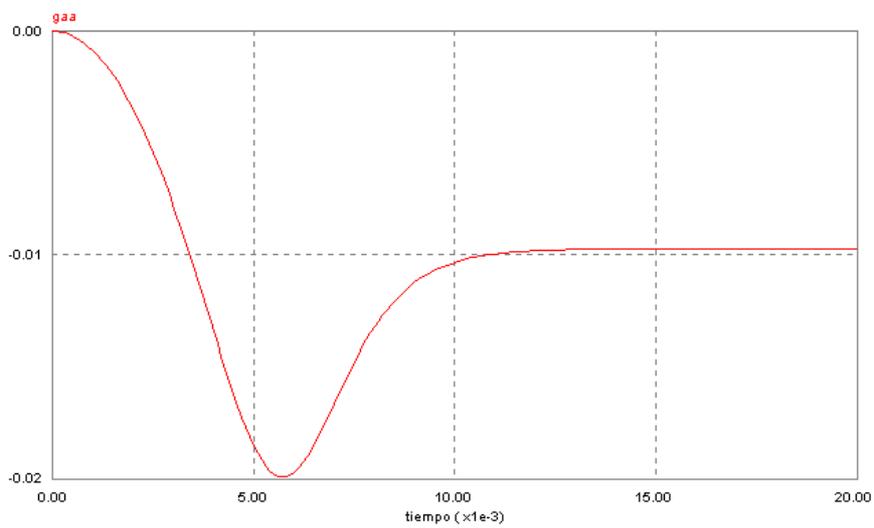


Figura 4. $\gamma_a(t)$.

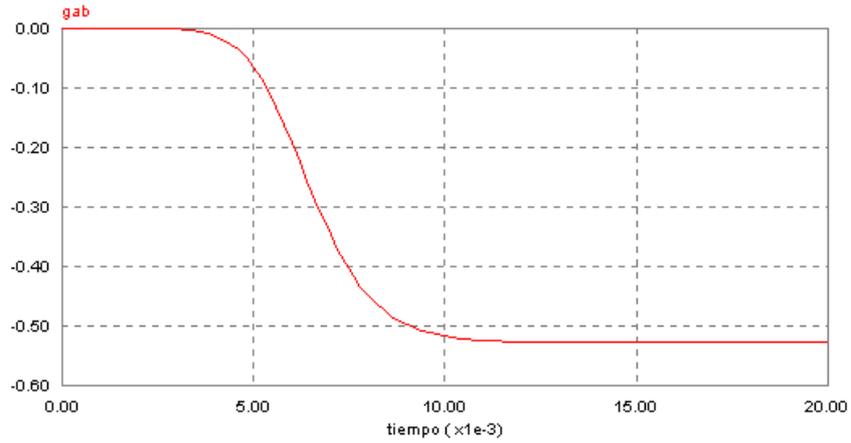


Figura 5. $\gamma_b(t)$.

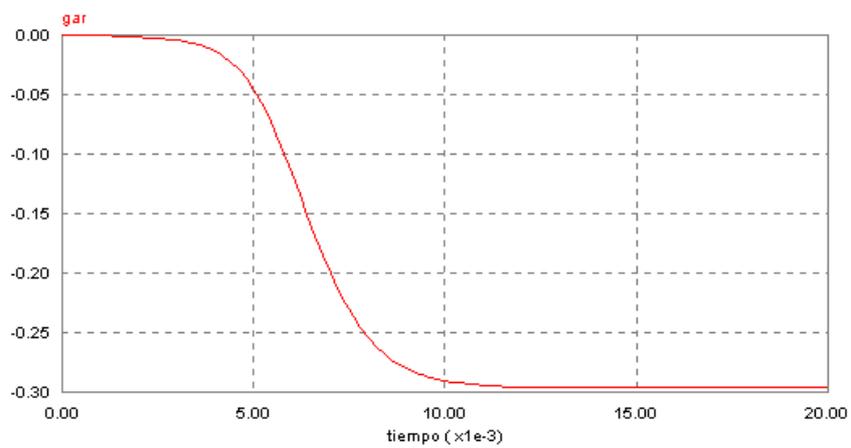


Figura 6. $\gamma_r(t)$.

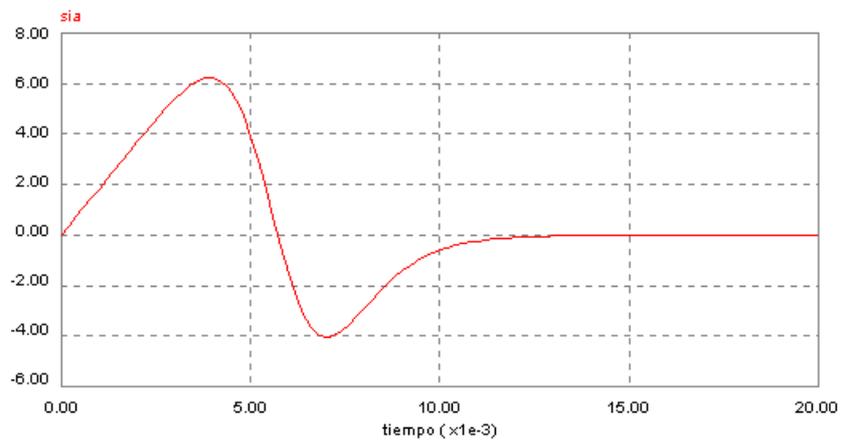


Figura 7. $\sigma_a(t)$.

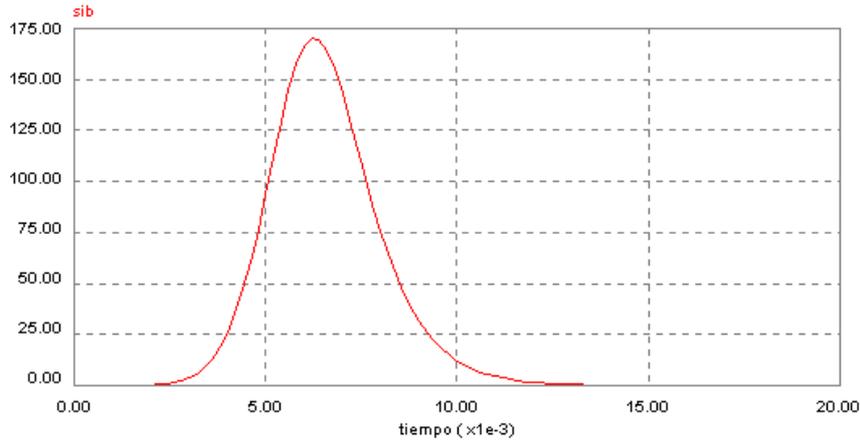


Figura 8. $\sigma_b(t)$.

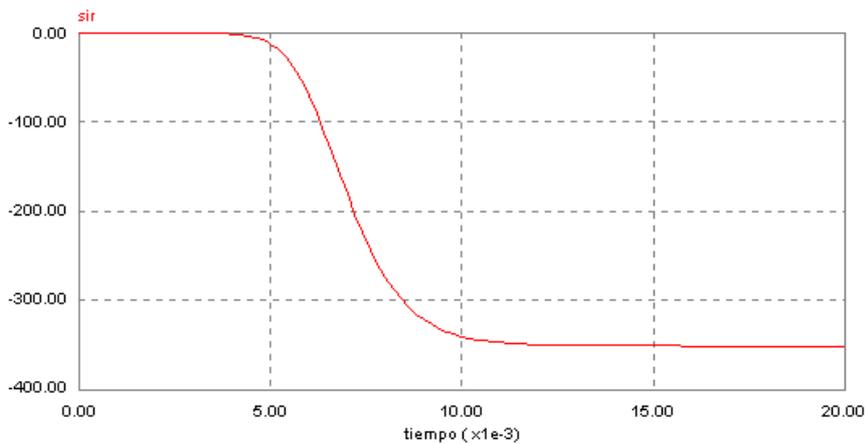


Figura 9. $\sigma_r(t)$.

De ellas se deduce lo siguiente:

- El flujo resulta poco afectado por las variaciones de los parámetros. A continuación se pueden observar los valores máximos de la sensibilidad del mismo:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial a} \right)_{max} = -0.02; \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial b} \right)_{max} = -0.52; \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)_{max} = -0.30 \quad (19)$$

que referido al valor unitario, es decir:

$$S_{\alpha}^x = \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{p_N}{X_N} \quad (20)$$

lleva a los siguientes resultados:

$$S_a^{\Psi} = -4.98E - 3; \quad S_b^{\Psi} = -0.140; \quad S_r^{\Psi} = -0.146 \quad (21)$$

Los parámetros que afectan más al flujo son la resistencia y el factor b del polinomio (lo cual era de esperar, dado que tiene más peso específico).

- La corriente es mucho más sensible a la variación de los parámetros. Tomando como representativos los valores máximos, se llega a:

$$\left. \frac{\partial i}{\partial a} \right)_{max} = 6.2; \quad \left. \frac{\partial i}{\partial b} \right)_{max} = 170; \quad \left. \frac{\partial i}{\partial r} \right)_{max} = -330 \quad (22)$$

referidos al valor unitario:

$$S_a^i = 9.01E - 3; \quad S_b^i = 0.267; \quad S_r^i = -0.942 \quad (23)$$

Si se desean encontrar los valores en régimen permanente después de alguna manipulación, se llega a:

$$\gamma_{RP} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\alpha_0}^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_{\alpha_0} \quad (24)$$

$$\gamma_{RP} = \frac{1}{r \cdot I_N \cdot \left(a \cdot \frac{1}{\Psi_N} + n \cdot b \cdot \frac{\Psi_N^{n-1}}{\Psi_N^n} \right)} \cdot \begin{pmatrix} -I_N \cdot \left(a \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \\ -r \cdot I_N \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right) \\ -r \cdot I_N \cdot \left(\left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\sigma_{RP} = \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} -I_N \cdot \left(a \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \\ -r \cdot I_N \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right) \\ -r \cdot I_N \cdot \left(\left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I_N \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right) \\ I_N \cdot \left(\left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{I_N}{r} \cdot \left(a \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

obsérvese que los valores en régimen permanente coinciden con los calculados a partir de la resolución del conjunto de ecuaciones diferenciales anteriores.

Atendiendo a lo anterior, resulta mucho más atractivo realizar el planteamiento en función de las ecuaciones del flujo en vez que de las de corriente, ya que las modificaciones en los parámetros suponen una menor variación de respuesta.

Aplicación a las ecuaciones de la máquina asíncrona.

Se trata de considerar, para los diversos modelos descritos, las incidencias de las variaciones de los parámetros y, dadas las limitaciones que presentan los modelos y de acuerdo con los objetivos perseguidos, nos limitaremos a los casos tipo $\Gamma(I)$ sin consideración de la saturación cruzada (modelos 21 y 22).

Las variables de interés siempre serán las propias variables de estado, y el par electromagnético será considerado como una salida del sistema. Adicionalmente, en algunos casos, puede ser necesario considerar el flujo como una variable de salida de interés.

Modelo nº 21.

Se puede expresar lo siguiente:

$$x = (i_{sx} \quad i_{sy} \quad i_{rx} \quad i_{ry} \quad \omega_r)^T \quad (27)$$

$$u = (u_{sx} \quad u_{sy} \quad u_{rx} \quad u_{ry} \quad Mc)^T \quad (28)$$

$$p = (R_s \quad R_r \quad L_{rl} \quad J \quad \rho \quad a_1 \quad a_2)^T \quad (29)$$

$$y = (\Psi_{sx} \quad \Psi_{sy} \quad M_e)^T \quad (30)$$

definiendo las siguientes funciones de sensibilidad de las variables de estado:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \begin{pmatrix} \gamma_{i_{sx}}^{r_s} & \gamma_{i_{sx}}^{r_r} & \gamma_{i_{sx}}^{L_{rl}} & \gamma_{i_{sx}}^J & \gamma_{i_{sx}}^\rho & \gamma_{i_{sx}}^{a_1} & \gamma_{i_{sx}}^{a_2} \\ \gamma_{i_{sy}}^{r_s} & \gamma_{i_{sy}}^{r_r} & \gamma_{i_{sy}}^{L_{rl}} & \gamma_{i_{sy}}^J & \gamma_{i_{sy}}^\rho & \gamma_{i_{sy}}^{a_1} & \gamma_{i_{sy}}^{a_2} \\ \gamma_{i_{rx}}^{r_s} & \gamma_{i_{rx}}^{r_r} & \gamma_{i_{rx}}^{L_{rl}} & \gamma_{i_{rx}}^J & \gamma_{i_{rx}}^\rho & \gamma_{i_{rx}}^{a_1} & \gamma_{i_{rx}}^{a_2} \\ \gamma_{i_{ry}}^{r_s} & \gamma_{i_{ry}}^{r_r} & \gamma_{i_{ry}}^{L_{rl}} & \gamma_{i_{ry}}^J & \gamma_{i_{ry}}^\rho & \gamma_{i_{ry}}^{a_1} & \gamma_{i_{ry}}^{a_2} \\ \gamma_{\omega_r}^{r_s} & \gamma_{\omega_r}^{r_r} & \gamma_{\omega_r}^{L_{rl}} & \gamma_{\omega_r}^J & \gamma_{\omega_r}^\rho & \gamma_{\omega_r}^{a_1} & \gamma_{\omega_r}^{a_2} \end{pmatrix} \quad (31)$$

y la sensibilidad de las variables de salida:

$$\frac{\partial y}{\partial p} = \begin{pmatrix} \sigma_{\Psi_{sx}}^{r_s} & \sigma_{\Psi_{sx}}^{r_r} & \sigma_{\Psi_{sx}}^{L_{rl}} & \sigma_{\Psi_{sx}}^J & \sigma_{\Psi_{sx}}^\rho & \sigma_{\Psi_{sx}}^{a_1} & \sigma_{\Psi_{sx}}^{a_2} \\ \sigma_{\Psi_{sy}}^{r_s} & \sigma_{\Psi_{sy}}^{r_r} & \sigma_{\Psi_{sy}}^{L_{rl}} & \sigma_{\Psi_{sy}}^J & \sigma_{\Psi_{sy}}^\rho & \sigma_{\Psi_{sy}}^{a_1} & \sigma_{\Psi_{sy}}^{a_2} \\ \sigma_{M_e}^{r_s} & \sigma_{M_e}^{r_r} & \sigma_{M_e}^{L_{rl}} & \sigma_{M_e}^J & \sigma_{M_e}^\rho & \sigma_{M_e}^{a_1} & \sigma_{M_e}^{a_2} \end{pmatrix} \quad (32)$$

Los gráficos que siguen, detallan los resultados para la máquina nº 2 (en el Anexo III se recogen las características de las máquinas utilizadas en la tesis).

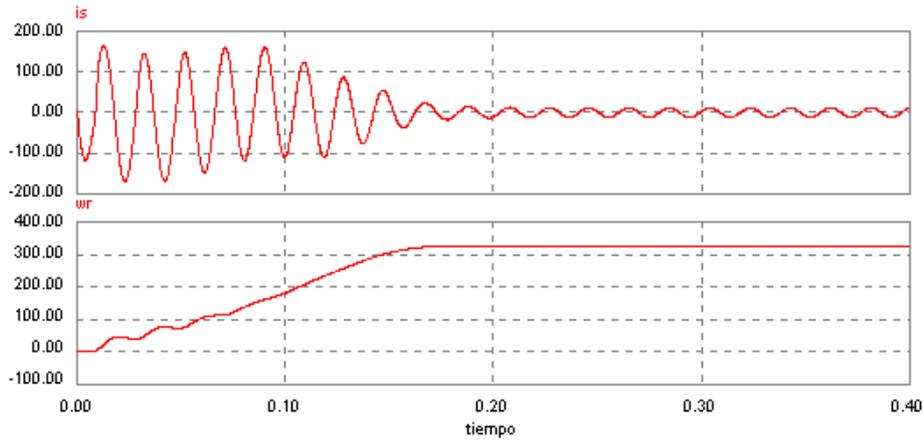


Figura 10. $i_s(t)$; $\omega_r(t)$

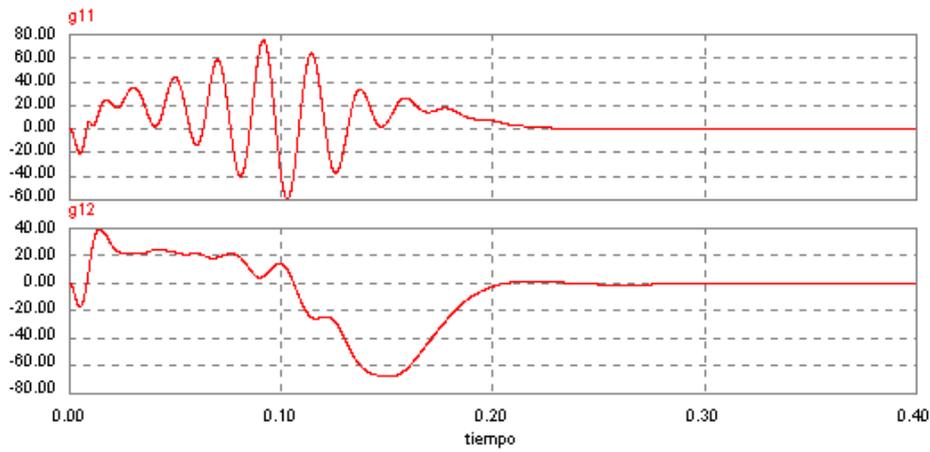


Figura 11. $\gamma_{i_{sx}}^{r_s}(t)$; $\gamma_{i_{sx}}^{r_r}(t)$

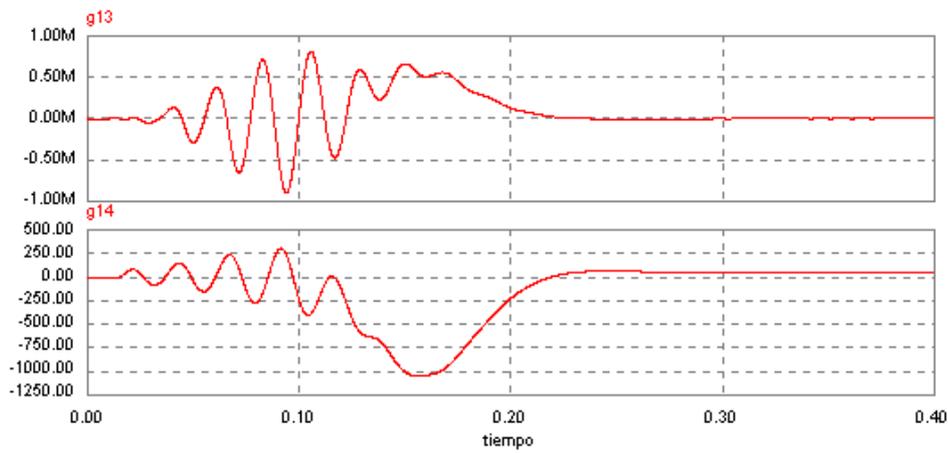


Figura 12. $\gamma_{i_{sx}}^{L_{rl}}(t)$; $\gamma_{i_{sx}}^J(t)$

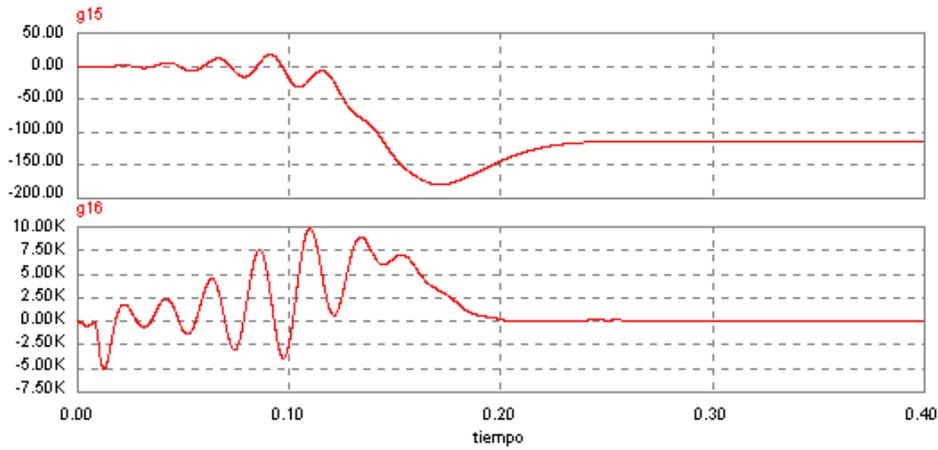


Figura 13. $\gamma_{i_{xx}}^p(t)$; $\gamma_{i_{xx}}^{a_1}(t)$

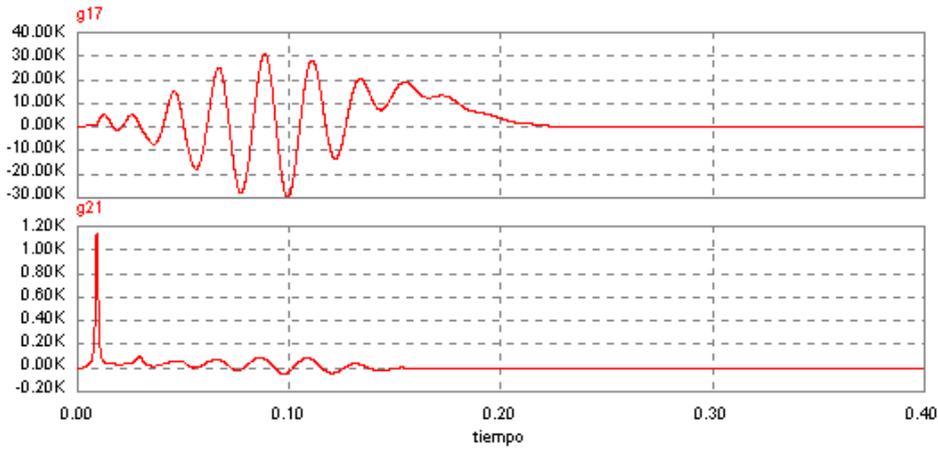


Figura 14. $\gamma_{i_{xx}}^{a_2}(t)$; $\gamma_{i_{sy}}^{r_s}(t)$

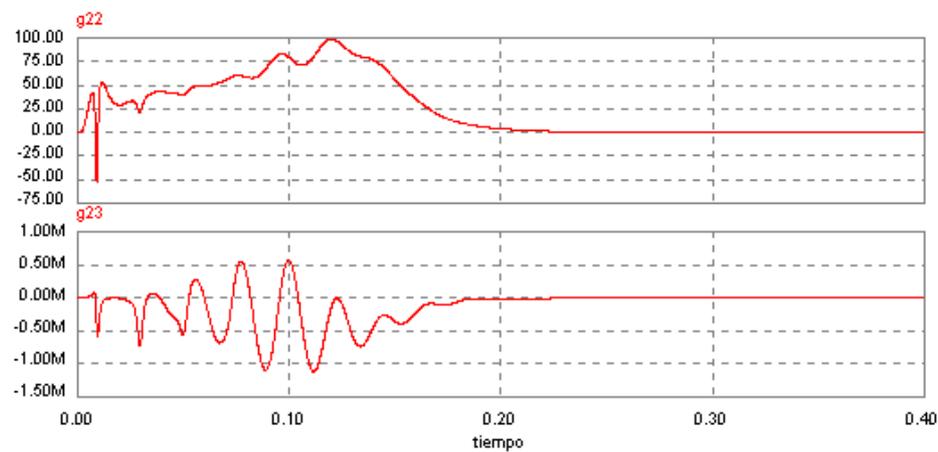


Figura 15. $\gamma_{i_{sy}}^{r_r}(t)$; $\gamma_{i_{sy}}^{L_{rl}}(t)$

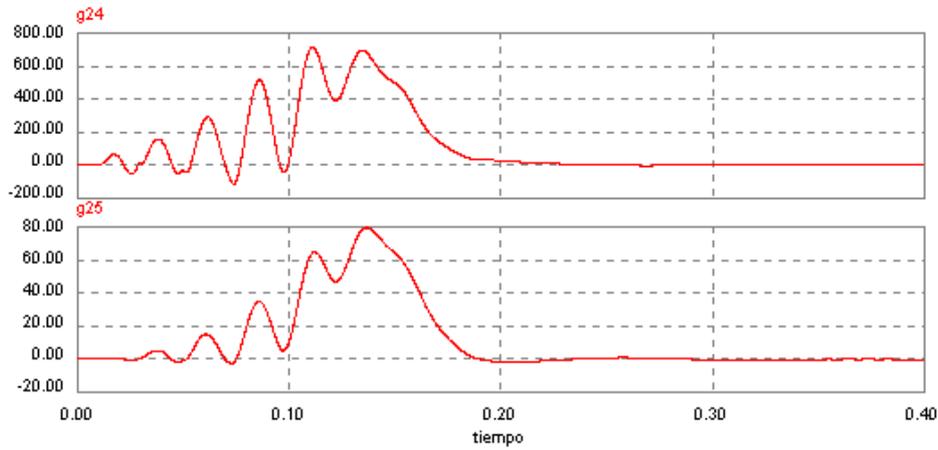


Figura 16. $\gamma_{i_{sy}}^J(t)$; $\gamma_{i_{sy}}^p(t)$

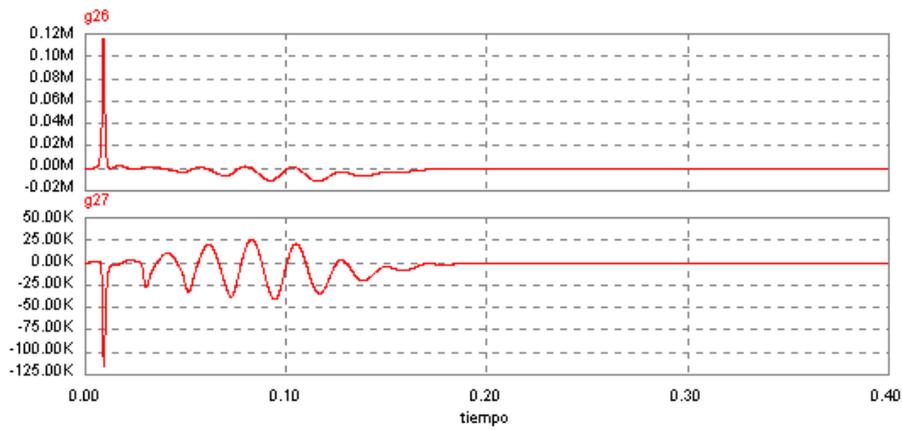


Figura 17. $\gamma_{i_{sy}}^{a_1}(t)$; $\gamma_{i_{sy}}^{a_2}(t)$

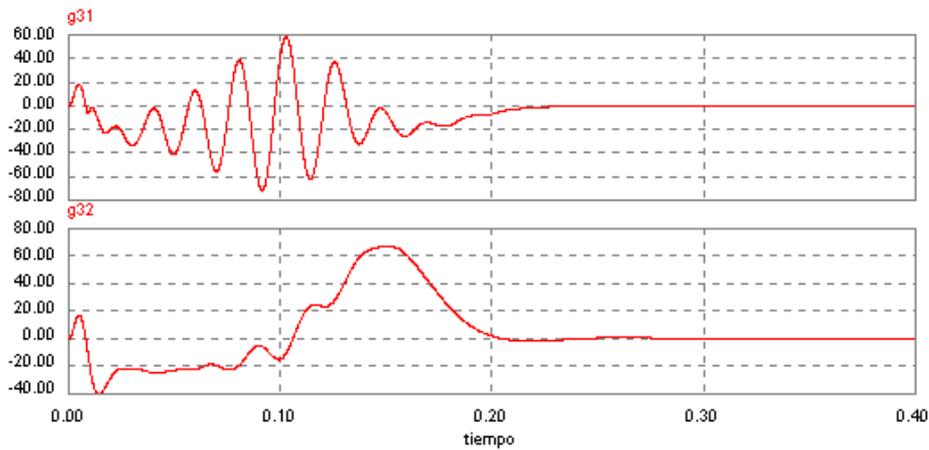


Figura 18. $\gamma_{i_{rx}}^{r_s}(t)$; $\gamma_{i_{rx}}^{r_r}(t)$

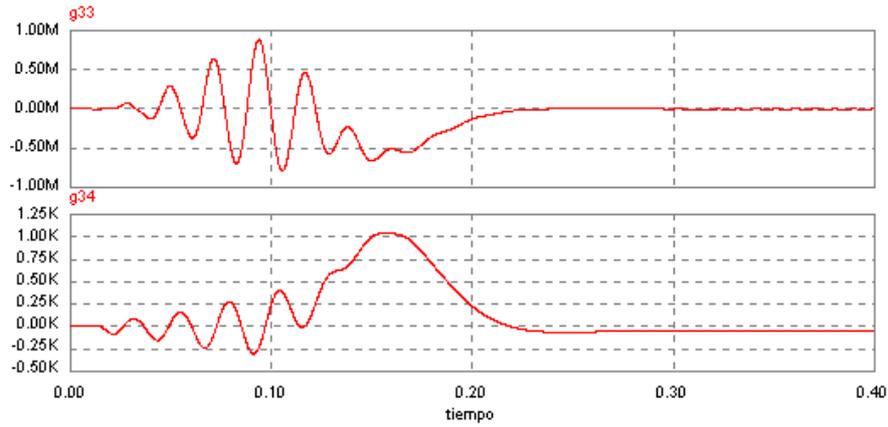


Figura 19. $\gamma_{i_{rx}}^{L_{rl}}(t)$; $\gamma_{i_{rx}}^J(t)$

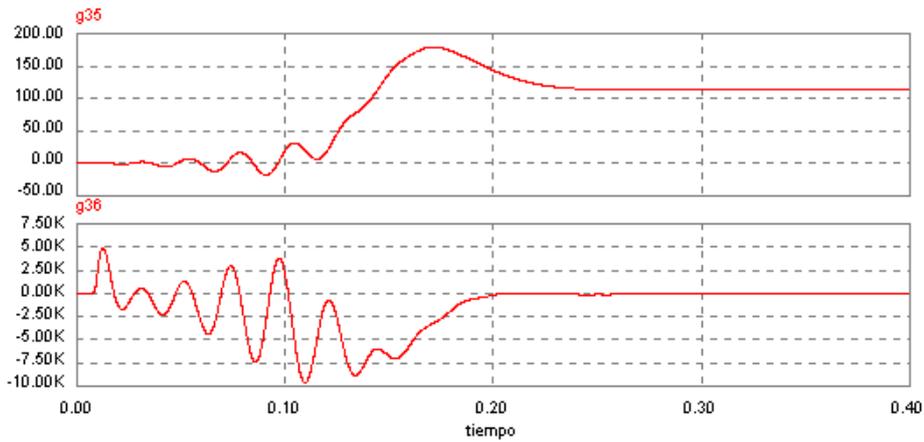


Figura 20. $\gamma_{i_{rx}}^{\rho}(t)$; $\gamma_{i_{rx}}^{a_1}(t)$

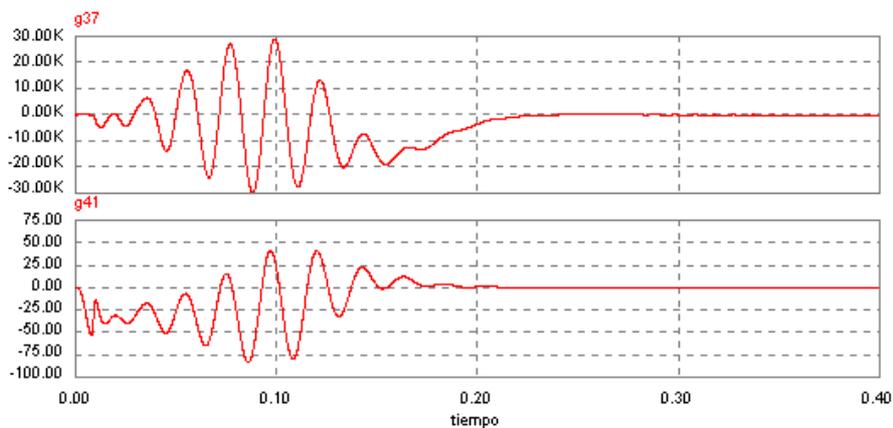


Figura 21. $\gamma_{i_{rx}}^{a_2}(t)$; $\gamma_{i_{ry}}^r(t)$

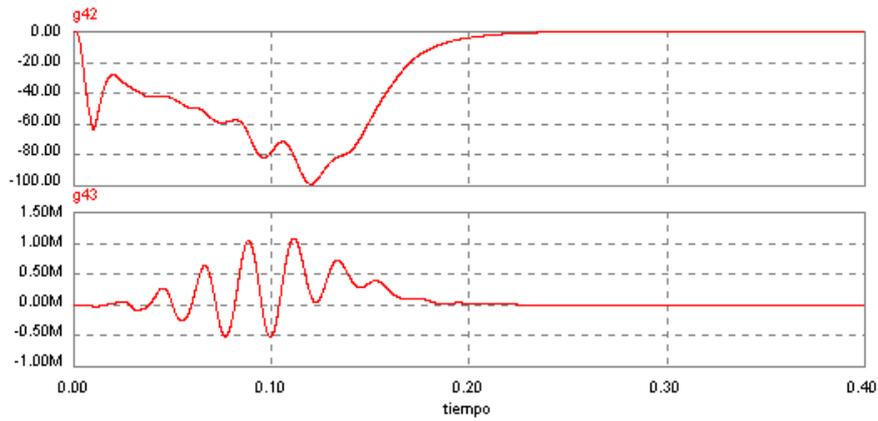


Figura 22. $\gamma_{i_{ry}}^r(t)$; $\gamma_{i_{ry}}^{L_{rl}}(t)$

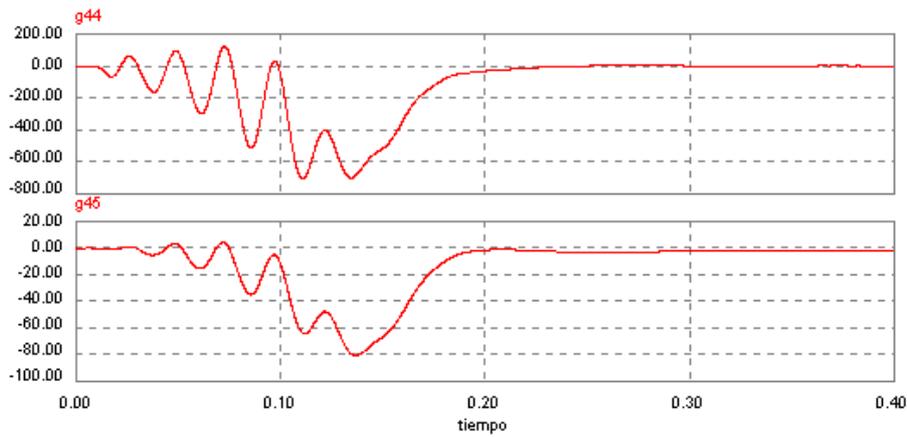


Figura 23. $\gamma_{i_{ry}}^J(t)$; $\gamma_{i_{ry}}^P(t)$

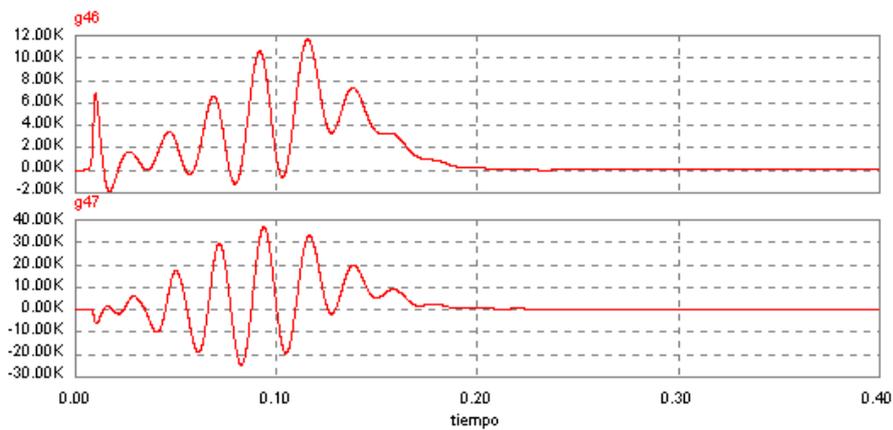


Figura 24. $\gamma_{i_{ry}}^{a_1}(t)$; $\gamma_{i_{ry}}^{a_2}(t)$

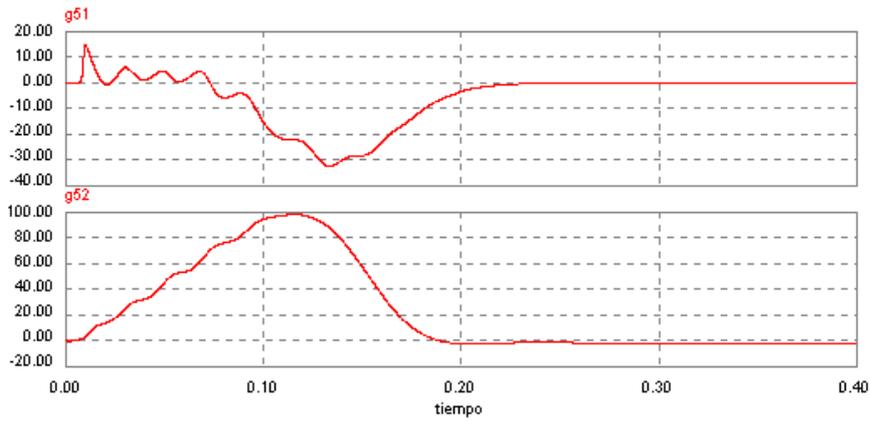


Figura 25. $\gamma_{\omega_r}^{r_s}(t)$; $\gamma_{\omega_r}^{r_r}(t)$

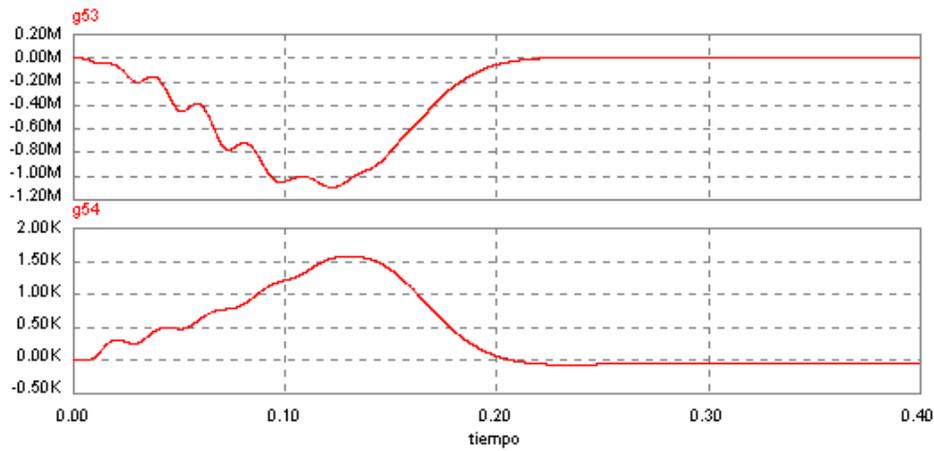


Figura 26. $\gamma_{\omega_r}^{L_{rl}}(t)$; $\gamma_{\omega_r}^J(t)$

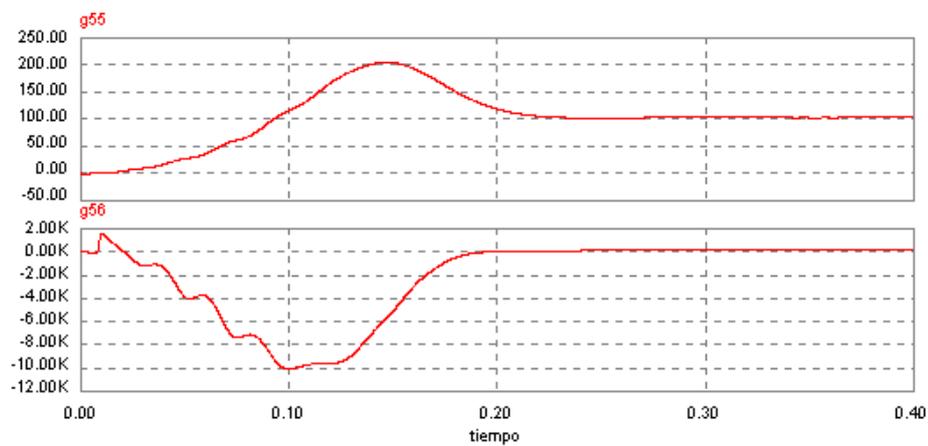


Figura 27. $\gamma_{\omega_r}^p(t)$; $\gamma_{\omega_r}^{a_1}(t)$

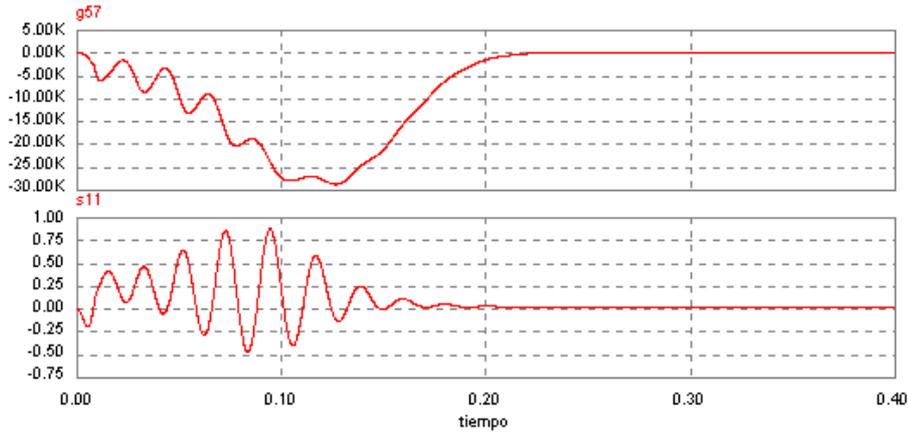


Figura 28. $\gamma_{\omega_r}^{a_2}(t)$; $\sigma_{\Psi_{sx}}^{r_s}(t)$

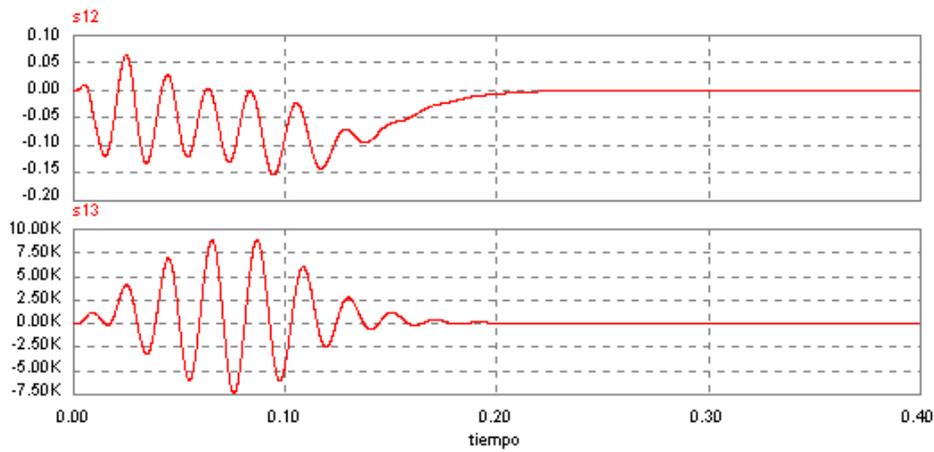


Figura 29. $\sigma_{\Psi_{sx}}^{r_r}(t)$; $\sigma_{\Psi_{sx}}^{L_{rl}}(t)$

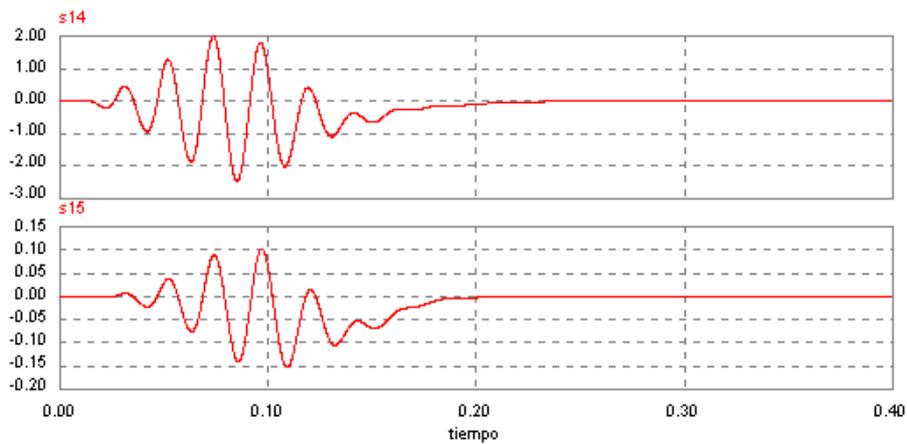


Figura 30. $\sigma_{\Psi_{sx}}^J(t)$; $\sigma_{\Psi_{sx}}^\rho(t)$

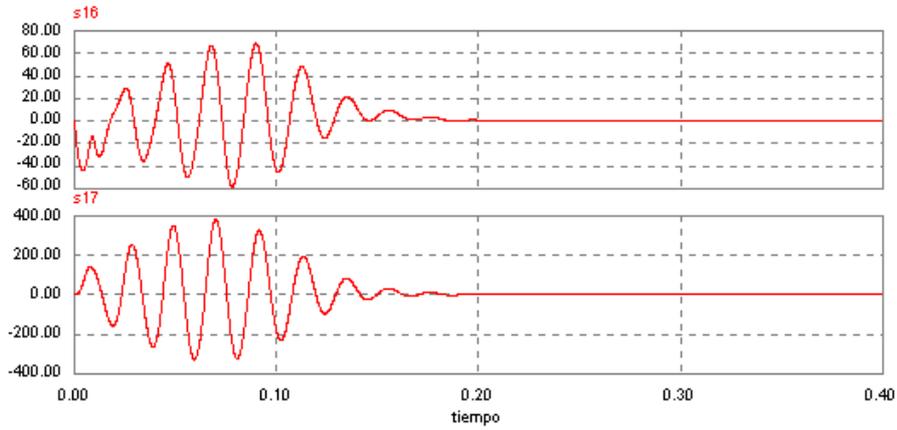


Figura 31. $\sigma_{\Psi_{xx}}^{a_1}(t)$; $\sigma_{\Psi_{xx}}^{a_2}(t)$

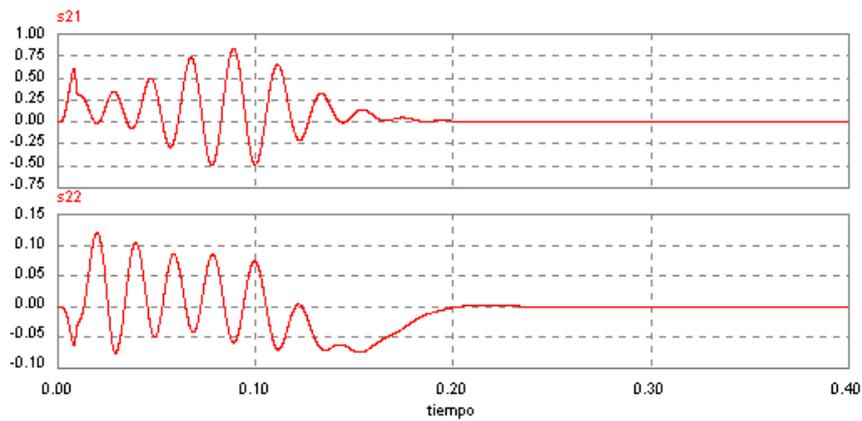


Figura 32. $\sigma_{\Psi_{yy}}^{r_s}(t)$; $\sigma_{\Psi_{yy}}^{r_r}(t)$

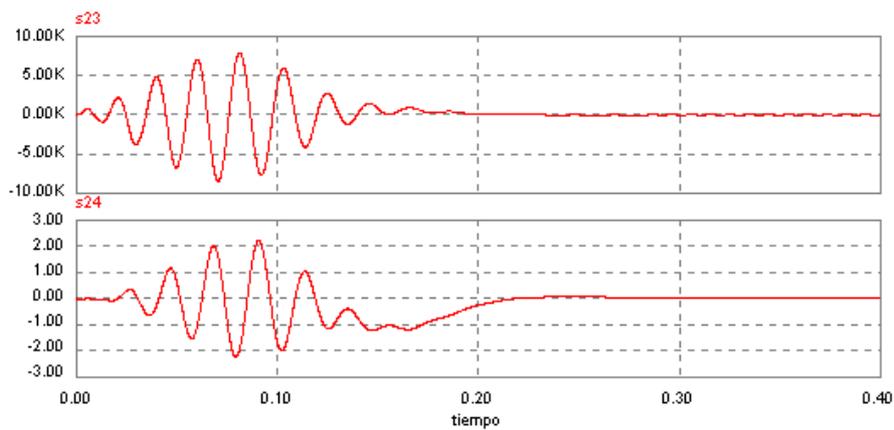


Figura 33. $\sigma_{\Psi_{yy}}^{L_{r'l}}(t)$; $\sigma_{\Psi_{yy}}^J(t)$

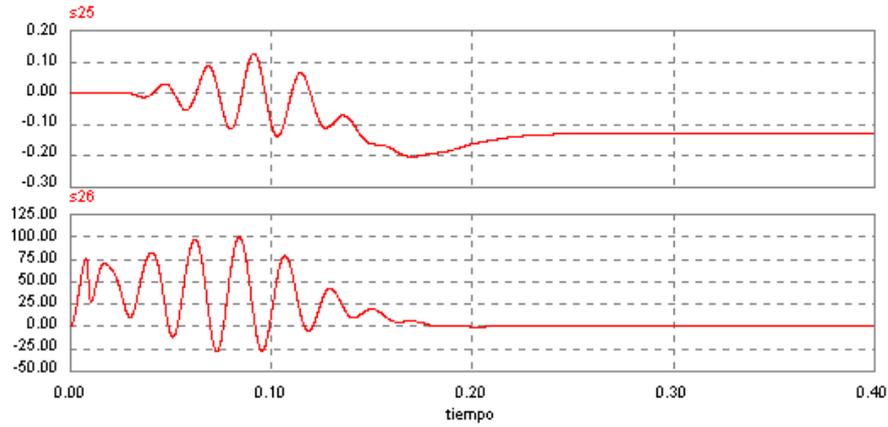


Figura 34. $\sigma_{\Psi_{sy}}^{\rho}(t)$; $\sigma_{\Psi_{sy}}^{a_1}(t)$

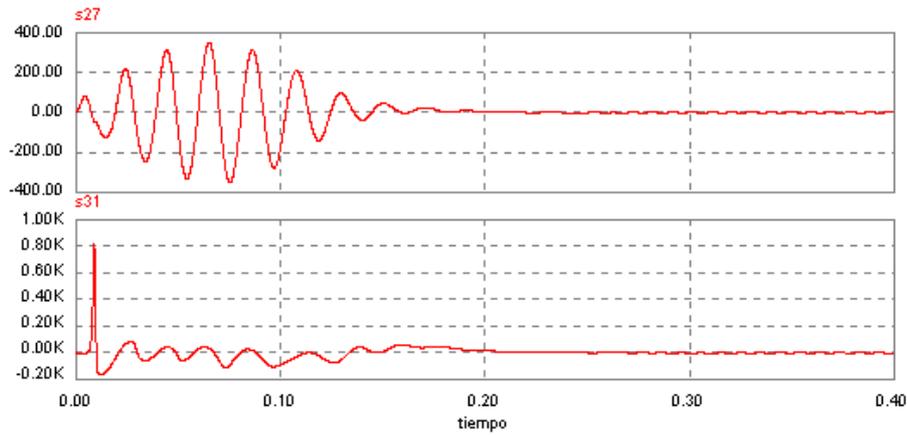


Figura 35. $\sigma_{\Psi_{sy}}^{a_2}(t)$; $\sigma_{M_e}^{r_s}(t)$

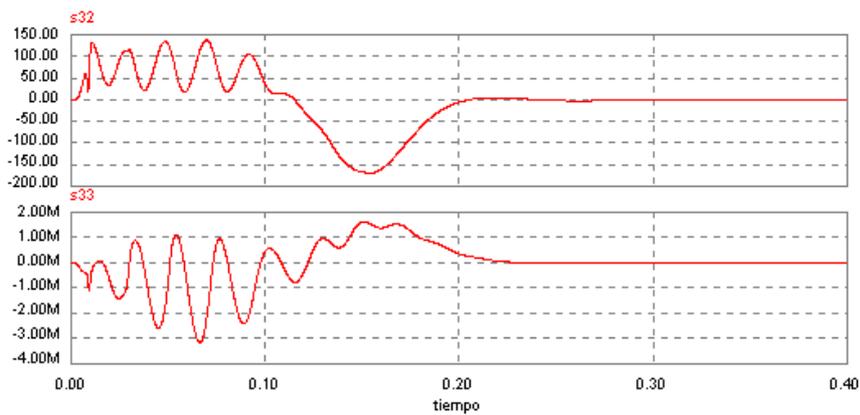


Figura 36. $\sigma_{M_e}^{r_r}(t)$; $\sigma_{M_e}^{L_{rl}}(t)$

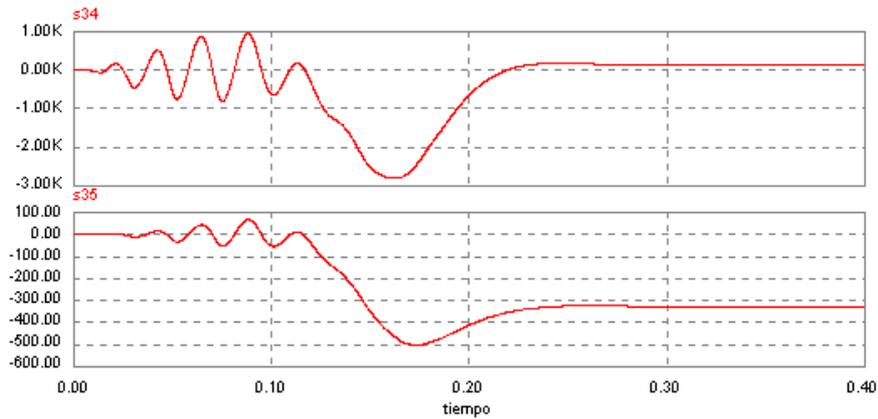


Figura 37. $\sigma_{M_e}^J(t)$; $\sigma_{M_e}^\rho(t)$

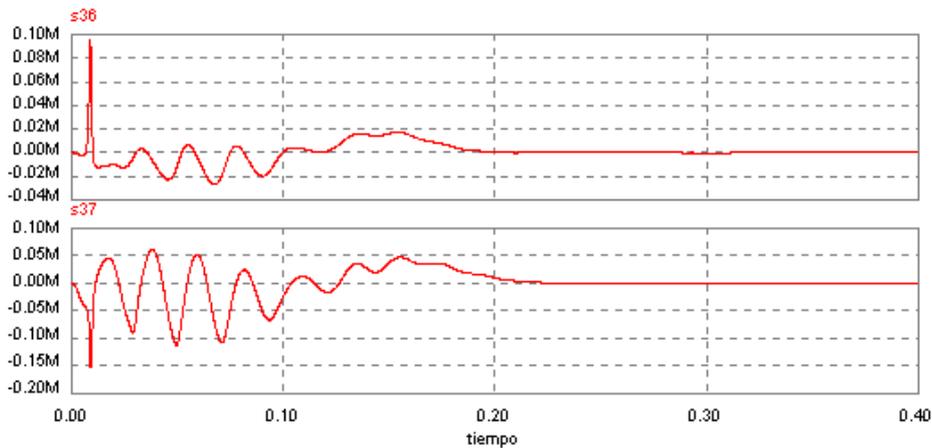


Figura 38. $\sigma_{M_e}^{a_1}(t)$; $\sigma_{M_e}^{a_2}(t)$

Modelo nº 22.

En este caso:

$$x = (\Psi_{sx} \quad \Psi_{sy} \quad \Psi_{rx} \quad \Psi_{ry} \quad \omega_r)^T \tag{33}$$

$$u = (u_{sx} \quad u_{sy} \quad u_{rx} \quad u_{ry} \quad Mc)^T \tag{34}$$

$$p = (R_s \quad R_r \quad L_{rl} \quad J \quad \rho \quad a \quad b)^T \tag{35}$$

$$y = (i_{sx} \quad i_{sy} \quad M_e)^T \tag{36}$$

definiendo las siguientes funciones de sensibilidad de las variables de estado:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \begin{pmatrix} \gamma_{\Psi_{sx}}^{r_s} & \gamma_{\Psi_{sx}}^{r_r} & \gamma_{\Psi_{sx}}^{L_{rl}} & \gamma_{\Psi_{sx}}^J & \gamma_{\Psi_{sx}}^\rho & \gamma_{\Psi_{sx}}^a & \gamma_{\Psi_{sx}}^b \\ \gamma_{\Psi_{sy}}^{r_s} & \gamma_{\Psi_{sy}}^{r_r} & \gamma_{\Psi_{sy}}^{L_{rl}} & \gamma_{\Psi_{sy}}^J & \gamma_{\Psi_{sy}}^\rho & \gamma_{\Psi_{sy}}^a & \gamma_{\Psi_{sy}}^b \\ \gamma_{\Psi_{rx}}^{r_s} & \gamma_{\Psi_{rx}}^{r_r} & \gamma_{\Psi_{rx}}^{L_{rl}} & \gamma_{\Psi_{rx}}^J & \gamma_{\Psi_{rx}}^\rho & \gamma_{\Psi_{rx}}^a & \gamma_{\Psi_{rx}}^b \\ \gamma_{\Psi_{ry}}^{r_s} & \gamma_{\Psi_{ry}}^{r_r} & \gamma_{\Psi_{ry}}^{L_{rl}} & \gamma_{\Psi_{ry}}^J & \gamma_{\Psi_{ry}}^\rho & \gamma_{\Psi_{ry}}^a & \gamma_{\Psi_{ry}}^b \\ \gamma_{\omega_r}^{r_s} & \gamma_{\omega_r}^{r_r} & \gamma_{\omega_r}^{L_{rl}} & \gamma_{\omega_r}^J & \gamma_{\omega_r}^\rho & \gamma_{\omega_r}^a & \gamma_{\omega_r}^b \end{pmatrix} \quad (37)$$

y la sensibilidad de las variables de salida:

$$\frac{\partial y}{\partial p} = \begin{pmatrix} \sigma_{i_{sx}}^{r_s} & \sigma_{i_{sx}}^{r_r} & \sigma_{i_{sx}}^{L_{rl}} & \sigma_{i_{sx}}^J & \sigma_{i_{sx}}^\rho & \sigma_{i_{sx}}^a & \sigma_{i_{sx}}^b \\ \sigma_{i_{sy}}^{r_s} & \sigma_{i_{sy}}^{r_r} & \sigma_{i_{sy}}^{L_{rl}} & \sigma_{i_{sy}}^J & \sigma_{i_{sy}}^\rho & \sigma_{i_{sy}}^a & \sigma_{i_{sy}}^b \\ \sigma_{M_e}^{r_s} & \sigma_{M_e}^{r_r} & \sigma_{M_e}^{L_{rl}} & \sigma_{M_e}^J & \sigma_{M_e}^\rho & \sigma_{M_e}^a & \sigma_{M_e}^b \end{pmatrix} \quad (38)$$

Los gráficos que siguen, detallan los resultados obtenidos para la máquina nº 2.

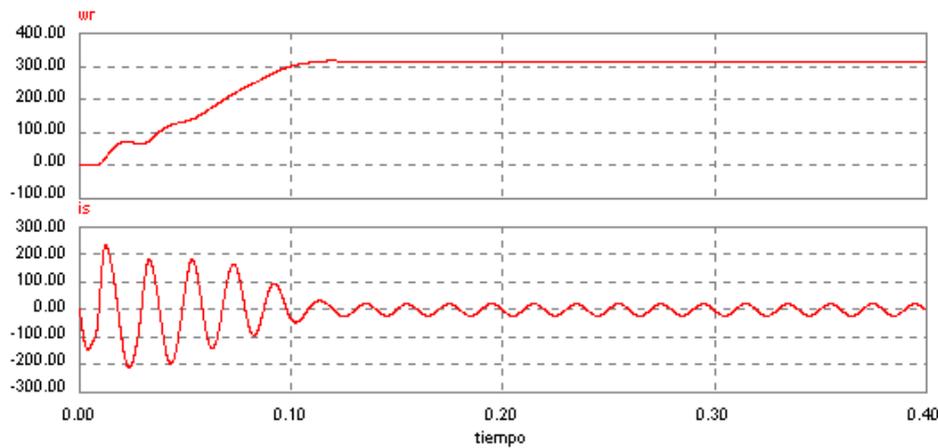


Figura 39. $\omega_r(t)$; $i_s(t)$

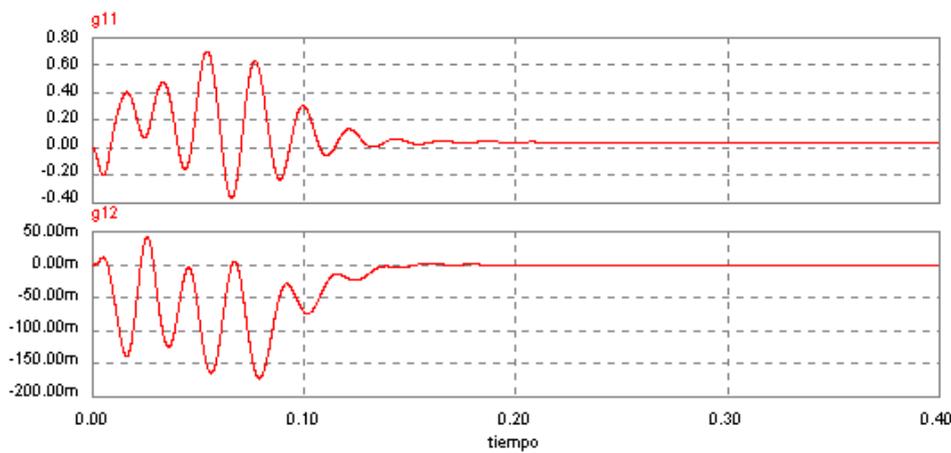


Figura 40. $\gamma_{\Psi_{sx}}^{r_s}(t)$; $\gamma_{\Psi_{sx}}^{r_r}(t)$

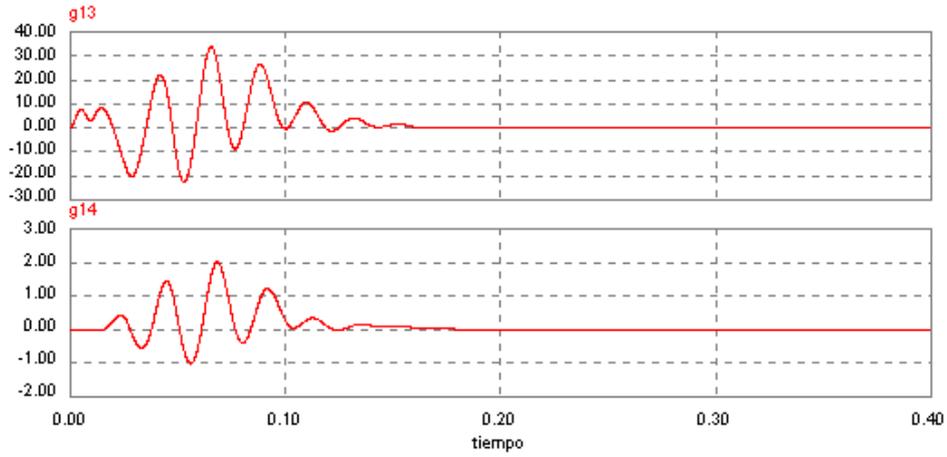


Figura 41. $\gamma_{\Psi_{sx}}^{L_{rl}}(t)$; $\gamma_{\Psi_{sx}}^J(t)$

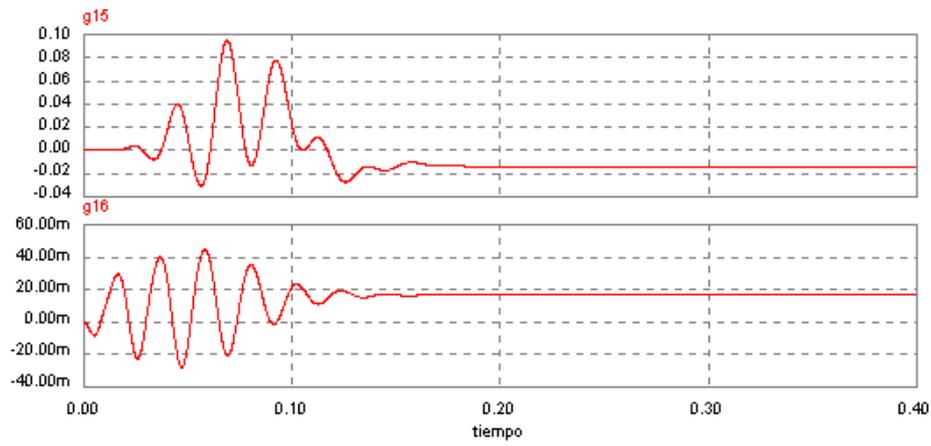


Figura 42. $\gamma_{\Psi_{sx}}^p(t)$; $\gamma_{\Psi_{sx}}^a(t)$

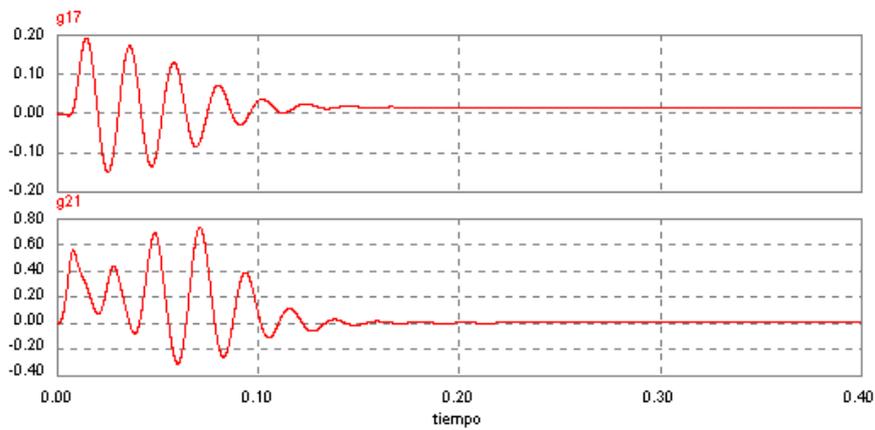


Figura 43. $\gamma_{\Psi_{sx}}^b(t)$; $\gamma_{\Psi_{sy}}^{r_s}(t)$

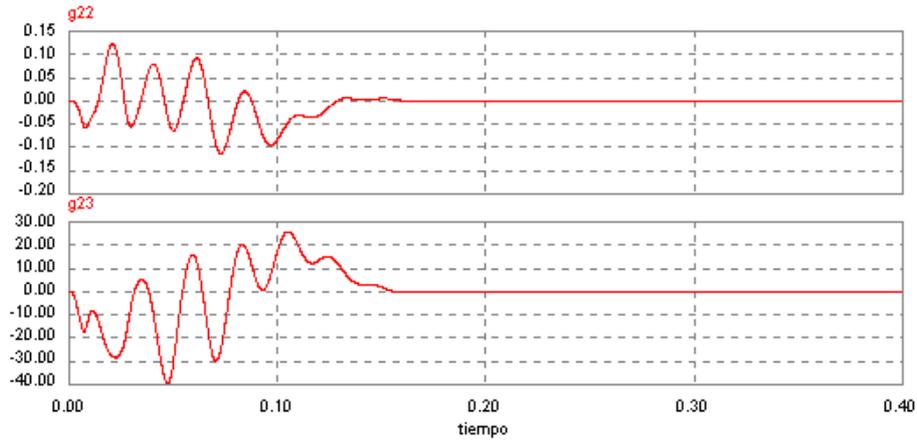


Figura 44. $\gamma_{\Psi_{sy}}^r(t)$; $\gamma_{\Psi_{sy}}^{Lrl}(t)$

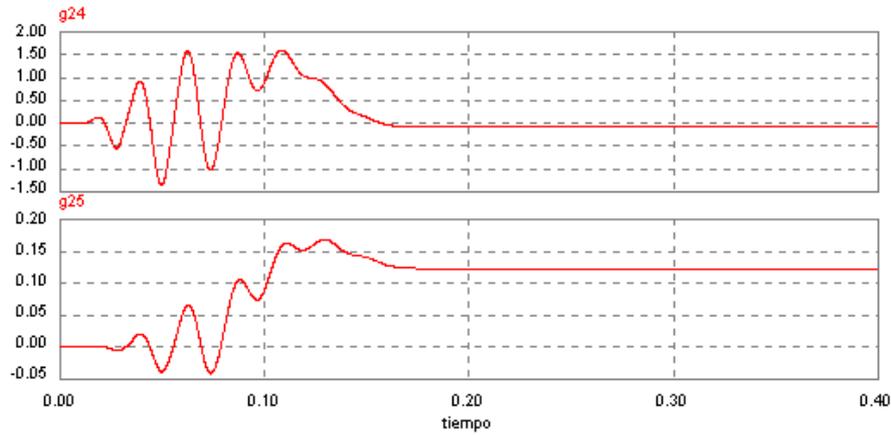


Figura 45. $\gamma_{\Psi_{sy}}^J(t)$; $\gamma_{\Psi_{sy}}^p(t)$

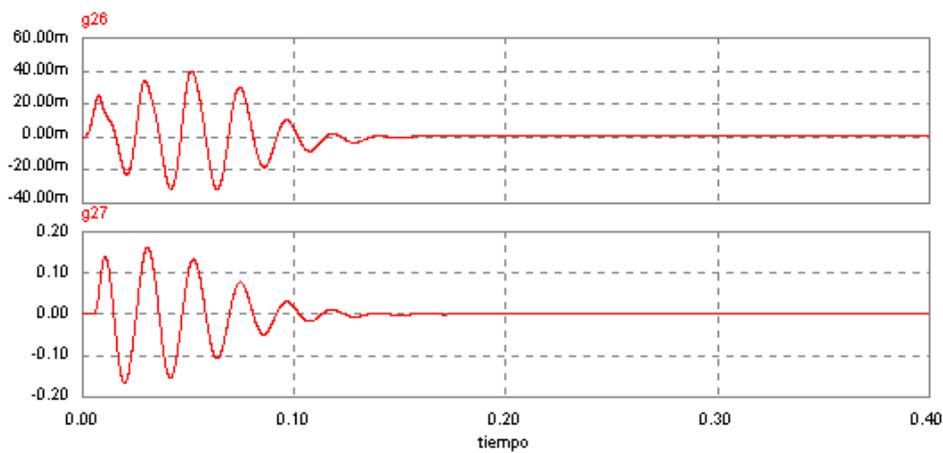


Figura 46. $\gamma_{\Psi_{sy}}^a(t)$; $\gamma_{\Psi_{sy}}^b(t)$

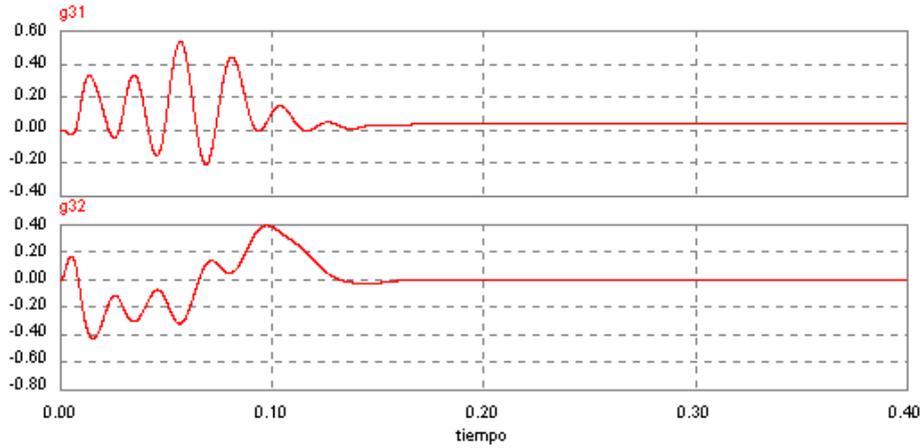


Figura 47. $\gamma_{\Psi_{rx}}^r(t)$; $\gamma_{\Psi_{rx}}^r(t)$

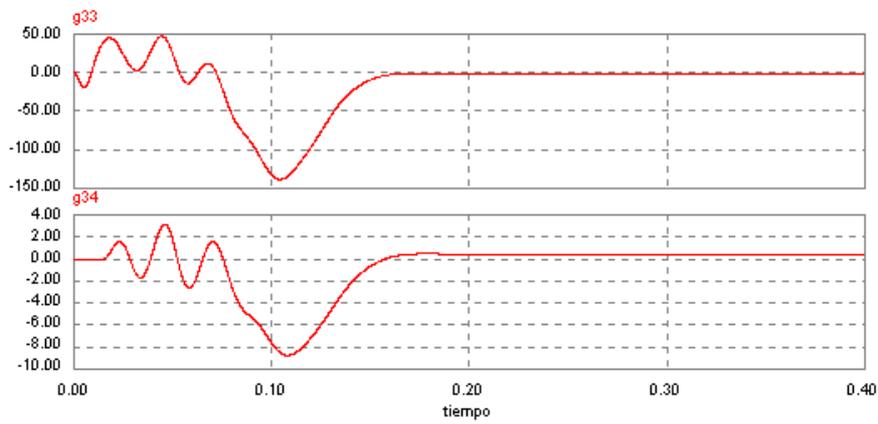


Figura 48. $\gamma_{\Psi_{rx}}^{Lr}(t)$; $\gamma_{\Psi_{rx}}^J(t)$

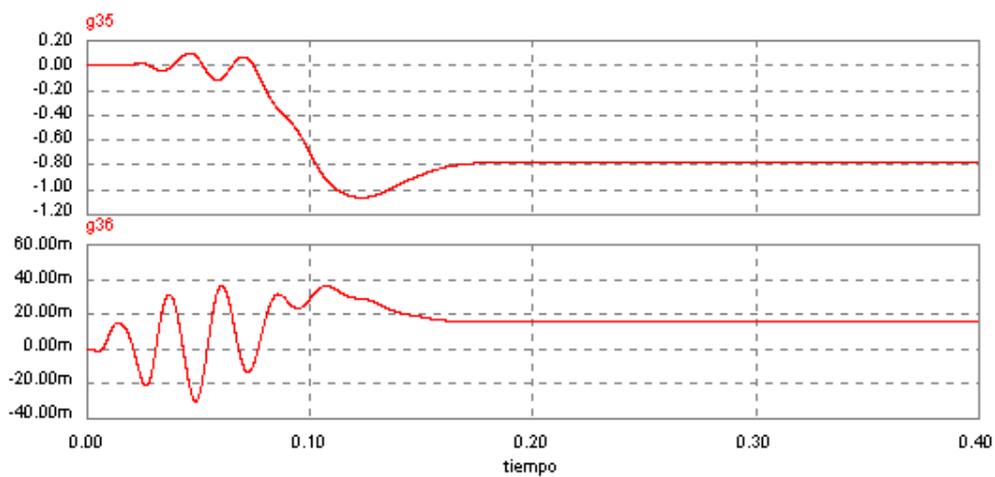


Figura 49. $\gamma_{\Psi_{rx}}^D(t)$; $\gamma_{\Psi_{rx}}^a(t)$

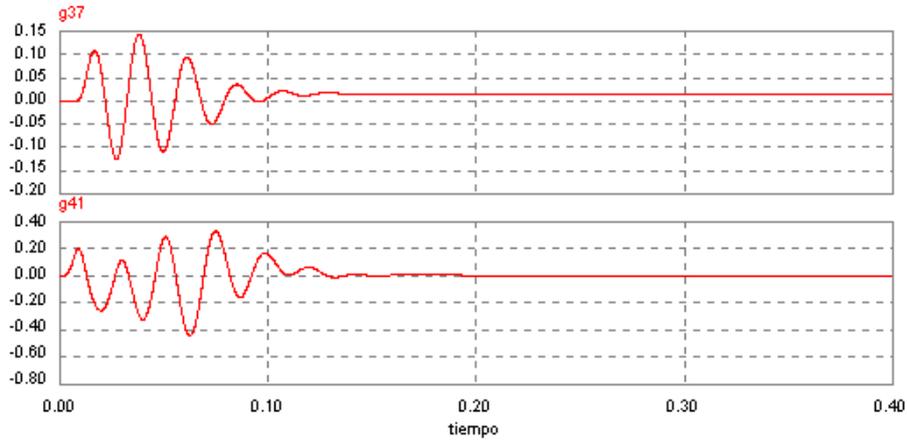


Figura 50. $\gamma_{\Psi_{rx}}^b(t)$; $\gamma_{\Psi_{ry}}^{r_s}(t)$

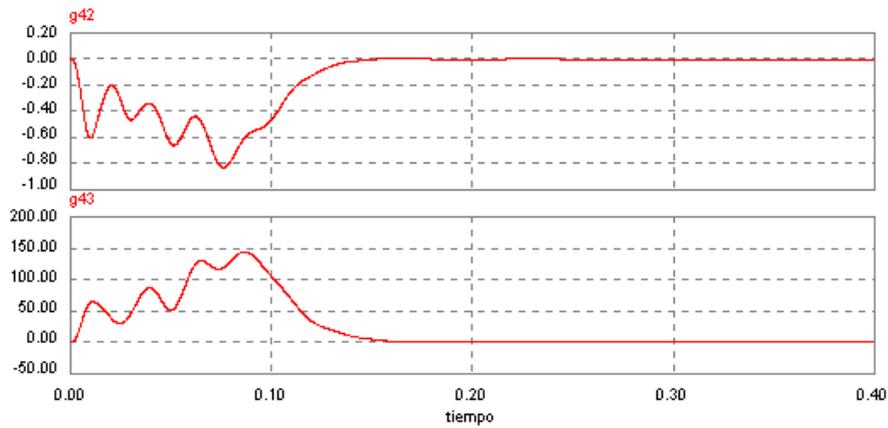


Figura 51. $\gamma_{\Psi_{ry}}^{r_r}(t)$; $\gamma_{\Psi_{ry}}^{L_{rl}}(t)$

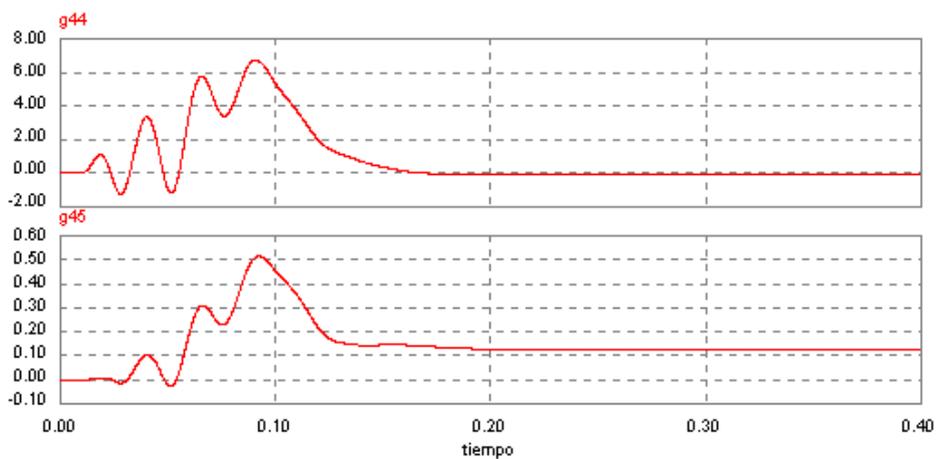


Figura 52. $\gamma_{\Psi_{ry}}^J(t)$; $\gamma_{\Psi_{ry}}^p(t)$

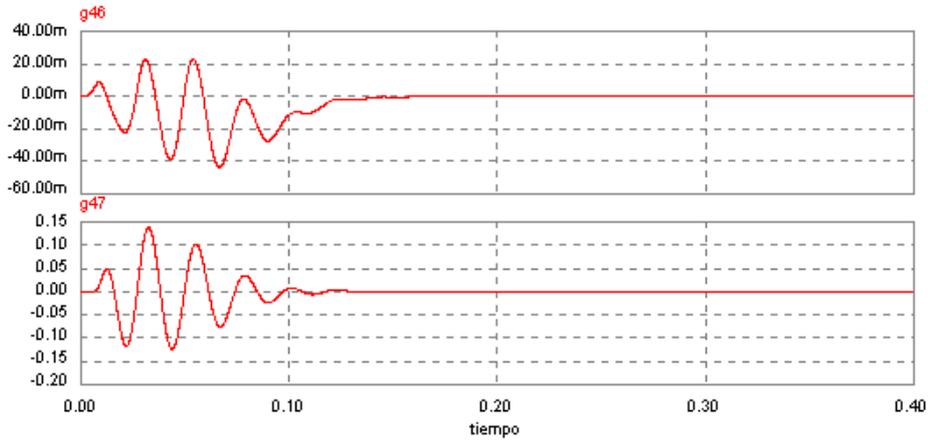


Figura 53. $\gamma_{\Psi_{ry}}^a(t)$; $\gamma_{\Psi_{ry}}^b(t)$

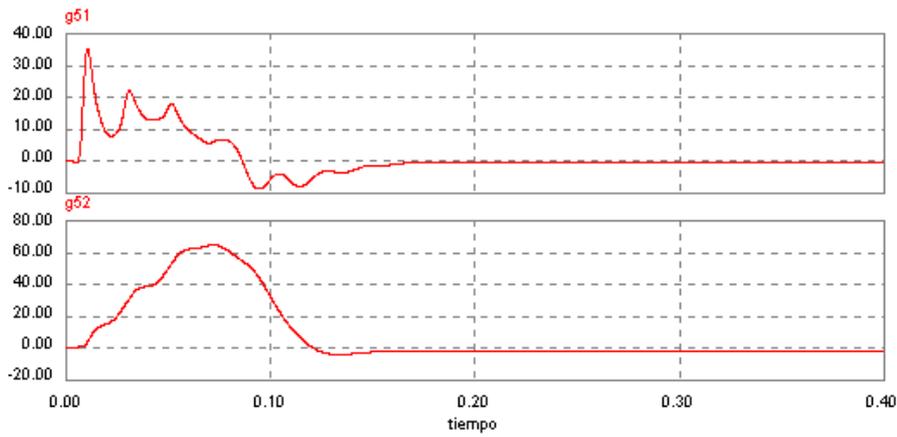


Figura 54. $\gamma_{\omega_r}^{r_s}(t)$; $\gamma_{\omega_r}^{r_r}(t)$

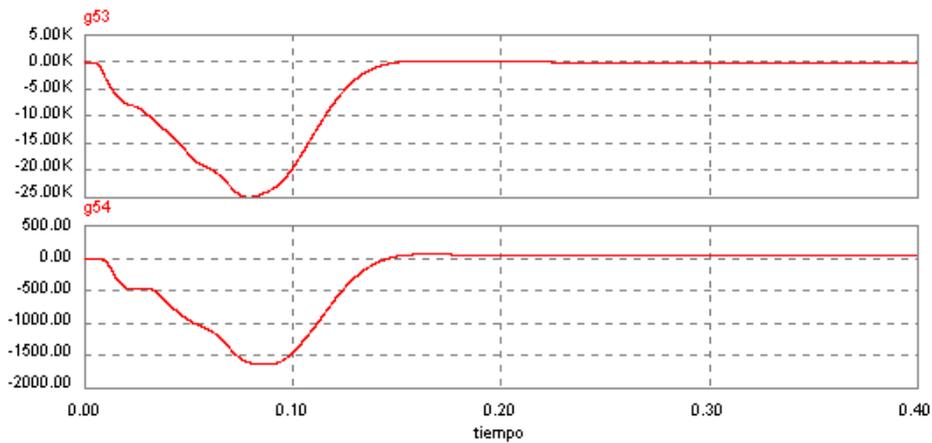


Figura 55. $\gamma_{\omega_r}^{L_{rl}}(t)$; $\gamma_{\omega_r}^J(t)$

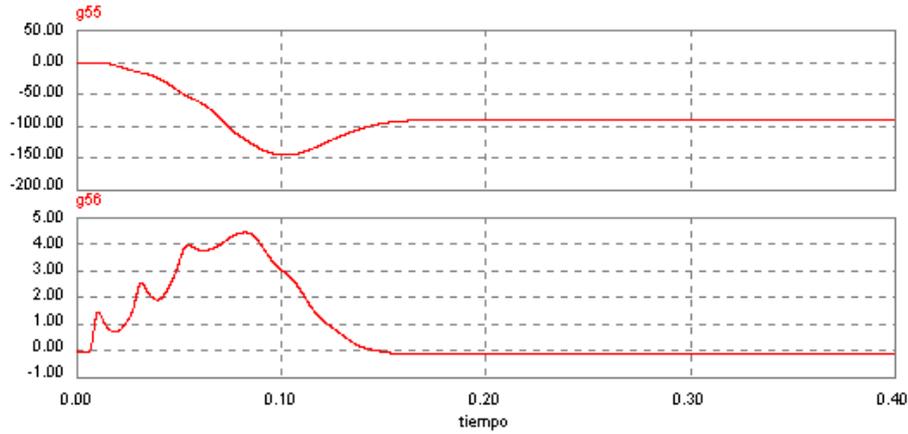


Figura 56. $\gamma_{\omega_r}^p(t)$; $\gamma_{\omega_r}^a(t)$

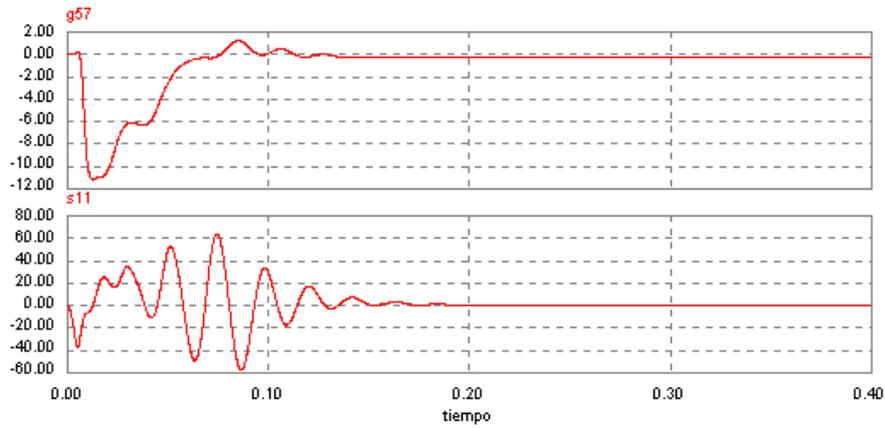


Figura 57. $\gamma_{\omega_r}^b(t)$; $\sigma_{i_{sx}}^{r_s}(t)$

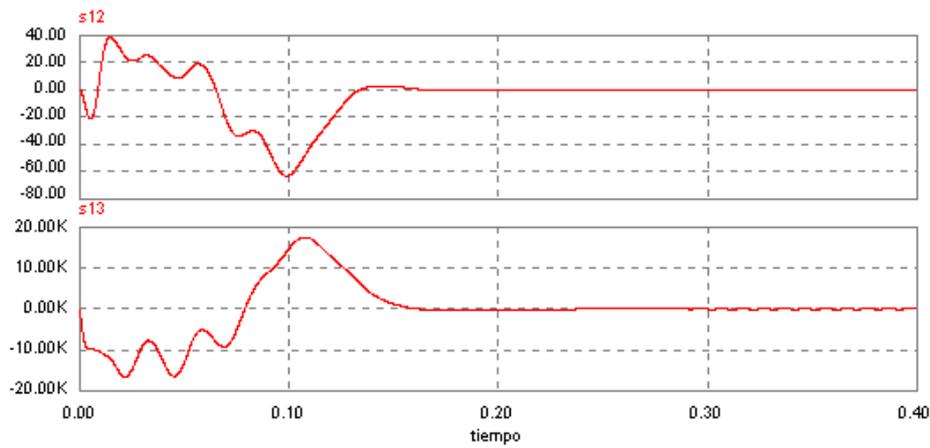


Figura 58. $\sigma_{i_{sx}}^{r_r}(t)$; $\sigma_{i_{sx}}^{L_{rl}}(t)$

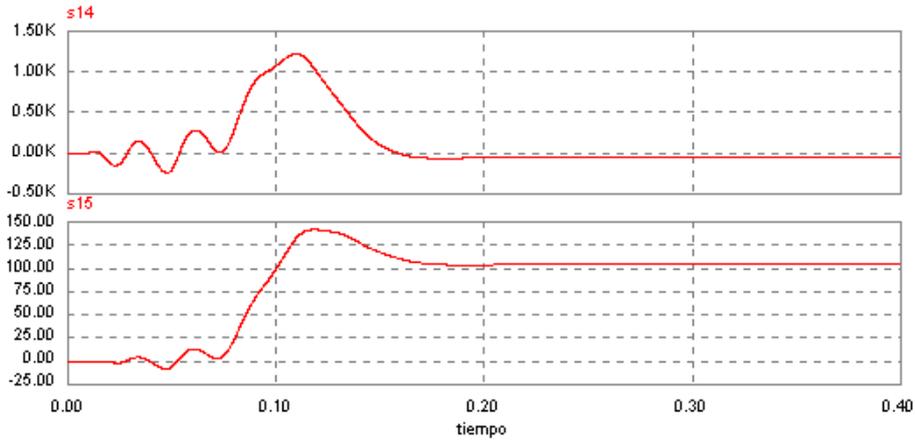


Figura 59. $\sigma_{i_{sx}}^J(t)$; $\sigma_{i_{sx}}^P(t)$

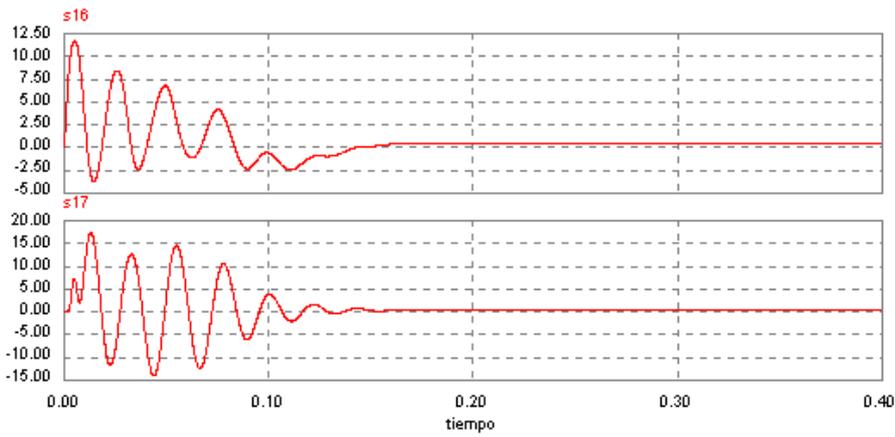


Figura 60. $\sigma_{i_{sx}}^a(t)$; $\sigma_{i_{sx}}^b(t)$

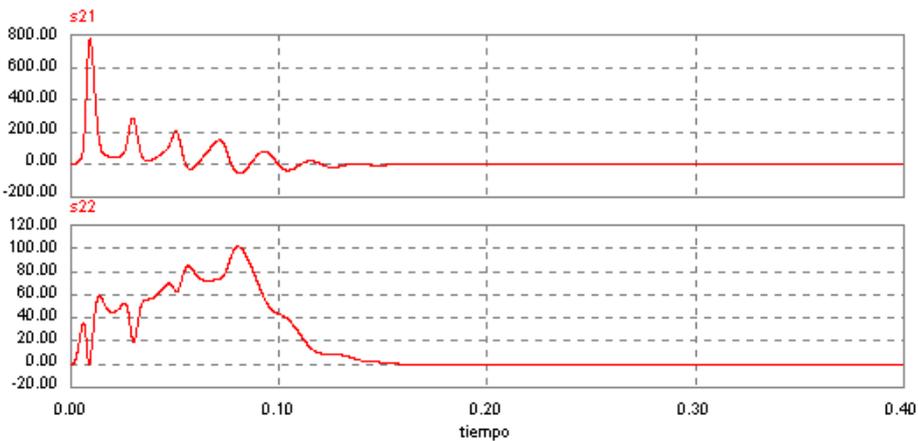


Figura 61. $\sigma_{i_{sy}}^{r_s}(t)$; $\sigma_{i_{sy}}^{r_r}(t)$

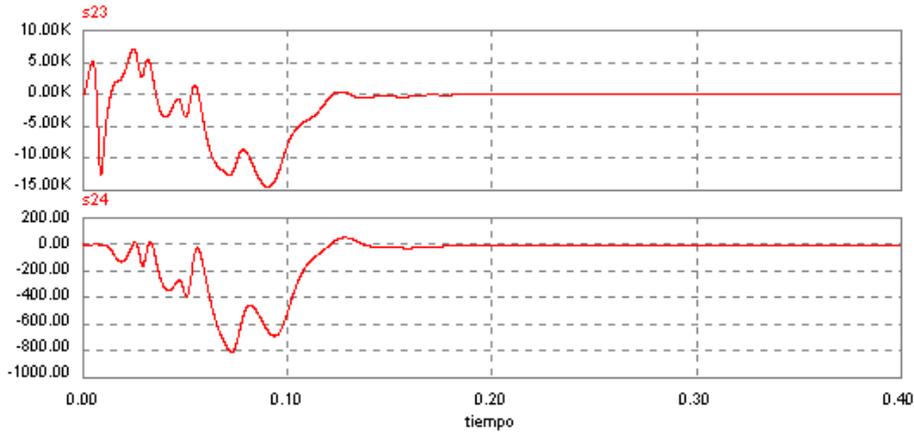


Figura 62. $\sigma_{i_{sy}}^{L_{rl}}(t)$; $\sigma_{i_{sy}}^J(t)$

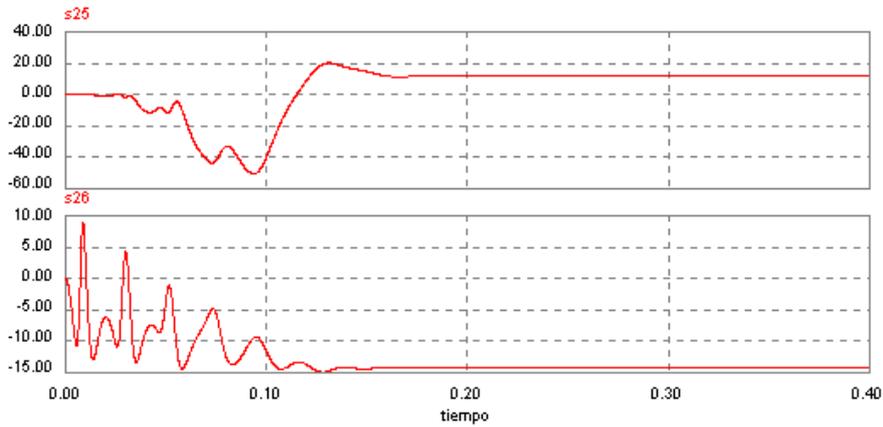


Figura 63. $\sigma_{i_{sy}}^\rho(t)$; $\sigma_{i_{sy}}^a(t)$

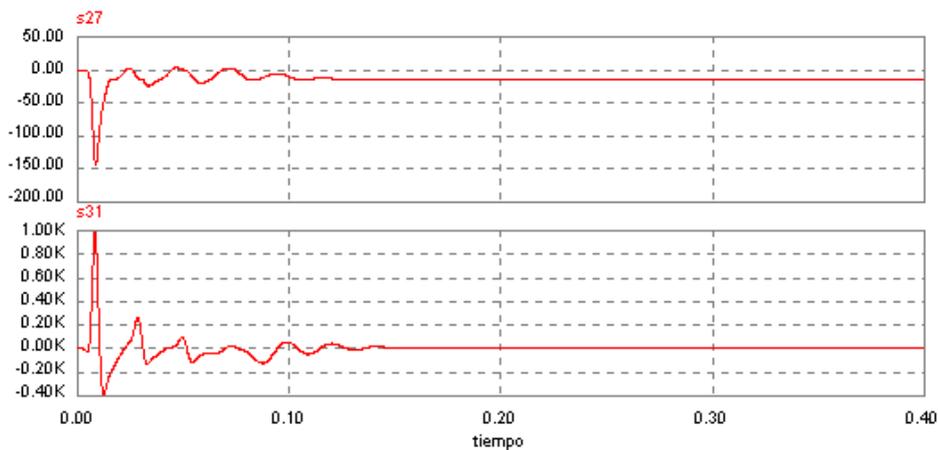


Figura 64. $\sigma_{i_{sy}}^b(t)$; $\sigma_{M_e}^{r_s}(t)$

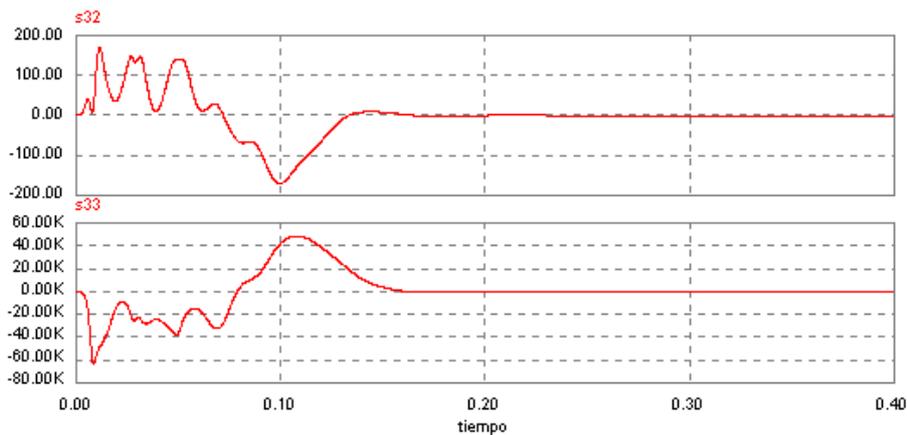


Figura 65. $\sigma_{M_e}^{r_r}(t)$; $\sigma_{M_e}^{L_{rl}}(t)$

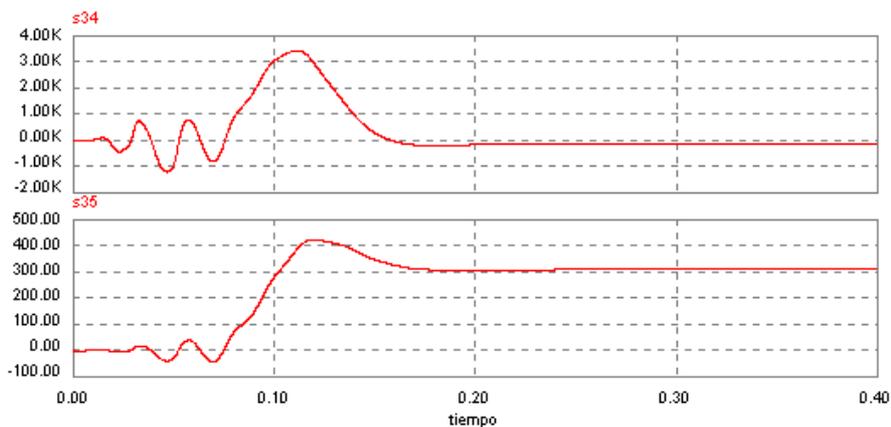


Figura 66. $\sigma_{M_e}^J(t)$; $\sigma_{M_e}^p(t)$

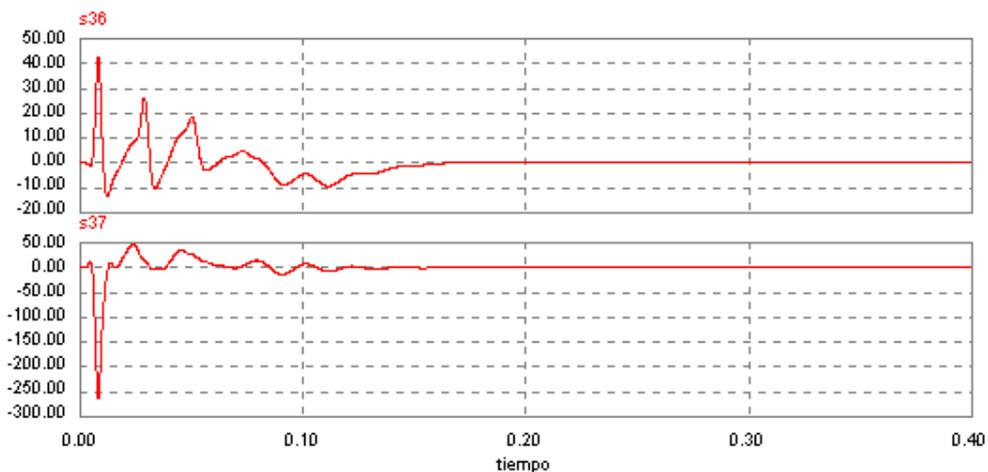


Figura 67. $\sigma_{M_e}^a(t)$; $\sigma_{M_e}^b(t)$

Conclusiones.

En el anexo II, se encuentran las ecuaciones desarrolladas obtenidas mediante la utilización del programa MAPLE-V. A partir de las ecuaciones calculadas en MAPLE, se genera un fichero compatible con FORTRAN 90, que enlaza con los programas de simulación desarrollados en SIMNON v 2.0, lo que permite obtener las funciones de sensibilidad deseadas.

Las tablas que siguen, resumen los valores máximos de las sensibilidades para cada caso considerado, así como los valores unitarios de los mismos.

Tabla I.a. Sensibilidades máximas. Modelo nº21

	R_s	R_r	L_{rl}	J	ρ	a_1	a_2
i_{sx}	78	-64	-850	-1010	-175	10000	-30000
i_{sy}	1120	100	-1.05e6	710	80	110000	-115000
i_{rx}	-70	65	800000	1010	180	-9800	-30000
i_{ry}	-80	-100	1.05e6	-700	-80	11800	38000
ω_r	-32	100	-1.05e6	1550	200	-10000	-28000
Ψ_{sx}	0.85	-0.15	-7500	-2.2	-0.15	62	390
Ψ_{sy}	0.80	0.12	8000	2.2	-0.2	100	380
M_e	800	-160	-3e6	-2900	-500	90000	-150000

Tabla I.b. Sensibilidades unitarias. Modelo nº21

	R_s	R_r	L_{rl}	J	ρ	a_1	a_2
i_{sx}	1.31	-2.49	-0.39	-3.48	-0.26	414	-311
i_{sy}	18.78	3.89	-351	2.45	0.12	4557	-1193
i_{rx}	-1.17	2.53	267	3.48	0.26	-406	-311
i_{ry}	-1.34	-3.89	502	-2.42	-0.12	489	394
ω_r	-0.04	0.28	-25.7	0.39	0.02	-30.4	-21.3
Ψ_{sx}	0.25	-0.10	-44.2	-0.13	-3.9e-3	45.2	71.2
Ψ_{sy}	0.23	0.08	47.1	0.13	-5.2e-6	72.9	69.4
M_e	6.18	-2.87	-463	-4.6	-0.34	1720	-718

Tabla II.a. Sensibilidades máximas. Modelo nº22

	R_s	R_r	L_{rl}	J	ρ	a	b
Ψ_{sx}	0.70	-0.170	32	2	0.09	0.042	0.2
Ψ_{sy}	0.70	0.12	-40	1.6	0.17	0.040	0.16
Ψ_{rx}	0.56	0.40	-140	-9	-1.1	0.038	0.14
Ψ_{ry}	-0.42	-0.81	150	7	0.51	-0.042	0.14
ω_r	35	65	-25000	-1600	-140	4.5	-13
i_{sx}	61	-61	18000	1200	140	12	17
i_{sy}	790	100	-14900	-800	-50	-14	-140
M_e	1000	-180	-60000	3300	420	42	-250

Tabla II.b. Sensibilidades unitarias. Modelo nº22

	R_s	R_r	L_{rl}	J	ρ	a	b
Ψ_{sx}	0.21	-0.12	0.18	0.12	0.0023	8.6e-4	0.097
Ψ_{sy}	0.21	0.08	-0.23	0.09	0.0044	0.019	0.049
Ψ_{rx}	0.16	0.27	0.82	-0.55	-0.028	0.018	0.043
Ψ_{ry}	-0.12	-0.55	0.88	0.42	0.013	-0.021	0.043
ω_r	0.043	0.18	-0.61	-0.41	-0.015	9.15e-3	-0.017
i_{sx}	1.02	-1.02	6.02	4.14	0.20	0.33	0.30
i_{sy}	13.2	3.89	-4.98	-2.76	-0.07	-0.39	-2.48
M_e	7.73	-3.23	-9.26	5.25	0.28	0.53	-2.04

A partir de los resultados anteriores, se pueden extraer las siguientes consideraciones:

- Las corrientes resultan igualmente afectadas por las variaciones de r_s y r_r en ambos modelos.
- La sensibilidad de las mismas es mayor a las variaciones de L_{rl} ; además el modelo nº21 resulta mucho más sensible (observéese la diferencia de escala entre ambas gráficas).
- Las variaciones en el momento de inercia J , y en el coeficiente de rozamiento ρ , repercuten de forma similar en ambos modelos.
- Las variaciones en los parámetros que definen las funciones de saturación (a_1 y a_2 para el modelo nº 21; a y b para el modelo nº 22) influyen de forma mucho más significativa en el primer modelo (nº 21).

Respecto a la velocidad ω_r :

- Ambos modelos presentan un comportamiento similar; no obstante, el primer modelo presenta discrepancias mayores para todos los parámetros considerados, en especial los que caracterizan la saturación.

Respecto a los flujos:

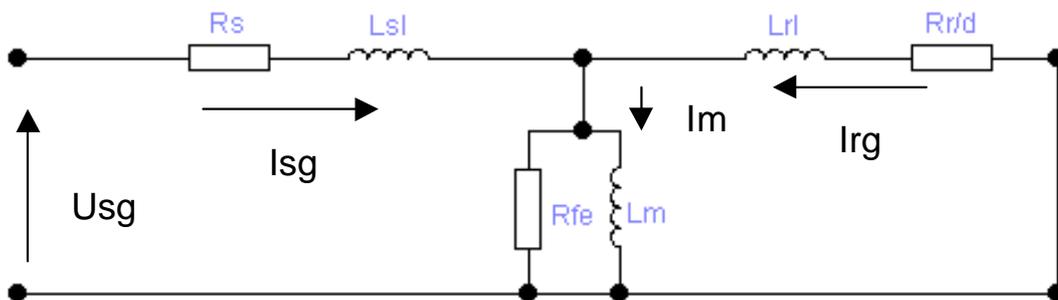
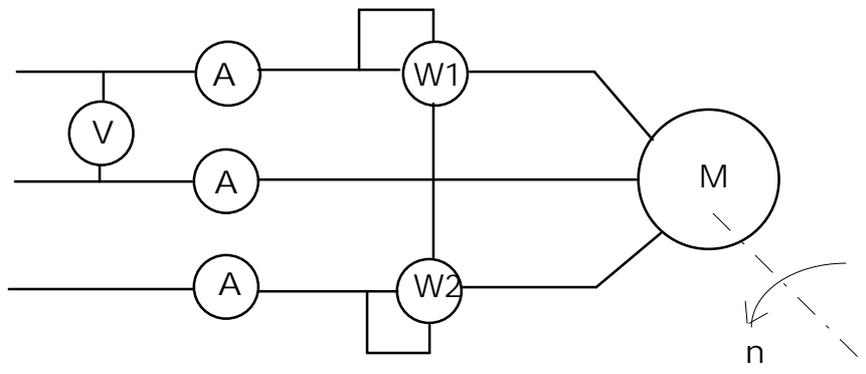
- El modelo n° 22, es mucho menos sensible a las variaciones de los parámetros que el n° 21.

Respecto al par electromagnético:

- Ambos modelos resultan muy sensibles a las modificaciones de L_{rl} (menos en el modelo n° 22) y a las variaciones del momento de inercia (de nuevo, menor en el modelo n° 22).
- Respecto a los parámetros que caracterizan la saturación, el modelo polinomial considerado en el caso n° 22, resulta menos problemático que el modelo arcotangente.

Como conclusión final, el modelo polinomial que caracteriza la saturación, resulta menos influyente que el de Langevin y, por tanto, será el que se considerará para su implementación en la determinación de los parámetros en tiempo real.

OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS POR ENSAYOS FUERA DE LÍNEA



4. Obtención de los parámetros por ensayos fuera de línea

<i>4. Obtención de los parámetros por ensayos fuera de línea</i>	2
<i> Ensayos a potencia útil nula</i>	2
<i> Modelización de la saturación.</i>	6
<i> Caracterización mediante polinomios [Justus 91].</i>	7
<i> Aplicación a la caracterización de la curva de saturación de un transformador.</i>	10
<i> Aplicación a la modelización de características de saturación para la máquina asíncrona.</i>	12
<i> Trabajo en vacío.</i>	13
<i> Trabajo a rotor frenado.</i>	14
<i> Resultados experimentales de contrastación.</i>	16
<i> Conclusiones.</i>	22

4. Obtención de los parámetros por ensayos fuera de línea

Como paso previo a la obtención de los parámetros en tiempo real se plantea la obtención de los mismos a partir de ensayos en régimen permanente. A partir de los ensayos en vacío y cortocircuito puede plantearse la obtención de los parámetros necesarios para la modelización de la máquina.

Los parámetros a obtener son los correspondientes al esquema equivalente en T: resistencias e inductancias de dispersión, estáticas y rotóricas, la inductancia de magnetización, y la resistencia de pérdidas en el hierro.

Ensayos a potencia útil nula

A partir del esquema de la figura:

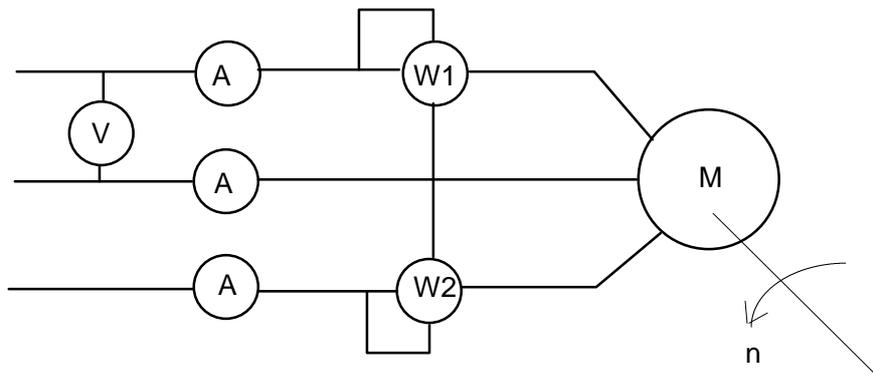


Figura 1. Esquema general para los ensayos.

válido para ambos ensayos, se obtienen los parámetros del circuito equivalente del motor.

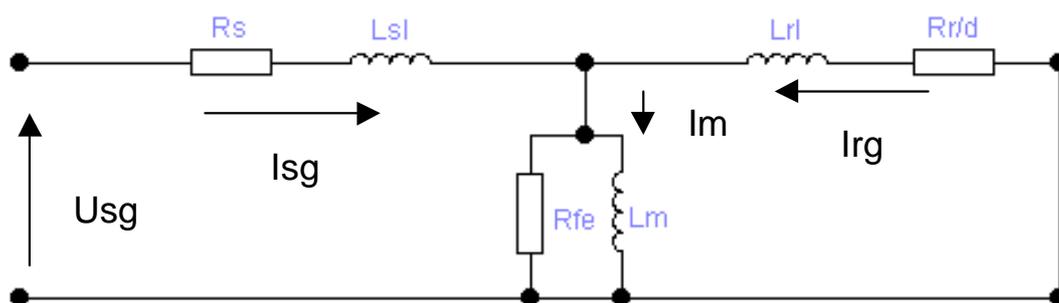


Figura 2. Modelo en T (R.P.)

A partir del esquema equivalente para el ensayo en vacío, se puede considerar para deslizamiento relativo $d \rightarrow 0$ que:

$$\frac{V_s}{I_0} = \underline{Z}_b = R_s + j \cdot X_s + j \cdot \frac{R_{Fe} \cdot X_m}{R_{Fe} + j \cdot X_m} \quad (1)$$

separando la parte real y la imaginaria, se obtiene

$$\mathbf{Re}(\underline{Z}_b) = R_s + R_{Fe} \cdot \frac{X_m^2}{R_{Fe}^2 + X_m^2} = R_s + R_p \quad (2)$$

$$\mathbf{Im}(\underline{Z}_b) = X_s + X_m \cdot \frac{R_{Fe}^2}{R_{Fe}^2 + X_m^2} = X_s + X_p$$

resultando dos ecuaciones con tres incógnitas X_m , R_{Fe} i X_s (R_s puede ser medida a priori). Considerando la relación entre pérdidas magnéticas y potencia magnetizante, se establece la siguiente restricción:

$$P_{Fe} = \frac{k}{R_{Fe}} \quad Q_m = \frac{k}{X_m} \quad (3)$$

$$a = \frac{P_{Fe}}{Q_m} = \frac{X_m}{R_{Fe}}$$

El parámetro α , es típico para cada clase de material magnético y varía en función del nivel de saturación alcanzado. El parámetro α tiene unos valores típicos que oscilan entre $\alpha = 0.1 \div 0.5$; se debe escoger iterativamente el que hace converger el sistema a un resultado razonable.

Para una plancha de acero al silicio, (calidad 1,2 W/kg a $\hat{B} = 1T$ – excitación sinusoidal 50 Hz) presentada como ejemplo, se obtienen los valores siguientes:

Tabla I. Pérdidas para plancha de acero al silicio

B (%)	P (W)	Q(var)	α
30	0,12	0,24	0,5
40	0,20	0,4	0,51
50	0,3	0,64	0,47
60	0,42	0,96	0,44
70	0,56	1,55	0,36
80	0,73	3	0,24
90	0,94	9,6	0,1
100	1,2	35	0,034

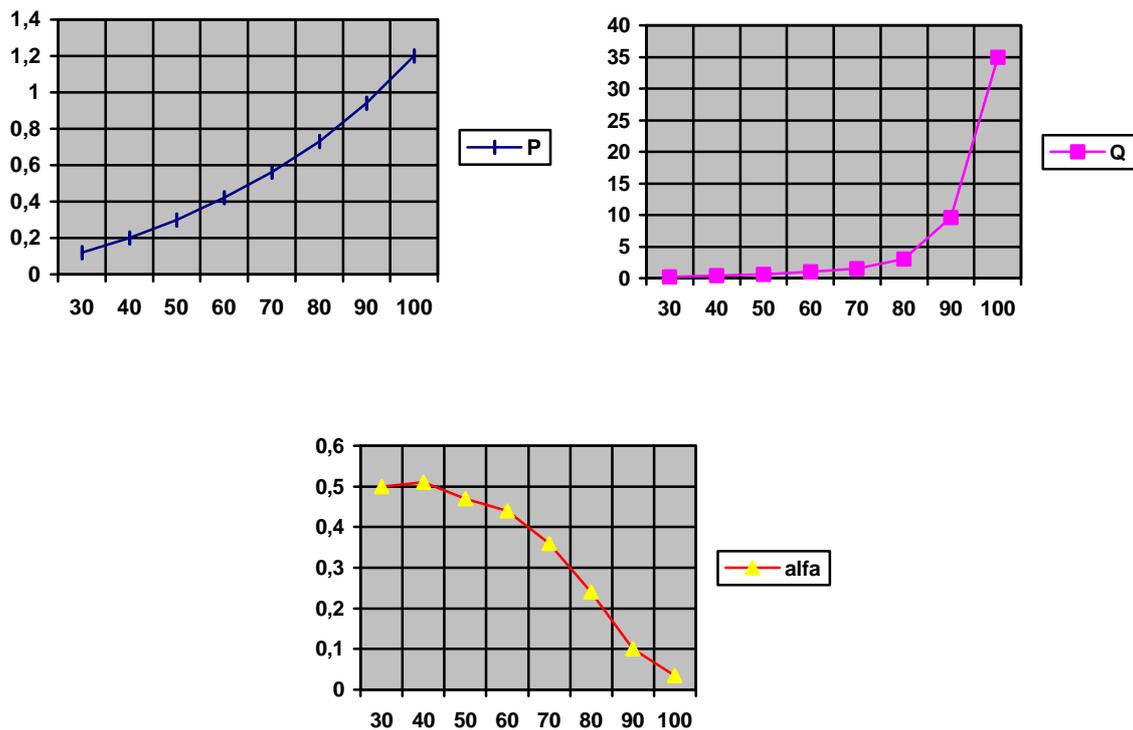


Figura 3. Pérdidas (P), Potencia de magnetización (Q), parámetro α

Teniendo en cuenta la variabilidad de α con el punto de trabajo, se debería obtener una combinación de parámetros X_s , R_{Fe} para cada régimen de funcionamiento.

Reordenando las ecuaciones anteriores, se llega a las dos ecuaciones siguientes:

$$\tan \theta_0 = \frac{\text{Im}(\underline{Z}_b)}{\text{Re}(\underline{Z}_b)} = \frac{X_s + R_{Fe} \cdot \frac{a}{1+a^2}}{R_s + R_{Fe} \cdot \frac{a^2}{1+a^2}} \tag{4}$$

$$P_{vacio} = 3 \cdot \left(R_s + R_{Fe} \cdot \frac{a^2}{1+a^2} \right) \cdot I_o^2$$

Ecuaciones que permiten obtener X_s , R_{Fe} y α .

Para el ensayo en cortocircuito ($d = 1$), se puede considerar el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\mathbf{Re}(\underline{Z}_p) = R_{Fe} \cdot \frac{\mathbf{a}^2}{1 + \mathbf{a}^2} = R_p \quad ; \quad \mathbf{Im}(\underline{Z}_p) = R_{Fe} \cdot \frac{\mathbf{a}}{1 + \mathbf{a}^2} = X_p \quad (5)$$

$$\underline{Z}_{cc} = R_s + j \cdot X_s + \frac{(R_p + j \cdot X_p) \cdot (R_r + j \cdot X_r)}{R_p + j \cdot X_p + R_r + j \cdot X_r}$$

que unidas a las relativas al ensayo en vacío, permiten valorar el conjunto de parámetros del modelo.

Las desventajas del método anterior se esperaban después de analizar las suposiciones que se han hecho, y que resultan:

- Válidas si conocemos el tipo de material empleado en la construcción de la máquina.
- Válidas únicamente para el punto de trabajo nominal o en sus proximidades.

Una aportación interesante es que permite la valoración independiente de las inductancias de dispersión estática y rotórica sin tener que realizar suposiciones arriesgadas respecto a su valoración (del tipo $X_s \approx X_r$).

Para la máquina nº 2, se obtiene el siguiente conjunto de parámetros:

$$\mathbf{a} = 0,151; \quad R_{Fe} = 176.5\Omega; \quad R_r = 0.86\Omega; \quad X_r = 1.24\Omega; \quad X_s = 1.30\Omega;$$

$$R_s = 0.369\Omega; \quad X_m = 26.65\Omega$$

que resultan válidos para puntos de trabajo cercanos al nominal.

Si se considera el ensayo en carga de la misma se obtiene la siguiente tabla de errores:

Tabla 2. Ensayo en carga.

N(min ⁻¹)	I(calc)(A)	I(exp)(A)	ErrorI(%)	P(calc)(W)	P(exp.)(W)	ErrorP(%)
1498	8.25	9.40	12.53	1117	1172	4.72
1475	9.95	10.5	5.45	3789	3920	3.35
1461	11.45	12.7	10.04	5359	5840	8.23
1413	17.61	18.9	7.18	10018	10560	5.13
1373	23.43	23.6	0.72	13936	14240	2.14
1368	24.14	24.8	2.66	14380	14900	3.49

El método anterior, modeliza de forma sencilla la máquina. Los resultados obtenidos aconsejan su utilización para la obtención de valores iniciales de los parámetros, o para la modelización en estudios muy simplificados como, por ejemplo, el

comportamiento en régimen permanente y para zonas de trabajo próximas a la nominal (zonas de saturación constante).

Con el fin de eliminar posibles variaciones debidas al efecto pelicular, se han realizado los ensayos a rotor frenado de la máquina alimentada a frecuencia reducida (5 Hz) obteniéndose un resultado similar al del ensayo a rotor frenado realizado a 50 Hz.

Una dificultad del método recae en la forma de realizar las medidas: errores pequeños en la determinación de la velocidad llevan a resultados totalmente incongruentes. En nuestro caso se obtienen errores muy elevados si se realiza la medida de velocidad mediante dinámo tacométrica; realizando la medida con medios más sofisticados, tales como una lampara estroboscópica, se obtienen resultados mejores.

Modelización de la saturación.

La modelización de las características de saturación se puede realizar a partir de dos puntos de vista distintos:

- Consideración de modelos del tipo de Jiles-Atterton, complejos y difíciles de caracterizar experimentalmente [Jiles 98].
- Caracterización a partir de la aproximación funcional de curvas de saturación.

Para las aplicaciones de control como las que nos ocupan, el segundo punto de vista resulta más adecuado ya que permite una aproximación suficiente.

Se consideran aproximaciones del tipo:

$$\Psi = f(i) = a_1 \cdot \arctan(a_2 \cdot i) + a_3 \cdot i \quad (6)$$

o bien:

$$\frac{i}{I_N} = g(\Psi) = a \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right) + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n \quad (7)$$

donde $n = 3, 5, 7, 9, 11, \dots$

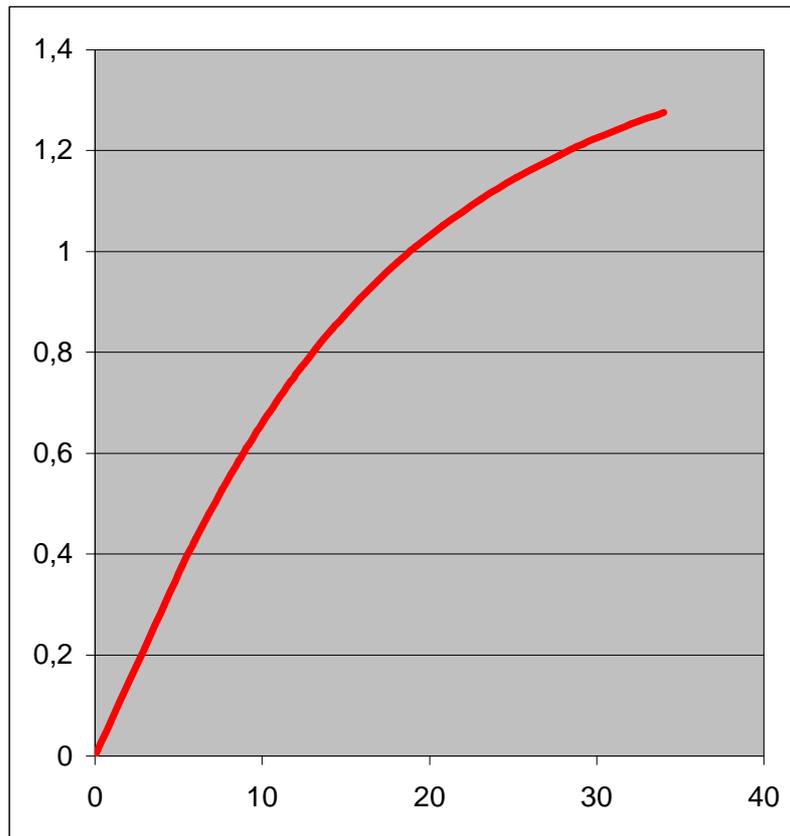


Figura 4. Característica de saturación $\Psi = f(i)$

El primer tipo de aproximaciones, tiene su génesis en la teoría de Langevin sobre el campo magnético en el interior de materiales magnéticos. El segundo tipo, es un caso particular de la aproximación mediante polinomios.

Caracterización mediante polinomios [Justus 91].

Si se considera el modelo anterior y una curva de saturación como la que se representa en la figura 4, se encuentra que el parámetro a se puede obtener a partir de la pendiente inicial de la curva:

$$\left. \frac{di}{d\Psi} \right)_{\Psi=0} = \left. \frac{dg(\Psi)}{d\Psi} \right)_{\Psi=0} = \frac{I_N}{\Psi_N} \cdot a \quad (8)$$

Experimentalmente, se puede valorar a a partir de medidas sobre la curva de saturación o, en el caso de no disponer de ella, a partir de la respuesta al escalón de la bobina en consideración. En efecto si se considera una bobina conectada a una fuente de tensión de valor nominal, se cumple que:

$$\frac{d\Psi}{dt} = U_N - r \cdot i \quad (9)$$

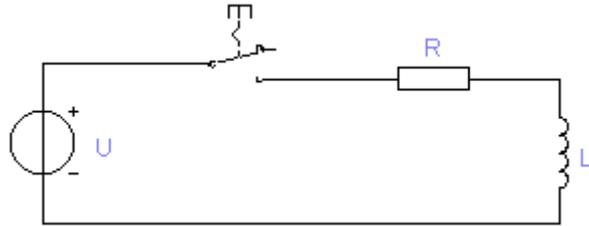


Figura 5. Modelo bobina saturada

para $t = 0$:

$$\left. \frac{d\Psi}{dt} \right)_{t=0} = U_N \tag{10}$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right)_{t=0} = \left(\frac{di}{d\Psi} \right)_{t=0} \cdot \left(\frac{d\Psi}{dt} \right)_{t=0} = \left(\frac{I_N \cdot a}{\Psi_N} \right) \cdot U_N = \frac{I_N}{t_1} \tag{11}$$

$$a = \frac{\Psi_N}{U_N \cdot t_1} \tag{11}$$

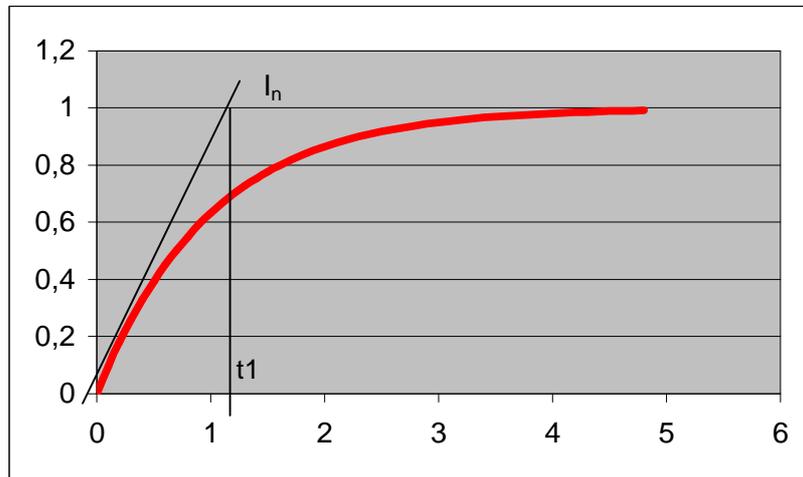


Figura 6. Representación de $i(t)$

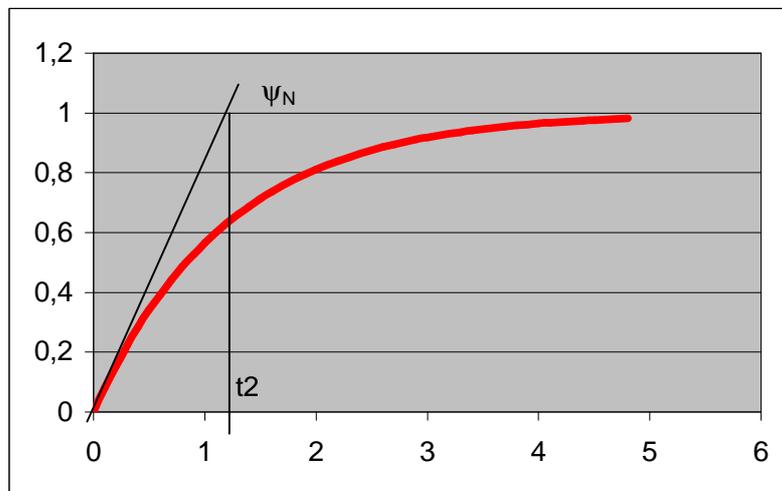


Figura 7. Representación de $\Psi(t)$

Por otra parte de la gráfica del flujo en función del tiempo hallamos que:

$$\left. \frac{d\Psi}{dt} \right)_{t=0} = U_N = \frac{\Psi_N}{t_2} \tag{12}$$

Para $t \rightarrow \infty$, $i = I_N$; $\Psi = \Psi_N = U_N \cdot t_2$, se cumple que:

$$a = \frac{\Psi_N}{U_N \cdot t_1} = \frac{t_2}{t_1} \tag{13}$$

además:

$$b = 1 - a \tag{14}$$

La principal dificultad del método anterior es la no disponibilidad de $\Psi(t)$. A partir de la característica de saturación, expresada en valores por unidad, y la construcción gráfica de la figura 8, se obtienen los datos anteriores (a, b y m).

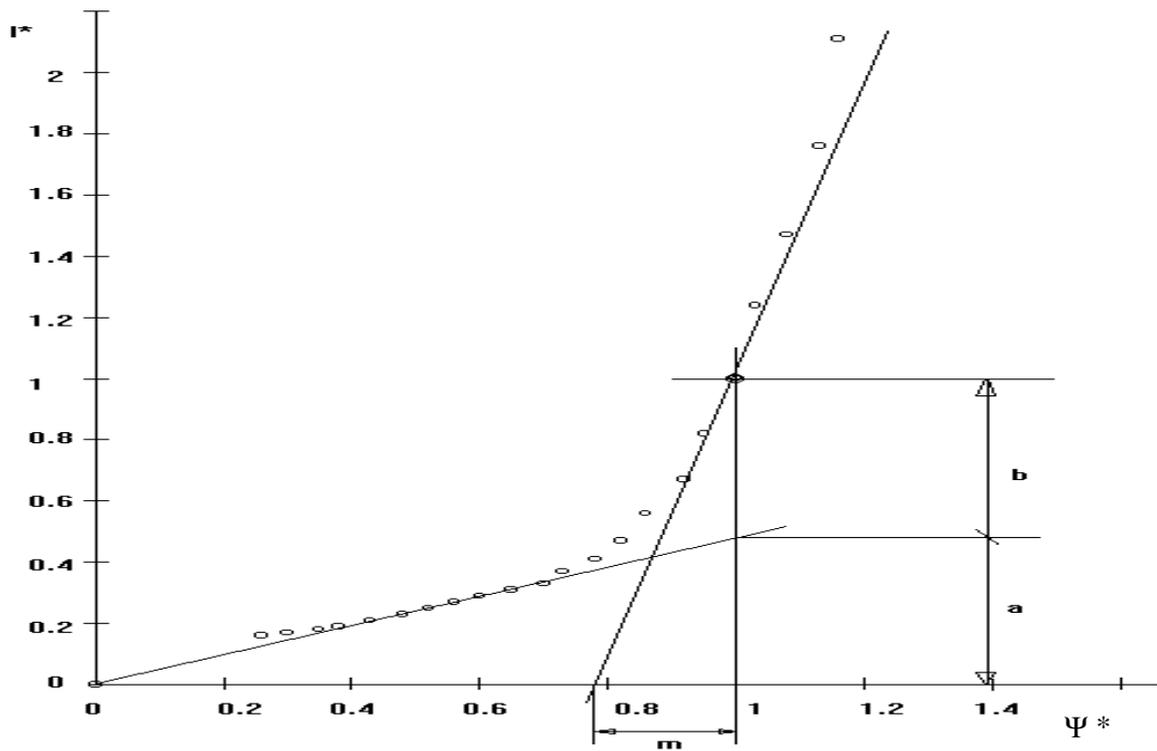


Figura 8. Construcción gráfica para caracterización de saturación

Además se cumple que:

$$\frac{d\left(\frac{I}{I_N}\right)}{d\left(\frac{\Psi}{\Psi_N}\right)}_{\Psi=\Psi_N} = a + n \cdot b = \frac{1}{m} \quad (15)$$

$$n = \frac{1 - m \cdot a}{m \cdot b} \quad (16)$$

Aplicación a la caracterización de la curva de saturación de un transformador.

La caracterización de modelos que tengan en cuenta la saturación, puede realizarse a partir del trabajo en vacío de un transformador. Si se supone la resistencia de la bobina despreciable, una estimación del flujo Ψ puede obtenerse a partir de la expresión:

$$\Psi_m = \frac{U_m}{\omega} \quad (17)$$

con U_m valor máximo de la tensión, Ψ_m valor máximo del flujo y $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, válida en régimen sinusoidal permanente. Una vez realizado el ensayo, la consideración de relaciones entre el flujo Ψ y la corriente i , como las anteriores:

$$i^* = a \cdot y^* + b \cdot y^{*n} \quad (18)$$

donde:

$$i^* = \frac{i}{I_N}; \quad \Psi^* = \frac{\Psi}{\Psi_N} \quad (19)$$

con I_N, Ψ_N valores nominales respectivos, o:

$$y = a_1 \cdot \arctan(a_2 \cdot i) \quad (20)$$

consigue una caracterización a partir de ensayos realizados fuera de línea con errores mínimos. El trabajo sigue la metodología explicada anteriormente para determinar los coeficientes a , b y n según la construcción de la figura anterior y los resultados experimentales de la Tabla 3.

- Transformador monofásico 220/380 V, 1.3 kVA, 5.9/3.5 A, $P_j = 40$ W, $P_o = 18$ W, $R_1 = 0.942 \Omega$, $R_2 = 1.202 \Omega$; $\Psi_m = 0.99$ Wb;

Tabla 3. Ensayo en vacío

Ψ^*	0	0.26	0.30	0.35	0.38	0.43	0.48	0.52	0.56	0.60	0.65	.70
I^*	0	0.16	0.17	0.18	0.19	0.21	0.23	0.25	0.27	0.29	0.31	0.33

Ψ^*	0.73	0.78	0.82	0.86	0.92	0.95	1.00	1.03	1.08	1.13	1.16	
I^*	0.37	0.41	0.47	0.56	0.67	0.82	1.00	1.24	1.47	1.76	2.11	

A partir de la construcción gráfica sobre la figura anterior, se obtienen los parámetros buscados:

$$a = 0.48 \quad ; \quad b = 0.52 \quad ; \quad m = 0.22$$

$$n = \frac{1 - m \cdot a}{m \cdot b} = \frac{1 - 0.22 \cdot 0.48}{0.22 \cdot 0.52} = 7.81 \tag{21}$$

se elige: $n = 7$

$$\frac{i}{I_N} = 0.48 \cdot \frac{y}{y_N} + 0.52 \cdot \left(\frac{y}{y_N} \right)^7 \tag{22}$$

La aplicación de expresiones del tipo arctan() presenta la dificultad de determinación de los parámetros, ya que estos se presentan como coeficientes de funciones en una forma no afín con los parámetros desconocidos, lo que lleva a la consideración de técnicas de mínimos cuadrados generalizados. Para el caso anterior, se obtiene la siguiente función de Langevin:

$$\psi^* = 0.805 \cdot \arctan(2.9258 \cdot i^*) \tag{23}$$

consiguiendo la tabla 4 de errores. Obsérvese que en la aproximación polinomial, conseguida a partir del trazado gráfico sobre la figura, existen zonas con error excesivo. En cambio la aproximación de Langevin, obtenida a partir del método de mínimos cuadrados, logra una mejor aproximación si se exceptúan puntos localizados.

Tabla 4. Errores calculados para cada punto experimental

Errp (%)	-	21,97	15,23	6,48	3,69	1,04	-1,50	-1,98	-2,88	-4,33	-8,87	-14,80
ErrLan (%)	-	-35,64	-23,92	-11,56	-7,54	-3,20	0,60	2,18	3,83	5,54	8,71	11,64

Errp (%)	-10,23	-13,60	-11,33	-6,02	-9,21	0,11	0,00	8,55	4,11	-0,33	3,96	
ErrLan (%)	8,97	9,55	7,47	4,20	3,78	0,30	0,01	-1,80	-0,11	1,71	2,08	

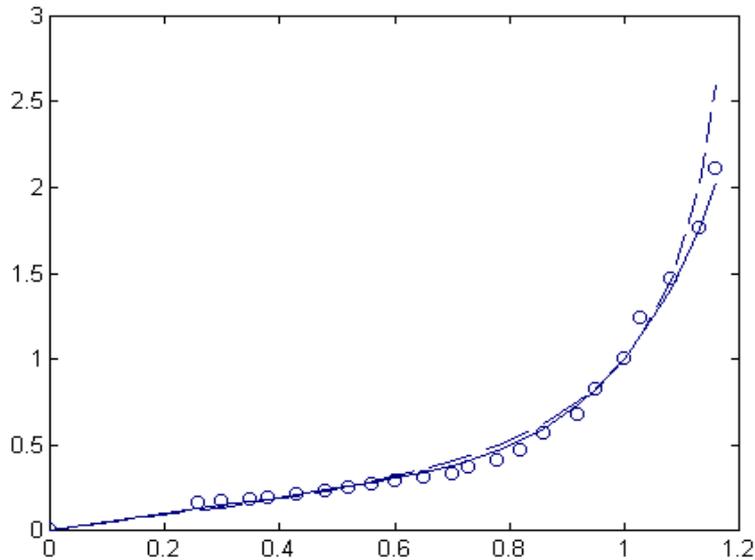


Figura 9. Comparación Polinomio y Langevin

Para cada caso y en función de las aplicaciones y el conjunto de variables analizado, se considerará un conjunto u otro de funciones para la modelización de la saturación.

Aplicación a la modelización de características de saturación para la máquina asíncrona.

El modelo clásico en "T" del motor de inducción, se transforma en otro de la misma forma con un parámetro menos; mediante ensayos en vacío y en cortocircuito y mediciones auxiliares, son determinados los parámetros R_s , R'_r , L'_r y L_m , localizándose en este último los efectos de saturación. A todos los efectos, se considerará el elemento R_{fe} , representativo de las pérdidas en el hierro, como añadido a las pérdidas fijas.

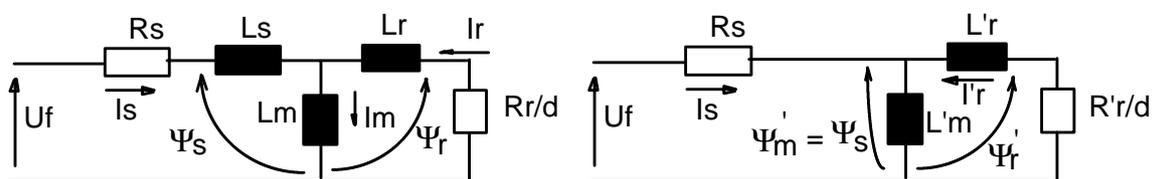


Figura 10. Modelos en T y Γ

Trabajo en vacío.

En el trabajo en vacío puede considerarse que el deslizamiento es nulo; y por lo tanto, se obtiene un esquema equivalente como el de la figura que sigue.

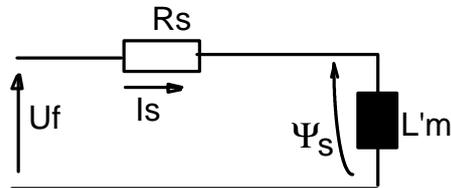


Figura 11. Esquema equivalente en vacío

Si se realiza un ensayo a tensión sinusoidal de amplitud variable y frecuencia fija, puede obtenerse el flujo a partir de la siguiente expresión, en la que se ha despreciado la caída de tensión en la resistencia estática:

$$\hat{\Psi}' \cong \frac{\hat{U}}{w_1} = \frac{U_f \cdot \sqrt{2}}{w_1} \quad (24)$$

Si se considera la relación entre flujo y corriente, se obtienen los resultados que siguen:

Máquina nº1 (1.5 kW).

$$\Psi' = 0.8550 \cdot \arctan(0.8649 \cdot i) \quad \sum e^2 = 1.159 \quad (25)$$

$$\frac{i}{I_N} = 0.48 \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + 0.52 \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^7 \quad \sum e^2 = 0.032 \quad (26)$$

Máquina nº2 (7.5 kW).

$$\Psi' = 0.9115 \cdot \arctan(0.2283 \cdot i) \quad \sum e^2 = 1.070 \quad (27)$$

$$\frac{i}{I_N} = 0.61 \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + 0.39 \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^7 \quad \sum e^2 = 0.0161 \quad (28)$$

Máquina nº3 (22 kW).

$$\Psi' = 1.0921 \cdot \arctan(0.0691 \cdot i) \quad \sum e^2 = 1.0020 \quad (29)$$

$$\frac{i}{I_N} = 0.8 \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + 0.2 \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^7 \quad \sum e^2 = 0.0422 \quad (30)$$

Téngase en cuenta que el flujo nominal se define para tensión nominal de alimentación, y que la corriente nominal de la ecuación **es la corriente correspondiente al flujo nominal**, y no la corriente nominal de la máquina.

Obsérvese que la aproximación polinomial logra menores errores que la función arco tangente. Además la función potencial, para aplicaciones de control, resulta más atractiva, ya que en su cálculo sólo intervienen sumas y productos.

Trabajo a rotor frenado.

A partir de la realización de un ensayo a rotor frenado con tensión variable, se considera el esquema que sigue.

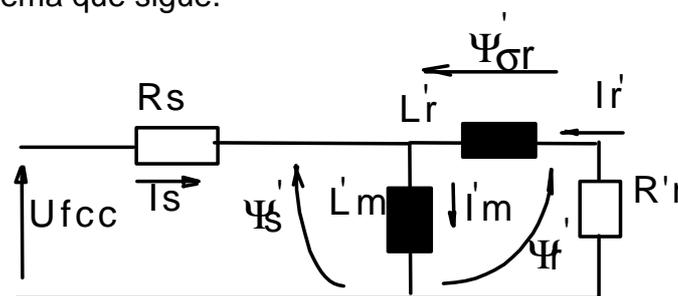


Figura 12. Esquema equivalente a rotor parado

Para la valoración de la corriente y el flujo rotórico debe resolverse el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\underline{I'_m} = \frac{U_{fcc} - R_s \cdot \underline{I}_s}{j \cdot X_m} \tag{31}$$

$$X_m = w \cdot L_m = w \cdot \frac{a_1 \cdot a_2}{1 + (a_2 \cdot I_m)^2} \tag{32}$$

$$\underline{I'_r} = \underline{I'_m} - \underline{I}_s \tag{33}$$

$$\underline{U}_{sr} = \underline{U}_{fcc} - R_s \cdot \underline{I}_s - R'_r \cdot \underline{I}'_r \tag{34}$$

$$\underline{\Psi}'_{sr} = \frac{U'_{sr}}{w} \tag{35}$$

si se tiene en cuenta la saturación a partir de la ecuación de Langevin.

En el caso de considerar el modelo polinomial, resulta más conveniente plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\underline{\Psi}'_s = \frac{U_{fcc} - R_s \cdot \underline{I}_s}{w} \tag{36}$$

$$X_m = w \cdot \frac{1}{I_N \cdot \left(\frac{a}{\Psi_N} + b \cdot \frac{\Psi_s^{n-1}}{\Psi_N^n} \right)} \quad (37)$$

$$I_m = \left(a \cdot \frac{\Psi_s}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi_s}{\Psi_N} \right)^n \right) \quad (38)$$

$$\underline{I}'_r = \underline{I}'_m - \underline{I}'_s \quad (39)$$

$$\underline{U}'_{sr} = \underline{U}_{fcc} - R_s \cdot \underline{I}'_s - R'_r \cdot \underline{I}'_r \quad (40)$$

$$\Psi'_{sr} = \frac{U'_{sr}}{w} \quad (41)$$

La resistencia rotórica se encuentra a partir de la atribución de la potencia absorbida, en estas condiciones, y su distribución entre pérdidas Joule en el estator y rotor.

$$P_{cc} = 3 \cdot U_{fcc} \cdot I_s \cdot \cos \mathbf{j}_{cc} = 3 \cdot (R_s \cdot I_s^2 + R_r \cdot I_r'^2) \quad (42)$$

En este caso, la relación obtenida para las máquinas consideradas resulta casi lineal dando los siguientes valores:

Máquina nº1 (1.5 kW).

$$\Psi'_{sR} = 0.0254 \cdot i'_r \quad (43)$$

Máquina nº2 (7.5 kW).

$$\Psi'_{sR} = 0.0037 \cdot i'_r \quad (44)$$

Máquina nº3 (22 kW).

$$\Psi'_{sR} = 0.0033 \cdot i'_r \quad (45)$$

Mediante medición directa (puente de Thompson) en el caso de la resistencia estática, y por balance de potencias en el caso de la resistencia rotórica, se obtienen los siguientes valores para los elementos resistivos considerados

Tabla 5. Resistencias estática y rotórica

	R_s (Ω)	R'_r (Ω)
1)	4.83	7.907
2)	0.369	0.857
3)	0.173	0.272

Resultados experimentales de contrastación.

A partir de la contrastación de las pruebas realizadas para el conjunto de máquinas considerado:

- Arranque en vacío.
- Arranque en carga, con par de variación lineal según la velocidad, y posterior modificación a funcionamiento en vacío.
- Alimentación a partir de red industrial 400 V-50 Hz.
- Alimentación a partir de ondulator PWM con $m_a = 0.9$ (factor de modulación en amplitud, relación entre el valor máximo de la senoide de referencia y el máximo de la portadora triangular); $m_f = 15$ (factor de modulación en frecuencia, relación entre frecuencia de portadora triangular y sinusoidal de referencia)
- Simulación a partir de la consideración del modelo nº 21 con el siguiente conjunto de parámetros: $R_s = 0.369 \Omega$; $R_r = 0.857 \Omega$; $\Psi'_{sr} = 0.0037 \cdot i'_r$; $\Psi' = 0.9115 \cdot \arctan(0.2283 \cdot i_m)$; $J = 0.076 \text{ kgm}^2$.

Se obtienen los resultados resumidos en las tablas siguientes.

Se han tabulado los siguientes valores:

- Pico de corriente estática $I_{smax} \text{ (A)}$
- Instante en que sucede el máximo $t1 \text{ (ms)}$
- Velocidad angular final (plena carga) $n_{rf1} \text{ (min}^{-1}\text{)}$
- Corriente estática (valor final-plena carga) $I_{s1} \text{ (A)}$
- Corriente estática (valor final- vacío) $I_{s2} \text{ (A)}$
- Velocidad angular final (vacío) $n_{rf2} \text{ (min}^{-1}\text{)}$
- Tiempo de subida (10- 90 %) $Tr \text{ (ms)}$

El test mediante alimentación PWM no ha podido ser realizado para la máquina nº 3 debido a la limitación de potencia del equipo.

Tabla 6. Alimentación Sinusoidal

	$I_{smax} \text{ (A)}$		$t1 \text{ (ms)}$		$n_{rf} \text{ (min}^{-1}\text{)}$		$I_{s1} \text{ (A)}$		$I_{s2} \text{ (A)}$		$n_{rf2} \text{ (min}^{-1}\text{)}$		$Tr \text{ (ms)}$	
	REAL	SIMU	R	S	R	S	R	S	R	S	R	S	R	S
1)	25	26.6	17.5	21	1348	1381	5.5	6.3	4	3.9	1495	1485	79.1	82.4
2)	174.6	173.5	23	23.4	1419	1418	27.4	30	13.6	12.4	1489	1496	128	121
3)	400	411	12	12.5	1471	1414	88.9	93	26	28	1496	1498	238	235

Tabla 7. Alimentación PWM

	$I_{smax} \text{ (A)}$		$t1 \text{ (ms)}$		$n_{rf1} \text{ (min}^{-1}\text{)}$		$I_{s1} \text{ (A)}$		$I_{s2} \text{ (A)}$		$n_{rf2} \text{ (min}^{-1}\text{)}$		$Tr \text{ (ms)}$	
	R	S	R	S	R	S	R	S	R	S	R	S	R	S
1)	25	27.4	10	10.4	1445	1363	6.5	7.82	4	3.6	1551	1548	150	98.6
2)	170	171.5	22.8	23.7	1406	1408	26	28.5	12	10.9	1504	1498	100	128

Tabla 8. Errores

ε (%)	Ismax			t1			n _{rf1}			Tr		
	1)	2)	3)	1)	2)	3)	1)	2)	3)	1)	2)	3)
Sinusoidal	6.40	0.63	2.75	20.0	1.74	4.16	3.22	0.07	3.88	4.17	5.46	1.26
PWM	9.6	0.88	---	4.00	3.95	---	5.67	0.14	---	34.2	28.0	---

Tabla 8 (continuación). Errores

ε (%)	Is1			Is2			n _{rf2}		
	1)	2)	3)	1)	2)	3)	1)	2)	3)
Sinusoidal	14.1	9.50	4.61	2.50	8.82	7.69	0.66	0.47	0.14
PWM	20.3	9.61	---	10.0	9.16	---	0.19	0.40	---

A continuación se presentan los gráficos (experimental/simulación), obtenidos para la máquina nº 2. Todos los gráficos tienen las escalas expresadas en unidades coherentes.

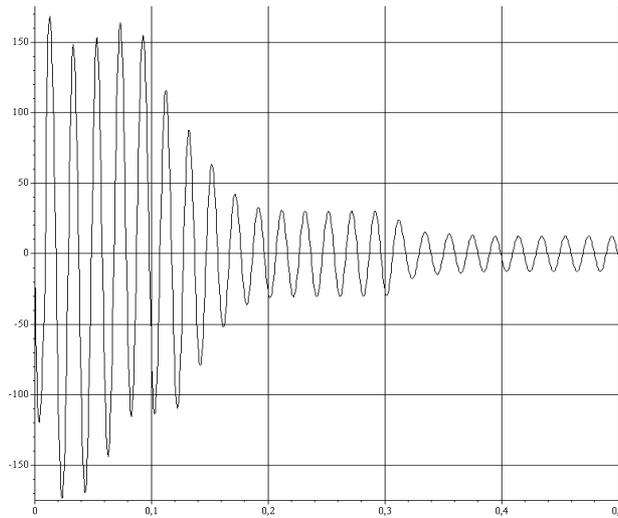
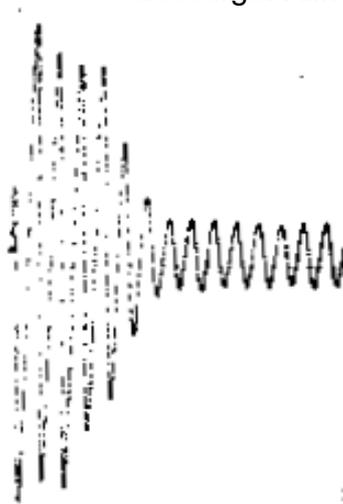


Figura 13. Corriente de estator simulada $i_s(t)$. Arranque en carga y posterior descarga. Alimentación Sinusoidal



14.a: Arranque en carga
50 A/div, 50 ms/div



14.b: Cambio brusco de carga.
20 A/div, 50 ms/div

Figura 14. Corriente de estator real $i_s(t)$. Alimentación Sinusoidal.

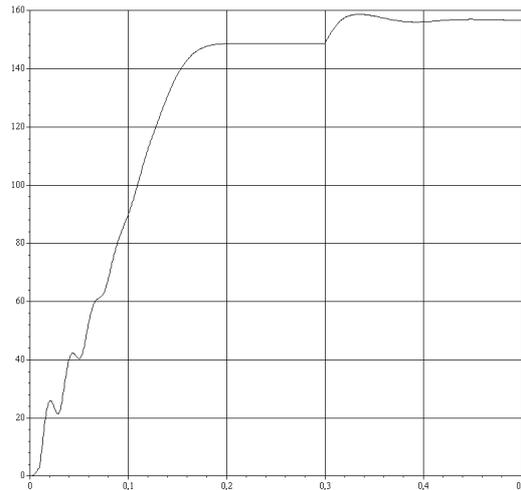
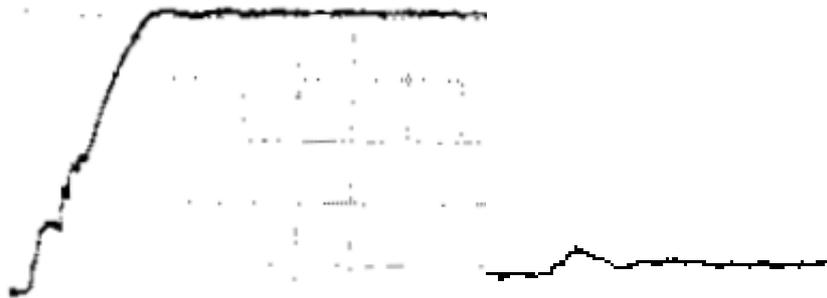


Figura 15. Velocidad en el eje simulada $\omega_m(t)$. . Arranque en carga y posterior descarga. Alimentación sinusoidal.



16.a: Arranque en carga
300 $\text{min}^{-1}/\text{div}$, 50 ms/div

16.b: Cambio brusco de carga.
300 $\text{min}^{-1}/\text{div}$, 50 ms/div

Figura 16. Velocidad en el eje $\omega_m(t)$. Alimentación sinusoidal

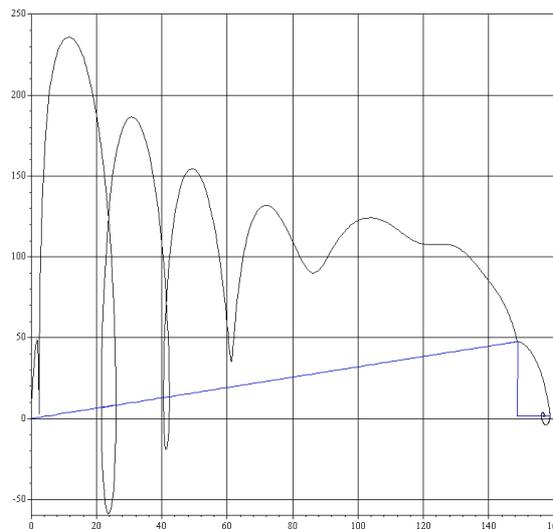


Figura 17. Pares interno y de carga simulados $M_i(\omega_m)$, $M_c(\omega_m)$. Alimentación Sinusoidal

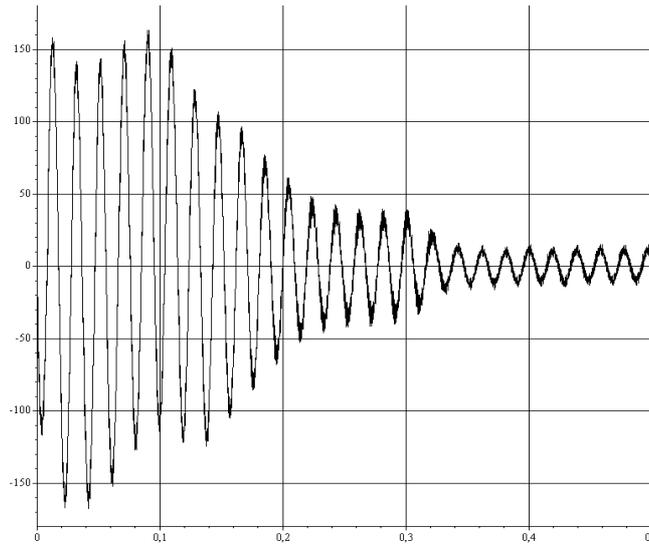


Figura 18. Corriente de estator simulada $i_s(t)$. Arranque en carga y posterior descarga. Alimentación PWM

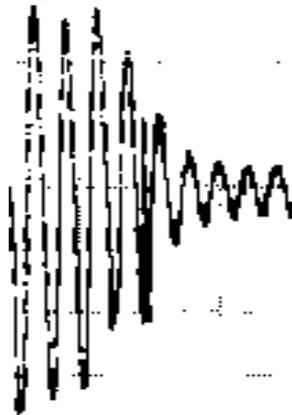


Figura 19. Corriente real $I_s(t)$. Alimentación PWM
50 A/div, 50 ms/div

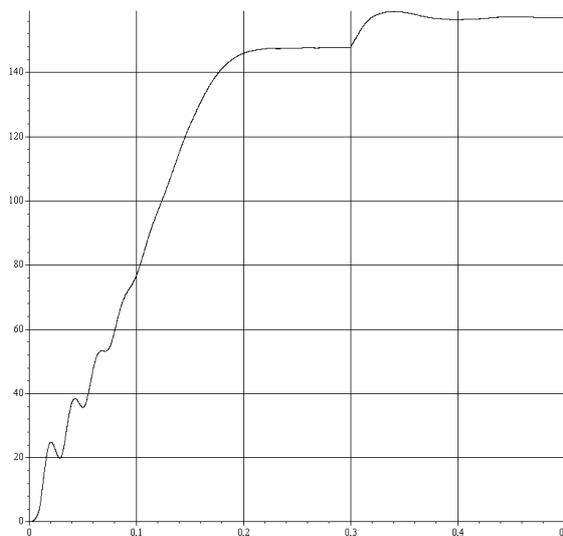


Figura 20. Velocidad en el eje simulada $\omega_m(t)$. Alimentación PWM

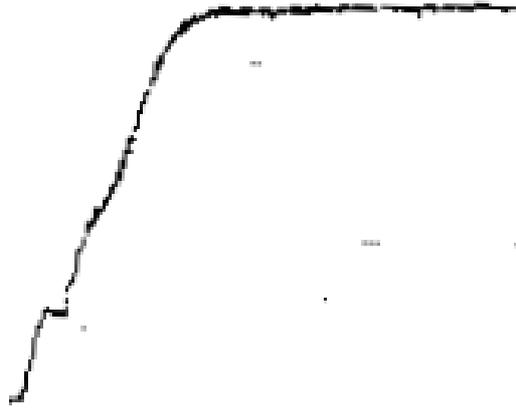


Figura 21. Velocidad en el eje $\omega_m(t)$. Alimentación PWM
300 $\text{min}^{-1}/\text{div}$, 50 ms/div

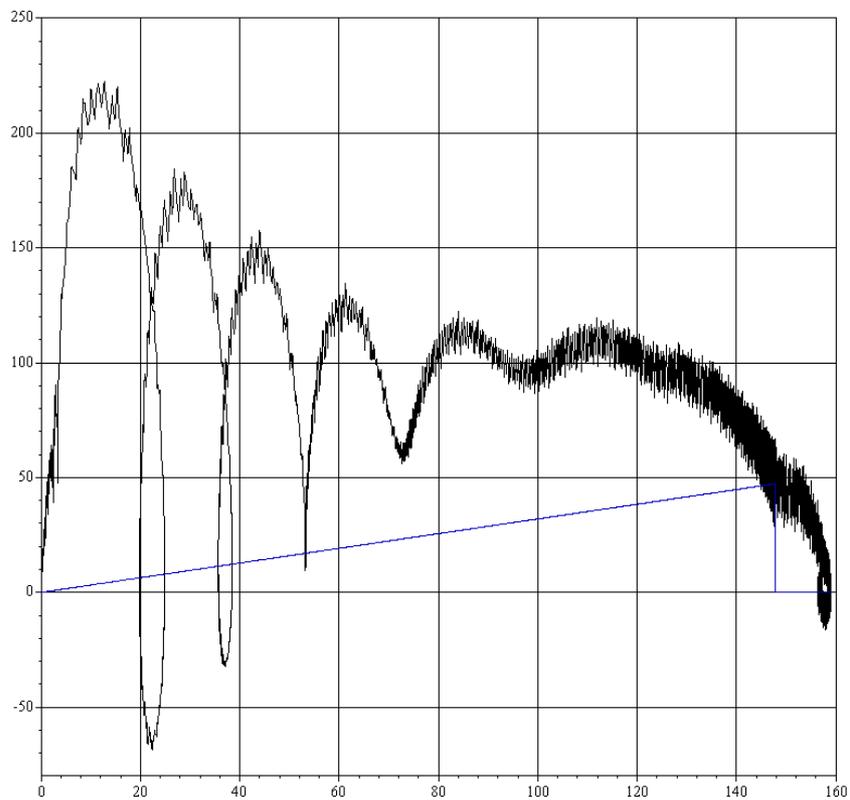
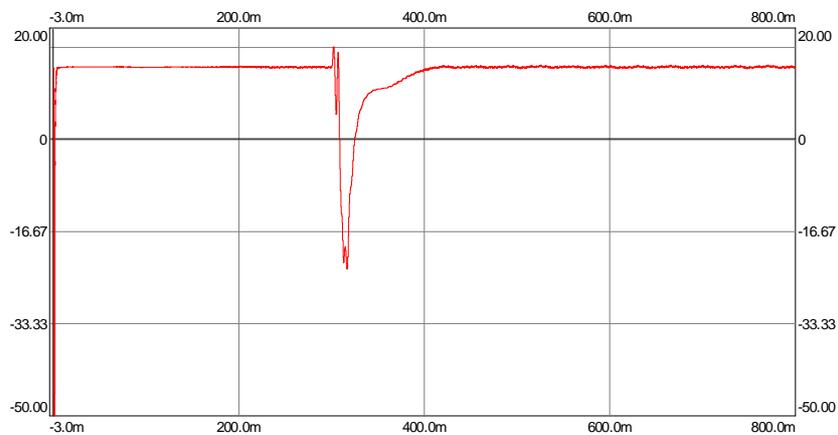
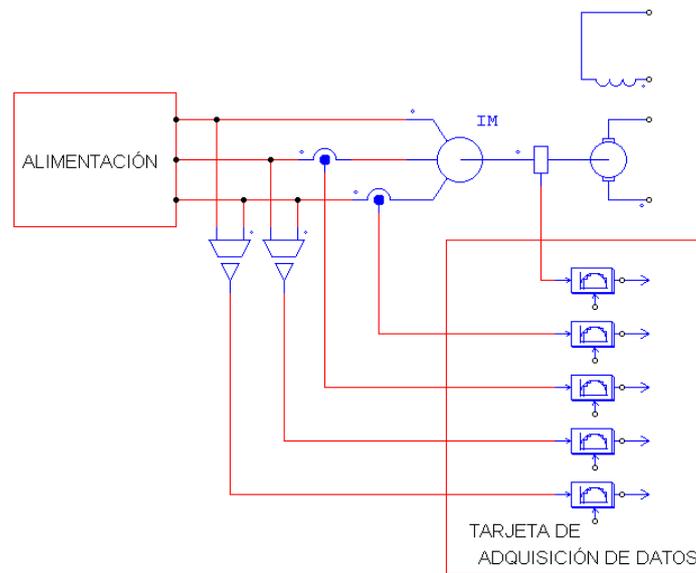


Figura 22. Pares interno y de carga $M_i(\omega_m)$, $M_c(\omega_m)$. Alimentación PWM

Conclusiones.

- La obtención de los parámetros mediante ensayos en régimen permanente (vacío a tensión nominal y rotor frenado), proporcionan resultados correctos.
- La comprobación de resultados en carga es coherente, estando limitada la resolución del resultado por la precisión en la medida de la velocidad del eje.
- Con el fin de eliminar posibles variaciones debidas al efecto pelicular, se han realizado los ensayos a rotor frenado de la máquina alimentada a frecuencia reducida (5 Hz) obteniéndose un resultado similar al del ensayo a rotor frenado realizado a 50 Hz.
- La consideración de un modelo con un elemento menos permite obviar la dificultad de obtener los tres elementos inductivos del modelo clásico. A la vez permite obtener, de una forma sencilla, los parámetros que caracterizan la formulación de la saturación.
- La modelización considerada, aplicada a una serie de máquinas de potencias diferentes (características en Anexo III), permite evaluar el modelo a partir del análisis de los errores obtenidos mediante la consideración de las siguientes variables:
 - pico de corriente
 - velocidad final (carga y vacío)
 - tiempo de subida
 - valores de corriente en régimen permanente (carga y vacío)
 - tipo de alimentación considerado (sinusoidal, PWM)
- Los errores obtenidos (tabla 8) dan validez al modelo considerado.

OBTENCIÓN DE VARIABLES NO MEDIBLES Y PARÁMETROS EN SERVICIO



5. Obtención de variables no medibles y parámetros en servicio

5. Obtención de variables no medibles y parámetros en servicio	2
Observador para el flujo de la máquina asíncrona.	3
Modelo discreto para el observador.	6
Estimación de los parámetros(coeficientes) del modelo.	44
Parámetros(coeficientes) eléctricos.	44
Estimación del par electromagnético. Estimación de parámetros(coeficientes) mecánicos.	46
Contrastación experimental.	47
Modelo completo	48
Modelo reducido.....	60
Conclusiones.....	72
Modelo completo:	72
Modelo reducido:	73
Parámetros mecánicos:	73

5. Obtención de variables no medibles y parámetros en servicio

Una modelización precisa conlleva una carga de cálculo poco compatible con los requerimientos algorítmicos y de tiempo real que implica un sistema de control complejo, como puede ser un control por orientación de campo. Los algoritmos recursivos que mejoran la estimación de los parámetros buscados logran, si la convergencia sigue un ritmo rápido, la correcta observación de dichos parámetros.

En la literatura se encuentran referencias sobre observación de variables no mensurables; se puede citar un clásico [Verghese 88] que describe un observador con parámetros variables con la velocidad y que ha sido ampliamente utilizado en numerosas aplicaciones, aún hoy en día es uno de los esquemas de observación preferidos para el caso de modelos lineales en los parámetros [Glumineau 99]; otros observadores tales como los descritos en [Atkinson 91], [Wijesundera 92] o [Peterson 96] describen aplicaciones válidas solamente para casos particulares como los que se presentan en el control por orientación del campo, estando limitados, además, al caso de máquina sin saturación.

En los casos anteriores no se considera la identificación de los parámetros del modelo; caso de precisarse la estimación de los mismos se acude a modelos de función de transferencia, normalmente considerando la relación corriente-tensión aplicada [Touhami 92], [Jarray 96] y la velocidad como un parámetro lentamente variable; en otros [Kataota 93] se considera el problema conjunto de observación de variables y parámetros a partir de la formulación de un filtro extendido de Kalman. Todos los anteriores, no consideran la saturación del sistema y aplican los resultados obtenidos a casos particulares como el comentado anteriormente.

En el capítulo que sigue, se desarrolla un observador adaptativo, junto con un algoritmo recursivo que supera las limitaciones anteriores y puede ser aplicado en tiempo real y a cualquier sistema susceptible de entrar en saturación.

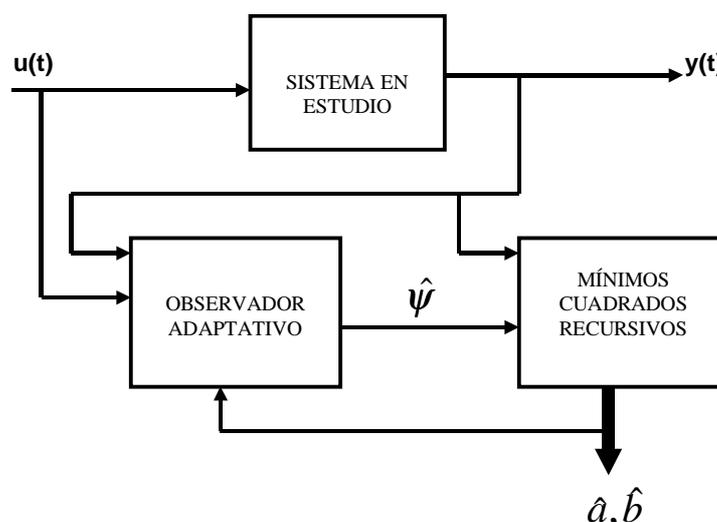


Figura 1. Disposición identificador+Observador.

Observador para el flujo de la máquina asíncrona.

A partir del modelo n° 22, reproducido aquí por comodidad:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r_s}{L_{rl}} & \omega & \frac{r_s}{L_{rl}} & 0 \\ -\omega & -\frac{r_s}{L_{rl}} & 0 & \frac{r_s}{L_{rl}} \\ \frac{r_r}{L_{rl}} & 0 & -\frac{r_r}{L_{rl}} & \omega - \omega_r \\ 0 & \frac{r_r}{L_{rl}} & -(\omega - \omega_r) & -\frac{r_r}{L_{rl}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s \cdot g(\Psi_{sx}) \\ -r_s \cdot g(\Psi_{sy}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$g(\Psi_{sx}) = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{sx}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{sx})^n}{\Psi_N^n} \right) \right] \quad (2)$$

$$g(\Psi_{sy}) = I_N \cdot \left[a \cdot \frac{\Psi_{sy}}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{(\Psi_{sy})^n}{\Psi_N^n} \right) \right]$$

$$i_{sx} = \frac{\Psi_{sx} - \Psi_{rx}}{L_{rl}} + g(\Psi_{sx}) \quad (3)$$

$$i_{sy} = \frac{\Psi_{sy} - \Psi_{ry}}{L_{rl}} + g(\Psi_{sy})$$

$$i_{rx} = \frac{\Psi_{rx} - \Psi_{sx}}{L_{rl}} \quad (4)$$

$$i_{ry} = \frac{\Psi_{ry} - \Psi_{sy}}{L_{rl}}$$

Se puede plantear el siguiente observador [Verghese 88], [Peterson 96], [Dawson 98], para los flujos estático y rotórico juntamente con la consideración de la variable de salida, corriente estática, y su error de estimación como variable de control del observador:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{sx} \\ \hat{\Psi}_{sy} \\ \hat{\Psi}_{rx} \\ \hat{\Psi}_{ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r_s}{L_{rl}} & \omega & \frac{r_s}{L_{rl}} & 0 \\ -\omega & -\frac{r_s}{L_{rl}} & 0 & \frac{r_s}{L_{rl}} \\ \frac{r_r}{L_{rl}} & 0 & -\frac{r_r}{L_{rl}} & \omega - \omega_r \\ 0 & \frac{r_r}{L_{rl}} & -(\omega - \omega_r) & -\frac{r_r}{L_{rl}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{sx} \\ \hat{\Psi}_{sy} \\ \hat{\Psi}_{rx} \\ \hat{\Psi}_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s \cdot g(\hat{\Psi}_{sx}) \\ -r_s \cdot g(\hat{\Psi}_{sy}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{sx} & -k_{sy} \\ k_{sy} & k_{sx} \\ k_{rx} & -k_{ry} \\ k_{ry} & k_{sx} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i}_{sx} - i_{sx} \\ \hat{i}_{sy} - i_{sy} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} k_{sx} & -k_{sy} \\ k_{sy} & k_{sx} \\ k_{rx} & -k_{ry} \\ k_{ry} & k_{sx} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i}_{sx} - i_{sx} \\ \hat{i}_{sy} - i_{sy} \end{pmatrix}$$

$$\hat{i}_{sx} = \frac{\hat{\Psi}_{sx} - \hat{\Psi}_{rx}}{L_{rl}} + g(\hat{\Psi}_{sx}) \quad (6)$$

$$\hat{i}_{sy} = \frac{\hat{\Psi}_{sy} - \hat{\Psi}_{ry}}{L_{rl}} + g(\hat{\Psi}_{sy})$$

$$\hat{i}_{rx} = \frac{\hat{\Psi}_{rx} - \hat{\Psi}_{sx}}{L_{rl}} \quad (7)$$

$$\hat{i}_{ry} = \frac{\hat{\Psi}_{ry} - \hat{\Psi}_{sy}}{L_{rl}}$$

donde: k_{sx} ; k_{sy} ; k_{rx} ; k_{ry} son las ganancias del observador.

Con el fin de simplificar posteriormente la síntesis del observador, se escoge una referencia fija ($\omega = 0$), de forma que la estructura del observador, escrita en forma vectorial, es la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{\Psi}_s}{dt} &= \underline{u}_s - r_s \cdot \left(\frac{\hat{\underline{\Psi}}_s - \hat{\underline{\Psi}}_r}{L_{rl}} + g(\hat{\underline{\Psi}}_s) \right) + K_s \cdot (\hat{\underline{i}}_s - \underline{i}_s) \\ \frac{d\underline{\hat{\Psi}}_r}{dt} &= \underline{u}_r - r_r \cdot \left(\frac{\hat{\underline{\Psi}}_r - \hat{\underline{\Psi}}_s}{L_{rl}} \right) + j \cdot \omega_r \cdot \hat{\underline{\Psi}}_r + K_r \cdot (\hat{\underline{i}}_s - \underline{i}_s) \end{aligned} \quad (8)$$

$$K = \begin{pmatrix} K_s \\ K_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s & 0 \\ 0 & r_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{sx} + j \cdot k_{sy} \\ k_{rx} + k_{ry} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\underline{i}}_s = \frac{\hat{\underline{\Psi}}_s - \hat{\underline{\Psi}}_r}{L_{rl}} + g(\hat{\underline{\Psi}}_s)$$

El ajuste de la ganancia del observador es complicado debido a la no linealidad del sistema, lo que inhabilita los métodos clásicos de cálculo. Como una aproximación al ajuste de las mismas puede considerarse el modelo sin saturación. Bajo la hipótesis de trabajo en la zona lineal puede aplicarse la fórmula de Ackermann para la valoración de las ganancias. En este caso el modelo considerado es el siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \underline{\Psi}_s \\ \underline{\Psi}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_s \cdot \left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} \right) & \frac{r_s}{L_{rl}} \\ \frac{r_r}{L_{rl}} & -\frac{r_r}{L_{rl}} + j \cdot \omega_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\Psi}_s \\ \underline{\Psi}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_s \\ u_r \end{pmatrix} + K \cdot (\hat{i}_s - i_s) \quad (9)$$

$$\hat{i}_s = \left(\left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} \right) - \frac{1}{L_{rl}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \underline{\Psi}_s \\ \underline{\Psi}_r \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(\omega_r) \cdot \hat{x} + B \cdot u + K \cdot C \cdot (\hat{x} - x) \quad (10)$$

donde:

$$x = \begin{pmatrix} \underline{\Psi}_s \\ \underline{\Psi}_r \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_s \\ u_r \end{pmatrix} \quad A(\omega_r) = \begin{pmatrix} -r_s \cdot \left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} \right) & \frac{r_s}{L_{rl}} \\ \frac{r_r}{L_{rl}} & -\frac{r_r}{L_{rl}} + j \cdot \omega_r \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \left(\left(\frac{1}{L_{rl}} + \frac{1}{L_m} \right) - \frac{1}{L_{rl}} \right)$$

Si p_1 y p_2 són los polos complejos de una matriz 2x2, el polinomio característico del observador anterior puede expresarse como:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + c_1 \cdot \lambda + c_2 = \lambda^2 - (p_1 + p_2) \cdot \lambda + p_1 \cdot p_2 \quad (12)$$

La valoración de las ganancias a través de la formula de Ackermann lleva a:

$$K = P(A(\omega_r)) \cdot W_0^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (A^2 - (p_1 + p_2) \cdot A + p_1 \cdot p_2 \cdot I) \cdot W_0^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$k = \begin{pmatrix} k_{sx} + j \cdot k_{sy} \\ k_{rx} + j \cdot k_{ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s & 0 \\ 0 & r_r \end{pmatrix}^{-1} \cdot K \quad (14)$$

donde W_0 es la matriz de observabilidad:

$$W_0 = \begin{pmatrix} C \\ C \cdot A \end{pmatrix} \quad (15)$$

La expresión obtenida para las ganancias resulta poco operativa para ser aplicada directamente; en el anexo II se encuentra desarrollada a partir de las utilidades que ofrece MAPLE. Si se toma como ejemplo la máquina nº 2 y los polos del observador situados en $s = -1500$ se obtienen los siguientes valores para las ganancias:

$$k = \begin{pmatrix} k_{sx} + j \cdot k_{sy} \\ k_{rx} + j \cdot k_{ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.369 + j \cdot 0 \\ -21.22 - j \cdot 2.31 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Modelo discreto para el observador.

La implementación digital del algoritmo para el observador, hace necesaria la utilización del modelo discretizado del mismo. Usando frecuencias de muestreo elevadas la utilización del operador δ [Middleton 90] para la discretización, garantiza una mejor estabilidad numérica para el mismo y una mayor aproximación al modelo continuo diseñado. El modelo discreto correspondiente puede expresarse como:

$$\delta x = F \cdot x + G \cdot u \quad (17)$$

donde:

$$\delta x = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad (18)$$

Donde t denota el tiempo discretamente considerado: $t = n \cdot h$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Si, como es habitual, las señales externas son captadas a través de un convertidor A/D junto con un bloqueador de orden cero, y se supone que la velocidad de rotación se mantiene constante durante el intervalo de muestreo (hipótesis válida si la frecuencia de muestreo es elevada), se pueden expresar las matrices del modelo como:

$$F = \frac{e^{A \cdot h} - 1}{h}; \quad G = A^{-1} \cdot \frac{e^{A \cdot h} - 1}{h} \cdot B \quad (19)$$

,asimismo, pueden expresarse como:

$$F = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A^k \cdot h^{k-1}}{k!}; \quad G = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(A \cdot h)^{k-1}}{k!} \cdot B \quad (20)$$

En este caso si se considera una aproximación de primer orden se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Psi_s}{dt} &= \frac{\Psi_s(t+h) - \Psi_s(t)}{h} = \underline{u}_s(t) - r_s \cdot \left(\frac{\Psi_s(t) - \Psi_r(t)}{L_{rl}} + g(\Psi_s(t)) \right) + K_s \cdot (\hat{i}_s(t) - i_s(t)) \\ \frac{\delta \Psi_r}{dt} &= \frac{\Psi_r(t+h) - \Psi_r(t)}{h} = \underline{u}_r(t) - r_r \cdot \left(\frac{\Psi_r(t) - \Psi_s(t)}{L_{rl}} \right) + j \cdot \omega_r \cdot \Psi_r(t) + K_r \cdot (\hat{i}_s(t) - i_s(t)) \\ K &= \begin{pmatrix} K_s \\ K_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s & 0 \\ 0 & r_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{sx} + j \cdot k_{sy} \\ k_{rx} + j \cdot k_{ry} \end{pmatrix} \\ \hat{i}_s(t) &= \left(\frac{\Psi_s(t) - \Psi_r(t)}{L_{rl}} + g(\Psi_s(t)) \right) \end{aligned} \quad (21)$$

La aplicación del método anterior, considerando una frecuencia de muestreo de 10 kHz ($h=0.0001s$), se presenta en los gráficos que siguen. Los resultados se comparan con los obtenidos en la simulación del transitorio de arranque de la máquina en carga, y una posterior modificación a régimen de vacío. Obsérvese la correcta convergencia a los valores reales. En todos los gráficos se suponen unidades coherentes y en los gráficos correspondientes a errores se representan **errores absolutos**. Obsérvese que el ajuste del observador se ha realizado suponiendo un sistema de parámetros constantes (sin consideración de la saturación); en cambio el observador realmente implementado es el correspondiente al modelo nº 22, considerando la saturación. Se han realizado varias series de simulaciones con diversos regímenes de carga y frecuencias de alimentación diferentes.

Se han estudiado cuatro casos:

- tensión y frecuencia nominal (220 V / 50 Hz);
- tensión y frecuencia reducida manteniendo constante la relación U/f ($U' / 5\text{Hz}$);
- Tensión nominal y frecuencia aumentada un 50 % (220 V / 75 Hz) – zona de debilitamiento del campo;
- tensión nominal y frecuencia un 50 % inferior a la nominal (220 V / 25 Hz) – zona extremadamente saturada.

Se han considerado además series de casos en los que los parámetros supuestos varíen en un +10 %, excepto en la resistencia rotórica que se ha considerado una variación del + 70 %.

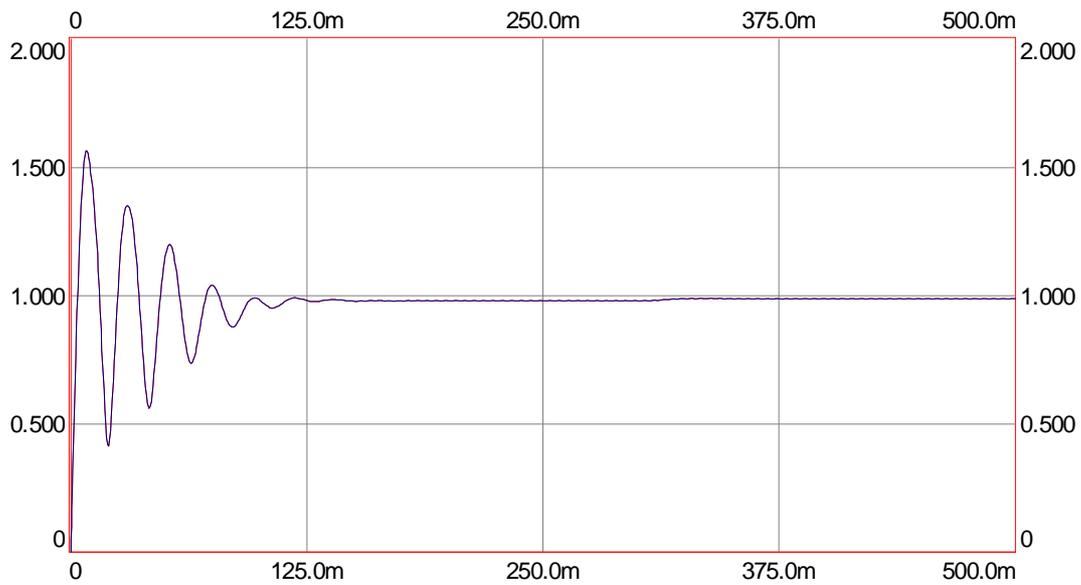


Figura 2. Flujo estático calculado y observado. Alimentación a $U_N - 50$ Hz.

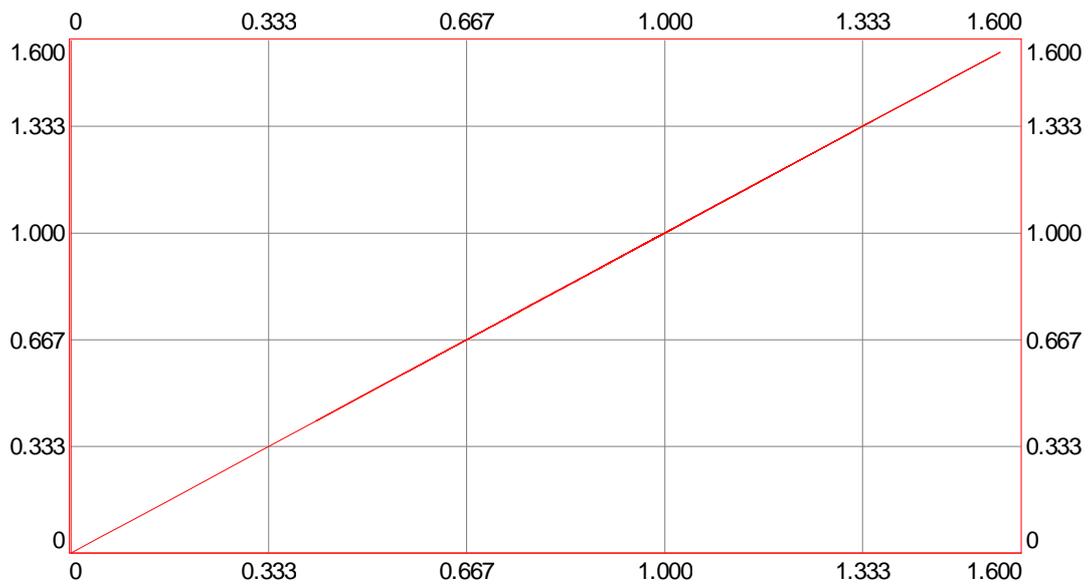


Figura 3. Flujo estático calculado en función del flujo estático observado. Alimentación a $U_N - 50$ Hz.



Figura 4. Error en flujo estático. Alimentación a $U_N = 50$ Hz.

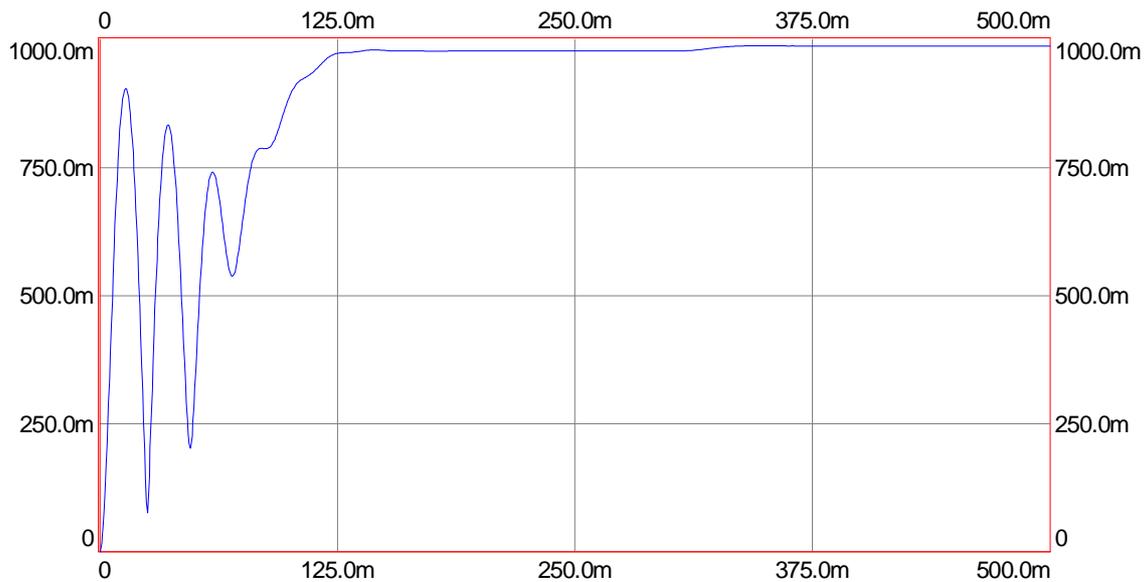


Figura 5. Flujo rotórico calculado y observado. Alimentación a $U_N = 50$ Hz.

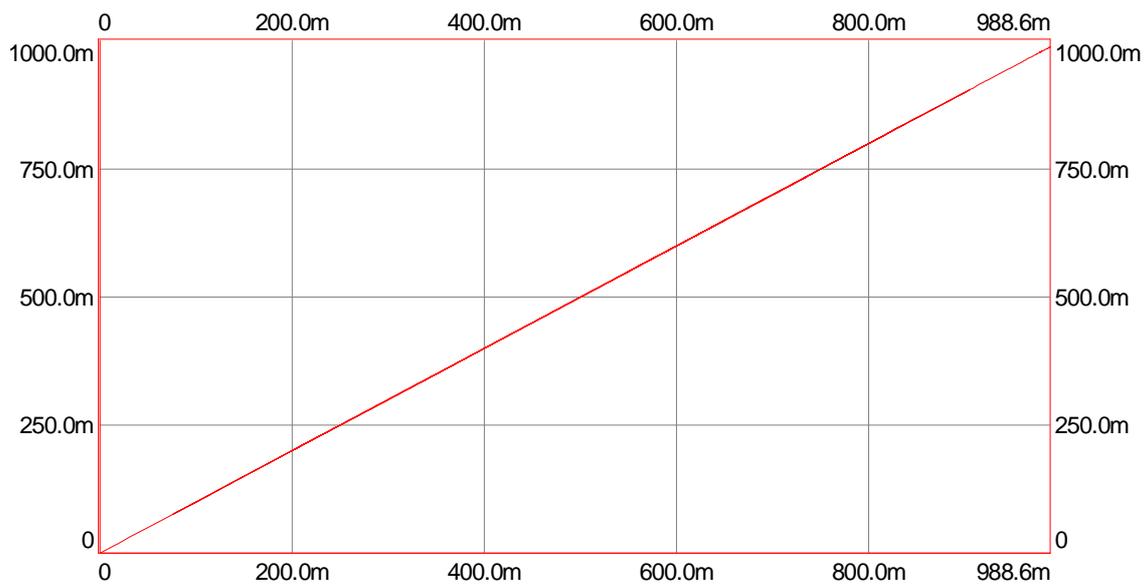


Figura 6. Flujo rotórico calculado en función del flujo rotórico observado.
Alimentación a $U_N - 50$ Hz.

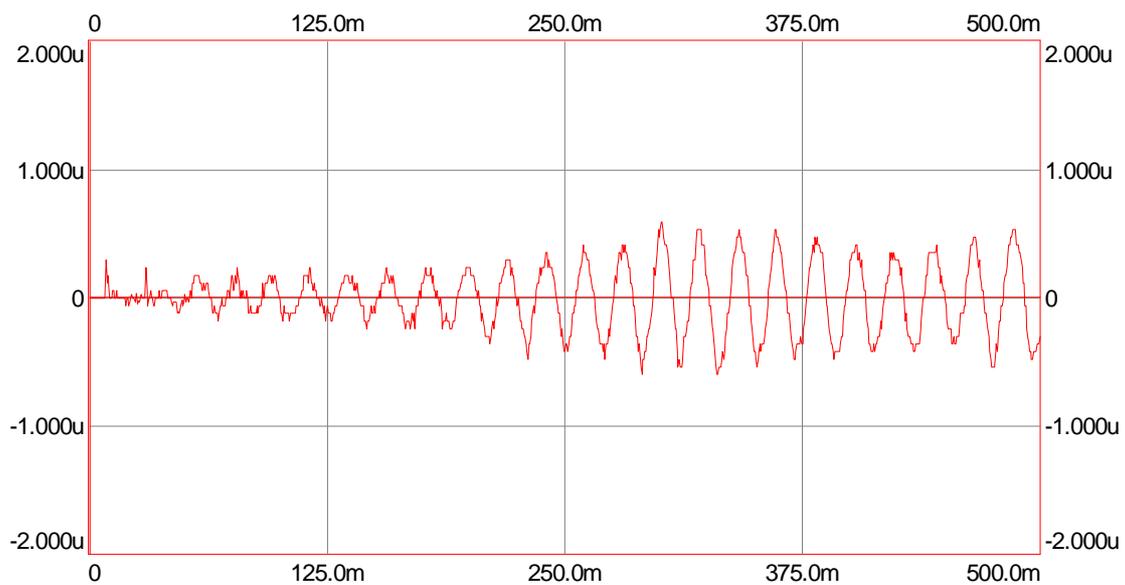


Figura 7. Error en flujo rotórico. Alimentación a $U_N - 50$ Hz.

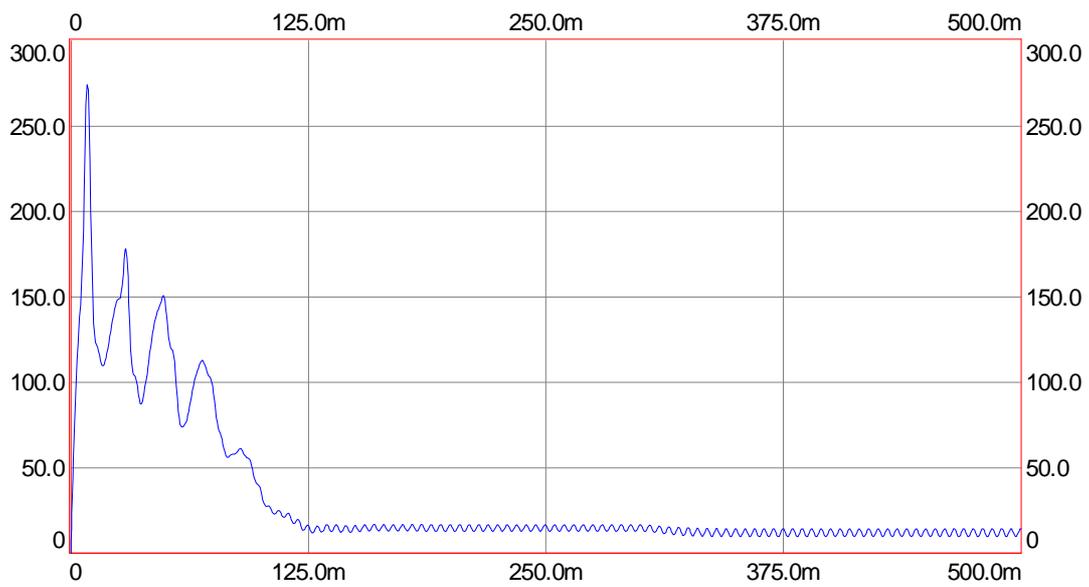


Figura 8. Corriente estática calculada y observada. Alimentación a $U_N - 50$ Hz.

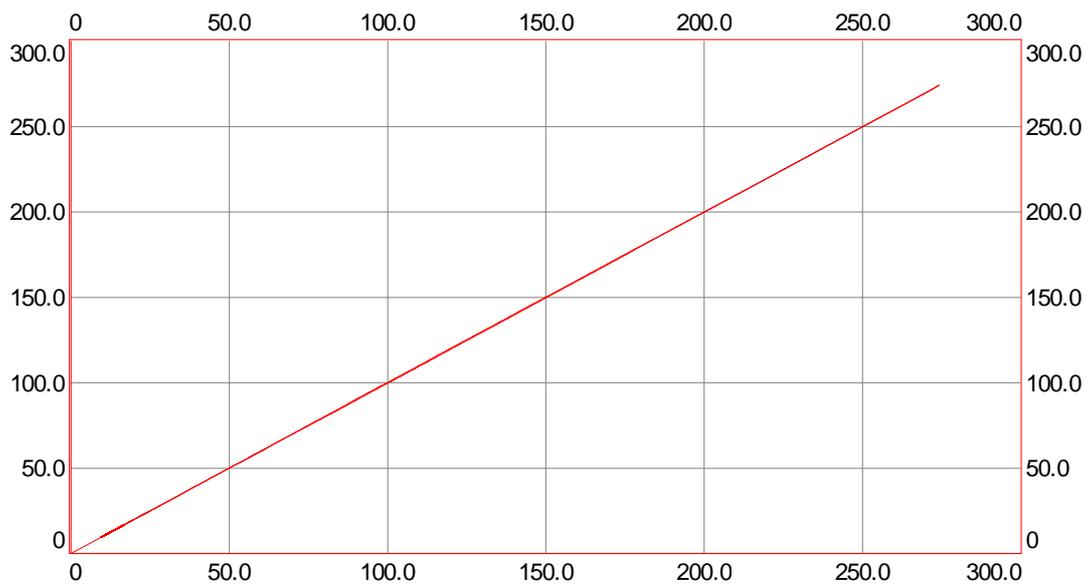


Figura 9. Corriente estática calculada como función de la corriente estática observada. Alimentación a $U_N - 50$ Hz.



Figura 10. Error en corriente. Alimentación a U_N – 50 Hz.

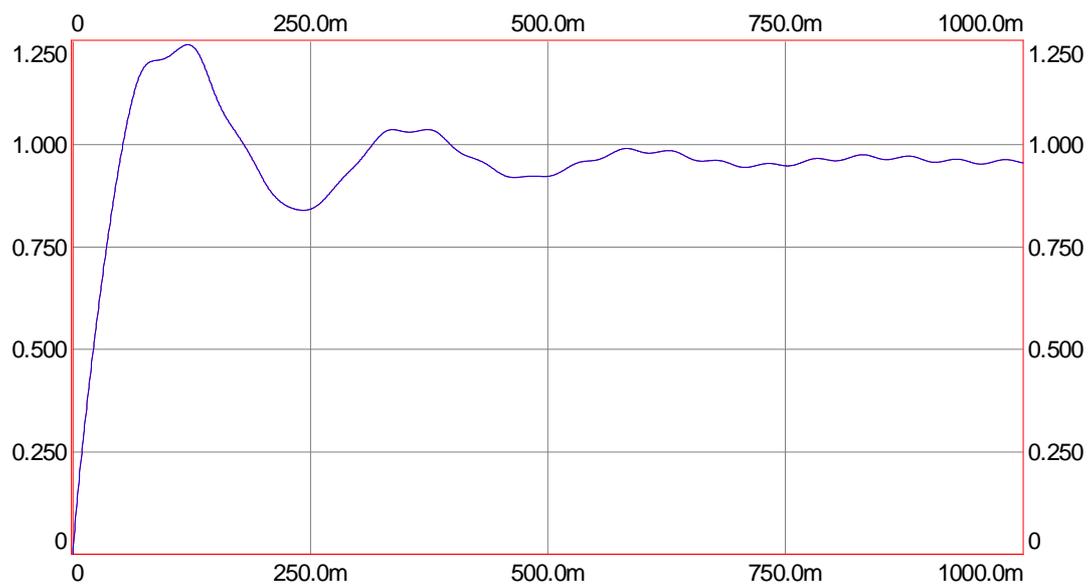


Figura 11. Flujo estático calculado y observado. Alimentación a U' – 5 Hz.

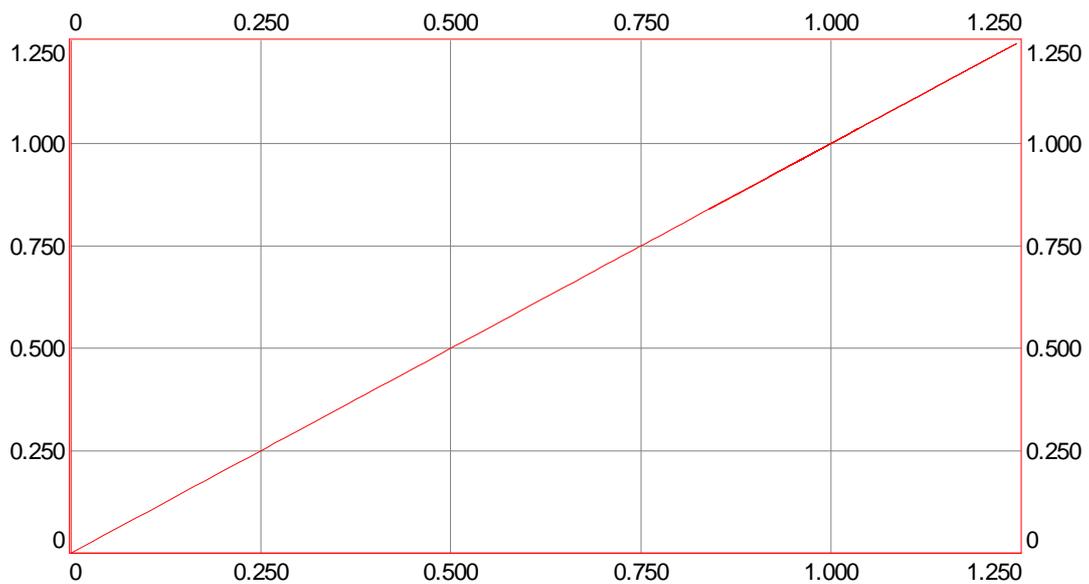


Figura 12. Flujo estático calculado en función del flujo estático observado. Alimentación a U' – 5 Hz.

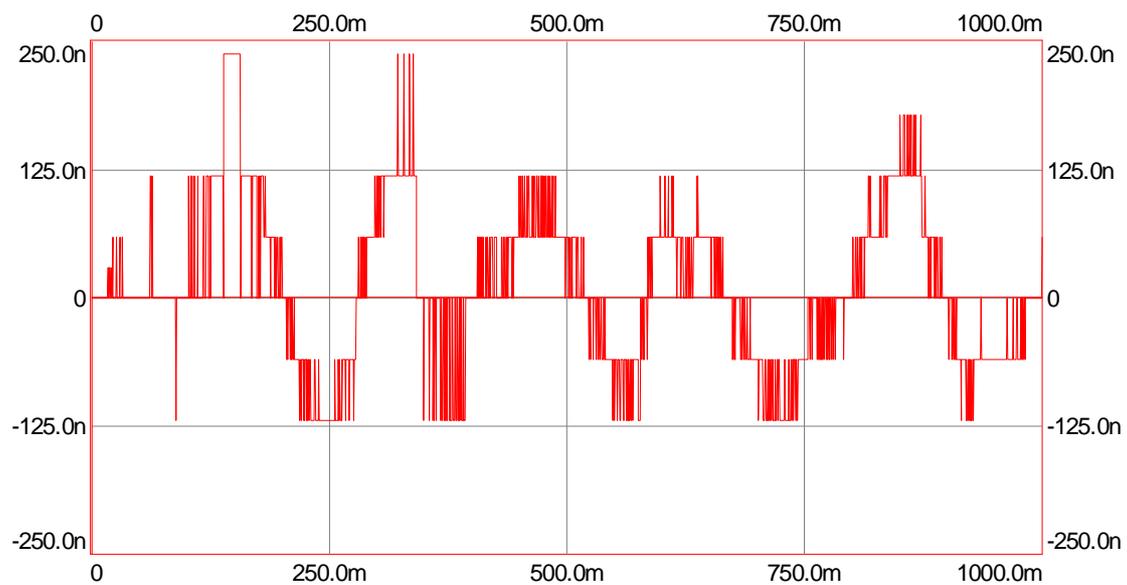


Figura 13. Error en flujo estático. Alimentación a U' – 5 Hz.

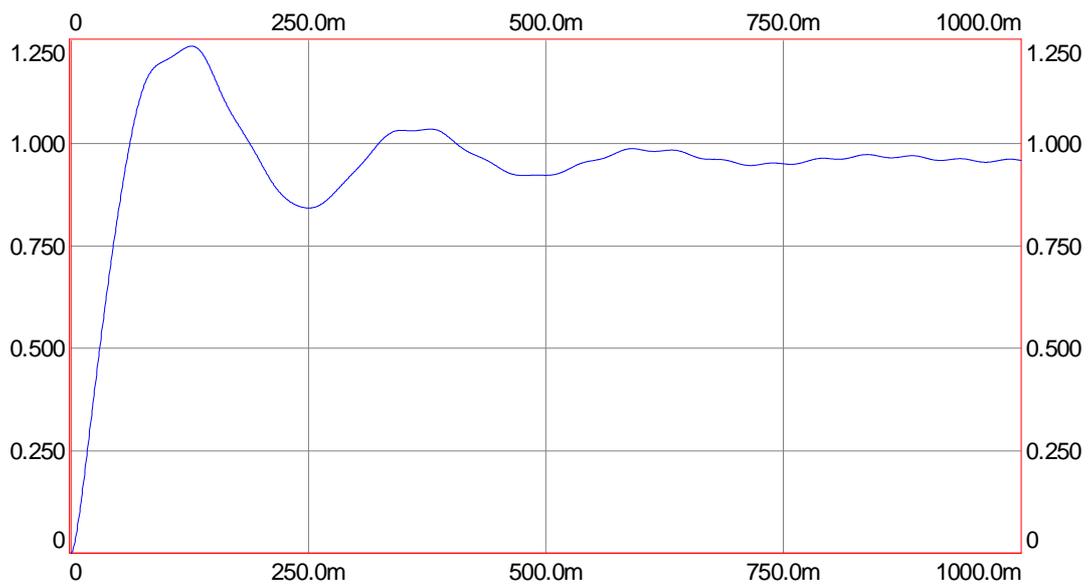


Figura 14. Flujo rotórico calculado y observado. Alimentación a U' – 5 Hz.

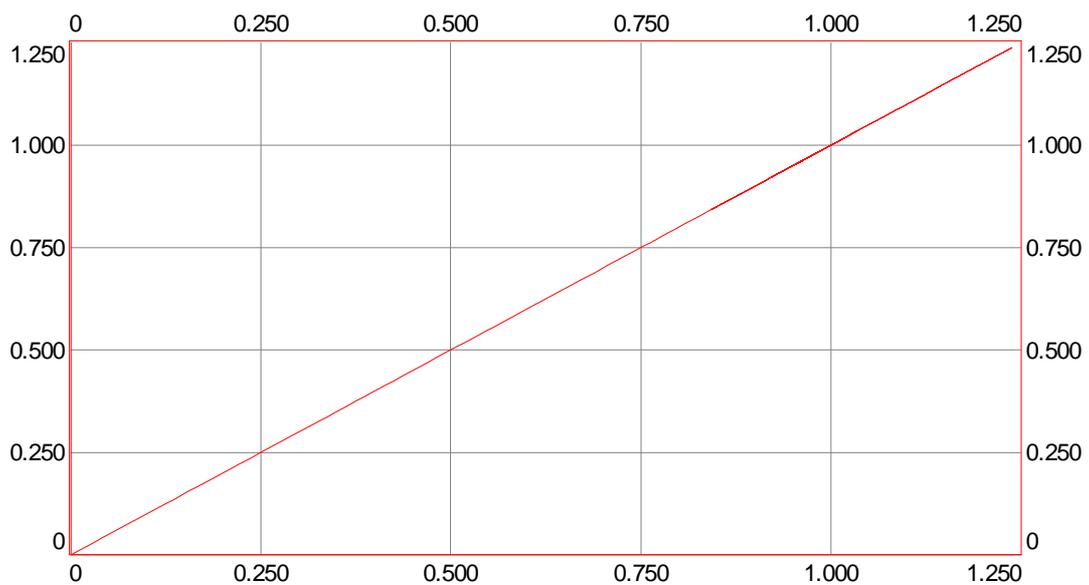


Figura 15. Flujo rotórico calculado en función del flujo rotórico observado. Alimentación a U' – 5 Hz.

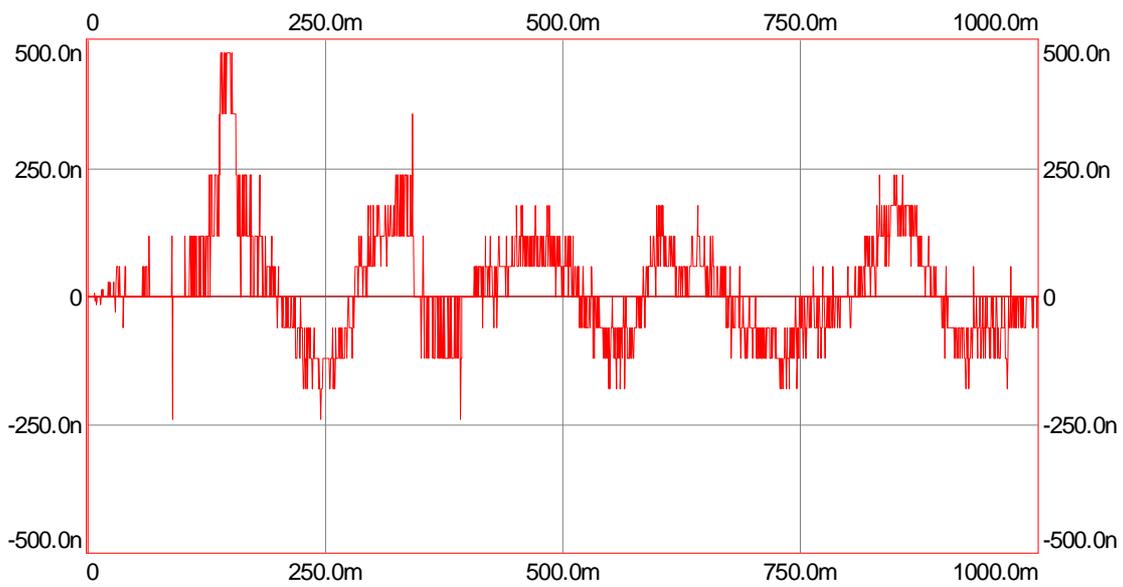


Figura 16. Error en flujo rotórico. Alimentación a U' – 5 Hz.

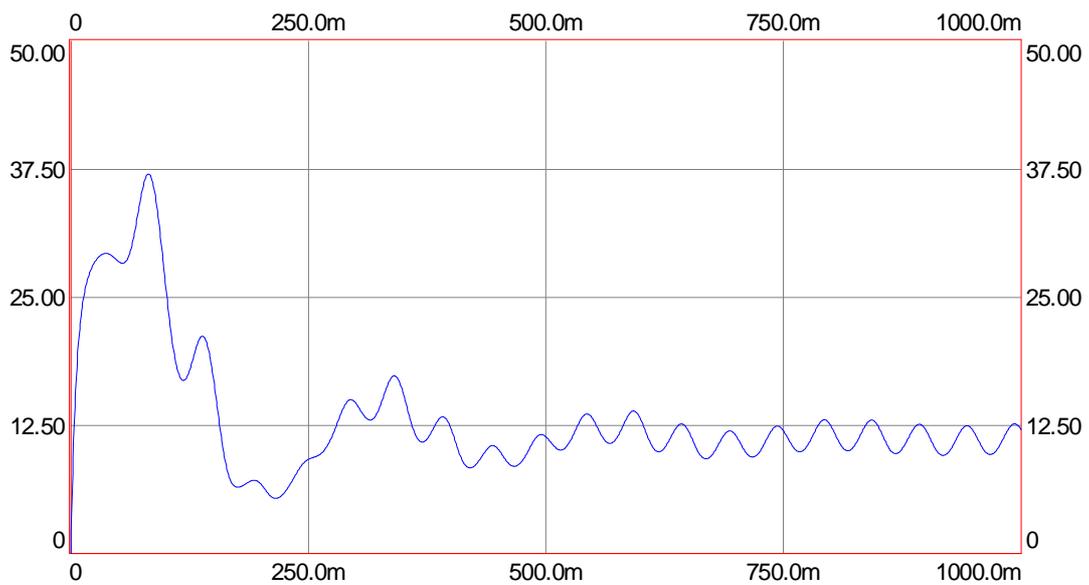


Figura 17. Corriente estática calculada y observada. Alimentación a U' – 5 Hz.

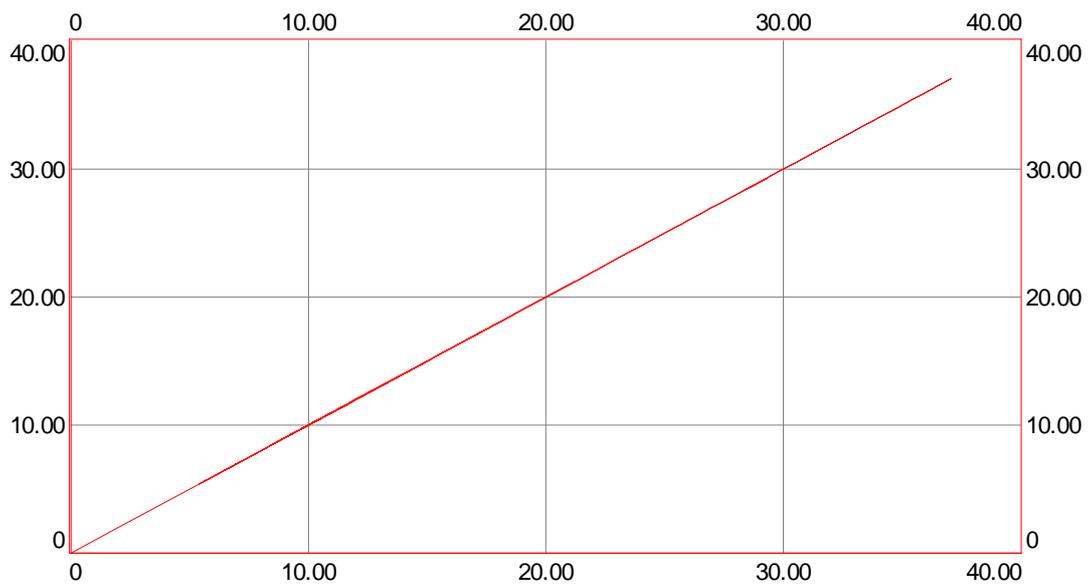


Figura 18. Corriente estática calculada como función de la corriente estática observada. Alimentación a U' – 5 Hz.

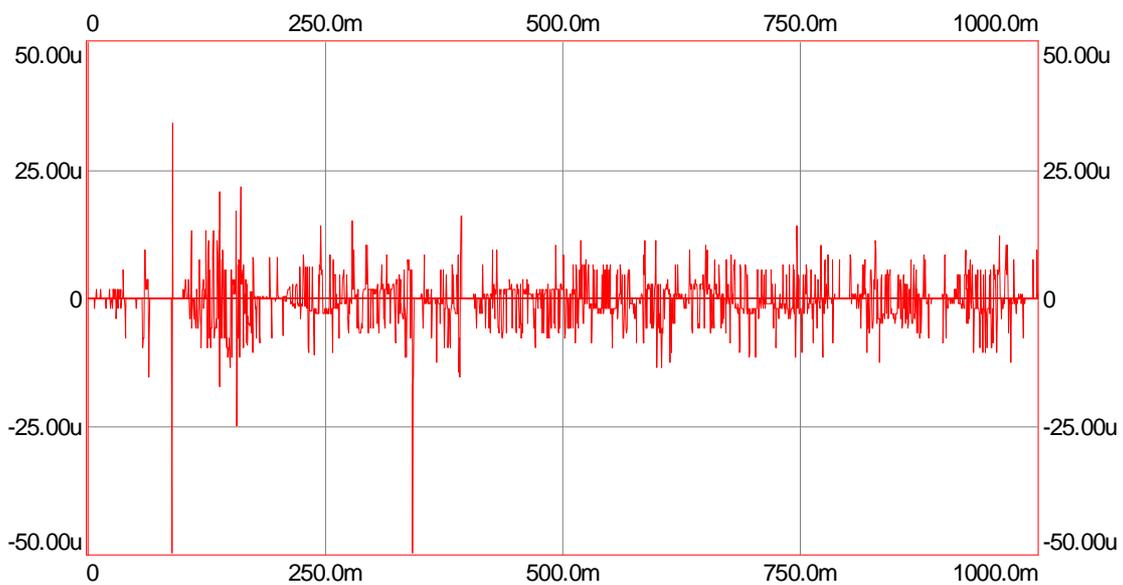


Figura 19. Error en corriente. Alimentación a U' – 5 Hz.

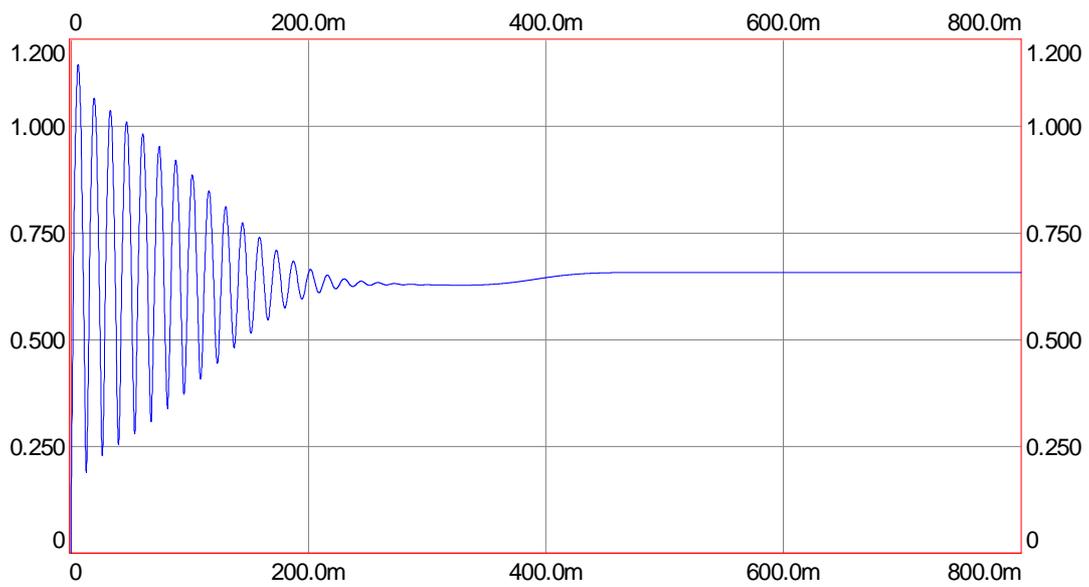


Figura 20. Flujo estático calculado y observado. Alimentación a $U_N - 75$ Hz.

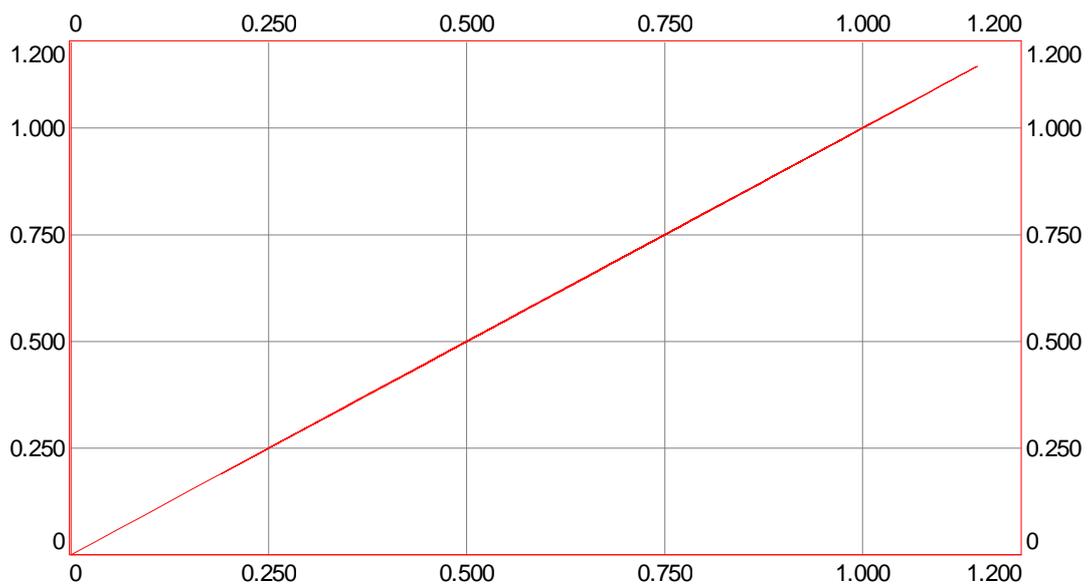


Figura 21. Flujo estático calculado en función del flujo estático observado. Alimentación a $U_N - 75$ Hz.

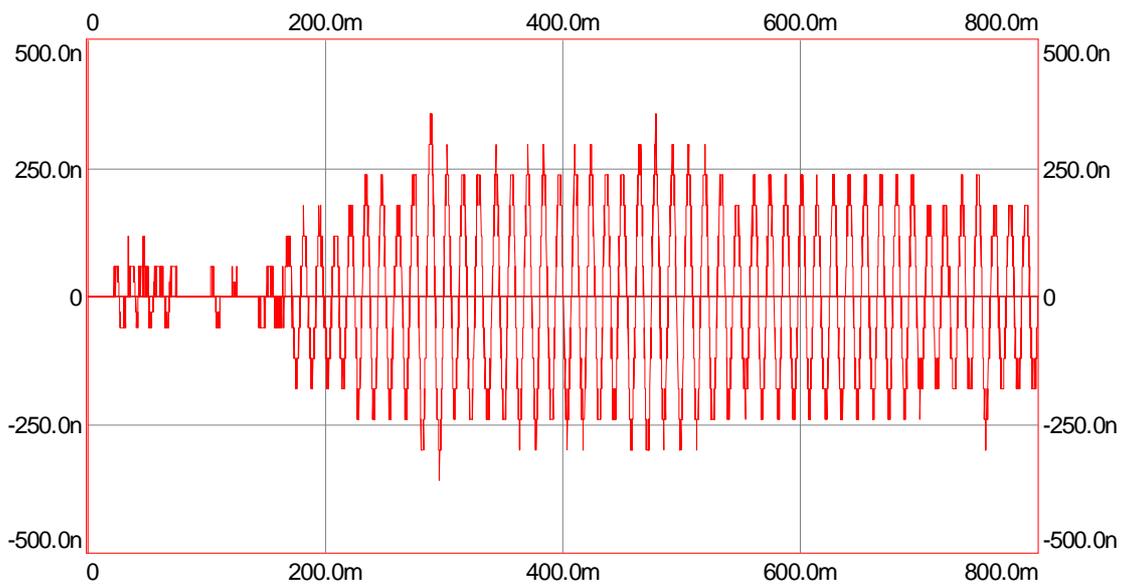


Figura 22. Error en flujo estático. Alimentación a $U_N - 75$ Hz.

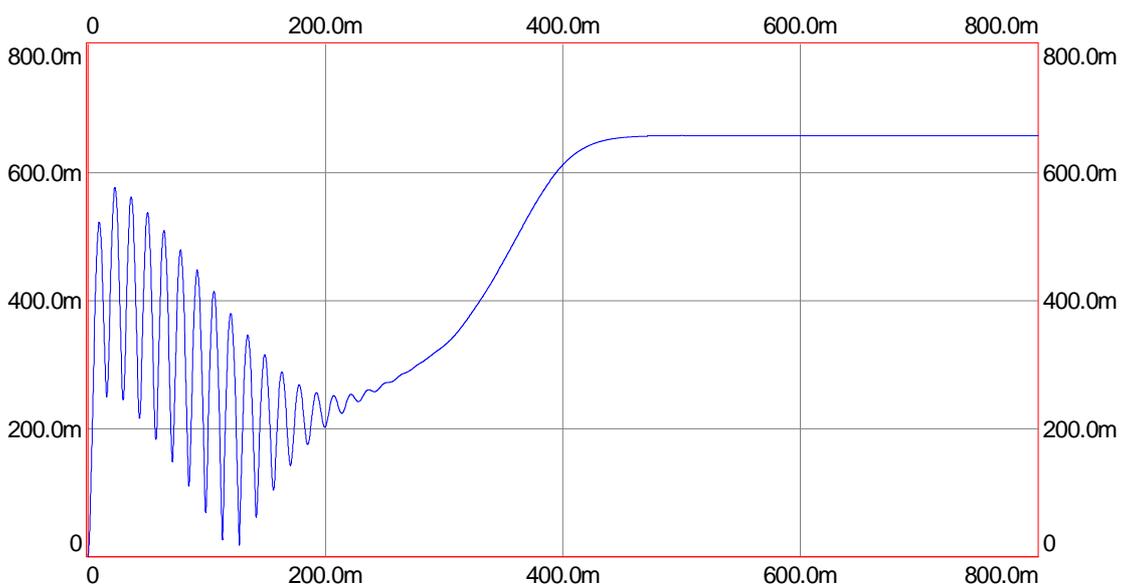


Figura 23. Flujo rotórico calculado y observado. Alimentación a $U_N - 75$ Hz.

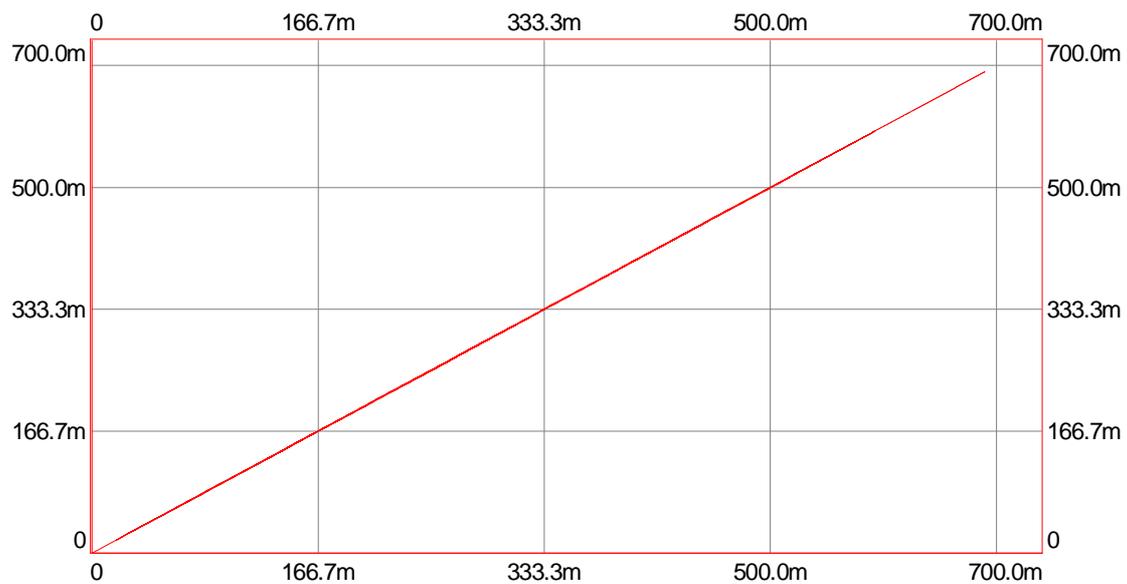


Figura 24. Flujo rotórico calculado en función del flujo rotórico observado.
Alimentación a $U_N - 75$ Hz.

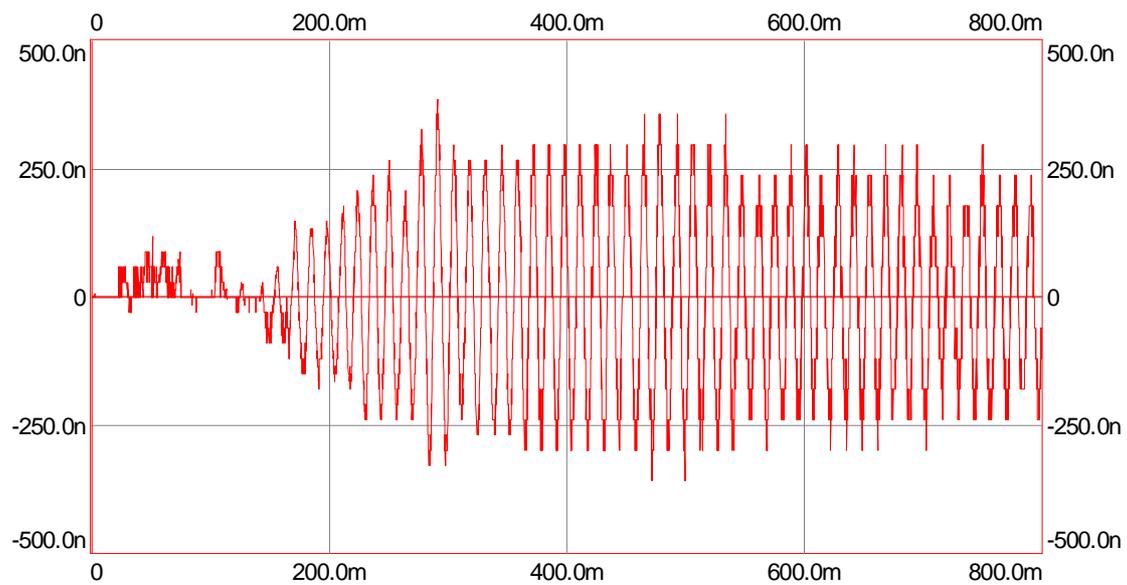


Figura 25. Error en flujo rotórico. Alimentación a $U_N - 75$ Hz.

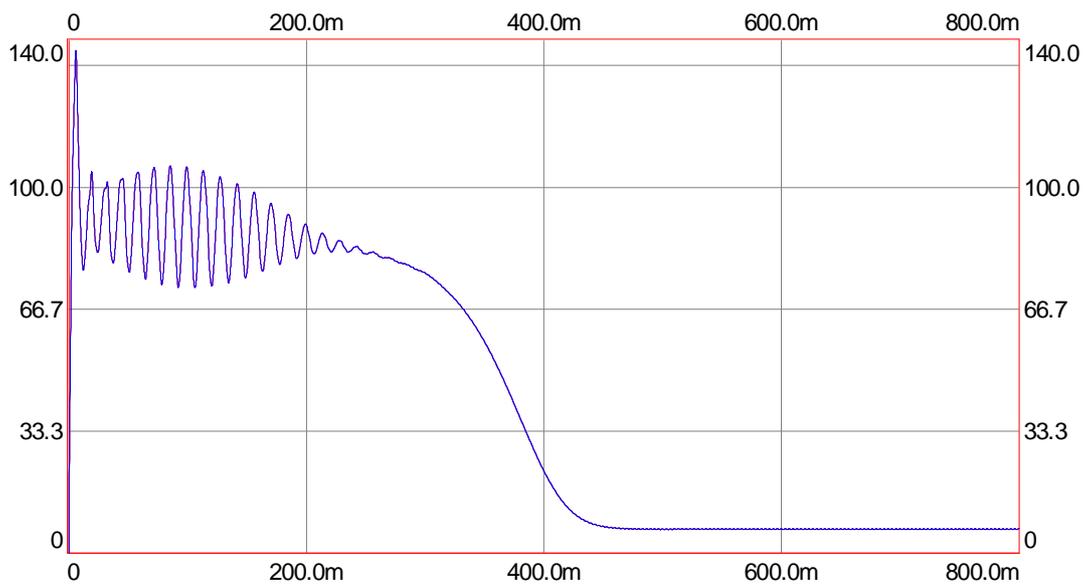


Figura 26. Corriente estática calculada y observada. Alimentación a $U_N - 75$ Hz.

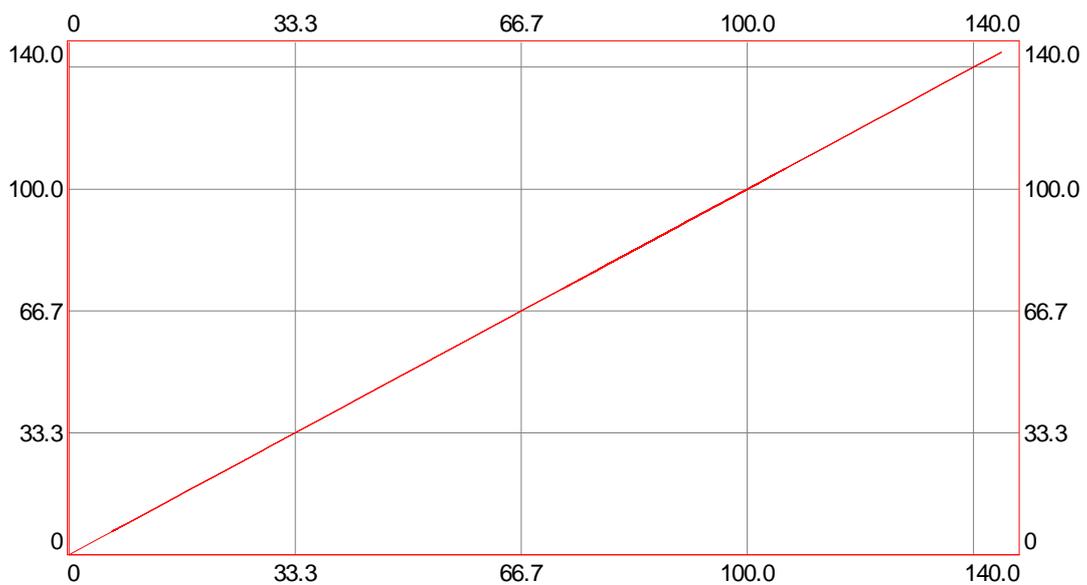


Figura 27. Corriente estática calculada como función de la corriente estática observada. Alimentación a $U_N - 75$ Hz.

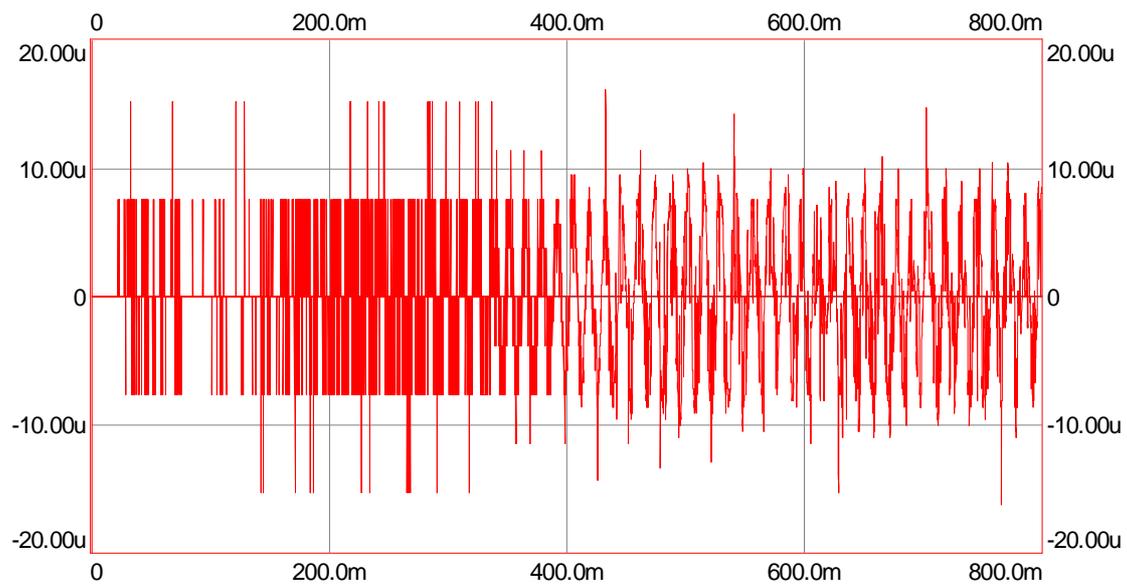


Figura 28. Error en corriente estática. Alimentación a $U_N = 75$ Hz.

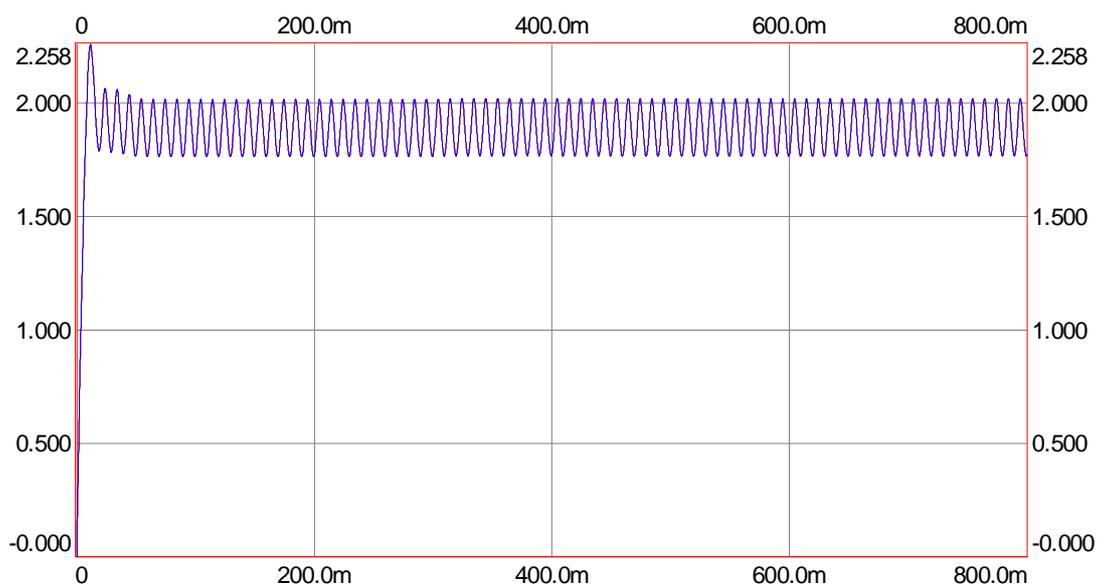


Figura 29. Flujo estático calculado y observado. Alimentación a $U_N = 25$ Hz.

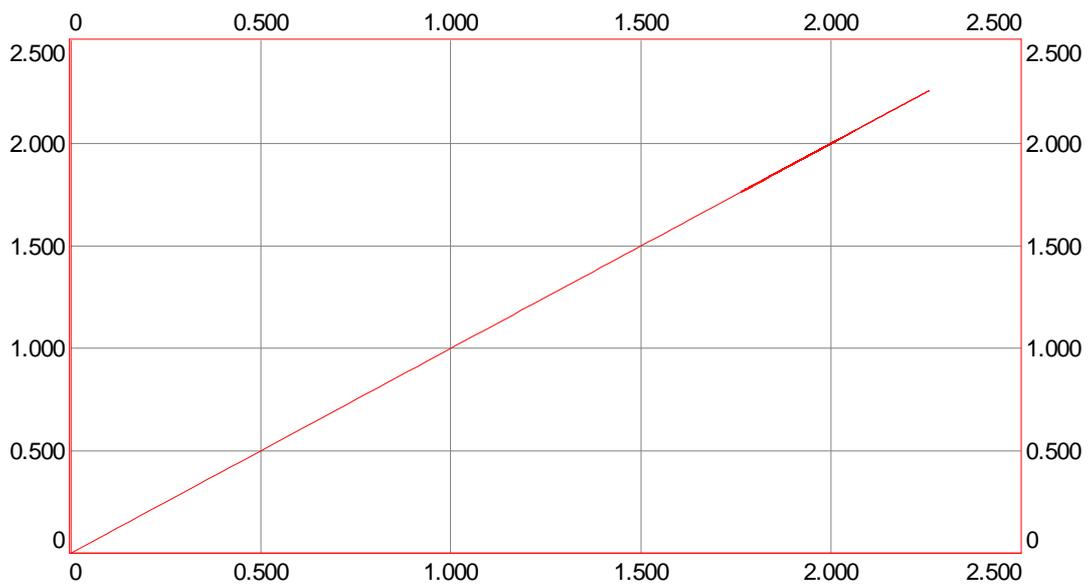


Figura 30. Flujo estático calculado en función del flujo estático observado.
Alimentación a $U_N - 25$ Hz.

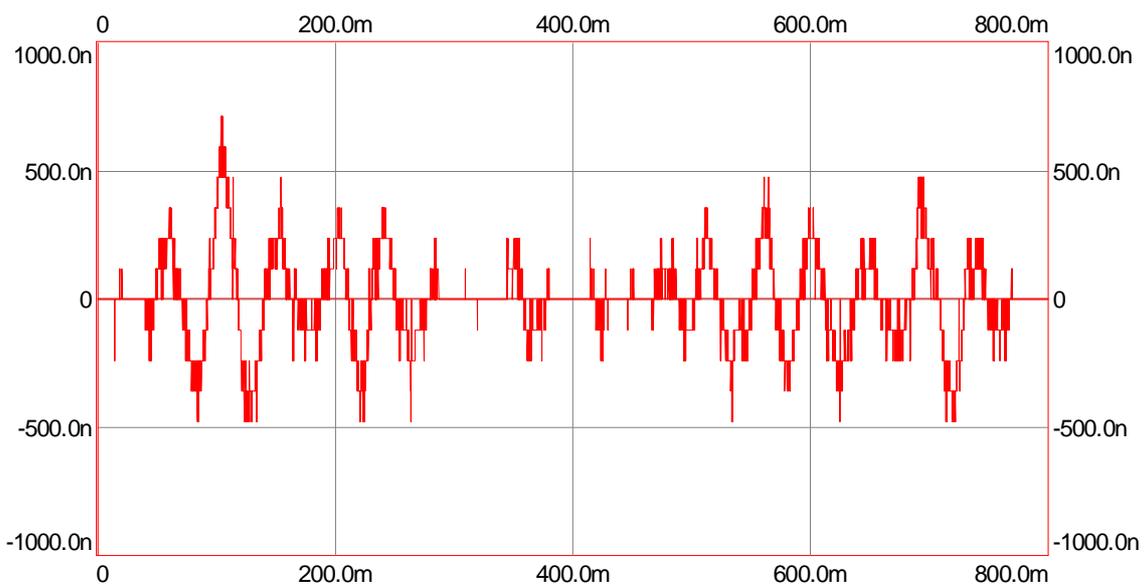


Figura 31. Error en flujo estático. Alimentación a $U_N - 25$ Hz.

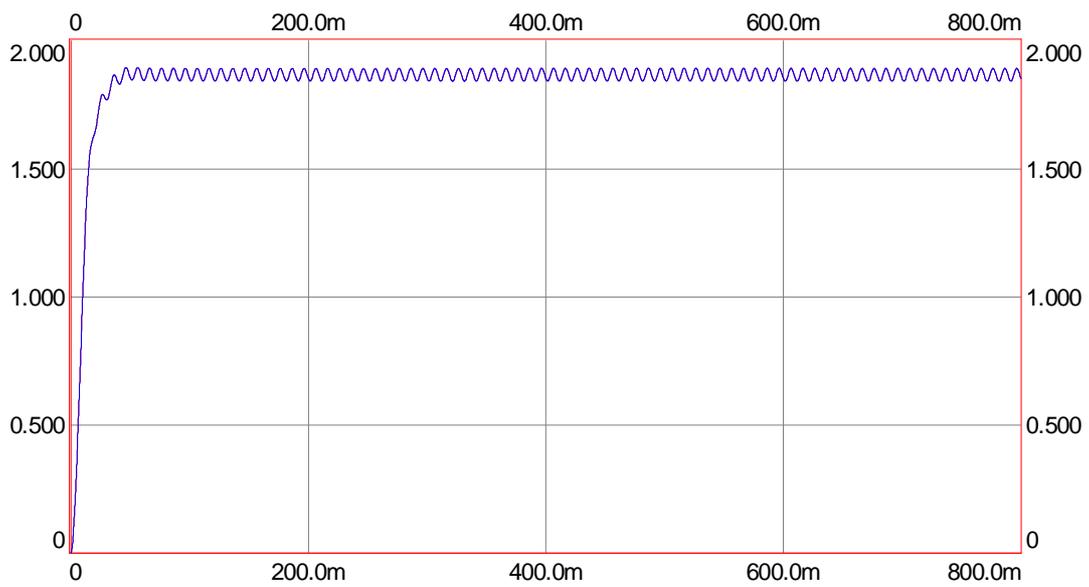


Figura 32. Flujo rotórico calculado y observado. Alimentación a $U_N - 25$ Hz.

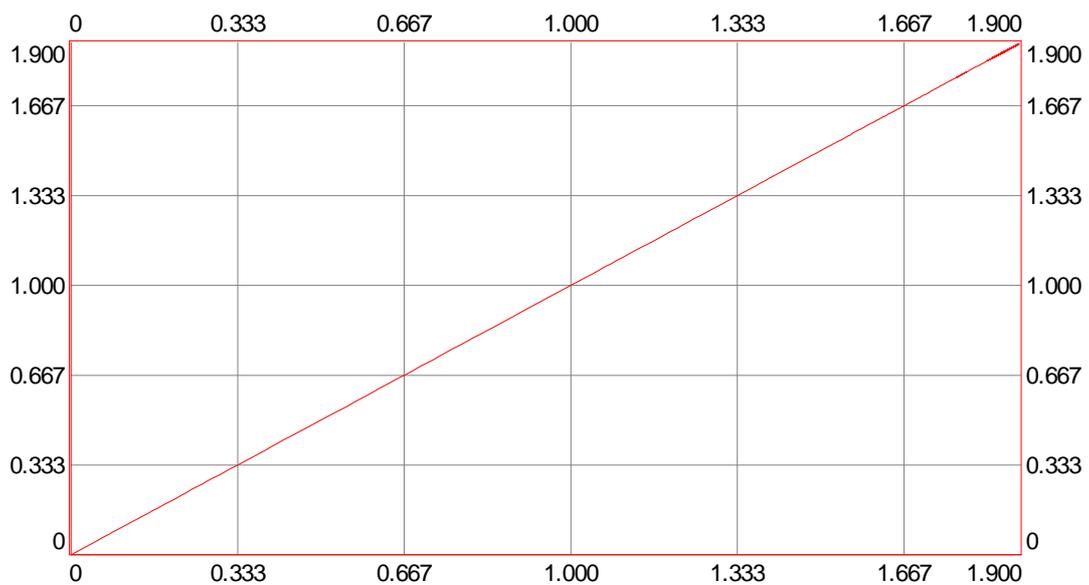


Figura 33. Flujo rotórico calculado en función del flujo rotórico observado.
Alimentación a $U_N - 25$ Hz.

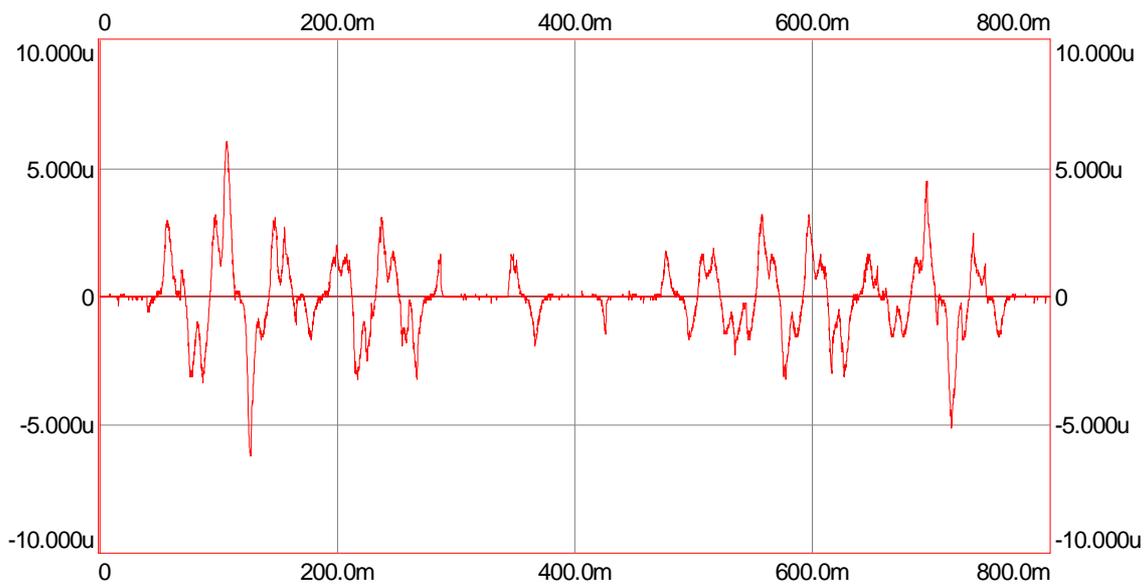


Figura 34. Error en flujo rotórico. Alimentación a $U_N - 25$ Hz.

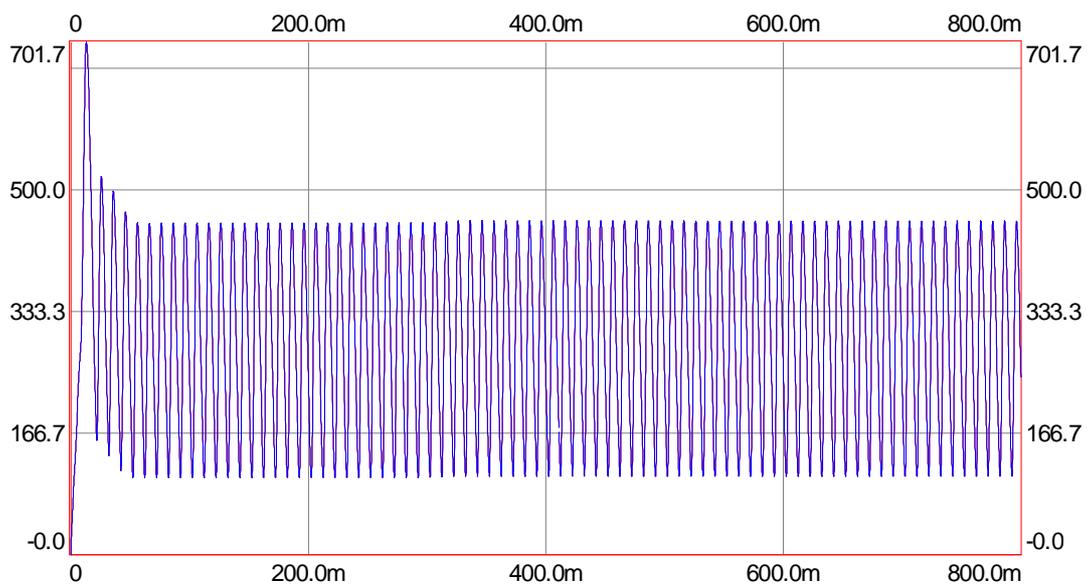


Figura 35. Corriente estática calculada y observada. Alimentación a $U_N - 25$ Hz.

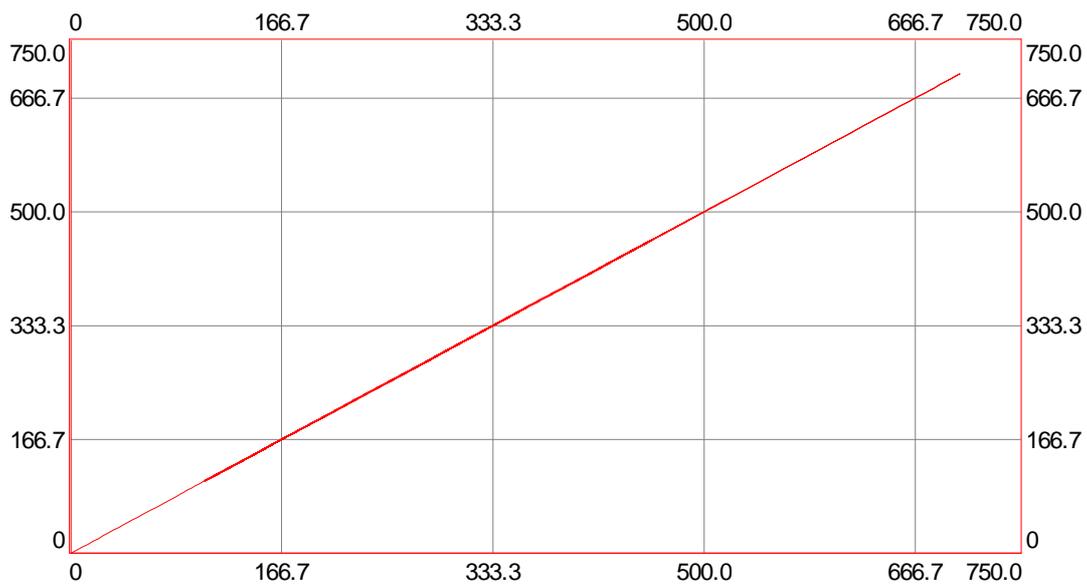


Figura 36. Corriente estática calculada como función de la corriente estática observada. Alimentación a $U_N - 25$ Hz.

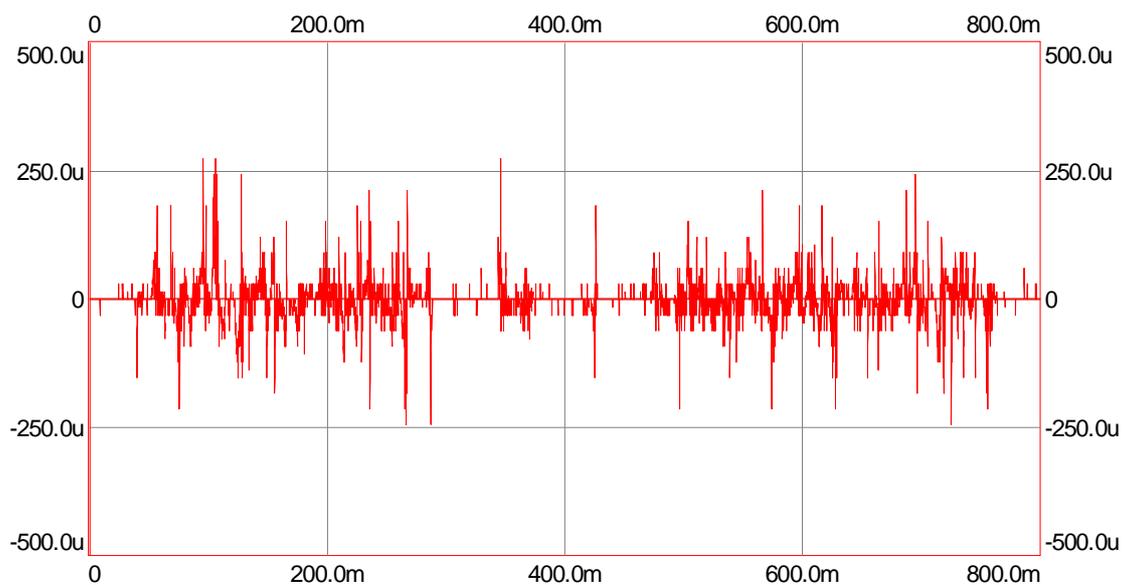


Figura 37. Error en corriente. Alimentación a $U_N - 25$ Hz.

La serie que sigue considera una desviación máxima en los parámetros del modelo considerado en un +10%, excepto en la resistencia rotórica que se ha considerado una variación del +70%.

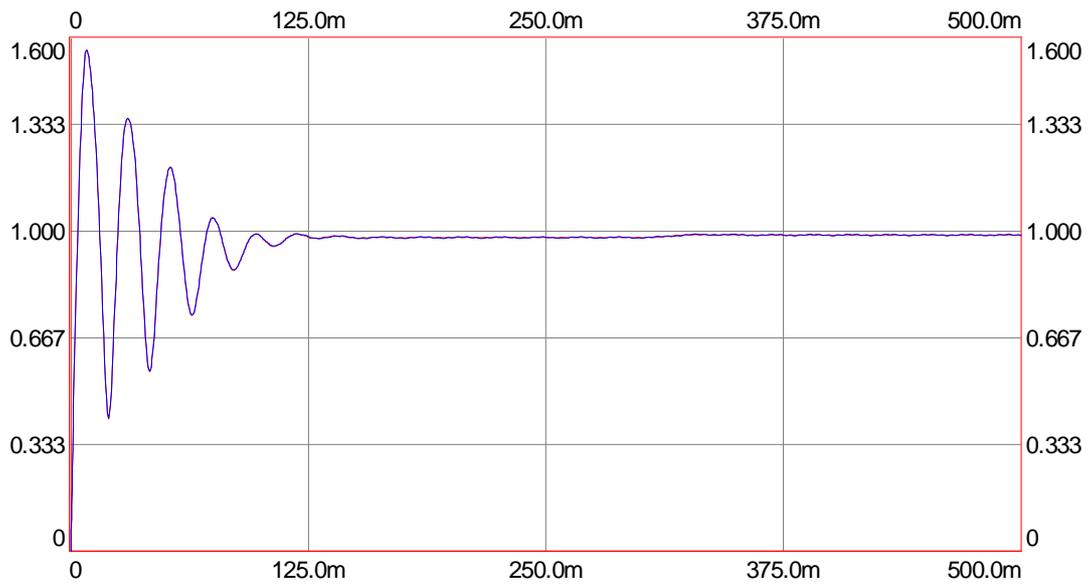


Figura 38. Flujo estático calculado y observado. Alimentación a $U_N - 50$ Hz. Parámetros modificados en + 10% (R_r 70%).

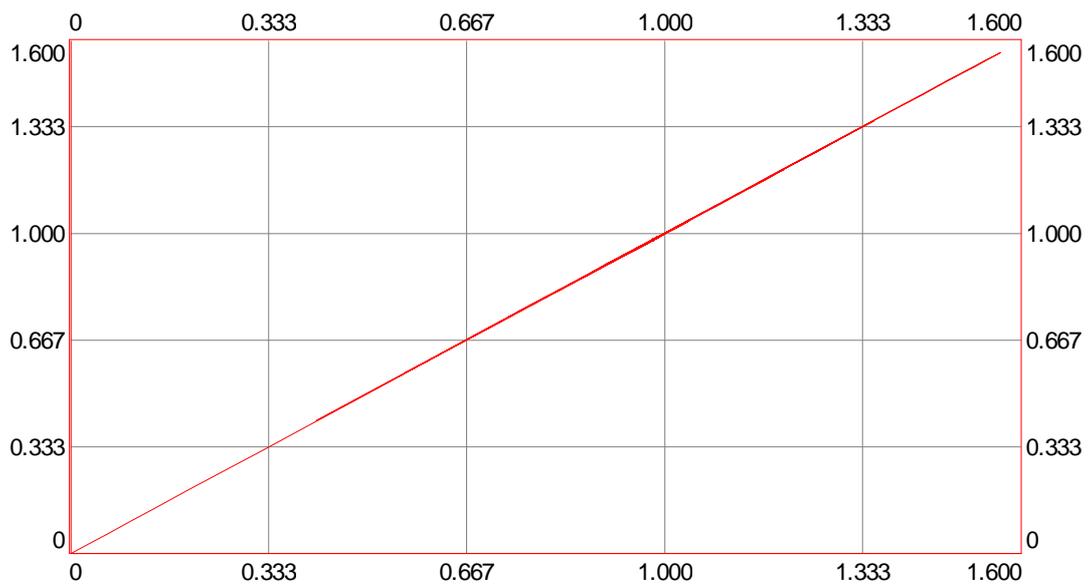


Figura 39. Flujo estático calculado en función del flujo estático observado. Alimentación a $U_N - 50$ Hz. Parámetros modificados en + 10% (R_r 70%).

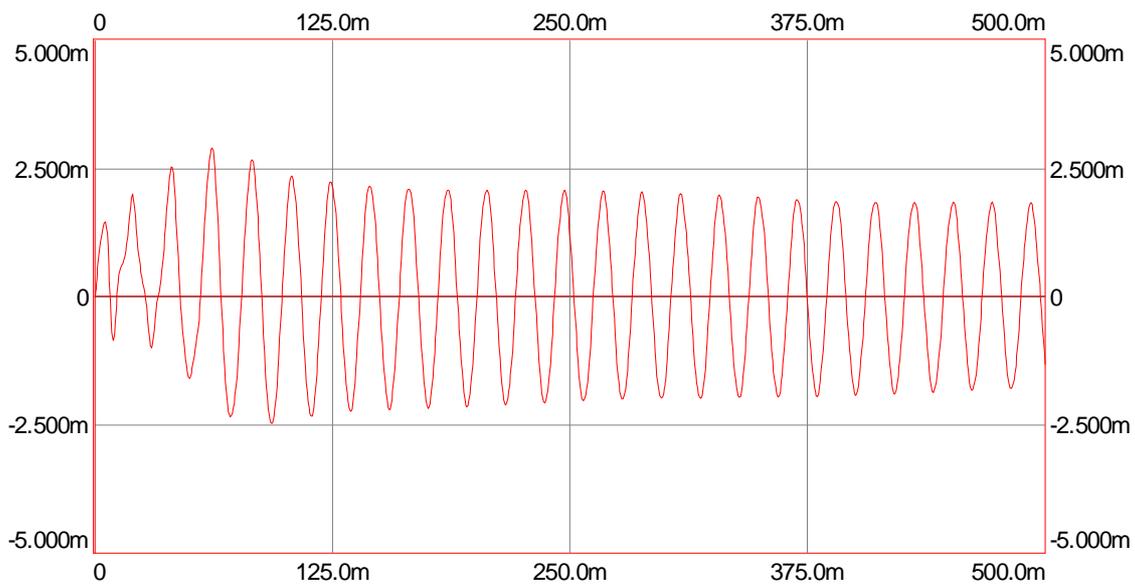


Figura 40. Error en flujo estático. Alimentación a $U_N - 50$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

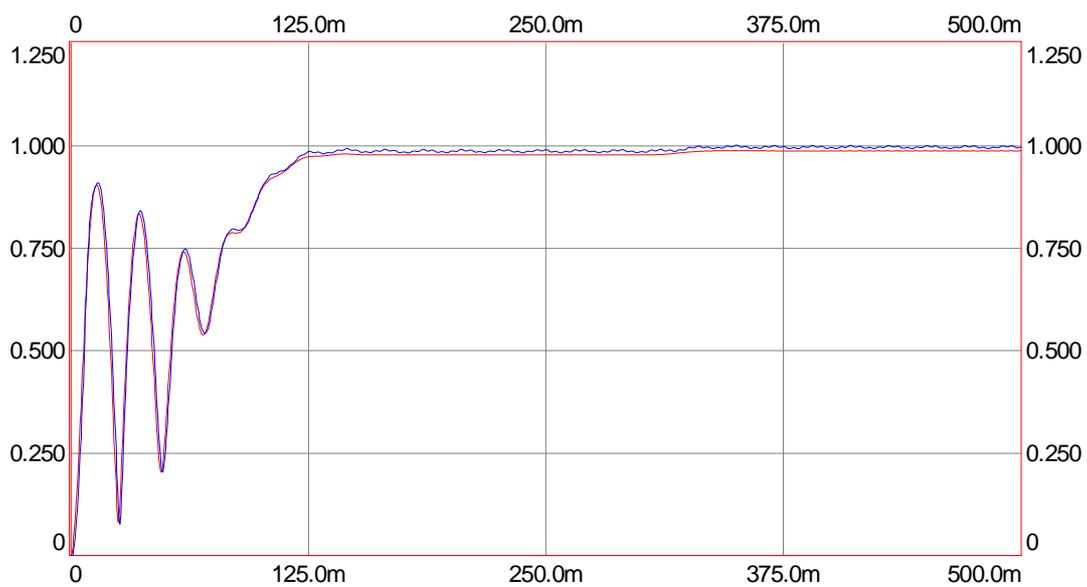


Figura 41. Flujo rotórico calculado y observado. Alimentación a $U_N - 50$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

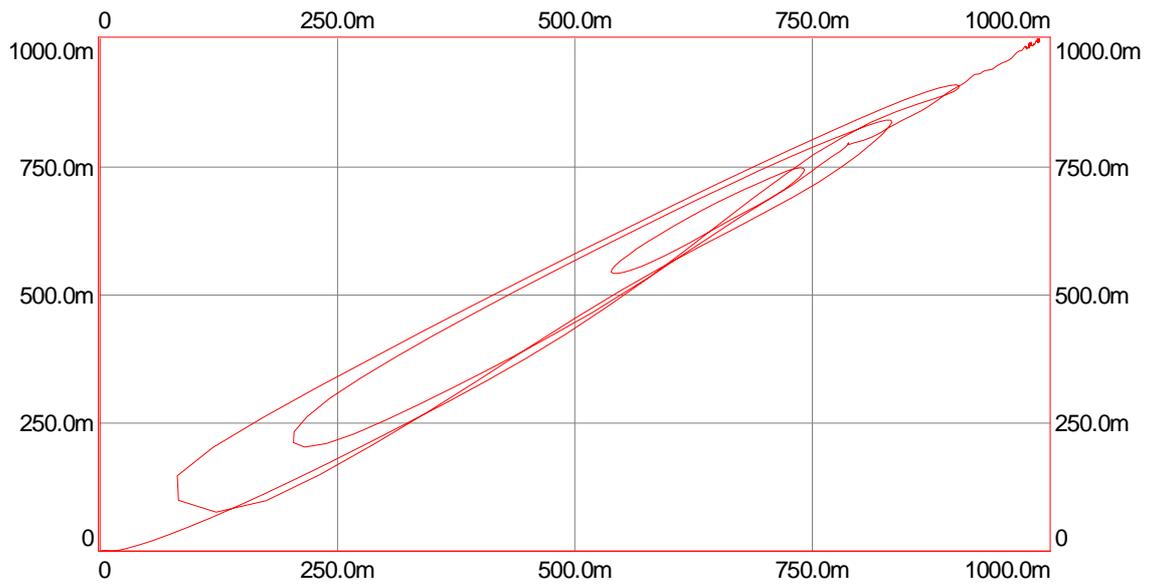


Figura 42. Flujo rotórico calculado en función del flujo rotórico observado. Alimentación a $U_N - 50$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

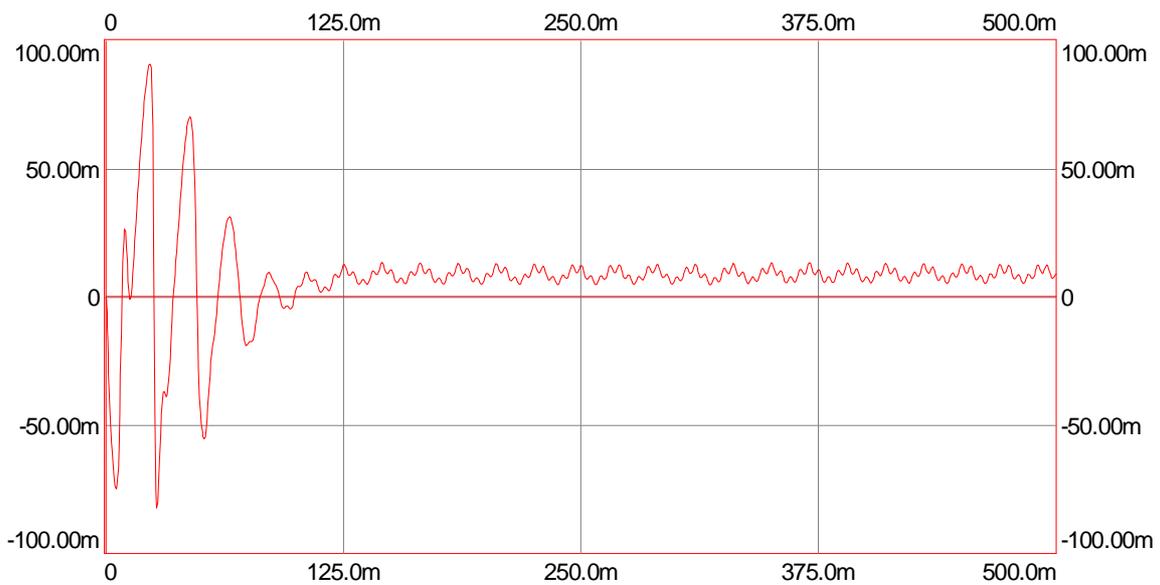


Figura 43. Error en flujo rotórico. Alimentación a $U_N - 50$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

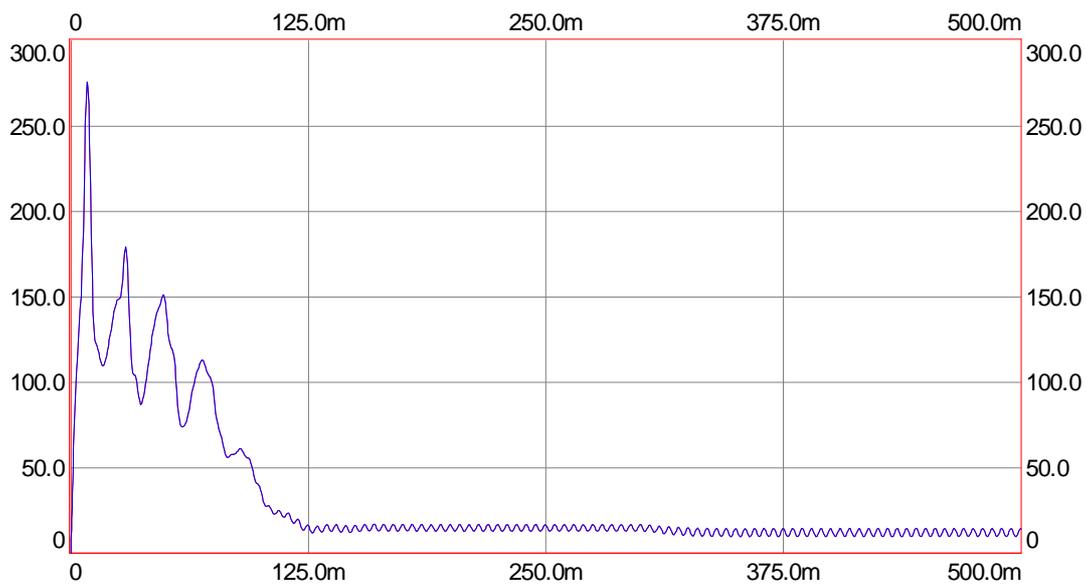


Figura 44. Corriente estática calculada y observada. Alimentación a $U_N - 50$ Hz. Parámetros modificados en + 10% (R_r 70%).

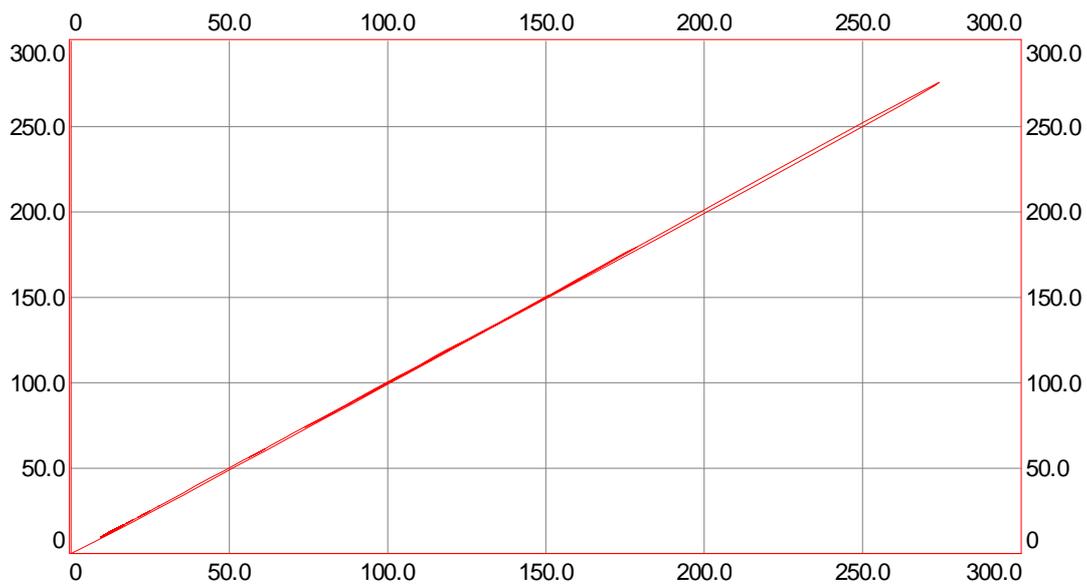


Figura 45. Corriente estática calculada como función de la corriente estática observada. Alimentación a $U_N - 50$ Hz. Parámetros modificados en + 10% (R_r 70%).

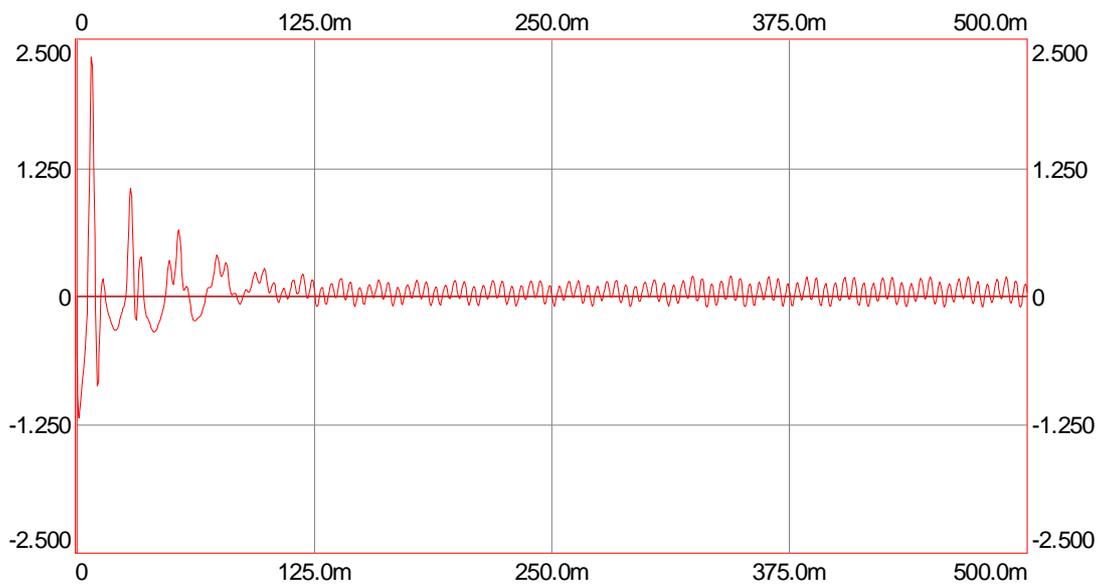


Figura 46. Error en corriente(eis). Alimentación a U_N – 50 Hz. Parámetros modificados en + 10% (R_r 70%).

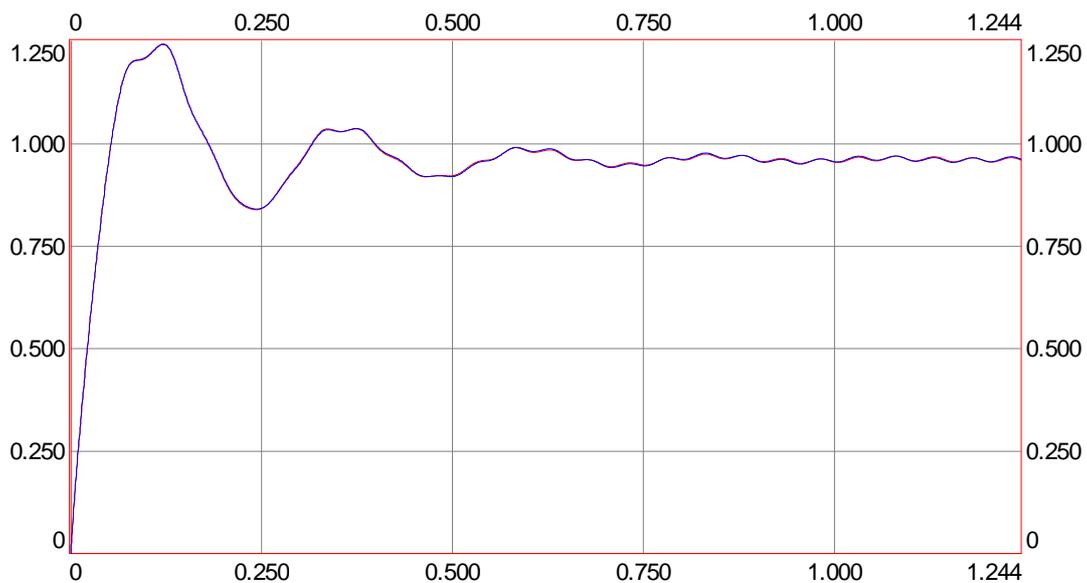


Figura 47. Flujo estático calculado y observado. Alimentación a U' – 5 Hz. Parámetros modificados en + 10% (R_r 70%).

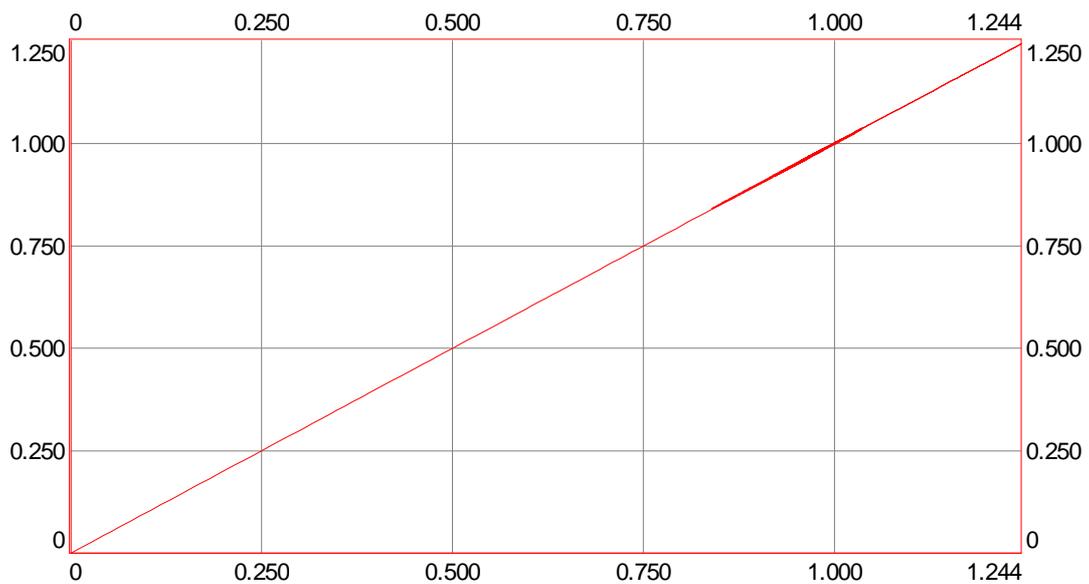


Figura 48. Flujo estático calculado en función del flujo estático observado. Alimentación a $U' - 5$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

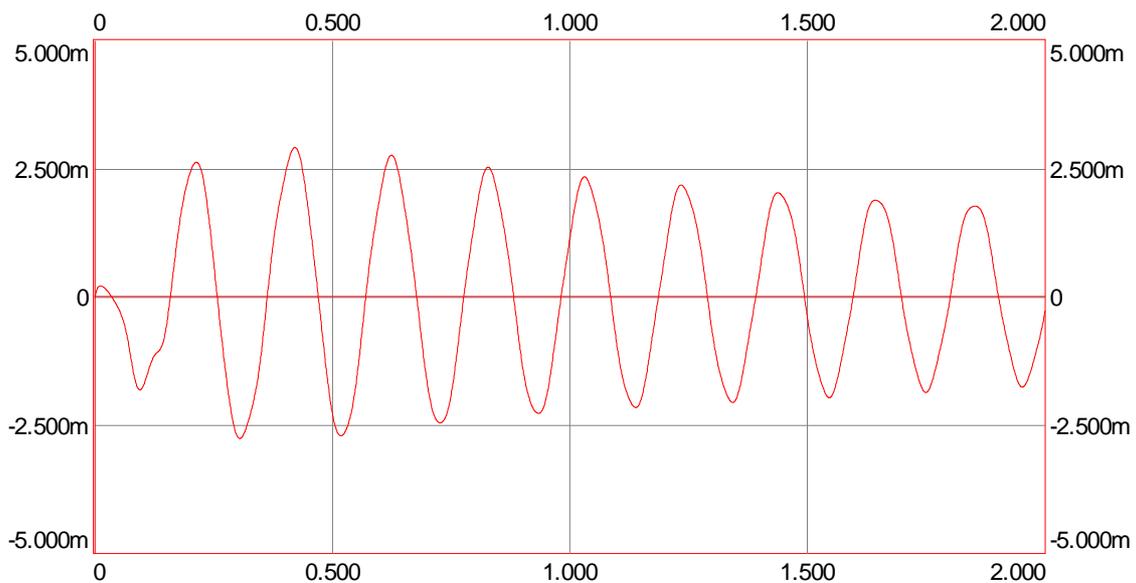


Figura 49. Error en flujo estático. Alimentación a $U' - 5$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

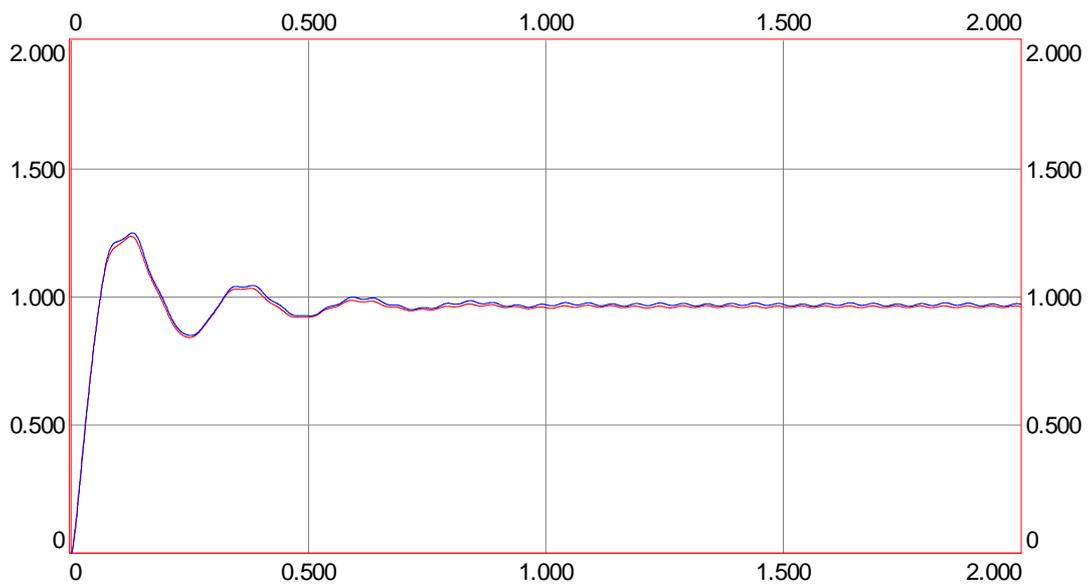


Figura 49. Flujo rotórico calculado y observado. Alimentación a U' – 5 Hz. Parámetros modificados en + 10% (R_r 70%).

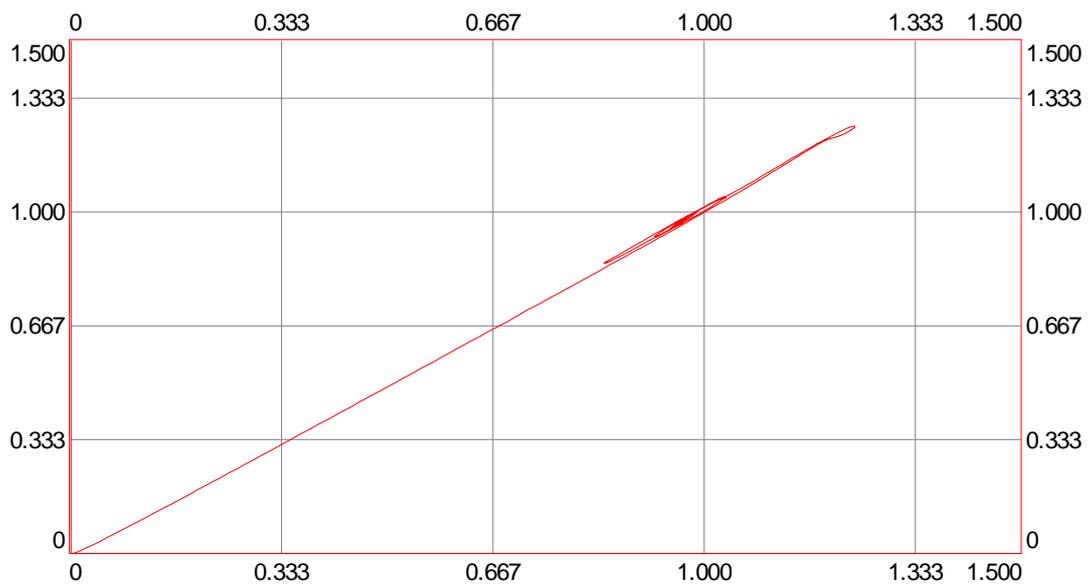


Figura 50. Flujo rotórico calculado en función del flujo rotórico observado. Alimentación a U' – 5 Hz. Parámetros modificados en + 10% (R_r 70%).

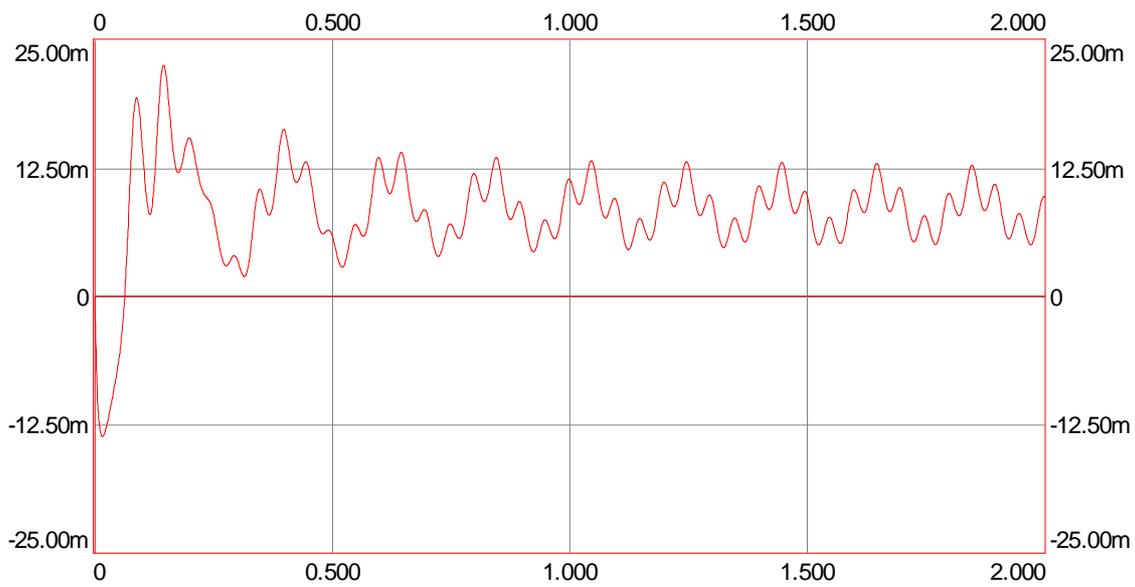


Figura 51. Error en flujo rotórico. Alimentación a U' – 5 Hz. Parámetros modificados en + 10% (R_r 70%).

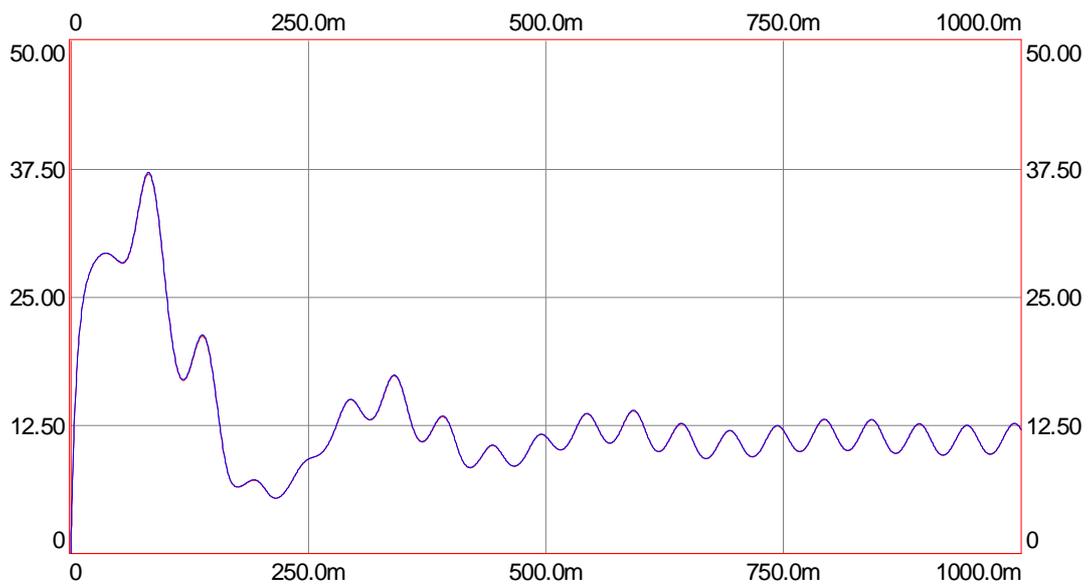


Figura 52. Corriente estática calculada y observada. Alimentación a U' – 5 Hz. Parámetros modificados en + 10% (R_r 70%).

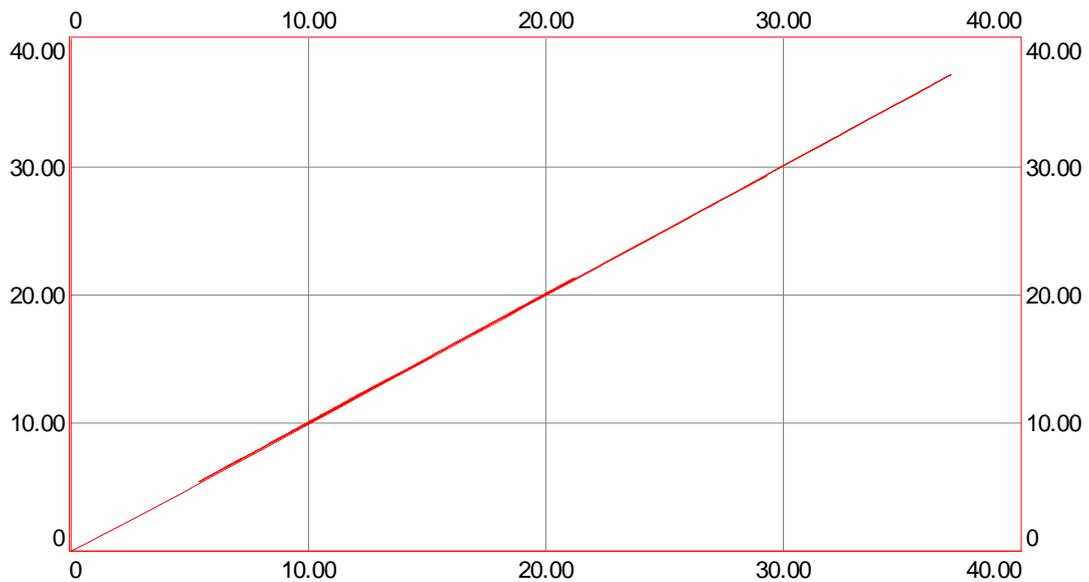


Figura 53. Corriente estática calculada como función de la corriente estática observada. Alimentación a U' – 5 Hz. Parámetros modificados en + 10% (R_r 70%).

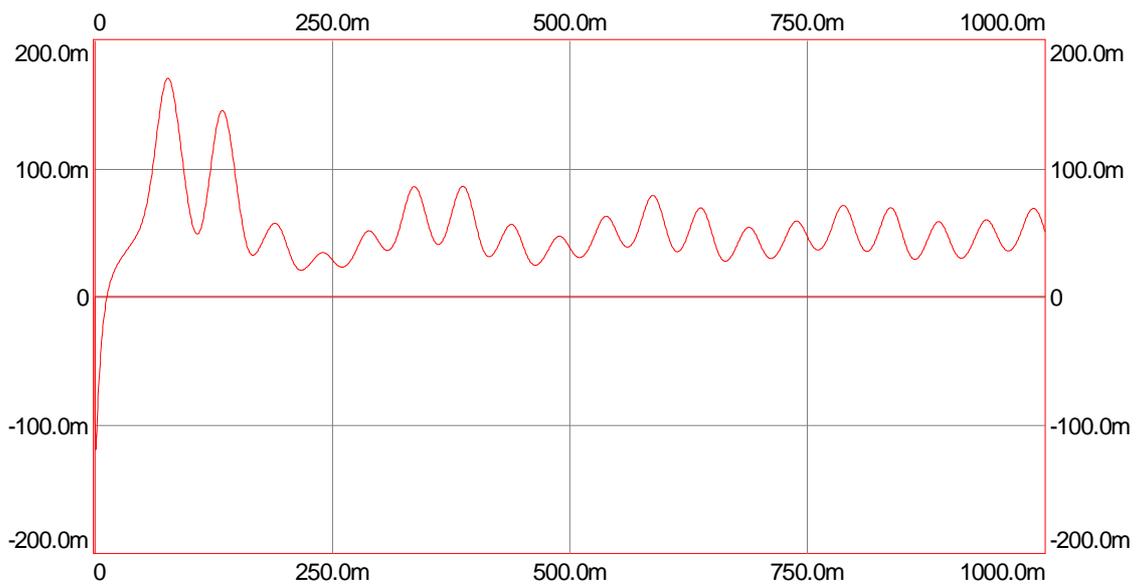


Figura 54. Error en corriente. Alimentación a U' – 5 Hz.

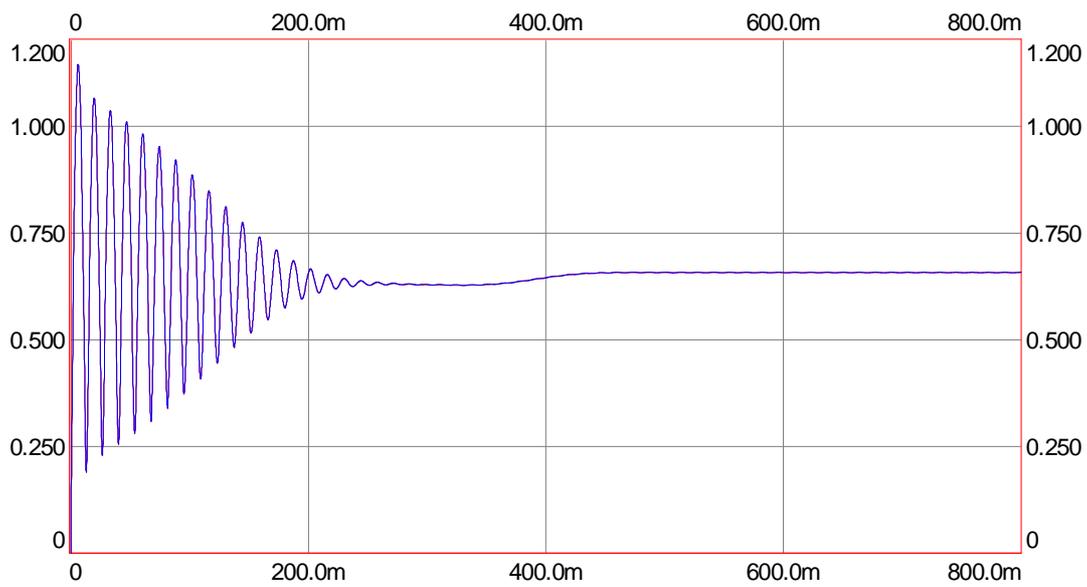


Figura 55. Flujo estático calculado y observado. Alimentación a $U_N - 75$ Hz. Parámetros modificados en + 10% (R_r 70%).

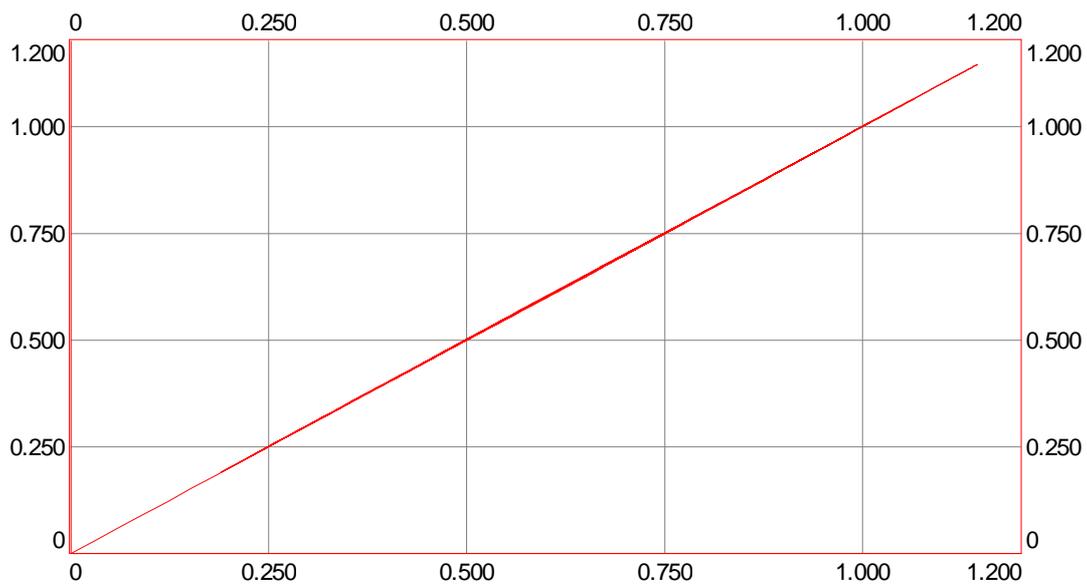


Figura 56. Flujo estático calculado en función del flujo estático observado. Alimentación a $U_N - 75$ Hz. Parámetros modificados en + 10% (R_r 70%).

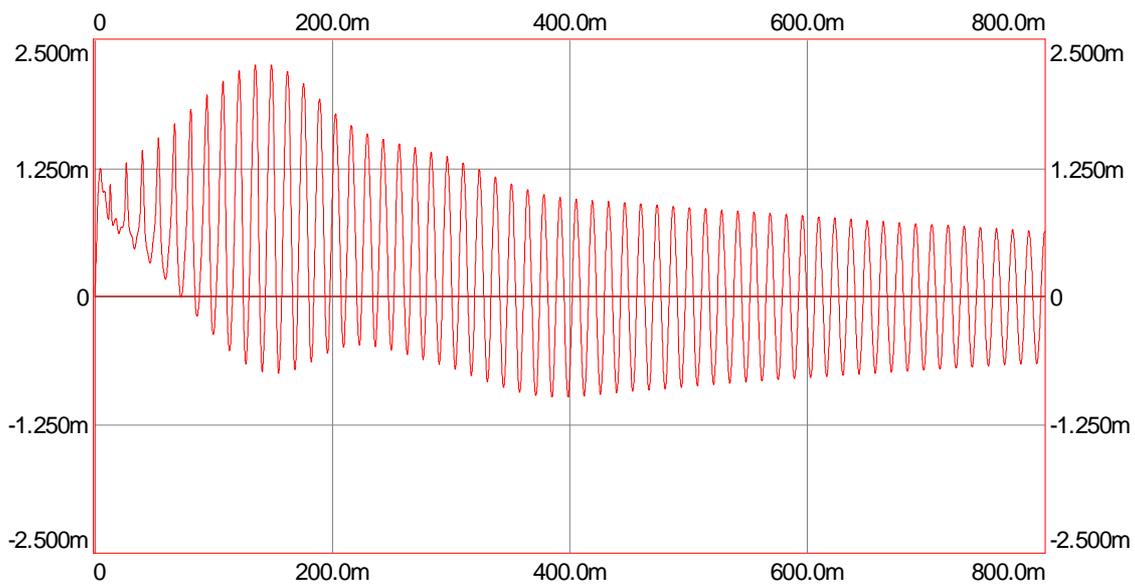


Figura 57. Error en flujo estático. Alimentación a $U_N - 75$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

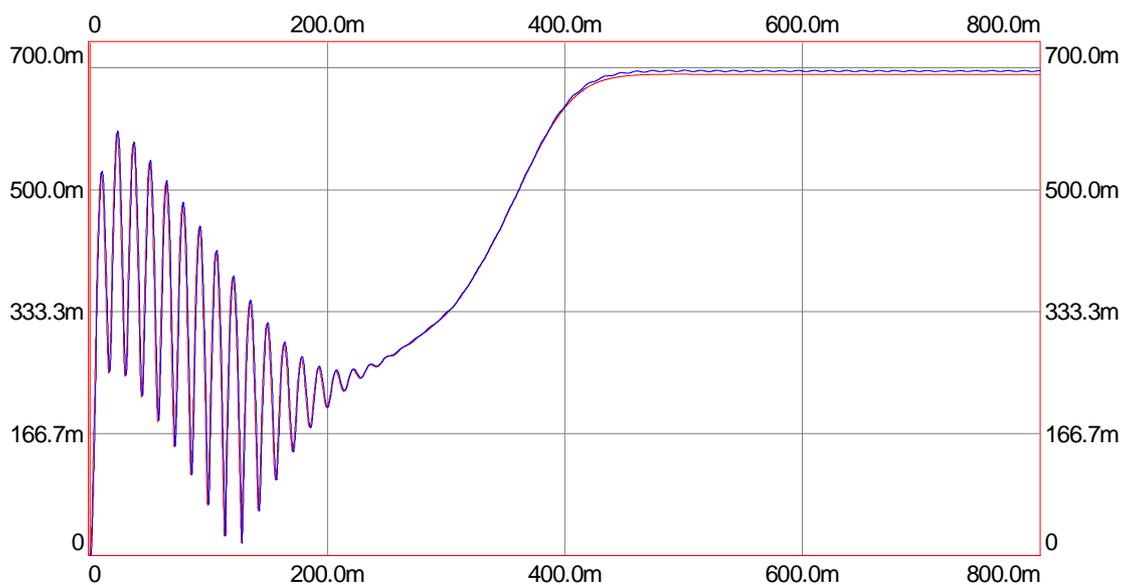


Figura 58. Flujo rotórico calculado y observado. Alimentación a $U_N - 75$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

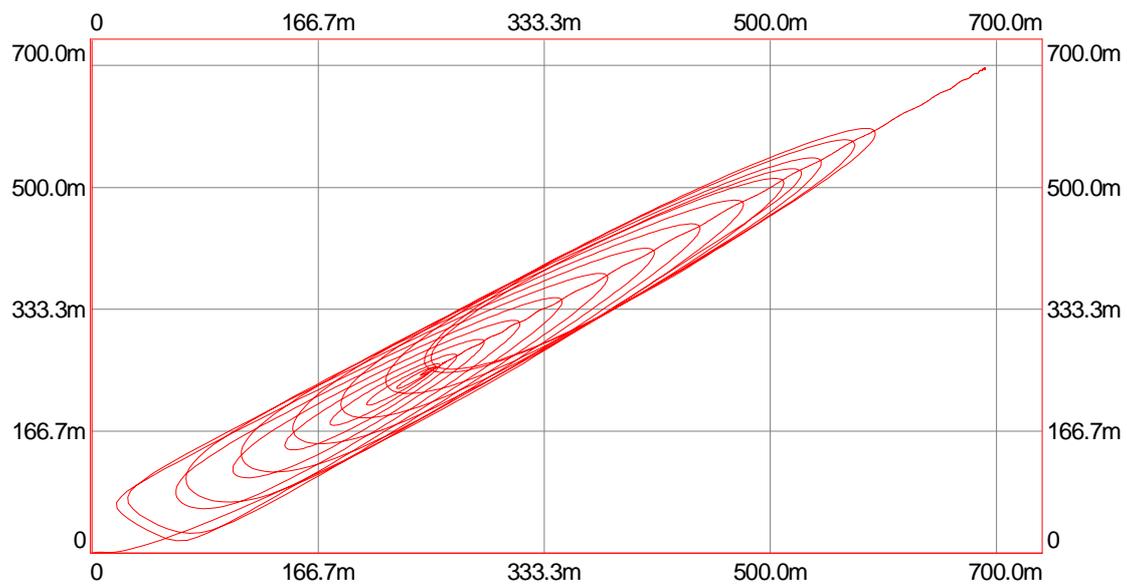


Figura 59. Flujo rotórico calculado en función del flujo rotórico observado. Alimentación a $U_N - 75$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

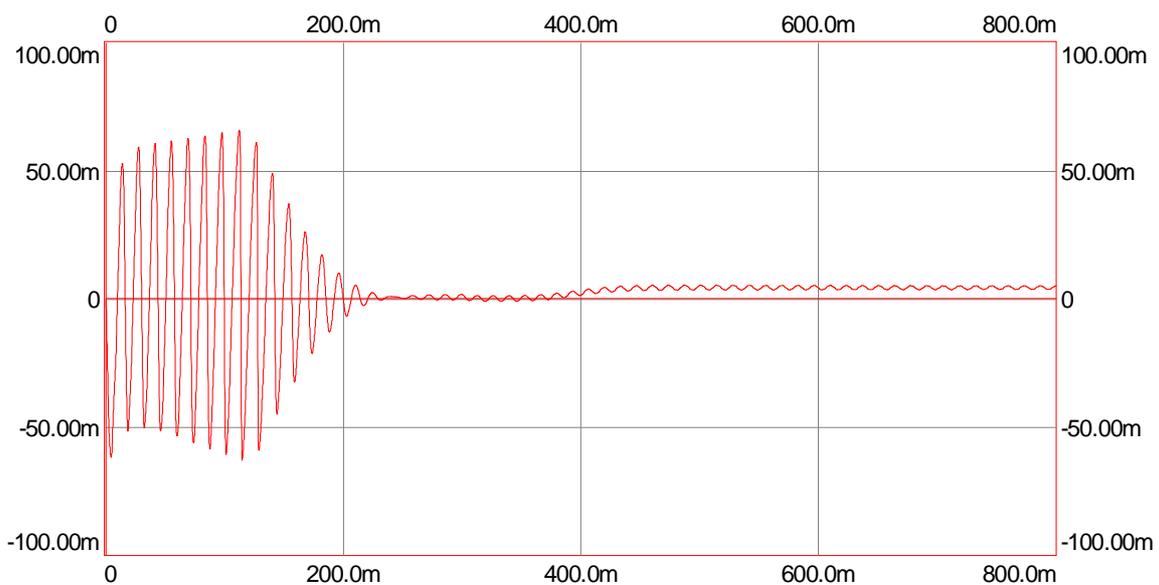


Figura 60. Error en flujo rotórico. Alimentación a $U_N - 75$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

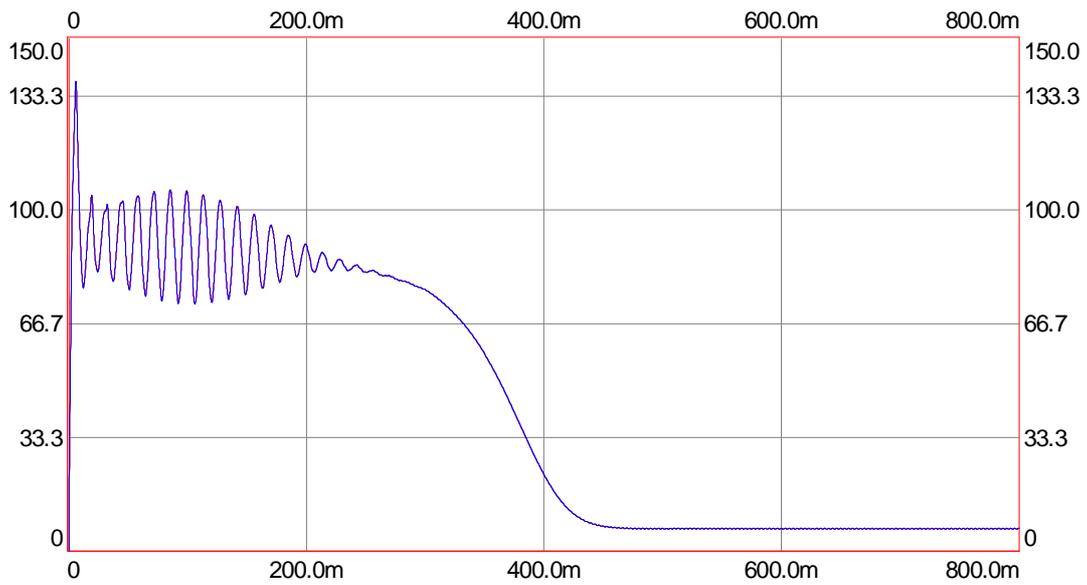


Figura 61. Corriente estática calculada y observada. Alimentación a $U_N - 75$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

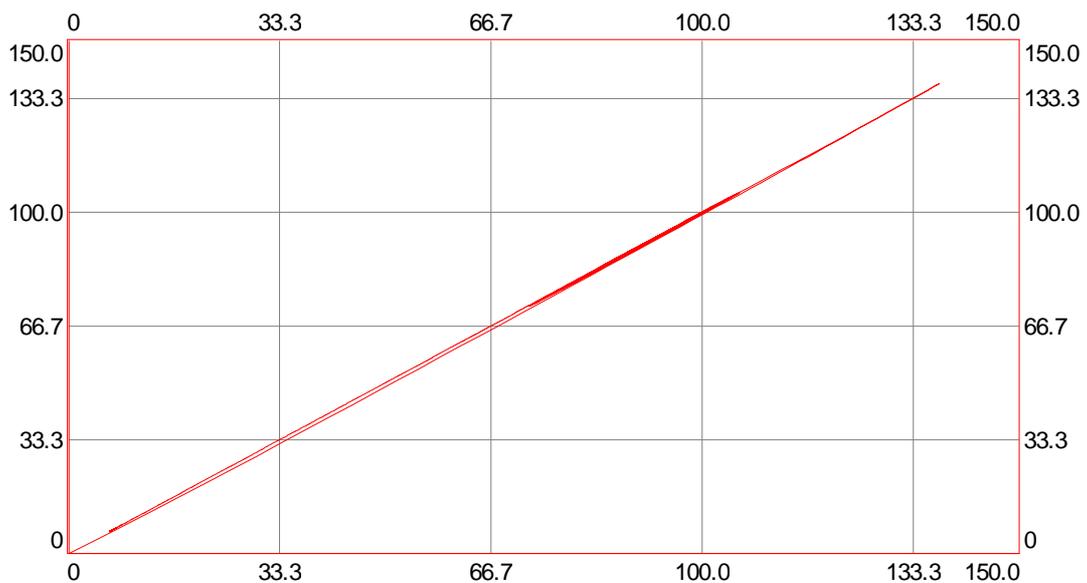


Figura 62. Corriente estática calculada como función de la corriente estática observada. Alimentación a $U_N - 75$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

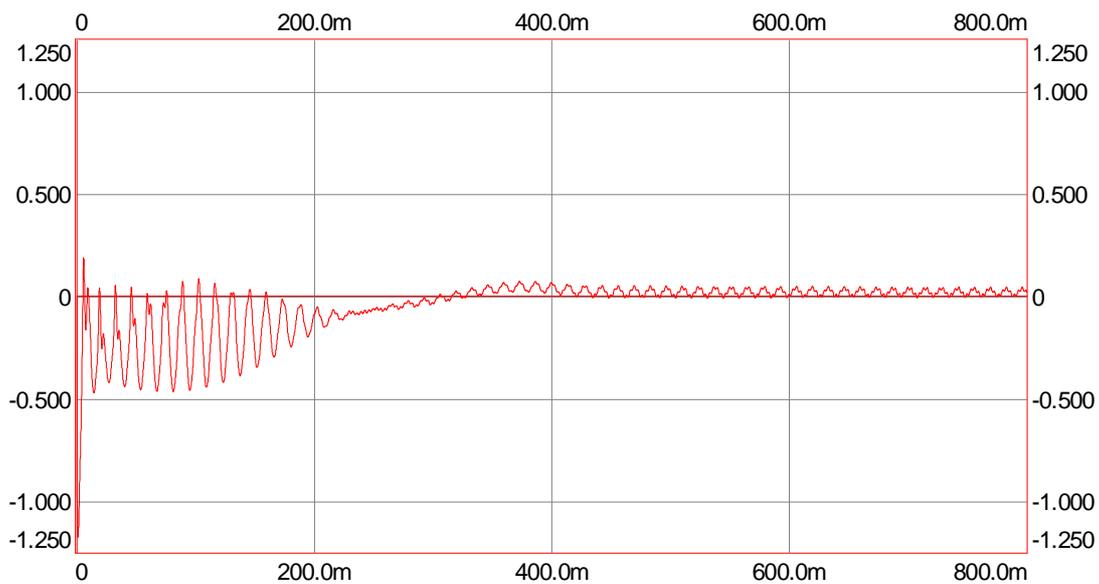


Figura 63. Error en corriente(eis). Alimentación a $U_N - 75$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

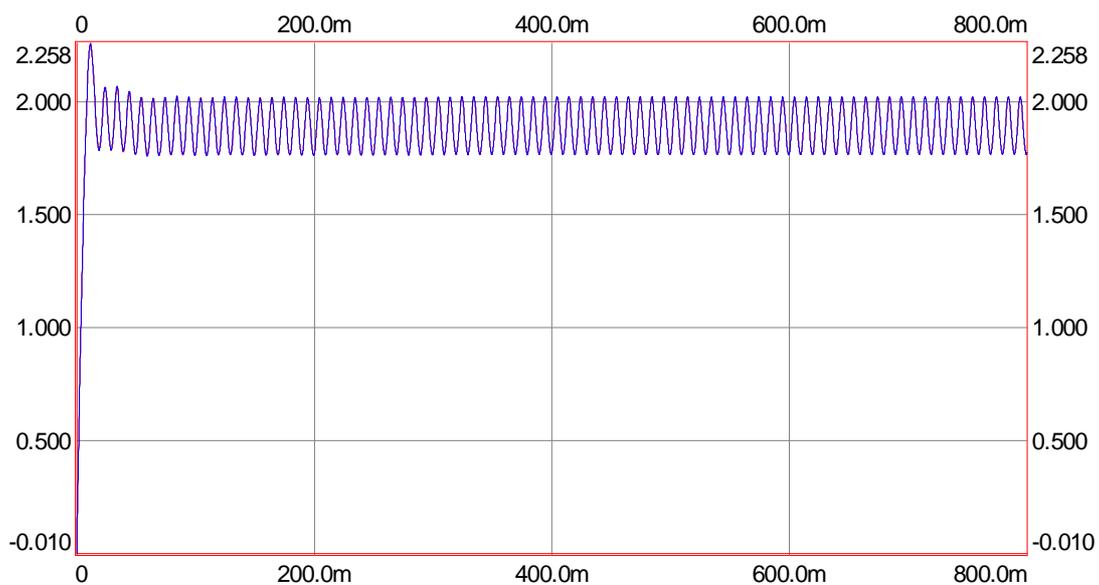


Figura 64. Flujo estático calculado y observado. Alimentación a $U_N - 25$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

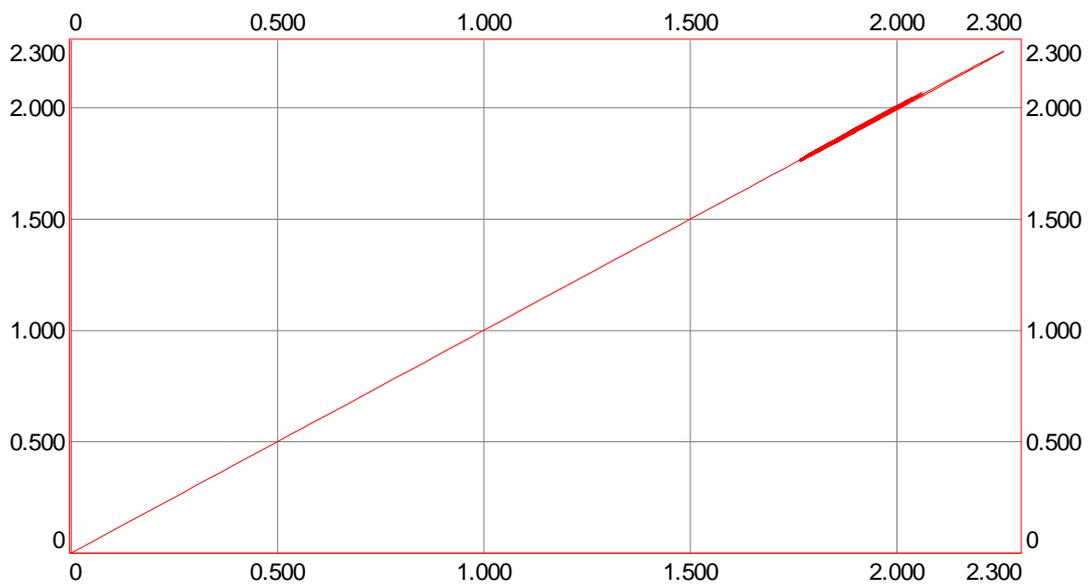


Figura 65. Flujo estático calculado en función del flujo estático observado. Alimentación a $U_N - 25$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

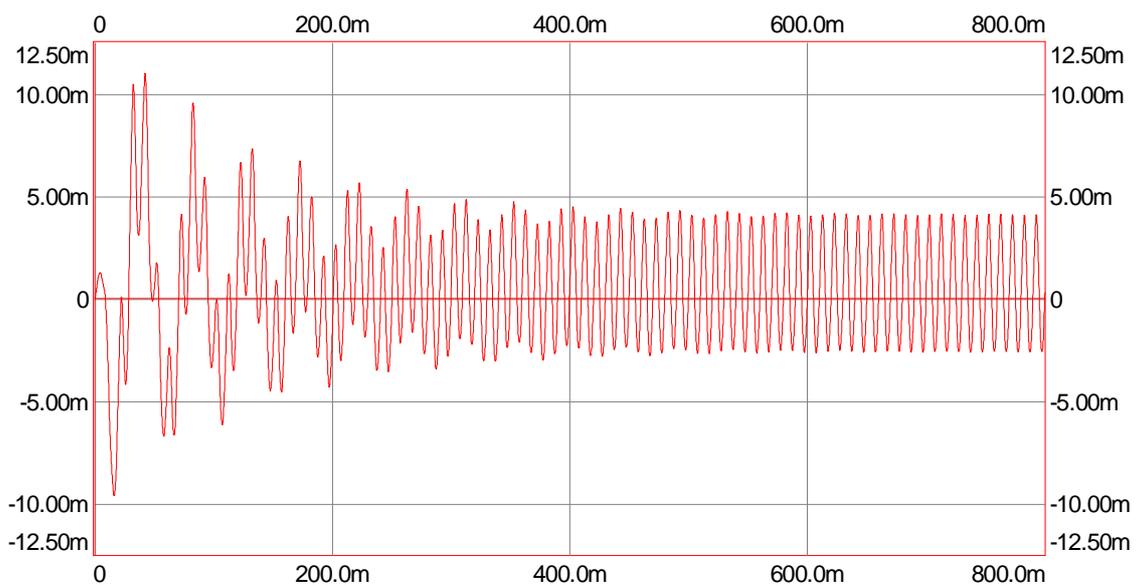


Figura 66. Error en flujo estático. Alimentación a $U_N - 25$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

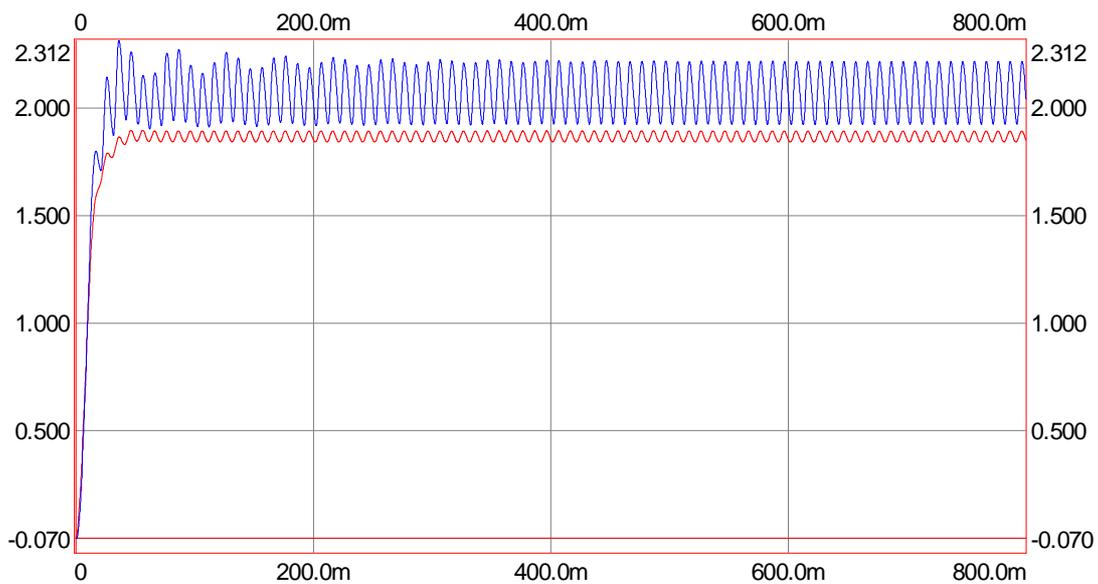


Figura 67. Flujo rotórico calculado y observado. Alimentación a $U_N - 25$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

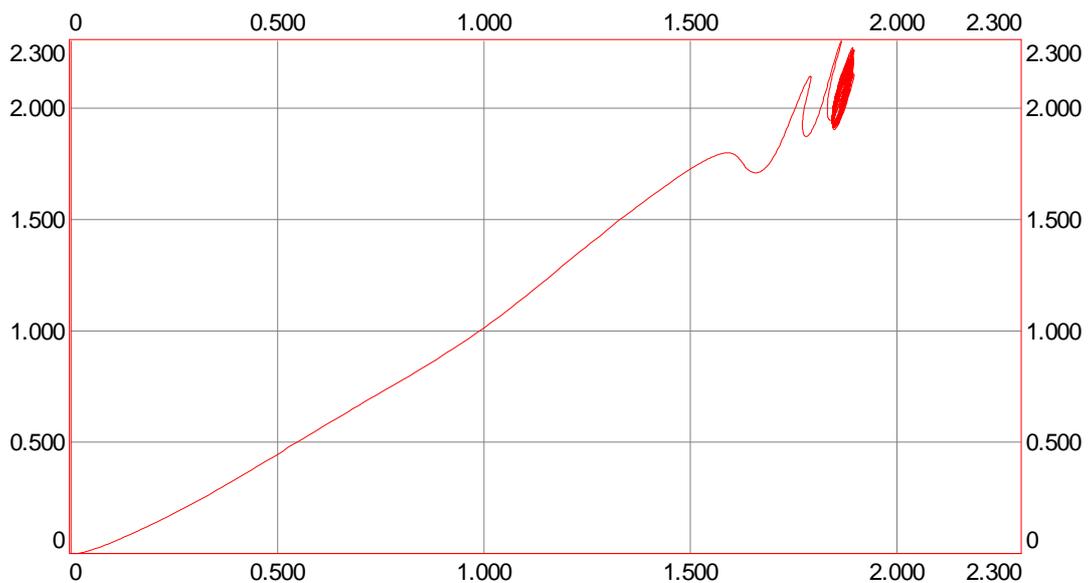


Figura 68. Flujo rotórico calculado en función del flujo rotórico observado. Alimentación a $U_N - 25$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

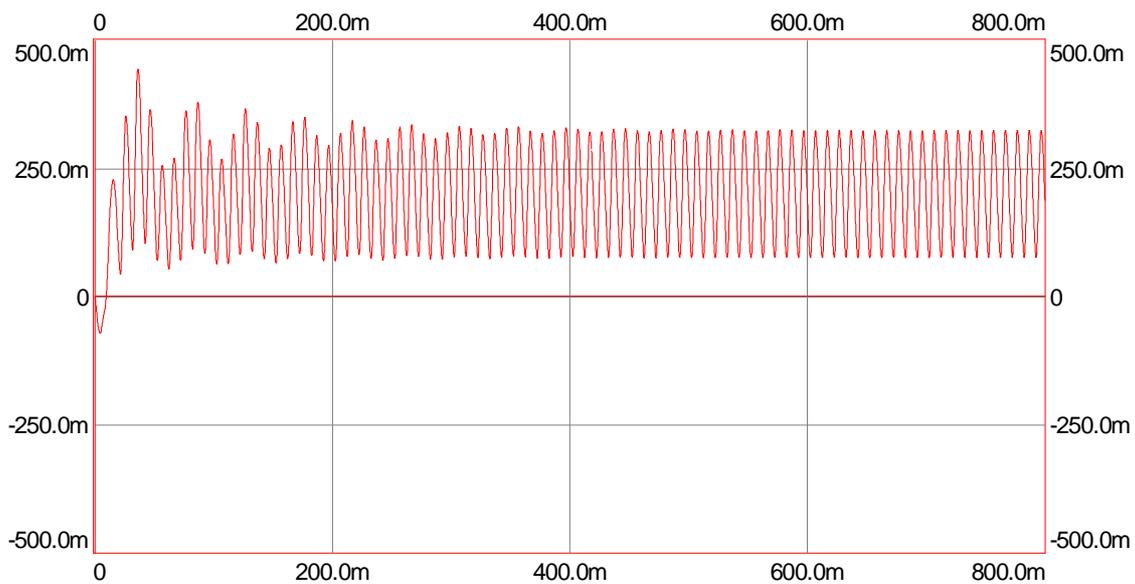


Figura 69. Error en flujo rotórico. Alimentación a $U_N - 25$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

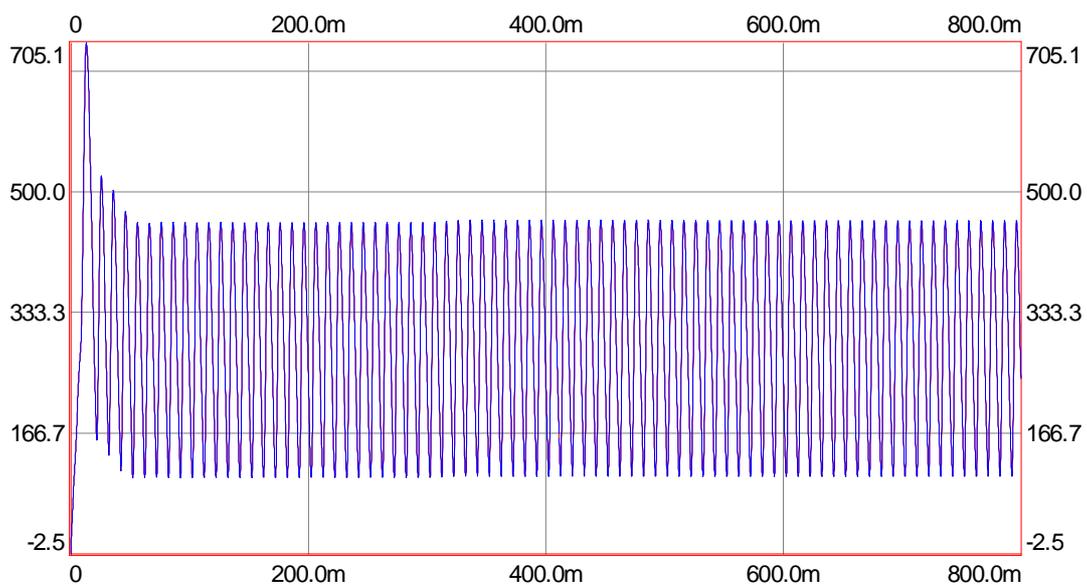


Figura 70. Corriente estática calculada y observada. Alimentación a $U_N - 25$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

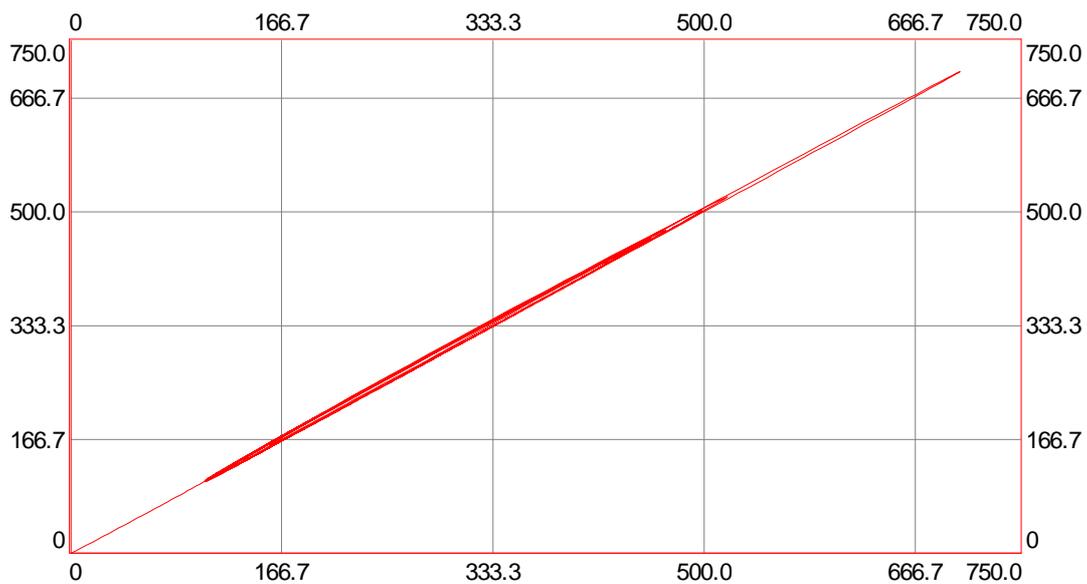


Figura 71. Corriente estática calculada como función de la corriente estática observada. Alimentación a $U_N - 25$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

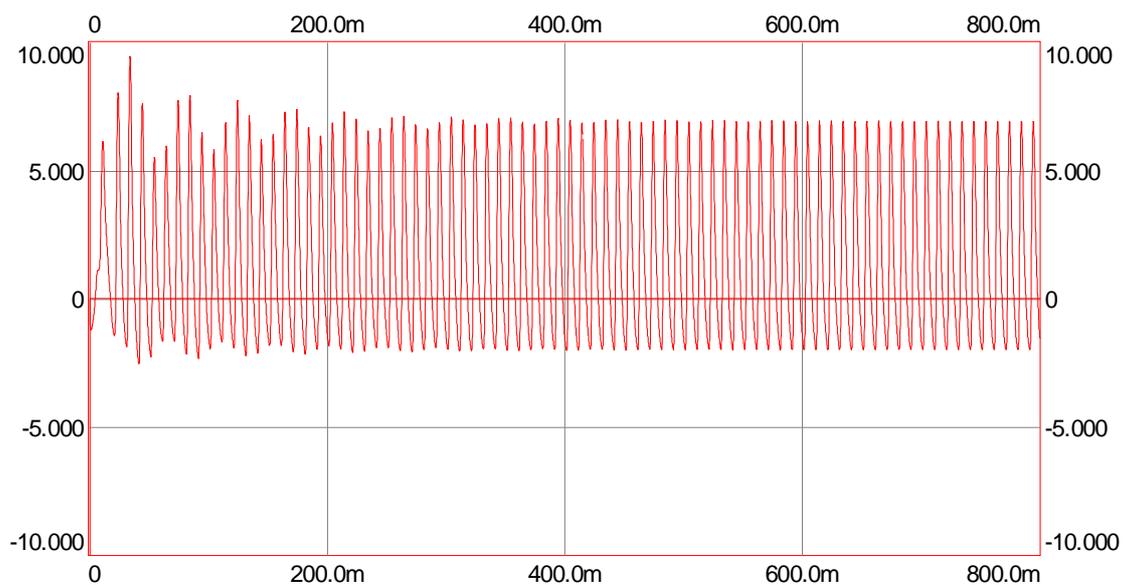


Figura 72. Error en corriente(e_{is}). Alimentación a $U_N - 25$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

Una vez contrastada la bondad del observador diseñado, se plantea la necesidad de añadir el algoritmo de identificación de parámetros del modelo.

Estimación de los parámetros(coeficientes) del modelo.

Parámetros(coeficientes) eléctricos.

Se parte de las expresiones del observador discreto (21):

$$\begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{sx}(t+1) \\ \hat{\Psi}_{sy}(t+1) \\ \hat{\Psi}_{rx}(t+1) \\ \hat{\Psi}_{ry}(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{sx}(t) \\ \hat{\Psi}_{sy}(t) \\ \hat{\Psi}_{rx}(t) \\ \hat{\Psi}_{ry}(t) \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} -\frac{r_s}{\hat{L}_{rl}} & \omega & \frac{r_s}{\hat{L}_{rl}} & 0 \\ -\omega & -\frac{r_s}{\hat{L}_{rl}} & 0 & \frac{r_s}{\hat{L}_{rl}} \\ \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}} & 0 & -\frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}} & \omega - \omega_r \\ 0 & \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}} & -(\omega - \omega_r) & -\frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{sx} \\ \hat{\Psi}_{sy} \\ \hat{\Psi}_{rx} \\ \hat{\Psi}_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s \cdot g(\hat{\Psi}_{sx}) \\ -r_s \cdot g(\hat{\Psi}_{sy}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{sx} & -k_{sy} \\ k_{sy} & k_{sx} \\ k_{rx} & -k_{ry} \\ k_{ry} & k_{sx} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i}_{sx} - i_{sx} \\ \hat{i}_{sy} - i_{sy} \end{pmatrix} \quad (22)$$

y junto con las expresiones para las componentes de corriente estática observada:

$$\begin{aligned} \hat{i}_{sx}(t) &= \frac{1}{\hat{L}_{rl}} \cdot [\hat{\Psi}_{sx}(t) - \hat{\Psi}_{rx}(t)] + I_N \cdot \left(\hat{a}_x \cdot \frac{\hat{\Psi}_{sx}(t)}{\Phi_N} + \hat{b}_x \cdot \left(\frac{\hat{\Psi}_{sx}(t)}{\Phi_N} \right)^n \right) \\ \hat{i}_{sy}(t) &= \frac{1}{\hat{L}_{rl}} \cdot [\hat{\Psi}_{sy}(t) - \hat{\Psi}_{ry}(t)] + I_N \cdot \left(\hat{a}_y \cdot \frac{\hat{\Psi}_{sy}(t)}{\Phi_N} + \hat{b}_y \cdot \left(\frac{\hat{\Psi}_{sy}(t)}{\Phi_N} \right)^n \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Nótese que se han considerado parámetros característicos de saturación distintos ($\hat{a}_x \neq \hat{a}_y$; $\hat{b}_x \neq \hat{b}_y$) para cada componente. Todos los parámetros del modelo de máquina, excepto la resistencia estática que resulta de fácil medida, se consideran desconocidos a efectos de formular el algoritmo de estimación. El flujo rotórico puede expresarse a partir de la siguiente ecuación en tiempo discreto:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{rx}(t+1) &= \hat{\Psi}_{rx}(t) \cdot \left(1 + h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}} \right) + h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}} \cdot \hat{\Psi}_{sx}(t) - h \cdot \omega_r \cdot \hat{\Psi}_{ry}(t) \\ \hat{\Psi}_{ry}(t+1) &= \hat{\Psi}_{ry}(t) \cdot \left(1 + h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}} \right) + h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}} \cdot \hat{\Psi}_{sy}(t) + h \cdot \omega_r \cdot \hat{\Psi}_{rx}(t) \end{aligned} \quad (24)$$

avanzando un paso de muestreo el conjunto de ecuaciones (23), y sustituyendo en ellas el (24) se llega a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\hat{i}_{sx}(t+1) &= \hat{\Psi}_{sx}(t+1) \cdot \left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}} + \hat{a}_x \cdot \frac{I_N}{\Phi_N} \right) - \hat{\Psi}_{sx}(t) \cdot h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}^2} - \hat{\Psi}_{rx}(t) \cdot \left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}} (1 - h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}}) \right) + \\ &+ \hat{\Psi}_{ry}(t) \cdot h \cdot \frac{\omega_r}{\hat{L}_{rl}} + [\hat{\Psi}_{sx}(t+1)]^n \frac{I_N}{\Phi_N^n} \cdot \hat{b}_x \\ \hat{i}_{sy}(t+1) &= \hat{\Psi}_{sy}(t+1) \cdot \left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}} + \hat{a}_y \cdot \frac{I_N}{\Phi_N} \right) - \hat{\Psi}_{sy}(t) \cdot h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}^2} - \hat{\Psi}_{ry}(t) \cdot \left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}} (1 - h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}}) \right) + \\ &- \hat{\Psi}_{rx}(t) \cdot h \cdot \frac{\omega_r}{\hat{L}_{rl}} + [\hat{\Psi}_{sy}(t+1)]^n \frac{I_N}{\Phi_N^n} \cdot \hat{b}_y\end{aligned}\quad (25)$$

las cuales pueden ensamblarse como sigue:

$$\begin{aligned}y &= \begin{pmatrix} \hat{i}_{sx}(t+1) \\ \hat{i}_{sy}(t+1) \end{pmatrix} \\ \Phi^T &= \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{sx}(t+1) & 0 & -\hat{\Psi}_{sx}(t) & -\hat{\Psi}_{rx}(t) & \hat{\Psi}_{ry}(t) \cdot \omega_r(t) & [\hat{\Psi}_{sx}(t+1)]^n & 0 \\ 0 & \hat{\Psi}_{sy}(t+1) & -\hat{\Psi}_{sy}(t) & -\hat{\Psi}_{ry}(t) & -\hat{\Psi}_{rx}(t) \cdot \omega_r(t) & 0 & [\hat{\Psi}_{sy}(t+1)]^n \end{pmatrix} \\ \hat{\theta}^T &= \left(\left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}} + \hat{a}_x \cdot \frac{I_N}{\Phi_N} \right) \left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}} + \hat{a}_y \cdot \frac{I_N}{\Phi_N} \right) h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}^2} \left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}} (1 - h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}}) \right) h \cdot \frac{1}{\hat{L}_{rl}} \frac{I_N}{\Phi_N^n} \cdot \hat{b}_x \frac{I_N}{\Phi_N^n} \cdot \hat{b}_y \right)\end{aligned}$$

$$y = \Phi^T \cdot \hat{\theta} \quad (26)$$

Estas ecuaciones ya están en la forma canónica conveniente para su implementación en un algoritmo de cálculo por mínimos cuadrados. El conjunto de ecuaciones del observador (22), junto con la ecuación de identificación (26), configuran las ecuaciones de un observador de tipo adaptativo que consigue identificar a la vez los parámetros desconocidos y el flujo rotórico.

La ecuación (26) puede ser optimizada de cara a su implementación en tiempo real, si se considera la siguiente relación entre los parámetros desconocidos:

$$\hat{\theta}_4 = \frac{\hat{\theta}_5}{h} - \hat{\theta}_3 \quad (27)$$

donde:

$$\begin{aligned}
& (\hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_2 \quad \hat{\theta}_3 \quad \hat{\theta}_4 \quad \hat{\theta}_5 \quad \hat{\theta}_6 \quad \hat{\theta}_7) = \\
& = \left(\left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}} + \hat{a}_x \cdot \frac{I_N}{\Phi_N} \right) \left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}} + \hat{a}_y \cdot \frac{I_N}{\Phi_N} \right) h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}^2} \left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}} (1 - h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}}) \right) h \cdot \frac{1}{\hat{L}_{rl}} \frac{I_N}{\Phi_N} \cdot \hat{b}_x \quad \frac{I_N}{\Phi_N} \cdot \hat{b}_y \right)
\end{aligned} \tag{28}$$

Finalmente las ecuaciones de identificación quedan como sigue:

$$\begin{aligned}
y &= \begin{pmatrix} \hat{i}_{sx}(t+1) \\ \hat{i}_{sy}(t+1) \end{pmatrix} \\
\Phi^T &= \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{sx}(t+1) & 0 & -\hat{\Psi}_{sx}(t) + \hat{\Psi}_{rx}(t) & -\frac{\hat{\Psi}_{rx}(t)}{h} + \hat{\Psi}_{ry}(t) \cdot \omega_r(t) & [\hat{\Psi}_{sx}(t+1)]^n & 0 \\ 0 & \hat{\Psi}_{sy}(t+1) & -\hat{\Psi}_{sy}(t) + \hat{\Psi}_{ry}(t) & -\frac{\hat{\Psi}_{rx}(t)}{h} - \hat{\Psi}_{rx}(t) \cdot \omega_r(t) & 0 & [\hat{\Psi}_{sy}(t+1)]^n \end{pmatrix} \\
\hat{\theta}^T &= (\hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_2 \quad \hat{\theta}_3 \quad \hat{\theta}_5 \quad \hat{\theta}_6 \quad \hat{\theta}_7) \\
y &= \Phi^T \cdot \hat{\theta}
\end{aligned} \tag{29}$$

Para este caso las ecuaciones del algoritmo de identificación resultan como sigue:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + K(k) \cdot \varepsilon(k) \\
\varepsilon(k) &= y(k) - \Phi(k) \cdot \hat{\theta}(k-1) \\
P(k) &= P(k-1) - K(k) \cdot \Phi(k) \cdot P(k-1) \\
K(k) &= P(k-1) \cdot \Phi^T(k) \cdot (I + \Phi(k) \cdot P(k-1) \cdot \Phi^T(k))^{-1}
\end{aligned} \tag{30}$$

Estimación del par electromagnético. Estimación de parámetros(coeficientes) mecánicos.

Una vez obtenido el flujo, el par puede estimarse a partir de la siguiente expresión

$$\hat{M}_i = \frac{3}{2} \cdot p \cdot (\hat{\Psi}_{sx} \cdot i_{sy} - \hat{\Psi}_{sy} \cdot i_{sx}) \tag{31}$$

nótese que para la estimación del par se utilizan variables observadas (flujo) y medidas (corriente).

A partir de la medida de la velocidad y del par electromagnético calculado, se puede plantear la resolución de la ecuación de equilibrio mecánico. En forma discreta:

$$\frac{\omega_r(t+1) - \omega_r(t)}{h} = \frac{1}{\hat{J}} \cdot \hat{M}_i - \frac{1}{\hat{J}} \cdot \hat{M}_c \quad (32)$$

que puede expresarse en la siguiente forma canónica para su implementación en el algoritmo de identificación de parámetros:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_r(t+1) - \omega_r(t)}{h} &= (\hat{M}_i \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{J}} \\ \frac{1}{\hat{J}} \cdot \hat{M}_c \end{pmatrix} \\ y &= \frac{\omega_r(t+1) - \omega_r(t)}{h} \\ \Phi^T &= (\hat{M}_i \quad -1) \\ \hat{\theta} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{J}} \\ \frac{1}{\hat{J}} \cdot \hat{M}_c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

Obsérvese que se obtiene simultáneamente la inercia del conjunto ensayado y el par de carga sobre el eje.

Contrastación experimental.

A continuación se representa el esquema del montaje utilizado (figura 73), el cual está compuesto por los siguientes elementos:

- Máquina asíncrona nº 2: 7.5 kW; 220/380 V; 27/15.6 A; $\cos\phi=0.85$; 1450 min^{-1} ; clase F; $J = 0.076 \text{ kgm}^2$; Δ
- Posibilidad de alimentación sinusoidal (red 400 V / 50 Hz) o a través de ondulator PWM (ley $U/f = k$; $m_f = 15$)
- Máquina de corriente continua 7.5 kW; 220 V; 20 A; $V_{ex} = 195 \text{ V}$; $I_{ex} = 1.64 \text{ A}$; 1480 min^{-1} ; class F; $J = 0.076 \text{ kgm}^2$
- Control por corriente de la máquina de corriente continua. Imposición del par de carga de evolución variable a voluntad (no detallado en la figura).
- Captación de corriente a partir de sondas Hall.
- Captación de tensión a partir de amplificadores de aislamiento.
- Tarjeta de adquisición de datos de 12 bits de resolución. 8 canales diferenciales. Frecuencia de muestreo ajustable; en este caso ajustada a 10 kHz.
- Señales filtradas mediante un pasa-bajos con $f_c = 5 \text{ kHz}$.

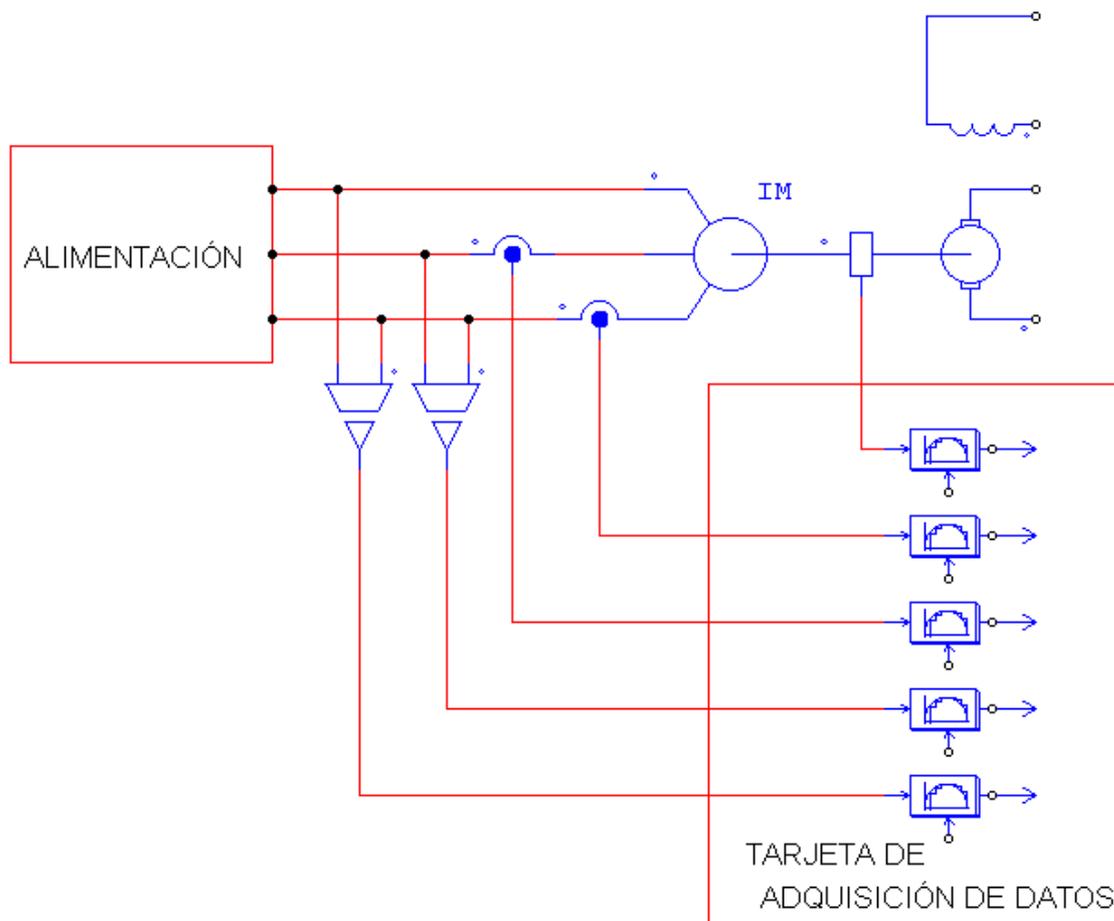


Figura 73. Montaje experimental.

Modelo completo

Las gráficas que siguen corresponden al caso de arranque en vacío ($m_0 \approx 5$ Nm, correspondientes al par de pérdidas) de la máquina, y posterior aplicación súbita del par nominal (≈ 50 Nm). La alimentación proviene de un ondulador PWM con las características indicadas anteriormente ($m_a = 0.9$; $m_f = 15$). La prueba se realiza aplicando tensión y frecuencia nominales, eliminando la rampa de arranque que suelen aplicar los onduladores en el arranque. Todas las magnitudes vienen expresadas en sus unidades naturales; los errores son valores absolutos, no relativos.

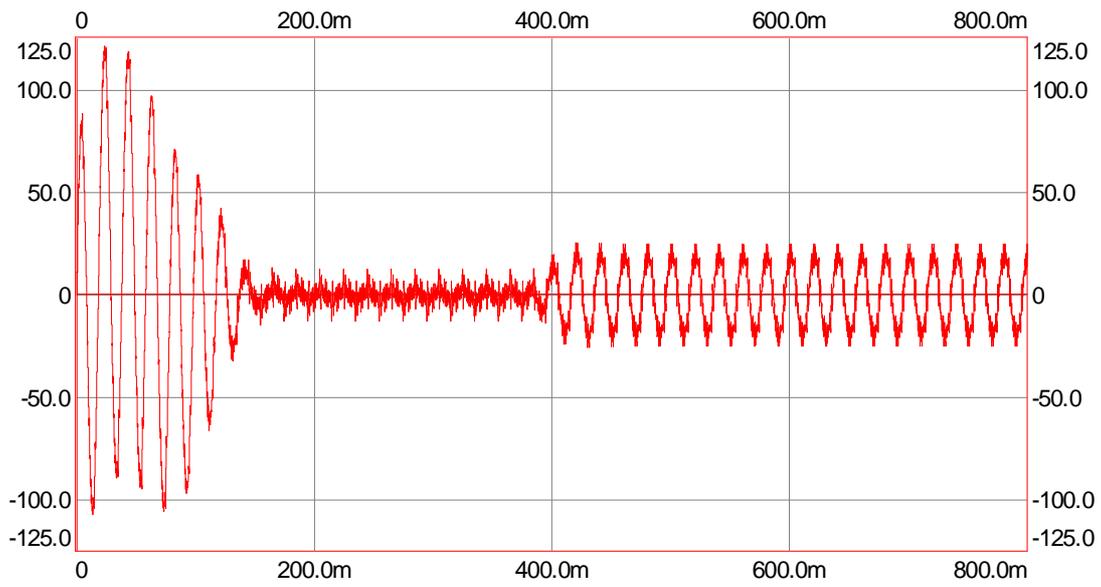


Figura 74. $I_{sx}(t)$. Variable medida y filtrada..

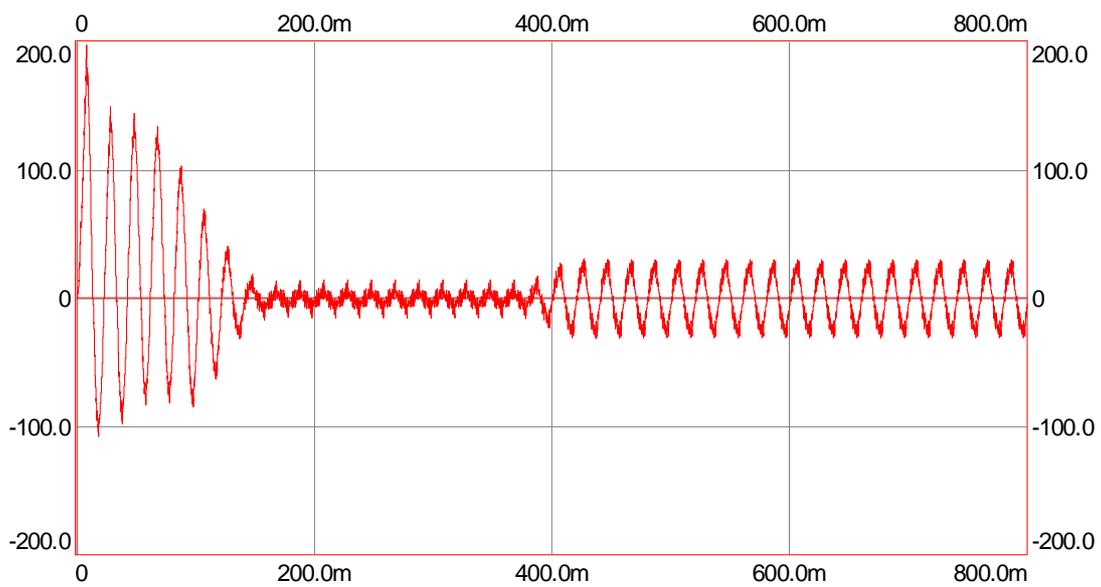
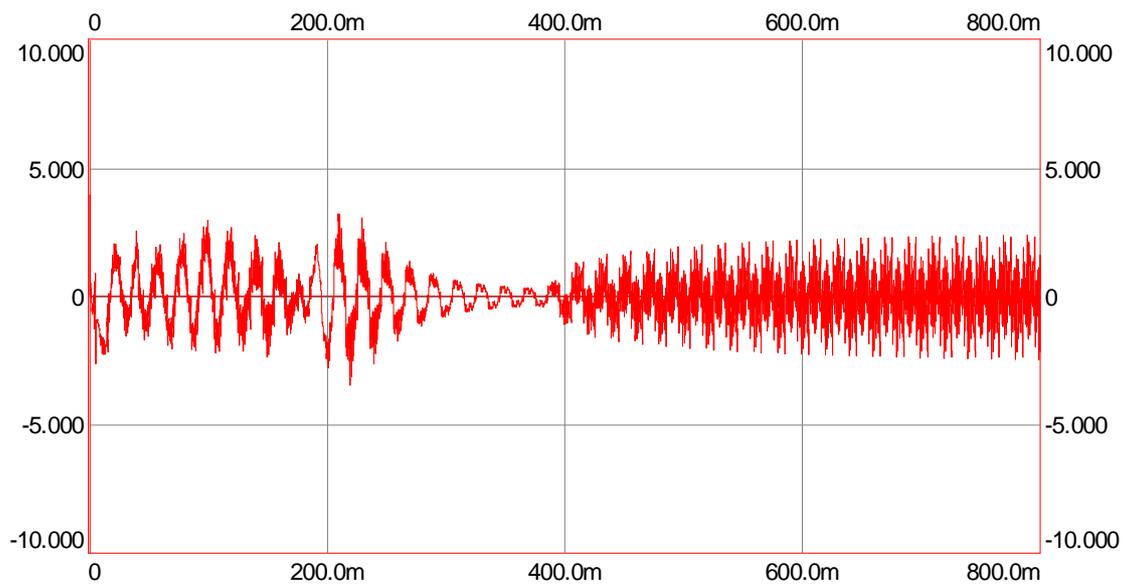
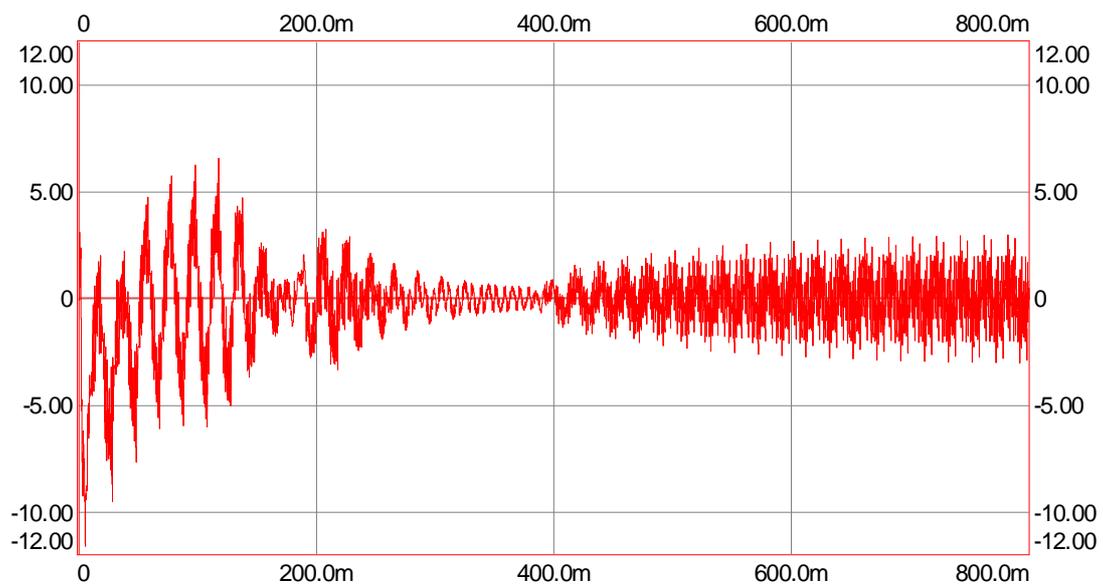


Figura 75. $I_{sy}(t)$. Variable medida y filtrada.

Figura 76. Error en corriente ($E_x(t)$).Figura 77. Error en corriente ($E_y(t)$).

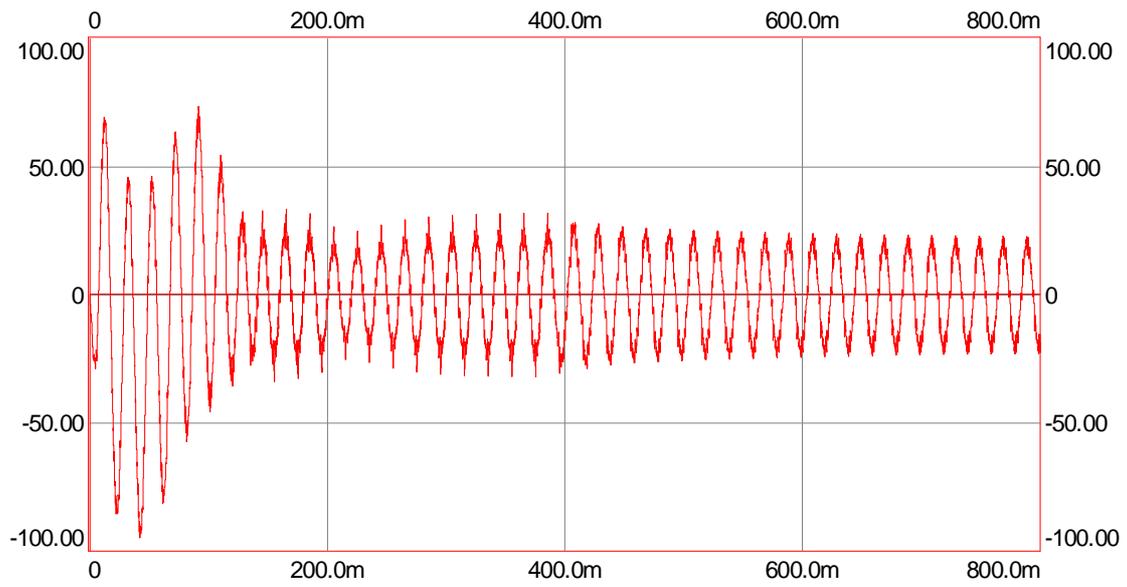


Figura 78. $I_{rx}(t)$. Variable observada.

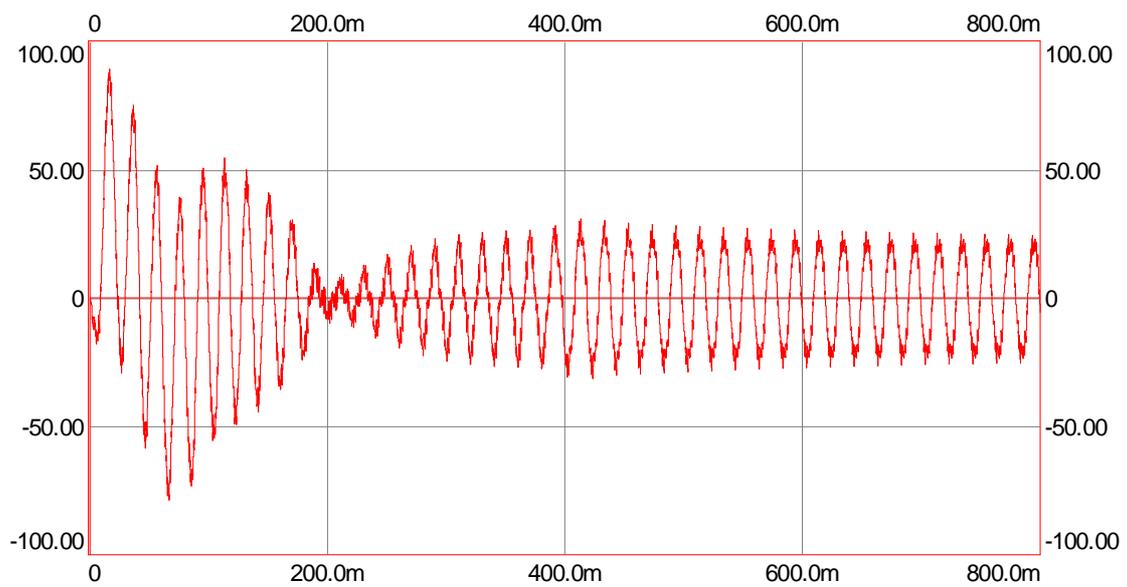


Figura 79. $I_{ry}(t)$. Variable observada.

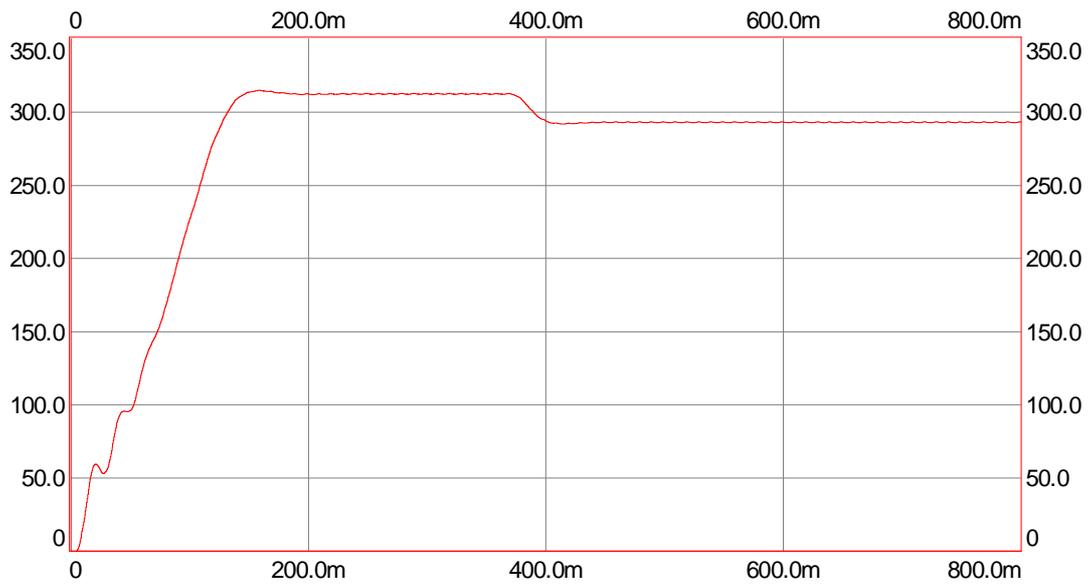


Figura 80. $\omega_r(t)$. Variable medida y filtrada.

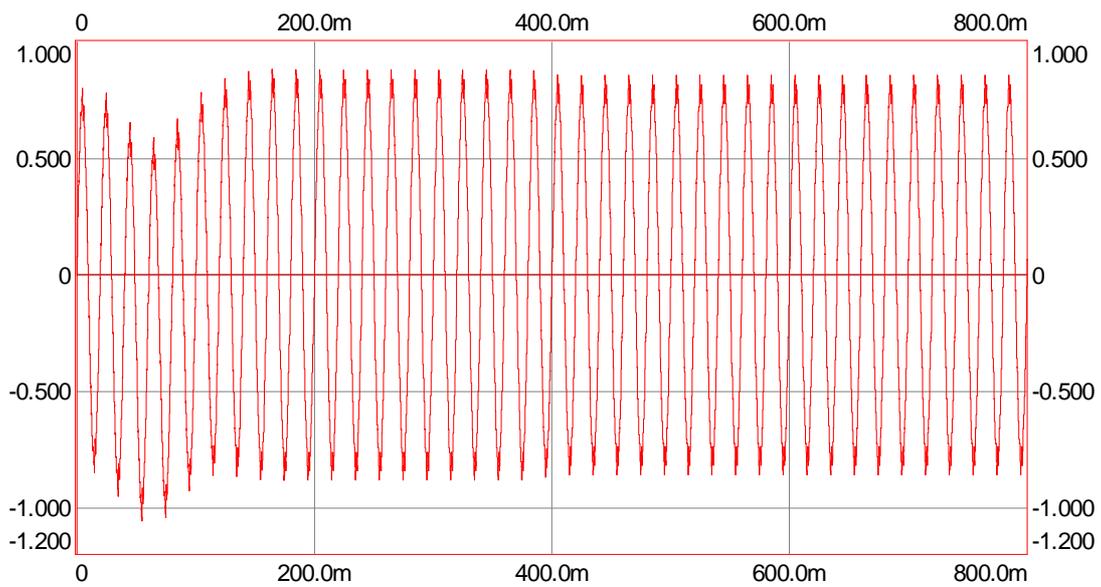
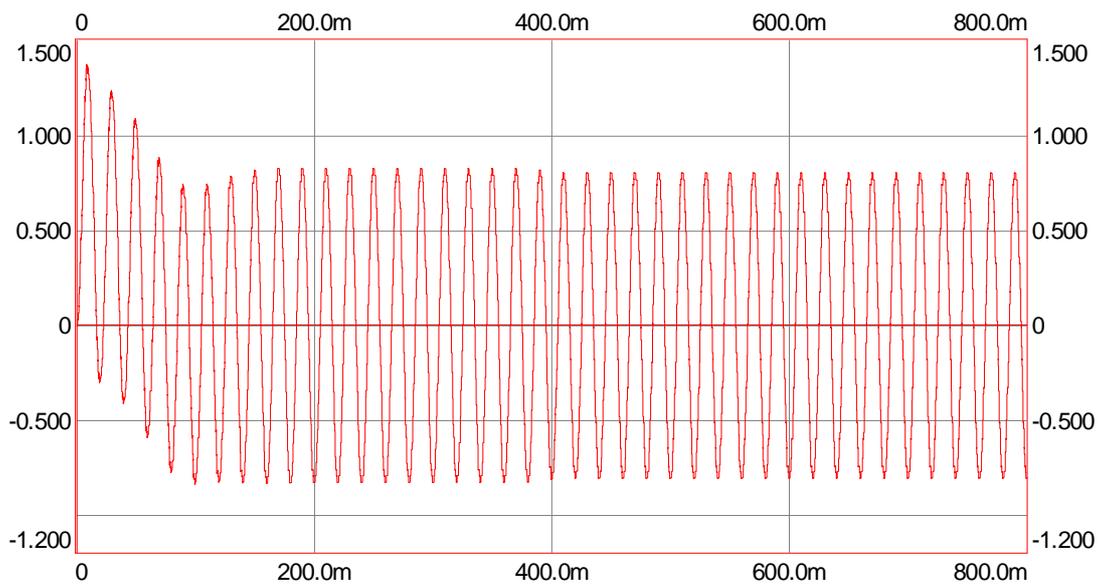
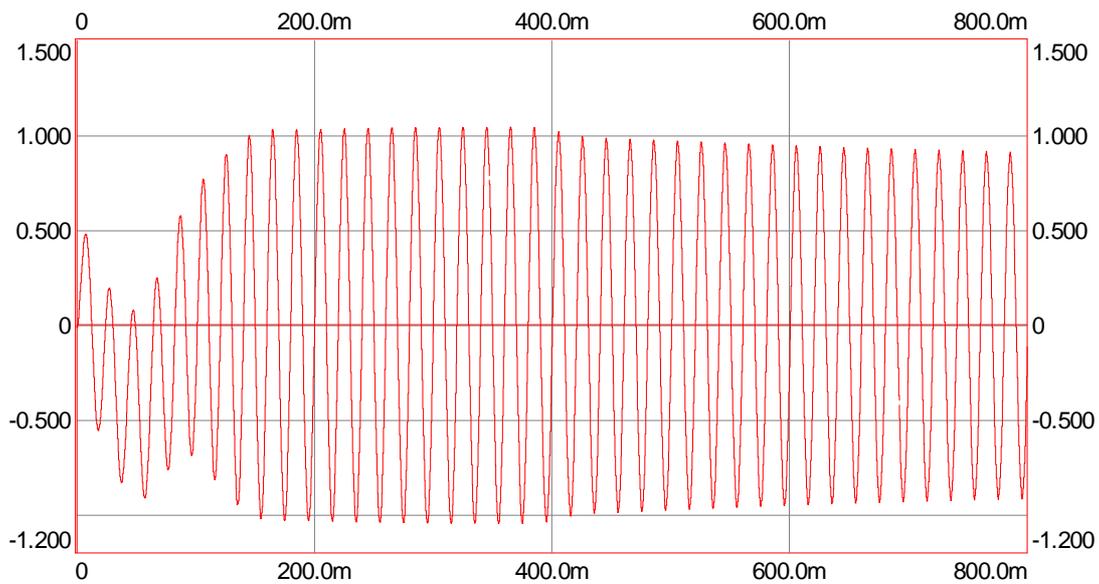
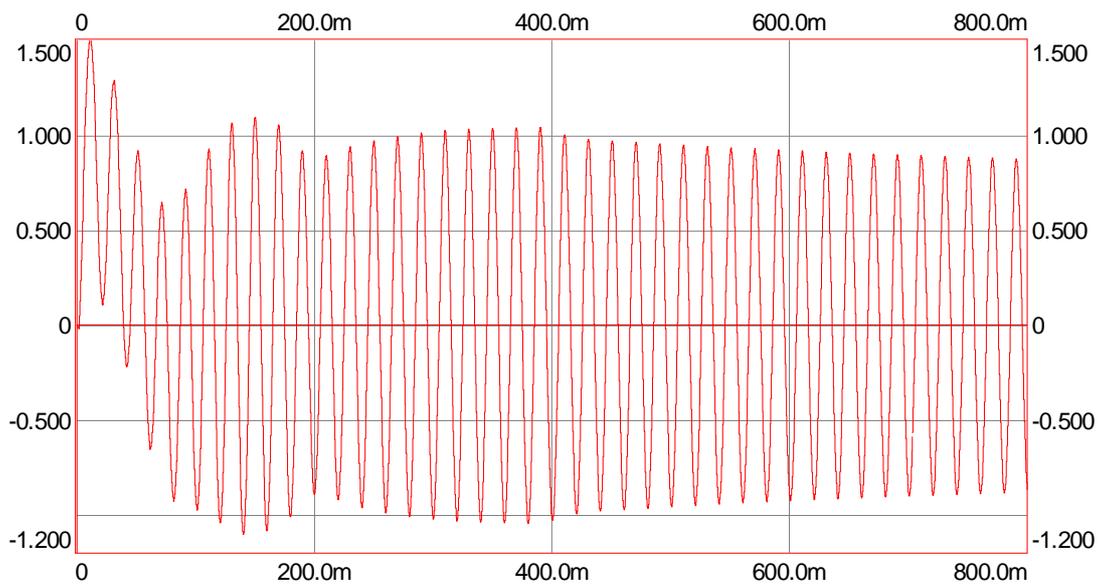
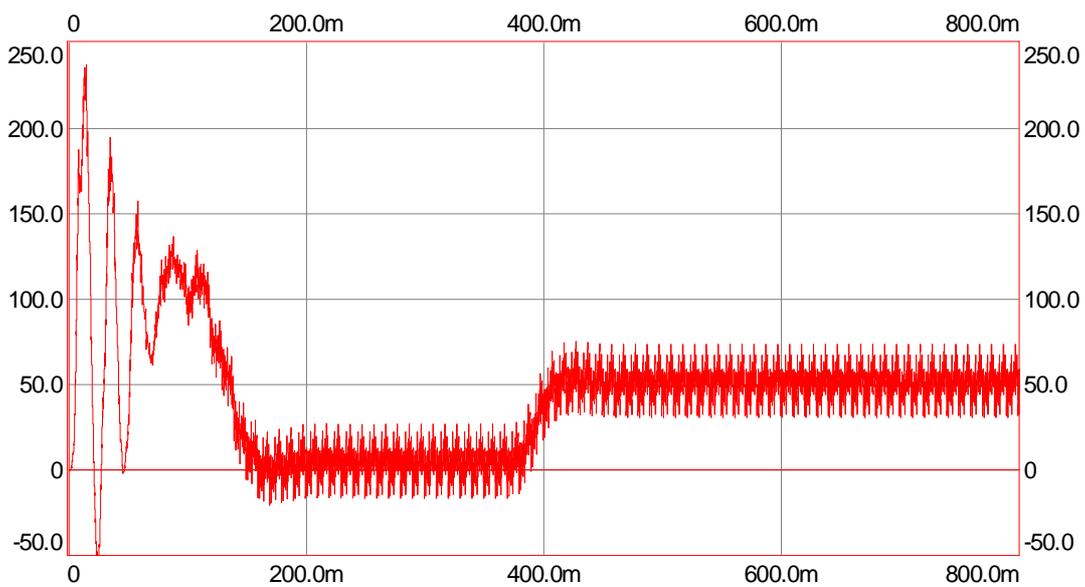


Figura 81. $\Psi_{sx}(t)$.

Figura 82. $\hat{\Psi}_{sy}(t)$.Figura 83. $\hat{\Psi}_{rx}(t)$.

Figura 84. $\hat{\Psi}_{ry}(t)$.Figura 85. $\hat{M}_i(t)$.

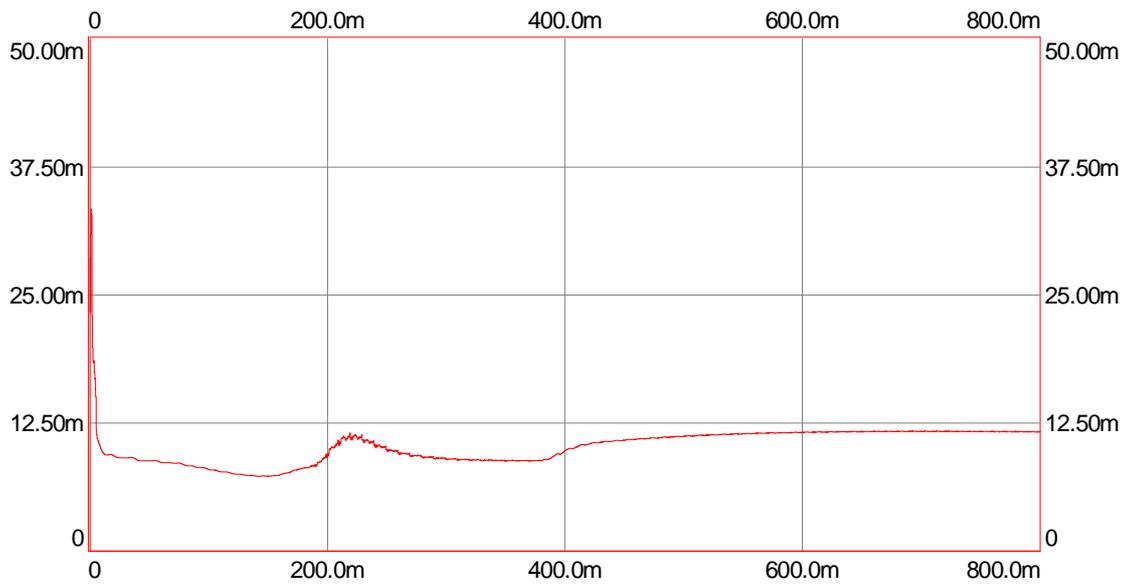


Figura 86. $\hat{L}_r(t)$.

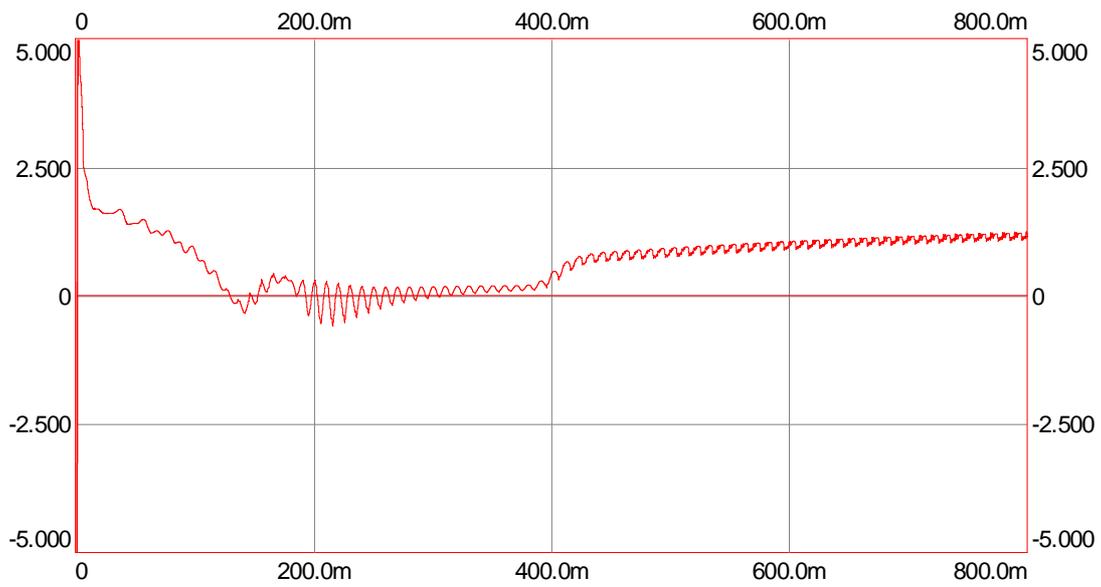


Figura 87. $\hat{f}_r(t)$.

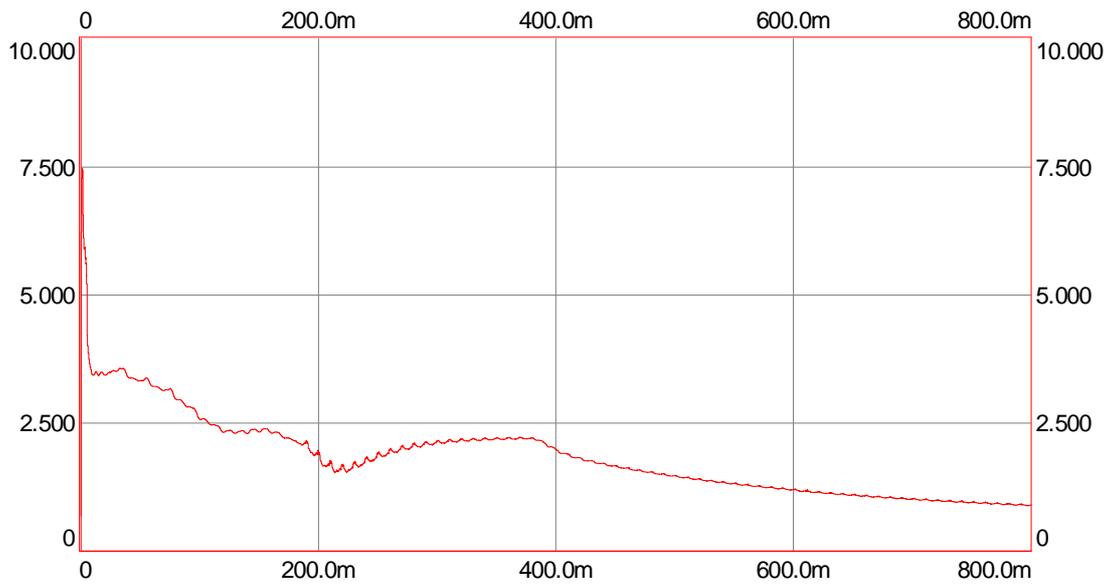


Figura 88. $\hat{a}_x(t)$.

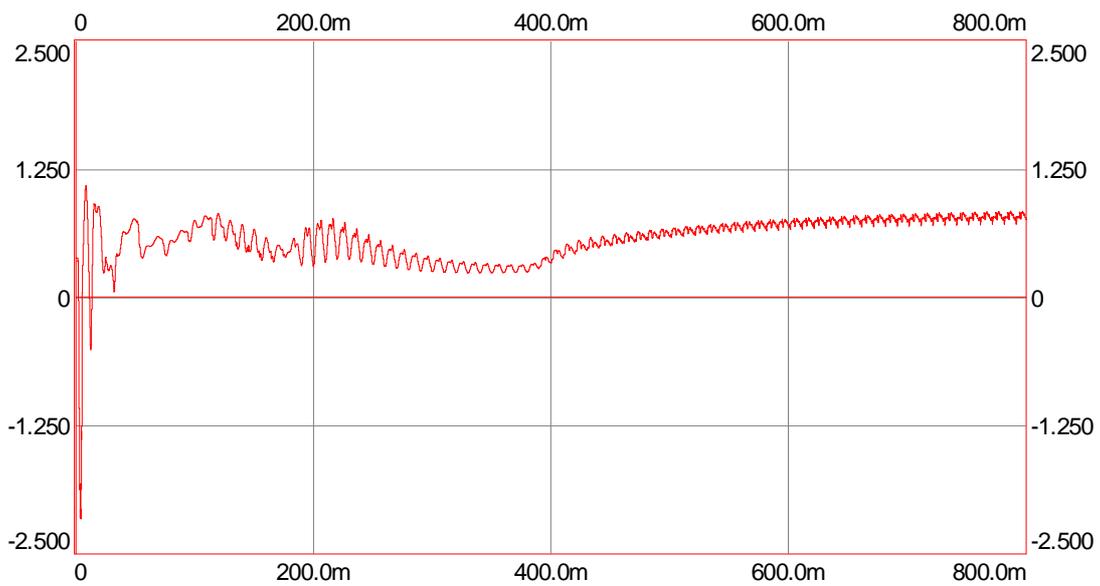


Figura 89. $\hat{b}_x(t)$.

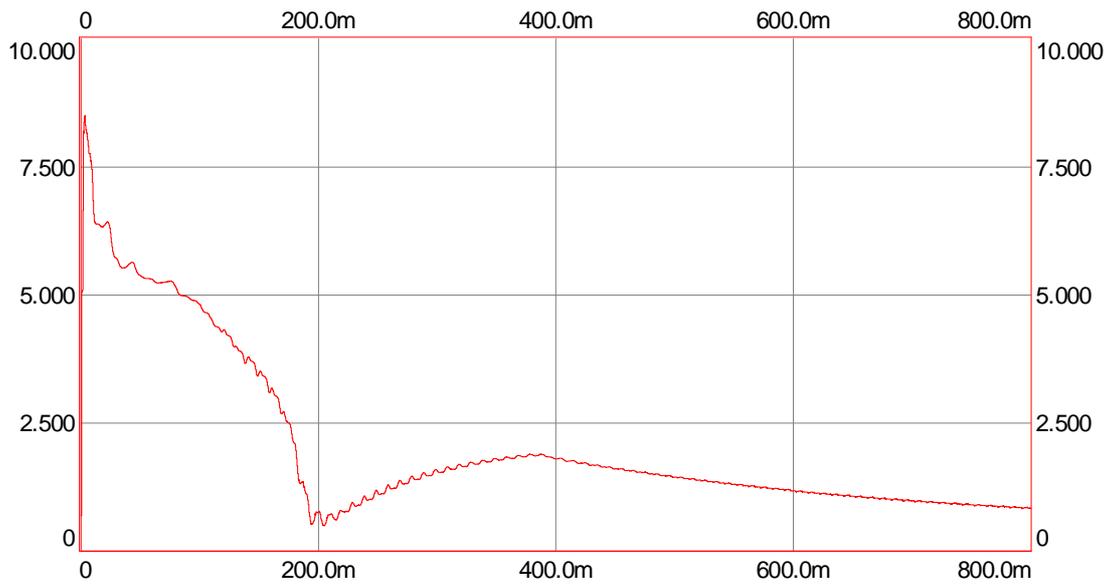


Figura 90 $\hat{a}_y(t)$.

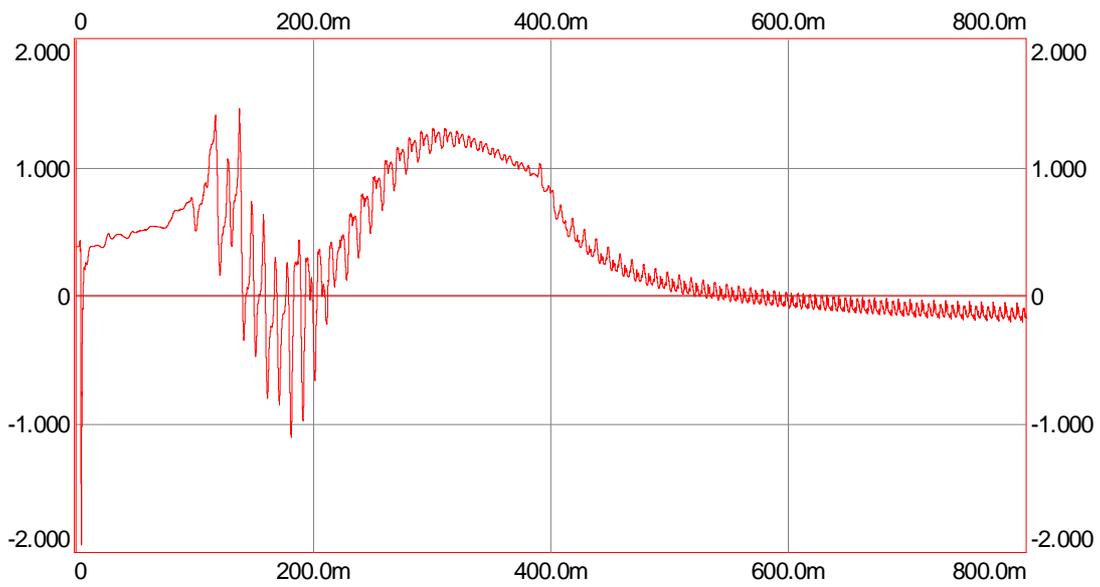


Figura 91. $\hat{b}_y(t)$.

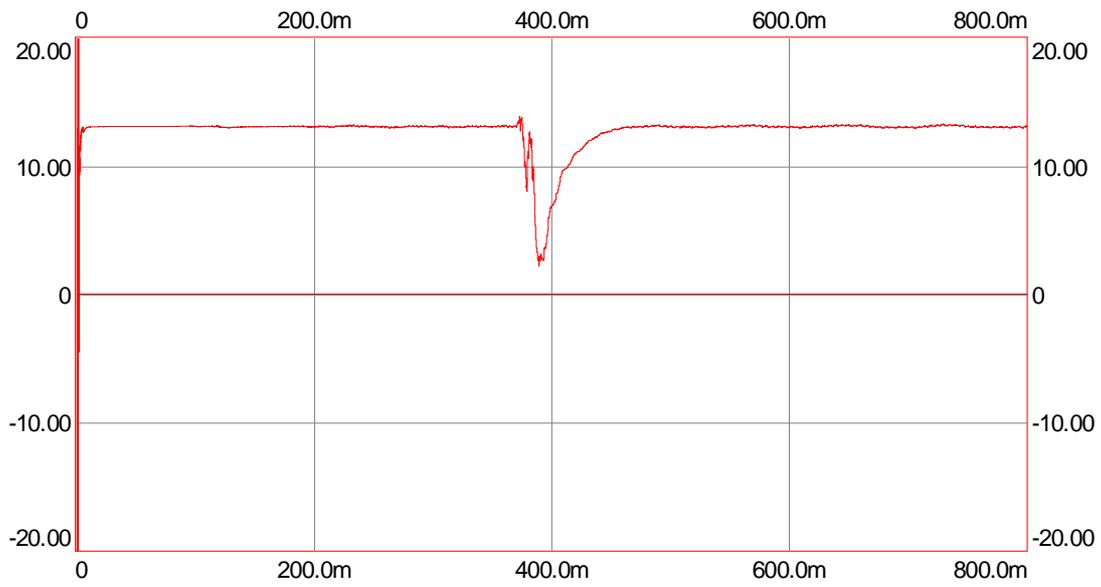


Figura 92. $\hat{\theta}(t) = 1/\hat{J}(t)$.

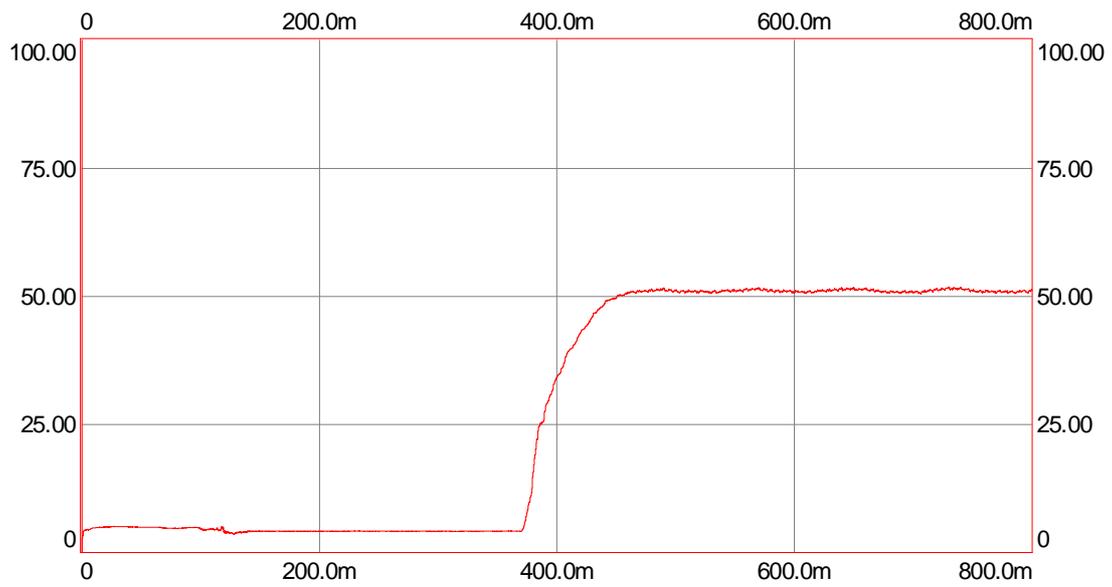


Figura 93. $\hat{M}_c(t)$.

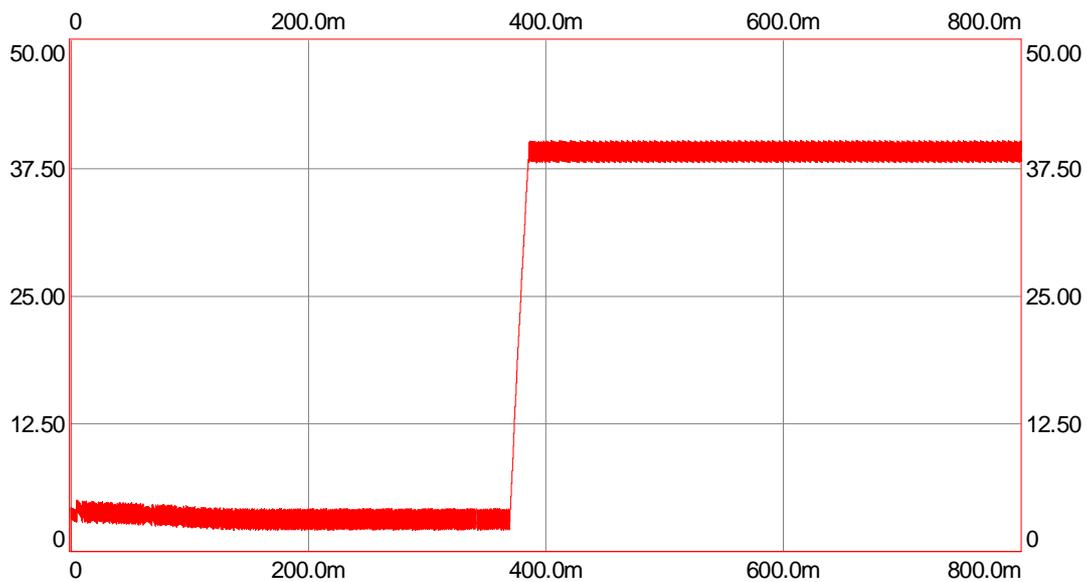


Figura 94. $I(t)$. Corriente por el inducido de la máquina de corriente continua.

La tabla que aparece a continuación resume el valor final de los parámetros estimados en cada caso y su comparación respecto a los obtenidos en los ensayos fuera de línea:

Tabla 1. Resultados de identificación. Modelo completo. Alimentación mediante ondulator PWM

	I_r (mH)	r_r (Ω)	$\tau_r = I_r / r_r$ (ms)	a_x	b_x	a_y	b_y	J
Fuera de línea	7.3	0.857	8.52	0.61	0.39	0.61	0.39	0.076
Línea	10.68	1.15	9.28	0.76	0.78	0.726	-0.029	0.075
Diferencia (%)	46.3	34.1	9.00	24.2	100	19.0	107	1.33

A la vista de los resultados las discrepancias en los parámetros son grandes y podría cuestionar el resultado. Evidentemente, si lo que se pretende únicamente es valorar los parámetros del modelo, este resultado es poco esperanzador.

En [Nelles 01, cap 2] se demuestra que para el caso no lineal, NO es posible garantizar que el conjunto de parámetros obtenidos coincida con los verdaderos (o los que se consideran como tales). Los sistemas en que las ecuaciones son lineales normalmente son identificables.

Modelo reducido.

Ya que lo deseado realmente es la estimación del conjunto de parámetros, se deben hacer suposiciones que lleven a un conjunto de ecuaciones en que las funciones sean invertibles; a tal fin se propone en el epígrafe que sigue una modelización reducida en que los únicos parámetros desconocidos son los rotóricos. Los parámetros de estator (resistencia) y de saturación (a , b , n) se consideran conocidos y constantes; Estos parámetros pueden encontrarse mediante ensayos previos en vacío del sistema, tales como los que realizan los equipos actuales de control de velocidad.

Se parte de las expresiones del observador discreto (22), repetidas aquí por comodidad:

$$\begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{sx}(t+1) \\ \hat{\Psi}_{sy}(t+1) \\ \hat{\Psi}_{rx}(t+1) \\ \hat{\Psi}_{ry}(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{sx}(t) \\ \hat{\Psi}_{sy}(t) \\ \hat{\Psi}_{rx}(t) \\ \hat{\Psi}_{ry}(t) \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} -\frac{r_s}{\hat{L}_{rl}} & \omega & \frac{r_s}{\hat{L}_{rl}} & 0 \\ -\omega & -\frac{r_s}{\hat{L}_{rl}} & 0 & \frac{r_s}{\hat{L}_{rl}} \\ \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}} & 0 & -\frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}} & \omega - \omega_r \\ 0 & \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}} & -(\omega - \omega_r) & -\frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{sx} \\ \hat{\Psi}_{sy} \\ \hat{\Psi}_{rx} \\ \hat{\Psi}_{ry} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_s \cdot g(\hat{\Psi}_{sx}) \\ -r_s \cdot g(\hat{\Psi}_{sy}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{sx} & -k_{sy} \\ k_{sy} & k_{sx} \\ k_{rx} & -k_{ry} \\ k_{ry} & k_{sx} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i}_{sx} - i_{sx} \\ \hat{i}_{sy} - i_{sy} \end{pmatrix} \quad (34)$$

junto con las expresiones para las componentes de corriente estática observada:

$$\begin{aligned} \hat{i}_{sx}(t) &= \frac{1}{\hat{L}_{rl}} \cdot [\hat{\Psi}_{sx}(t) - \hat{\Psi}_{rx}(t)] + I_N \cdot \left(a_x \cdot \frac{\hat{\Psi}_{sx}(t)}{\Phi_N} + \hat{b}_x \cdot \left(\frac{\hat{\Psi}_{sx}(t)}{\Phi_N} \right)^n \right) \\ \hat{i}_{sy}(t) &= \frac{1}{\hat{L}_{rl}} \cdot [\hat{\Psi}_{sy}(t) - \hat{\Psi}_{ry}(t)] + I_N \cdot \left(a_y \cdot \frac{\hat{\Psi}_{sy}(t)}{\Phi_N} + \hat{b}_y \cdot \left(\frac{\hat{\Psi}_{sy}(t)}{\Phi_N} \right)^n \right) \end{aligned} \quad (35)$$

Para el caso que nos ocupa se considerarán conocidos los siguientes parámetros:

- Resistencia estática r_s
- Parámetros característicos de la saturación a , b y n . Se consideran iguales para cada componente.

. El flujo rotórico puede expresarse a partir de la siguiente ecuación en tiempo discreto:

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_{rx}(t+1) &= \hat{\Psi}_{rx}(t) \cdot \left(1 + h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}}\right) + h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}} \cdot \hat{\Psi}_{sx}(t) - h \cdot \omega_r \cdot \hat{\Psi}_{ry}(t) \\ \hat{\Psi}_{ry}(t+1) &= \hat{\Psi}_{ry}(t) \cdot \left(1 + h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}}\right) + h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}} \cdot \hat{\Psi}_{sy}(t) + h \cdot \omega_r \cdot \hat{\Psi}_{rx}(t)\end{aligned}\quad (36)$$

avanzando un paso de muestreo el conjunto de ecuaciones (35), y sustituyendo en ellas el (36) se llega a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\hat{i}_{sx}(t+1) &= \hat{\Psi}_{sx}(t+1) \cdot \left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}} + a_x \cdot \frac{I_N}{\Phi_N}\right) - \hat{\Psi}_{sx}(t) \cdot h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}^2} - \hat{\Psi}_{rx}(t) \cdot \left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}}(1 - h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}})\right) + \\ &+ \hat{\Psi}_{ry}(t) \cdot h \cdot \frac{\omega_r}{\hat{L}_{rl}} + [\hat{\Psi}_{sx}(t+1)]^n \cdot \frac{I_N}{\Phi_N^n} \cdot \hat{b}_x \\ \hat{i}_{sy}(t+1) &= \hat{\Psi}_{sy}(t+1) \cdot \left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}} + a_y \cdot \frac{I_N}{\Phi_N}\right) - \hat{\Psi}_{sy}(t) \cdot h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}^2} - \hat{\Psi}_{ry}(t) \cdot \left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}}(1 - h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}})\right) + \\ &- \hat{\Psi}_{rx}(t) \cdot h \cdot \frac{\omega_r}{\hat{L}_{rl}} + [\hat{\Psi}_{sy}(t+1)]^n \cdot \frac{I_N}{\Phi_N^n} \cdot \hat{b}_y\end{aligned}\quad (37)$$

las cuales pueden ensamblarse como sigue:

$$\begin{aligned}y &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i}_{sx}(t+1) - \hat{\Psi}_{sx}(t+1) \cdot a_x \cdot \frac{I_N}{\Phi_N} - [\hat{\Psi}_{sx}(t+1)]^n \cdot \frac{I_N}{\Phi_N^n} \cdot b_x \\ \hat{i}_{sy}(t+1) - \hat{\Psi}_{sy}(t+1) \cdot a_y \cdot \frac{I_N}{\Phi_N} - [\hat{\Psi}_{sy}(t+1)]^n \cdot \frac{I_N}{\Phi_N^n} \cdot b_y \end{pmatrix} \\ \Phi^T &= \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{sx}(t+1) & -\hat{\Psi}_{sx}(t) & -\hat{\Psi}_{rx}(t) & \hat{\Psi}_{ry}(t) \cdot \omega_r(t) \\ \hat{\Psi}_{sy}(t+1) & -\hat{\Psi}_{sy}(t) & -\hat{\Psi}_{ry}(t) & -\hat{\Psi}_{rx}(t) \cdot \omega_r(t) \end{pmatrix} \\ \hat{\theta}^T &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{L}_{rl}} & h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}^2} & \left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}}(1 - h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}})\right) & h \cdot \frac{1}{\hat{L}_{rl}} \end{pmatrix} \\ y &= \Phi^T \cdot \hat{\theta}\end{aligned}\quad (38)$$

Estas ecuaciones ya están en la forma canónica conveniente para su implementación en un algoritmo de cálculo por mínimos cuadrados. El conjunto de ecuaciones formado por el observador (34), junto con la ecuación de identificación (38), configuran las expresiones de un observador de tipo adaptativo que consigue a la vez identificar los parámetros desconocidos y el flujo rotórico.

La ecuación (38) puede ser optimizada de cara a su implementación en tiempo real si se considera la siguiente relación entre los parámetros desconocidos:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_4 &= h \cdot \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_3 &= \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2\end{aligned}\quad (39)$$

donde:

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 & \hat{\theta}_3 & \hat{\theta}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{L}_{rl}} & h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}^2} & \left(\frac{1}{\hat{L}_{rl}} (1-h) \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}} \right) & h \cdot \frac{1}{\hat{L}_{rl}} \end{pmatrix} \quad (40)$$

Finalmente las ecuaciones de identificación quedan como sigue:

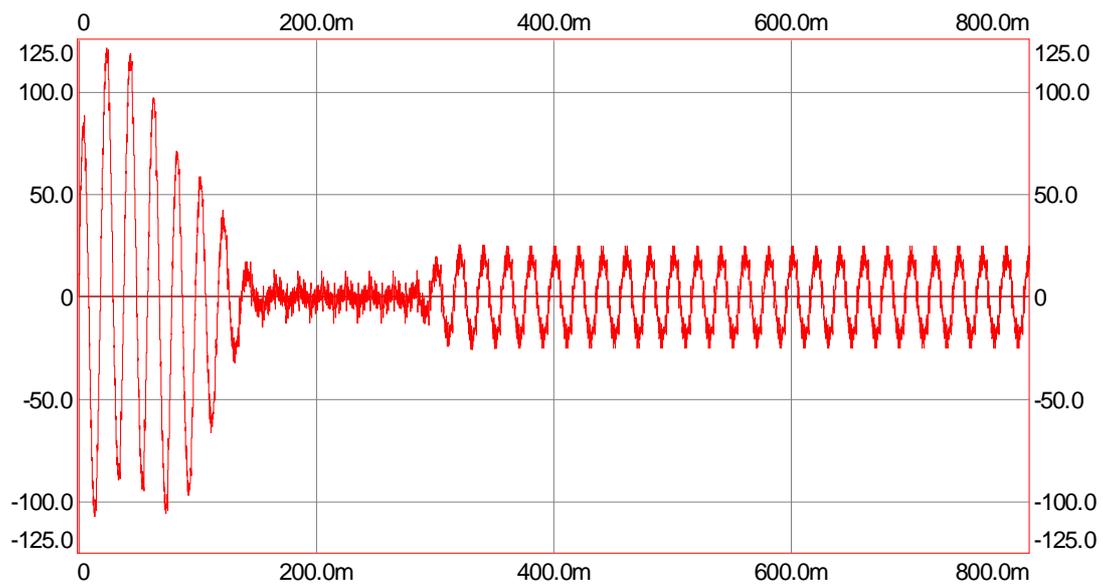
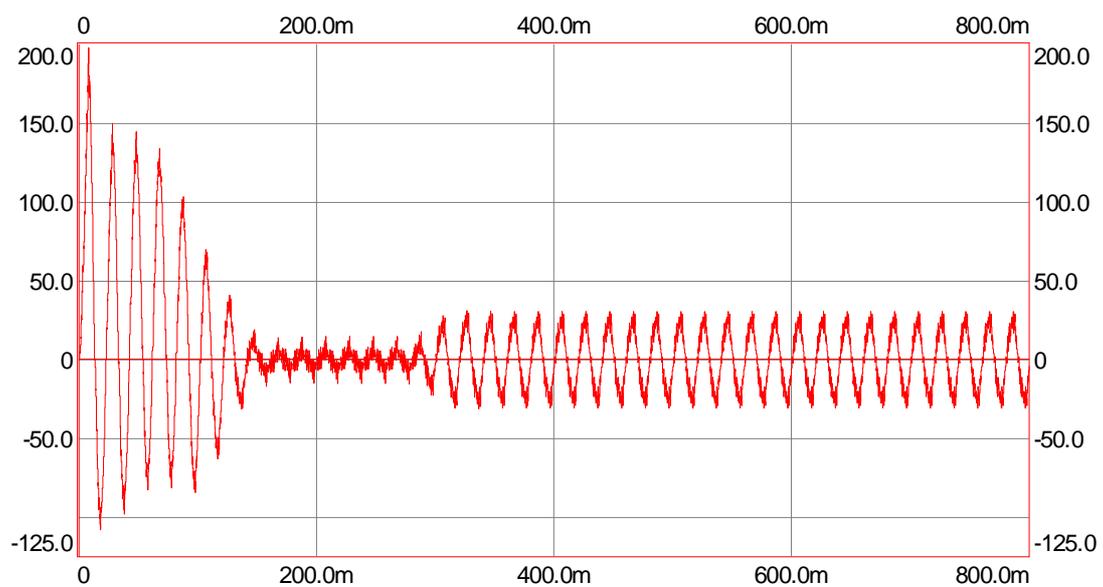
$$\begin{aligned}y &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i}_{sx}(t+1) - \hat{\Psi}_{sx}(t+1) \cdot a_x \cdot \frac{I_N}{\Phi_N} - [\hat{\Psi}_{sx}(t+1)]^n \cdot \frac{I_N}{\Phi_N^n} \cdot b_x \\ \hat{i}_{sy}(t+1) - \hat{\Psi}_{sy}(t+1) \cdot a_y \cdot \frac{I_N}{\Phi_N} - [\hat{\Psi}_{sy}(t+1)]^n \cdot \frac{I_N}{\Phi_N^n} \cdot b_y \end{pmatrix} \\ \Phi^T &= \begin{pmatrix} \left(\hat{\Psi}_{sx}(t+1) - \hat{\Psi}_{rx}(t) + h \cdot \hat{\Psi}_{ry}(t) \cdot \omega_r(t) \right) & \left(\hat{\Psi}_{rx}(t) - \hat{\Psi}_{sx}(t) \right) \\ \left(\hat{\Psi}_{sy}(t+1) - \hat{\Psi}_{ry}(t) - h \cdot \hat{\Psi}_{rx}(t) \cdot \omega_r(t) \right) & \left(\hat{\Psi}_{ry}(t) - \hat{\Psi}_{sy}(t) \right) \end{pmatrix} \\ \hat{\theta}^T &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{L}_{rl}} & h \cdot \frac{\hat{r}_r}{\hat{L}_{rl}^2} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (41)$$

Para este caso las ecuaciones del algoritmo de identificación se escriben como sigue:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(k)_{2 \times 1} &= \hat{\theta}(k-1)_{2 \times 1} + K(k) \cdot \varepsilon(k)_{2 \times 1} \\ \varepsilon(k)_{2 \times 1} &= y(k)_{2 \times 1} - \Phi(k)_{2 \times 2} \cdot \hat{\theta}(k-1)_{2 \times 1} \\ P(k) &= P(k-1) - K(k) \cdot \Phi(k) \cdot P(k-1) \\ K(k)_{2 \times 2} &= P(k-1)_{2 \times 2} \cdot \Phi^T(k)_{2 \times 2} \cdot \left(I_{2 \times 2} + \Phi(k)_{2 \times 2} \cdot P(k-1)_{2 \times 2} \cdot \Phi^T(k)_{2 \times 2} \right)^{-1}\end{aligned}\quad (42)$$

que resulta muy compacto de cara a su implementación en tiempo real (inversión de una matriz 2x2)

Las gráficas que siguen corresponden al caso de arranque en vacío ($m_0 \approx 5$ Nm, relativas al par de pérdidas) de la máquina, y posterior aplicación súbita del par nominal (≈ 50 Nm). La alimentación proviene de un ondulator PWM con las características indicadas anteriormente ($m_a = 0.9$; $m_f = 15$). La prueba se realiza aplicando tensión y frecuencia nominales, eliminando la rampa de arranque que suelen aplicar los onduladores en el arranque. Todas las magnitudes vienen expresadas en sus unidades naturales; los errores son valores absolutos.

Figura 95. $I_{sx}(t)$. Variable medida y filtrada..Figura 96. $I_{sy}(t)$. Variable medida y filtrada.

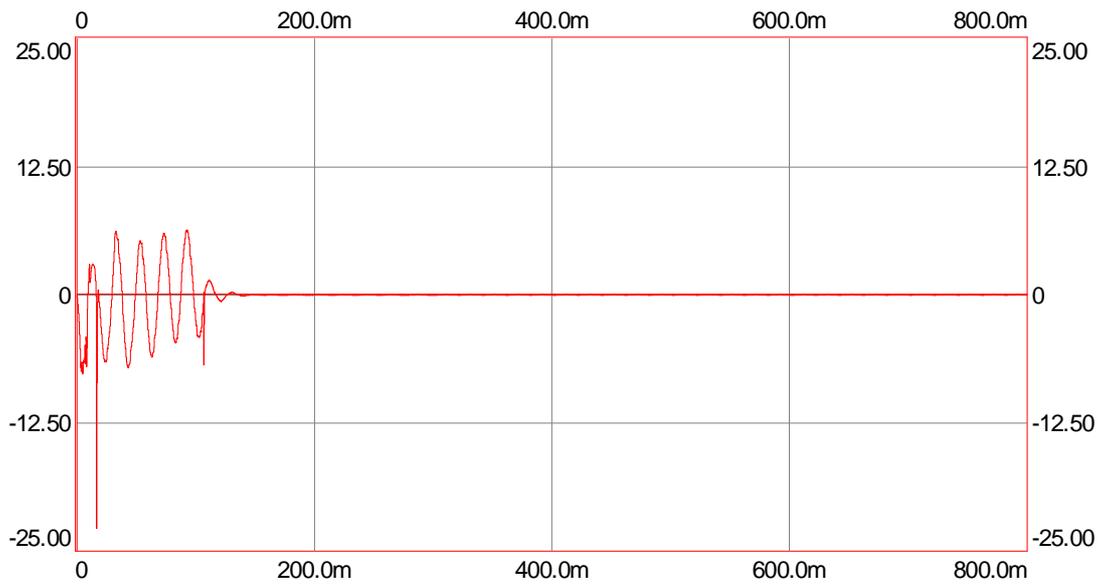


Figura 97. Error en corriente ($E_x(t)$).

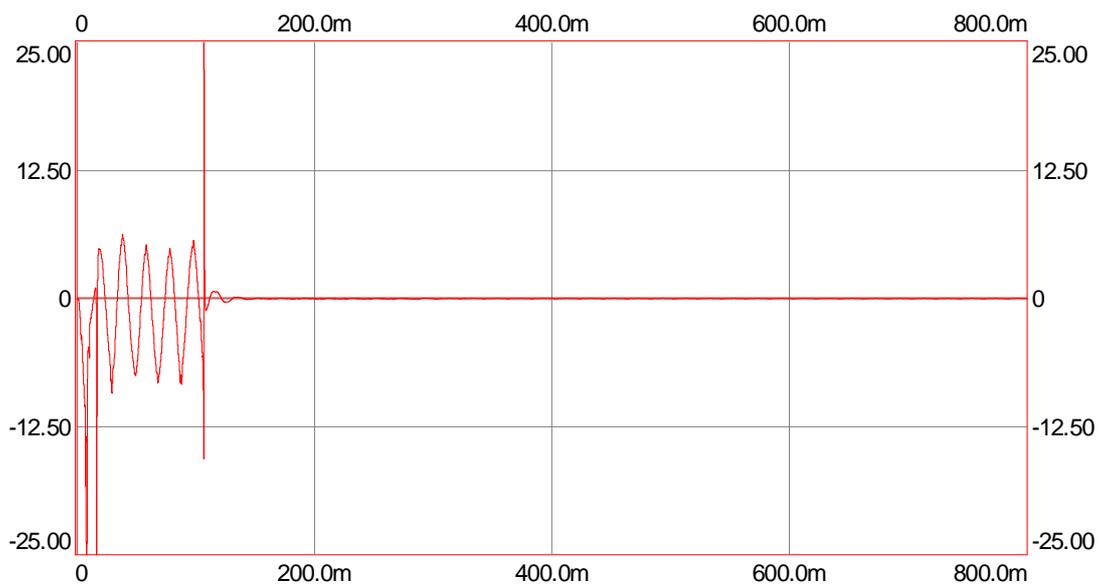
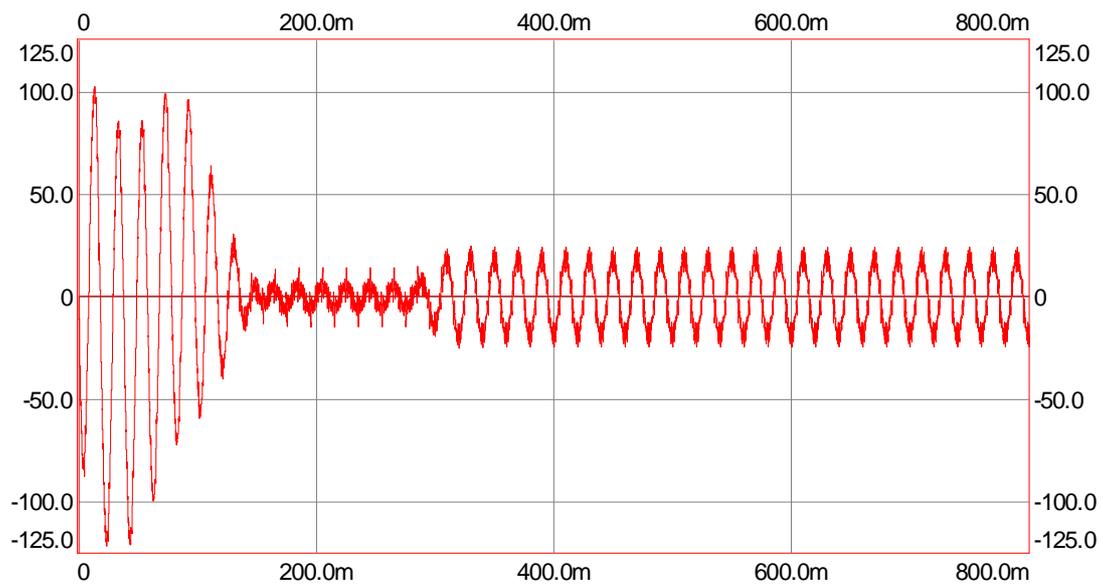
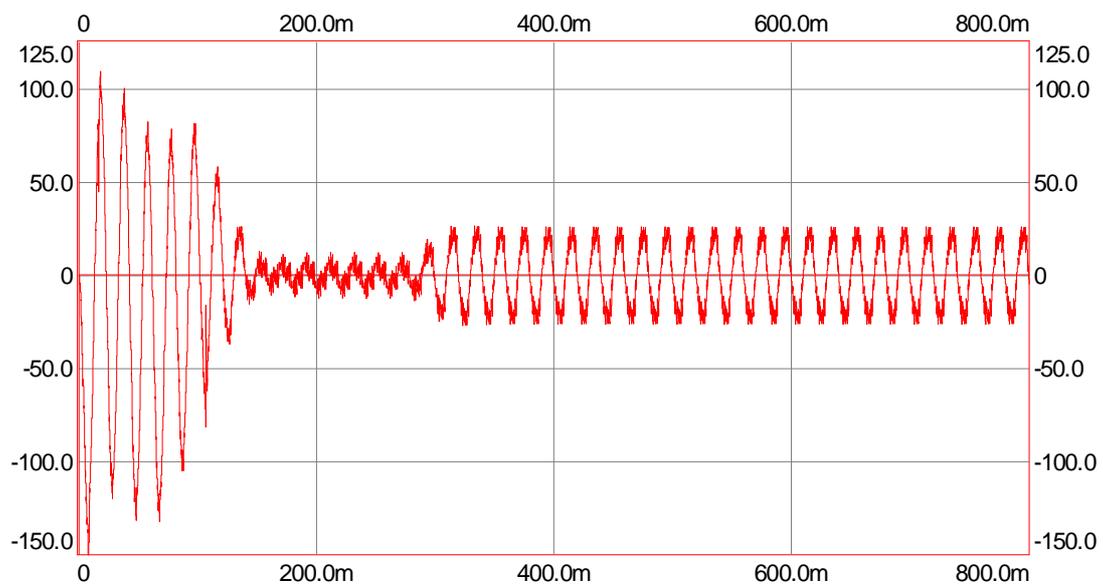


Figura 98. Error en corriente ($E_y(t)$).

Figura 99. $I_{rx}(t)$. Variable observada.Figura 100. $I_{ry}(t)$. Variable observada.

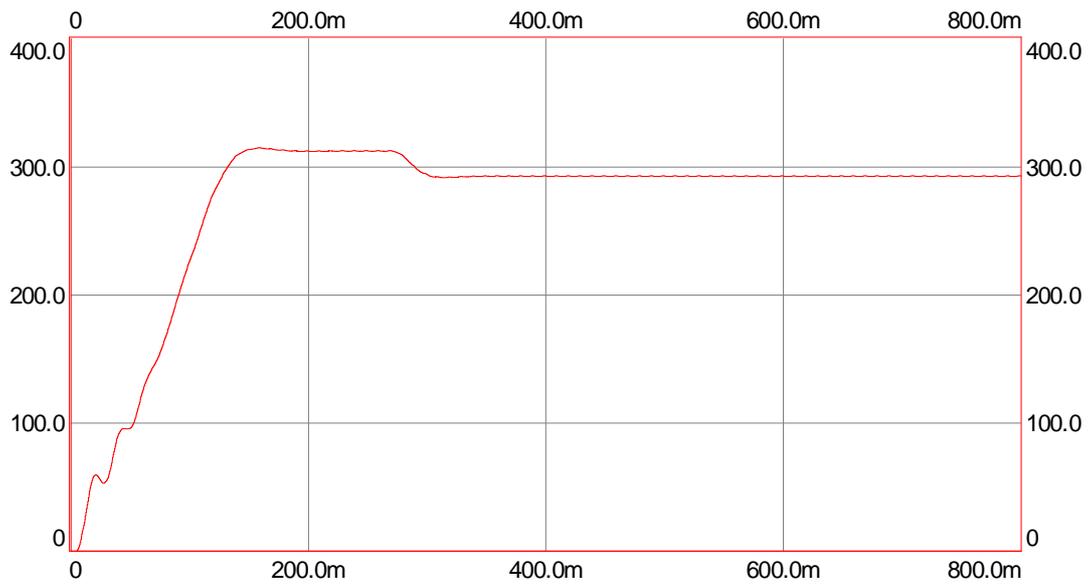


Figura 101. $\omega_r(t)$. Variable medida y filtrada.

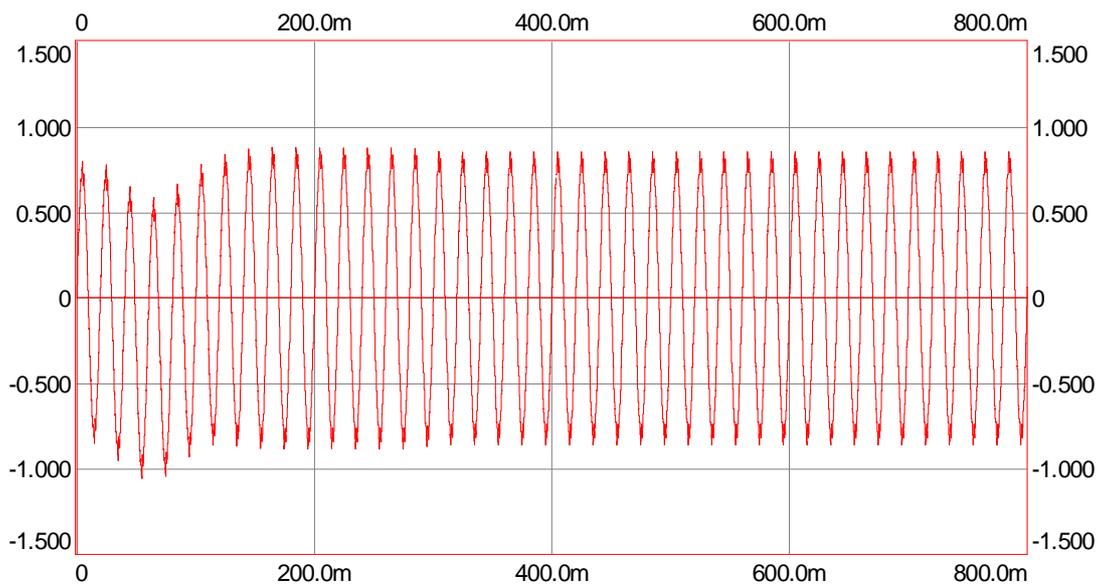
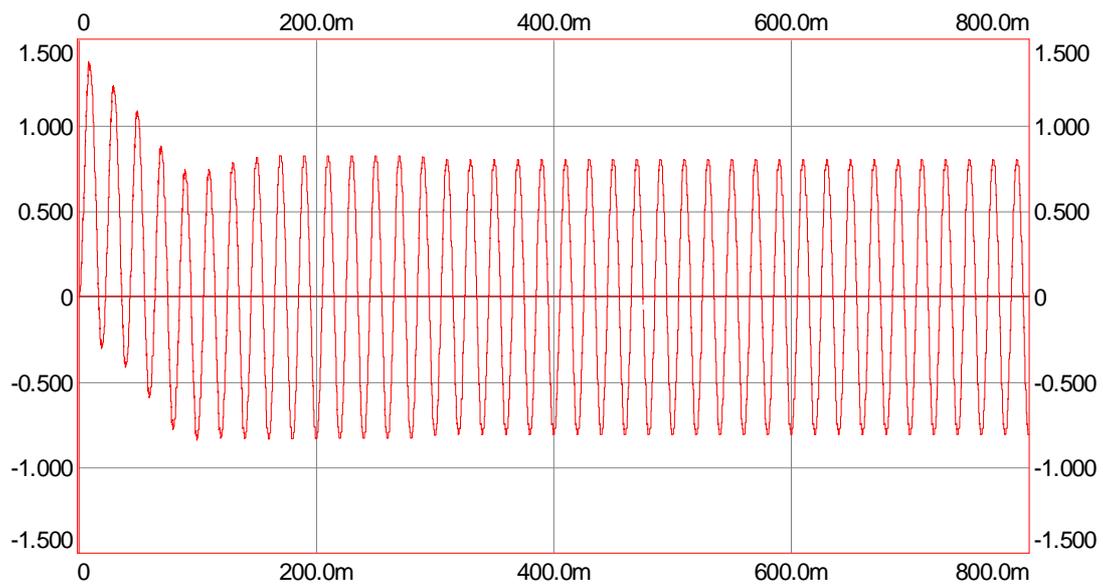
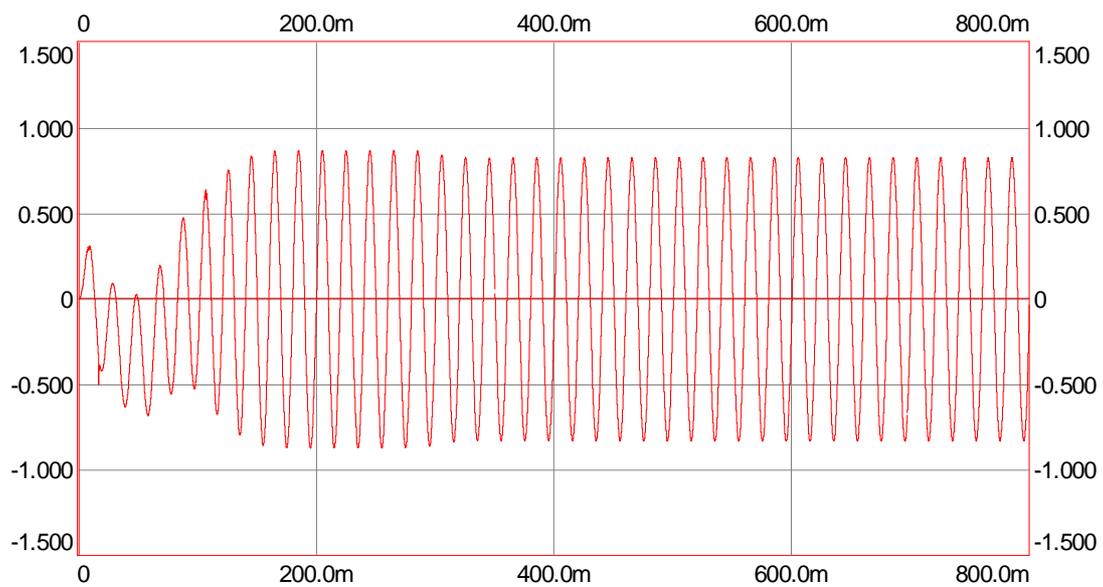
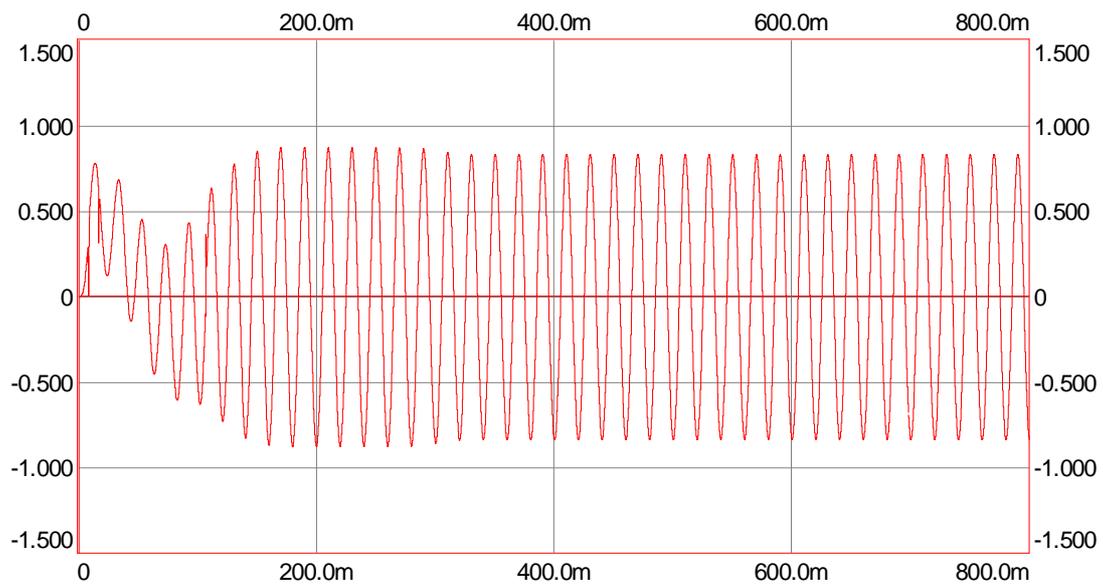
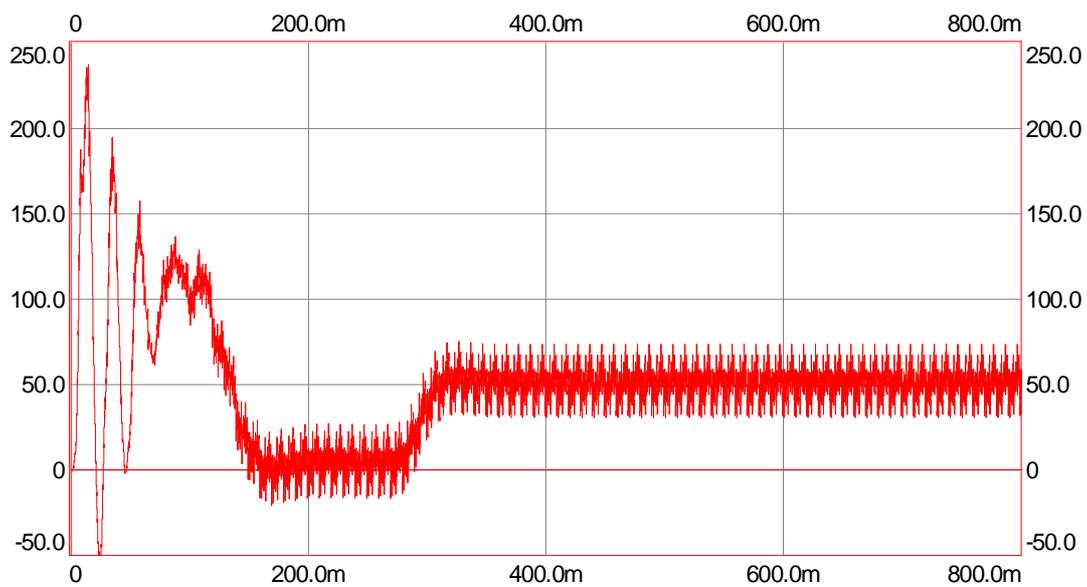


Figura 102. $\Psi_{sx}(t)$.

Figura 103. $\hat{\Psi}_{sy}(t)$.Figura 104. $\hat{\Psi}_{rx}(t)$.

Figura 105. $\Psi_{rv}(t)$.Figura 106. $\hat{M}_i(t)$.

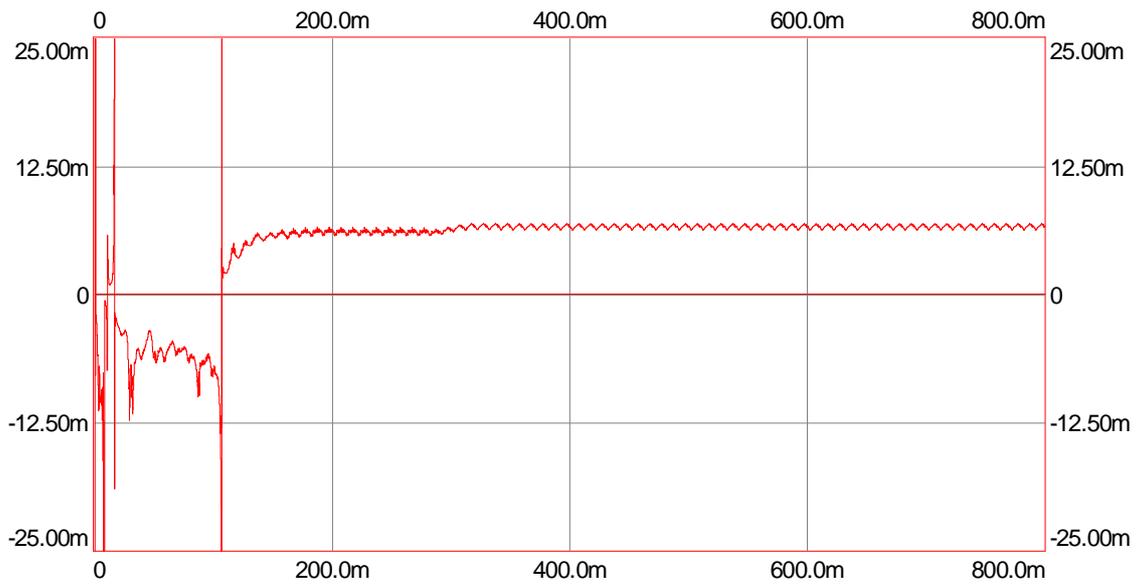


Figura 107. $\hat{L}_r(t)$.

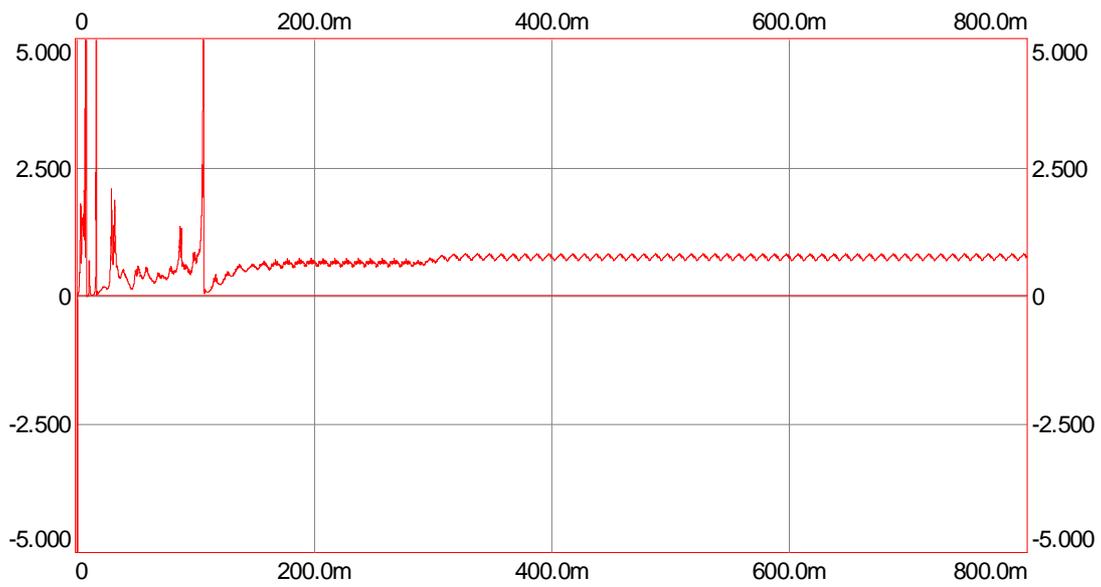
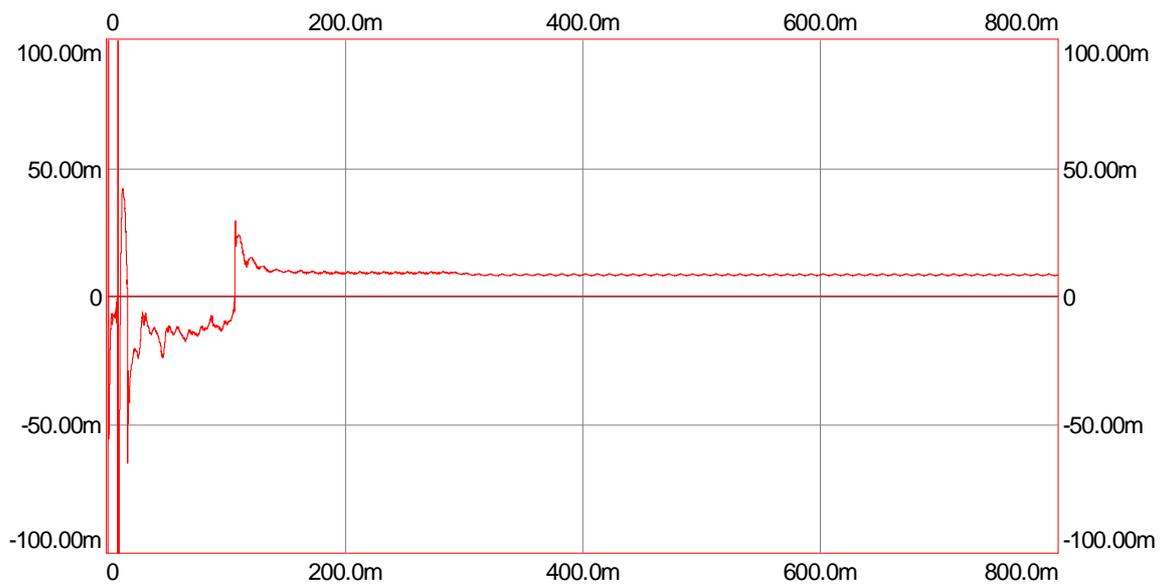
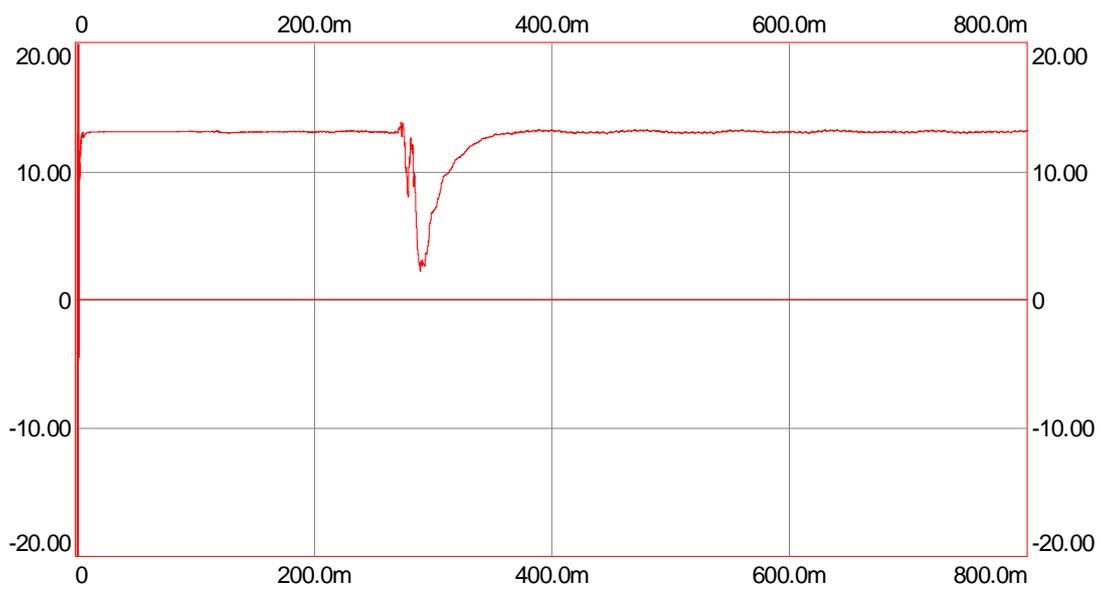


Figura 108. $\hat{\lambda}_r(t)$.

Figura 109. $\hat{\tau}_r(t)$.Figura 110. $\hat{\theta}(t) = 1/\hat{J}(t)$.

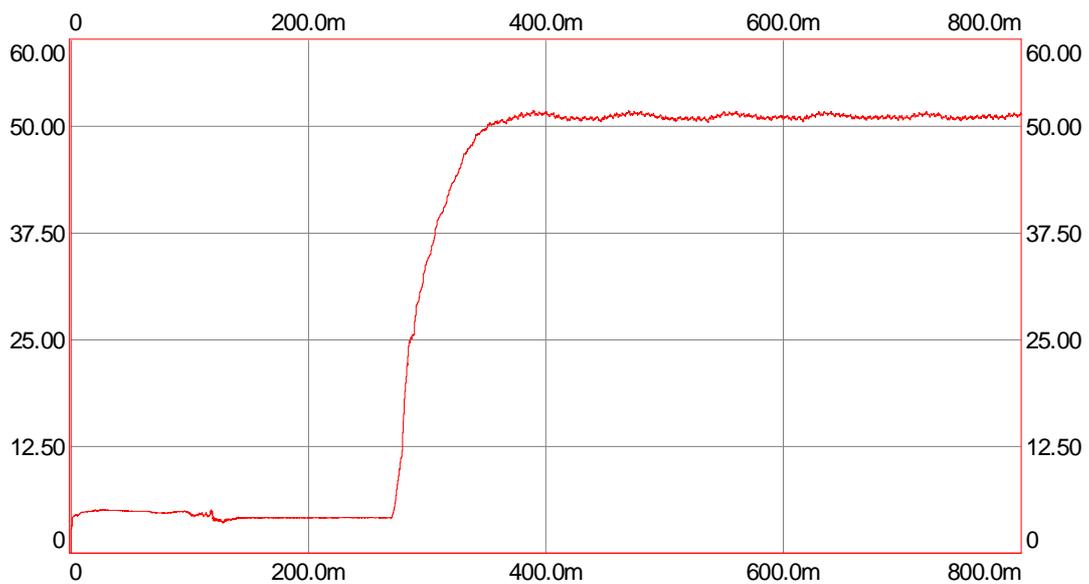


Figura 111. $\hat{M}_c(t)$.

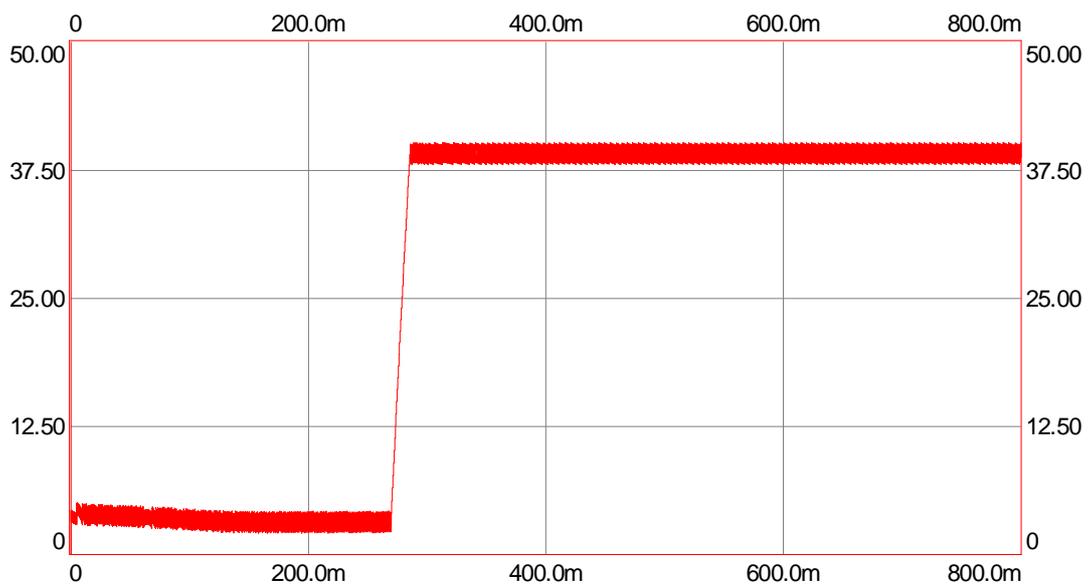


Figura 112. $I(t)$. Corriente por el inducido de la máquina de corriente continua.

La tabla que aparece a continuación resume el valor final de los parámetros estimados en cada caso y su comparación respecto a los obtenidos en los ensayos fuera de línea:

Tabla 2. Resultados de identificación. Modelo reducido. Alimentación mediante ondulador PWM

	I_r (mH)	r_r (Ω)	$\tau_r=I_r/r_r$ (ms)	J
Fuera de línea	7.3	0.857	8.52	0.076
Línea	7.721	0.772	8.74	0.075
Diferencia (%)	5.76	-9.92	2.58	1.33

Conclusiones.

- Se han considerado dos formulaciones para el problema de la obtención de las variables de estado desconocidas.
- El observador desarrollado es robusto respecto a las variaciones en los parámetros del mismo.
- El observador desarrollado mantiene su robustez en la zona de debilitación de campo.
- Únicamente en el caso de fuerte saturación (U_N ; 25 Hz – ½ de la frecuencia nominal, aproximadamente doble del flujo nominal) existen discrepancias apreciables en alguna de las variables del observador (Flujo rotórico, corriente estática); en todo caso las discrepancias son inferiores al 1%.

Modelo completo:

- Para asegurar la convergencia del algoritmo de identificación hace falta arrancar el algoritmo del observador con unos valores supuestos para los parámetros, y después de un tiempo de rodaje no inferior a 40 ms puede iniciarse el algoritmo de identificación de los mismos; tras múltiples ensayos y pruebas, y debido a la no linealidad del conjunto observador+identificador, no se ha podido garantizar la convergencia sin este proceso de inicialización.
- El conjunto de parámetros obtenidos difiere del que se deduce de los ensayos realizados fuera de línea (capítulo anterior); de cara a su implementación en los algoritmos de control esto no es un inconveniente siempre que lo deseado sea un modelo de “caja negra”, es decir que las variables externas sean las correctas. En el caso que nos ocupa esto es así. No puede garantizarse en ningún caso que las variables internas (flujo, par, corriente rotórica) sean las correctas. Considérese el caso del modelo polinomial para la relación flujo corriente:

$$\frac{i}{I_n} = a \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n$$

si los parámetros a y b estimados no coinciden con los obtenidos en los ensayos previos fuera de línea, no puede garantizarse que, aún obteniendo el mismo valor para la corriente, el flujo sea el correcto.

- La convergencia a valores constantes se produce únicamente para el caso de alimentación PWM. En el caso de alimentación sinusoidal no es posible garantizar la convergencia a valores correctos; la señal sinusoidal tiene un orden 2, insuficiente para resolver la identificación (6 parámetros).

- Se ha tenido en cuenta la posibilidad de considerar coeficientes de saturación distintos para cada componente (a_x , a_y , b_x , b_y). Con esta técnica puede *obviarse la utilización de los modelos con saturación cruzada*.
- La metodología empleada logra la convergencia de las variables observadas a las reales en un tiempo inferior a los dos periodos de la onda (40 ms a 50 Hz – una vez transcurrido el tiempo de inicialización).

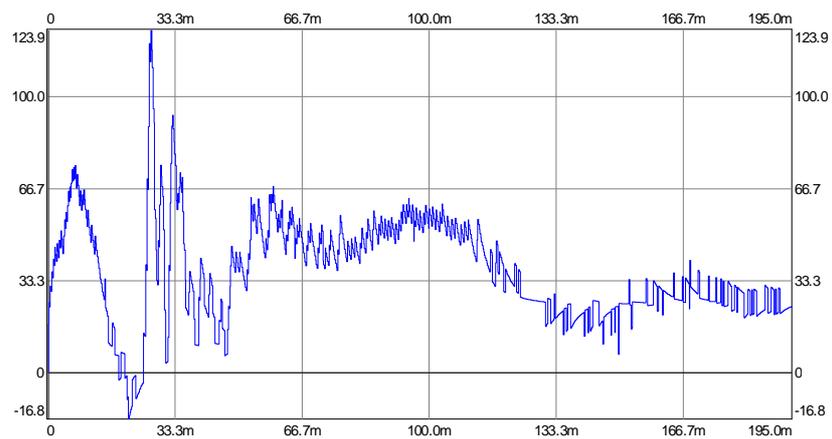
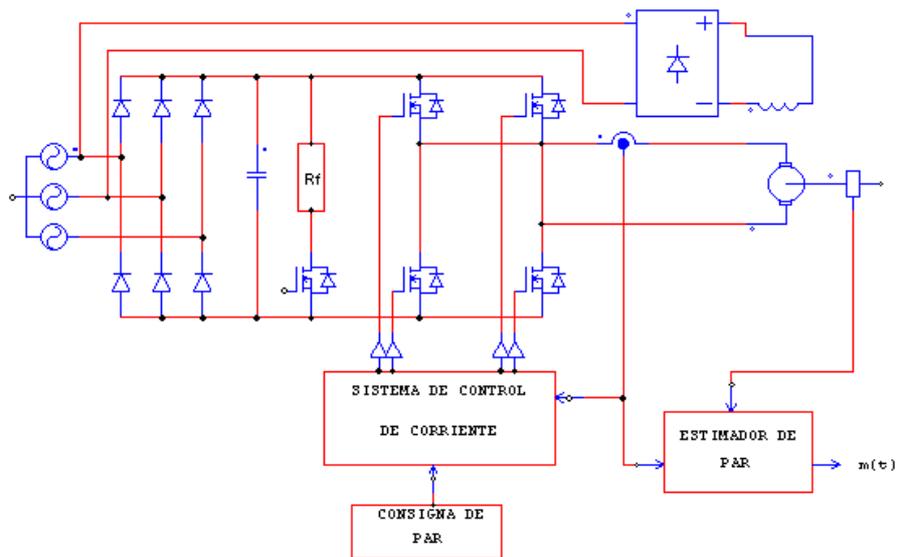
Modelo reducido:

- Es necesario el conocimiento completo de los parámetros de modelización del estator (resistencia, saturación) para su desarrollo. Estos pueden ser obtenidos anteriormente mediante el ensayo en vacío.
- La convergencia del algoritmo es mucho menos crítica que en el caso anterior. Es capaz de arrancar con valores iniciales cualesquiera, obteniéndose la convergencia en un tiempo inferior a 120 ms (alimentando la máquina a 50 Hz). Una vez arrancado el algoritmo se mantiene la convergencia ante variaciones del sistema.
- Los parámetros rotóricos obtenidos presentan una dispersión menor respecto a los obtenidos en los ensayos fuera de línea.

Parámetros mecánicos:

- El par de carga y el momento de inercia del conjunto presentan una convergencia a valores correctos en un tiempo no superior a 100 ms. El resultado de los parámetros mecánicos es independiente del modelo de identificación considerado.
- Para ambos modelos el error en la estimación de la constante de tiempo rotórica es suficientemente pequeño como para ser útil en el planteo de algoritmos de control que precisen de la misma (control por orientación del campo).

APLICACIONES



6. Aplicaciones

6. Aplicaciones.....	2
<i>Equipo para la determinación del par instantáneo.....</i>	2
<i>Control por corriente de la máquina de corriente continua.</i>	3
<i>Estimación del par de carga.....</i>	4
<i>Estimación del par electromagnético de la máquina asíncrona. Resultados de simulación.</i>	5
<i>Contrastación experimental.</i>	8
<i>Conclusiones.....</i>	10

6. Aplicaciones.

Equipo para la determinación del par instantáneo.

Como complemento al trabajo realizado y con el fin de disponer de un medidor calibrado del par instantáneo, se ha desarrollado y construido un equipo para el ensayo de accionamientos eléctricos.

Dicho equipo permite trabajar en cada uno de los cuatro cuadrantes del plano Par - Velocidad. La solución del sistema de potencia es a base del conjunto Rectificador - Troceador - Sistema de frenado.

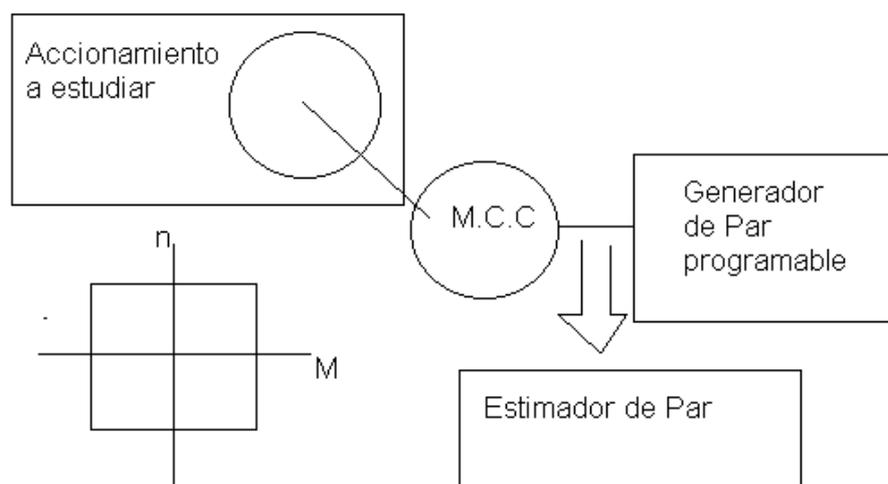


Figura 1. Equipo para la generación y estimación del par.

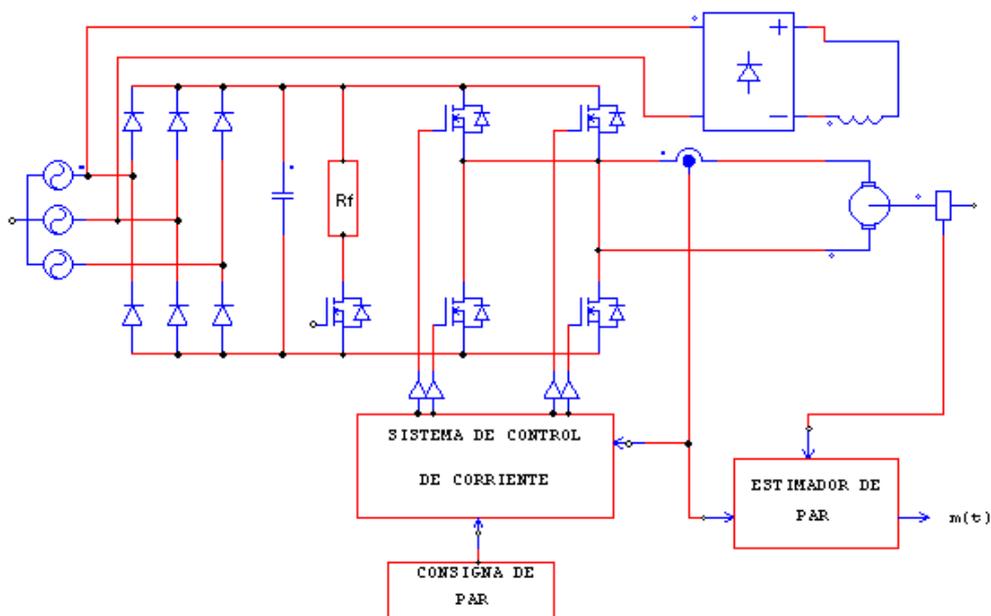


Figura 2. Etapa de potencia desarrollada.

Las características del equipo son las siguientes:

- Máquina de corriente continua: 7.5 kW; 220 V; 20 A; $V_{ex} = 195$ V; $i_{ex} = 1.64$ A; 1480 min^{-1} ; clase F; $J = 0.076 \text{ kgm}^2$.
- Troceador a base de IGBT; corriente máxima: 75 A; frecuencia de conmutación nominal: 10 kHz.
- Tensión del circuito de continua: 540 V.
- Posibilidad de control del par siguiendo cualquier ley de variación temporal.
- Medida de corriente y velocidad para la observación del par en el eje.

Control por corriente de la máquina de corriente continua.

A partir del sistema descriptor del accionamiento en c.c.:

$$\begin{pmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r}{l} & -\frac{k}{l} \\ \frac{k}{J} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{l} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \end{pmatrix} \cdot M_c \quad (1)$$

se plantea el control por banda de histéresis de la corriente en el inducido de la máquina, es decir:

$$\sigma = i - i_{ref} = 0; \quad \frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{r}{l} \cdot i - \frac{k}{l} \cdot \omega + \frac{1}{l} \cdot u_{eq} - \frac{di_{ref}}{dt} = 0$$

$$u_{eq} = -l \cdot \left(-\frac{r}{l} \cdot i - \frac{k}{l} \cdot \omega + \frac{1}{l} \cdot u_{eq} - \frac{di_{ref}}{dt} \right) \quad (3)$$

Para que exista este modo de funcionamiento debe cumplirse que $|u_{eq}| \leq U_{max}$, donde U_{max} es la máxima tensión aplicable a la máquina. Este tipo de control es muy robusto respecto a la variación de los parámetros del sistema y de respuesta rápida.

Si se admite que el par y la corriente son proporcionales, este controlador logra que el par de la máquina siga la referencia deseada. En la figura 3 se puede ver la respuesta ante una variación del tipo I_N hasta $-I_N$; obsérvese que el tiempo de respuesta es inferior a 2 ms.

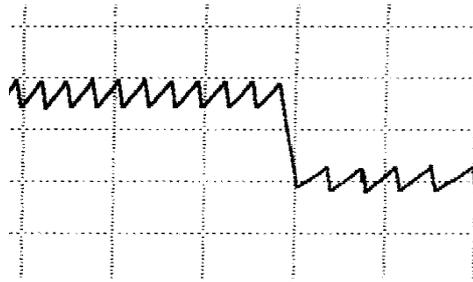


Figura 3 .Corriente por el inducido de la máquina de corriente continua. 1div= 20 A; 1 div= 2 ms.

Estimación del par de carga.

Si se admite la separación de modos eléctrico y mecánico, es posible plantear un observador para el subsistema mecánico, donde el par electromagnético se considera la entrada y el par de carga la perturbación desconocida:

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = k \cdot i - M_c \quad (4)$$

El sistema es gobernable y observable. Considerando la corriente por el inducido de la máquina de corriente continua como la entrada del sistema, se puede plantear el siguiente observador para el par \hat{M}_c :

$$\begin{aligned} \frac{dm_{aux}}{dt} &= -\gamma \cdot m_{aux} + \gamma \cdot (k \cdot i - \gamma \cdot J \cdot \omega_r) \\ \hat{M}_c &= m_{aux} + \gamma \cdot J \cdot \omega_r \end{aligned} \quad (5)$$

donde γ es la ganancia del observador y m_{aux} una variable auxiliar. Este observador sólo precisa la medida de la corriente y la velocidad en el eje de la máquina de corriente continua, y el conocimiento de *los valores nominales, o asignados como tales*, de la constante de par (k) y el momento de inercia (J) del sistema. Mediante el ajuste de la ganancia del observador puede lograrse que el resultado sea insensible a las variaciones en los parámetros de la máquina de c.c. utilizada (Boldea 99).

Mediante la adecuada elección de la ganancia, el observador se hace estable y convergente a los valores deseados con dinámica impuesta. La elección para la ecuación del par de carga depende de su ley de variación; el caso expuesto supone un par constante a tramos; en el caso de leyes de variación complejas se pueden elegir expresiones para el observador más elaboradas.

Obsérvese que (figura 1) el par de carga de la máquina de corriente continua es el par creado por el accionamiento acoplado a su eje.

Estimación del par electromagnético de la máquina asíncrona. Resultados de simulación.

De forma idéntica al capítulo anterior, mediante la expresión:

$$\hat{M}_i = \frac{3}{2} \cdot p \cdot (\hat{\Psi}_{sx} \cdot i_{sy} - \hat{\Psi}_{sy} \cdot i_{sx}) \quad (27)$$

puede estimarse el par a partir de las variables observadas (flujo) y medidas (corriente).

En las figuras que aparecen a continuación se representa, para los casos considerados en dicho capítulo, el par calculado, el observado y el de carga. Para este caso, el par de carga presenta una variación lineal con la velocidad y un cambio posterior a régimen de vacío.

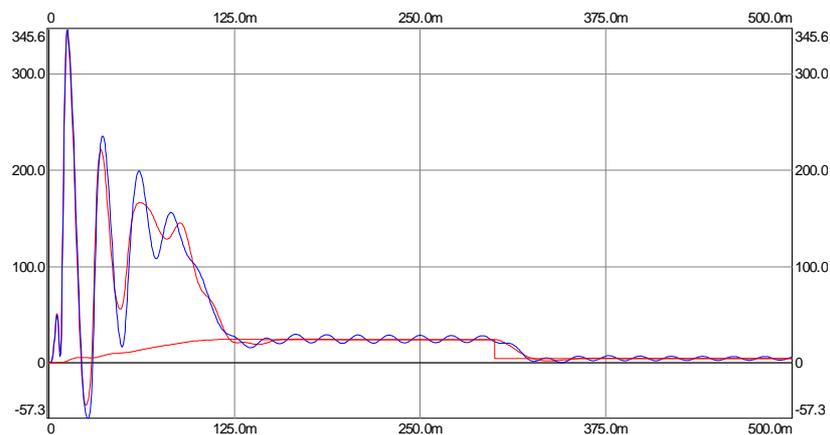


Figura 4. Par interno, par estimado y par de carga. Alimentación a $U_N - 50$ Hz.

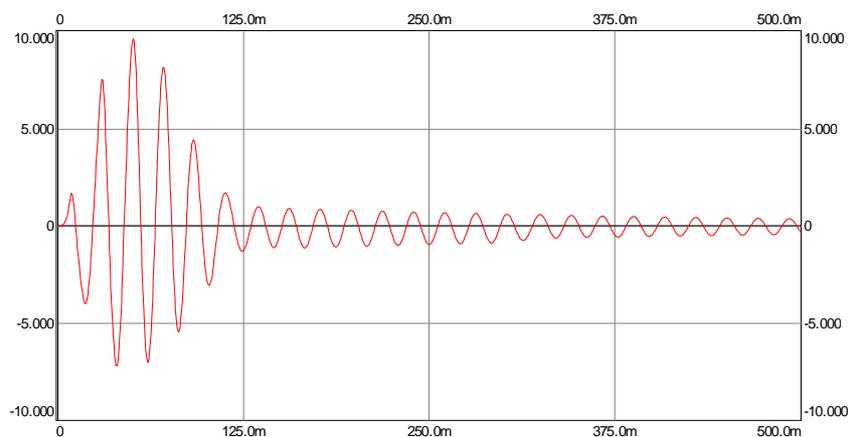


Figura 5. Error de par (%). Alimentación a $U_N - 50$ Hz.

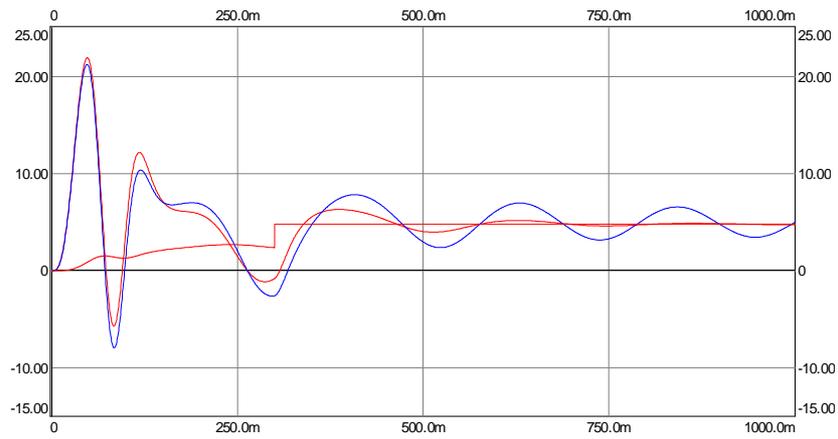


Figura 6. Par interno, par estimado y par de carga. Alimentación a U' – 5 Hz.

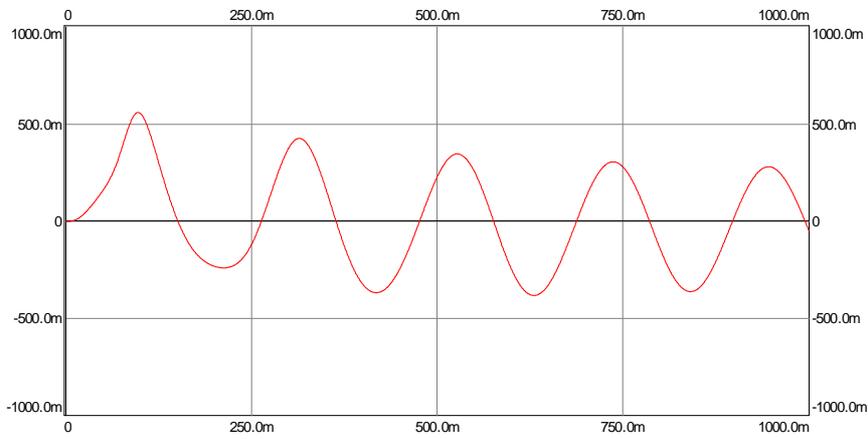


Figura 7. Error de par (%). Alimentación a U' – 5 Hz.

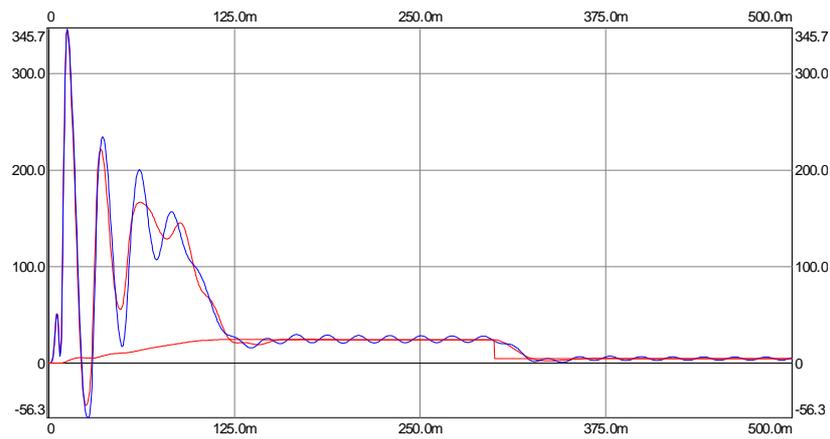


Figura 8. Par interno, par estimado y par de carga. Alimentación a U_N – 50 Hz. Parámetros modificados en + 10% (R_r 70%).

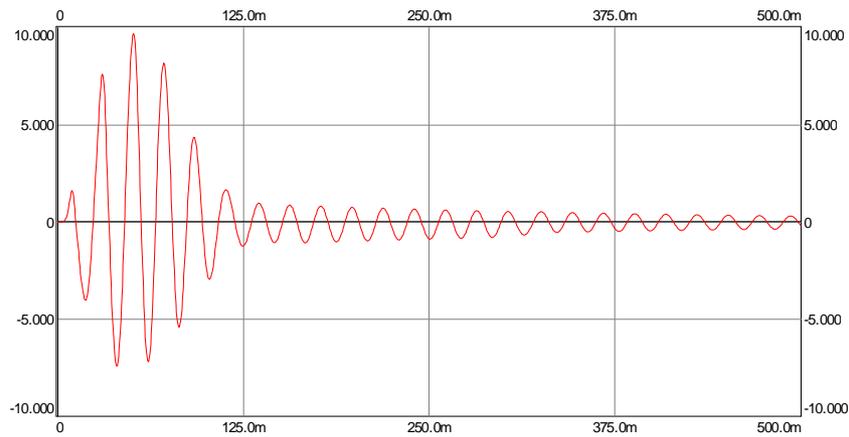


Figura 9. Error de par (%). Alimentación a $U_N - 50$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

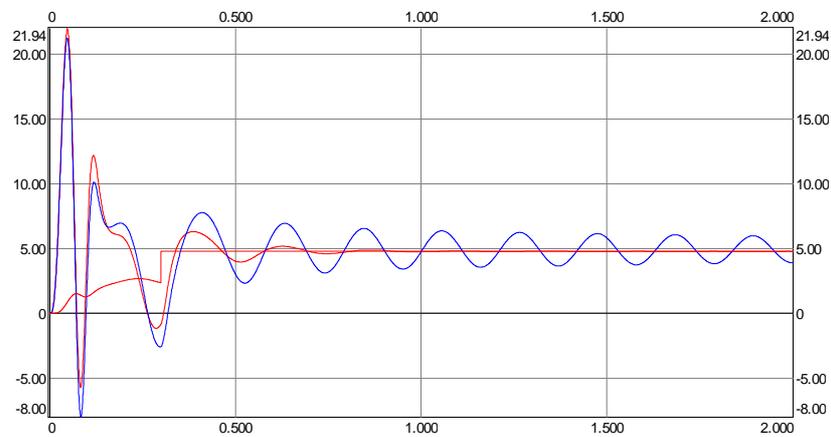


Figura 10. Par interno, par estimado y par de carga. Alimentación a $U' - 5$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

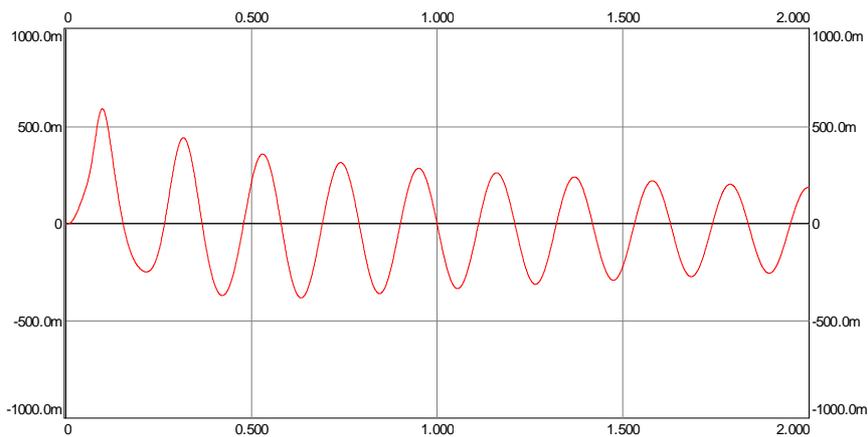


Figura 11. Error de par (%). Alimentación a $U' - 5$ Hz. Parámetros modificados en + 10% ($R_r 70\%$).

Contrastación experimental.

Montaje experimental (figura 12) basado en:

- Máquina asíncrona nº 2: 7.5 kW; 220/380 V; 27/15.6 A; $\cos\phi=0.85$; 1450 min^{-1} ; clase F; $J = 0.076 \text{ kgm}^2$; Δ .
- Máquina de corriente continua 7.5 kW; 220 V; 20 A; $V_{ex} = 195 \text{ V}$; $I_{ex} = 1.64 \text{ A}$; 1480 min^{-1} ; clase F; $J = 0.076 \text{ kgm}^2$.
- Medida de corriente a partir de sonda de efecto Hall.
- Medida de velocidad a partir de dinamo tacométrica.
- Sistema de adquisición de datos formado por una tarjeta con una precisión de 12 bits conectada a un ordenador.

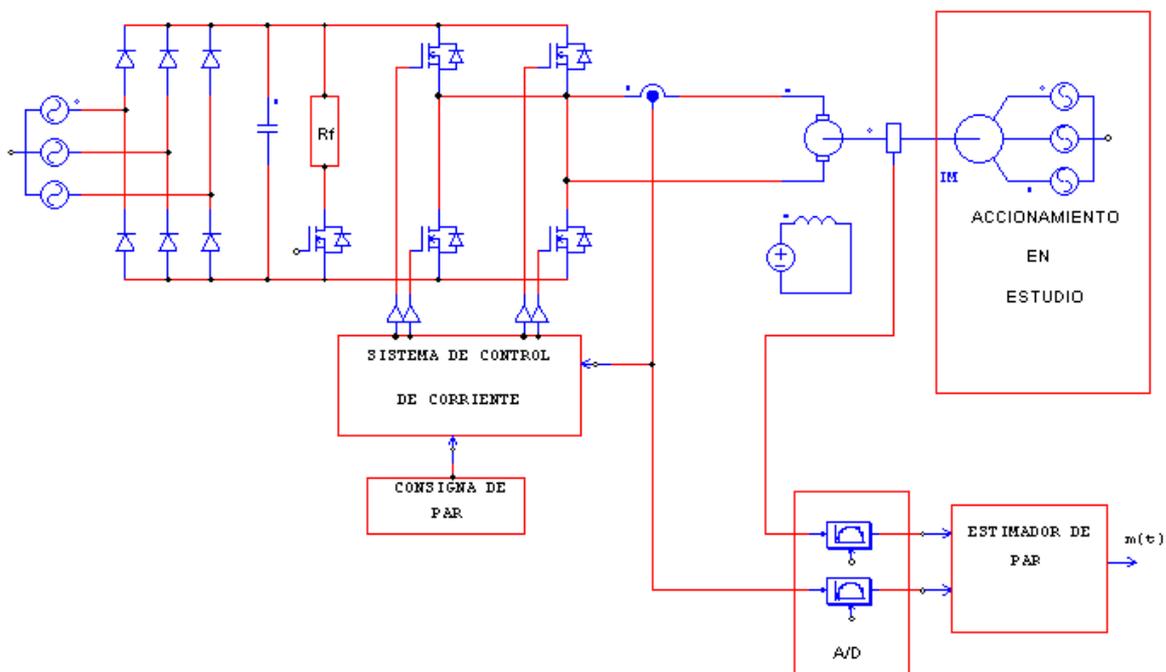


Figura 12. Montaje experimental.

En las figuras 13,14, 15 y 16 se representa el par estimado a partir de la medida de la velocidad y la corriente de la máquina de continua, y el calculado por simulación de la máquina asíncrona en las siguientes condiciones:

- Arranque a media carga.
- Variación lineal de carga desde media a plena carga, a partir del punto de trabajo una vez finalizado el transitorio de arranque.
- Parámetros de la máquina obtenidos aplicando el algoritmo de identificación desarrollado en el capítulo anterior.

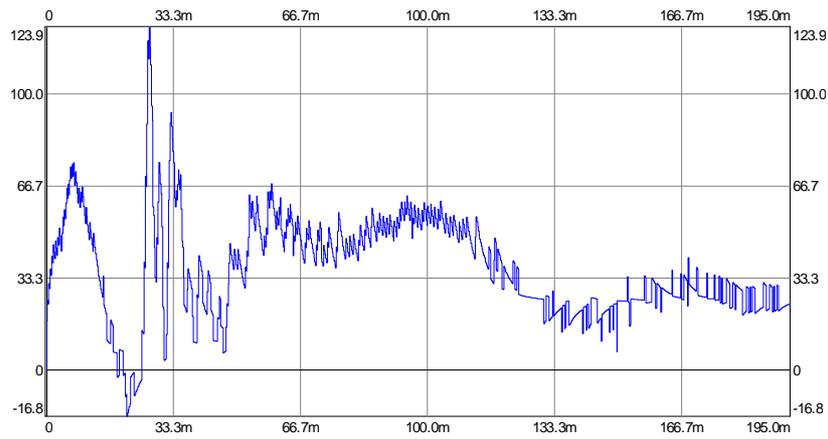


Figura 13. Par estimado. Transitorio de arranque.

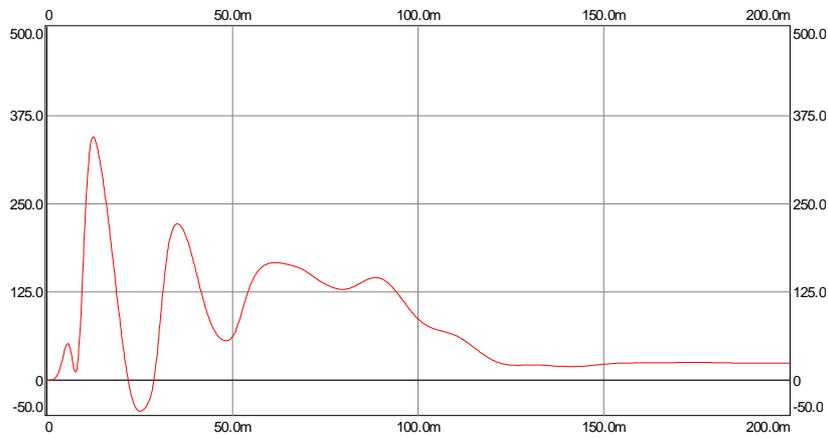


Figura 14. Par calculado. Transitorio de arranque.

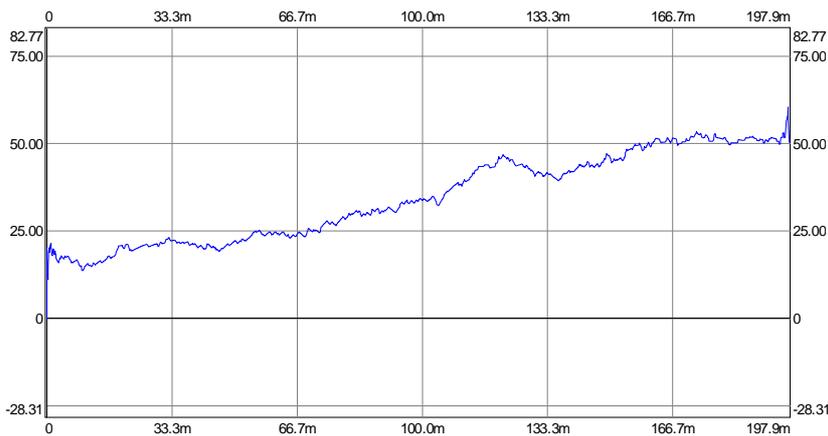


Figura 15. Par estimado. Variación de carga lineal.

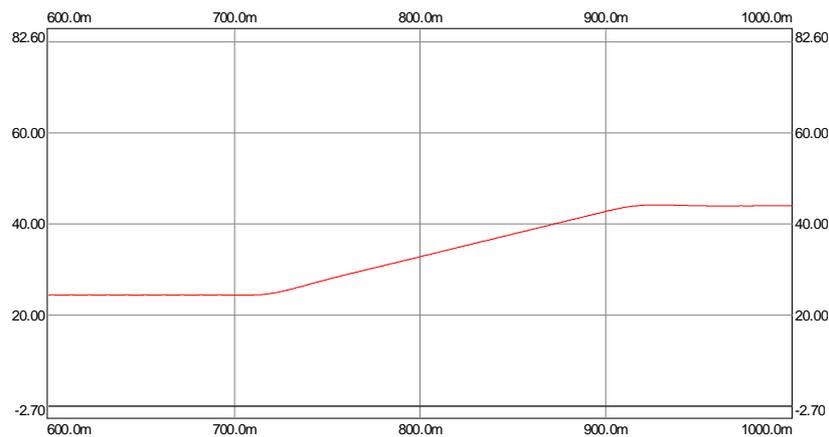


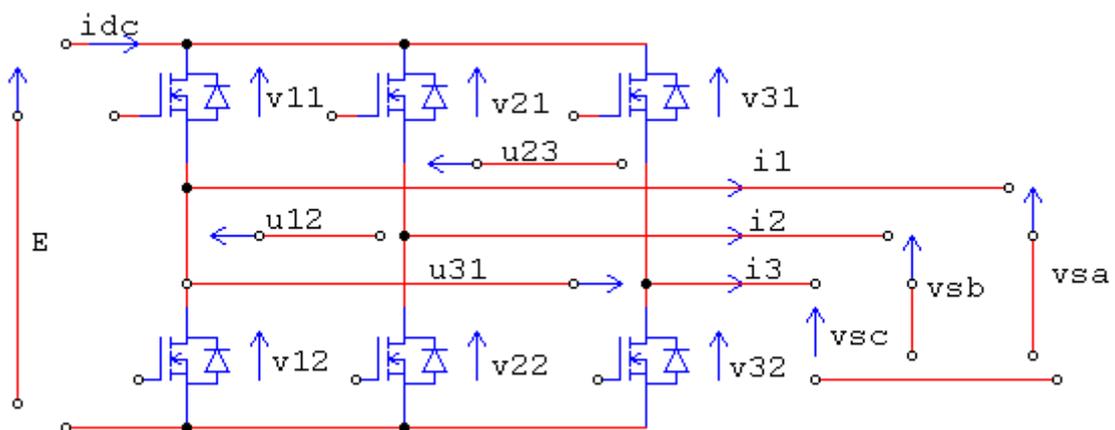
Figura 16. Par calculado. Variación de carga lineal.

Conclusiones.

A partir de los resultados obtenidos caben las siguientes consideraciones:

- La obtención del valor del par instantáneo de cualquier accionamiento justifica la complejidad inherente al desarrollo de un observador.
- El observador planteado es muy robusto respecto a variaciones en los parámetros de la carga.
- En los instantes iniciales existe mayor error debido al tiempo de convergencia del observador y, sobre todo, debido a los errores de medida de la velocidad (dinamo tacométrica) y a los juegos del eje no modelizados.
- A partir de dos períodos de onda (40 ms) el error resulta inferior al 5 %.
- Una vez transcurrido el período de arranque los resultados tienen errores menores, lo que condiciona el uso del método a sistemas ya en funcionamiento.
- Los resultados experimentales sobre el sistema real permiten asegurar la obtención de un equipo de medida del par económico, fiable y de inmediata aplicación docente e industrial.

MODELIZACIÓN DEL CONVERTIDOR



7. Modelización del convertidor

7. Modelización del convertidor.....	2
Función de conexión [Hautier 99].....	2
Funciones de conversión.....	3
Generalización de la modelización.....	7
Conversión de tensiones.....	9
Conversión de corrientes.....	10
Aplicación a las estructuras convertidoras clásicas.....	11
Convertidor 2/2.....	11
Convertidor 3/2.....	12
Convertidor 2/3.....	13
Formulación del sistema completo de ecuaciones.....	14
Aplicación a la modelización del transformador trifásico.....	16
Aplicación al caso del conjunto convertidor+filtro de entrada+carga R+L+E.....	18
Aplicación al caso del conjunto convertidor+filtro de entrada+máquina asíncrona+carga.....	20
Aplicación al conjunto ondulator de corriente+filtro de salida + carga accionada.....	27
Función generatriz de conversión.....	31
Estructuras de control basadas en las funciones generatrices de modulación.....	36
Aportación experimental: caso del conjunto máquina asíncrona+convertidor+carga.....	37
Conclusiones.....	40

7. Modelización del convertidor

En el desarrollo de cualquier modelo debe partirse de unas hipótesis básicas que limitan el alcance del mismo. Para el caso que nos ocupa se toma como punto de partida las siguientes [Labrique 95], [Labrique 98], [Hautier 99]:

- conducción continua
- pérdidas en los interruptores nulas
- bidireccionalidad en corriente
- control de cierre y apertura

Estas hipótesis definen un convertidor idealizado. A partir de las consideraciones anteriores se pueden escribir las ecuaciones eléctricas de funcionamiento del convertidor.

Una vez establecidas las mismas se puede realizar el enlace con el resto del sistema; finalmente se obtiene un conjunto de relaciones entre el estado del convertidor y el estado del sistema alimentado (máquina, carga pasiva, filtro, etc.), que permite plantear de forma cómoda la simulación del sistema y la definición de su ley de control.

Función de conexión [Hautier 99].

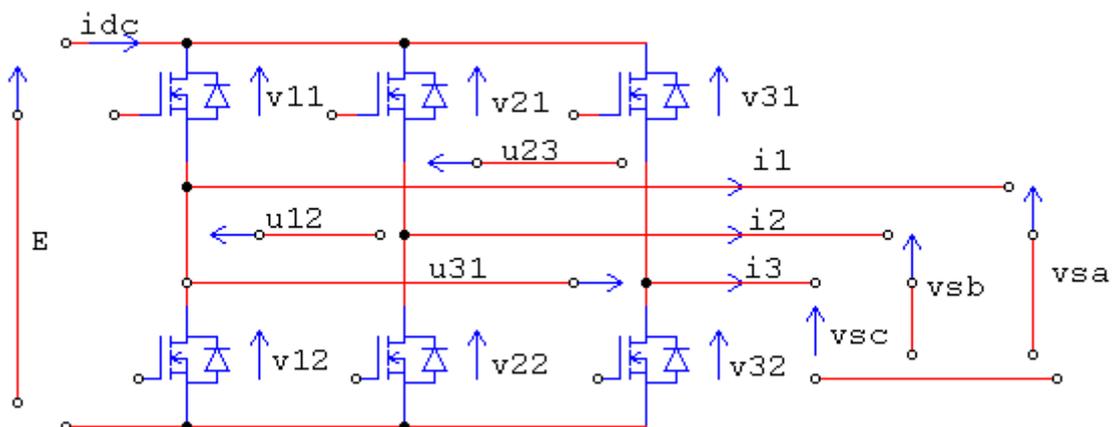


Figura 1. Definición de tensiones y corrientes.

Se asimila cada uno de los interruptores elementales del convertidor a un interruptor ideal, tal como se muestra en la figura 2.

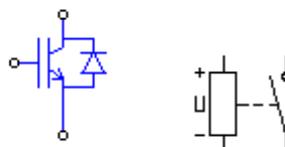


Figura 2. Interruptor real versus ideal.

Cada interruptor supone la consideración de una **función de conexión** f_{ci} de manera que la corriente que lo atraviesa i_{ci} y la tensión v_{ci} en sus bornes, se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} i_{ci} &= f_{ci} \cdot i_c \\ v_{ci} &= (1 - f_{ci}) \cdot v_c \end{aligned} \quad (1)$$

$f_{ci} = 0$; Interruptor abierto, $f_{ci} = 1$: interruptor cerrado,
 i_c :corriente a conmutar, v_c :tensión a conmutar.

Para la figura 1, i_c se corresponde con las corrientes de carga i_1 , i_2 , i_3 , y v_c a la tensión del circuito de continua E obtenida, por ejemplo, a partir de un puente rectificador asociado a un filtro.

En cada instante sólo puede estar cerrado uno de los interruptores de cada sección; esto añade una restricción entre las funciones de conversión asociadas a cada interruptor:

$$f_{c1} + f_{c2} = 1 \quad (2)$$

Funciones de conversión.

A partir de las notaciones de la figura anterior, se puede expresar lo siguiente:

$$\begin{aligned} u_{12} &= v_{21} - v_{11} \\ u_{23} &= v_{31} - v_{21} \\ u_{31} &= v_{11} - v_{31} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{23} \\ u_{31} \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{23} \\ m_{31} \end{pmatrix} \quad (4)$$

donde m_{12} , m_{23} , m_{31} , representan respectivamente las **funciones compuestas de conversión** de las magnitudes de salida respectivas. Se cumple que:

$$\begin{aligned} u_{12} &= v_{sa} - v_{sb} \\ u_{23} &= v_{sb} - v_{sc} \\ u_{31} &= v_{sc} - v_{sa} \end{aligned} \quad (5)$$

En el caso de considerar que las tensiones simples forman un sistema equilibrado, se pueden utilizar las **funciones simples de conversión** n_j :

$$\begin{pmatrix} v_{sa} \\ v_{sb} \\ v_{sc} \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} n_a \\ n_b \\ n_c \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot E \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{pmatrix} \quad (6)$$

La corriente que circula por el tramo de continua puede ser calculada a partir de la siguiente expresión:

$$i_{dc} = \begin{pmatrix} i_{sa} & i_{sb} & i_{sc} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Las funciones de conexión f_{ci} deben ser calculadas a partir del conocimiento de las funciones de conversión deseadas, simples o compuestas. Desgraciadamente el cálculo directo de las funciones f_{ci} a partir de las funciones de conversión m_{ij} o n_j , no es posible al ser singulares las matrices que las relacionan. Existen infinitas soluciones para la resolución del sistema pudiéndose recurrir a criterios intuitivos o trascendentes, basados en las propiedades de los sistemas trifásicos. Para el caso de alimentación de una máquina, las funciones de conversión deben ser sinusoidales y equilibradas.

A modo de ejemplo, se consideran las funciones de conexión resultantes de la comparación entre una señal sinusoidal de referencia con la triangular de frecuencia superior, obteniéndose el caso de ondas moduladas en amplitud de forma asíncrona. La simulación de un caso con los datos que figuran a continuación, avala la modelización: $V_{ma} = 0.8 \text{ V-50 Hz}$, $V_{tri} = 1 \text{ V-1500 Hz}$.

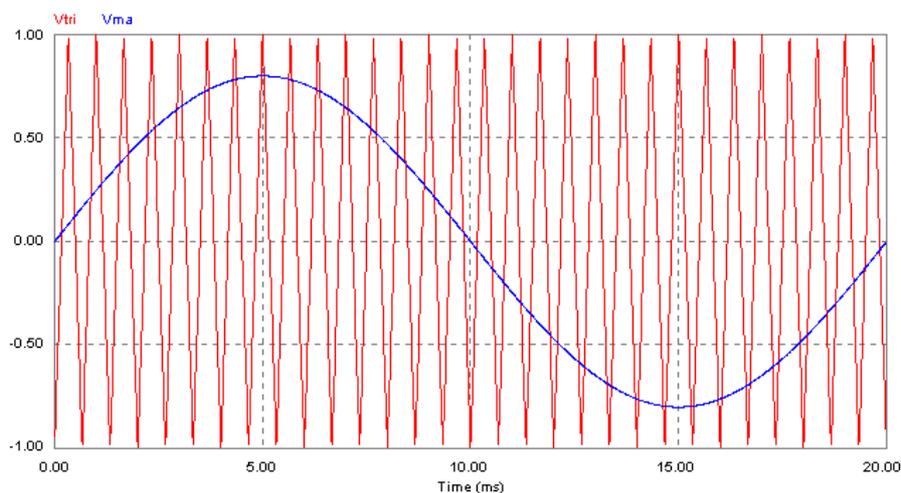


Figura 3. Señal de referencia y portadora.

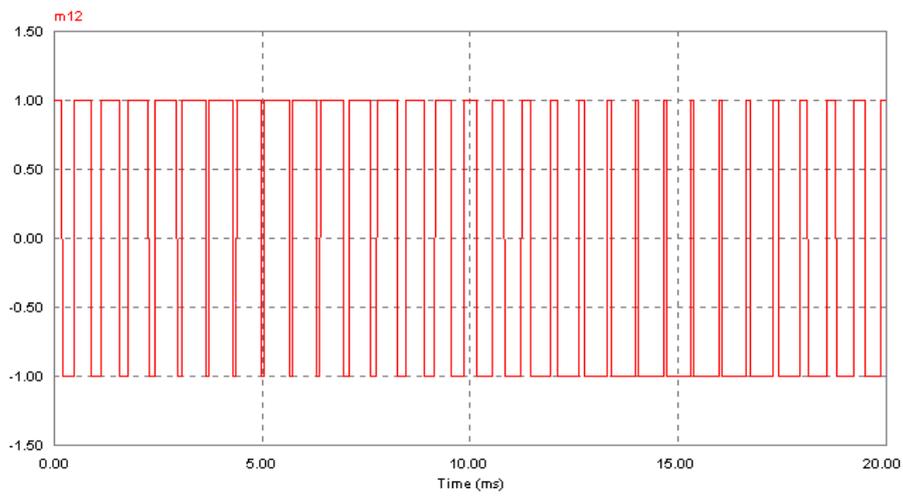


Figura 4. Función compuesta de conversión.

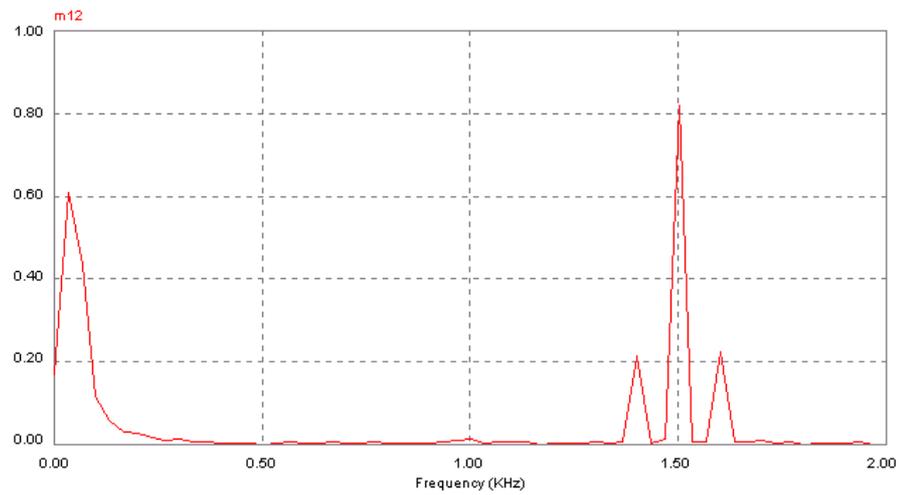


Figura 5. Análisis armónico de la función de conversión.

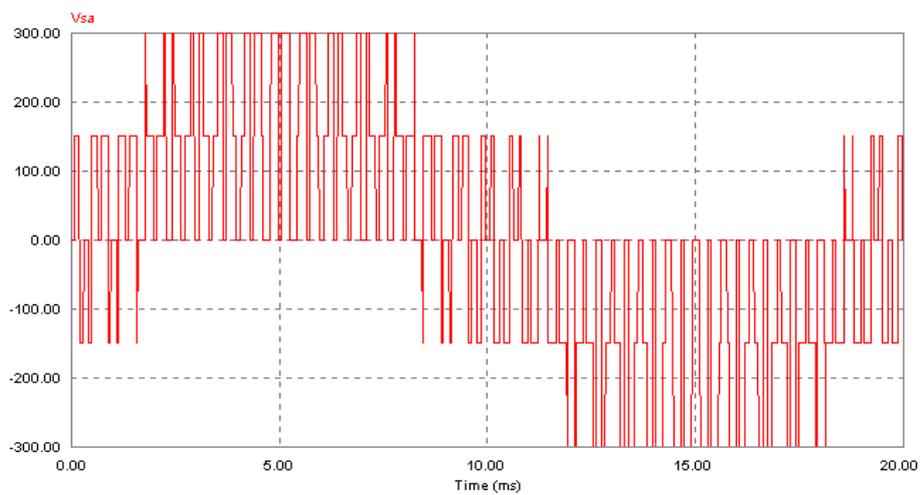


Figura 6. Tensión simple de salida.

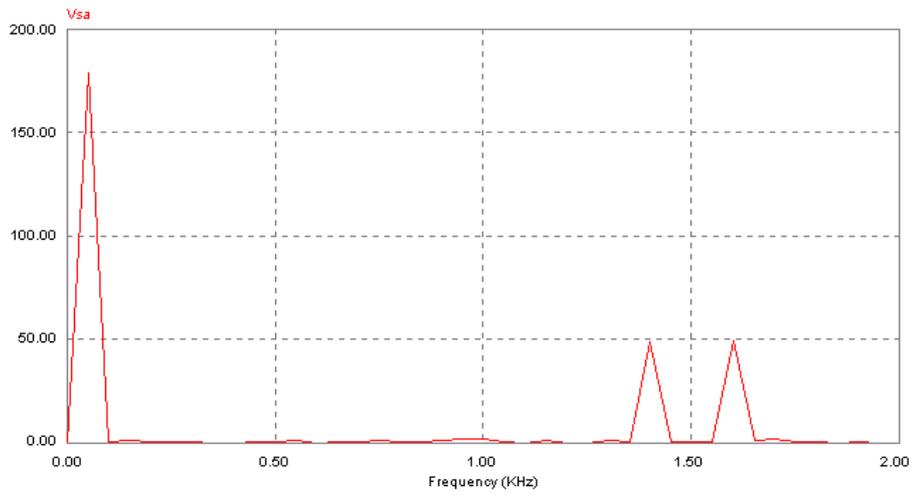


Figura 7. Análisis armónico de la tensión simple de salida.

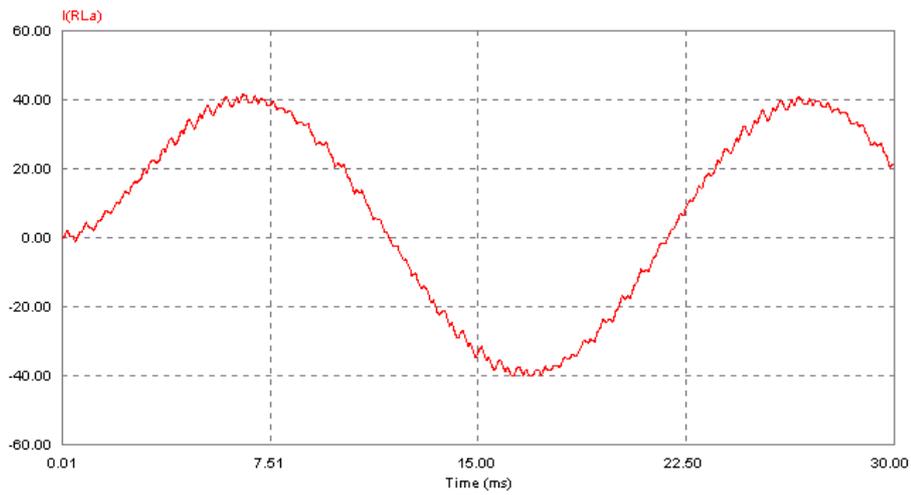


Figura 8. Corriente de fase.

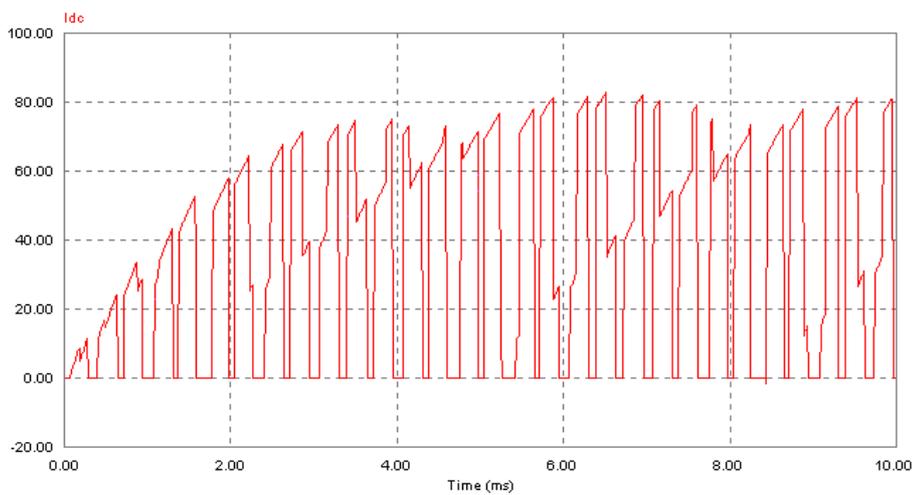


Figura 9. Corriente por el circuito de continua.

Generalización de la modelización.

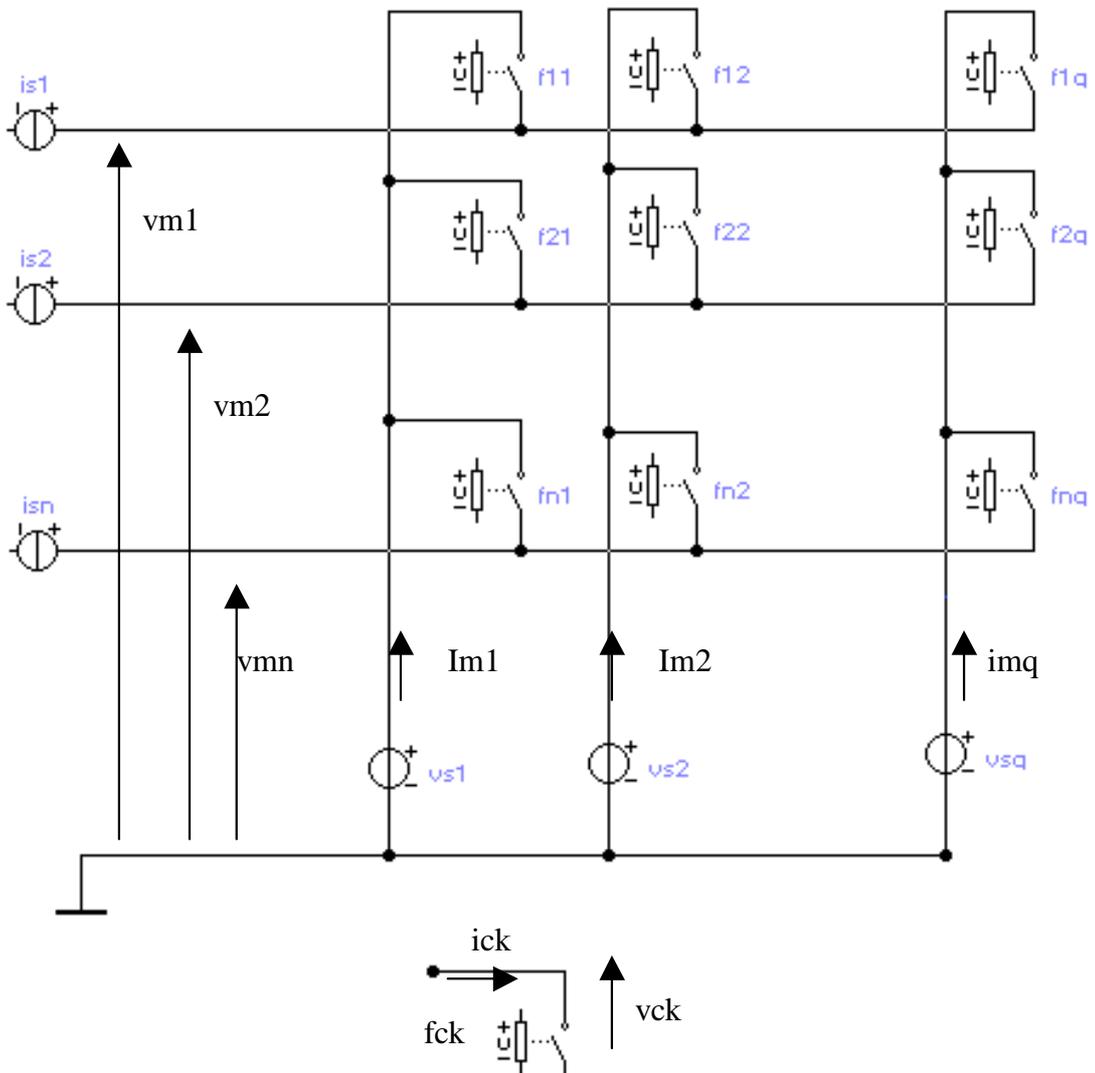


Figura 10. Convertidor generalizado.

Sea:

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1q} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nq} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 V_s &= [v_{s1} \quad v_{s2} \quad \dots \quad v_{sq}] ; \quad V_m = [v_{m1} \quad v_{m2} \quad \dots \quad v_{mq}] \\
 I_s &= [i_{s1} \quad i_{s2} \quad \dots \quad i_{sq}] ; \quad I_m = [i_{m1} \quad i_{m2} \quad \dots \quad i_{mq}] \\
 V_0 &= [v_{m1_0} \quad v_{m2_0} \quad \dots \quad v_{mq_0}]
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 V_m &= F \cdot V_s + F_0 \cdot V_0 \\
 I_m &= F^t \cdot I_s
 \end{aligned} \tag{10}$$

donde V_0 es el vector de tensiones que aparecen en conducción discontinua. Además:

$$F_0 = \begin{bmatrix} \prod_{k=1}^q (1 - f_{1k}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \prod_{k=1}^q (1 - f_{2k}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \prod_{k=1}^q (1 - f_{nk}) \end{bmatrix} \tag{11}$$

Restricciones: $\sum_{k=1}^q f_{ck} = 1$. Sólo puede conducir un elemento de cada sección de conmutación.

En la hipótesis de conducción continua $F_0 = 0$:

$$\sum_{c=1}^n i_{sc} = 0 \quad \sum_{k=1}^q i_{mk} = 0 \tag{12}$$

Sólo resultan independientes $n-1$ corrientes de fuente y $q-1$ corrientes moduladas. Se puede elegir una de las líneas como referencia para las mismas, así se considera el esquema de la figura donde existen $q-1$ y $n-1$ potenciales independientes.

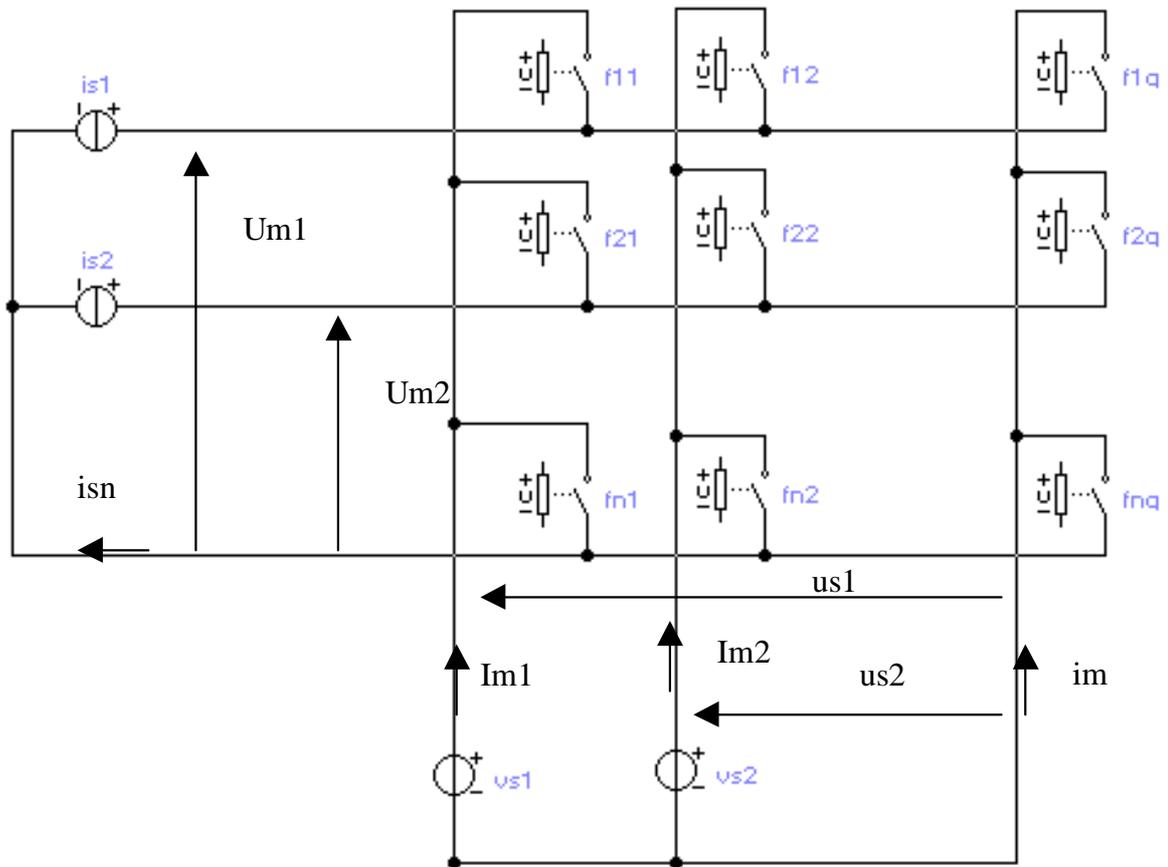


Figura 11. Convertidor generalizado. Convención de corrientes y tensiones.

Conversión de tensiones.

$$\begin{aligned}
 u_{sk} &= v_{sk} - v_{sq} \quad (k = \{1, 2, \dots, q-1\}) \\
 u_{mc} &= v_{mc} - v_{mn} \quad (c = \{1, 2, \dots, n-1\})
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

De las anteriores:

$$v_{mc} = \sum_{k=1}^q f_{ck} \cdot v_{sk} \quad v_{mn} = \sum_{k=1}^q f_{nk} \cdot v_{sk}
 \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 v_{mc} &= \sum_{k=1}^{q-1} f_{ck} \cdot v_{sk} + f_{cq} \cdot v_{sq} & v_{mn} &= \sum_{k=1}^{q-1} f_{nk} \cdot v_{sk} + f_{nq} \cdot v_{sq} \\
 f_{cq} &= 1 - \sum_{k=1}^{q-1} f_{ck} & f_{nq} &= 1 - \sum_{k=1}^{q-1} f_{nk}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

$$u_{mc} = v_{mc} - v_{mn} = \sum_{k=1}^{q-1} (f_{ck} - f_{nk}) \cdot (v_{sk} - v_{sq}) = \sum_{k=1}^{q-1} m_{ck} \cdot u_{sk} \quad (16)$$

$$m_{ck} = f_{ck} - f_{nk} \quad (17)$$

$$U_s = [u_{s1} \quad u_{s2} \quad \dots \quad u_{sq-1}]; \quad U_m = [u_{m1} \quad u_{m2} \quad \dots \quad u_{mn-1}] \quad (18)$$

$$U_m = M_u \cdot U_s \quad (19)$$

$$M_u = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1,q-1} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2,q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,q-1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Conversión de corrientes.

$$i_{mk} = \sum_{c=1}^n f_{ck} \cdot i_{sc} = \sum_{c=1}^{n-1} f_{ck} \cdot i_{sc} + f_{nk} \cdot i_{sn} \quad (21)$$

$$i_{sn} = -\sum_{c=1}^{n-1} i_{sc} \quad (22)$$

$$i_{mk} = \sum_{c=1}^n (f_{ck} - f_{nk}) \cdot i_{sc} = \sum_{c=1}^{n-1} m_{ck} \cdot i_{sc}$$

$$I_s = [i_{s1} \quad i_{s2} \quad \dots \quad i_{sn-1}]; \quad I_m = [i_{m1} \quad i_{m2} \quad \dots \quad i_{mq-1}] \quad (23)$$

$$I_m = M_i \cdot I_s \quad (24)$$

$$M_i = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{n-1,1} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{n-1,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{1,q-1} & m_{2,q-1} & \dots & m_{n-1,q-1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$M_i = M_u^t = M \quad (26)$$

$$M = \begin{bmatrix} f_{11} - f_{n1} & f_{12} - f_{n2} & \dots & f_{1,q-1} - f_{n,q-1} \\ f_{21} - f_{n1} & f_{22} - f_{n2} & \dots & f_{2,q-1} - f_{n,q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1,1} - f_{n1} & f_{n-1,2} - f_{n2} & \dots & f_{n-1,q-1} - f_{n,q-1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

que se puede escribir de la siguiente manera:

$$M = R_{cv} \cdot F_r \quad (28)$$

$$F_r = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1,q-1} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2,q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{n,q-1} \end{bmatrix} \quad R_{cv} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\text{dimensión}(R_{cv}) = (n-1) \times n$$

La matriz R_{cv} define la **relación de conversión**, permite el paso entre las funciones de conexión y las funciones de conversión; esta operación no es biyectiva.

La matriz F_r designa la **matriz de conexión reducida**, obtenida a partir de F tras la supresión de la columna q teniendo en cuenta la restricción $\sum_{k=1}^q f_{ck} = 1$.

Aplicación a las estructuras convertidoras clásicas.

Convertidor 2/2.

La figura muestra la parte operativa de la estructura 2/2 que permite la transferencia energética entre una fuente de tensión y una fuente de corriente. Esta estructura es común para los variadores de alterna, los troceadores, los onduladores y rectificadores monofásicos.

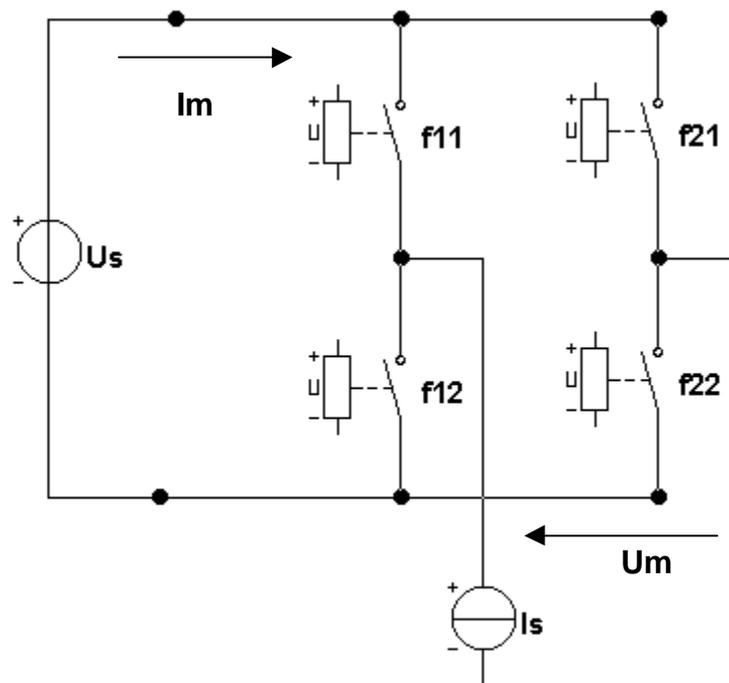


Figura 12. Convertidor 2/2.

En este caso $n = 2$; $q = 2$.

- Matrices de conexión:

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}; \quad F_r = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix} \quad (30)$$

- Relación de conversión y matriz de conversión:

$$R_{cv} = (1 \quad -1); \quad M = (f_{11} - f_{21}) \quad (31)$$

En este caso, la matriz se reduce a un escalar igual a la función de conversión única, m , del montaje:

$$u_m = m \cdot u_s; \quad i_m = m \cdot i_s \quad (32)$$

$$m = f_{11} - f_{21}$$

Convertidor 3/2.

Corresponde a la estructura de ondulator de tensión trifásico así como para los rectificadores de corriente.

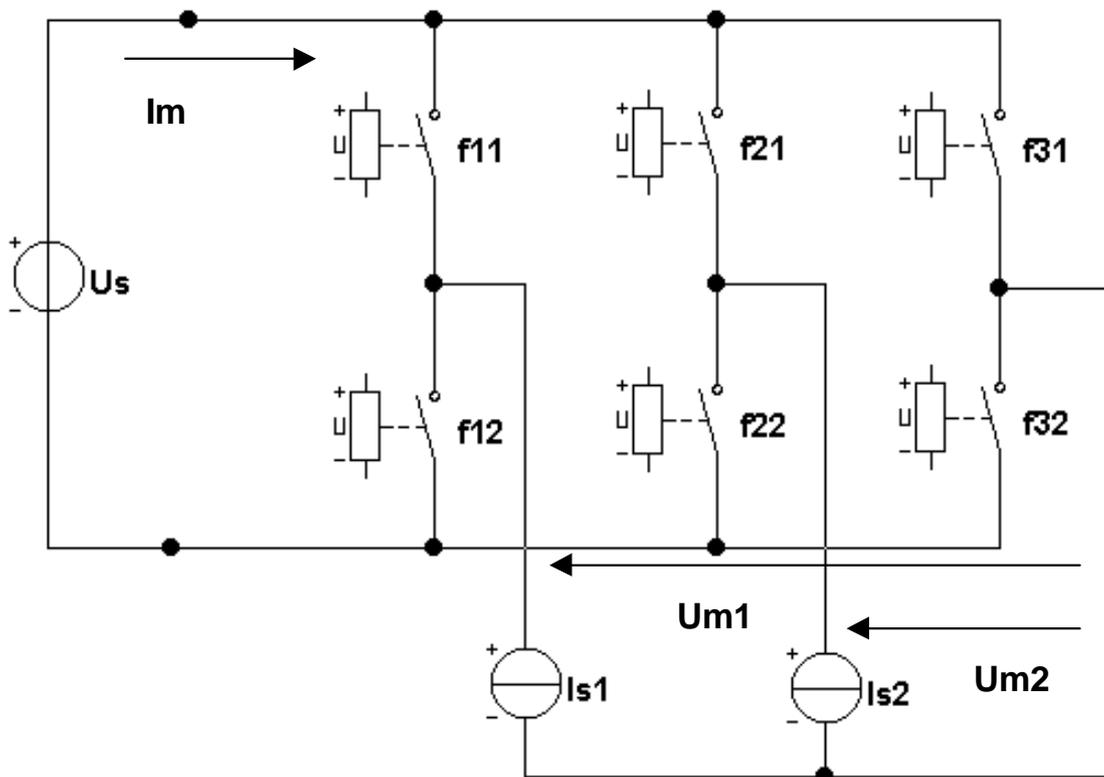


Figura 13. Convertidor 3/2.

En este caso $n = 3$; $q = 2$.

- Matrices de conexión:

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{pmatrix}; \quad F_r = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{pmatrix} \quad (33)$$

- Relación de conversión y matriz de conversión:

$$R_{cv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} f_{11} - f_{31} \\ f_{21} - f_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \quad (34)$$

finalmente:

$$\begin{pmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \cdot u_s; \quad i_m = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \end{pmatrix} \quad (35)$$

Convertidor 2/3.

Corresponde a la estructura de ondulator de corriente y a la estructura de rectificador en funcionamiento continuo.

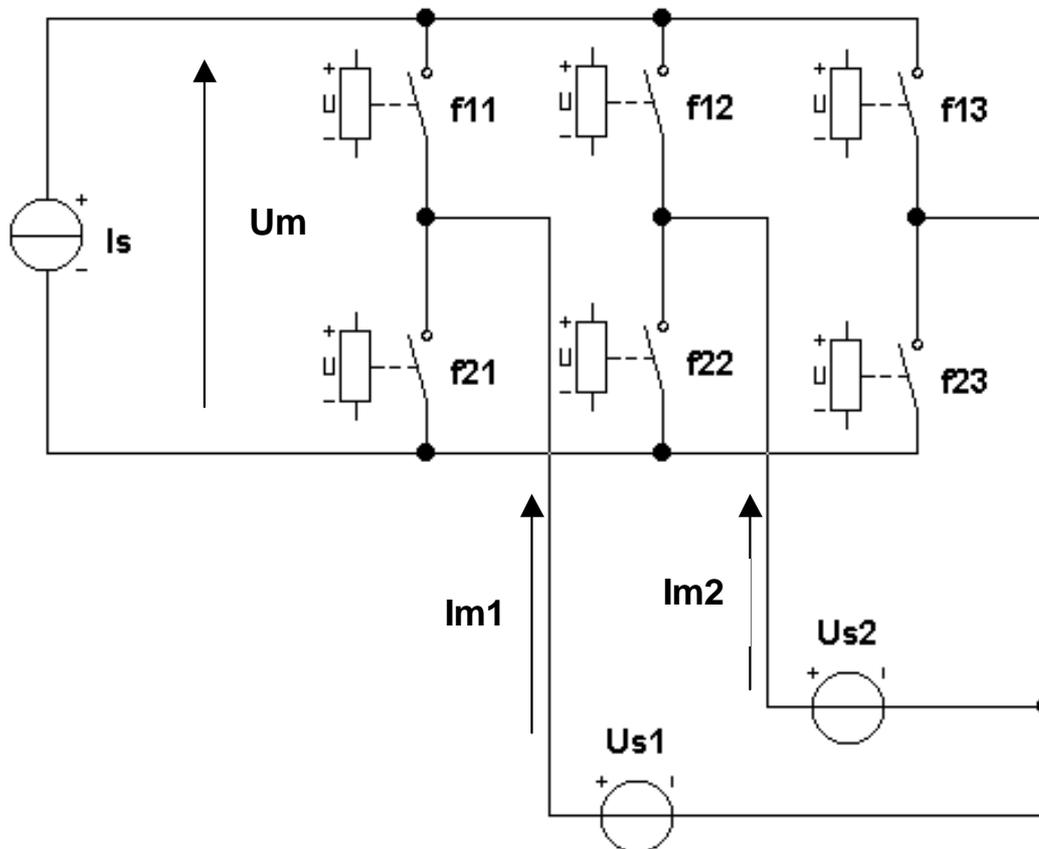


Figura 14. Convertidor 2/3.

En este caso n = 2, q = 3.

- Matrices de conexión:

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{pmatrix} \quad F_r = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \quad (36)$$

- Relación de conversión y matriz de conversión:

$$R_{cv} = (1 \quad -1); \quad M = (f_{11} - f_{21} \quad f_{12} - f_{22}) = (m_1 \quad m_2) \quad (37)$$

finalmente:

$$\begin{pmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \cdot i_s; \quad u_m = (m_1 \quad m_2) \cdot \begin{pmatrix} u_{s1} \\ u_{s2} \end{pmatrix} \quad (38)$$

Formulación del sistema completo de ecuaciones.

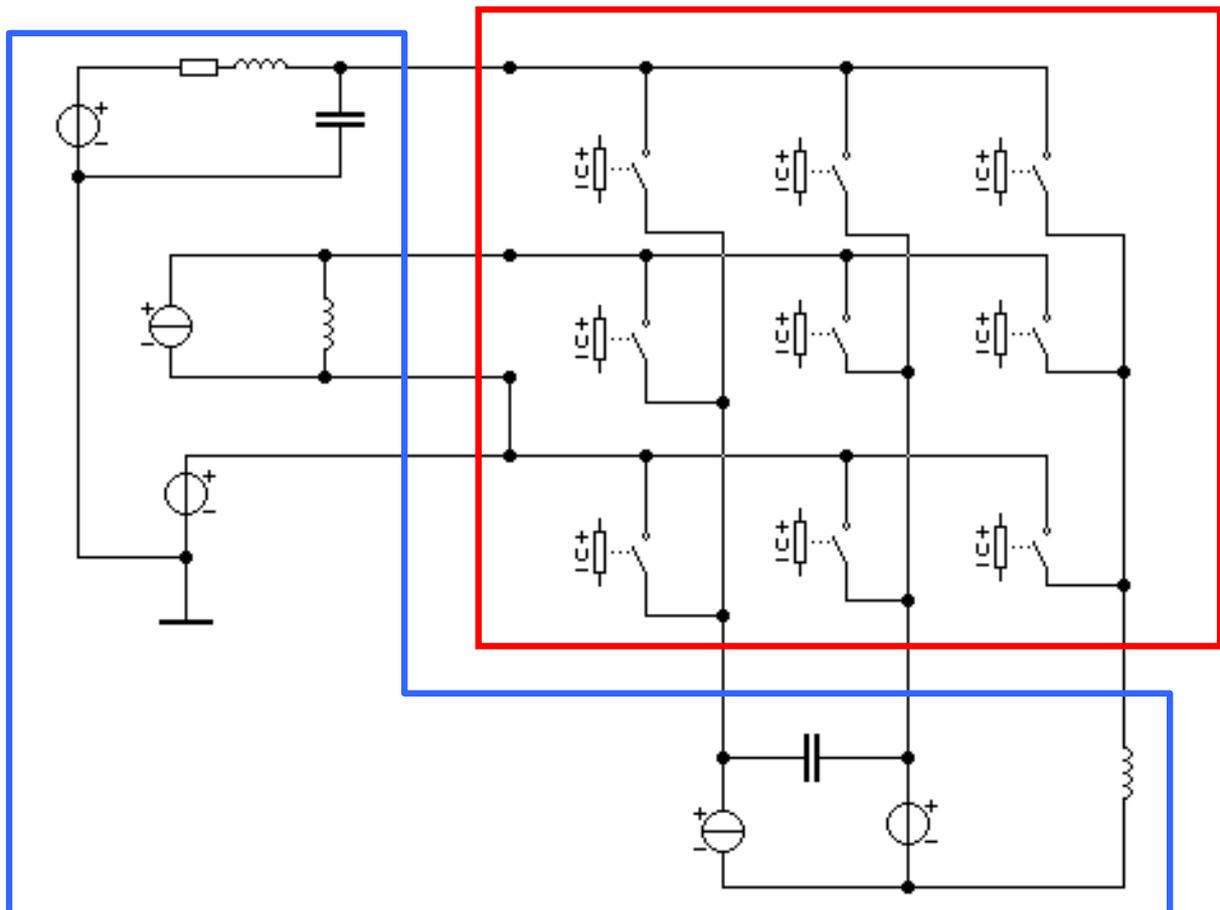


Figura 15. Sistema completo.

Para una estructura dada se puede escribir lo siguiente:

APORTACIÓN A LA DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS DE LOS MODELOS EN LA MÁQUINA ASÍNCRONA PARA UNA MEJOR IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES NO MENSURABLES INCIDENTES EN SU CONTROL

$$\begin{aligned} U_m &= M_u \cdot U_s; \\ I_m &= M_i \cdot I_s; \end{aligned} \quad G_m = \begin{pmatrix} U_m \\ I_m \end{pmatrix}; \quad M_r = \begin{pmatrix} M_u & 0 \\ 0 & M_i \end{pmatrix}; \quad G_s = \begin{pmatrix} U_s \\ I_s \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$G_m = M_r \cdot G_s \quad (40)$$

$$M_r = \begin{pmatrix} R_{cv} \cdot F_r & 0 \\ 0 & F_r^t \cdot R_{cv}^t \end{pmatrix} \quad (41)$$

además el vector de magnitudes conmutadas esta formado, normalmente, por componentes del vector de estado, de tal forma que dichas magnitudes pueden ser expresadas de la siguiente forma:

$$G_m = M_r \cdot C_s \cdot X \quad (42)$$

donde C_s es una matriz de observación particular que define el vector de magnitudes conmutadas en función de las variables de estado.

El modelo de la parte operativa se describe a partir de un conjunto de ecuaciones de estado como el siguiente:

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + B_e \cdot G_e + B_m \cdot G_m \quad (43)$$

sustituyendo la anterior se llega a:

$$\frac{dX}{dt} = (A + B_m \cdot M_r \cdot C_s) \cdot X + B_e \cdot G_e \quad (44)$$

Completando la definición mediante la ecuación de observación de la salida:

$$Y = C \cdot X + D_e \cdot G_e + D_m \cdot G_m \quad (45)$$

$$Y = (C + D_m \cdot M_r \cdot C_s) \cdot X + D_e \cdot G_e \quad (46)$$

Las expresiones anteriores, definen el conjunto de ecuaciones no lineales de control características de todo convertidor estático.

Aplicación a la modelización del transformador trifásico.

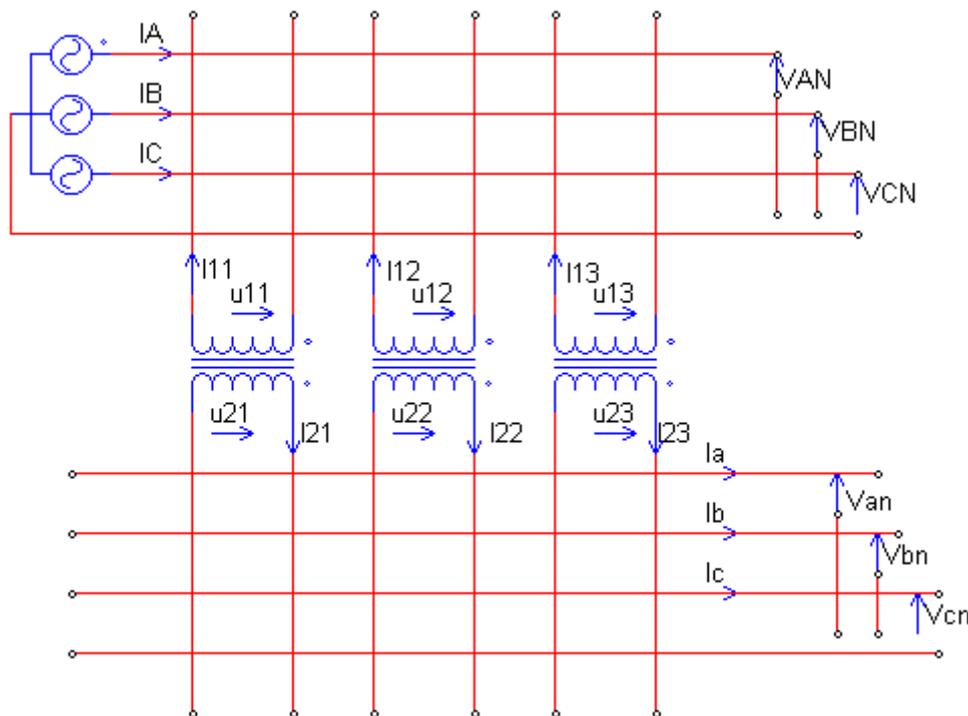


Figura 16. Modelización del transformador trifásico

Sea:

$u_1 = (u_{11} \quad u_{12} \quad u_{13})$; vector de tensiones primarias.

$\psi = (\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3)$; vector de flujo en cada núcleo.

$i_1 = (i_{11} \quad i_{12} \quad i_{13})$; vector de corrientes primarias.

$u_2 = (u_{21} \quad u_{22} \quad u_{23})$; vector de tensiones secundarias.

$i_2 = (i_{21} \quad i_{22} \quad i_{23})$; vector de corrientes secundarias.

$i_{1\mu} = (i_{1\mu 1} \quad i_{1\mu 2} \quad i_{1\mu 3})$; vector de corrientes magnetizantes primarias.

$u_{1m} = (u_{1m1} \quad u_{1m2} \quad u_{1m3})$; vector de tensiones primarias moduladas.

$i_{2m} = (i_{2m1} \quad i_{2m2} \quad i_{2m3})$; vector de corrientes secundarias moduladas.

I ; matriz identidad 3x3.

$m = \frac{n_2}{n_1} \cdot I$; matriz de modulación. Obsérvese que en este caso la matriz de

modulación no depende del tiempo como ocurre en el caso de modelizar un convertidor estático.

n_1, n_2 , número de espiras primarias y secundarias, respectivamente.

L_2 , inductancia de fugas totalizada en el secundario. Se adopta como modelo para cada fase del transformador el de la figura siguiente.

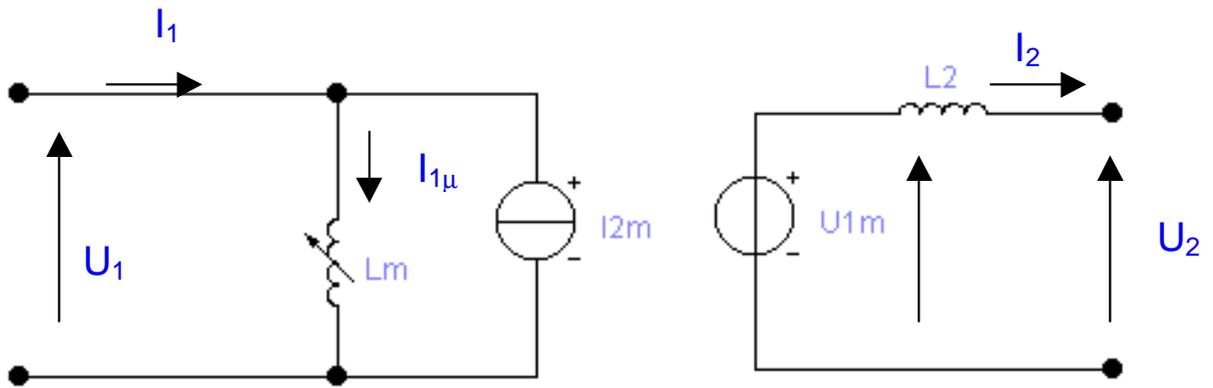


Figura 17. Modelo equivalente para cada fase del transformador.

Se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$u_{1m} = m \cdot u_1; \quad i_{2m} = m^t \cdot i_2 \quad (47)$$

$$i_{i\mu} = f(\Psi) \quad (48)$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{1}{L_2} \cdot I \cdot (u_{1m} - u_2) \quad (49)$$

$$i_1 = i_{2m} + i_{1\mu} \quad (50)$$

faltan añadir las ecuaciones de acoplamiento con las respectivas redes:

$$u_1 = C_p \cdot v_{ABC}; \quad i_{ABC} = C_p^t \cdot i_1 \quad (51)$$

$$v_{abc} = C_s \cdot u_2; \quad i_2 = C_s^t \cdot i_{abc} \quad (52)$$

con:

$$\begin{aligned} v_{ABC} &= (v_{AN} \quad v_{BN} \quad v_{CN}) \\ i_{ABC} &= (i_A \quad i_B \quad i_C) \\ v_{abv} &= (v_{an} \quad v_{bn} \quad v_{cn}) \\ i_{abc} &= (i_a \quad i_b \quad i_c) \end{aligned} \quad (53)$$

Las matrices C_p y C_s dependen del tipo de conexión del transformador.

Globalmente se puede expresar lo siguiente:

$$m_c = C_s \cdot m \cdot C_p \quad (54)$$

$$v_{abc} = m_c \cdot v_{ABC}; \quad i_{ABC} = m_c^t \cdot i_{abc} \quad (55)$$

Para el caso de un transformador tipo Dy11, las matrices de acoplamiento y conexión son las siguientes:

$$C_p = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad m = \frac{n_2}{n_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (56)$$

$$m_c = \frac{n_2}{n_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (57)$$

Aplicación al caso del conjunto convertidor+filtro de entrada+carga R+L+E.

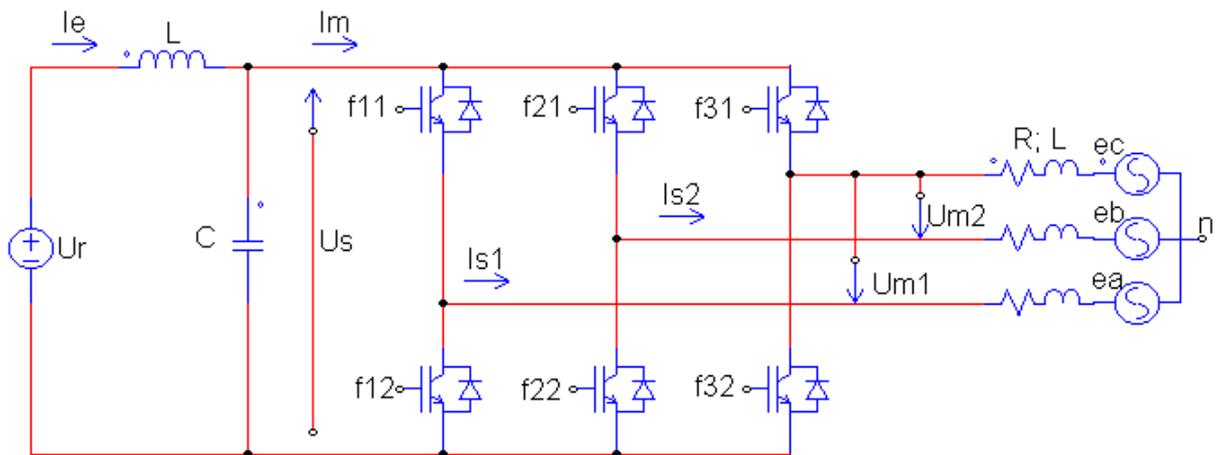


Figura 18. Conjunto convertidor+filtro de entrada + carga R+L+E.

En este caso, convertidor:

$$\begin{pmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \cdot u_s; \quad i_m = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \end{pmatrix} \quad (58)$$

Filtro:

$$C \cdot \frac{du_s}{dt} = i_e - i_m$$

$$L_f \cdot \frac{di_e}{dt} = u_r - u_s \quad (59)$$

Carga:

$$\begin{aligned} U_{m1} &= 2 \cdot L \cdot \frac{di_{s1}}{dt} + L \cdot \frac{di_{s2}}{dt} + r \cdot (2 \cdot i_{s1} + i_{s2}) + e_{ac} \\ U_{m2} &= 2 \cdot L \cdot \frac{di_{s2}}{dt} + L \cdot \frac{di_{s1}}{dt} + r \cdot (2 \cdot i_{s2} + i_{s1}) + e_{bc} \end{aligned} \quad (60)$$

que reordenadas quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_s \\ i_e \\ i_{s1} \\ i_{s2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4 \cdot R}{3 \cdot L} & \frac{R}{3 \cdot L} \\ 0 & 0 & \frac{R}{3 \cdot L} & -\frac{4 \cdot R}{3 \cdot L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_s \\ i_e \\ i_{s1} \\ i_{s2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3 \cdot L} & \frac{1}{3 \cdot L} \\ 0 & \frac{1}{3 \cdot L} & -\frac{2}{3 \cdot L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_r \\ e_{ac} \\ e_{bc} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3 \cdot L} & \frac{1}{3 \cdot L} & 0 \\ \frac{1}{3 \cdot L} & -\frac{2}{3 \cdot L} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \\ i_m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (61)$$

Para este caso:

$$M_r = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_s \\ i_{s1} \\ i_{s2} \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$C_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$X = \begin{pmatrix} u_s \\ i_e \\ i_{s1} \\ i_{s2} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4 \cdot R}{3 \cdot L} & \frac{R}{3 \cdot L} \\ 0 & 0 & \frac{R}{3 \cdot L} & -\frac{4 \cdot R}{3 \cdot L} \end{pmatrix}, \quad B_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3 \cdot L} & \frac{1}{3 \cdot L} \\ 0 & \frac{1}{3 \cdot L} & -\frac{2}{3 \cdot L} \end{pmatrix} \quad (64)$$

$$G_e = \begin{pmatrix} u_r \\ e_{ac} \\ e_{bc} \end{pmatrix}; \quad B_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3 \cdot L} & \frac{1}{3 \cdot L} & 0 \\ \frac{1}{3 \cdot L} & -\frac{2}{3 \cdot L} & 0 \end{pmatrix}; \quad G_m = \begin{pmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \\ i_m \end{pmatrix} \quad (65)$$

finalmente:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_s \\ i_e \\ i_{s1} \\ i_{s2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} & -\frac{m_1}{C} & -\frac{m_2}{C} \\ \frac{1}{L_f} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2 \cdot m_1}{3 \cdot L} & \frac{m_2}{3 \cdot L} & -\frac{4 \cdot R}{3 \cdot L} & \frac{R}{3 \cdot L} \\ \frac{m_1}{3 \cdot L} & -\frac{2 \cdot m_2}{3 \cdot L} & \frac{R}{3 \cdot L} & -\frac{4 \cdot R}{3 \cdot L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_s \\ i_e \\ i_{s1} \\ i_{s2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3 \cdot L} & \frac{1}{3 \cdot L} \\ 0 & \frac{1}{3 \cdot L} & -\frac{2}{3 \cdot L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_r \\ e_{ac} \\ e_{bc} \end{pmatrix} \quad (66)$$

Este mismo modelo puede servir para el caso de máquina síncrona de polos lisos.

Aplicación al caso del conjunto convertidor+filtro de entrada+máquina asíncrona+carga.

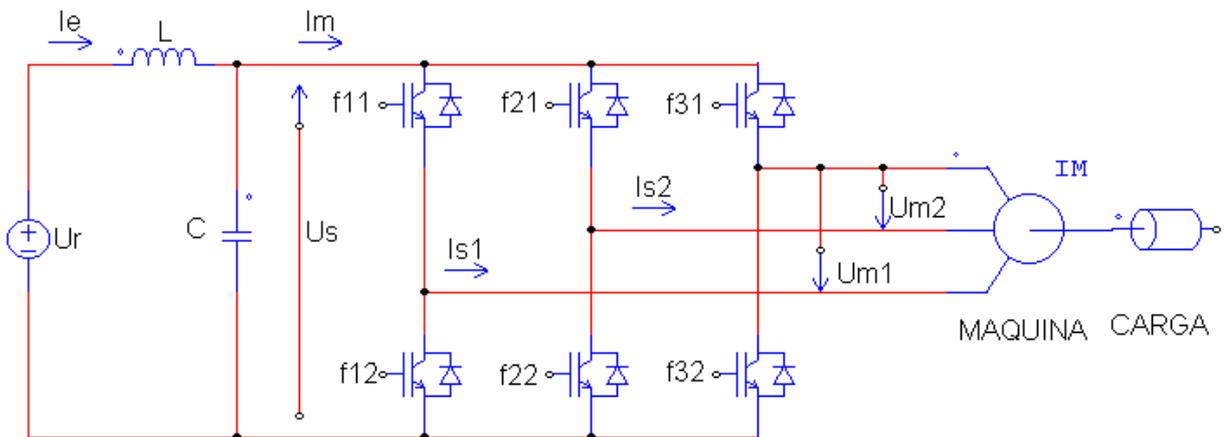


Figura 19. Convertidor+Filtro de entrada+máquina asíncrona+carga.

Filtro:

$$C \cdot \frac{du_s}{dt} = i_e - i_m$$

$$L_f \cdot \frac{di_e}{dt} = u_r - u_s$$
(67)

Convertidor:

$$\begin{pmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \cdot u_s ; \quad i_m = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \end{pmatrix}$$
(68)

Acoplamiento convertidor y máquina. Suponiendo conexión estrella en la máquina se pueden plantear las ecuaciones que siguen:

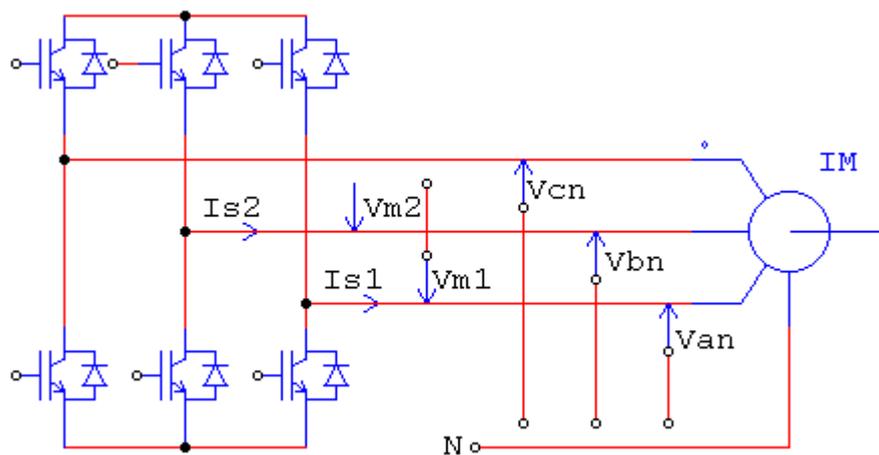


Figura 20. Asignación de tensiones y corrientes.

$$\begin{pmatrix} v_{m1} \\ v_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{an} \\ v_{bn} \\ v_{cn} \end{pmatrix} = C_u \cdot \begin{pmatrix} v_{an} \\ v_{bn} \\ v_{cn} \end{pmatrix}$$
(69)

$$\begin{pmatrix} v_{an} \\ v_{bn} \\ v_{cn} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{m1} \\ v_{m2} \end{pmatrix} = C_v \cdot \begin{pmatrix} v_{m1} \\ v_{m2} \end{pmatrix}$$
(70)

$$\begin{pmatrix} i_{an} \\ i_{bn} \\ i_{cn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \end{pmatrix} = C_s \cdot \begin{pmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \end{pmatrix}$$
(71)

$$\begin{pmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{an} \\ i_{bn} \\ i_{cn} \end{pmatrix} = C_i \cdot \begin{pmatrix} i_{an} \\ i_{bn} \\ i_{cn} \end{pmatrix} \quad (72)$$

$$\begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{s0} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{an} \\ v_{bn} \\ v_{cn} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} v_{an} \\ v_{bn} \\ v_{cn} \end{pmatrix} \quad (73)$$

$$\begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{s0} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{m1} \\ v_{m2} \end{pmatrix} = P \cdot C_v \cdot \begin{pmatrix} v_{m1} \\ v_{m2} \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$\begin{pmatrix} i_{an} \\ i_{bn} \\ i_{cn} \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{s0} \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{s0} \end{pmatrix} \quad (75)$$

$$\begin{pmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{an} \\ i_{bn} \\ i_{cn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{s0} \end{pmatrix} = C_i \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{s0} \end{pmatrix} \quad (76)$$

se añaden las ecuaciones de la máquina que completan el conjunto:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi_{sx}}{dt} &= u_{sx} - R_s \cdot i_{sx} + \omega \cdot \Psi_{sy} \\
\frac{d\Psi_{sy}}{dt} &= u_{sy} - R_s \cdot i_{sy} - \omega \cdot \Psi_{sx} \\
\frac{d\Psi_{rx}}{dt} &= u_{rx} - R_r \cdot i_{rx} - (\omega - \omega_r) \cdot \Psi_{ry} \\
\frac{d\Psi_{ry}}{dt} &= u_{ry} - R_r \cdot i_{ry} + (\omega - \omega_r) \cdot \Psi_{rx} \\
\frac{d\Psi_{s0}}{dt} &= u_{s0} - R_{s0} \cdot i_{s0} \\
\frac{d\Psi_{r0}}{dt} &= u_{r0} - R_{r0} \cdot i_{r0}
\end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{rx} \\ i_{ry} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_s & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_s & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_r & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_r \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{pmatrix} = \frac{1}{L_s \cdot L_r - L_m^2} \cdot \begin{pmatrix} L_r & 0 & -L_m & 0 \\ 0 & L_r & 0 & -L_m \\ -L_m & 0 & L_s & 0 \\ 0 & -L_m & 0 & L_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} i_{s0} \\ i_{r0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_{s0} & 0 \\ 0 & L_{r0} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_{s0} \\ \Psi_{r0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_{s0}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{r0}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_{s0} \\ \Psi_{r0} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{s0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{L_r}{A} & 0 & 0 & -\frac{L_m}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_r}{A} & 0 & 0 & -\frac{L_m}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{s0}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{s0} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \\ \Psi_{r0} \end{pmatrix} = L^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{s0} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \\ \Psi_{r0} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{78}$$

$$J \cdot \frac{d\omega_r}{dt} = -\rho \cdot \omega_r + \frac{3}{2} \cdot p \cdot (\Psi_{sx} \cdot i_{sy} - \Psi_{sy} \cdot i_{sx}) - M_c \tag{79}$$

Reordenando, se llega a:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_s \\ i_e \\ \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{s0} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \\ \Psi_{r0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1/C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-R_s \cdot L_r}{A} & \omega & 0 & \frac{R_s \cdot L_m}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & \frac{-R_s \cdot L_r}{A} & 0 & 0 & \frac{R_s \cdot L_m}{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-R_{s0}}{L_{s0}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_r \cdot L_m}{A} & 0 & 0 & \frac{R_r \cdot L_s}{A} & \omega - \omega_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R_r \cdot L_m}{A} & 0 & -(\omega - \omega_r) & \frac{-R_r \cdot L_s}{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-R_{r0}}{L_{r0}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_s \\ i_e \\ \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{s0} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \\ \Psi_{r0} \end{pmatrix} + \\
&\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/L_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_r \\ u_{rx} \\ u_{ry} \\ u_{r0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{s0} \\ i_m \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{80}$$

Añadiendo las relaciones entre las tensiones y corriente moduladas como función de las variables de estado, se llega a:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{s0} \\ i_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P & 0_{1 \times 1} \\ 0_{3 \times 3} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{an} \\ u_{bn} \\ u_{cn} \\ i_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0_{1 \times 1} \\ 0_{3 \times 3} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_v & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{M1} \\ u_{M2} \\ i_m \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} P & 0_{1 \times 1} \\ 0_{3 \times 3} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_v & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_s \\ i_{s1} \\ i_{s2} \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} P & 0_{1 \times 1} \\ 0_{3 \times 3} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_v & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0_{1 \times 3} \\ 0_{2 \times 1} & C_i \cdot P^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_s \\ i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{s0} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{s0} \\ i_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0_{1 \times 1} \\ 0_{3 \times 3} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_v & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0_{1 \times 3} \\ 0_{2 \times 1} & C_i \cdot P^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ L^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_s \\ i_e \\ \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{s0} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \\ \Psi_{r0} \end{pmatrix} \quad (82)$$

La aplicación del conjunto anterior lleva a los resultados que siguen, mostrando la operatividad de la modelización propuesta.

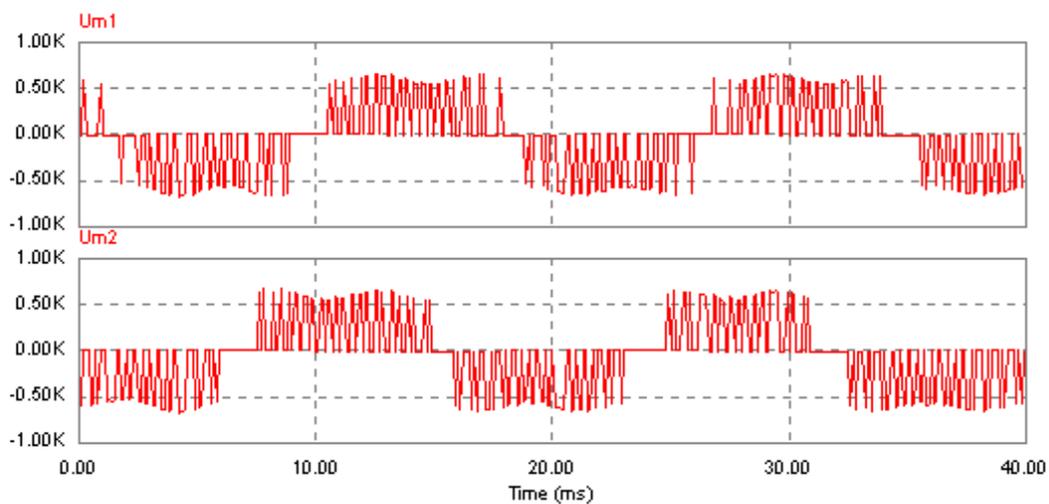


Figura 21. Tensiones aplicadas Um1 y Um2.

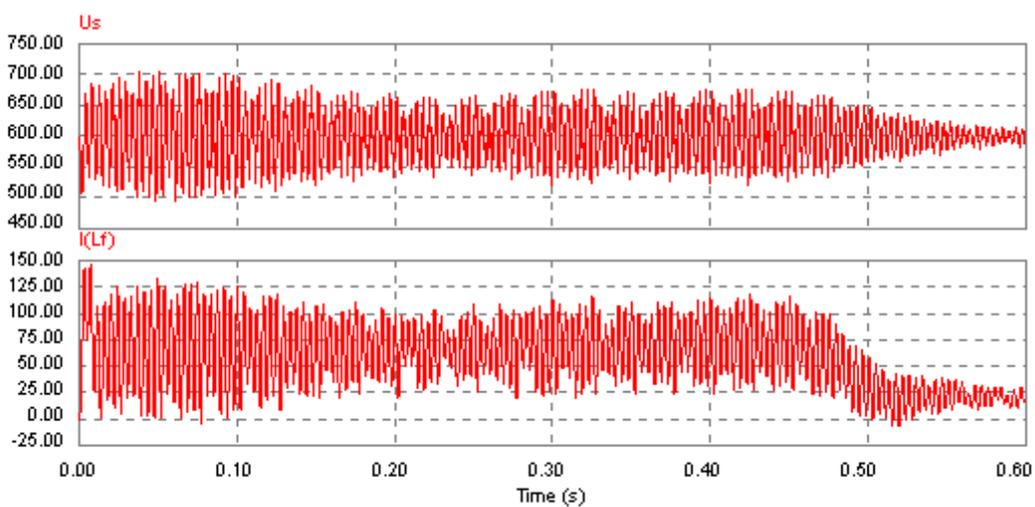


Figura 22. Variables de estado del filtro. Us, I(Lf).

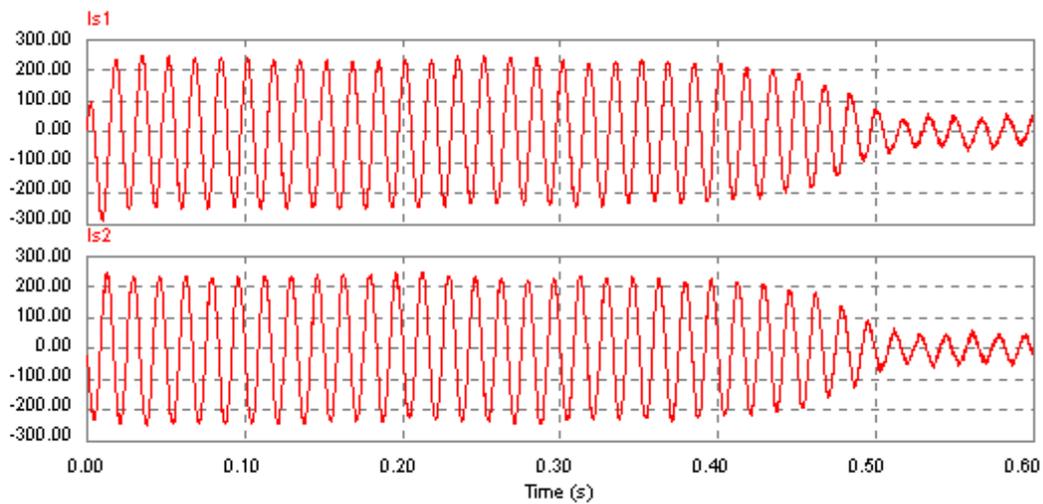


Figura 23. Corrientes Is1, Is2 por la máquina.

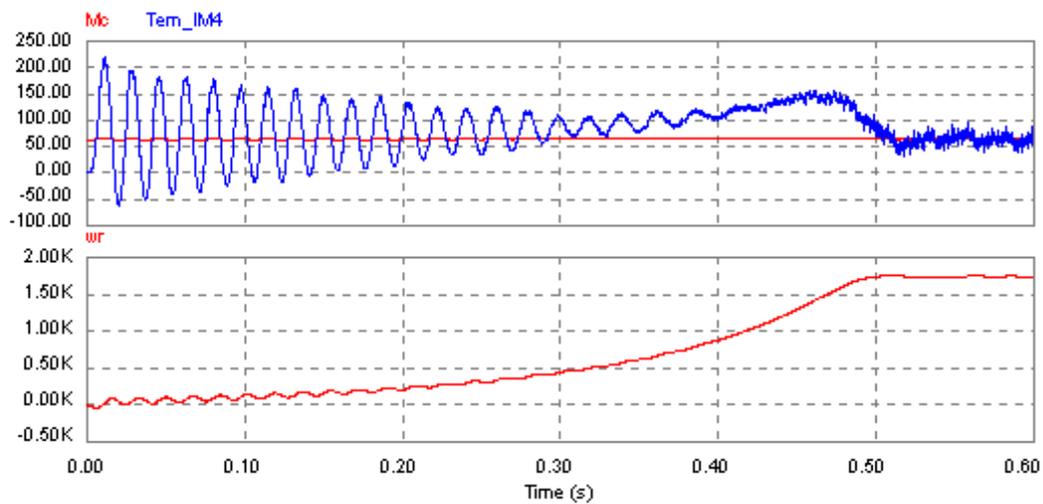


Figura 24. Par electromagnético, de carga y velocidad.

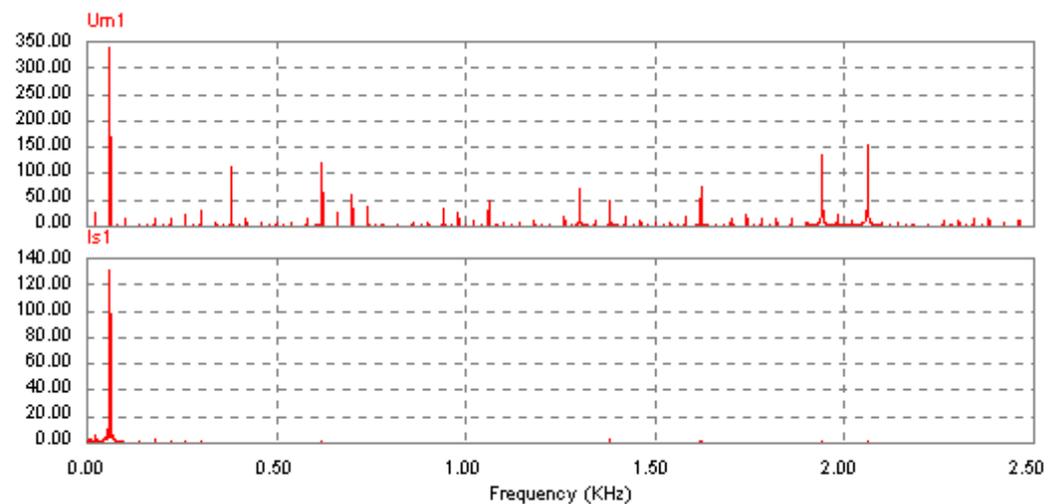


Figura 25. Análisis armónico Um1 e Is1.

Aplicación al conjunto ondulator de corriente+filtro de salida + carga accionada.

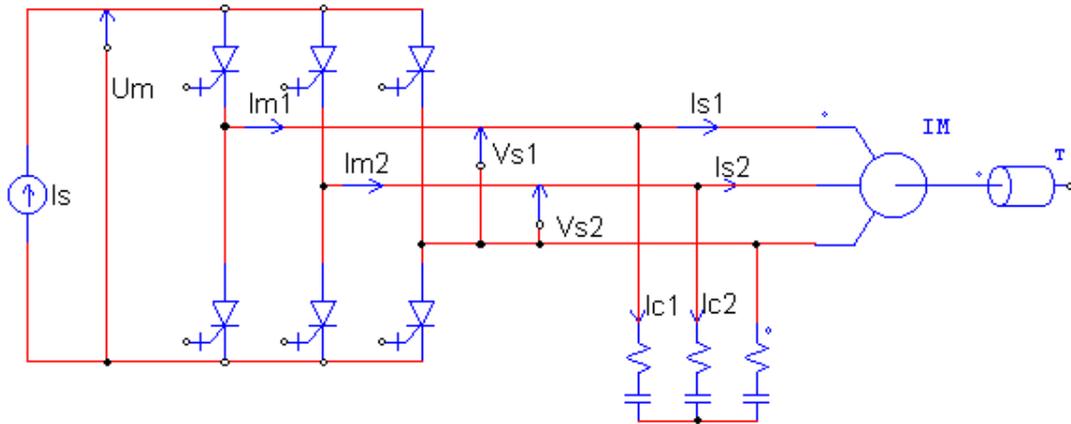


Figura 26. Convertidor de corriente+filtro de salida+máquina asíncrona+carga.

Ecuaciones del filtro:

$$\begin{pmatrix} V_{s1} \\ V_{s2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot C & 0 \\ 0 & R \cdot C \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{pmatrix} \quad (83)$$

Ecuaciones de la máquina:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{s0} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \\ \Psi_{r0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_s \cdot L_r}{A} & \omega & 0 & \frac{R_s \cdot L_m}{A} & 0 & 0 \\ -\omega & -\frac{R_s \cdot L_r}{A} & 0 & 0 & \frac{R_s \cdot L_m}{A} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_{s0}}{L_{s0}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_r \cdot L_m}{A} & 0 & 0 & \frac{R_r \cdot L_s}{A} & \omega - \omega_r & 0 \\ 0 & \frac{R_r \cdot L_m}{A} & 0 & -(\omega - \omega_r) & -\frac{R_r \cdot L_s}{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_{r0}}{L_{r0}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_{sx} \\ \Psi_{sy} \\ \Psi_{s0} \\ \Psi_{rx} \\ \Psi_{ry} \\ \Psi_{r0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{rx} \\ u_{ry} \\ u_{r0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{s0} \end{pmatrix} \quad (84)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = A_s \cdot \Psi + B_r \cdot u_r + B_s \cdot u_s$$

Teniendo en cuenta las relaciones entre tensiones aplicadas y transformadas:

$$\frac{d\Psi}{dt} = A_s \cdot \Psi + B_r \cdot u_r + B_s \cdot u_s = A_s \cdot \Psi + B_r \cdot u_r + B_s \cdot P \cdot C_v \cdot \begin{pmatrix} V_{s1} \\ V_{s2} \end{pmatrix} \quad (85)$$

Sustituyendo:

$$\frac{d\Psi}{dt} = A_s \cdot \Psi + B_r \cdot u_r + B_s \cdot u_s = A_s \cdot \Psi + B_r \cdot u_r + B_s \cdot P \cdot C_v \cdot \left\{ \begin{pmatrix} R \cdot C & 0 \\ 0 & R \cdot C \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{pmatrix} \right\} \quad (86)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = A_s \cdot \Psi + B_r \cdot u_r + B_s \cdot u_s = A_s \cdot \Psi + B_r \cdot u_r + B_s \cdot P \cdot C_v \cdot \left\{ R_c \cdot \frac{du_c}{dt} + u_c \right\} \quad (87)$$

y teniendo en cuenta que:

$$\begin{pmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \end{pmatrix} = C_c \cdot \frac{du_c}{dt} + C_i \cdot P^{-1} \cdot L^{-1} \cdot \Psi \quad (88)$$

se llega a:

$$\begin{pmatrix} I & -B_s \cdot P \cdot C_v \cdot R_c \\ 0 & C_c \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Psi \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_s & B_s \cdot P \cdot C_v \\ -C_i \cdot P^{-1} \cdot L^{-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi \\ u_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u_r + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} I_s \quad (89)$$

Los resultados que siguen confirman la correcta solución de las ecuaciones.

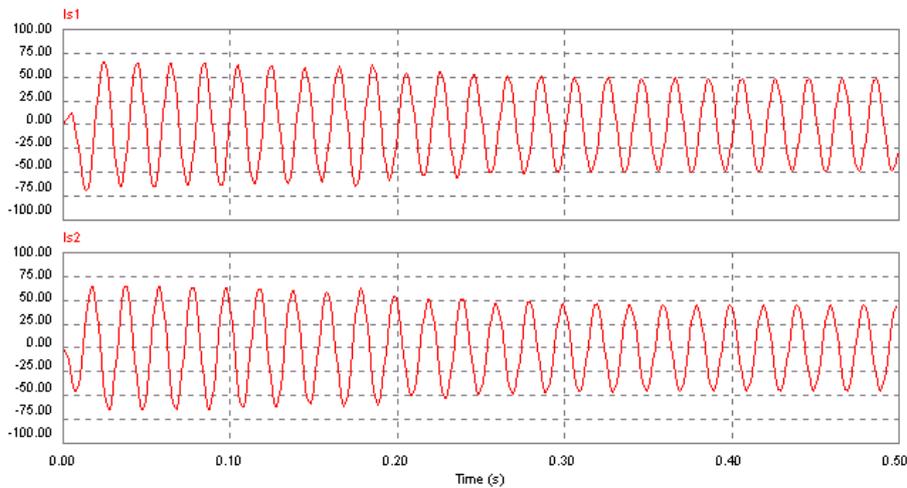


Figura 27. Corrientes por el motor.

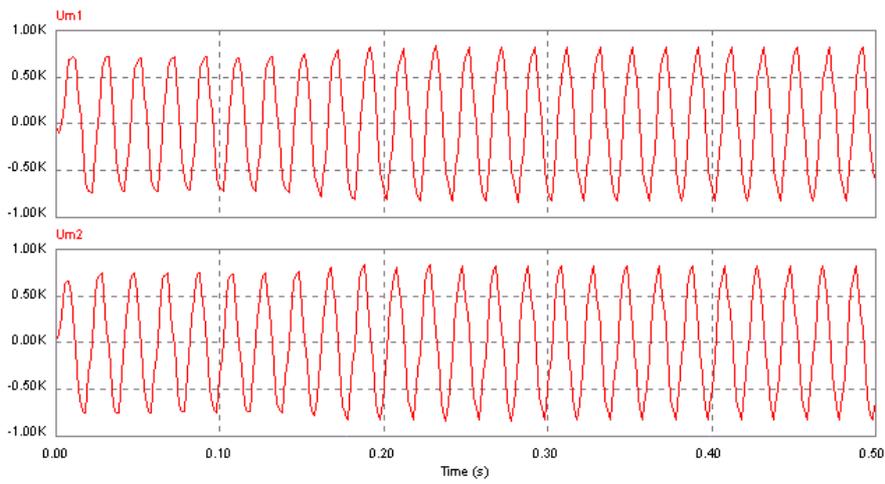


Figura 28. Tensiones aplicadas al motor.

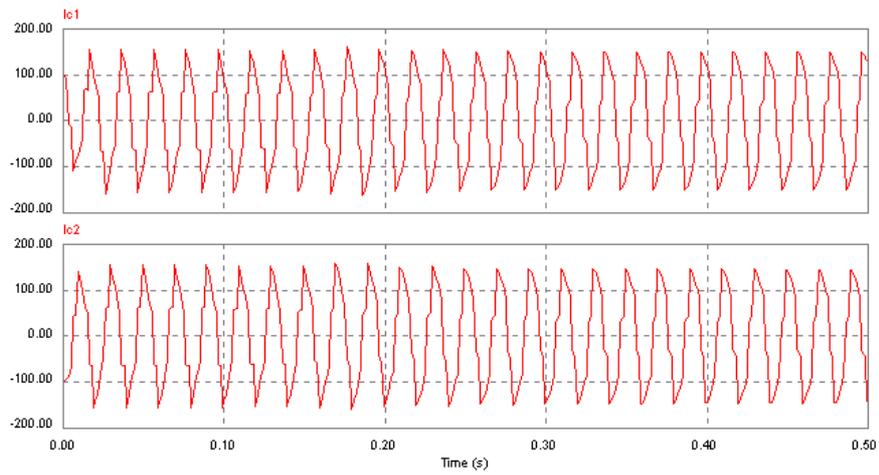


Figura 29. Corriente por el filtro.

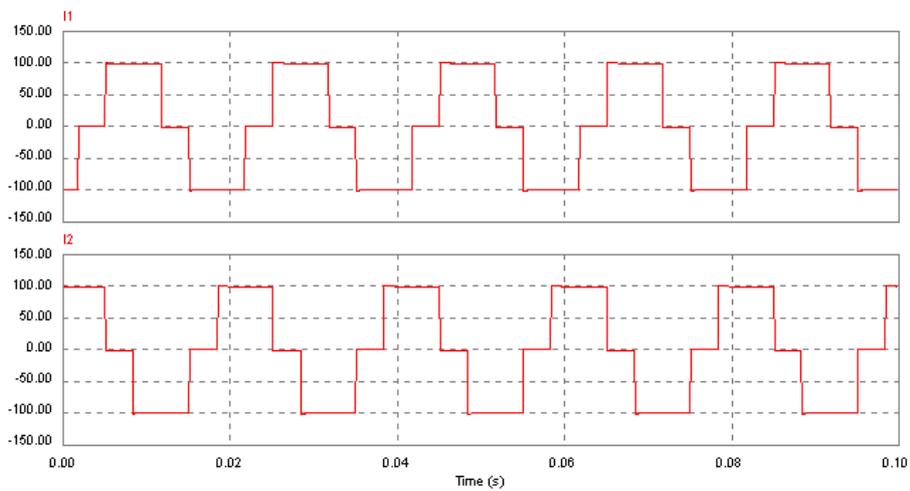


Figura 30. Corriente de salida del ondulator.

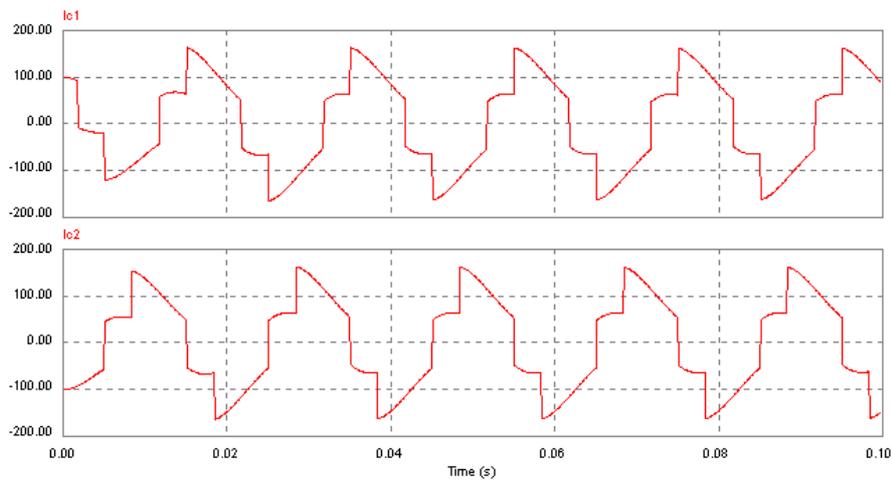


Figura 31. Corrientes hacia el filtro.

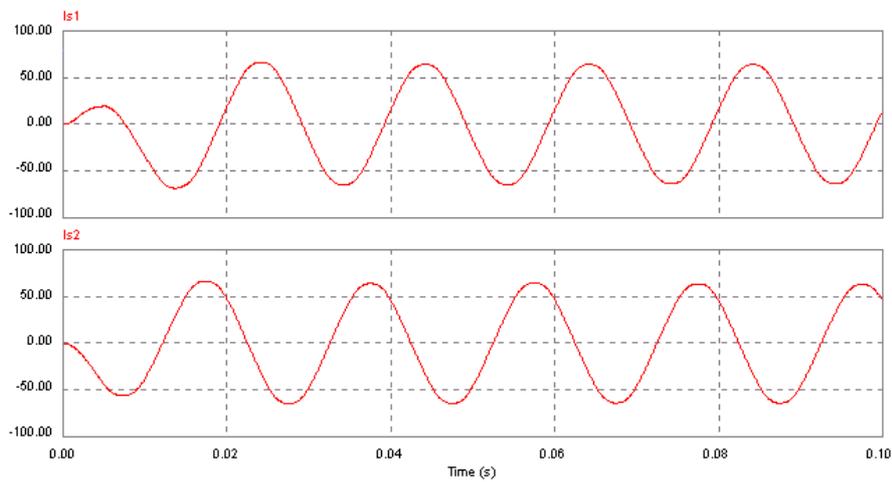


Figura 32. Corrientes por el motor.

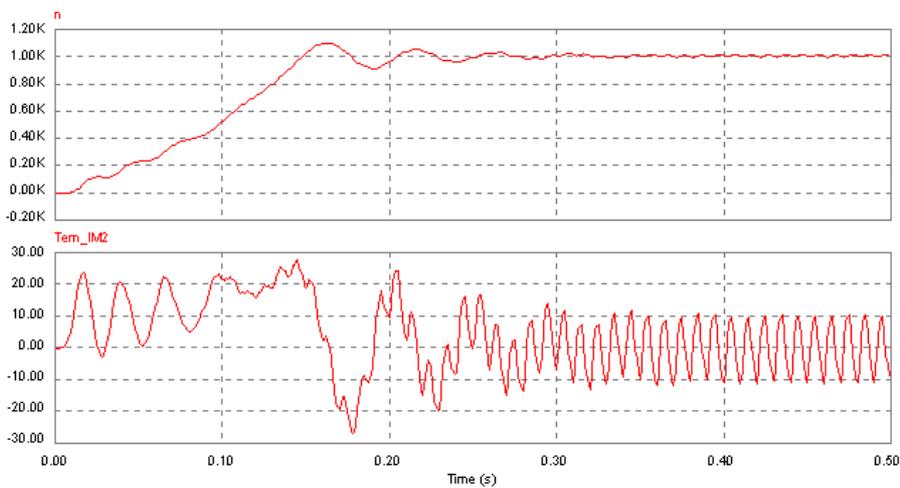


Figura 33. Velocidad, Par electromagnético.

Función generatriz de conversión.

A partir de las definiciones anteriores y de los posibles estados de las células de conmutación, es evidente que los elementos m_{ij} sólo pueden tomar los valores 1, 0 y -1 . Caso de desear una representación continua de los mismos, se puede definir una **función generatriz de conversión** tal que su valor para un instante de tiempo, sea equivalente al “valor medio instantáneo” de la función durante el período T:

$$m_g = \frac{1}{T} \int_{k \cdot T}^{(k+1) \cdot T} m(\tau) \cdot d\tau \Bigg)_{T \rightarrow 0} \quad (90)$$

En la práctica, la función generatriz siempre es muestreada ya que el período T es finito; la figura muestra como se obtiene m a partir de m_g . Así, $m_g(k,t)$ es la función muestreada de $m_g(t)$ para $k \in \{0,1,2,\dots,q,q+1,\dots\}$. Si el bloqueo se produce al inicio del período comprendido entre los instantes qT y $(q+1)T$, **$m_g(q)$ representa**, durante este intervalo, la amplitud de $m_g(k,t)$ y por tanto el valor medio de la función de conversión **m**.

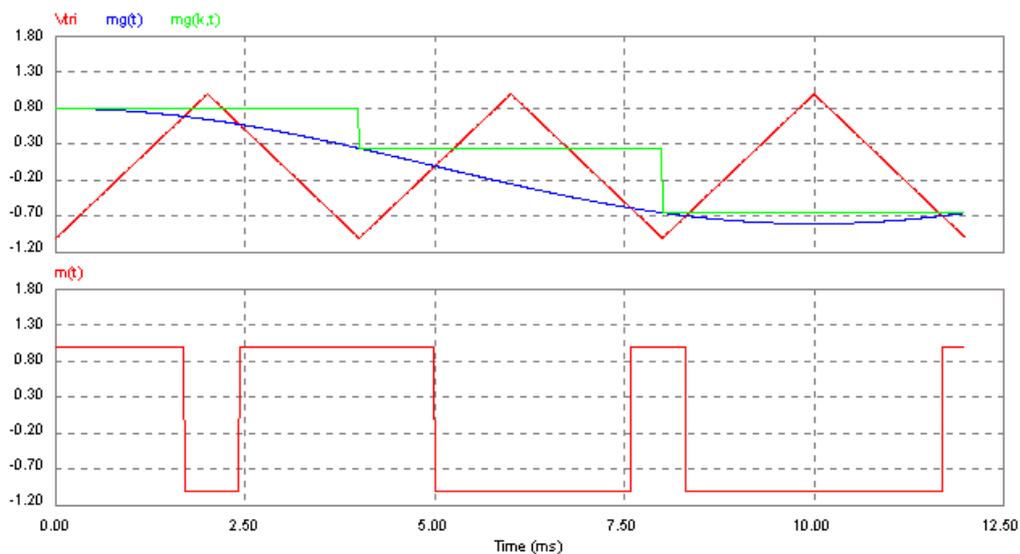


Figura 34. Función generatriz.

Si la carga accionada presenta un comportamiento paso-bajo, la señal de salida del convertidor puede ser asimilada a su valor medio para cada intervalo de muestreo considerado, con el añadido de un retardo T_D entre la señal $m_g(t)$ y su equivalente continuo $m_g(t-T_D)$, representativo del valor medio de $m_g(k,t)$. Normalmente, se asimila este retardo al valor medio del período de muestreo resultando una función de transferencia para el convertidor como la siguiente:

$$F_c(s) = \frac{\overline{u(s)}}{m_g(s)} \cdot e^{-\frac{T}{2}s} = K \cdot e^{-\frac{T}{2}s} \quad (91)$$

El inconveniente que presenta esta función de transferencia se puede eliminar realizando una aproximación de la exponencial según Pade, adoptando la forma canónica siguiente:

$$e^{-\frac{T}{2}s} = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{(2 \cdot n - i)! n!}{(2 \cdot n)! i! (n - i)!} \cdot (-s \cdot T_D)^i}{\sum_{i=0}^n \frac{(2 \cdot n - i)! n!}{(2 \cdot n)! i! (n - i)!} \cdot (s \cdot T_D)^i} \quad (92)$$

que presenta una constelación de polos estables y ceros inestables que mantienen las características desestabilizantes del retardo.

Por ejemplo, para el caso de $T=0.2$ ms y considerando $n=1$ (aproximación de primer orden):

$$F_c(s) = K \cdot e^{-\frac{T}{2}s} \approx K \cdot \frac{1 - 50 \cdot 10^{-6} \cdot s}{1 + 50 \cdot 10^{-6} \cdot s} \quad (93)$$

Aplicando el método anterior a las funciones de conexión f_{ij} se puede definir la función $f_g(k,t)$, **función generatriz muestreada**, correspondiente a la resultante del muestreo de la función generatriz de conexión $f_g(t)$:

$$\frac{1}{T} \int_{(q-1)T}^{qT} f_g(\tau) \cdot d\tau = \delta_1(q-1) \quad (94)$$

El valor medio relativo a cada intervalo de muestreo $f_g(q)$, se corresponde con el tiempo de conexión relativo a cada intervalo considerado, es decir:

$$f_g(q) = \frac{t_{on}(q)}{T} \Rightarrow t_{on}(q) = f_g(q) \cdot T \quad (95)$$

Esto permite calcular el tiempo de conexión de cada interruptor, una vez fijado el período de muestreo para el convertidor.

Generalizando para el caso de un convertidor complejo, se puede plantear:

$$M_{rg} = R_{cv} \cdot F_{rg} = R_{cv} \cdot \left(\frac{1}{T} \int_{qT}^{(q+1)T} F_r(\tau) \cdot d\tau \right)_{T \rightarrow 0} \quad (96)$$

finalmente:

$$G_m = M_{rg} \cdot C_s \cdot X \quad (97)$$

La aplicación al caso anterior (filtro+convertidor+máquina accionada+carga) lleva a los siguientes resultados.

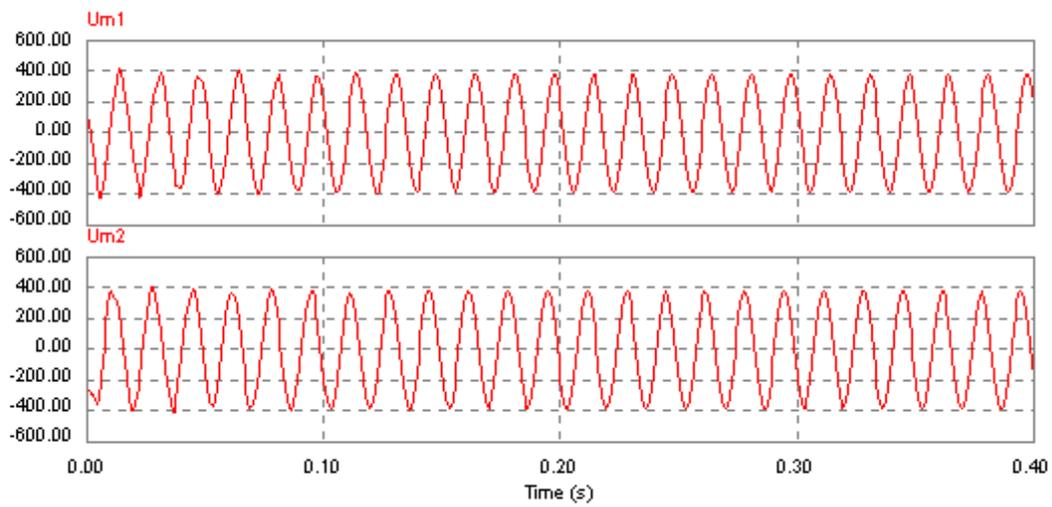


Figura 35. Tensiones aplicadas a la máquina.

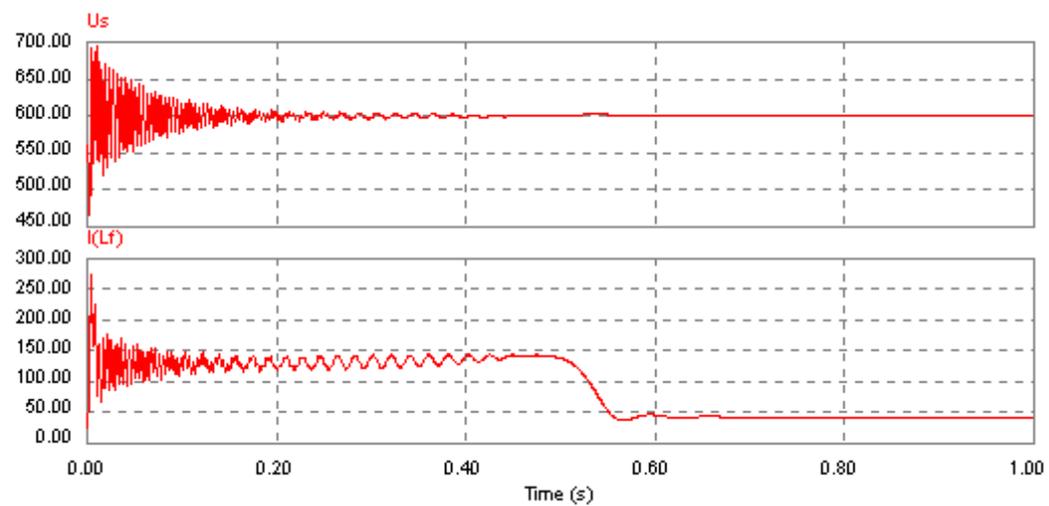


Figura 36. Variables de estado del filtro. U_s , $I(L_f)$.

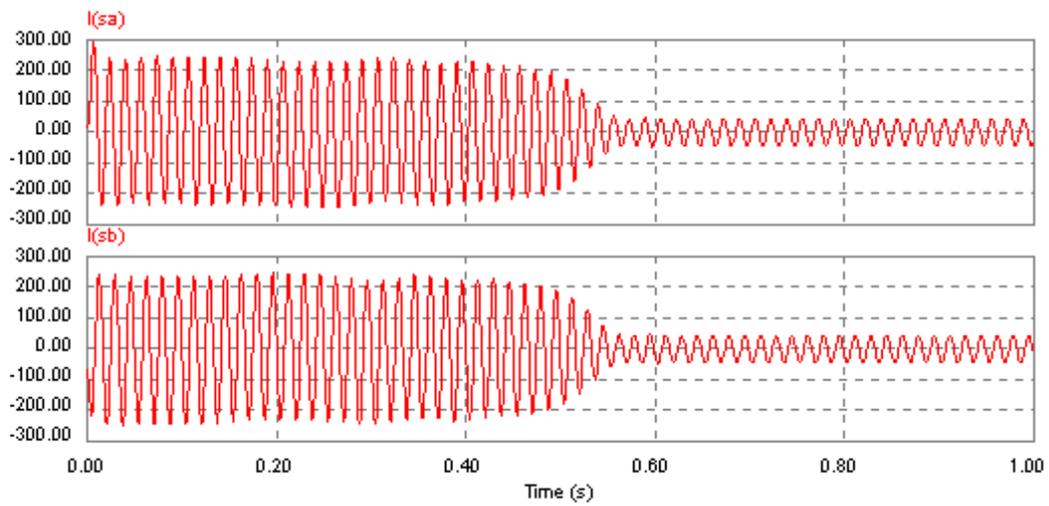


Figura 37. Corrientes por el motor.

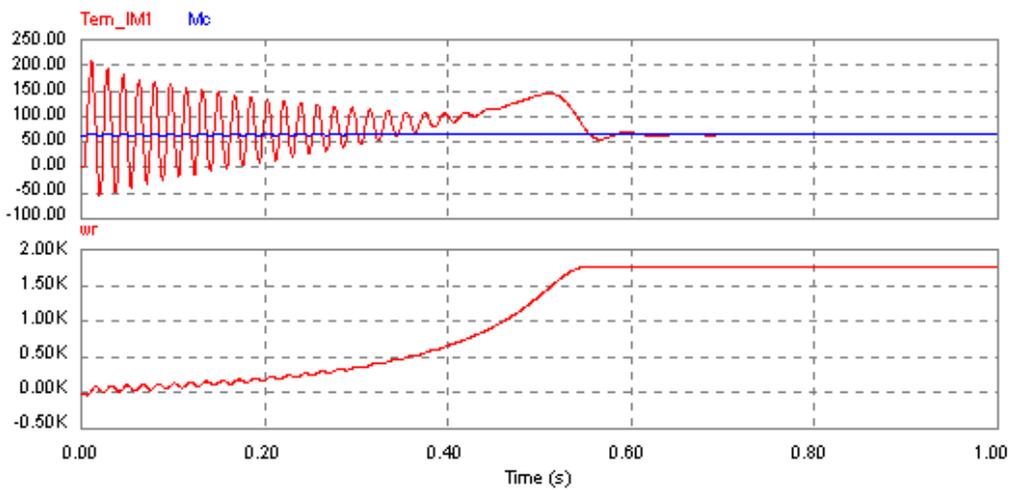


Figura 38. Par electromagnético, de carga y velocidad.

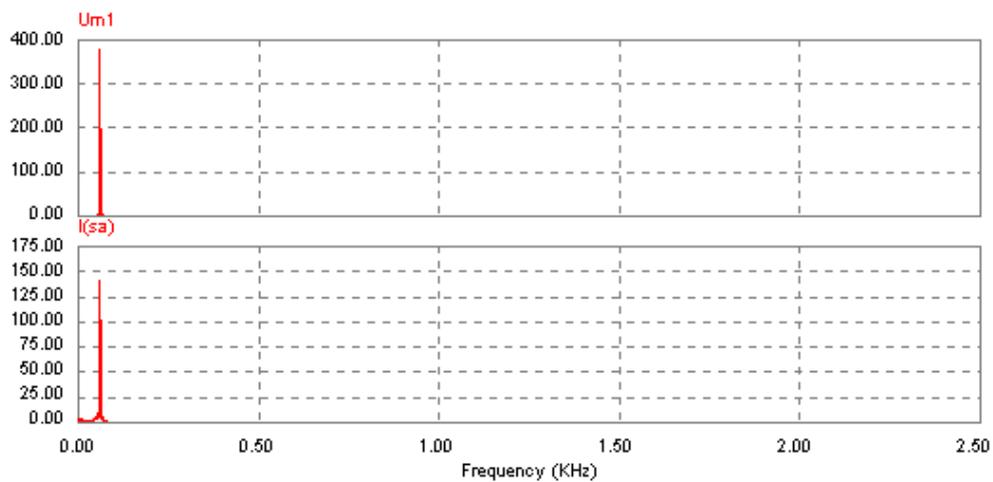


Figura 39. Análisis armónico tensión aplicada, corriente por la máquina.

Que coinciden en la aproximación de primer armónico con los calculados mediante el modelo exacto. A efectos de control se puede sustituir el modelo exacto mediante el modelo promediado. Si se comparan los resultados se observa un retardo medio no superior a $\frac{1}{2}$ del período de muestreo considerado; como se puede ver en la gráfica que sigue.

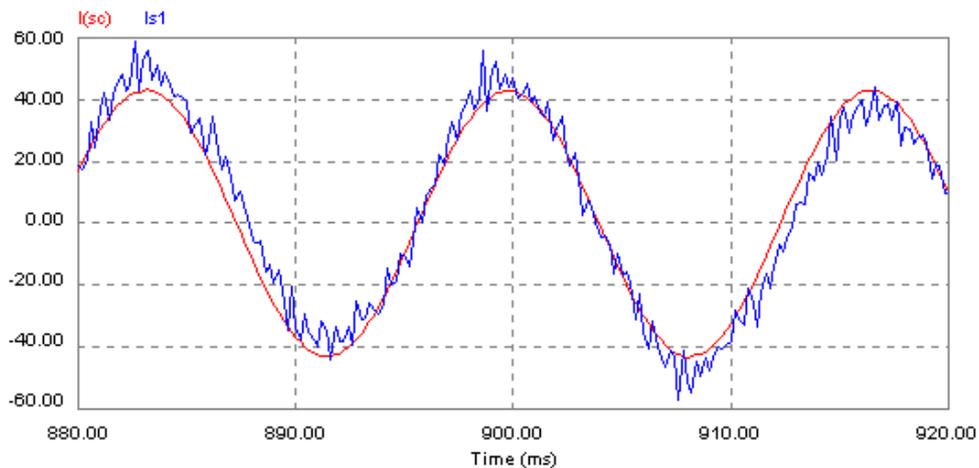


Figura 40. Comparación del cálculo exacto y el promediado.

Estructuras de control basadas en las funciones generatrices de modulación.

Una vez formulada la modelización, puede plantearse el cálculo de las funciones generatrices de modulación para realizar cualquier estructura de control. Por ejemplo, en la figura que sigue se plantea la obtención de las funciones de control a partir del conocimiento de la corriente y de la velocidad y a partir de la inversión del modelo de la máquina.

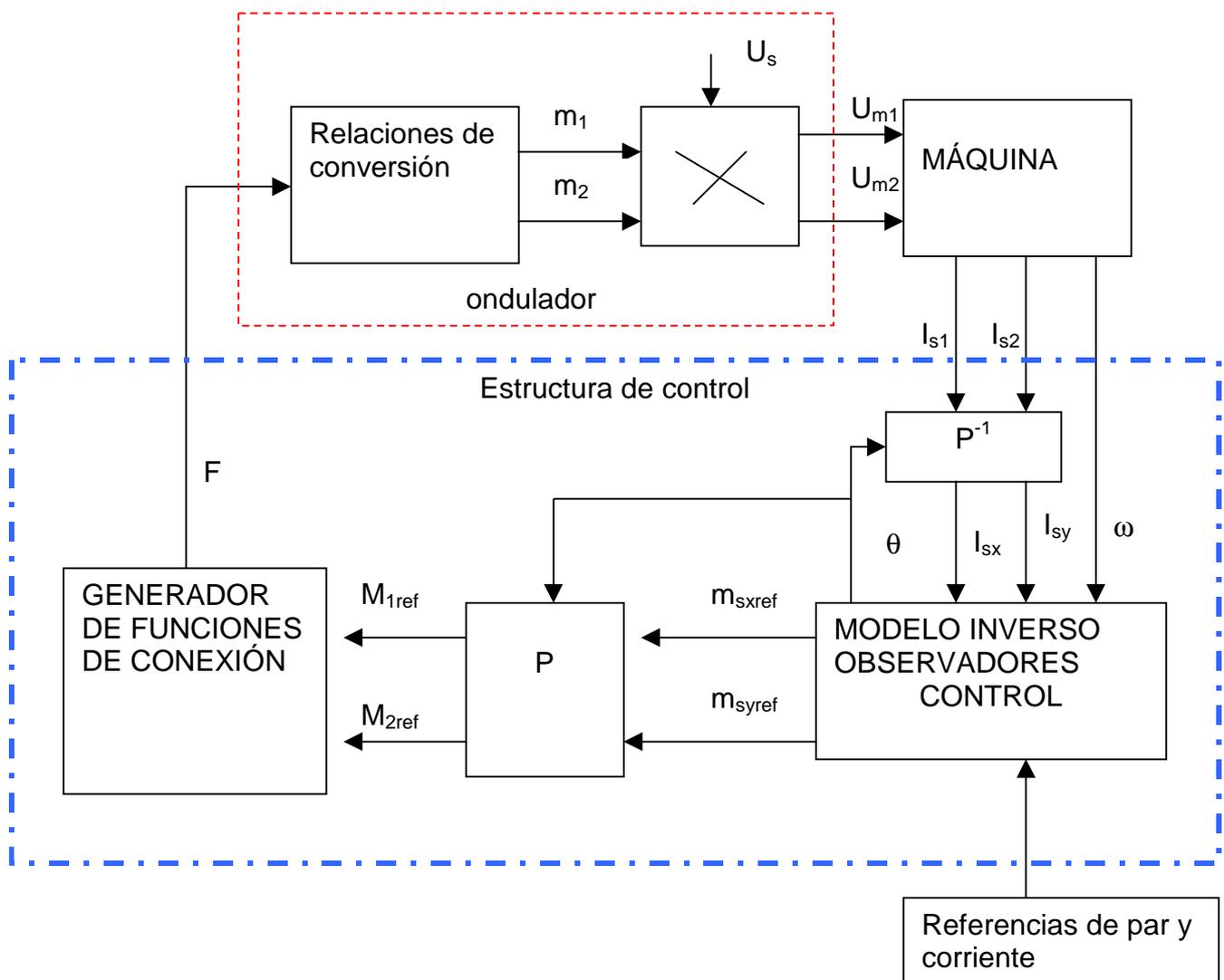


Figura 41. Estructura de control basada en las funciones generatrices de conexión. Aplicación al control de la máquina asíncrona.

Esta estructura es general para cualquier algoritmo de control que se plantee, ya que permite el cálculo de la señal a aplicar en función de las variables de control consideradas.

Aportación experimental: caso del conjunto máquina asíncrona+convertidor+carga.

Aplicación de la metodología anterior a un sistema formado por los siguientes componentes:

- Ondulador PWM, con señal portadora triangular de 1000 Hz, $V_N = 220$ V, 1.8 kVA, ley $V/f = K$ de 0 a 50 Hz; $V = k = V_N$ para $f > 50$ Hz. Prueba realizada para salida a frecuencia nominal (50 Hz; $m_f = 20$; $m_a = 0.9$).
- Máquina asíncrona de 1.5 kW, 220 V/380 V, 1470 min^{-1} .
- Parámetros de la máquina obtenidos a partir de ensayos normalizados: $R_s = 5.18 \text{ } \Omega$; $R_r = 5.31 \text{ } \Omega$; $L_{sl} = 0.01375 \text{ H}$; $L_{rl} = 0.01435 \text{ H}$; $M = 0.3675 \text{ H}$; $J = 0.003375 \text{ kgm}^2$.
- Par de carga aplicado = 1.8 Nm, correspondiente al servicio de la máquina en vacío y atribuible al par de rozamientos mecánicos.

Obteniéndose los siguientes resultados de contrastación:

	Experimental	Simulación	Error
V_{1L}	282 V	270 V	4.25%
I_{1L}	3.7 A	4.2 A	13.5%
V_{fp}	69.2 V	80 V	15.60%
N_f	1490 min^{-1}	1480 min^{-1}	0.67%

La tabla recoge los resultados relativos al valor eficaz de la componente fundamental de tensión V_{1L} , de primer armónico de corriente I_{1L} , y del armónico de tensión de primer orden ($f_p = m_f \cdot f_1 \pm f_1$, 950 Hz) y valor final de velocidad n_f .

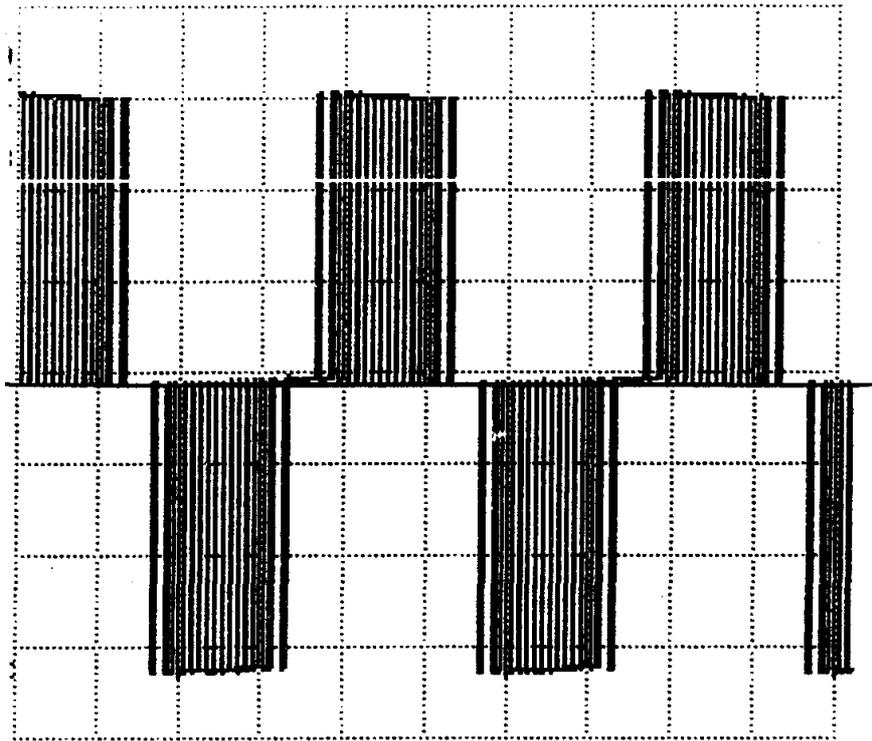


Figura 42. Tensión aplicada. 1 div = 100 V ; 1 div = 5 ms.

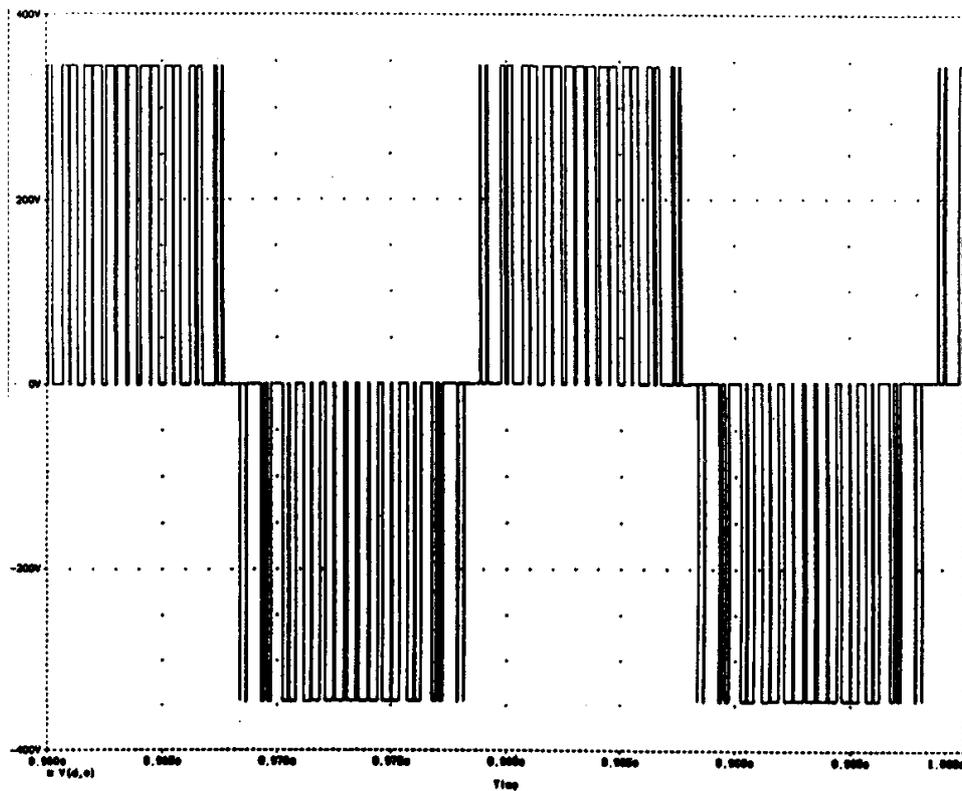


Figura 43. Tensión calculada.

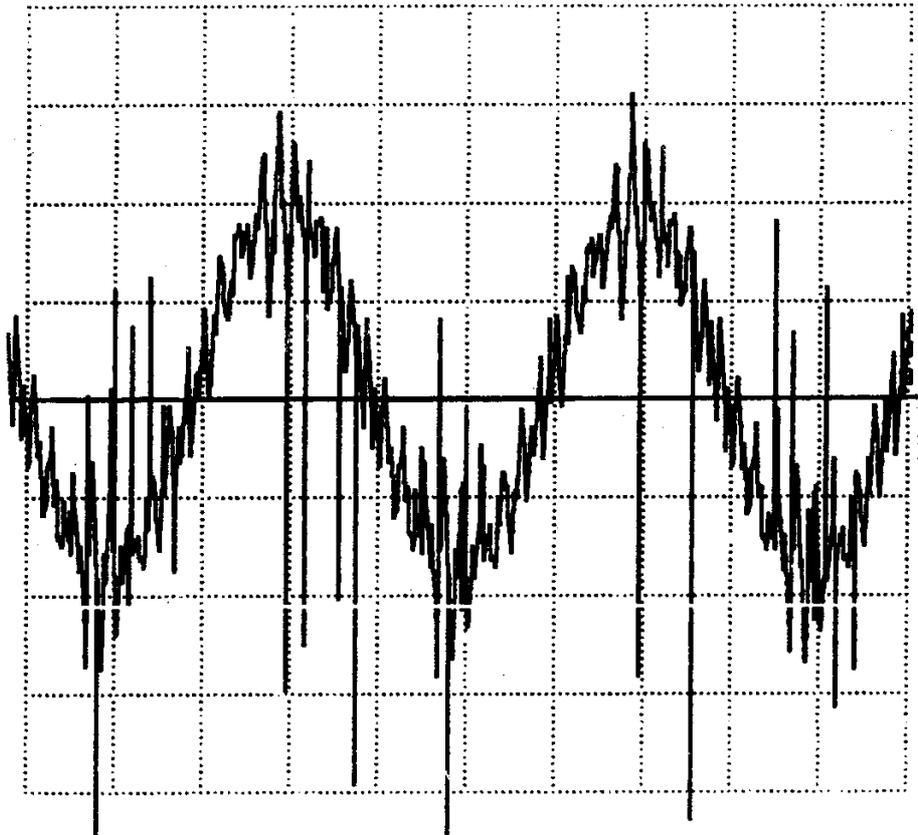


Figura 44. Corriente real. 1 div = 2 A; 1div = 5 ms.

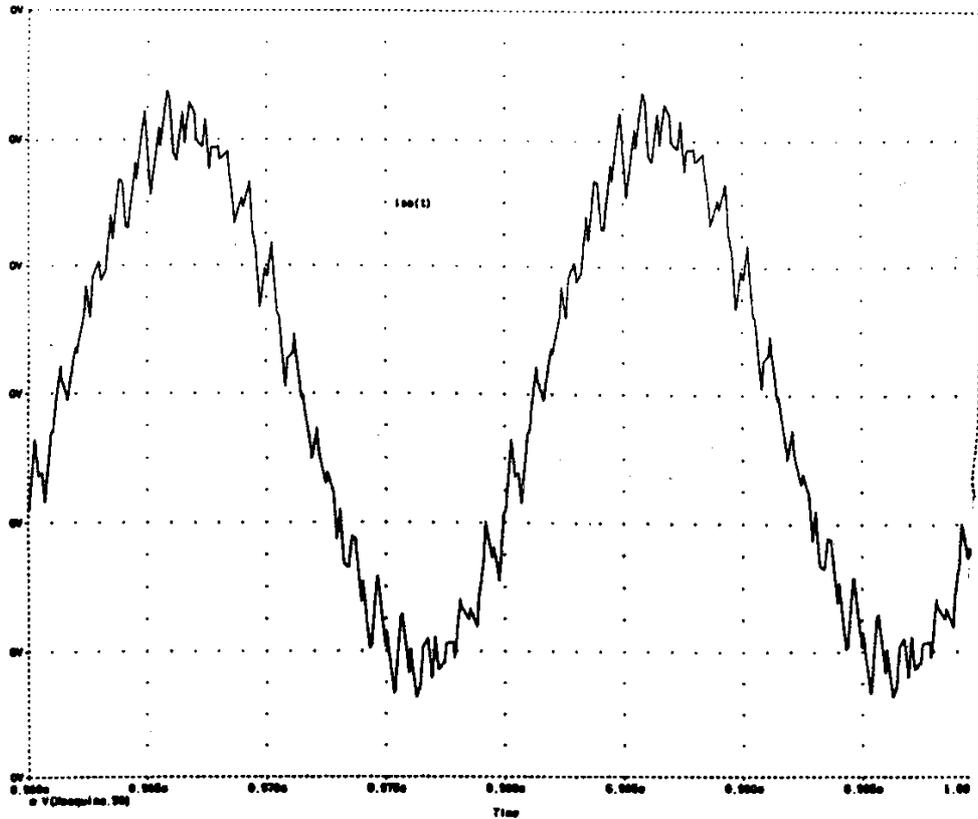


Figura 45. Corriente calculada.

Conclusiones

El método de modelización considerado permite la formulación del conjunto de ecuaciones correspondientes al motor y su alimentación, resultando una forma natural y relativamente, sencilla.

Es obvio que las funciones de conexión ya han sido utilizadas ampliamente en el caso de modelización de convertidores, pero no es así en el supuesto de considerar como carga del mismo una máquina.

Asimismo la consideración del conjunto permite obtener leyes directas de control para el convertidor, partiendo de variables de interés electrotécnico: corriente, velocidad o par.

A partir de los resultados obtenidos caben las siguientes consideraciones:

- El modelo completo permite obtener resultados de forma exacta.
- La consideración de modelos promediados lleva a resultados correctos en el caso de índices de modulación elevados.
- A efectos de sintetizar el control se puede sustituir la función exacta por la promediada.
- El conjunto completo de ecuaciones es de una gran belleza conceptual y aplicada.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS. CONCLUSIONES Y APORTACIONES



8. DISCUSIÓN DE RESULTADOS. CONCLUSIONES Y APORTACIONES

8. DISCUSIÓN DE RESULTADOS. CONCLUSIONES Y APORTACIONES	2
Modelos de máquinas asíncronas considerando la saturación.	2
Sensibilidad.	3
Obtención de los parámetros por ensayos fuera de línea.	4
Obtención de variables no medibles y parámetros en servicio.	5
Modelo completo:	6
Modelo reducido:	7
Parámetros mecánicos:	7
Modelización del convertidor.	8
Aplicaciones.	8
Futuros desarrollos.	9

8. DISCUSIÓN DE RESULTADOS. CONCLUSIONES Y APORTACIONES

Modelos de máquinas asíncronas considerando la saturación.

- a) Se han desarrollado y discutido diversos modelos para máquinas asíncronas considerando la saturación.
- b) Desde el punto de vista de simulación todos los modelos aportan la misma información y los mismos resultados.
- c) Si se tienen en cuenta las restricciones de control, los modelos que en su formulación incluyan ecuaciones algebraicas, no han de considerarse para su aplicación en algoritmos de control, debido a la posibilidad de retardo en el cálculo de variables.
- d) La utilización de modelos con un parámetro menos, L_{sl} o L_{rl} según el caso, conlleva una formulación más sencilla y a la vez, posibilita la estimación de los parámetros sin tener que aventurar hipótesis poco contrastadas (del tipo $L_{sl} = L_{rl}$).
- e) La utilización de modelos con saturación cruzada introduce una restricción algebraica que invalida totalmente su aplicación en tiempo real.
- f) Los modelos basados en orientación del campo resultan muy sencillos en su formulación, a costa de necesitar el cálculo de la velocidad y posición de los ejes de referencia para cada instante de tiempo; por tratarse de un caso particular, aunque de mucha aplicación, no se han considerado para el desarrollo de modelos de identificación en tiempo real.
- g) Los modelos nº 21 y 22 resultan los más interesantes:
 - Están formulados con un parámetro menos (L_{sl}), por lo que resultan de resolución sencilla.
 - No presentan ninguna restricción algebraica para su resolución.
 - Se diferencian en la formulación de la función de saturación.
 - A efectos de formulación para su implementación en algoritmos de identificación de parámetros en tiempo real, el modelo nº 21 resulta menos interesante ya que los parámetros desconocidos aparecen como coeficientes dentro de la función de saturación:

$$\Psi = a_1 \cdot \text{atan}(a_2 \cdot i) \quad (1)$$

Lo cual representa un obstáculo en su implementación.

- h) Ambos modelos se consideran para su implementación en la modelización.

Sensibilidad.

- a) El análisis de las funciones de sensibilidad permite estimar los errores que se producen en las salidas ocasionados por las variaciones de los parámetros, así como su influencia en la respuesta global del sistema.
- b) El modelo que resulte menos sensible a las variaciones de los parámetros será más útil para la realización de algoritmos de control y, a su vez, se pondrán en evidencia que parámetros son más delicados para su valoración posterior.
- c) El análisis de los modelos anteriores, (21 y 22), conduce a las siguientes conclusiones:
 - Las corrientes resultan igualmente afectadas por las variaciones de r_s y r_r en ambos modelos.
 - La sensibilidad de las mismas es mayor a las variaciones de L_{r1} ; además, el modelo nº21 resulta mucho más sensible.
 - Las variaciones en el momento de inercia J , y en el coeficiente de rozamiento ρ , repercuten de forma similar en ambos modelos.
 - Las variaciones en los parámetros que definen las funciones de saturación (a_1 y a_2 para el modelo nº 21; a y b para el modelo nº 22), influyen de forma mucho más significativa en el primer modelo (nº 21).
 - Respecto a la velocidad ω_r :
 - Ambos modelos presentan un comportamiento similar; no obstante, el primer modelo presenta discrepancias mayores para todos los parámetros considerados, en especial los que definen la caracterización de la saturación.
 - Respecto a los flujos:
 - El modelo nº 22 es mucho menos sensible a las variaciones de los parámetros que el nº 21.
 - Respecto al par electromagnético:
 - En ambos modelos resulta muy sensible a las modificaciones de L_{r1} (menos en el modelo nº 22), y a las variaciones del momento de inercia (de nuevo, menor en el modelo nº 22).
 - Respecto a los parámetros que caracterizan la saturación, el modelo polinomial considerado en el caso nº 22, resulta menos problemático que el modelo arcotangente.

- d) Como conclusión final, el modelo polinomial para caracterizar la saturación resulta menos influyente que el de Langevin y, por lo tanto será el considerado para su implementación en la determinación de los parámetros en tiempo real.

Tabla 1. Sensibilidades unitarias. Modelo nº21

	R_s	R_r	L_{rl}	J	ρ	a_1	a_2
i_{sx}	1.31	-2.49	-0.39	-3.48	-0.26	414	-311
i_{sy}	18.78	3.89	-351	2.45	0.12	4557	-1193
i_{rx}	-1.17	2.53	267	3.48	0.26	-406	-311
i_{ry}	-1.34	-3.89	502	-2.42	-0.12	489	394
ω_r	-0.04	0.28	-25.7	0.39	0.02	-30.4	-21.3
Ψ_{sx}	0.25	-0.10	-44.2	-0.13	-3.9e-3	45.2	71.2
Ψ_{sy}	0.23	0.08	47.1	0.13	-5.2e-6	72.9	69.4
M_e	6.18	-2.87	-463	-4.6	-0.34	1720	-718

Tabla 2. Sensibilidades unitarias. Modelo nº22

	R_s	R_r	L_{rl}	J	ρ	a	b
Ψ_{sx}	0.21	-0.12	0.18	0.12	0.0023	8.6e-4	0.097
Ψ_{sy}	0.21	0.08	-0.23	0.09	0.0044	0.019	0.049
Ψ_{rx}	0.16	0.27	0.82	-0.55	-0.028	0.018	0.043
Ψ_{ry}	-0.12	-0.55	0.88	0.42	0.013	-0.021	0.043
ω_r	0.043	0.18	-0.61	-0.41	-0.015	9.15e-3	-0.017
i_{sx}	1.02	-1.02	6.02	4.14	0.20	0.33	0.30
i_{sy}	13.2	3.89	-4.98	-2.76	-0.07	-0.39	-2.48
M_e	7.73	-3.23	-9.26	5.25	0.28	0.53	-2.04

Obtención de los parámetros por ensayos fuera de línea.

- a) Como paso previo a la obtención de los parámetros en tiempo real, se plantea la obtención de los mismos a partir de ensayos en régimen permanente.
- b) A partir de los ensayos en vacío y cortocircuito puede plantearse la obtención de los parámetros necesarios para la modelización de la máquina.
- c) El algoritmo presentado permite la valoración independiente de las reactancias de dispersión estática y rotórica, y de la resistencia equivalente de pérdidas en el hierro, a partir del conocimiento de la calidad de la plancha magnética.
- d) La obtención de los parámetros mediante ensayos en régimen permanente (vacío a tensión nominal y rotor frenado), proporcionan resultados correctos. La comprobación de resultados en carga es coherente, estando limitada la resolución del resultado por la precisión en la medida de la velocidad del eje.

e) Se han utilizado dos formulaciones distintas para aproximar las características de saturación:

- Polinomial $\frac{i}{I_n} = a \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n$
- Arco tangente $\Psi = a_1 \cdot \text{atan}(a_2 \cdot i)$

Ambas logran aproximaciones suficientemente exactas, la consideración de una u otra dependerá de la aplicación final.

Tabla 3. Parámetros obtenidos en la modelización de la saturación.

		Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
Polinomial	a	0.48	0.61	0.8
	b	0.52	0.39	0.2
	$\sum \varepsilon^2$	0.032	0.0161	0.0422
Langevin	a₁	0.8550	0.9115	1.0921
	a₂	0.8649	0.2283	0.0691
	$\sum \varepsilon^2$	1.159	1.070	1.0020

f) Se han contrastado los modelos obtenidos para tres grupos de máquinas de potencias crecientes (1.5, 7.5, 22 kW), a las que se ha aplicado una alimentación sinusoidal o PWM proveniente de un ondulator, y un ciclo de carga consistente en arranques en vacío y carga, con posterior variación de la misma. En todos los casos se han obtenido errores aceptables lo que valida el modelo considerado.

Obtención de variables no medibles y parámetros en servicio.

- El observador desarrollado es robusto respecto a las variaciones en los parámetros (coeficientes) del mismo.
- El observador desarrollado mantiene su robustez en la zona de debilitación de campo. Únicamente en el caso de fuerte saturación (U_N ; 25 Hz – ½ de la frecuencia nominal, aproximadamente doble del flujo nominal) existen discrepancias apreciables en alguna de las variables del observador (Flujo rotórico, corriente estática); en todo caso las discrepancias son inferiores al 1%.
- Se han considerado dos formulaciones para el problema de la obtención de las variables de estado desconocidas.

Modelo completo:

- d) Para asegurar la convergencia del algoritmo de identificación hace falta arrancar el algoritmo del observador con unos valores supuestos para los parámetros, y después de un tiempo de rodaje no inferior a 40 ms puede iniciarse el algoritmo de identificación de los mismos; tras múltiples ensayos y pruebas, y debido a la no linealidad del conjunto observador+identificador, no se ha podido garantizar la convergencia sin este proceso de inicialización.
- e) El conjunto de parámetros obtenidos difiere del que se deduce de los ensayos realizados fuera de línea (capítulo anterior); de cara a su implementación en los algoritmos de control esto no es un inconveniente siempre que lo deseado sea un modelo de “caja negra”, es decir que las variables externas sean las correctas. En el caso que nos ocupa esto es así. No puede garantizarse en ningún caso que las variables internas (flujo, par, corriente rotórica) sean las correctas. Considérese el caso del modelo polinomial para la relación flujo corriente:

$$\frac{i}{I_n} = a \cdot \frac{\Psi}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi}{\Psi_N} \right)^n$$

si los parámetros a y b estimados no coinciden con los obtenidos en los ensayos previos fuera de línea, no puede garantizarse que, aún obteniendo el mismo valor para la corriente, el flujo sea el correcto.

Tabla 4. Resultados de identificación. Modelo completo. Alimentación mediante ondulator PWM

	l_{rl} (mH)	r_r (Ω)	$\tau_r=l_{rl}/r_r$ (ms)	a_x	b_x	a_y	b_y	J
Fuera de línea	7.3	0.857	8.52	0.61	0.39	0.61	0.39	0.076
Línea	10.68	1.15	9.28	0.76	0.78	0.726	-0.029	0.075
Diferencia (%)	46.3	34.1	9.00	24.2	100	19.0	107	1.33

- f) La convergencia a valores constantes se produce únicamente para el caso de alimentación PWM. En el caso de alimentación sinusoidal no es posible garantizar la convergencia a valores correctos; la señal sinusoidal tiene un orden 2, insuficiente para resolver la identificación (6 parámetros).
- g) Se ha tenido en cuenta la posibilidad de considerar coeficientes de saturación distintos para cada componente (a_x , a_y , b_x , b_y). Con esta técnica puede *obviarse la utilización de los modelos con saturación cruzada*.
- h) La metodología empleada logra la convergencia de las variables observadas a las reales en un tiempo inferior a los dos períodos de la onda (40 ms a 50 Hz – una vez transcurrido el tiempo de inicialización).

Modelo reducido:

- i) Es necesario el conocimiento completo de los parámetros de modelización del estator (resistencia, saturación) para su desarrollo. Estos pueden ser obtenidos anteriormente mediante el ensayo en vacío.
- j) La convergencia del algoritmo es mucho menos crítica que en el caso anterior. Es capaz de arrancar con valores iniciales cualesquiera, obteniéndose la convergencia en un tiempo inferior a 120 ms (alimentando la máquina a 50 Hz)..
- k) Una vez arrancado el algoritmo se mantiene la convergencia ante variaciones del sistema (convergencia en menos de 10 ms – ½ periodo a 50 Hz)
- l) Los parámetros rotóricos obtenidos presentan una dispersión menor respecto a los obtenidos en los ensayos fuera de línea.

Tabla 5. Resultados de identificación. Modelo reducido. Alimentación mediante ondulator PWM

	L_r (mH)	r_r (Ω)	$\tau_r=L_r/r_r$ (ms)	J
Fuera de línea	7.3	0.857	8.52	0.076
Línea	7.721	0.772	8.74	0.075
Diferencia (%)	5.76	-9.92	2.58	1.33

Parámetros mecánicos:

- m) El par de carga y el momento de inercia del conjunto presentan una convergencia a valores correctos en un tiempo no superior a 100 ms. El resultado de los parámetros mecánicos es independiente del modelo de identificación considerado.
- n) Para ambos modelos el error en la estimación de la constante de tiempo rotórica es suficientemente pequeño como para ser útil en el planteo de algoritmos de control que precisen de la misma (control por orientación del campo).

Modelización del convertidor.

La consideración de las funciones de conexión aplicadas a los convertidores alimentando cargas pasivas, ha sido ampliamente desarrollada en la literatura técnica. Su aplicación a las cargas activas, como las máquinas eléctricas, es una laguna que se ha llenado. El modelo desarrollado permite:

- a) La consideración, de forma natural y sencilla, del conjunto de ecuaciones correspondientes al motor accionado y a su alimentación.
- b) Obtener leyes de control de una forma natural a partir de la inversión del modelo del sistema.
- c) Contrastar experimentalmente el desarrollo obtenido.

Aplicaciones.

- a) Se ha desarrollado y construido un equipo para el ensayo de accionamientos eléctricos.
- b) Permite trabajar en los cuatro cuadrantes del plano par-velocidad así como el control del par de carga presente en el eje, siguiendo una ley arbitraria.
- c) Se ha desarrollado e implementado un algoritmo observador para el par en el eje, que permite a partir de las medidas de corriente y velocidad de la máquina de corriente continua, valorar el par electromagnético de la máquina ensayada.
- d) El error resulta inferior al 5% a partir de dos períodos de onda (40 ms a 50 Hz).
- e) El equipo desarrollado, tiene un evidente interés para su aplicación docente e industrial
- f) El equipo, como se puede apreciar a continuación, tiene un coste económico más reducido que otros de similares características:

• Máquina de c.c. 7.5 kW	220.000 ptas.
• Dinamo tacométrica+acopl.	50.000 ptas.
• Equipo de potencia	200.000 ptas.
• Tarjeta de control+obs.	60.000 ptas.
• Ingeniería+mano de obra	470.000 ptas
• Beneficio/Comercialización	500.000 ptas
• Total	1.530.000 ptas.
• Freno comercial similar	4.000.000 ptas.

Aportaciones.

- Estudio sistemático de modelos con saturación a fin de determinar cual o cuales de los mismos son adecuados para la implementación de técnicas de control y de identificación en tiempo real.
- Estudio de la sensibilidad de los modelos escogidos ante variaciones de los parámetros. Hasta donde alcanzan mis conocimientos el tema es una laguna poco explorada.
- Comparación de diversos métodos de obtención de parámetros (con consideración de la saturación) tanto en régimen permanente (ensayos fuera de línea) como en transitorio (identificación en tiempo real).
- Comparación en la identificación en tiempo real de diversos modelos. Influencia del número de parámetros y del tipo de señal aplicada en la identificabilidad del sistema.
- Aportación a la obtención del par electromagnético y a su validación mediante medidas externas.
- Construcción de un equipo para el ensayo de accionamientos en régimen dinámico. Esto consiste, en opinión del autor, un “subproducto” de la tesis que posiblemente tenga mayor aplicación docente e industrial.

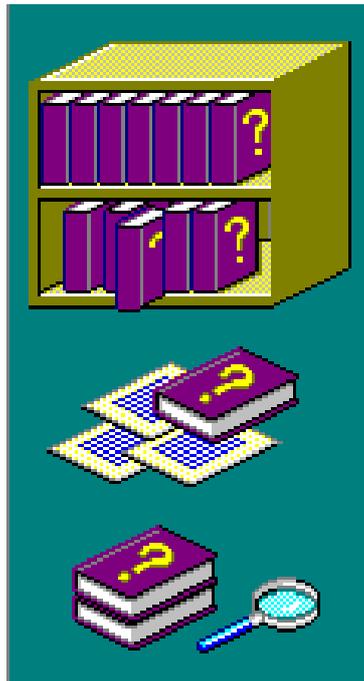
Futuros desarrollos.

La línea iniciada abre diversas áreas de interés:

- a) Extender la modelización a otros tipos de máquinas eléctricas.
- b) Desarrollar equipos para el control del par basados en máquinas de alterna.
- c) Desarrollar algoritmos de control basados en una correcta identificación de los parámetros del sistema, que puedan llevar a una optimización, o minimización, de tránsitos energéticos en el convertidor.
- d) Contrastación de los métodos de obtención de parámetros en línea mediante algoritmos basados en la resolución del campo electromagnético en la máquina (Elementos finitos). Actualmente, empiezan a circular programas que permiten la resolución de transitorios eléctricos conjuntamente con la formulación de la máquina a partir de modelos basados en elementos finitos (SIMPLORER + FLUX2D); estos permitirán la contrastación de los algoritmos en tiempo real a partir de los modelos distribuidos de la máquina. En nuestro caso no se ha podido desarrollar el tema por no disponer de los programas adecuados.

Barcelona, Julio del 2001

BIBLIOGRAFÍA



BIBLIOGRAFIA

<i>BIBLIOGRAFIA</i>	1
<i>Libros</i>	2
<i>Máquinas Eléctricas. Teoría. Modelización. Control</i>	2
<i>Convertidores. Modelización. Control</i>	3
<i>Identificación de sistemas</i>	3
<i>Sensibilidad</i>	4
<i>Control no Lineal. Técnicas. Observadores</i>	4
<i>Tesis Doctorales</i>	4
<i>Artículos, Ponencias, Comunicaciones</i>	5
<i>Artículos sobre modelización de máquinas. Obtención de parámetros y observación de variables no medibles y estados</i>	5
<i>Artículos sobre Control de Máquinas Asíncronas</i>	7
<i>Artículos históricos sobre modelización de máquinas y convertidores</i>	7
<i>Proyectos Final de Carrera</i>	8
<i>Normas</i>	8

Libros

Máquinas Eléctricas. Teoría. Modelización. Control

[Serrano 79] L. Serrano Iribarnegaray. "Máquinas de alterna en régimen dinámico. Una formulación físico-matemática a partir de la teoría de los vectores espaciales". UPM Madrid, 1979

[Kovacs 84] P.K. Kovacs. "Transient Phenomena in Electrical Machines". Elsevier, Amsterdam, 1984

[Leonhard 96] W. LEONHARD. "Control of electrical drives". Springer- Verlag. 1990

[Justus 91] Justus. Dynamisches Verhalten Elektrischer Maschinen. Vieweg Publishing, Braunschweig/Wiesbaden, 1991

[Vas 92] P.VAS. "Electrical machines and drives. A Space-Vector Theory Approach". Oxford University Press,, 1992.

[Vas 93] P.Vas." Parameter estimation,Condition monitoring and diagnosis of electrical machines" Oxford University Press, Oxford, 1993

[Caron 95] J.P.Caron,J.P.Hautier. " Modelisation et commande de la machine asynchrone". Ed.Technip,1995

[Roboam 95] X. ROBOAM. " De la modelisation a la commande des machines electriques." ENSEEIHT. 1995

[Jiles 98] D.Jiles. "Introduction to magnetism and magnetic materials". Ed. Chapman and Hall, 1998

[Ong 98] C. Ong. "Dynamic simulation of electric machinery". Ed. Prentice Hall, 1998

[Vas 98] P. Vas. "Sensorless vector and direct torque control". Ed. Oxford University Press, 1998

[Dawson 98] D.M.Dawson, J. Hu, T.C.Burg. "Nonlinear control of electric machinery". Ed. Marcel Decker, 1998

[Vas 99] P. Vas. "Artificial intelligence based electrical machines and drives. Application of fuzzy, neural, fuzzy-neural, and genetic algorithm based techniques". Ed. Oxford University Press, 1999

[Boldea 99] I. Boldea, S.A. Nasar. "Electric Drives". CRC Press, 1999

Convertidores. Modelización. Control

[Buhler 91] H. Bühler. "Convertisseurs statiques". Ed. PPUR, 1991

[Labrique 95] F.Labrique, G.Seguir,R.Bausiere. "Les convertisseurs de l'électronique de puissance. T4. La conversion continu-alternatif".Ed. Lavoisier. 1995

[Bose 97] B.K.Bose." Power Electronics and Variable Frequency Drives.". IEEE Press, New York, 1997.

[Labrique 98] F.Labrique, H. Buyse G.Seguir,R.Bausiere. "Les convertisseurs de l'électronique de puissance. T5. Commande et comportement dynamique".Ed. Lavoisier. 1998

[Hautier 99] J.P. Hautier, J.P. Caron. "Convertisseurs statiques: Methodologie causale de modelisation et de commande". Ed. Technip, 1999

Identificación de sistemas

[Ljung 87] L.Ljung. "Theory and practice of recursive identification". MIT Press, Boston, 1987

[Ljung 87] L.Ljung. "System identification:theory for the user". Prentice Hall International, London, 1987

[Soderstrom 89] T.Soderstrom,P.Stoica. "System identification". Prentice Hall International,London, 1989

[Middleton 90] R.H.Middleton, G.C. Goodwin. "Digital control and estimation". Ed. Prentice Hall, NewJersey, 1990.

[Borne 92] P.Borne, et. al. " Modelisation et identification del processus, tome 1 et 2". Ed. Technip, Paris, 1992

[Juang 94] J.N. Juang. "Applied System Identification". Ed. Prentice Hall, 1994

[Johansson 94] R. Johansson. "System modeling and Identification". Ed. Prentice Hall, 1994

[Kulhavy 96] R. Kulhavy. "Recursive Nonlinear Estimation". Ed. Springer, 1996

[Walter 97] E.Walter, L. Pronzato. "Identification of parametric models from experimental data". Ed. Springer Verlag, 1997

[Bendat 98] J.S.Bendat. "Nonlinear systems techniques and applications". Ed. John Wiley&Sons. 1998.

[Tong 99] H.Tong. "Non linear time series: a dynamical system approach". Ed. Oxford University Press. 1999

[Nelles 01] O. Nelles. "Nonlinear System Identification". Springer- Verlag. 2001

Sensibilidad

[Eslami 94] M. Eslami. "Theory of sensitivity in dynamic systems". Ed. Springer-Verlsg. 1994

[Rosenwasser 00] E. Rosenwasser, R. Yusupov. "Sensitivity of automatic control systems". Ed. CRC-Press. 2000

Control no Lineal. Técnicas. Observadores.

[Marino 94] R.Marino,P.Tomei. " Nonlinear control design.Geometric, Adaptive and Robust". Ed. Prentice Hall, 1994

[Krstic 95] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic "Nonlinear and adaptive control design", Ed. Wiley Interscience, 1995

[Ioannou 96] P.A.Ioannou, J.Sun. "Robust adaptive control". Ed. Prentice Hall, 1996

[Schroder 99] D. Schröder (Ed.). "Intelligent observer and control design for nonlinear systems". Ed. Springer Verlsg. 1999

[Sastry 99] S. Sastry. "Nonlinear systems. Analysis, stability and control". Ed. Springer Verlag, 1999.

Tesis Doctorales

[Peterson 96] Bo Peterson. "Induction machine Speed Estimation. Observations on Observers". Industrial Electrical Engineering and Automation. Lund Institute of Technology. 1996

[Corcoles 98] Felipe Corcoles López. "Estudio y caracterización de la máquina de inducción. Aplicación de métodos analíticos y aproximados para el análisis transitorio". Departament d'Enginyeria Eléctrica. ETSEIB-UPC, 1998.

Artículos, Ponencias, Comunicaciones

Articulos sobre modelización de máquinas. Obtención de parámetros y observación de variables no medibles y estados

[Verghesse 88] G.C.Verghese, S.R. Sanders. "Observers for flux estimation in induction machines". IEEE-IE, vol 35, 85-94.

[Atkinson 91] D.J.Atkinson,P.A.Acarney,J.W.Finch." Observers for induction motor state and parameter estimation". IEEE-IA, vol 27, 1119-1127, 1991

[Holtz 91] J.Holtz,T.Thimm."Identification of the machine parameters in a vector controlled induction motor drive". IEEE-IA, vol 27, 1111-1118, 1991

[Wijesundera 92] D.S.Wijesundera,R.D.Jackson."Observers for field oriented control of induction motor drives". IEE, vol 139, 381-386, 1992

[Chai 92] H.Chai,P.P.Acarney." Induction motor parameter estimation algorithm using spectral analysis". IEE, vol 139, 165-174, 1992

[Moreira 92] J.C.Moreira,T.A.Lipo." Modeling of saturated AC machines including air gap flux harmonic components". IEEE-IA, vol 28,343-349, 1992

[Bottura 93] C.P.Bottura,J.L.Silvino,P. de Resende." A flux observer for induction machines based on a time variant discrete model" : IEEE-IA, vol 29, 349-354, 1993

[Klaes 93] N.R.Klaes." Parameter identification of an induction machine with regard to dependences on saturation". IEEE-IA, vol 29, 1135-1140, 1993

[Du 93] T.Du,M.A.Brdys." Implementation of extended Luenberger observers for joint state and parameter estimation of PWM induction motor drive". EPE-93, 439-444, 1993

[Kataoka 94] T.Kataoka,S.Toda,Y.Sato." On line estimation of induction motor parameters by extended Kalman filter". EPE-93, 325-329, 1993

[Dell'Aquila 94] A.Dell'Aquila,V.Giliberti,F.S.Lovecchio,L.Salvatore." Real time estimation of induction motor parameters by LSE". IEEE, 2127-2131, 1994

[Jacobina 94] C.B.Jacobina,A.M.N.Lima." Parameter estimation models for induction machines". IEEE, 726-733, 1994

[Levi 94] E.Levi." Applications of the current state space model in analysis of saturated induction machines". Electric power systems research, 31, 203-216, 1994

[Kubota 94] H.Kubota,K.Matsuse." Speed sensorless field oriented control of induction motor with rotor resistance adaptation". IEEE-IA, vol 30, 1219-1224, 1994

- [Moon 94] S-I.Moon,A.Keyhani." Estimation of induction machine parameters from standstill time domain data". IEEE-IA, vol 30, 1609-1615, 1994
- [Bunte 95] A.Bunte,H.Grotstollen." Off line parameter identification of an inverter fed induction motor at standstill". EPE-95, 3492-3496, 1995
- [Borsting 95] H.Borsting,M.Knudsen,P.Vadstrup." Standstill estimation of electrical parameters in induction motor using an optimal input signal". EPE-95, 1814-1819, 1995
- [Sullivan 96] C.R.Sullivan,C.Kao,B.M.Acker,S.R.Sanders." Control systems for induction machines with magnetic saturation". IEEE-IE, vol43, 142-151, 1996
- [Nuscheler 96] R.Nuscheler." Problems and failure sources with the parameter identification of asynchronous machines and their dependence on the identification method". ICEM-96, 130-135, 1996
- [Ferrah 96] A.Ferrah,K.J.Bradley,M.S.Woolfson,G.M.Asper." Modern spectral methods and induction motor design for real time speed estimation in sensorless vector drives". ICEM-96, 476-481, 1996
- [Dolimar 96] Dolimar,G.Steuenberger,R.Belmans." Determination of the induction motor model parameters using finite elements". ICEM-96, 153-158, 1996
- [Demeter 96] E.Demeter,F.Hantilla,J.Tegopoulos." Sensitivies calculation for electrical machines". ICEM-96, 101-106, 1996
- [Jarray 96] K.Jarray,M.Gossa,A.Chaari,M.Jemli,M.Boussak." Induction machine parameters and flux on line estimation using recursive least squares algorithm". ICEM-96, 66.69, 1996
- [Bargallo 96] R.Bargallo, J.Llaverias." Induction machines modelling with saturation.Parameters estimation and validation". ICEM-96, 29-33, 1996
- [Jaddynsky 96] W.Jazdynsky." Nonstationary models of induction motors and their identification with the help of multicriterion optimisation". ICEM-96, 40-45, 1996
- [Bargallo 98] R.Bargallo, J.Llaverias, E. Martin. "Contribution to parameter validation of the induction motor with saturation. Transient behavior and PWM supply". ICEM-98, 1998
- [Bargallo 99] R. Bargallo, J. Llaverias, E. Martin. "Determinación de parámetros en la modelización de sistemas con saturación. Identificación en tiempo real". 5as JHLIE, 1999
- [Bargallo 00] R. Bargallo, J. Llaverías, E. Martin. "Transient torque determination in controlled drives. Contribution to the development of an equipment for dynamic operation test". ICEM-2000, Helsinki, Agosto 2000
- [Brule 00] S. Brule, A. Tounzi. "Comparison between FEM and the Park's model to study the control of an induction machine". ICEM 2000, Helsinki, Agosto 2000

Articulos sobre Control de Máquinas Asíncronas

[Tajima 93] H.Tajima, Y.Hori. "Speed sensorless field orientation control of the induction machine". IEEE-IA, vol 29, 175-180, 1993

[Frick 94] A.Frick, E.von Westerholt, B de Fornel. "Non linear control of induction motors via input output decoupling". ETEP, vol 4, 261-268, 1994

[Peng 94] F-Z.Peng, T.Fukao. "Robust speed identification for speed sensorless vector control of induction motors". IEEE-IA, vol 30, 1234-1240, 1994

[Kim 94] Y-R.Kim, S-K.Sul, M-H.Park. "Speed sensorless vector control of induction motor using extended Kalman filter". IEEE-IA, vol 30, 1225-1233, 1994

[Ho 95] E.Ho, P.C.Sen. "High performance decoupling control techniques for various rotating field machines". IEEE-IE, vol 42, 40-49, 1995

[Ide 96] K.Ide. "Simple adaptive speed control with exact linearization for CSI fed AC motors". ICEM-96, 184-189, 1996.

[Kumin 96] L.Kumin, D.Dolimar, P.Cafuta, P.Grcar. "Comparison of the field oriented and the input output linearizing control scheme for the induction motor". ICEM-96, 141-146, 1996

Articulos históricos sobre modelización de máquinas y convertidores

[Krause 69] P.C.Krause, T.A. Lipo. "Analysis and simplified representation of a rectifier-inverter induction motor drive". IEEE-PAS-88, 588-596, 1969

[Lipo 69] T.A.Lipo, P.C.Krause. "Stability analysis of a rectifier-inverter induction motor drive". IEEE-PAS-88, 55-66, 1969

[Blaschke 72] F.Blaschke. "The principle of field orientation as applied to the new TRANSVEKTOR closed loop control system for rotating field machines". Siemens Review, vol 34, 217-220, 1972

[Lipo 75] T.A.Lipo, E.P.Cornell. "State variable steady state analysis of a controlled current induction motor drive". IEEE-IA, vol 11, 704-712, 1975

[Cornell 77] E.P.Cornell, T.A.Lipo. "Modeling and design of controlled current induction motor drive system". IEEE-IA, vol 13, 321-330, 1977

[MacDonald 78] M.L.MacDonald, P.C.Sen. "Control loop study of induction motor drives using DQ model". IEEE-IAS-78 Annual meeting, 897-903, 1978

[Lipo 78] T.A.Lipo. "Analysis and control of torque pulsations in current fed induction motor drives" IEEE-Power Elec. Spec. Conf., 89-96, 1978

[Gabriel 80] R.Gabriel,W.L Leonhard,C.Nordby."Microprocessor control of the converter fed induction motor" Process Automation, 35-41, 1980

[Pfaff 83] G.Pfaff, A.Wick." Direct current control of AC drives with pulsed frequency converters". Process Automation, 83-88, 1983

[Slemon 83] G.R.Slemon."Circuits models for polyphase induction machines". Electric Machines and Power Systems,8, 369-379, 1983

[Kerkman 85] R.L.Kerkman. "Steady-State and transient analyses of an induction machine with saturation of the magnetizing branch". IEEE, IA-21, 226-234, 1985

Proyectos Final de Carrera

[Sallent 94] Jordi Sallent i Salomó. "Modelat i simulació d'un conjunt convertidor+màquina d'inducció. Aplicació a l'anàlisi de sensibilitat dinàmica de la màquina". PFC. 1994.

[Garcia 97] Xavier Garcia i Barrachina. "Identificación en tiempo real de los parámetros eléctricos y mecánicos de máquinas de inducción mediante un DSP". PFC. 1997

[Rovira 99] Jordi Rovira Carrera. "Modelització de Màquines Asíncrones". PFC. 1999

[Conesa 99] David Conesa Lopez. "Desarrollo de un sistema de medidas de magnitudes electromecánicas. Sistema para la variación y el control de par desarrollado por una máquina de corriente continua". PFC. 1999.

[Escoda 99] Ignasi Escoda Escrava. "Desenvolupament d'un sistema de mesura i/o observació de magnituds electromecàniques". PFC. 1999

Normas

[IEEE112] "IEEE Standard Test Procedure for Poliphase Induction Motors and Generators". IEEE Std 112-1996. IEEE. New York. 1997

ANEXO I. EXPRESIONES PARA EL CÁLCULO DE LA SENSIBILIDAD

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \begin{pmatrix} \gamma_{i_{sx}}^{r_s} & \gamma_{i_{sx}}^{r_r} & \gamma_{i_{sx}}^{L_{rl}} & \gamma_{i_{sx}}^J & \gamma_{i_{sx}}^\rho & \gamma_{i_{sx}}^{a_1} & \gamma_{i_{sx}}^{a_2} \\ \gamma_{i_{sy}}^{r_s} & \gamma_{i_{sy}}^{r_r} & \gamma_{i_{sy}}^{L_{rl}} & \gamma_{i_{sy}}^J & \gamma_{i_{sy}}^\rho & \gamma_{i_{sy}}^{a_1} & \gamma_{i_{sy}}^{a_2} \\ \gamma_{i_{rx}}^{r_s} & \gamma_{i_{rx}}^{r_r} & \gamma_{i_{rx}}^{L_{rl}} & \gamma_{i_{rx}}^J & \gamma_{i_{rx}}^\rho & \gamma_{i_{rx}}^{a_1} & \gamma_{i_{rx}}^{a_2} \\ \gamma_{i_{ry}}^{r_s} & \gamma_{i_{ry}}^{r_r} & \gamma_{i_{ry}}^{L_{rl}} & \gamma_{i_{ry}}^J & \gamma_{i_{ry}}^\rho & \gamma_{i_{ry}}^{a_1} & \gamma_{i_{ry}}^{a_2} \\ \gamma_{\omega_r}^{r_s} & \gamma_{\omega_r}^{r_r} & \gamma_{\omega_r}^{L_{rl}} & \gamma_{\omega_r}^J & \gamma_{\omega_r}^\rho & \gamma_{\omega_r}^{a_1} & \gamma_{\omega_r}^{a_2} \end{pmatrix}$$

MODELO N° 21 Formulación general

$$x = (i_{sx} \quad i_{sy} \quad i_{rx} \quad i_{ry} \quad \omega_r)^T \quad (1)$$

$$u = (u_{sx} \quad u_{sy} \quad u_{rx} \quad u_{ry} \quad Mc)^T \quad (2)$$

$$p = (R_s \quad R_r \quad L_{rl} \quad J \quad \rho \quad a_1 \quad a_2)^T \quad (3)$$

$$y = (\Psi_{sx} \quad \Psi_{sy} \quad M_e)^T \quad (4)$$

definiendo las siguientes funciones de sensibilidad de las variables de estado:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \begin{pmatrix} \gamma_{i_{sx}}^{r_s} & \gamma_{i_{sx}}^{r_r} & \gamma_{i_{sx}}^{L_{rl}} & \gamma_{i_{sx}}^J & \gamma_{i_{sx}}^\rho & \gamma_{i_{sx}}^{a_1} & \gamma_{i_{sx}}^{a_2} \\ \gamma_{i_{sy}}^{r_s} & \gamma_{i_{sy}}^{r_r} & \gamma_{i_{sy}}^{L_{rl}} & \gamma_{i_{sy}}^J & \gamma_{i_{sy}}^\rho & \gamma_{i_{sy}}^{a_1} & \gamma_{i_{sy}}^{a_2} \\ \gamma_{i_{rx}}^{r_s} & \gamma_{i_{rx}}^{r_r} & \gamma_{i_{rx}}^{L_{rl}} & \gamma_{i_{rx}}^J & \gamma_{i_{rx}}^\rho & \gamma_{i_{rx}}^{a_1} & \gamma_{i_{rx}}^{a_2} \\ \gamma_{i_{ry}}^{r_s} & \gamma_{i_{ry}}^{r_r} & \gamma_{i_{ry}}^{L_{rl}} & \gamma_{i_{ry}}^J & \gamma_{i_{ry}}^\rho & \gamma_{i_{ry}}^{a_1} & \gamma_{i_{ry}}^{a_2} \\ \gamma_{\omega_r}^{r_s} & \gamma_{\omega_r}^{r_r} & \gamma_{\omega_r}^{L_{rl}} & \gamma_{\omega_r}^J & \gamma_{\omega_r}^\rho & \gamma_{\omega_r}^{a_1} & \gamma_{\omega_r}^{a_2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

y de la sensibilidad de las variables de salida

$$\frac{\partial y}{\partial p} = \begin{pmatrix} \sigma_{\Psi_{sx}}^{r_s} & \sigma_{\Psi_{sx}}^{r_r} & \sigma_{\Psi_{sx}}^{L_{rl}} & \sigma_{\Psi_{sx}}^J & \sigma_{\Psi_{sx}}^\rho & \sigma_{\Psi_{sx}}^{a_1} & \sigma_{\Psi_{sx}}^{a_2} \\ \sigma_{\Psi_{sy}}^{r_s} & \sigma_{\Psi_{sy}}^{r_r} & \sigma_{\Psi_{sy}}^{L_{rl}} & \sigma_{\Psi_{sy}}^J & \sigma_{\Psi_{sy}}^\rho & \sigma_{\Psi_{sy}}^{a_1} & \sigma_{\Psi_{sy}}^{a_2} \\ \sigma_{M_e}^{r_s} & \sigma_{M_e}^{r_r} & \sigma_{M_e}^{L_{rl}} & \sigma_{M_e}^J & \sigma_{M_e}^\rho & \sigma_{M_e}^{a_1} & \sigma_{M_e}^{a_2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

en las páginas que siguen se encuentran los cálculos desarrollados a partir de las utilidades que ofrece el programa MAPLE RV.0 para la manipulación algebraica y su posterior volcado en código FORTRAN 90 para su aplicación en los algoritmos utilizados en la tesis.

```

> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> imx:=isx+irx;imy:=isy+iry;fluxsx:=a1*arctan(a2*imx);fluxsy:=a1*arctan(a2*imy);
> Flux:=array(1..2,[fluxsx,fluxsy]);Lmx:=a1*a2/(1+(a2*imx)^2);Lmy:=a1*a2/(1+(a2*imy)^2);
> M:=matrix(5,5,[[Lmx,0,Lmx,0,0],[0,Lmy,0,Lmy,0],[Lmx,0,Lrl+Lmx,0,0],[0,Lmy,0,Lrl+Lmy,0],[0,0,0,0,J]]);

```

$$imx := isx + irx$$

$$imy := isy + iry$$

$$fluxsx := a1 \arctan(a2 (isx + irx))$$

$$fluxsy := a1 \arctan(a2 (isy + iry))$$

$$Flux := [a1 \arctan(a2 (isx + irx)), a1 \arctan(a2 (isy + iry))]$$

$$Lmx := \frac{a1 a2}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}$$

$$Lmy := \frac{a1 a2}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}$$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{a1 a2}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, 0, \frac{a1 a2}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, 0, 0 \\ 0, \frac{a1 a2}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, 0, \frac{a1 a2}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, 0 \\ \frac{a1 a2}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, 0, Lrl + \frac{a1 a2}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, 0, 0 \\ 0, \frac{a1 a2}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, 0, Lrl + \frac{a1 a2}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, J \end{bmatrix}$$

```

>
> A:=matrix(5,5,[[ -Rs,0,0,0,0],[0,-Rs,0,0,0],[0,0,-Rr,(w-wr)*Lrl,0],[0,0,-(w-wr)*Lrl,-Rr,0],[-(3/2)*P*fluxsy,(3/2)*P*fluxsx,0,0,-rho]]);

```

$$A := \begin{bmatrix} -Rs, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -Rs, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -Rr, & (w - wr) Lrl, & 0 \\ 0, & 0, & -(w - wr) Lrl, & -Rr, & 0 \\ -\frac{3}{2} P a1 \arctan(a2 (isy + iry)), & \frac{3}{2} P a1 \arctan(a2 (isx + irx)), & 0, & 0, & -\rho \end{bmatrix}$$

```

> OM:=matrix(5,2,[[0,w],[-w,0],[0,w-wr],[-(w-wr),0],[0,0]]);

```

$$OM := \begin{bmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \\ 0 & w - wr \\ -w + wr & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> **v:=vector([usx,usy,urx,ury,-Mc]);**

$$v := [usx, usy, urx, ury, -Mc]$$

> **x:=vector([isx,isy,irx,iry,wr]);**

$$x := [isx, isy, irx, iry, wr]$$

> **M1:=inverse(M);**

$$M1 := \begin{bmatrix} \frac{Lrl + Lrl a^2 isx^2 + 2 Lrl a^2 isx irx + Lrl a^2 irx^2 + a1 a2}{Lrl a1 a2}, 0, -\frac{1}{Lrl}, 0, 0 \\ 0, \frac{Lrl + Lrl a^2 isy^2 + 2 Lrl a^2 isy iry + Lrl a^2 iry^2 + a1 a2}{Lrl a1 a2}, 0, -\frac{1}{Lrl}, 0 \\ -\frac{1}{Lrl}, 0, \frac{1}{Lrl}, 0, 0 \\ 0, -\frac{1}{Lrl}, 0, \frac{1}{Lrl}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

> **parc1:=multiply(M1,v):parc2:=multiply(A,x):parc3:=multiply(OM,Fl ux):parc4:=matadd(parc3,parc2):parc5:=multiply(M1,parc4):Final:= matadd(parc1,parc5);**

$$Final := \left[\begin{aligned} & \frac{(Lrl + Lrl a^2 isx^2 + 2 Lrl a^2 isx irx + Lrl a^2 irx^2 + a1 a2) usx}{Lrl a1 a2} - \frac{urx}{Lrl} \\ & + \frac{(Lrl + Lrl a^2 isx^2 + 2 Lrl a^2 isx irx + Lrl a^2 irx^2 + a1 a2) (w a1 \%2 - Rs isx)}{Lrl a1 a2} \\ & - \frac{(w - wr) a1 \%2 - Rr irx + (w - wr) Lrl iry}{Lrl}, \\ & \frac{(Lrl + Lrl a^2 isy^2 + 2 Lrl a^2 isy iry + Lrl a^2 iry^2 + a1 a2) usy}{Lrl a1 a2} - \frac{ury}{Lrl} \\ & + \frac{(Lrl + Lrl a^2 isy^2 + 2 Lrl a^2 isy iry + Lrl a^2 iry^2 + a1 a2) (-w a1 \%1 - Rs isy)}{Lrl a1 a2} \\ & - \frac{(-w + wr) a1 \%1 - (w - wr) Lrl irx - Rr iry}{Lrl}, \\ & - \frac{usx}{Lrl} + \frac{urx}{Lrl} - \frac{w a1 \%2 - Rs isx}{Lrl} + \frac{(w - wr) a1 \%2 - Rr irx + (w - wr) Lrl iry}{Lrl}, \end{aligned} \right]$$

$$-\frac{usy}{Lrl} + \frac{ury}{Lrl} - \frac{-w a1 \%1 - Rs isy}{Lrl} + \frac{(-w + wr) a1 \%1 - (w - wr) Lrl irx - Rr iry}{Lrl},$$

$$\left. -\frac{Mc}{J} + \frac{-\frac{3}{2} P a1 \%2 isx + \frac{3}{2} P a1 \%1 isy - \rho wr}{J} \right]$$

$$\%1 := \arctan(a2 (isx + irx))$$

$$\%2 := \arctan(a2 (isy + iry))$$

>

$$parc4 := \left[w a1 \arctan(a2 (isy + iry)) - Rs isx, -w a1 \arctan(a2 (isx + irx)) - Rs isy, \right.$$

$$(w - wr) a1 \arctan(a2 (isy + iry)) - Rr irx + (w - wr) Lrl iry,$$

$$(-w + wr) a1 \arctan(a2 (isx + irx)) - (w - wr) Lrl irx - Rr iry,$$

$$\left. -\frac{3}{2} P Fluxsy isx + \frac{3}{2} P Fluxsx isy - \rho wr \right]$$

>

$$parc5 := \left[\frac{(Lrl + Lrl a2^2 isx^2 + 2 Lrl a2^2 isx irx + Lrl a2^2 irx^2 + a1 a2) (w a1 \%2 - Rs isx)}{Lrl a1 a2} \right.$$

$$-\frac{(w - wr) a1 \%2 - Rr irx + (w - wr) Lrl iry}{Lrl},$$

$$\frac{(Lrl + Lrl a2^2 isy^2 + 2 Lrl a2^2 isy iry + Lrl a2^2 iry^2 + a1 a2) (-w a1 \%1 - Rs isy)}{Lrl a1 a2}$$

$$-\frac{(-w + wr) a1 \%1 - (w - wr) Lrl irx - Rr iry}{Lrl},$$

$$-\frac{w a1 \%2 - Rs isx}{Lrl} + \frac{(w - wr) a1 \%2 - Rr irx + (w - wr) Lrl iry}{Lrl},$$

$$-\frac{-w a1 \%1 - Rs isy}{Lrl} + \frac{(-w + wr) a1 \%1 - (w - wr) Lrl irx - Rr iry}{Lrl},$$

$$\left. -\frac{\frac{3}{2} P Fluxsy isx + \frac{3}{2} P Fluxsx isy - \rho wr}{J} \right]$$

$$\%1 := \arctan(a2 (isx + irx))$$

$$\%2 := \arctan(a2 (isy + iry))$$

>

$$Final := \left[\frac{(Lrl + Lrl a2^2 isx^2 + 2 Lrl a2^2 isx irx + Lrl a2^2 irx^2 + a1 a2) usx}{Lrl a1 a2} - \frac{urx}{Lrl} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(Lrl + Lrl a2^2 isx^2 + 2 Lrl a2^2 isx irx + Lrl a2^2 irx^2 + a1 a2) (w a1 \%2 - Rs isx)}{Lrl a1 a2} \\
& - \frac{(w - wr) a1 \%2 - Rr irx + (w - wr) Lrl iry}{Lrl}, \\
& \frac{(Lrl + Lrl a2^2 isy^2 + 2 Lrl a2^2 isy iry + Lrl a2^2 iry^2 + a1 a2) usy}{Lrl a1 a2} - \frac{ury}{Lrl} \\
& + \frac{(Lrl + Lrl a2^2 isy^2 + 2 Lrl a2^2 isy iry + Lrl a2^2 iry^2 + a1 a2) (-w a1 \%1 - Rs isy)}{Lrl a1 a2} \\
& - \frac{(-w + wr) a1 \%1 - (w - wr) Lrl irx - Rr iry}{Lrl}, \\
& - \frac{usx}{Lrl} + \frac{urx}{Lrl} - \frac{w a1 \%2 - Rs isx}{Lrl} + \frac{(w - wr) a1 \%2 - Rr irx + (w - wr) Lrl iry}{Lrl}, \\
& - \frac{usy}{Lrl} + \frac{ury}{Lrl} - \frac{-w a1 \%1 - Rs isy}{Lrl} + \frac{(-w + wr) a1 \%1 - (w - wr) Lrl irx - Rr iry}{Lrl}, \\
& - \left. \frac{Mc}{J} + \frac{-\frac{3}{2} P Fluxsy isx + \frac{3}{2} P Fluxsx isy - \rho wr}{J} \right]
\end{aligned}$$

$$\%1 := \arctan(a2 (isx + irx))$$

$$\%2 := \arctan(a2 (isy + iry))$$

> **param:=vector([Rs,Rr,Lrl,J,rho,a1,a2]);**

$$param := [Rs, Rr, Lrl, J, \rho, a1, a2]$$

> **Pare:=(3/2)*P*(fluxsx*isy-fluxsy*isx);**

$$Pare := \frac{3}{2} P (a1 \arctan(a2 (isx + irx)) isy - a1 \arctan(a2 (isy + iry)) isx)$$

> **salidas:=vector([fluxsx,fluxsy,Pare]);**

$$salidas := \left[a1 \arctan(a2 (isx + irx)), a1 \arctan(a2 (isy + iry)), \right.$$

$$\left. \frac{3}{2} P (a1 \arctan(a2 (isx + irx)) isy - a1 \arctan(a2 (isy + iry)) isx) \right]$$

> **dfx:=jacobian(Final,x);**

dfx :=

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\%3 usx}{Lrl a1 a2} + \frac{\%3 (w a1 \%2 - Rs isx)}{Lrl a1 a2} - \frac{\%1 Rs}{Lrl a1 a2}, \right. \\
& \left. \frac{\%1 w}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{(w - wr) a1 a2}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)}, \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\%3 usx}{Lrl a1 a2} + \frac{\%3 (w a1 \%2 - Rs isx)}{Lrl a1 a2} + \frac{Rr}{Lrl}, \\
& \left[\frac{\%1 w}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{\frac{(w - wr) a1 a2}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + (w - wr) Lrl}{Lrl}, - \frac{-a1 \%2 - Lrl iry}{Lrl} \right] \\
& \left[- \frac{\%4 w}{Lrl (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{(-w + wr) a1 a2}{Lrl (1 + a2^2 (isx + irx)^2)}, \right. \\
& \left. \frac{\%6 usy}{Lrl a1 a2} + \frac{\%6 (-w a1 \%5 - Rs isy)}{Lrl a1 a2} - \frac{\%4 Rs}{Lrl a1 a2}, \right. \\
& \left. - \frac{\%4 w}{Lrl (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{\frac{(-w + wr) a1 a2}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - (w - wr) Lrl}{Lrl}, \right. \\
& \left. \frac{\%6 usy}{Lrl a1 a2} + \frac{\%6 (-w a1 \%5 - Rs isy)}{Lrl a1 a2} + \frac{Rr}{Lrl}, - \frac{a1 \%5 + Lrl irx}{Lrl} \right] \\
& \left[\frac{Rs}{Lrl}, - \frac{w a1 a2}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} + \frac{(w - wr) a1 a2}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)}, - \frac{Rr}{Lrl}, \right. \\
& \left. - \frac{w a1 a2}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} + \frac{\frac{(w - wr) a1 a2}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + (w - wr) Lrl}{Lrl}, \frac{-a1 \%2 - Lrl iry}{Lrl} \right] \\
& \left[\frac{w a1 a2}{Lrl (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} + \frac{(-w + wr) a1 a2}{Lrl (1 + a2^2 (isx + irx)^2)}, \frac{Rs}{Lrl}, \right. \\
& \left. \frac{w a1 a2}{Lrl (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} + \frac{\frac{(-w + wr) a1 a2}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - (w - wr) Lrl}{Lrl}, - \frac{Rr}{Lrl}, \frac{a1 \%5 + Lrl irx}{Lrl} \right] \\
& \left[- \frac{\frac{3}{2} P a1 \%2 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}}{J}, - \frac{\frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{3}{2} P a1 \%5}{J}, \right. \\
& \left. \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy}{J (1 + a2^2 (isx + irx)^2)}, - \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx}{J (1 + a2^2 (isy + iry)^2)}, - \frac{\rho}{J} \right] \\
& \%1 := Lrl + Lrl a2^2 isx^2 + 2 Lrl a2^2 isx irx + Lrl a2^2 irx^2 + a1 a2
\end{aligned}$$

$$\%2 := \arctan(a2 (isy + iry))$$

$$\%3 := 2 Lrl a2^2 isx + 2 Lrl a2^2 irx$$

$$\%4 := Lrl + Lrl a2^2 isy^2 + 2 Lrl a2^2 isy iry + Lrl a2^2 iry^2 + a1 a2$$

$$\%5 := \arctan(a2 (isx + irx))$$

$$\%6 := 2 Lrl a2^2 isy + 2 Lrl a2^2 iry$$

> **dfparam:=jacobian(Final,param);**

dfparam :=

$$\left[\begin{aligned} & -\frac{\%1 isx}{Lrl a1 a2}, \frac{irx}{Lrl}, -\frac{\%1 usx}{Lrl^2 a1 a2} + \frac{(1 + a2^2 isx^2 + 2 a2^2 isx irx + a2^2 irx^2) usx}{Lrl a1 a2} + \frac{urx}{Lrl^2} \\ & -\frac{\%1 (w a1 \%2 - Rs isx)}{Lrl^2 a1 a2} + \frac{(1 + a2^2 isx^2 + 2 a2^2 isx irx + a2^2 irx^2) (w a1 \%2 - Rs isx)}{Lrl a1 a2} \\ & + \frac{(w - wr) a1 \%2 - Rr irx + (w - wr) Lrl iry}{Lrl^2} - \frac{(w - wr) iry}{Lrl}, 0, 0, -\frac{\%1 usx}{Lrl a1^2 a2} + \frac{usx}{Lrl a1} \\ & -\frac{\%1 (w a1 \%2 - Rs isx)}{Lrl a1^2 a2} + \frac{w a1 \%2 - Rs isx}{Lrl a1} + \frac{\%1 w \%2}{Lrl a1 a2} - \frac{(w - wr) \%2}{Lrl}, -\frac{\%1 usx}{Lrl a1 a2^2} \\ & + \frac{(2 Lrl a2 isx^2 + 4 Lrl a2 isx irx + 2 Lrl a2 irx^2 + a1) usx}{Lrl a1 a2} - \frac{\%1 (w a1 \%2 - Rs isx)}{Lrl a1 a2^2} \\ & + \frac{(2 Lrl a2 isx^2 + 4 Lrl a2 isx irx + 2 Lrl a2 irx^2 + a1) (w a1 \%2 - Rs isx)}{Lrl a1 a2} \\ & + \frac{\%1 w (isy + iry)}{Lrl a2 (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{(w - wr) a1 (isy + iry)}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} \end{aligned} \right]$$

$$\left[\begin{aligned} & -\frac{\%3 isy}{Lrl a1 a2}, \frac{iry}{Lrl}, -\frac{\%3 usy}{Lrl^2 a1 a2} + \frac{(1 + a2^2 isy^2 + 2 a2^2 isy iry + a2^2 iry^2) usy}{Lrl a1 a2} + \frac{ury}{Lrl^2} \\ & -\frac{\%3 (-w a1 \%4 - Rs isy)}{Lrl^2 a1 a2} + \frac{(1 + a2^2 isy^2 + 2 a2^2 isy iry + a2^2 iry^2) (-w a1 \%4 - Rs isy)}{Lrl a1 a2} \\ & + \frac{(-w + wr) a1 \%4 - (w - wr) Lrl irx - Rr iry}{Lrl^2} + \frac{(w - wr) irx}{Lrl}, 0, 0, -\frac{\%3 usy}{Lrl a1^2 a2} + \frac{usy}{Lrl a1} \\ & -\frac{\%3 (-w a1 \%4 - Rs isy)}{Lrl a1^2 a2} + \frac{-w a1 \%4 - Rs isy}{Lrl a1} - \frac{\%3 w \%4}{Lrl a1 a2} - \frac{(-w + wr) \%4}{Lrl}, -\frac{\%3 usy}{Lrl a1 a2^2} \\ & + \frac{(2 Lrl a2 isy^2 + 4 Lrl a2 isy iry + 2 Lrl a2 iry^2 + a1) usy}{Lrl a1 a2} - \frac{\%3 (-w a1 \%4 - Rs isy)}{Lrl a1 a2^2} \\ & + \frac{(2 Lrl a2 isy^2 + 4 Lrl a2 isy iry + 2 Lrl a2 iry^2 + a1) (-w a1 \%4 - Rs isy)}{Lrl a1 a2} \\ & -\frac{\%3 w (isx + irx)}{Lrl a2 (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{(-w + wr) a1 (isx + irx)}{Lrl (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} \end{aligned} \right]$$

$$\left[\frac{isx}{Lrl}, -\frac{irx}{Lrl}, \frac{usx}{Lrl^2} - \frac{urx}{Lrl^2} + \frac{w a1 \%2 - Rs isx}{Lrl^2} - \frac{(w - wr) a1 \%2 - Rr irx + (w - wr) Lrl iry}{Lrl^2} + \frac{(w - wr) iry}{Lrl}, 0, 0, -\frac{w \%2}{Lrl} + \frac{(w - wr) \%2}{Lrl}, -\frac{w a1 (isy + iry)}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} + \frac{(w - wr) a1 (isy + iry)}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} \right]$$

$$\left[\frac{isy}{Lrl}, -\frac{iry}{Lrl}, \frac{usy}{Lrl^2} - \frac{ury}{Lrl^2} + \frac{-w a1 \%4 - Rs isy}{Lrl^2} - \frac{(-w + wr) a1 \%4 - (w - wr) Lrl irx - Rr iry}{Lrl^2} - \frac{(w - wr) irx}{Lrl}, 0, 0, \frac{w \%4}{Lrl} + \frac{(-w + wr) \%4}{Lrl}, \frac{w a1 (isx + irx)}{Lrl (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} + \frac{(-w + wr) a1 (isx + irx)}{Lrl (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} \right]$$

$$\left[0, 0, 0, \frac{Mc}{J^2} - \frac{-\frac{3}{2} P a1 \%2 isx + \frac{3}{2} P a1 \%4 isy - \rho wr}{J^2}, -\frac{wr}{J}, \frac{-\frac{3}{2} P \%2 isx + \frac{3}{2} P \%4 isy}{J}, -\frac{\frac{3}{2} P a1 (isy + iry) isx}{2 (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} + \frac{\frac{3}{2} P a1 (isx + irx) isy}{2 (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} \right]$$

$$\%1 := Lrl + Lrl a2^2 isx^2 + 2 Lrl a2^2 isx irx + Lrl a2^2 irx^2 + a1 a2$$

$$\%2 := \arctan(a2 (isy + iry))$$

$$\%3 := Lrl + Lrl a2^2 isy^2 + 2 Lrl a2^2 isy iry + Lrl a2^2 iry^2 + a1 a2$$

$$\%4 := \arctan(a2 (isx + irx))$$

> **dgx:=jacobian(salidas,x);**

dgx:=

$$\left[\frac{a1 a2}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, 0, \frac{a1 a2}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, 0, 0 \right]$$

$$\left[0, \frac{a1 a2}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, 0, \frac{a1 a2}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, 0 \right]$$

$$\left[\frac{3}{2} P \left(\frac{a1 a2 isy}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - a1 \arctan(a2 (isy + iry)) \right), \frac{3}{2} P \left(a1 \arctan(a2 (isx + irx)) - \frac{a1 a2 isx}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} \right), \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, -\frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, 0 \right]$$

> **dgparam:=jacobian(salidas,param);**

dgparam:=

$$\begin{bmatrix} 0, 0, 0, 0, 0, \arctan(a2 (isx + irx)), \frac{a1 (isx + irx)}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} \\ 0, 0, 0, 0, 0, \arctan(a2 (isy + iry)), \frac{a1 (isy + iry)}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} \\ 0, 0, 0, 0, 0, \frac{3}{2} P(\arctan(a2 (isx + irx)) isy - \arctan(a2 (isy + iry)) isx), \\ \frac{3}{2} P\left(\frac{a1 (isx + irx) isy}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{a1 (isy + iry) isx}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}\right) \end{bmatrix}$$

> **gamm:=matrix(5,7,[[gamma11,gamma12,gamma13,gamma14,gamma15,gamma16,gamma17],[gamma21,gamma22,gamma23,gamma24,gamma25,gamma26,gamma27],[gamma31,gamma32,gamma33,gamma34,gamma35,gamma36,gamma37],[gamma41,gamma42,gamma43,gamma44,gamma45,gamma46,gamma47],[gamma51,gamma52,gamma53,gamma54,gamma55,gamma56,gamma57]]);**

$$gamm := \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} & \gamma_{15} & \gamma_{16} & \gamma_{17} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} & \gamma_{25} & \gamma_{26} & \gamma_{27} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} & \gamma_{35} & \gamma_{36} & \gamma_{37} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} & \gamma_{45} & \gamma_{46} & \gamma_{47} \\ \gamma_{51} & \gamma_{52} & \gamma_{53} & \gamma_{54} & \gamma_{55} & \gamma_{56} & \gamma_{57} \end{bmatrix}$$

> **p1:=multiply(dfx,gamm);**

p1 :=

$$\begin{bmatrix} \%9 \gamma_{11} + (\%4 - \%8) \gamma_{21} + \%7 \gamma_{31} + (\%4 - \%2) \gamma_{41} - \frac{(-a1 \%1 - Lrl iry) \gamma_{51}}{Lrl}, \\ \%9 \gamma_{12} + (\%4 - \%8) \gamma_{22} + \%7 \gamma_{32} + (\%4 - \%2) \gamma_{42} - \frac{(-a1 \%1 - Lrl iry) \gamma_{52}}{Lrl}, \\ \%9 \gamma_{13} + (\%4 - \%8) \gamma_{23} + \%7 \gamma_{33} + (\%4 - \%2) \gamma_{43} - \frac{(-a1 \%1 - Lrl iry) \gamma_{53}}{Lrl}, \\ \%9 \gamma_{14} + (\%4 - \%8) \gamma_{24} + \%7 \gamma_{34} + (\%4 - \%2) \gamma_{44} - \frac{(-a1 \%1 - Lrl iry) \gamma_{54}}{Lrl}, \\ \%9 \gamma_{15} + (\%4 - \%8) \gamma_{25} + \%7 \gamma_{35} + (\%4 - \%2) \gamma_{45} - \frac{(-a1 \%1 - Lrl iry) \gamma_{55}}{Lrl}, \\ \%9 \gamma_{16} + (\%4 - \%8) \gamma_{26} + \%7 \gamma_{36} + (\%4 - \%2) \gamma_{46} - \frac{(-a1 \%1 - Lrl iry) \gamma_{56}}{Lrl}, \\ \%9 \gamma_{17} + (\%4 - \%8) \gamma_{27} + \%7 \gamma_{37} + (\%4 - \%2) \gamma_{47} - \frac{(-a1 \%1 - Lrl iry) \gamma_{57}}{Lrl} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (-\%16 - \%18) \gamma_{11} + \%17 \gamma_{21} + (-\%16 - \%14) \gamma_{31} + \%13 \gamma_{41} - \frac{(a1 \%10 + Lrl irx) \gamma_{51}}{Lrl}, \\ (-\%16 - \%18) \gamma_{12} + \%17 \gamma_{22} + (-\%16 - \%14) \gamma_{32} + \%13 \gamma_{42} - \frac{(a1 \%10 + Lrl irx) \gamma_{52}}{Lrl}, \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& (-\%16 - \%18) \gamma_{13} + \%17 \gamma_{23} + (-\%16 - \%14) \gamma_{33} + \%13 \gamma_{43} - \frac{(a1 \%10 + Lrl\ irx) \gamma_{53}}{Lrl}, \\
& (-\%16 - \%18) \gamma_{14} + \%17 \gamma_{24} + (-\%16 - \%14) \gamma_{34} + \%13 \gamma_{44} - \frac{(a1 \%10 + Lrl\ irx) \gamma_{54}}{Lrl}, \\
& (-\%16 - \%18) \gamma_{15} + \%17 \gamma_{25} + (-\%16 - \%14) \gamma_{35} + \%13 \gamma_{45} - \frac{(a1 \%10 + Lrl\ irx) \gamma_{55}}{Lrl}, \\
& (-\%16 - \%18) \gamma_{16} + \%17 \gamma_{26} + (-\%16 - \%14) \gamma_{36} + \%13 \gamma_{46} - \frac{(a1 \%10 + Lrl\ irx) \gamma_{56}}{Lrl}, \\
& (-\%16 - \%18) \gamma_{17} + \%17 \gamma_{27} + (-\%16 - \%14) \gamma_{37} + \%13 \gamma_{47} - \frac{(a1 \%10 + Lrl\ irx) \gamma_{57}}{Lrl} \Big] \\
& \left[\frac{Rs \gamma_{11}}{Lrl} + (-\%19 + \%8) \gamma_{21} - \frac{Rr \gamma_{31}}{Lrl} + (-\%19 + \%2) \gamma_{41} + \frac{(-a1 \%1 - Lrl\ iry) \gamma_{51}}{Lrl}, \right. \\
& \frac{Rs \gamma_{12}}{Lrl} + (-\%19 + \%8) \gamma_{22} - \frac{Rr \gamma_{32}}{Lrl} + (-\%19 + \%2) \gamma_{42} + \frac{(-a1 \%1 - Lrl\ iry) \gamma_{52}}{Lrl}, \\
& \frac{Rs \gamma_{13}}{Lrl} + (-\%19 + \%8) \gamma_{23} - \frac{Rr \gamma_{33}}{Lrl} + (-\%19 + \%2) \gamma_{43} + \frac{(-a1 \%1 - Lrl\ iry) \gamma_{53}}{Lrl}, \\
& \frac{Rs \gamma_{14}}{Lrl} + (-\%19 + \%8) \gamma_{24} - \frac{Rr \gamma_{34}}{Lrl} + (-\%19 + \%2) \gamma_{44} + \frac{(-a1 \%1 - Lrl\ iry) \gamma_{54}}{Lrl}, \\
& \frac{Rs \gamma_{15}}{Lrl} + (-\%19 + \%8) \gamma_{25} - \frac{Rr \gamma_{35}}{Lrl} + (-\%19 + \%2) \gamma_{45} + \frac{(-a1 \%1 - Lrl\ iry) \gamma_{55}}{Lrl}, \\
& \frac{Rs \gamma_{16}}{Lrl} + (-\%19 + \%8) \gamma_{26} - \frac{Rr \gamma_{36}}{Lrl} + (-\%19 + \%2) \gamma_{46} + \frac{(-a1 \%1 - Lrl\ iry) \gamma_{56}}{Lrl}, \\
& \left. \frac{Rs \gamma_{17}}{Lrl} + (-\%19 + \%8) \gamma_{27} - \frac{Rr \gamma_{37}}{Lrl} + (-\%19 + \%2) \gamma_{47} + \frac{(-a1 \%1 - Lrl\ iry) \gamma_{57}}{Lrl} \right] \\
& \left[(\%20 + \%18) \gamma_{11} + \frac{Rs \gamma_{21}}{Lrl} + (\%20 + \%14) \gamma_{31} - \frac{Rr \gamma_{41}}{Lrl} + \frac{(a1 \%10 + Lrl\ irx) \gamma_{51}}{Lrl}, \right. \\
& (\%20 + \%18) \gamma_{12} + \frac{Rs \gamma_{22}}{Lrl} + (\%20 + \%14) \gamma_{32} - \frac{Rr \gamma_{42}}{Lrl} + \frac{(a1 \%10 + Lrl\ irx) \gamma_{52}}{Lrl}, \\
& (\%20 + \%18) \gamma_{13} + \frac{Rs \gamma_{23}}{Lrl} + (\%20 + \%14) \gamma_{33} - \frac{Rr \gamma_{43}}{Lrl} + \frac{(a1 \%10 + Lrl\ irx) \gamma_{53}}{Lrl}, \\
& (\%20 + \%18) \gamma_{14} + \frac{Rs \gamma_{24}}{Lrl} + (\%20 + \%14) \gamma_{34} - \frac{Rr \gamma_{44}}{Lrl} + \frac{(a1 \%10 + Lrl\ irx) \gamma_{54}}{Lrl}, \\
& (\%20 + \%18) \gamma_{15} + \frac{Rs \gamma_{25}}{Lrl} + (\%20 + \%14) \gamma_{35} - \frac{Rr \gamma_{45}}{Lrl} + \frac{(a1 \%10 + Lrl\ irx) \gamma_{55}}{Lrl}, \\
& \left. (\%20 + \%18) \gamma_{16} + \frac{Rs \gamma_{26}}{Lrl} + (\%20 + \%14) \gamma_{36} - \frac{Rr \gamma_{46}}{Lrl} + \frac{(a1 \%10 + Lrl\ irx) \gamma_{56}}{Lrl}, \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(\%20 + \%18) \gamma_{17} + \frac{Rs \gamma_{27}}{Lrl} + (\%20 + \%14) \gamma_{37} - \frac{Rr \gamma_{47}}{Lrl} + \frac{(al \%10 + Lrl \text{ irx}) \gamma_{57}}{Lrl} \right] \\
& \left[\frac{\%22 \gamma_{11}}{J} + \frac{\%21 \gamma_{21}}{J} + \frac{3}{2} \frac{P \text{ al } a2 \text{ isy } \gamma_{31}}{J(1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{3}{2} \frac{P \text{ al } a2 \text{ isx } \gamma_{41}}{J(1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{\rho \gamma_{51}}{J}, \right. \\
& \frac{\%22 \gamma_{12}}{J} + \frac{\%21 \gamma_{22}}{J} + \frac{3}{2} \frac{P \text{ al } a2 \text{ isy } \gamma_{32}}{J(1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{3}{2} \frac{P \text{ al } a2 \text{ isx } \gamma_{42}}{J(1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{\rho \gamma_{52}}{J}, \\
& \frac{\%22 \gamma_{13}}{J} + \frac{\%21 \gamma_{23}}{J} + \frac{3}{2} \frac{P \text{ al } a2 \text{ isy } \gamma_{33}}{J(1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{3}{2} \frac{P \text{ al } a2 \text{ isx } \gamma_{43}}{J(1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{\rho \gamma_{53}}{J}, \\
& \frac{\%22 \gamma_{14}}{J} + \frac{\%21 \gamma_{24}}{J} + \frac{3}{2} \frac{P \text{ al } a2 \text{ isy } \gamma_{34}}{J(1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{3}{2} \frac{P \text{ al } a2 \text{ isx } \gamma_{44}}{J(1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{\rho \gamma_{54}}{J}, \\
& \frac{\%22 \gamma_{15}}{J} + \frac{\%21 \gamma_{25}}{J} + \frac{3}{2} \frac{P \text{ al } a2 \text{ isy } \gamma_{35}}{J(1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{3}{2} \frac{P \text{ al } a2 \text{ isx } \gamma_{45}}{J(1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{\rho \gamma_{55}}{J}, \\
& \frac{\%22 \gamma_{16}}{J} + \frac{\%21 \gamma_{26}}{J} + \frac{3}{2} \frac{P \text{ al } a2 \text{ isy } \gamma_{36}}{J(1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{3}{2} \frac{P \text{ al } a2 \text{ isx } \gamma_{46}}{J(1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{\rho \gamma_{56}}{J}, \\
& \left. \frac{\%22 \gamma_{17}}{J} + \frac{\%21 \gamma_{27}}{J} + \frac{3}{2} \frac{P \text{ al } a2 \text{ isy } \gamma_{37}}{J(1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{3}{2} \frac{P \text{ al } a2 \text{ isx } \gamma_{47}}{J(1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{\rho \gamma_{57}}{J} \right]
\end{aligned}$$

$$\%1 := \arctan(a2 (isy + iry))$$

$$\%2 := \frac{\frac{(w - wr) \text{ al } a2}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + (w - wr) Lrl}{Lrl}$$

$$\%3 := Lrl + Lrl a2^2 isx^2 + 2 Lrl a2^2 isx irx + Lrl a2^2 irx^2 + al a2$$

$$\%4 := \frac{\%3 w}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)}$$

$$\%5 := 2 Lrl a2^2 isx + 2 Lrl a2^2 irx$$

$$\%6 := \frac{\%5 (w \text{ al } \%1 - Rs \text{ isx})}{Lrl \text{ al } a2}$$

$$\%7 := \frac{\%5 usx}{Lrl \text{ al } a2} + \%6 + \frac{Rr}{Lrl}$$

$$\%8 := \frac{(w - wr) \text{ al } a2}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)}$$

$$\%9 := \frac{\%5 usx}{Lrl \text{ al } a2} + \%6 - \frac{\%3 Rs}{Lrl \text{ al } a2}$$

$$\%10 := \arctan(a2 (isx + irx))$$

$$\%11 := 2 Lrl a2^2 isy + 2 Lrl a2^2 iry$$

$$\%12 := \frac{\%11 (-w \text{ al } \%10 - Rs \text{ isy})}{Lrl \text{ al } a2}$$

$$\%13 := \frac{\%11 \text{ usy}}{\text{Lrl } a1 \ a2} + \%12 + \frac{\text{Rr}}{\text{Lrl}}$$

$$\%14 := \frac{\frac{(-w + wr) \ a1 \ a2}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - (w - wr) \ \text{Lrl}}{\text{Lrl}}$$

$$\%15 := \text{Lrl} + \text{Lrl} \ a2^2 \ isy^2 + 2 \ \text{Lrl} \ a2^2 \ isy \ iry + \text{Lrl} \ a2^2 \ iry^2 + a1 \ a2$$

$$\%16 := \frac{\%15 \ w}{\text{Lrl} (1 + a2^2 (isx + irx)^2)}$$

$$\%17 := \frac{\%11 \ \text{usy}}{\text{Lrl} \ a1 \ a2} + \%12 - \frac{\%15 \ \text{Rs}}{\text{Lrl} \ a1 \ a2}$$

$$\%18 := \frac{(-w + wr) \ a1 \ a2}{\text{Lrl} (1 + a2^2 (isx + irx)^2)}$$

$$\%19 := \frac{w \ a1 \ a2}{\text{Lrl} (1 + a2^2 (isy + iry)^2)}$$

$$\%20 := \frac{w \ a1 \ a2}{\text{Lrl} (1 + a2^2 (isx + irx)^2)}$$

$$\%21 := -\frac{3}{2} \frac{\text{P} \ a1 \ a2 \ isx}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{3}{2} \ \text{P} \ a1 \ \%10$$

$$\%22 := -\frac{3}{2} \ \text{P} \ a1 \ \%1 + \frac{3}{2} \frac{\text{P} \ a1 \ a2 \ isy}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}$$

> **dsens := matadd(p1,dfparam);**

dsens :=

$$\left[\%9 \ \gamma11 + (\%4 - \%8) \ \gamma21 + \%7 \ \gamma31 + (\%4 - \%3) \ \gamma41 - \frac{(-a1 \ \%2 - \text{Lrl} \ iry) \ \gamma51}{\text{Lrl}} - \frac{\%1 \ isx}{\text{Lrl} \ a1 \ a2} \right.$$

$$\left. , \%9 \ \gamma12 + (\%4 - \%8) \ \gamma22 + \%7 \ \gamma32 + (\%4 - \%3) \ \gamma42 - \frac{(-a1 \ \%2 - \text{Lrl} \ iry) \ \gamma52}{\text{Lrl}} + \frac{irx}{\text{Lrl}} , \right.$$

$$\%9 \ \gamma13 + (\%4 - \%8) \ \gamma23 + \%7 \ \gamma33 + (\%4 - \%3) \ \gamma43 - \frac{(-a1 \ \%2 - \text{Lrl} \ iry) \ \gamma53}{\text{Lrl}} - \frac{\%1 \ usx}{\text{Lrl}^2 \ a1 \ a2}$$

$$+ \frac{(1 + a2^2 \ isx^2 + 2 \ a2^2 \ isx \ irx + a2^2 \ irx^2) \ usx}{\text{Lrl} \ a1 \ a2} + \frac{urx}{\text{Lrl}^2} - \frac{\%1 (w \ a1 \ \%2 - \text{Rs} \ isx)}{\text{Lrl}^2 \ a1 \ a2}$$

$$+ \frac{(1 + a2^2 \ isx^2 + 2 \ a2^2 \ isx \ irx + a2^2 \ irx^2) (w \ a1 \ \%2 - \text{Rs} \ isx)}{\text{Lrl} \ a1 \ a2}$$

$$+ \frac{(w - wr) \ a1 \ \%2 - \text{Rr} \ irx + (w - wr) \ \text{Lrl} \ iry}{\text{Lrl}^2} - \frac{(w - wr) \ iry}{\text{Lrl}} ,$$

$$\%9 \ \gamma14 + (\%4 - \%8) \ \gamma24 + \%7 \ \gamma34 + (\%4 - \%3) \ \gamma44 - \frac{(-a1 \ \%2 - \text{Lrl} \ iry) \ \gamma54}{\text{Lrl}} ,$$

$$\begin{aligned}
& \%9 \gamma_{15} + (\%4 - \%8) \gamma_{25} + \%7 \gamma_{35} + (\%4 - \%3) \gamma_{45} - \frac{(-a1 \%2 - Lrl iry) \gamma_{55}}{Lrl}, \%9 \gamma_{16} \\
& + (\%4 - \%8) \gamma_{26} + \%7 \gamma_{36} + (\%4 - \%3) \gamma_{46} - \frac{(-a1 \%2 - Lrl iry) \gamma_{56}}{Lrl} - \frac{\%1 usx}{Lrl a1^2 a2} \\
& + \frac{usx}{Lrl a1} - \frac{\%1 (w a1 \%2 - Rs isx)}{Lrl a1^2 a2} + \frac{w a1 \%2 - Rs isx}{Lrl a1} + \frac{\%1 w \%2}{Lrl a1 a2} - \frac{(w - wr) \%2}{Lrl}, \%9 \gamma_{17} \\
& + (\%4 - \%8) \gamma_{27} + \%7 \gamma_{37} + (\%4 - \%3) \gamma_{47} - \frac{(-a1 \%2 - Lrl iry) \gamma_{57}}{Lrl} - \frac{\%1 usx}{Lrl a1 a2^2} \\
& + \frac{(2 Lrl a2 isx^2 + 4 Lrl a2 isx irx + 2 Lrl a2 irx^2 + a1) usx}{Lrl a1 a2} - \frac{\%1 (w a1 \%2 - Rs isx)}{Lrl a1 a2^2} \\
& + \frac{(2 Lrl a2 isx^2 + 4 Lrl a2 isx irx + 2 Lrl a2 irx^2 + a1) (w a1 \%2 - Rs isx)}{Lrl a1 a2} \\
& + \left. \begin{aligned} & \frac{\%1 w (isy + iry)}{Lrl a2 (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{(w - wr) a1 (isy + iry)}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} \end{aligned} \right] \\
& \left[(-\%16 - \%18) \gamma_{11} + \%17 \gamma_{21} + (-\%16 - \%15) \gamma_{31} + \%14 \gamma_{41} - \frac{(a1 \%11 + Lrl irx) \gamma_{51}}{Lrl} \right. \\
& - \frac{\%10 isy}{Lrl a1 a2}, (-\%16 - \%18) \gamma_{12} + \%17 \gamma_{22} + (-\%16 - \%15) \gamma_{32} + \%14 \gamma_{42} \\
& - \frac{(a1 \%11 + Lrl irx) \gamma_{52}}{Lrl} + \frac{iry}{Lrl}, (-\%16 - \%18) \gamma_{13} + \%17 \gamma_{23} + (-\%16 - \%15) \gamma_{33} \\
& + \%14 \gamma_{43} - \frac{(a1 \%11 + Lrl irx) \gamma_{53}}{Lrl} - \frac{\%10 usy}{Lrl^2 a1 a2} \\
& + \frac{(1 + a2^2 isy^2 + 2 a2^2 isy iry + a2^2 iry^2) usy}{Lrl a1 a2} + \frac{ury}{Lrl^2} - \frac{\%10 (-w a1 \%11 - Rs isy)}{Lrl^2 a1 a2} \\
& + \frac{(1 + a2^2 isy^2 + 2 a2^2 isy iry + a2^2 iry^2) (-w a1 \%11 - Rs isy)}{Lrl a1 a2} \\
& + \frac{(-w + wr) a1 \%11 - (w - wr) Lrl irx - Rr iry}{Lrl^2} + \frac{(w - wr) irx}{Lrl}, \\
& (-\%16 - \%18) \gamma_{14} + \%17 \gamma_{24} + (-\%16 - \%15) \gamma_{34} + \%14 \gamma_{44} - \frac{(a1 \%11 + Lrl irx) \gamma_{54}}{Lrl}, \\
& (-\%16 - \%18) \gamma_{15} + \%17 \gamma_{25} + (-\%16 - \%15) \gamma_{35} + \%14 \gamma_{45} - \frac{(a1 \%11 + Lrl irx) \gamma_{55}}{Lrl}, \\
& (-\%16 - \%18) \gamma_{16} + \%17 \gamma_{26} + (-\%16 - \%15) \gamma_{36} + \%14 \gamma_{46} - \frac{(a1 \%11 + Lrl irx) \gamma_{56}}{Lrl} \\
& - \frac{\%10 usy}{Lrl a1^2 a2} + \frac{usy}{Lrl a1} - \frac{\%10 (-w a1 \%11 - Rs isy)}{Lrl a1^2 a2} + \frac{-w a1 \%11 - Rs isy}{Lrl a1} - \frac{\%10 w \%11}{Lrl a1 a2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(-w + wr) \%11}{Lrl}, (-\%16 - \%18) \gamma17 + \%17 \gamma27 + (-\%16 - \%15) \gamma37 + \%14 \gamma47 \\
& - \frac{(a1 \%11 + Lrl irx) \gamma57}{Lrl} - \frac{\%10 usy}{Lrl a1 a2^2} \\
& + \frac{(2 Lrl a2 isy^2 + 4 Lrl a2 isy iry + 2 Lrl a2 iry^2 + a1) usy}{Lrl a1 a2} - \frac{\%10 (-w a1 \%11 - Rs isy)}{Lrl a1 a2^2} \\
& + \frac{(2 Lrl a2 isy^2 + 4 Lrl a2 isy iry + 2 Lrl a2 iry^2 + a1) (-w a1 \%11 - Rs isy)}{Lrl a1 a2} \\
& - \left[\frac{\%10 w (isx + irx)}{Lrl a2 (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{(-w + wr) a1 (isx + irx)}{Lrl (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} \right] \\
& \left[\frac{Rs \gamma11}{Lrl} + (-\%19 + \%8) \gamma21 - \frac{Rr \gamma31}{Lrl} + (-\%19 + \%3) \gamma41 + \frac{(-a1 \%2 - Lrl iry) \gamma51}{Lrl} + \frac{isx}{Lrl}, \right. \\
& \frac{Rs \gamma12}{Lrl} + (-\%19 + \%8) \gamma22 - \frac{Rr \gamma32}{Lrl} + (-\%19 + \%3) \gamma42 + \frac{(-a1 \%2 - Lrl iry) \gamma52}{Lrl} - \frac{irx}{Lrl}, \\
& \frac{Rs \gamma13}{Lrl} + (-\%19 + \%8) \gamma23 - \frac{Rr \gamma33}{Lrl} + (-\%19 + \%3) \gamma43 + \frac{(-a1 \%2 - Lrl iry) \gamma53}{Lrl} + \frac{usx}{Lrl^2} \\
& - \frac{urx}{Lrl^2} + \frac{w a1 \%2 - Rs isx}{Lrl^2} - \frac{(w - wr) a1 \%2 - Rr irx + (w - wr) Lrl iry}{Lrl^2} + \frac{(w - wr) iry}{Lrl}, \\
& \frac{Rs \gamma14}{Lrl} + (-\%19 + \%8) \gamma24 - \frac{Rr \gamma34}{Lrl} + (-\%19 + \%3) \gamma44 + \frac{(-a1 \%2 - Lrl iry) \gamma54}{Lrl}, \\
& \frac{Rs \gamma15}{Lrl} + (-\%19 + \%8) \gamma25 - \frac{Rr \gamma35}{Lrl} + (-\%19 + \%3) \gamma45 + \frac{(-a1 \%2 - Lrl iry) \gamma55}{Lrl}, \frac{Rs \gamma16}{Lrl} \\
& + (-\%19 + \%8) \gamma26 - \frac{Rr \gamma36}{Lrl} + (-\%19 + \%3) \gamma46 + \frac{(-a1 \%2 - Lrl iry) \gamma56}{Lrl} - \frac{w \%2}{Lrl} \\
& + \frac{(w - wr) \%2}{Lrl}, \frac{Rs \gamma17}{Lrl} + (-\%19 + \%8) \gamma27 - \frac{Rr \gamma37}{Lrl} + (-\%19 + \%3) \gamma47 \\
& \left. + \frac{(-a1 \%2 - Lrl iry) \gamma57}{Lrl} - \frac{w a1 (isy + iry)}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} + \frac{(w - wr) a1 (isy + iry)}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} \right] \\
& \left[(\%20 + \%18) \gamma11 + \frac{Rs \gamma21}{Lrl} + (\%20 + \%15) \gamma31 - \frac{Rr \gamma41}{Lrl} + \frac{(a1 \%11 + Lrl irx) \gamma51}{Lrl} + \frac{isy}{Lrl}, \right. \\
& (\%20 + \%18) \gamma12 + \frac{Rs \gamma22}{Lrl} + (\%20 + \%15) \gamma32 - \frac{Rr \gamma42}{Lrl} + \frac{(a1 \%11 + Lrl irx) \gamma52}{Lrl} - \frac{iry}{Lrl}, \\
& (\%20 + \%18) \gamma13 + \frac{Rs \gamma23}{Lrl} + (\%20 + \%15) \gamma33 - \frac{Rr \gamma43}{Lrl} + \frac{(a1 \%11 + Lrl irx) \gamma53}{Lrl} + \frac{usy}{Lrl^2} \\
& - \frac{ury}{Lrl^2} + \frac{-w a1 \%11 - Rs isy}{Lrl^2} - \frac{(-w + wr) a1 \%11 - (w - wr) Lrl irx - Rr iry}{Lrl^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(w - wr) irx}{Lrl}, \\
& (\%20 + \%18) \gamma14 + \frac{Rs \gamma24}{Lrl} + (\%20 + \%15) \gamma34 - \frac{Rr \gamma44}{Lrl} + \frac{(al \%11 + Lrl irx) \gamma54}{Lrl}, \\
& (\%20 + \%18) \gamma15 + \frac{Rs \gamma25}{Lrl} + (\%20 + \%15) \gamma35 - \frac{Rr \gamma45}{Lrl} + \frac{(al \%11 + Lrl irx) \gamma55}{Lrl}, \\
& (\%20 + \%18) \gamma16 + \frac{Rs \gamma26}{Lrl} + (\%20 + \%15) \gamma36 - \frac{Rr \gamma46}{Lrl} + \frac{(al \%11 + Lrl irx) \gamma56}{Lrl} \\
& + \frac{w \%11}{Lrl} + \frac{(-w + wr) \%11}{Lrl}, (\%20 + \%18) \gamma17 + \frac{Rs \gamma27}{Lrl} + (\%20 + \%15) \gamma37 - \frac{Rr \gamma47}{Lrl} \\
& + \left. \frac{(al \%11 + Lrl irx) \gamma57}{Lrl} + \frac{w al (isx + irx)}{Lrl (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} + \frac{(-w + wr) al (isx + irx)}{Lrl (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} \right] \\
& \left[\frac{\%22 \gamma11}{J} + \frac{\%21 \gamma21}{J} + \frac{3}{2} \frac{P al a2 isy \gamma31}{J (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{3}{2} \frac{P al a2 isx \gamma41}{J (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{\rho \gamma51}{J}, \right. \\
& \frac{\%22 \gamma12}{J} + \frac{\%21 \gamma22}{J} + \frac{3}{2} \frac{P al a2 isy \gamma32}{J (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{3}{2} \frac{P al a2 isx \gamma42}{J (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{\rho \gamma52}{J}, \\
& \frac{\%22 \gamma13}{J} + \frac{\%21 \gamma23}{J} + \frac{3}{2} \frac{P al a2 isy \gamma33}{J (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{3}{2} \frac{P al a2 isx \gamma43}{J (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{\rho \gamma53}{J}, \\
& \frac{\%22 \gamma14}{J} + \frac{\%21 \gamma24}{J} + \frac{3}{2} \frac{P al a2 isy \gamma34}{J (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{3}{2} \frac{P al a2 isx \gamma44}{J (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{\rho \gamma54}{J} + \frac{Mc}{J^2} \\
& \left. - \frac{\frac{3}{2} P al \%2 isx + \frac{3}{2} P al \%11 isy - \rho wr}{J^2}, \right. \\
& \frac{\%22 \gamma15}{J} + \frac{\%21 \gamma25}{J} + \frac{3}{2} \frac{P al a2 isy \gamma35}{J (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{3}{2} \frac{P al a2 isx \gamma45}{J (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{\rho \gamma55}{J} - \frac{wr}{J}, \\
& \frac{\%22 \gamma16}{J} + \frac{\%21 \gamma26}{J} + \frac{3}{2} \frac{P al a2 isy \gamma36}{J (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} - \frac{3}{2} \frac{P al a2 isx \gamma46}{J (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{\rho \gamma56}{J} \\
& + \frac{-\frac{3}{2} P \%2 isx + \frac{3}{2} P \%11 isy}{J}, \frac{\%22 \gamma17}{J} + \frac{\%21 \gamma27}{J} + \frac{3}{2} \frac{P al a2 isy \gamma37}{J (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} \\
& \left. - \frac{\frac{3}{2} \frac{P al a2 isx \gamma47}{J (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} - \frac{\rho \gamma57}{J} + \frac{-\frac{3}{2} \frac{P al (isy + iry) isx}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{3}{2} \frac{P al (isx + irx) isy}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}}{J} \right] \\
& \%1 := Lrl + Lrl a2^2 isx^2 + 2 Lrl a2^2 isx irx + Lrl a2^2 irx^2 + al a2 \\
& \%2 := \arctan(a2 (isy + iry))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\%3 &:= \frac{\frac{(w - wr) a1 a2}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + (w - wr) Lrl}{Lrl} \\
\%4 &:= \frac{\%1 w}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} \\
\%5 &:= 2 Lrl a2^2 isx + 2 Lrl a2^2 irx \\
\%6 &:= \frac{\%5 (w a1 \%2 - Rs isx)}{Lrl a1 a2} \\
\%7 &:= \frac{\%5 usx}{Lrl a1 a2} + \%6 + \frac{Rr}{Lrl} \\
\%8 &:= \frac{(w - wr) a1 a2}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} \\
\%9 &:= \frac{\%5 usx}{Lrl a1 a2} + \%6 - \frac{\%1 Rs}{Lrl a1 a2} \\
\%10 &:= Lrl + Lrl a2^2 isy^2 + 2 Lrl a2^2 isy iry + Lrl a2^2 iry^2 + a1 a2 \\
\%11 &:= \arctan(a2 (isx + irx)) \\
\%12 &:= 2 Lrl a2^2 isy + 2 Lrl a2^2 iry \\
\%13 &:= \frac{\%12 (-w a1 \%11 - Rs isy)}{Lrl a1 a2} \\
\%14 &:= \frac{\%12 usy}{Lrl a1 a2} + \%13 + \frac{Rr}{Lrl} \\
\%15 &:= \frac{\frac{(-w + wr) a1 a2}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - (w - wr) Lrl}{Lrl} \\
\%16 &:= \frac{\%10 w}{Lrl (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} \\
\%17 &:= \frac{\%12 usy}{Lrl a1 a2} + \%13 - \frac{\%10 Rs}{Lrl a1 a2} \\
\%18 &:= \frac{(-w + wr) a1 a2}{Lrl (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} \\
\%19 &:= \frac{w a1 a2}{Lrl (1 + a2^2 (isy + iry)^2)} \\
\%20 &:= \frac{w a1 a2}{Lrl (1 + a2^2 (isx + irx)^2)} \\
\%21 &:= -\frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{3}{2} P a1 \%11
\end{aligned}$$

$$\%22 := -\frac{3}{2} P a1 \%2 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}$$

> **p2:=multiply(dgx,gamm);**

p2 :=

$$\left[\frac{a1 a2 \gamma11}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \frac{a1 a2 \gamma31}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, \frac{a1 a2 \gamma12}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \frac{a1 a2 \gamma32}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, \right. \\ \left. \frac{a1 a2 \gamma13}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \frac{a1 a2 \gamma33}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, \frac{a1 a2 \gamma14}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \frac{a1 a2 \gamma34}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, \right. \\ \left. \frac{a1 a2 \gamma15}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \frac{a1 a2 \gamma35}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, \frac{a1 a2 \gamma16}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \frac{a1 a2 \gamma36}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, \right. \\ \left. \frac{a1 a2 \gamma17}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \frac{a1 a2 \gamma37}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} \right]$$

$$\left[\frac{a1 a2 \gamma21}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{a1 a2 \gamma41}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \frac{a1 a2 \gamma22}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{a1 a2 \gamma42}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \right. \\ \left. \frac{a1 a2 \gamma23}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{a1 a2 \gamma43}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \frac{a1 a2 \gamma24}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{a1 a2 \gamma44}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \right. \\ \left. \frac{a1 a2 \gamma25}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{a1 a2 \gamma45}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \frac{a1 a2 \gamma26}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{a1 a2 \gamma46}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \right. \\ \left. \frac{a1 a2 \gamma27}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{a1 a2 \gamma47}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} \right]$$

$$\left[\frac{3}{2} P \%2 \gamma11 + \frac{3}{2} P \%1 \gamma21 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy \gamma31}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx \gamma41}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \right.$$

$$\left. \frac{3}{2} P \%2 \gamma12 + \frac{3}{2} P \%1 \gamma22 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy \gamma32}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx \gamma42}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \right.$$

$$\left. \frac{3}{2} P \%2 \gamma13 + \frac{3}{2} P \%1 \gamma23 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy \gamma33}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx \gamma43}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \right.$$

$$\left. \frac{3}{2} P \%2 \gamma14 + \frac{3}{2} P \%1 \gamma24 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy \gamma34}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx \gamma44}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \right.$$

$$\left. \frac{3}{2} P \%2 \gamma15 + \frac{3}{2} P \%1 \gamma25 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy \gamma35}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx \gamma45}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \right.$$

$$\left. \frac{3}{2} P \%2 \gamma16 + \frac{3}{2} P \%1 \gamma26 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy \gamma36}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx \gamma46}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \right.$$

$$\left. \frac{3}{2} P \%2 \gamma17 + \frac{3}{2} P \%1 \gamma27 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy \gamma37}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx \gamma47}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} \right]$$

$$\%1 := a1 \arctan(a2 (isx + irx)) - \frac{a1 a2 isx}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}$$

$$\%2 := \frac{a1 a2 isy}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - a1 \arctan(a2 (isy + iry))$$

> **senssali:=matadd(p2,dgparam);**

senssali :=

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a1 a2 \gamma11}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \frac{a1 a2 \gamma31}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, \frac{a1 a2 \gamma12}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \frac{a1 a2 \gamma32}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, \\ \frac{a1 a2 \gamma13}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \frac{a1 a2 \gamma33}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, \frac{a1 a2 \gamma14}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \frac{a1 a2 \gamma34}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, \\ \frac{a1 a2 \gamma15}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \frac{a1 a2 \gamma35}{1 + a2^2 (isx + irx)^2}, \frac{a1 a2 \gamma16}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \frac{a1 a2 \gamma36}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \%1, \\ \frac{a1 a2 \gamma17}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \frac{a1 a2 \gamma37}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} + \frac{a1 (isx + irx)}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a1 a2 \gamma21}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{a1 a2 \gamma41}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \frac{a1 a2 \gamma22}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{a1 a2 \gamma42}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \\ \frac{a1 a2 \gamma23}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{a1 a2 \gamma43}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \frac{a1 a2 \gamma24}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{a1 a2 \gamma44}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \\ \frac{a1 a2 \gamma25}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{a1 a2 \gamma45}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \frac{a1 a2 \gamma26}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{a1 a2 \gamma46}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \%2, \\ \frac{a1 a2 \gamma27}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{a1 a2 \gamma47}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{a1 (isy + iry)}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{3}{2} P \%4 \gamma11 + \frac{3}{2} P \%3 \gamma21 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy \gamma31}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx \gamma41}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \\ \frac{3}{2} P \%4 \gamma12 + \frac{3}{2} P \%3 \gamma22 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy \gamma32}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx \gamma42}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \\ \frac{3}{2} P \%4 \gamma13 + \frac{3}{2} P \%3 \gamma23 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy \gamma33}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx \gamma43}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \\ \frac{3}{2} P \%4 \gamma14 + \frac{3}{2} P \%3 \gamma24 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy \gamma34}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx \gamma44}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \\ \frac{3}{2} P \%4 \gamma15 + \frac{3}{2} P \%3 \gamma25 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy \gamma35}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx \gamma45}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}, \frac{3}{2} P \%4 \gamma16 \\ + \frac{3}{2} P \%3 \gamma26 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy \gamma36}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx \gamma46}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} + \frac{3}{2} P (\%1 isy - \%2 isx), \\ \frac{3}{2} P \%4 \gamma17 + \frac{3}{2} P \%3 \gamma27 + \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isy \gamma37}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{3}{2} \frac{P a1 a2 isx \gamma47}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} \\ + \frac{3}{2} P \left(\frac{a1 (isx + irx) isy}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - \frac{a1 (isy + iry) isx}{1 + a2^2 (isy + iry)^2} \right) \end{array} \right]$$

| %1 := arctan($a2 (isx + irx)$)

| %2 := arctan($a2 (isy + iry)$)

| %3 := $a1 \%1 - \frac{a1 a2 isx}{1 + a2^2 (isy + iry)^2}$

| %4 := $\frac{a1 a2 isy}{1 + a2^2 (isx + irx)^2} - a1 \%2$

[> **fortran(dsens,optimized,filename=dsens21);**

[> **fortran(senssali,optimized,filename=dsens21);**

[>

MODELO N° 22 Formulación general

En este caso

$$x = (\Psi_{sx} \quad \Psi_{sy} \quad \Psi_{rx} \quad \Psi_{ry} \quad \omega_r)^t \quad (7)$$

$$u = (u_{sx} \quad u_{sy} \quad u_{rx} \quad u_{ry} \quad Mc)^t \quad (8)$$

$$p = (R_s \quad R_r \quad L_{rl} \quad J \quad \rho \quad a \quad b)^t \quad (9)$$

$$y = (i_{sx} \quad i_{sy} \quad M_e)^t \quad (10)$$

definiendo las siguientes funciones de sensibilidad de las variables de estado:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \begin{pmatrix} \gamma_{\Psi_{sx}}^{r_s} & \gamma_{\Psi_{sx}}^{r_r} & \gamma_{\Psi_{sx}}^{L_{rl}} & \gamma_{\Psi_{sx}}^J & \gamma_{\Psi_{sx}}^\rho & \gamma_{\Psi_{sx}}^a & \gamma_{\Psi_{sx}}^b \\ \gamma_{\Psi_{sy}}^{r_s} & \gamma_{\Psi_{sy}}^{r_r} & \gamma_{\Psi_{sy}}^{L_{rl}} & \gamma_{\Psi_{sy}}^J & \gamma_{\Psi_{sy}}^\rho & \gamma_{\Psi_{sy}}^a & \gamma_{\Psi_{sy}}^b \\ \gamma_{\Psi_{rx}}^{r_s} & \gamma_{\Psi_{rx}}^{r_r} & \gamma_{\Psi_{rx}}^{L_{rl}} & \gamma_{\Psi_{rx}}^J & \gamma_{\Psi_{rx}}^\rho & \gamma_{\Psi_{rx}}^a & \gamma_{\Psi_{rx}}^b \\ \gamma_{\Psi_{ry}}^{r_s} & \gamma_{\Psi_{ry}}^{r_r} & \gamma_{\Psi_{ry}}^{L_{rl}} & \gamma_{\Psi_{ry}}^J & \gamma_{\Psi_{ry}}^\rho & \gamma_{\Psi_{ry}}^a & \gamma_{\Psi_{ry}}^b \\ \gamma_{\omega_r}^{r_s} & \gamma_{\omega_r}^{r_r} & \gamma_{\omega_r}^{L_{rl}} & \gamma_{\omega_r}^J & \gamma_{\omega_r}^\rho & \gamma_{\omega_r}^a & \gamma_{\omega_r}^b \end{pmatrix} \quad (11)$$

y de la sensibilidad de las variables de salida

$$\frac{\partial y}{\partial p} = \begin{pmatrix} \sigma_{i_{sx}}^{r_s} & \sigma_{i_{sx}}^{r_r} & \sigma_{i_{sx}}^{L_{rl}} & \sigma_{i_{sx}}^J & \sigma_{i_{sx}}^\rho & \sigma_{i_{sx}}^a & \sigma_{i_{sx}}^b \\ \sigma_{i_{sy}}^{r_s} & \sigma_{i_{sy}}^{r_r} & \sigma_{i_{sy}}^{L_{rl}} & \sigma_{i_{sy}}^J & \sigma_{i_{sy}}^\rho & \sigma_{i_{sy}}^a & \sigma_{i_{sy}}^b \\ \sigma_{M_e}^{r_s} & \sigma_{M_e}^{r_r} & \sigma_{M_e}^{L_{rl}} & \sigma_{M_e}^J & \sigma_{M_e}^\rho & \sigma_{M_e}^a & \sigma_{M_e}^b \end{pmatrix} \quad (12)$$

en las páginas que siguen se encuentran los cálculos desarrollados a partir de las utilidades que ofrece el programa MAPLE RV.0 para la manipulación algebraica y su posterior volcado en código FORTRAN 90 para su aplicación en los algoritmos utilizados en la tesis.

```

> with(linalg):
> gx:=In*(a*(fluxsx/Fn)+b*(fluxsx/Fn)^n);gy:=In*(a*(fluxsy/Fn)+b*(
fluxsy/Fn)^n);irx:=(fluxrx-fluxsx)/Lrl;iry:=(fluxry-fluxsy)/Lrl;
isx:=gx-irx;isy:=gy-iry;

```

Warning, new definition for stack

$$gx := \ln \left(\frac{a \text{fluxsx}}{Fn} + b \left(\frac{\text{fluxsx}}{Fn} \right)^n \right)$$

$$gy := \ln \left(\frac{a \text{fluxsy}}{Fn} + b \left(\frac{\text{fluxsy}}{Fn} \right)^n \right)$$

$$irx := \frac{\text{fluxrx} - \text{fluxsx}}{Lrl}$$

$$iry := \frac{\text{fluxry} - \text{fluxsy}}{Lrl}$$

$$isx := \ln \left(\frac{a \text{fluxsx}}{Fn} + b \left(\frac{\text{fluxsx}}{Fn} \right)^n \right) - \frac{\text{fluxrx} - \text{fluxsx}}{Lrl}$$

$$isy := \ln \left(\frac{a \text{fluxsy}}{Fn} + b \left(\frac{\text{fluxsy}}{Fn} \right)^n \right) - \frac{\text{fluxry} - \text{fluxsy}}{Lrl}$$

```

> dfsx:=usx-Rs*((fluxsx-fluxrx)/Lrl)+gx)+w*fluxsy;

```

$$dfsx := usx - Rs \left(\frac{\text{fluxsx} - \text{fluxrx}}{Lrl} + \ln \left(\frac{a \text{fluxsx}}{Fn} + b \left(\frac{\text{fluxsx}}{Fn} \right)^n \right) \right) + w \text{fluxsy}$$

```

> dfsy:=usy-Rs*((fluxsy-fluxry)/Lrl)+gy)-w*fluxsx;

```

$$dfsy := usy - Rs \left(\frac{\text{fluxsy} - \text{fluxry}}{Lrl} + \ln \left(\frac{a \text{fluxsy}}{Fn} + b \left(\frac{\text{fluxsy}}{Fn} \right)^n \right) \right) - w \text{fluxsx}$$

```

> dfrx:=urx-Rr*((fluxrx-fluxsx)/Lrl)+(w-wr)*fluxry;

```

$$dfrx := urx - \frac{Rr (\text{fluxrx} - \text{fluxsx})}{Lrl} + (w - wr) \text{fluxry}$$

```

> dfry:=ury-Rr*((fluxry-fluxsy)/Lrl)-(w-wr)*fluxrx;

```

$$dfry := ury - \frac{Rr (\text{fluxry} - \text{fluxsy})}{Lrl} - (w - wr) \text{fluxrx}$$

```

> dwr:=(1/J)*((3/2)*P*(fluxsx*isy-fluxsy*isx)-rho*wr-Mc);

```

$$dwr := \left(\frac{3}{2} P \left(\text{fluxsx} \left(\ln \left(\frac{a \text{fluxsy}}{Fn} + b \left(\frac{\text{fluxsy}}{Fn} \right)^n \right) - \frac{\text{fluxry} - \text{fluxsy}}{Lrl} \right) - \text{fluxsy} \left(\ln \left(\frac{a \text{fluxsx}}{Fn} + b \left(\frac{\text{fluxsx}}{Fn} \right)^n \right) - \frac{\text{fluxrx} - \text{fluxsx}}{Lrl} \right) \right) - \rho wr - Mc \right) / J$$

```

> Par:=(3/2)*P*(fluxsx*isy-fluxsy*isx);

```

$$Par := \frac{3}{2} P \left(\text{fluxsx} \left(\ln \left(\frac{a \text{fluxsy}}{Fn} + b \left(\frac{\text{fluxsy}}{Fn} \right)^n \right) - \frac{\text{fluxry} - \text{fluxsy}}{Lrl} \right) - \text{fluxsy} \left(\ln \left(\frac{a \text{fluxsx}}{Fn} + b \left(\frac{\text{fluxsx}}{Fn} \right)^n \right) - \frac{\text{fluxrx} - \text{fluxsx}}{Lrl} \right) \right)$$

> **ff:=vector([dfsx,dfsy,dfrx,dfry,dwr]);**

$$ff := \begin{bmatrix} usx - Rs \left(\frac{fluxsx - fluxrx}{Lrl} + \ln \left(\frac{a fluxsx}{Fn} + b \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n \right) \right) + w fluxsy, \\ usy - Rs \left(\frac{fluxsy - fluxry}{Lrl} + \ln \left(\frac{a fluxsy}{Fn} + b \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n \right) \right) - w fluxsx, \\ urx - \frac{Rr (fluxrx - fluxsx)}{Lrl} + (w - wr) fluxry, ury - \frac{Rr (fluxry - fluxsy)}{Lrl} - (w - wr) fluxrx, \left(\frac{3}{2} \right. \\ \left. P \left(fluxsx \left(\ln \left(\frac{a fluxsy}{Fn} + b \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n \right) - \frac{fluxry - fluxsy}{Lrl} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - fluxsy \left(\ln \left(\frac{a fluxsx}{Fn} + b \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n \right) - \frac{fluxrx - fluxsx}{Lrl} \right) \right) - \rho wr - Mc \right) / J \end{bmatrix}$$

> **x:=vector([fluxsx,fluxsy,fluxrx,fluxry,wr]);**

$$x := [fluxsx, fluxsy, fluxrx, fluxry, wr]$$

> **param:=vector([Rs,Rr,Lrl,J,rho,a,b]);**

$$param := [Rs, Rr, Lrl, J, \rho, a, b]$$

> **salidas:=vector([isx,isy,Par]);**

$$salidas := \begin{bmatrix} \ln \left(\frac{a fluxsx}{Fn} + b \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n \right) - \frac{fluxrx - fluxsx}{Lrl}, \\ \ln \left(\frac{a fluxsy}{Fn} + b \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n \right) - \frac{fluxry - fluxsy}{Lrl}, \frac{3}{2} P \left(\right. \\ \left. fluxsx \left(\ln \left(\frac{a fluxsy}{Fn} + b \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n \right) - \frac{fluxry - fluxsy}{Lrl} \right) \right. \\ \left. - fluxsy \left(\ln \left(\frac{a fluxsx}{Fn} + b \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n \right) - \frac{fluxrx - fluxsx}{Lrl} \right) \right) \end{bmatrix}$$

> **dfx:=jacobian(ff,x);**

dfx :=

$$\begin{bmatrix} -Rs \left(\frac{1}{Lrl} + \ln \left(\frac{a}{Fn} + \frac{b \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n}{fluxsx} \right) \right), w, \frac{Rs}{Lrl}, 0, 0 \\ -w, -Rs \left(\frac{1}{Lrl} + \ln \left(\frac{a}{Fn} + \frac{b \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n}{fluxsy} \right) \right), 0, \frac{Rs}{Lrl}, 0 \\ \frac{Rr}{Lrl}, 0, -\frac{Rr}{Lrl}, w - wr, -fluxry \\ 0, \frac{Rr}{Lrl}, -w + wr, -\frac{Rr}{Lrl}, fluxrx \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{3}{2} \right]$$

$$P \left(\frac{\ln \left(\frac{a \text{ fluxsy}}{Fn} + b \left(\frac{\text{fluxsy}}{Fn} \right)^n \right) - \frac{\text{fluxry} - \text{fluxsy}}{Lrl} - \text{fluxsy} \left(\frac{1}{Lrl} + \ln \left(\frac{a}{Fn} + \frac{b \left(\frac{\text{fluxsx}}{Fn} \right)^n}{\text{fluxsx}} \right) \right)}{J} \right)$$

$$\left[\frac{3}{2} \right]$$

$$P \left(\frac{\text{fluxsx} \left(\frac{1}{Lrl} + \ln \left(\frac{a}{Fn} + \frac{b \left(\frac{\text{fluxsy}}{Fn} \right)^n}{\text{fluxsy}} \right) \right) - \ln \left(\frac{a \text{ fluxsx}}{Fn} + b \left(\frac{\text{fluxsx}}{Fn} \right)^n \right) + \frac{\text{fluxrx} - \text{fluxsx}}{Lrl}}{J} \right)$$

$$\left[\frac{3}{2} \frac{P \text{ fluxsy}}{J Lrl}, -\frac{3}{2} \frac{P \text{ fluxsx}}{J Lrl}, -\frac{\rho}{J} \right]$$

> **dfparam:=jacobian(ff,param);**

dfparam :=

$$\left[-\frac{\text{fluxsx} - \text{fluxrx}}{Lrl} - \ln \left(\frac{a \text{ fluxsx}}{Fn} + b \left(\frac{\text{fluxsx}}{Fn} \right)^n \right), 0, \frac{Rs (\text{fluxsx} - \text{fluxrx})}{Lrl^2}, 0, 0, \right.$$

$$\left. -\frac{Rs \ln \text{fluxsx}}{Fn}, -Rs \ln \left(\frac{\text{fluxsx}}{Fn} \right)^n \right]$$

$$\left[-\frac{\text{fluxsy} - \text{fluxry}}{Lrl} - \ln \left(\frac{a \text{ fluxsy}}{Fn} + b \left(\frac{\text{fluxsy}}{Fn} \right)^n \right), 0, \frac{Rs (\text{fluxsy} - \text{fluxry})}{Lrl^2}, 0, 0, \right.$$

$$\left. -\frac{Rs \ln \text{fluxsy}}{Fn}, -Rs \ln \left(\frac{\text{fluxsy}}{Fn} \right)^n \right]$$

$$\left[0, -\frac{\text{fluxrx} - \text{fluxsx}}{Lrl}, \frac{Rr (\text{fluxrx} - \text{fluxsx})}{Lrl^2}, 0, 0, 0, 0 \right]$$

$$\left[0, -\frac{\text{fluxry} - \text{fluxsy}}{Lrl}, \frac{Rr (\text{fluxry} - \text{fluxsy})}{Lrl^2}, 0, 0, 0, 0 \right]$$

$$\left[0, 0, \frac{3}{2} \frac{P \left(\frac{\text{fluxsx} (\text{fluxry} - \text{fluxsy})}{Lrl^2} - \frac{\text{fluxsy} (\text{fluxrx} - \text{fluxsx})}{Lrl^2} \right)}{J}, -\left(\frac{3}{2} P \left(\right. \right.$$

$$\left. \text{fluxsx} \left(\ln \left(\frac{a \text{ fluxsy}}{Fn} + b \left(\frac{\text{fluxsy}}{Fn} \right)^n \right) - \frac{\text{fluxry} - \text{fluxsy}}{Lrl} \right) \right)$$

$$-fluxsy \left(\ln \left(\frac{a fluxsx}{Fn} + b \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n \right) - \frac{fluxrx - fluxsx}{Lrl} \right) - \rho wr - Mc \Big) / J^2, -\frac{wr}{J}, 0, \\ \frac{3}{2} \frac{P \left(fluxsx \ln \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n - fluxsy \ln \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n \right)}{J} \Big]$$

> **dgx:=jacobian(salidas,x);**

dgx :=

$$\left[\frac{1}{Lrl} + \ln \left(\frac{a}{Fn} + \frac{b \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n}{fluxsx} \right), 0, -\frac{1}{Lrl}, 0, 0 \right]$$

$$\left[0, \frac{1}{Lrl} + \ln \left(\frac{a}{Fn} + \frac{b \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n}{fluxsy} \right), 0, -\frac{1}{Lrl}, 0 \right]$$

$$\left[\frac{3}{2} \right]$$

$$P \left(\ln \left(\frac{a fluxsy}{Fn} + b \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n \right) - \frac{fluxry - fluxsy}{Lrl} - fluxsy \left(\frac{1}{Lrl} + \ln \left(\frac{a}{Fn} + \frac{b \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n}{fluxsx} \right) \right) \right),$$

$$\frac{3}{2}$$

$$P \left(fluxsx \left(\frac{1}{Lrl} + \ln \left(\frac{a}{Fn} + \frac{b \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n}{fluxsy} \right) \right) - \ln \left(\frac{a fluxsx}{Fn} + b \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n \right) + \frac{fluxrx - fluxsx}{Lrl} \right),$$

$$\left[\frac{3}{2} \frac{P fluxsy}{Lrl}, -\frac{3}{2} \frac{P fluxsx}{Lrl}, 0 \right]$$

> **dgparam:=jacobian(salidas,param);**

dgparam :=

$$\left[0, 0, \frac{fluxrx - fluxsx}{Lrl^2}, 0, 0, \frac{\ln fluxsx}{Fn}, \ln \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n \right]$$

$$\left[0, 0, \frac{fluxry - fluxsy}{Lrl^2}, 0, 0, \frac{\ln fluxsy}{Fn}, \ln \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n \right]$$

$$\left[0, 0, \frac{3}{2} P \left(\frac{fluxsx (fluxry - fluxsy)}{Lrl^2} - \frac{fluxsy (fluxrx - fluxsx)}{Lrl^2} \right), 0, 0, 0, 0 \right]$$

$$\frac{3}{2} P \left(fluxsx \ln \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n - fluxsy \ln \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n \right) \Big]$$

```
> gamm:=matrix(5,7,[[gamma11,gamma12,gamma13,gamma14,gamma15,gamma16,gamma17],[gamma21,gamma22,gamma23,gamma24,gamma25,gamma26,gamma27],[gamma31,gamma32,gamma33,gamma34,gamma35,gamma36,gamma37],[gamma41,gamma42,gamma43,gamma44,gamma45,gamma46,gamma47],[gamma51,gamma52,gamma53,gamma54,gamma55,gamma56,gamma57]]);
```

$$gamm := \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} & \gamma_{15} & \gamma_{16} & \gamma_{17} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} & \gamma_{25} & \gamma_{26} & \gamma_{27} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} & \gamma_{35} & \gamma_{36} & \gamma_{37} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} & \gamma_{45} & \gamma_{46} & \gamma_{47} \\ \gamma_{51} & \gamma_{52} & \gamma_{53} & \gamma_{54} & \gamma_{55} & \gamma_{56} & \gamma_{57} \end{bmatrix}$$

```
> aux1:=multiply(dfx,gamm);
```

aux1 :=

$$\begin{aligned} & \left[-Rs \%1 \gamma_{11} + w \gamma_{21} + \frac{Rs \gamma_{31}}{Lrl}, -Rs \%1 \gamma_{12} + w \gamma_{22} + \frac{Rs \gamma_{32}}{Lrl}, \right. \\ & -Rs \%1 \gamma_{13} + w \gamma_{23} + \frac{Rs \gamma_{33}}{Lrl}, -Rs \%1 \gamma_{14} + w \gamma_{24} + \frac{Rs \gamma_{34}}{Lrl}, -Rs \%1 \gamma_{15} + w \gamma_{25} + \frac{Rs \gamma_{35}}{Lrl} \\ & \left. , -Rs \%1 \gamma_{16} + w \gamma_{26} + \frac{Rs \gamma_{36}}{Lrl}, -Rs \%1 \gamma_{17} + w \gamma_{27} + \frac{Rs \gamma_{37}}{Lrl} \right] \\ & \left[-w \gamma_{11} - Rs \%2 \gamma_{21} + \frac{Rs \gamma_{41}}{Lrl}, -w \gamma_{12} - Rs \%2 \gamma_{22} + \frac{Rs \gamma_{42}}{Lrl}, \right. \\ & -w \gamma_{13} - Rs \%2 \gamma_{23} + \frac{Rs \gamma_{43}}{Lrl}, -w \gamma_{14} - Rs \%2 \gamma_{24} + \frac{Rs \gamma_{44}}{Lrl}, -w \gamma_{15} - Rs \%2 \gamma_{25} + \frac{Rs \gamma_{45}}{Lrl} \\ & \left. , -w \gamma_{16} - Rs \%2 \gamma_{26} + \frac{Rs \gamma_{46}}{Lrl}, -w \gamma_{17} - Rs \%2 \gamma_{27} + \frac{Rs \gamma_{47}}{Lrl} \right] \\ & \left[\frac{Rr \gamma_{11}}{Lrl} - \frac{Rr \gamma_{31}}{Lrl} + (w - wr) \gamma_{41} - fluxry \gamma_{51}, \frac{Rr \gamma_{12}}{Lrl} - \frac{Rr \gamma_{32}}{Lrl} + (w - wr) \gamma_{42} - fluxry \gamma_{52} \right. \\ & , \frac{Rr \gamma_{13}}{Lrl} - \frac{Rr \gamma_{33}}{Lrl} + (w - wr) \gamma_{43} - fluxry \gamma_{53}, \frac{Rr \gamma_{14}}{Lrl} - \frac{Rr \gamma_{34}}{Lrl} + (w - wr) \gamma_{44} - fluxry \gamma_{54} \\ & , \frac{Rr \gamma_{15}}{Lrl} - \frac{Rr \gamma_{35}}{Lrl} + (w - wr) \gamma_{45} - fluxry \gamma_{55}, \frac{Rr \gamma_{16}}{Lrl} - \frac{Rr \gamma_{36}}{Lrl} + (w - wr) \gamma_{46} - fluxry \gamma_{56} \\ & \left. , \frac{Rr \gamma_{17}}{Lrl} - \frac{Rr \gamma_{37}}{Lrl} + (w - wr) \gamma_{47} - fluxry \gamma_{57} \right] \\ & \left[\frac{Rr \gamma_{21}}{Lrl} + (-w + wr) \gamma_{31} - \frac{Rr \gamma_{41}}{Lrl} + fluxrx \gamma_{51}, \right. \\ & \frac{Rr \gamma_{22}}{Lrl} + (-w + wr) \gamma_{32} - \frac{Rr \gamma_{42}}{Lrl} + fluxrx \gamma_{52}, \\ & \left. \frac{Rr \gamma_{23}}{Lrl} + (-w + wr) \gamma_{33} - \frac{Rr \gamma_{43}}{Lrl} + fluxrx \gamma_{53}, \right. \end{aligned}$$

$$\frac{Rr \gamma_{24}}{Lrl} + (-w + wr) \gamma_{34} - \frac{Rr \gamma_{44}}{Lrl} + fluxrx \gamma_{54},$$

$$\frac{Rr \gamma_{25}}{Lrl} + (-w + wr) \gamma_{35} - \frac{Rr \gamma_{45}}{Lrl} + fluxrx \gamma_{55},$$

$$\frac{Rr \gamma_{26}}{Lrl} + (-w + wr) \gamma_{36} - \frac{Rr \gamma_{46}}{Lrl} + fluxrx \gamma_{56},$$

$$\frac{Rr \gamma_{27}}{Lrl} + (-w + wr) \gamma_{37} - \frac{Rr \gamma_{47}}{Lrl} + fluxrx \gamma_{57} \Big]$$

$$\left[\frac{3 P \%4 \gamma_{11}}{2 J} + \frac{3 P \%3 \gamma_{21}}{2 J} + \frac{3 P fluxsy \gamma_{31}}{2 J Lrl} - \frac{3 P fluxsx \gamma_{41}}{2 J Lrl} - \frac{\rho \gamma_{51}}{J}, \right.$$

$$\frac{3 P \%4 \gamma_{12}}{2 J} + \frac{3 P \%3 \gamma_{22}}{2 J} + \frac{3 P fluxsy \gamma_{32}}{2 J Lrl} - \frac{3 P fluxsx \gamma_{42}}{2 J Lrl} - \frac{\rho \gamma_{52}}{J},$$

$$\frac{3 P \%4 \gamma_{13}}{2 J} + \frac{3 P \%3 \gamma_{23}}{2 J} + \frac{3 P fluxsy \gamma_{33}}{2 J Lrl} - \frac{3 P fluxsx \gamma_{43}}{2 J Lrl} - \frac{\rho \gamma_{53}}{J},$$

$$\frac{3 P \%4 \gamma_{14}}{2 J} + \frac{3 P \%3 \gamma_{24}}{2 J} + \frac{3 P fluxsy \gamma_{34}}{2 J Lrl} - \frac{3 P fluxsx \gamma_{44}}{2 J Lrl} - \frac{\rho \gamma_{54}}{J},$$

$$\frac{3 P \%4 \gamma_{15}}{2 J} + \frac{3 P \%3 \gamma_{25}}{2 J} + \frac{3 P fluxsy \gamma_{35}}{2 J Lrl} - \frac{3 P fluxsx \gamma_{45}}{2 J Lrl} - \frac{\rho \gamma_{55}}{J},$$

$$\frac{3 P \%4 \gamma_{16}}{2 J} + \frac{3 P \%3 \gamma_{26}}{2 J} + \frac{3 P fluxsy \gamma_{36}}{2 J Lrl} - \frac{3 P fluxsx \gamma_{46}}{2 J Lrl} - \frac{\rho \gamma_{56}}{J},$$

$$\frac{3 P \%4 \gamma_{17}}{2 J} + \frac{3 P \%3 \gamma_{27}}{2 J} + \frac{3 P fluxsy \gamma_{37}}{2 J Lrl} - \frac{3 P fluxsx \gamma_{47}}{2 J Lrl} - \frac{\rho \gamma_{57}}{J} \Big]$$

$$\%1 := \frac{1}{Lrl} + \ln \left(\frac{a}{Fn} + \frac{b \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n}{fluxsx} \right)$$

$$\%2 := \frac{1}{Lrl} + \ln \left(\frac{a}{Fn} + \frac{b \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n}{fluxsy} \right)$$

$$\%3 := fluxsx \%2 - \ln \left(\frac{a fluxsx}{Fn} + b \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n \right) + \frac{fluxrx - fluxsx}{Lrl}$$

$$\%4 := \ln \left(\frac{a fluxsy}{Fn} + b \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n \right) - \frac{fluxry - fluxsy}{Lrl} - fluxsy \%1$$

> **dga := matadd(aux1,dfparam);**

dga :=

$$\left[-Rs \%2 \gamma_{11} + w \gamma_{21} + \frac{Rs \gamma_{31}}{Lrl} - \frac{fluxsx - fluxrx}{Lrl} - \%1, -Rs \%2 \gamma_{12} + w \gamma_{22} + \frac{Rs \gamma_{32}}{Lrl}, \right.$$

$$\begin{aligned}
& -R_s \%2 \gamma_{13} + w \gamma_{23} + \frac{R_s \gamma_{33}}{Lrl} + \frac{R_s (fluxsx - fluxrx)}{Lrl^2}, -R_s \%2 \gamma_{14} + w \gamma_{24} + \frac{R_s \gamma_{34}}{Lrl}, \\
& -R_s \%2 \gamma_{15} + w \gamma_{25} + \frac{R_s \gamma_{35}}{Lrl}, -R_s \%2 \gamma_{16} + w \gamma_{26} + \frac{R_s \gamma_{36}}{Lrl} - \frac{R_s In fluxsx}{Fn}, \\
& -R_s \%2 \gamma_{17} + w \gamma_{27} + \frac{R_s \gamma_{37}}{Lrl} - R_s In \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n \Big] \\
& \left[-w \gamma_{11} - R_s \%4 \gamma_{21} + \frac{R_s \gamma_{41}}{Lrl} - \frac{fluxsy - fluxry}{Lrl} - \%3, -w \gamma_{12} - R_s \%4 \gamma_{22} + \frac{R_s \gamma_{42}}{Lrl}, \right. \\
& -w \gamma_{13} - R_s \%4 \gamma_{23} + \frac{R_s \gamma_{43}}{Lrl} + \frac{R_s (fluxsy - fluxry)}{Lrl^2}, -w \gamma_{14} - R_s \%4 \gamma_{24} + \frac{R_s \gamma_{44}}{Lrl}, \\
& -w \gamma_{15} - R_s \%4 \gamma_{25} + \frac{R_s \gamma_{45}}{Lrl}, -w \gamma_{16} - R_s \%4 \gamma_{26} + \frac{R_s \gamma_{46}}{Lrl} - \frac{R_s In fluxsy}{Fn}, \\
& \left. -w \gamma_{17} - R_s \%4 \gamma_{27} + \frac{R_s \gamma_{47}}{Lrl} - R_s In \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n \right] \\
& \left[\frac{Rr \gamma_{11}}{Lrl} - \frac{Rr \gamma_{31}}{Lrl} + (w - wr) \gamma_{41} - fluxry \gamma_{51}, \right. \\
& \frac{Rr \gamma_{12}}{Lrl} - \frac{Rr \gamma_{32}}{Lrl} + (w - wr) \gamma_{42} - fluxry \gamma_{52} - \frac{fluxrx - fluxsx}{Lrl}, \\
& \frac{Rr \gamma_{13}}{Lrl} - \frac{Rr \gamma_{33}}{Lrl} + (w - wr) \gamma_{43} - fluxry \gamma_{53} + \frac{Rr (fluxrx - fluxsx)}{Lrl^2}, \\
& \frac{Rr \gamma_{14}}{Lrl} - \frac{Rr \gamma_{34}}{Lrl} + (w - wr) \gamma_{44} - fluxry \gamma_{54}, \frac{Rr \gamma_{15}}{Lrl} - \frac{Rr \gamma_{35}}{Lrl} + (w - wr) \gamma_{45} - fluxry \gamma_{55}, \\
& \left. \frac{Rr \gamma_{16}}{Lrl} - \frac{Rr \gamma_{36}}{Lrl} + (w - wr) \gamma_{46} - fluxry \gamma_{56}, \frac{Rr \gamma_{17}}{Lrl} - \frac{Rr \gamma_{37}}{Lrl} + (w - wr) \gamma_{47} - fluxry \gamma_{57} \right] \\
& \left[\frac{Rr \gamma_{21}}{Lrl} + (-w + wr) \gamma_{31} - \frac{Rr \gamma_{41}}{Lrl} + fluxrx \gamma_{51}, \right. \\
& \frac{Rr \gamma_{22}}{Lrl} + (-w + wr) \gamma_{32} - \frac{Rr \gamma_{42}}{Lrl} + fluxrx \gamma_{52} - \frac{fluxry - fluxsy}{Lrl}, \\
& \frac{Rr \gamma_{23}}{Lrl} + (-w + wr) \gamma_{33} - \frac{Rr \gamma_{43}}{Lrl} + fluxrx \gamma_{53} + \frac{Rr (fluxry - fluxsy)}{Lrl^2}, \\
& \frac{Rr \gamma_{24}}{Lrl} + (-w + wr) \gamma_{34} - \frac{Rr \gamma_{44}}{Lrl} + fluxrx \gamma_{54}, \\
& \frac{Rr \gamma_{25}}{Lrl} + (-w + wr) \gamma_{35} - \frac{Rr \gamma_{45}}{Lrl} + fluxrx \gamma_{55}, \\
& \left. \frac{Rr \gamma_{26}}{Lrl} + (-w + wr) \gamma_{36} - \frac{Rr \gamma_{46}}{Lrl} + fluxrx \gamma_{56}, \right]
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{Rr \gamma_{27}}{Lrl} + (-w + wr) \gamma_{37} - \frac{Rr \gamma_{47}}{Lrl} + fluxrx \gamma_{57} \right]$$

$$\left[\begin{aligned} & \frac{3 P \%6 \gamma_{11}}{2 J} + \frac{3 P \%5 \gamma_{21}}{2 J} + \frac{3 P fluxsy \gamma_{31}}{2 J Lrl} - \frac{3 P fluxsx \gamma_{41}}{2 J Lrl} - \frac{\rho \gamma_{51}}{J}, \\ & \frac{3 P \%6 \gamma_{12}}{2 J} + \frac{3 P \%5 \gamma_{22}}{2 J} + \frac{3 P fluxsy \gamma_{32}}{2 J Lrl} - \frac{3 P fluxsx \gamma_{42}}{2 J Lrl} - \frac{\rho \gamma_{52}}{J}, \frac{3 P \%6 \gamma_{13}}{2 J} \\ & + \frac{3 P \%5 \gamma_{23}}{2 J} + \frac{3 P fluxsy \gamma_{33}}{2 J Lrl} - \frac{3 P fluxsx \gamma_{43}}{2 J Lrl} - \frac{\rho \gamma_{53}}{J} \\ & + \frac{3 P \left(\frac{fluxsx (fluxry - fluxsy)}{Lrl^2} - \frac{fluxsy (fluxrx - fluxsx)}{Lrl^2} \right)}{2 J}, \frac{3 P \%6 \gamma_{14}}{2 J} + \frac{3 P \%5 \gamma_{24}}{2 J} \\ & + \frac{3 P fluxsy \gamma_{34}}{2 J Lrl} - \frac{3 P fluxsx \gamma_{44}}{2 J Lrl} - \frac{\rho \gamma_{54}}{J} \\ & - \frac{\frac{3}{2} P \left(fluxsx \left(\%3 - \frac{fluxry - fluxsy}{Lrl} \right) - fluxsy \left(\%1 - \frac{fluxrx - fluxsx}{Lrl} \right) \right) - \rho wr - Mc}{J^2}, \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned} & \frac{3 P \%6 \gamma_{15}}{2 J} + \frac{3 P \%5 \gamma_{25}}{2 J} + \frac{3 P fluxsy \gamma_{35}}{2 J Lrl} - \frac{3 P fluxsx \gamma_{45}}{2 J Lrl} - \frac{\rho \gamma_{55}}{J} - \frac{wr}{J}, \\ & \frac{3 P \%6 \gamma_{16}}{2 J} + \frac{3 P \%5 \gamma_{26}}{2 J} + \frac{3 P fluxsy \gamma_{36}}{2 J Lrl} - \frac{3 P fluxsx \gamma_{46}}{2 J Lrl} - \frac{\rho \gamma_{56}}{J}, \frac{3 P \%6 \gamma_{17}}{2 J} \\ & + \frac{3 P \%5 \gamma_{27}}{2 J} + \frac{3 P fluxsy \gamma_{37}}{2 J Lrl} - \frac{3 P fluxsx \gamma_{47}}{2 J Lrl} - \frac{\rho \gamma_{57}}{J} \\ & + \frac{3 P \left(fluxsx \operatorname{In} \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n - fluxsy \operatorname{In} \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n \right)}{2 J} \end{aligned}$$

$$\%1 := \operatorname{In} \left(\frac{a fluxsx}{Fn} + b \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n \right)$$

$$\%2 := \frac{1}{Lrl} + \operatorname{In} \left(\frac{a}{Fn} + \frac{b \left(\frac{fluxsx}{Fn} \right)^n}{fluxsx} \right)$$

$$\%3 := \operatorname{In} \left(\frac{a fluxsy}{Fn} + b \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n \right)$$

$$\%4 := \frac{1}{Lrl} + \operatorname{In} \left(\frac{a}{Fn} + \frac{b \left(\frac{fluxsy}{Fn} \right)^n}{fluxsy} \right)$$

$$\%5 := \text{fluxsx} \%4 - \%1 + \frac{\text{fluxrx} - \text{fluxsx}}{\text{Lrl}}$$

$$\%6 := \%3 - \frac{\text{fluxry} - \text{fluxsy}}{\text{Lrl}} - \text{fluxsy} \%2$$

> **aux2:=multiply(dgx,gamm);**

aux2 :=

$$\left[\%1 \gamma_{11} - \frac{\gamma_{31}}{\text{Lrl}}, \%1 \gamma_{12} - \frac{\gamma_{32}}{\text{Lrl}}, \%1 \gamma_{13} - \frac{\gamma_{33}}{\text{Lrl}}, \%1 \gamma_{14} - \frac{\gamma_{34}}{\text{Lrl}}, \%1 \gamma_{15} - \frac{\gamma_{35}}{\text{Lrl}}, \right. \\ \left. \%1 \gamma_{16} - \frac{\gamma_{36}}{\text{Lrl}}, \%1 \gamma_{17} - \frac{\gamma_{37}}{\text{Lrl}} \right]$$

$$\left[\%2 \gamma_{21} - \frac{\gamma_{41}}{\text{Lrl}}, \%2 \gamma_{22} - \frac{\gamma_{42}}{\text{Lrl}}, \%2 \gamma_{23} - \frac{\gamma_{43}}{\text{Lrl}}, \%2 \gamma_{24} - \frac{\gamma_{44}}{\text{Lrl}}, \%2 \gamma_{25} - \frac{\gamma_{45}}{\text{Lrl}}, \right. \\ \left. \%2 \gamma_{26} - \frac{\gamma_{46}}{\text{Lrl}}, \%2 \gamma_{27} - \frac{\gamma_{47}}{\text{Lrl}} \right]$$

$$\left[\frac{3}{2} P \%4 \gamma_{11} + \frac{3}{2} P \%3 \gamma_{21} + \frac{3 P \text{fluxsy} \gamma_{31}}{2 \text{Lrl}} - \frac{3 P \text{fluxsx} \gamma_{41}}{2 \text{Lrl}}, \right.$$

$$\frac{3}{2} P \%4 \gamma_{12} + \frac{3}{2} P \%3 \gamma_{22} + \frac{3 P \text{fluxsy} \gamma_{32}}{2 \text{Lrl}} - \frac{3 P \text{fluxsx} \gamma_{42}}{2 \text{Lrl}},$$

$$\frac{3}{2} P \%4 \gamma_{13} + \frac{3}{2} P \%3 \gamma_{23} + \frac{3 P \text{fluxsy} \gamma_{33}}{2 \text{Lrl}} - \frac{3 P \text{fluxsx} \gamma_{43}}{2 \text{Lrl}},$$

$$\frac{3}{2} P \%4 \gamma_{14} + \frac{3}{2} P \%3 \gamma_{24} + \frac{3 P \text{fluxsy} \gamma_{34}}{2 \text{Lrl}} - \frac{3 P \text{fluxsx} \gamma_{44}}{2 \text{Lrl}},$$

$$\frac{3}{2} P \%4 \gamma_{15} + \frac{3}{2} P \%3 \gamma_{25} + \frac{3 P \text{fluxsy} \gamma_{35}}{2 \text{Lrl}} - \frac{3 P \text{fluxsx} \gamma_{45}}{2 \text{Lrl}},$$

$$\frac{3}{2} P \%4 \gamma_{16} + \frac{3}{2} P \%3 \gamma_{26} + \frac{3 P \text{fluxsy} \gamma_{36}}{2 \text{Lrl}} - \frac{3 P \text{fluxsx} \gamma_{46}}{2 \text{Lrl}},$$

$$\left. \frac{3}{2} P \%4 \gamma_{17} + \frac{3}{2} P \%3 \gamma_{27} + \frac{3 P \text{fluxsy} \gamma_{37}}{2 \text{Lrl}} - \frac{3 P \text{fluxsx} \gamma_{47}}{2 \text{Lrl}} \right]$$

$$\%1 := \frac{1}{\text{Lrl}} + \ln \left(\frac{a}{\text{Fn}} + \frac{b \left(\frac{\text{fluxsx}}{\text{Fn}} \right)^n}{\text{fluxsx}} \right)$$

$$\%2 := \frac{1}{\text{Lrl}} + \ln \left(\frac{a}{\text{Fn}} + \frac{b \left(\frac{\text{fluxsy}}{\text{Fn}} \right)^n}{\text{fluxsy}} \right)$$

$$\%3 := \text{fluxsx} \%2 - \ln \left(\frac{a \text{fluxsx}}{\text{Fn}} + b \left(\frac{\text{fluxsx}}{\text{Fn}} \right)^n \right) + \frac{\text{fluxrx} - \text{fluxsx}}{\text{Lrl}}$$

$$\%4 := \ln\left(\frac{a \text{ fluxsy}}{Fn} + b\left(\frac{\text{fluxsy}}{Fn}\right)^n\right) - \frac{\text{fluxry} - \text{fluxsy}}{Lrl} - \text{fluxsy} \%1$$

> **sensali := matadd(aux2, dgparam);**

sensali :=

$$\left[\%1 \gamma_{11} - \frac{\gamma_{31}}{Lrl}, \%1 \gamma_{12} - \frac{\gamma_{32}}{Lrl}, \%1 \gamma_{13} - \frac{\gamma_{33}}{Lrl} + \frac{\text{fluxrx} - \text{fluxsx}}{Lrl^2}, \%1 \gamma_{14} - \frac{\gamma_{34}}{Lrl}, \right.$$

$$\left. \%1 \gamma_{15} - \frac{\gamma_{35}}{Lrl}, \%1 \gamma_{16} - \frac{\gamma_{36}}{Lrl} + \frac{\ln \text{ fluxsx}}{Fn}, \%1 \gamma_{17} - \frac{\gamma_{37}}{Lrl} + \ln\left(\frac{\text{fluxsx}}{Fn}\right)^n \right]$$

$$\left[\%2 \gamma_{21} - \frac{\gamma_{41}}{Lrl}, \%2 \gamma_{22} - \frac{\gamma_{42}}{Lrl}, \%2 \gamma_{23} - \frac{\gamma_{43}}{Lrl} + \frac{\text{fluxry} - \text{fluxsy}}{Lrl^2}, \%2 \gamma_{24} - \frac{\gamma_{44}}{Lrl}, \right.$$

$$\left. \%2 \gamma_{25} - \frac{\gamma_{45}}{Lrl}, \%2 \gamma_{26} - \frac{\gamma_{46}}{Lrl} + \frac{\ln \text{ fluxsy}}{Fn}, \%2 \gamma_{27} - \frac{\gamma_{47}}{Lrl} + \ln\left(\frac{\text{fluxsy}}{Fn}\right)^n \right]$$

$$\left[\frac{3}{2} P \%4 \gamma_{11} + \frac{3}{2} P \%3 \gamma_{21} + \frac{3 P \text{ fluxsy} \gamma_{31}}{2 Lrl} - \frac{3 P \text{ fluxsx} \gamma_{41}}{2 Lrl}, \right.$$

$$\left. \frac{3}{2} P \%4 \gamma_{12} + \frac{3}{2} P \%3 \gamma_{22} + \frac{3 P \text{ fluxsy} \gamma_{32}}{2 Lrl} - \frac{3 P \text{ fluxsx} \gamma_{42}}{2 Lrl}, \frac{3}{2} P \%4 \gamma_{13} + \frac{3}{2} P \%3 \gamma_{23} \right.$$

$$\left. + \frac{3 P \text{ fluxsy} \gamma_{33}}{2 Lrl} - \frac{3 P \text{ fluxsx} \gamma_{43}}{2 Lrl} + \frac{3}{2} P \left(\frac{\text{fluxsx} (\text{fluxry} - \text{fluxsy})}{Lrl^2} - \frac{\text{fluxsy} (\text{fluxrx} - \text{fluxsx})}{Lrl^2} \right), \right.$$

$$\left. \frac{3}{2} P \%4 \gamma_{14} + \frac{3}{2} P \%3 \gamma_{24} + \frac{3 P \text{ fluxsy} \gamma_{34}}{2 Lrl} - \frac{3 P \text{ fluxsx} \gamma_{44}}{2 Lrl}, \right.$$

$$\left. \frac{3}{2} P \%4 \gamma_{15} + \frac{3}{2} P \%3 \gamma_{25} + \frac{3 P \text{ fluxsy} \gamma_{35}}{2 Lrl} - \frac{3 P \text{ fluxsx} \gamma_{45}}{2 Lrl}, \right.$$

$$\left. \frac{3}{2} P \%4 \gamma_{16} + \frac{3}{2} P \%3 \gamma_{26} + \frac{3 P \text{ fluxsy} \gamma_{36}}{2 Lrl} - \frac{3 P \text{ fluxsx} \gamma_{46}}{2 Lrl}, \frac{3}{2} P \%4 \gamma_{17} + \frac{3}{2} P \%3 \gamma_{27} \right.$$

$$\left. + \frac{3 P \text{ fluxsy} \gamma_{37}}{2 Lrl} - \frac{3 P \text{ fluxsx} \gamma_{47}}{2 Lrl} + \frac{3}{2} P \left(\text{fluxsx} \ln\left(\frac{\text{fluxsy}}{Fn}\right)^n - \text{fluxsy} \ln\left(\frac{\text{fluxsx}}{Fn}\right)^n \right) \right]$$

$$\%1 := \frac{1}{Lrl} + \ln\left(\frac{a}{Fn} + \frac{b\left(\frac{\text{fluxsx}}{Fn}\right)^n}{\text{fluxsx}}\right)$$

$$\%2 := \frac{1}{Lrl} + \ln\left(\frac{a}{Fn} + \frac{b\left(\frac{\text{fluxsy}}{Fn}\right)^n}{\text{fluxsy}}\right)$$

$$\%3 := \text{fluxsx} \%2 - \ln\left(\frac{a \text{ fluxsx}}{Fn} + b\left(\frac{\text{fluxsx}}{Fn}\right)^n\right) + \frac{\text{fluxrx} - \text{fluxsx}}{Lrl}$$

$$\%4 := \ln\left(\frac{a \text{ fluxsy}}{Fn} + b\left(\frac{\text{fluxsy}}{Fn}\right)^n\right) - \frac{\text{fluxry} - \text{fluxsy}}{Lrl} - \text{fluxsy} \%1$$

> **fortran(dga, optimized, filename=dsens22);**

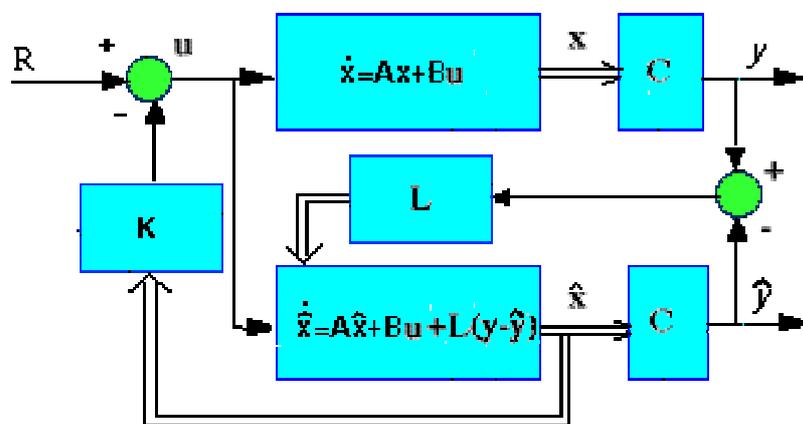
```
[ > fortran(sensali,optimized,filename=dsens22);  
[ >
```

ANEXO II. CALCULO DE LA GANANCIA DEL OBSERVADOR. FÓRMULA DE ACKERMANN

$$K = P(A(\omega_r)) \cdot W_0^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (A^2 - (p_1 + p_2) \cdot A + p_1 \cdot p_2 \cdot I) \cdot W_0^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} k_{sx} + j \cdot k_{sy} \\ k_{rx} + j \cdot k_{ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s & 0 \\ 0 & r_r \end{pmatrix}^{-1} \cdot K$$

$$W_0 = \begin{pmatrix} C \\ C \cdot A \end{pmatrix}$$



ANEXO II. CÁLCULO DE LA GANANCIA DEL OBSERVADOR. FÓRMULA DE ACKERMANN

Relaciones básicas

$$K = P(A(\omega_r)) \cdot W_0^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (A^2 - (p_1 + p_2) \cdot A + p_1 \cdot p_2 \cdot I) \cdot W_0^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$k = \begin{pmatrix} k_{sx} + j \cdot k_{sy} \\ k_{rx} + k_{ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s & 0 \\ 0 & r_r \end{pmatrix}^{-1} \cdot K \quad (2)$$

$$W_0 = \begin{pmatrix} C \\ C \cdot A \end{pmatrix} \quad (3)$$

en las páginas que siguen se encuentran los cálculos desarrollados a partir de las utilidades que ofrece el programa MAPLE RV.0 para la manipulación algebraica

```

> with(linalg):Rs:=0.369;Rr:=0.857;Lrl:=0.00736;Lm:=0.0207;c1:=300
0;c2:=2250000;omegar:=314;

Rs := .369
Rr := .857
Lrl := .00736
Lm := .0207
c1 := 3000
c2 := 2250000
omegar := 314

>
> A:=matrix(2,2,[[ -Rs*((1/Lrl)+(1/Lm)),Rs/Lrl],[Rr/Lrl,(-Rr/Lrl)+I
*omegar]]);

A :=  $\begin{bmatrix} -67.96195650 & 50.13586957 \\ 116.4402174 & -116.4402174 + 314. I \end{bmatrix}$ 

> C:=matrix(1,2,[[ (1/Lrl)+(1/Lm),-1/Lrl]]);

C := [184.1787439 -135.8695652]

>
> aux1:=multiply(C,A);

aux1 := [-28337.82949 25054.64319 - 42663.04347 I]

> Wo:=matrix(2,2,[[ (1/Lrl)+(1/Lm),-1/Lrl],[-(1/Lrl+1/Lm)^2*Rs-1/Lr
l^2*Rr, (1/Lrl+1/Lm)*Rs/Lrl-1/Lrl*(-Rr/Lrl+I*omegar)]]);

Wo :=  $\begin{bmatrix} 184.1787439 & -135.8695652 \\ -28337.82949 & 25054.64319 - 42663.04347 I \end{bmatrix}$ 

>
> Woinv:=inverse(Wo);

Woinv :=  $\begin{bmatrix} .005685857406 + .002635533073 I & .1666114720 \cdot 10^{-5} + .00001712937016 I \\ .0003474955909 + .003572611498 I & .2258511064 \cdot 10^{-5} + .00002321981288 I \end{bmatrix}$ 

> aux2:=matrix(2,1,[[0],[1]]);

aux2 :=  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 

> aux3:=multiply(Woinv,aux2);

aux3 :=  $\begin{bmatrix} .1666114720 \cdot 10^{-5} + .00001712937016 I \\ .2258511064 \cdot 10^{-5} + .00002321981288 I \end{bmatrix}$ 

>
>
> aux5:=multiply(A,A);

aux5 :=  $\begin{bmatrix} 10456.65908 & -9245.163339 + 15742.66304 I \\ -21471.82922 + 36562.22826 I & -79199.84422 - 73124.45653 I \end{bmatrix}$ 

> aux6:=scalarmul(A,c1);

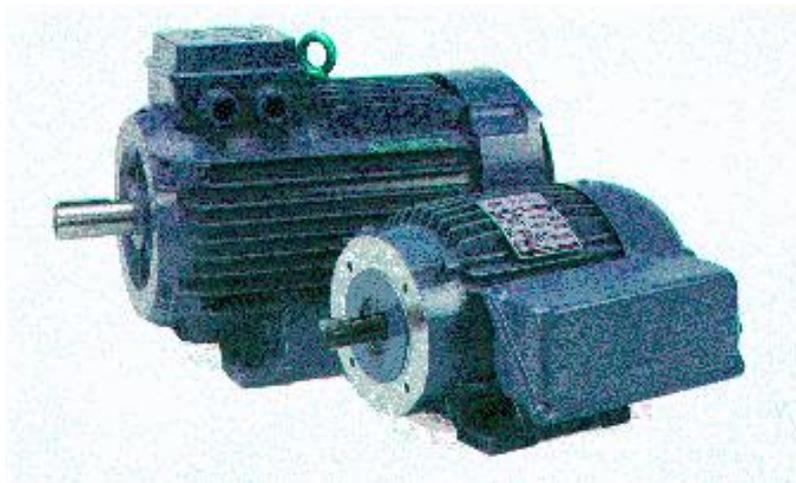
```

```

[
    aux6 := [ -203885.8695      150407.6087
              349320.6522  -349320.6522 + 942000. I ]
[ > aux7 := scalarmul([ [1,0], [0,1] ], c2);
    aux7 := [ 2250000      0
              0  2250000 ]
[ > aux8 := matadd(aux5, aux6, aux7);
    aux8 := [ -193429.2104      141162.4454 + 15742.66304 I
              327848.8230 + 36562.22826 I  -428520.4964 + 868875.5435 I ]
[ > K := multiply(aux8, aux3);
    K := [ -.3690000000 + .2 10^-8 I
           -21.22300001 - 2.311040001 I ]
[ >
[ >

```

ANEXO III. MÁQUINAS ENSAYADAS



ANEXO III. MÁQUINAS ENSAYADAS

<i>Características de las máquinas ensayadas.</i>	2
<i>Ensayos en vacío y cortocircuito a frecuencia nominal</i>	2
<i>Máquina n°1</i>	2
<i>Máquina n°2</i>	3
<i>Máquina n°3</i>	4
<i>Ensayo a rotor frenado realizado a frecuencia de deslizamiento. Máquina n°2.</i>	5
<i>Ensayo en carga. Máquina n°2</i>	7
<i>Ficha del ensayo</i>	9

Características de las máquinas ensayadas.

- 1) 1.5 kW; 220 / 380 V; 6.4 / 3.7 A; $\cos\phi = 0.85$; 1420 min^{-1} ; clase F; $J = 0.0105 \text{ kgm}^2$; Δ
- 2) 7.5 kW; 220 / 380 V; 27 / 15.6 A; $\cos\phi = 0.85$; 1450 min^{-1} ; clase F; $J = 0.076 \text{ kgm}^2$; Δ
- 3) 22 kW; 220 / 380 V; 74 / 43 A; $\cos\phi = 0.85$; 1450 min^{-1} ; clase F; $J = 0.251 \text{ kgm}^2$; Y

Ensayos en vacío y cortocircuito a frecuencia nominal.

Determinación del flujo estático a partir del ensayo en vacío y del flujo rotórico a partir del ensayo en cortocircuito

Máquina nº1

Tabla 1. Ensayo en vacío. Máquina nº1

U _s	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
I _s	1.03	0.99	1.01	1.06	1.14	1.23	1.33	1.46	1.58	1.71	1.84	2.00	2.19	2.40
U _s	190	200	210	220	230	240	250	260						
I _s	2.80	3.30	3.97	4.76	5.86	7.25	8.61	10.3						

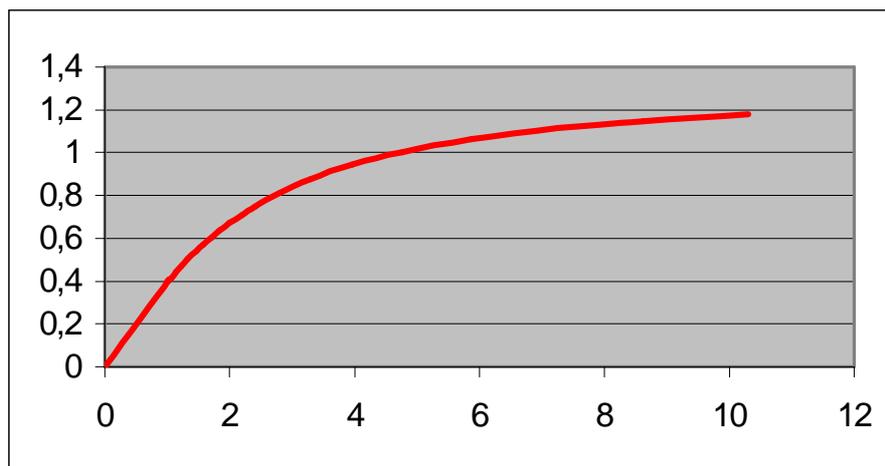


Figura 1. Flujo estático como función de la corriente estática. Máquina nº1

Tabla 2. Ensayo a rotor frenado. Máquina nº1

Us	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110			
Is	1.22	2.24	3.42	4.95	6.26	7.36	8.63	9.91	10.9	11.7	12.6			

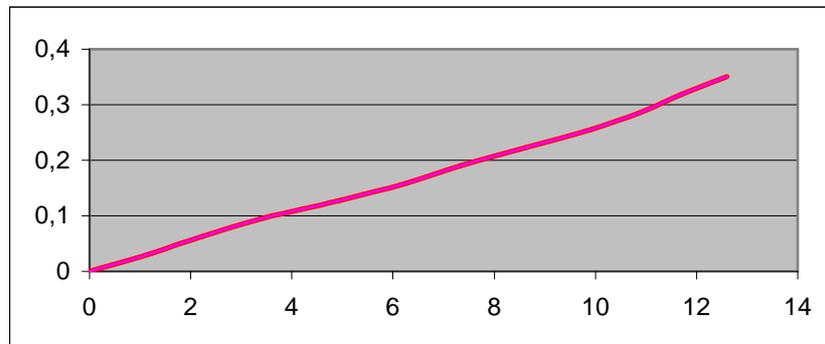


Figura 2. Flujo estático como función de la corriente estática. Máquina nº1

Máquina nº2

Tabla 3. Ensayo en vacío. Máquina nº2

Us	79	89	100	111	120	129	141	151	160	168	180	191	200	211
Is	4.00	4.30	4.64	5.00	5.30	5.60	6.19	6.65	7.17	7.58	8.40	9.30	10.4	12.3
Us	220	232	240	250	262									
Is	14.4	17.5	20.1	23.7	28.9									

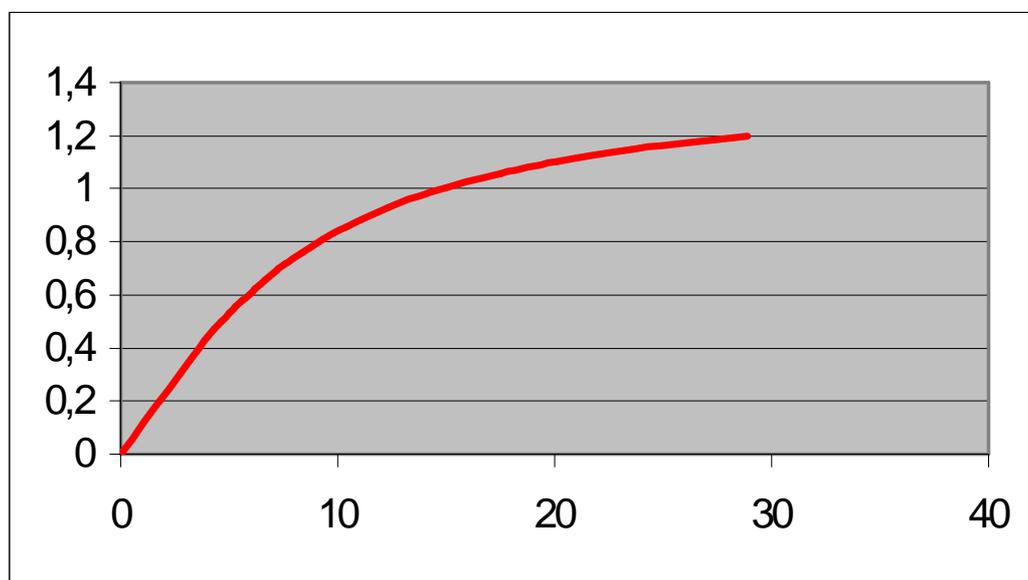


Figura 3. Flujo estático como función de la corriente estática. Máquina nº2

Tabla 4. Ensayo a rotor frenado. Máquina nº2

Us	22.6	30.5	40.5	50.8	61.9	71.0	81.1							
Is	10.5	16.9	25.4	34.7	45.0	53.5	62.5							

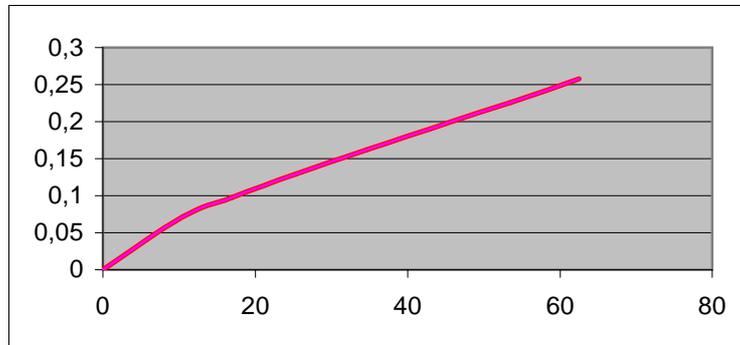


Figura .4. Flujo estático como función de la corriente estática. Máquina nº2

Máquina nº3

Tabla 5. Ensayo en vacío. Máquina nº3

Us	119	149	171	192	217	231	252	269	286	300	318	335	348	363
Is	5.20	6.00	6.80	7.60	8.60	9.20	10.1	10.8	11.7	12.3	13.2	14.2	14.9	15.8
Us	377	390	401	414	429	440	450	458	470	480				
Is	16.9	18.1	19.2	20.8	23.1	25.2	27.8	29.2	32.0	34.0				

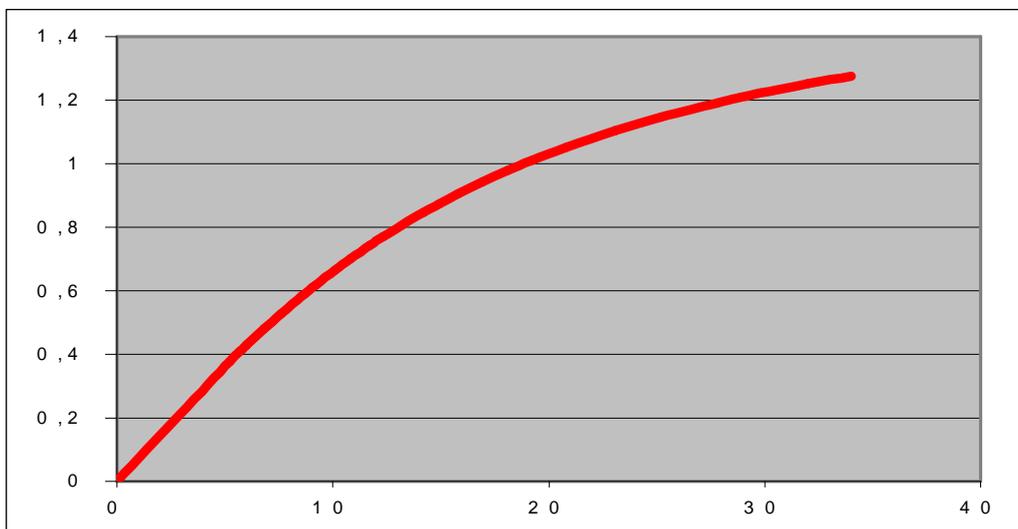


Figura 5. Flujo estático como función de la corriente estática. Máquina nº3

Tabla 6. Ensayo a rotor frenado. Máquina nº3

Us	44.1	54.1	64.6	75.0	87.9	95.7	107	117	129	139	150			
Is	17.5	23.5	30.2	36.8	45.3	50.5	58.2	65.2	74.0	80.7	88.4			

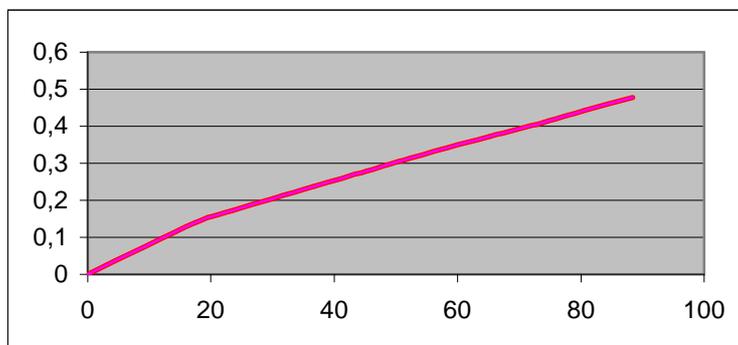


Figura 6. Flujo estático como función de la corriente estática. Máquina nº3

Ensayo a rotor frenado realizado a frecuencia de deslizamiento. Máquina nº2.

Tabla 7. Ensayo a rotor frenado. Máquina nº3. Frecuencia de deslizamiento

Us	5.66	6.36	15.56	19.80	21.92
Is	7.07	7.42	16.97	22.63	22.98

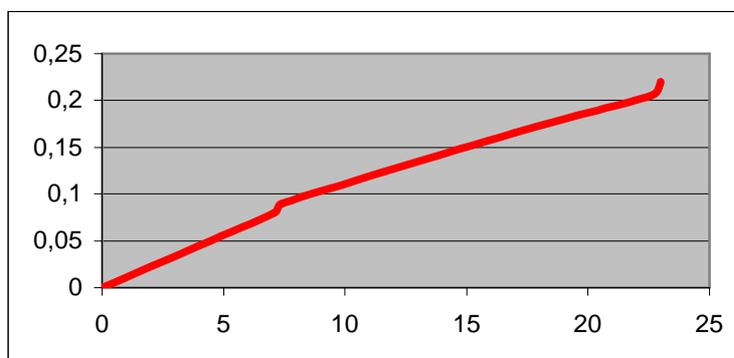


Figura 7. Flujo estático como función de la corriente estática. Máquina nº2

Las gráficas que siguen muestran la tensión aplicada y la corriente que circula por una fase del estator. Obsérvese que es prácticamente sinusoidal.

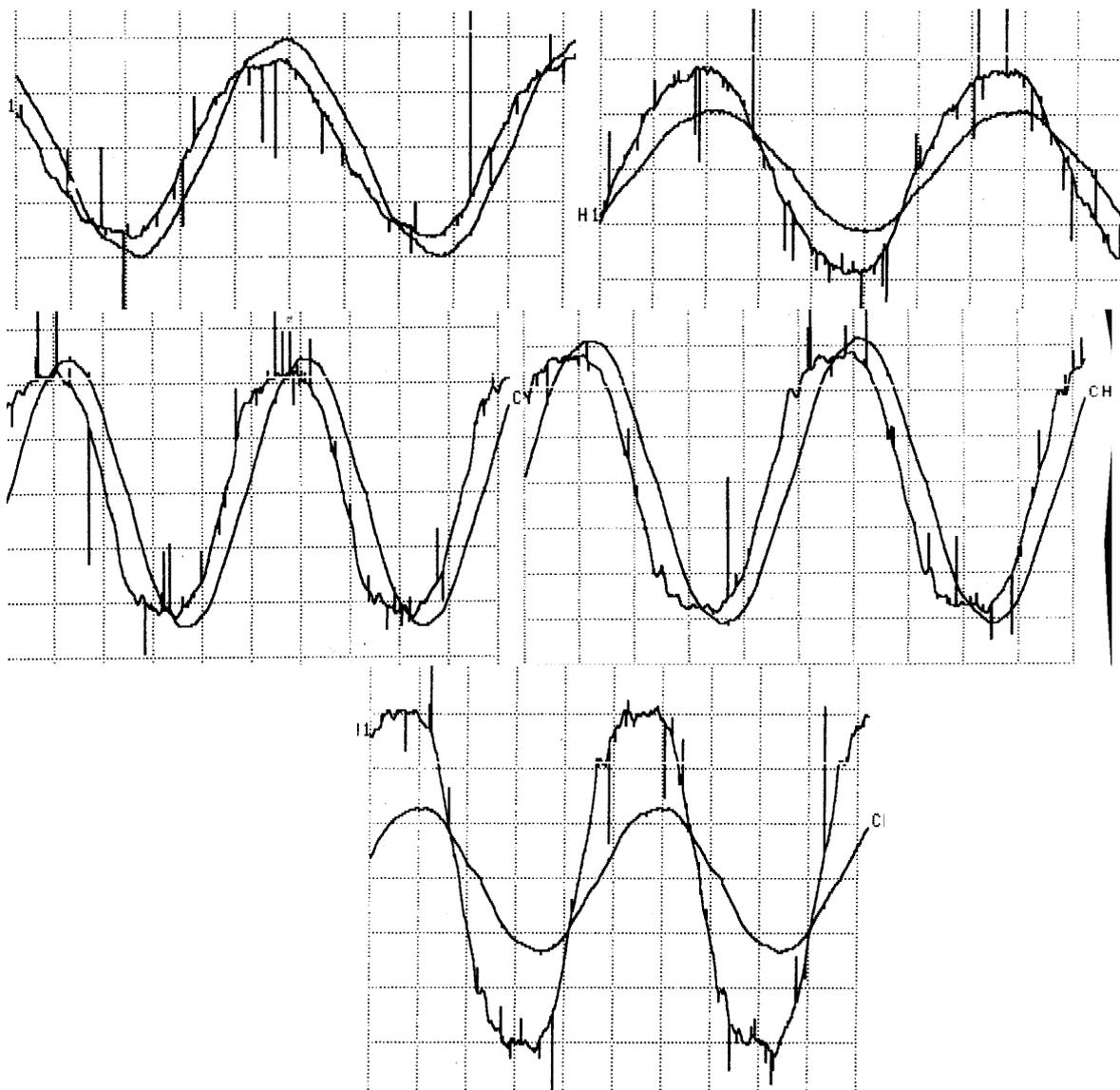


Figura 7. Ensayo a rotor frenado. Registro oscilográfico de Tensión aplicada y corriente estática. Escalas de izquierda a derecha y de arriba abajo:

5V/div; 5 A/div; 50 ms/div	5V/div; 10 A/div; 50 ms/div
10V/div; 10 A/div; 20 ms/div	10V/div; 10 A/div; 20 ms/div
10V/div; 25 A/div; 20 ms/div	

Ensayo en carga. Máquina nº2

Tabla 8. Ensayo en carga. Máquina nº2. Método de los 3 vatímetros.

Nº	Van	Vbn	Vcn	Ia	Ib	Ic	W1	W2	W3	N	Factor T.I.	Escala vatímetro
1	238.7	241	238.4	4.58	4.87	4.66	28.5	18	12.5	1498	2	10
2	237.6	240.5	237.4	5.14	5.45	5.18	66	67	63	1475	2	10
3	235.6	238	235.4	3.14	3.26	3.13	49	51	46	1461	4	10
4	233.5	235.9	233.6	4.78	4.83	4.62	89	90	85	1413	4	10
5	232.8	235	232.8	5.9	6.01	5.79	119	119	118	1373	4	10
6	232.6	235.1	232.8	2.41	2.5	2.44	50	51	48	1368	10	10
7	(V)	(V)	(V)	(A)	(A)	(A)	(div)	(div)	(div)	(min ⁻¹)	---	(W/div)

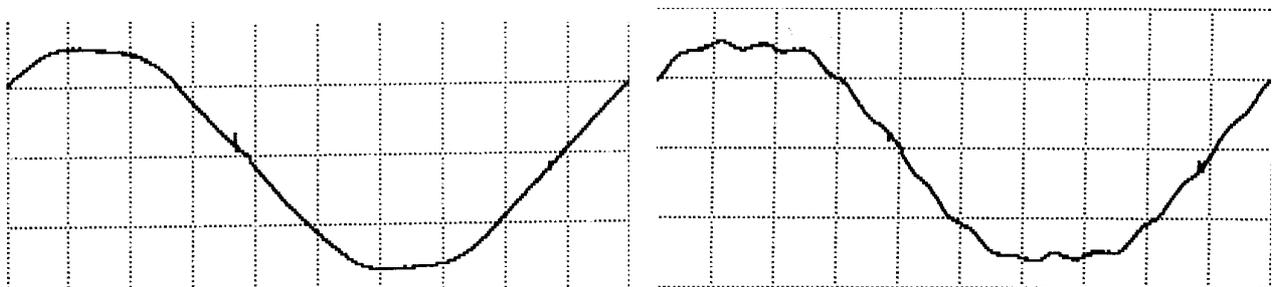


Figura 8. Tensión fase neutro con y sin conexión del neutro de la máquina al neutro de la red. 200 V/div; 2 ms/div. Obsérvese que el valor máximo de la onda no varía

Las gráficas que siguen muestran la tensión aplicada (fase-neutro) y la corriente que circula por la fase correspondiente del estator.

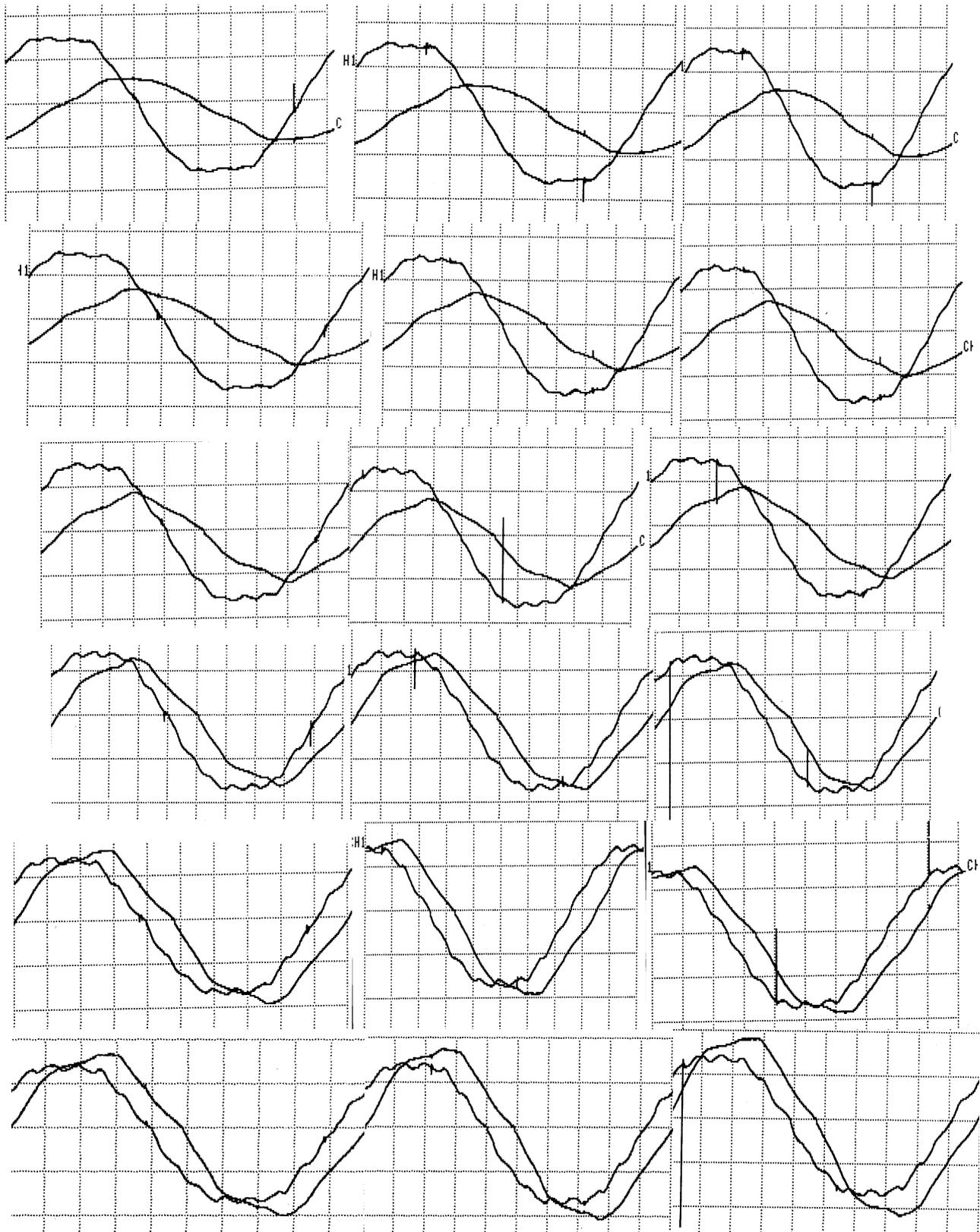
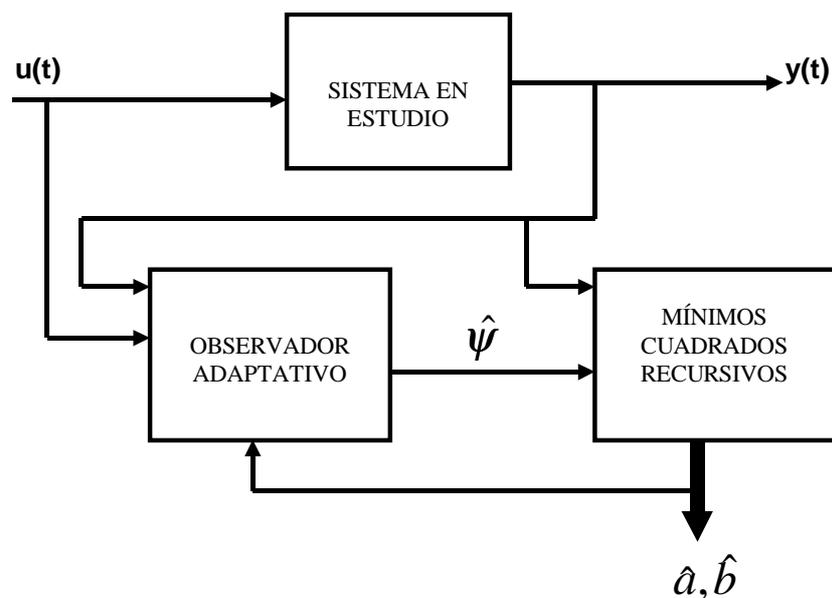


Figura 9. Tensión fase neutro y corriente de fase estática. Cada fila corresponde a un punto de las medidas de la tabla 8. De izquierda a derecha se muestran las representaciones para los valores correspondientes a las fases a, b, c respectivamente. Escalas: 200V/div; 20 A/div; 2 ms/div

Ficha del ensayo

- Temperatura ambiente: 21 °C
 - Vatímetros Kainos 24-60-120-240 V / 1 – 5 A clase 0.5
 - Transformadores de intensidad Norma; 5-10-20-50-100 A/5 A clase 0.2
 - Voltímetros Kainos 120-240-360 V clase 0.5
 - Amperímetros Kainos 1-2.5-5 A clase 0.5
 - Puente de Thompson-Wheatstone clase 0.2
 - Fuente de alterna ajustable: regulador de inducción 4.4 – 440 V /80 A
 - Medida de velocidad a partir de lámpara estroboscópica.
-
- El ensayo a frecuencia de deslizamiento se ha realizado a partir de la tensión generada mediante una máquina síncrona de 25 kVA; 220 /380 V arrastrada a partir de una máquina asíncrona alimentada mediante un ondulator PWM con control de velocidad en lazo cerrado.

ANEXO IV. EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS RECURSIVOS. APLICACIONES



$$\hat{\theta}(N+1) = \hat{\theta}(N) + K(N) \cdot [y(N+1) - \varphi(N+1) \cdot \hat{\theta}(N)]$$
$$K(N) = P(N) \cdot \varphi^T(N+1) \cdot [I + \varphi(N+1) \cdot P(N) \cdot \varphi^T(N+1)]^{-1}$$
$$P(N+1) = P(N) - K(N) \cdot \varphi(N+1) \cdot P(N)$$

ANEXO 4. EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS RECURSIVOS. APLICACIONES

<i>EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS RECURSIVOS. APLICACIONES</i>	2
<i>Caracterización en línea.</i>	2
<i>Determinación de parámetros</i>	3
<i>Caso 1: $N = n_p$</i>	3
<i>Caso 2: $N \neq n_p$</i>	3
<i>Método de los mínimos cuadrados</i>	4
<i>Estimación Recursiva de Mínimos Cuadrados</i>	5
<i>Restricciones al método</i>	7
<i>Aplicación al caso de un transformador</i>	8
<i>Resultados de simulación.</i>	9
<i>Contrastación experimental. Aplicación al caso de transformador en vacío</i>	29
<i>Conclusiones</i>	34

EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS RECURSIVOS. APLICACIONES

Caracterización en línea.

La obtención de parámetros en servicio de un sistema dinámico puede ser planteada a partir de la consideración de un observador adaptativo, junto con un estimador recursivo de los parámetros considerados.

Si se considera un sistema definido a partir del siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, u, \theta, t) \\ y &= h(x, u, \theta, t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde u es la entrada (o entradas) aplicada, x el conjunto de variables de estado, y el conjunto de variables de salida y θ el conjunto de parámetros a encontrar, la solución adaptativa del problema lleva a la formulación de un algoritmo como el indicado en la figura que sigue, formado a partir de la consideración de un observador adaptativo para el sistema:

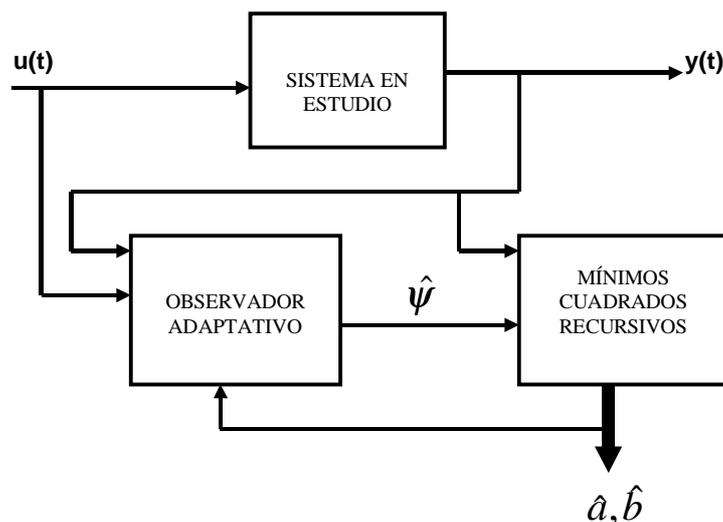


Figura 1. Disposición identificador+Observador.

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= f(\hat{x}, u, \hat{\theta}, t) \\ \hat{y} &= h(\hat{x}, u, \hat{\theta}, t) \end{aligned} \quad (2)$$

donde las variables con “^” indican valores observados. El algoritmo de adaptación de los parámetros desconocidos sigue una ley proporcional al error de medida:

$$\Delta\theta \propto y - \hat{y} \quad (3)$$

y bajo ciertas condiciones el algoritmo converge a un conjunto de valores correctos, resultando un error nulo o muy pequeño [Ljung 87], [Kulhavy 96], [Walter 97].

Determinación de parámetros

Se estudia el problema de la determinación de un vector θ de n_p parámetros (que a priori deben considerarse constantes en el tiempo) utilizando una serie N de medidas $y^T = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sobre la salida del sistema lineal:

$$y = \Phi \cdot \theta \quad (4)$$

siendo Φ una matriz de N filas y n_p columnas.

El problema se resuelve de diversas formas dependiendo de si el número N de medidas es igual, menor, o mayor, que el número de parámetros.

Caso 1: $N = n_p$

Suponiendo que Φ tenga rango completo el problema se resuelve de forma inmediata mediante:

$$\hat{\theta} = \Phi^{-1} \cdot y \quad (5)$$

Caso 2: $N \neq n_p$

En este caso no existe inversa, con lo cual la ecuación (2) no puede emplearse. Cabe distinguir dos situaciones:

a) $N < n_p$

Existen más incógnitas que ecuaciones. Por consiguiente existen infinitas soluciones. Sin embargo, seleccionando la estimación:

$$\theta^0 = \Phi^* \cdot y \quad (6)$$

siendo Φ^* la denominada “matriz inversa generalizada”, la solución obtenida es la de la mínima norma; es decir, verifica la relación:

$$\|\theta^0\| \leq \|\theta^1\| \quad (7)$$

siendo θ^1 cualquier otra solución.

La matriz inversa generalizada Φ^* es la única que verifica las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
\Phi \cdot \Phi^* \cdot \Phi &= \Phi \\
\Phi^* \cdot \Phi \cdot \Phi^* &= \Phi^* \\
(\Phi \cdot \Phi^*)^t &= \Phi \cdot \Phi^* \\
(\Phi^* \cdot \Phi)^t &= \Phi^* \cdot \Phi
\end{aligned} \tag{8}$$

Se demuestra también que, si las N filas ($N < n_p$) de Φ son linealmente independientes, la estimación se reduce a:

$$\theta^0 = \Phi^{*D} \cdot y = \Phi^T \cdot (\Phi \cdot \Phi^T)^{-1} \cdot y \tag{9}$$

La matriz Φ^{*D} se denomina inversa generalizada por la derecha, ya que verifica:

$$\Phi \cdot \Phi^{*D} = I \tag{10}$$

b) $N = n_p$

En este caso se tienen más ecuaciones que incógnitas. En general no existe solución. Sin embargo, se puede demostrar que si Φ es de rango máximo, el método de los mínimos cuadrados conduce a la solución:

$$\theta^0 = \Phi^{*I} \cdot y = (\Phi \cdot \Phi^T)^{-1} \cdot \Phi^T \cdot y \tag{11}$$

que establece una relación lineal entre estimación y medidas. La matriz:

$$\Phi^{*I} = (\Phi \cdot \Phi^T)^{-1} \cdot \Phi^T \tag{12}$$

se denomina inversa generalizada por la izquierda y verifica la ecuación:

$$\Phi^{*I} \cdot \Phi = I \tag{13}$$

En la sección que sigue se muestra que la estimación anterior (11) es la que proporciona el método de los mínimos cuadrados.

Método de los mínimos cuadrados

Se trata de obtener la estimación del conjunto de parámetros $\hat{\theta}$ que minimiza el índice:

$$J = \|\Phi \cdot \theta - y\|^2 \tag{14}$$

Derivando respecto a los parámetros e igualando a cero:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 2 \cdot (\Phi \cdot \theta - y)^T \cdot \Phi = 0 \tag{15}$$

despejando el vector incógnita se llega a:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \cdot \Phi)^{-1} \cdot \Phi^T \cdot y \quad (16)$$

Estimación Recursiva de Mínimos Cuadrados.

Habitualmente las medidas se toman de forma secuencial, resultando interesante el cálculo del vector de parámetros en función de diferentes valores del número de observaciones. Obviamente si se dispone de una estimación $\hat{\theta}(N)$ después de utilizar N observaciones, y se pretende conocer la estimación $\hat{\theta}(N+1)$ utilizando una observación más, en vez de tener que resolver nuevamente el problema aplicando (16), resulta conveniente emplear una estimación recurrente que corrija $\hat{\theta}(N)$ en función de la nueva observación.

Considérese la ecuación (4) después de N observaciones. Utilizando N como argumento se puede escribir:

$$Y(N) = \Phi(N) \cdot \hat{\theta}(N) \quad (17)$$

Siendo:

$$\Phi(N) = \begin{pmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \dots \\ \varphi(N) \end{pmatrix}; \quad Y(N) = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(N) \end{pmatrix} \quad (18)$$

La estimación en este instante puede expresarse como:

$$\hat{\theta}(N) = (\Phi^T(N) \cdot \Phi(N))^{-1} \cdot \Phi^T(N) \cdot y(N) \quad (19)$$

Si se plantea que en el instante actual se ha obtenido una medida más:

$$Y(N+1) = \Phi(N+1) \cdot \hat{\theta}(N+1) \quad (20)$$

$$\Phi(N+1) = \begin{pmatrix} \Phi(N) \\ \varphi(N+1) \end{pmatrix}; \quad Y(N+1) = \begin{pmatrix} Y(N) \\ y(N+1) \end{pmatrix} \quad (21)$$

La estimación resultante es:

$$\hat{\theta}(N+1) = (\Phi^T(N+1) \cdot \Phi(N+1))^{-1} \cdot \Phi^T(N+1) \cdot y(N+1) \quad (22)$$

que reordenada puede escribirse como sigue:

$$\hat{\theta}(N+1) = [\Phi^T(N) \cdot \Phi(N) + \varphi^T(N+1) \cdot \varphi(N+1)]^{-1} \cdot \Phi^T(N+1) \cdot Y(N+1) \quad (23)$$

Se define, por conveniencia, la matriz P(N) y P(N+1):

$$\begin{aligned} P(N) &= (\Phi^T(N) \cdot \Phi(N))^{-1} \\ P(N+1) &= (\Phi^T(N+1) \cdot \Phi(N+1))^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

Se puede escribir la siguiente relación para su inversa:

$$P^{-1}(N+1) = P^{-1}(N) + \varphi^T(N+1) \cdot \varphi(N+1) \quad (25)$$

Finalmente:

$$\hat{\theta}(N+1) = P(N+1) \cdot (\Phi^T(N) \cdot Y(N) + \varphi^T(N+1) \cdot y(N+1)) \quad (26)$$

Resulta conveniente el siguiente lema de inversión de matrices:

$$(A + B \cdot C \cdot D)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} \cdot B \cdot (C^{-1} + D \cdot A^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot D \cdot A^{-1} \quad (27)$$

donde A, C y $(C^{-1} + D \cdot A^{-1} \cdot B)$ son matrices cuadradas no singulares. Identificando:

$$A = P^{-1}(N); \quad B = \varphi^T(N+1); \quad C = I; \quad D = \varphi(N+1) \quad (28)$$

la expresión (22) se convierte en:

$$P(N+1) = P(N) - P(N) \cdot \varphi^T(N+1) \cdot (I + \varphi(N+1) \cdot P(N) \cdot \varphi^T(N+1))^{-1} \cdot \varphi(N+1) \cdot P(N) \quad (29)$$

Sustituyendo la ecuación (29) en la (26) se llega a:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(N+1) &= \hat{\theta}(N) + K(N) \cdot [y(N+1) - \varphi(N+1) \cdot \hat{\theta}(N)] \\ K(N) &= P(N) \cdot \varphi^T(N+1) \cdot [I + \varphi(N+1) \cdot P(N) \cdot \varphi^T(N+1)]^{-1} \\ P(N+1) &= P(N) - K(N) \cdot \varphi(N+1) \cdot P(N) \end{aligned} \quad (30)$$

Resultando un conjunto de ecuaciones recursivo que actualiza el vector de parámetros, según un término proporcional a la diferencia entre la medida $y(N+1)$ y la predicción $\varphi(N+1) \cdot \hat{\theta}(N)$ calculada mediante los parámetros obtenidos en la medida anterior. Obsérvese también que para aplicar (30) hace falta invertir una matriz. Esto no representa, en la mayoría de los casos, ningún problema ya que la

matriz a invertir tiene como dimensión el número de salidas del sistema (en el caso monovariante, dimensión 1: un escalar).

Para el caso escalar las ecuaciones anteriores se reducen a las siguientes:

$$\begin{aligned}\hat{\vartheta}(N) &= \hat{\vartheta}(N-1) + K(N) \cdot (y(N) - \varphi^T(N) \cdot \hat{\vartheta}(N-1)) \\ K(N) &= P(N) \cdot \varphi(N)\end{aligned}\quad (31)$$

con:

$$P(N) = \left(P(N-1) - \frac{P(N-1) \cdot \varphi(N) \cdot \varphi^T(N) \cdot P(N-1)}{1 + \varphi^T(N) \cdot P(N-1) \cdot \varphi(N)} \right) \quad (32)$$

Restricciones al método

- Necesidad de que los parámetros desconocidos han de ser coeficientes de las funciones consideradas.
- Necesidad de que la señal de excitación $u(t)$ sea lo suficientemente rica (en el sentido estadístico) para excitar todos los modos del sistema. Esto se garantiza con una señal que sea una excitación persistente de orden n ; es decir, que cumpla los siguientes requisitos:

- Exista el límite $r_u(\tau) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \cdot \sum_{t=1}^L u(t+\tau) \cdot u^T(t)$
- La matriz $R_u(n) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \cdot \sum_{t=1}^L \varphi(t) \cdot \varphi^T(t)$ sea definida positiva.

Lo anterior se cumple si el desarrollo armónico de la señal aplicada contiene como mínimo $n/2$ armónicos.

Aplicación al caso de un transformador

La aplicación del método anterior al caso de modelización de un transformador monofásico susceptible de entrar en saturación ilustrará el algoritmo que se propone.

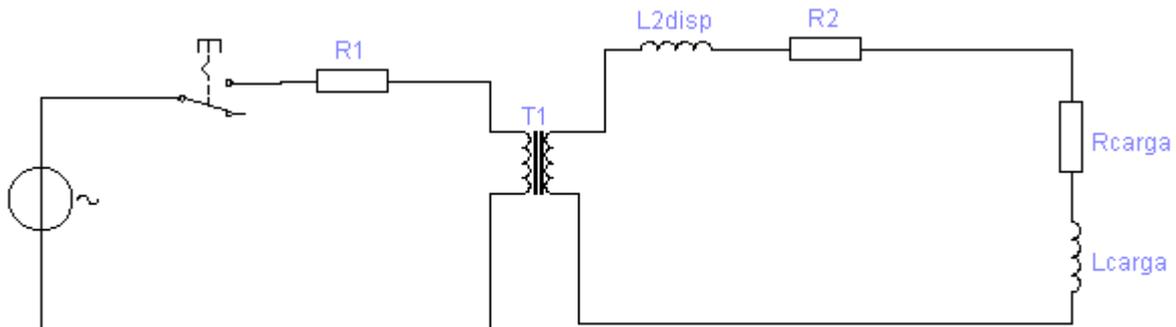


Figura 2. Modelo de transformador y su carga.

Las ecuaciones de definición del sistema son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 N_1 \cdot \frac{d\Psi_m}{dt} &= u - r_1 \cdot i_1 \\
 N_2 \cdot \frac{d\Psi_m}{dt} &= (L_{carga} + L_{2disp}) \cdot \frac{di_2}{dt} + (R_{carga} + R_2) \cdot i_2 \\
 i_1 &= i_{mag} + i_2 \\
 i_{mag} &= I_N \cdot \left(a \cdot \frac{\Psi_m}{\Psi_N} + b \cdot \left(\frac{\Psi_m}{\Psi_N} \right)^n \right)
 \end{aligned} \tag{33}$$

donde se ha considerado el efecto de dispersión concentrado en el secundario. De esta forma el sistema resulta resoluble en tiempo real ya que no aparece ninguna ecuación implícita que deba resolverse (es evidente que las ecuaciones del transformador son equivalentes a las de la máquina asíncrona – o a la inversa, como se desee; por lo tanto la discusión desarrollada en el capítulo 2 es perfectamente válida para este caso).

Se considera el modelo de saturación representado por:

$$y(k) = \varphi^T(k) \cdot \theta \tag{34}$$

y la aplicación del método de los mínimos cuadrados recursivos (RLS). En el caso de las funciones representativas de la saturación consideradas el exponente n puede obtenerse mediante ensayos o tanteos previos como $n = (5, 7 \text{ o } 9)$, se trata de determinar sólo los coeficientes a y b , los cuales pueden expresarse según la forma canónica:

$$y(k) = i(k) \quad \varphi^T(k) = \left(I_N \cdot \frac{\hat{\Psi}_m(k)}{\Psi_N} \quad I_N \cdot \left(\frac{\hat{\Psi}_m(k)}{\Psi_N} \right)^n \right) \quad \theta^T(k) = (\hat{a}(k) \quad \hat{b}(k)) \quad (35)$$

Resultados de simulación.

Las figuras que siguen indican los resultados obtenidos en la simulación del transitorio de conexión en carga del transformador de características que siguen:

- Transformador monofásico 220/380 V, 1.3 kVA, 5.9/3.5 A, $P_j = 40$ W, $P_o = 18$ W, $R_1 = 0.942 \Omega$, $R_2 = 1.202 \Omega$; $\Psi_m = 0.99$ Wb; $n = 7$.
- Carga $R = 20 \Omega$; $L = 100$ mH (corresponde aproximadamente al caso nominal)
- Caso 1: Alimentación sinusoidal coincidente con el inicio de la onda. Existe sobrecorriente de conexión.
- Caso 2. Alimentación sinusoidal retardada 90° . Prácticamente sin sobrecorriente de conexión.
- Caso 3. Alimentación PWM; $m_f = 15$; $m_a = 0.85$. Señal aplicada súbitamente (sin rampa de arranque en el ondulador).

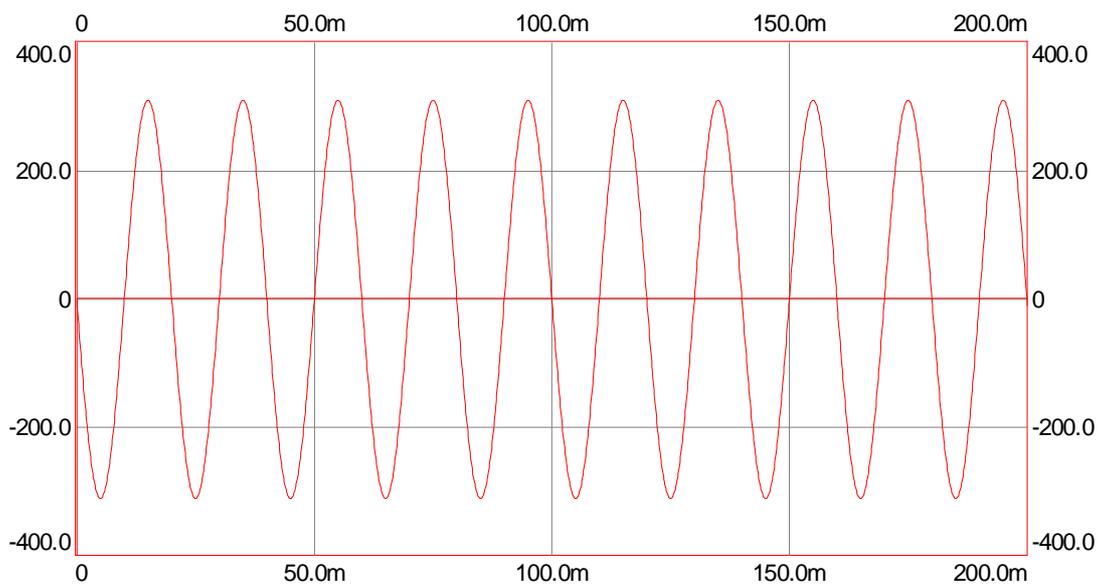


Figura 3. Tensión aplicada. Alimentación sinusoidal .Caso 1.

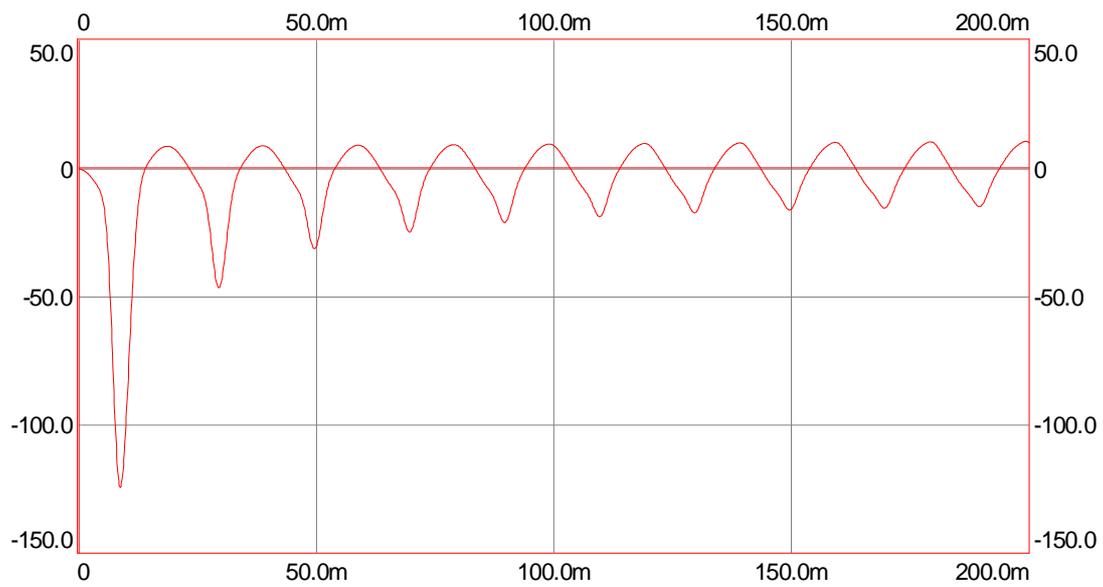


Figura 4. Corriente por el primario. Alimentación sinusoidal .Caso 1.

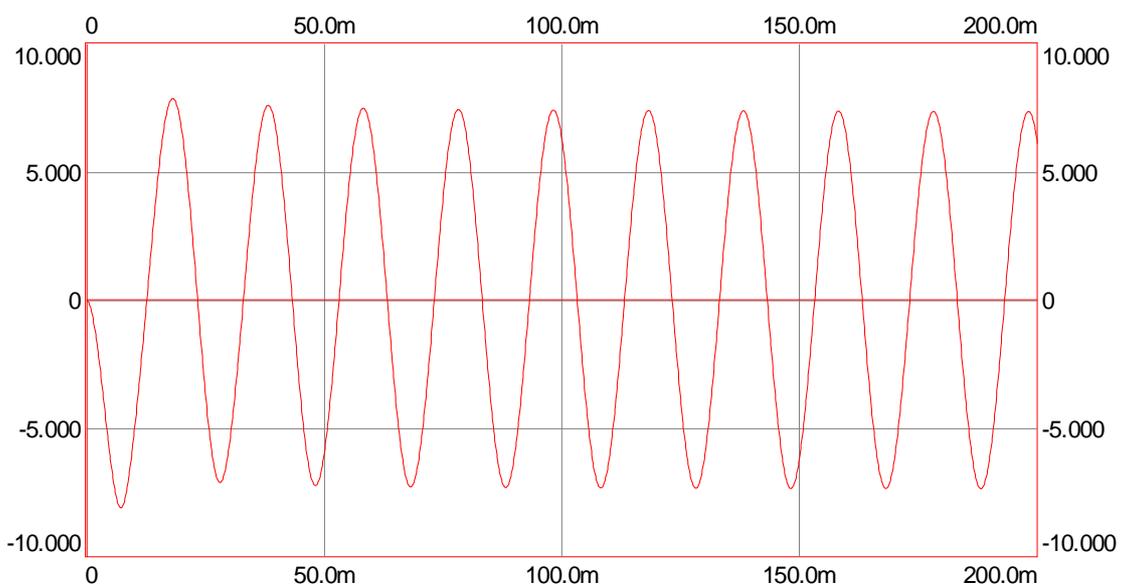


Figura 5. Corriente secundaria reducida al primario. Alimentación sinusoidal .Caso 1.

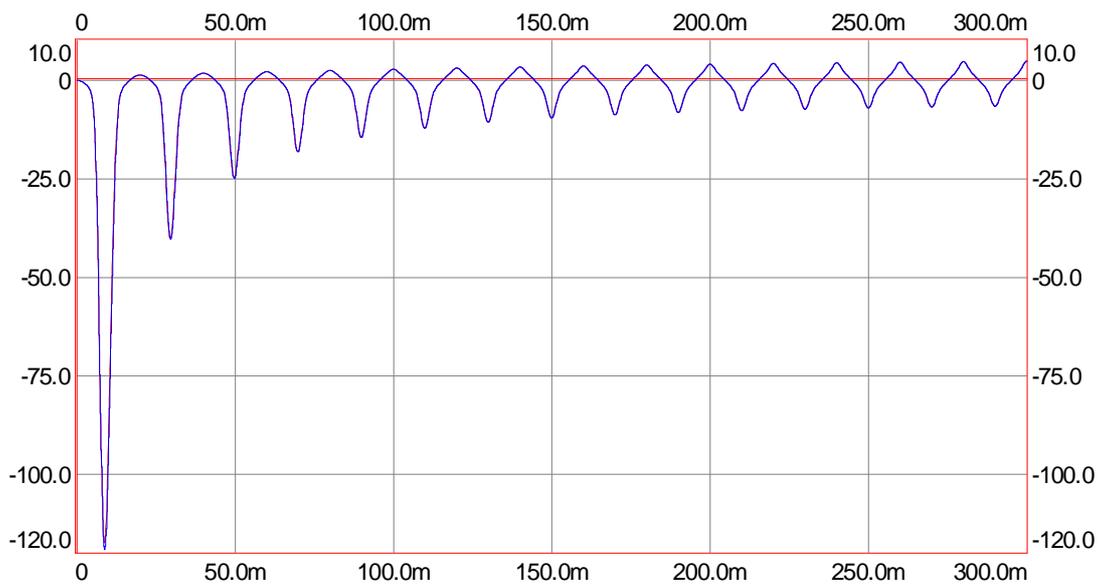


Figura 6. Corriente magnetizante calculada y estimada. Alimentación sinusoidal. Caso 1.

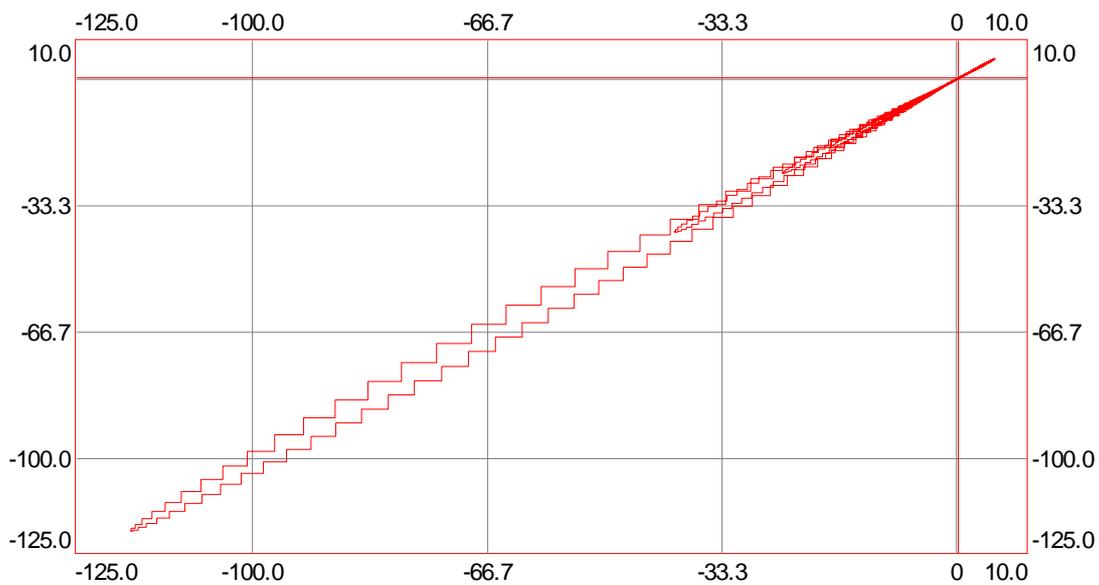


Figura 7. Corriente magnetizante estimada como función de la corriente magnetizante estimada. Alimentación sinusoidal. Caso 1.

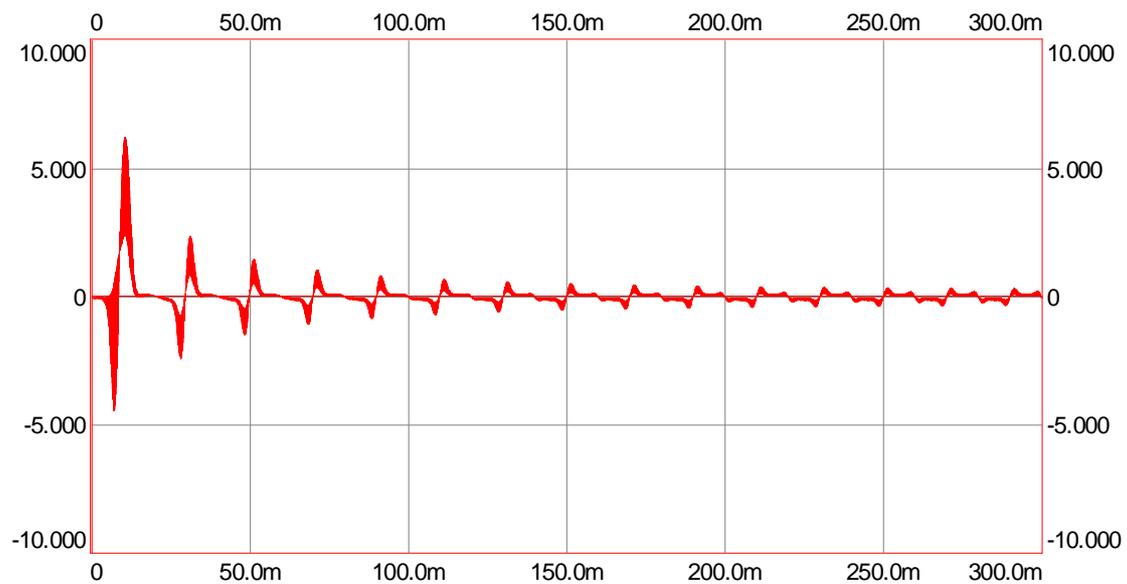


Figura 8. Error de estimación en corriente de magnetización. Alimentación sinusoidal .Caso 1.

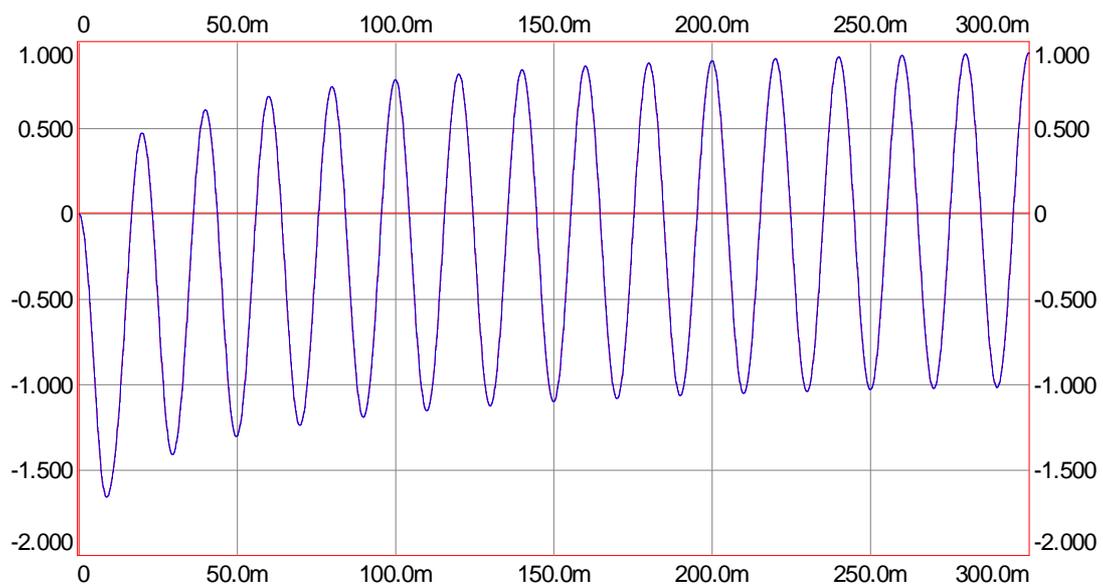


Figura 9. Flujo común calculado y estimado. Alimentación sinusoidal .Caso 1.

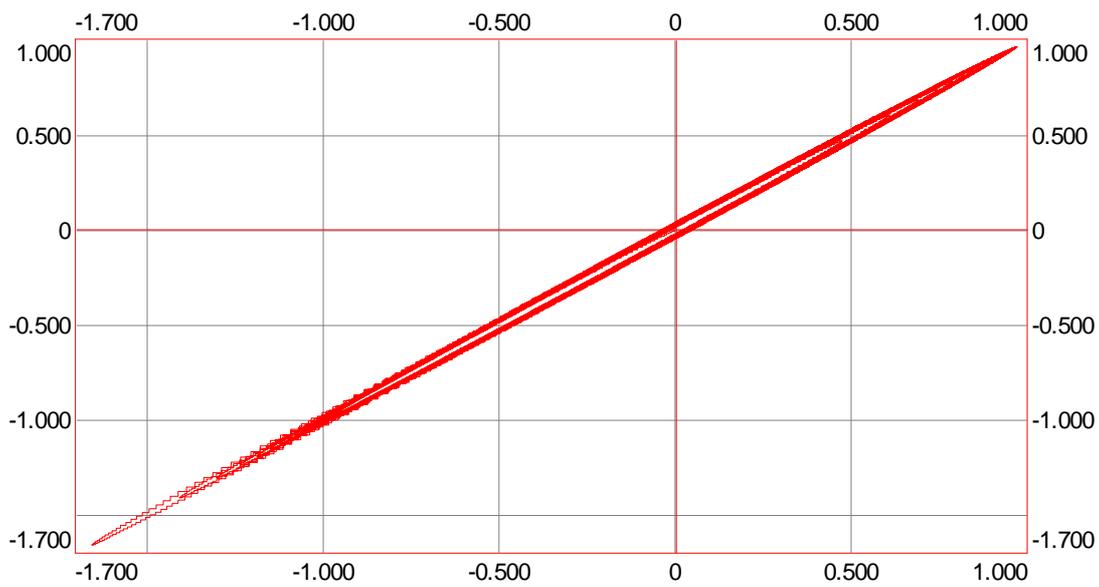


Figura 10. Flujo común estimado como función del flujo común calculado. Alimentación sinusoidal. Caso 1.

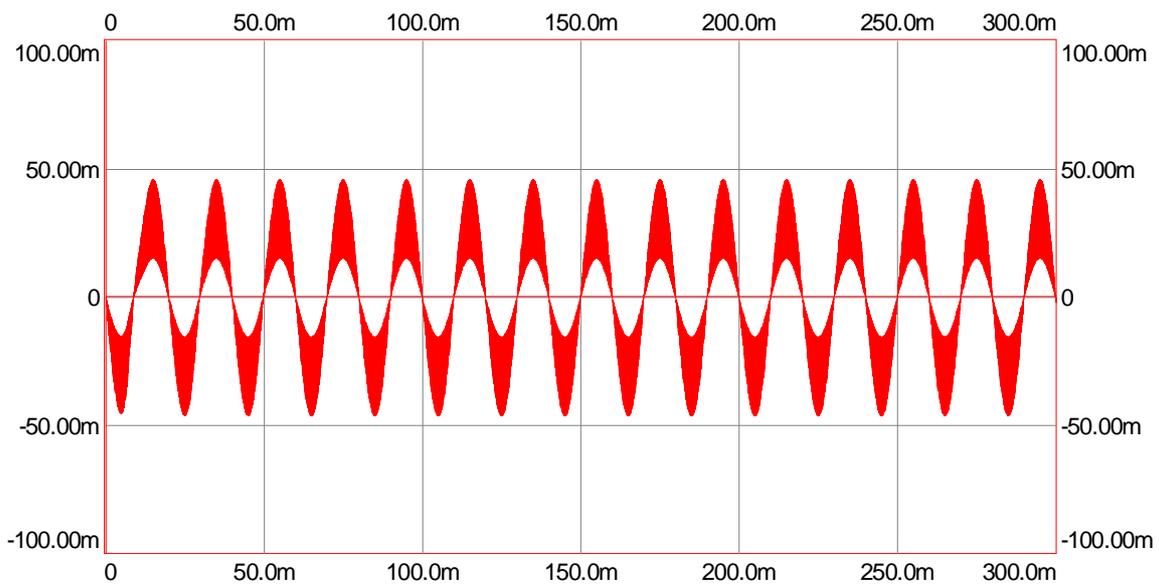


Figura 11. Error de estimación en flujo común. Alimentación sinusoidal. Caso 1.

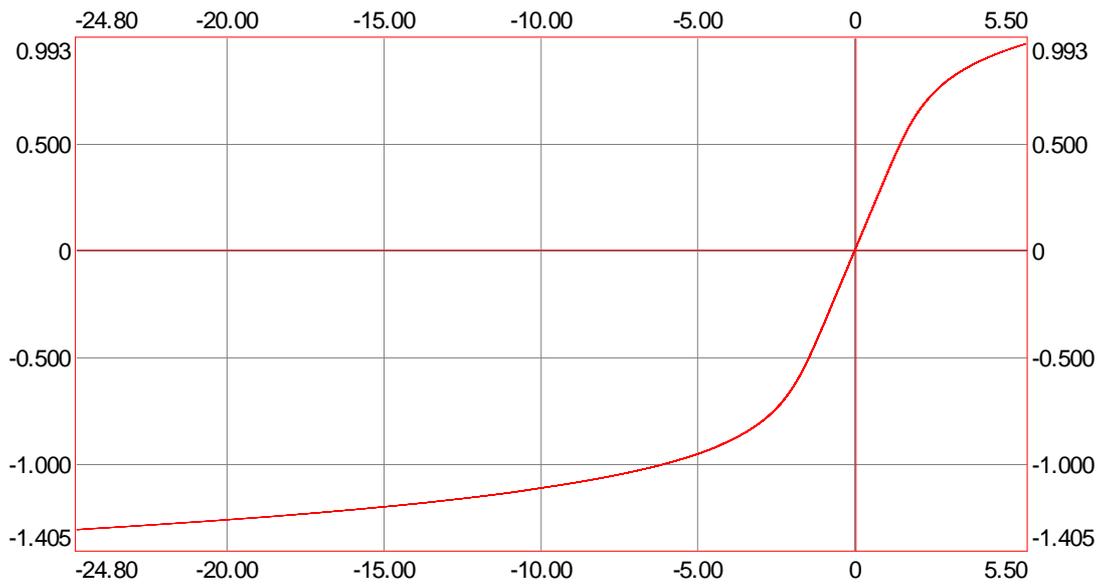


Figura 12. Característica de saturación calculada. Alimentación sinusoidal. Caso 1.

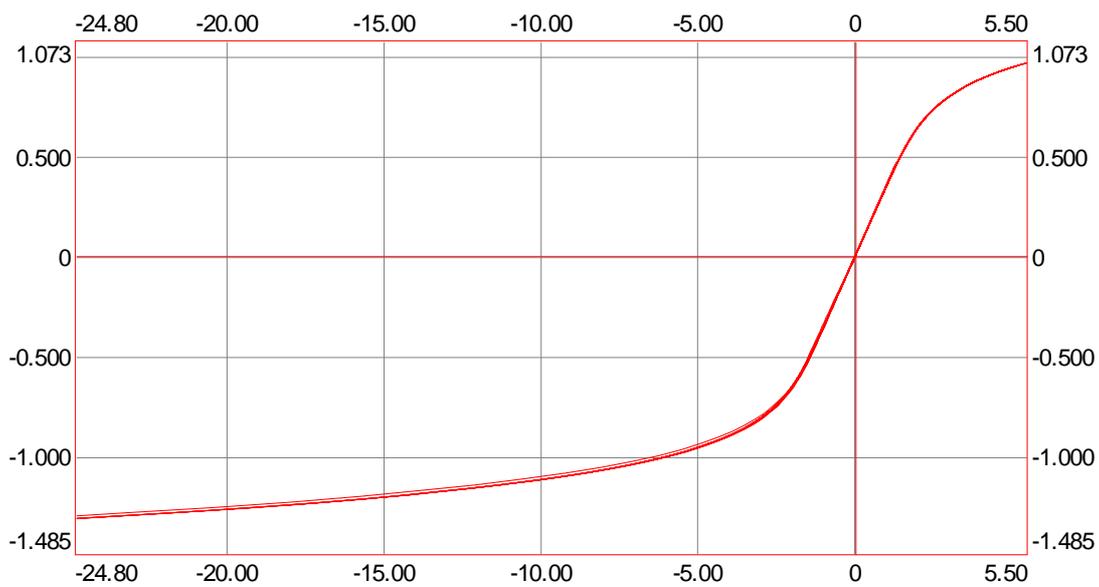
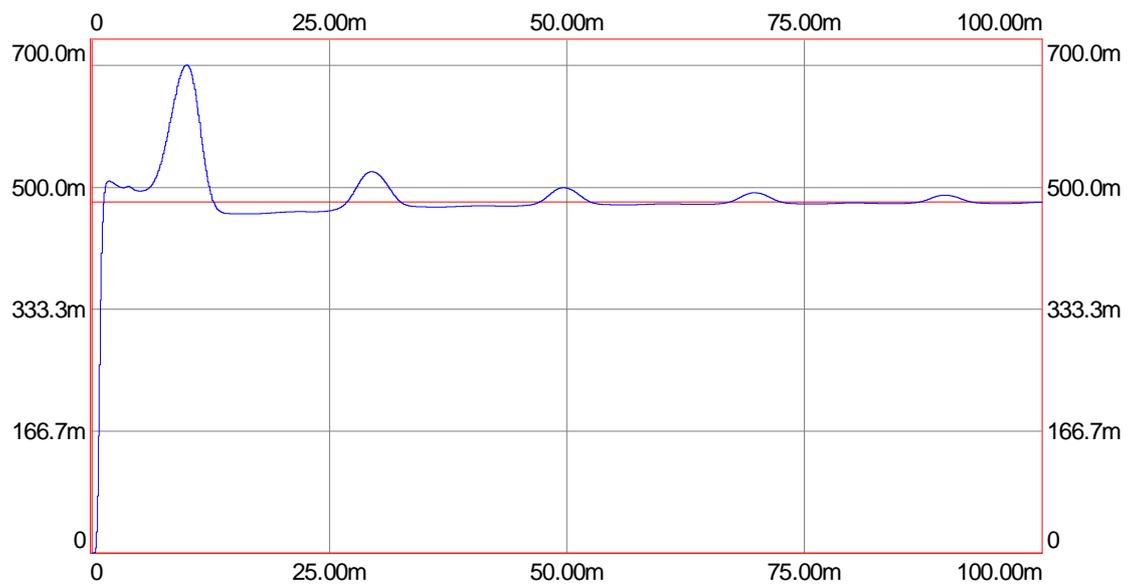
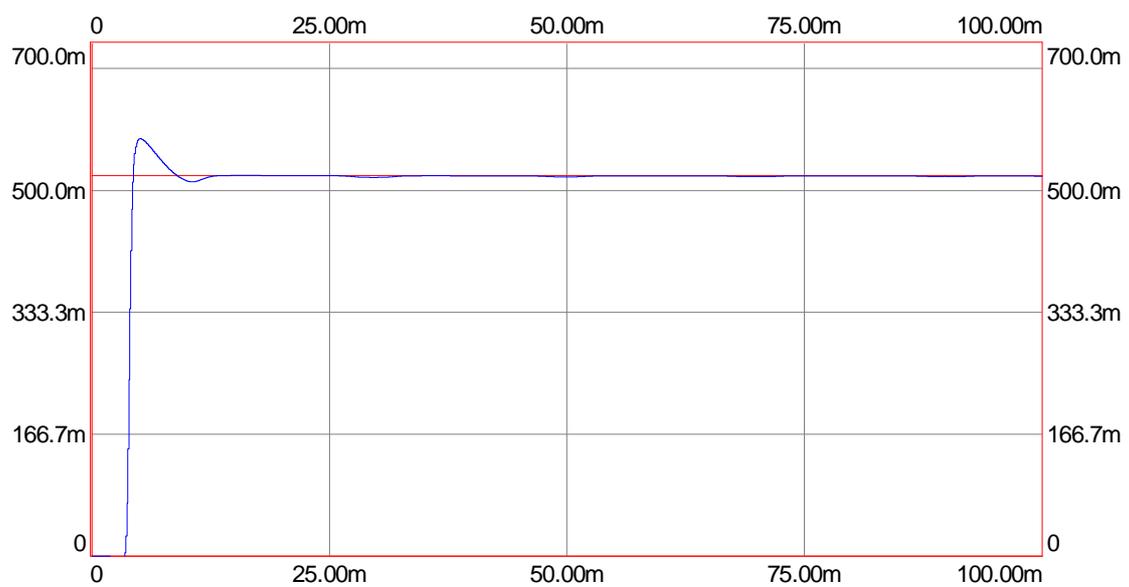


Figura 13. Característica de saturación estimada. Alimentación sinusoidal. Caso 1.

Figura 14. Parámetro $\hat{a}(k)$. Alimentación sinusoidal. Caso 1.Figura 15. Parámetro $\hat{b}(k)$. Alimentación sinusoidal. Caso 1.

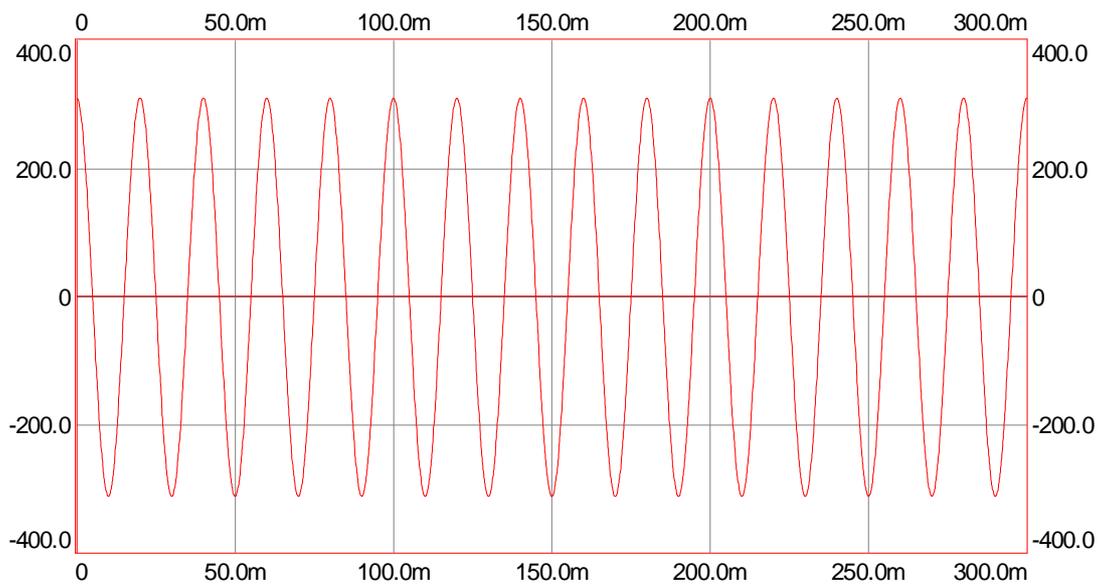


Figura 16. Tensión aplicada. Alimentación sinusoidal .Caso 2.

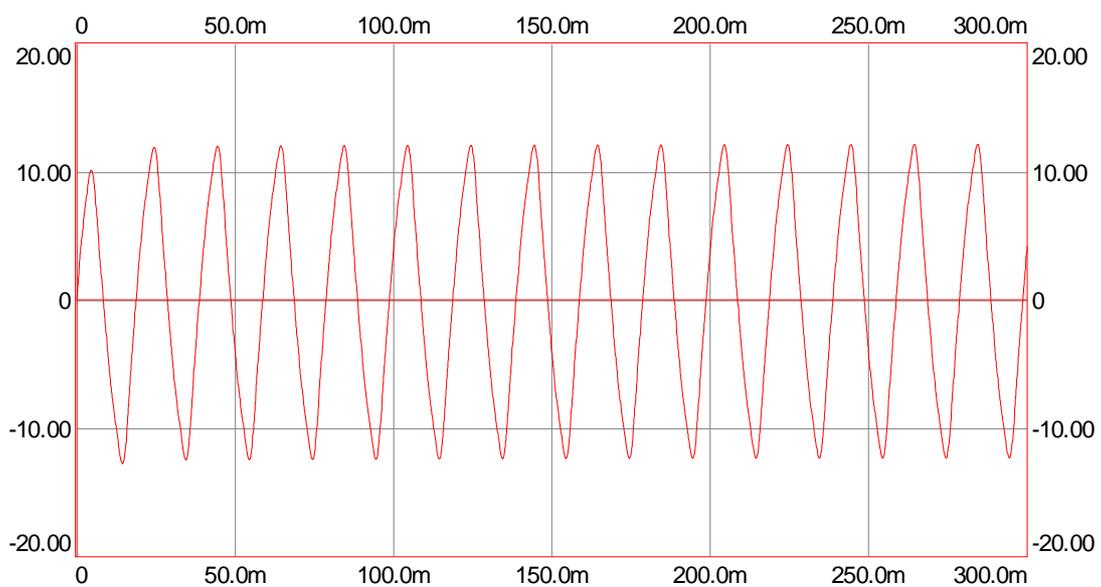


Figura 17. Corriente por el primario. Alimentación sinusoidal .Caso 2.

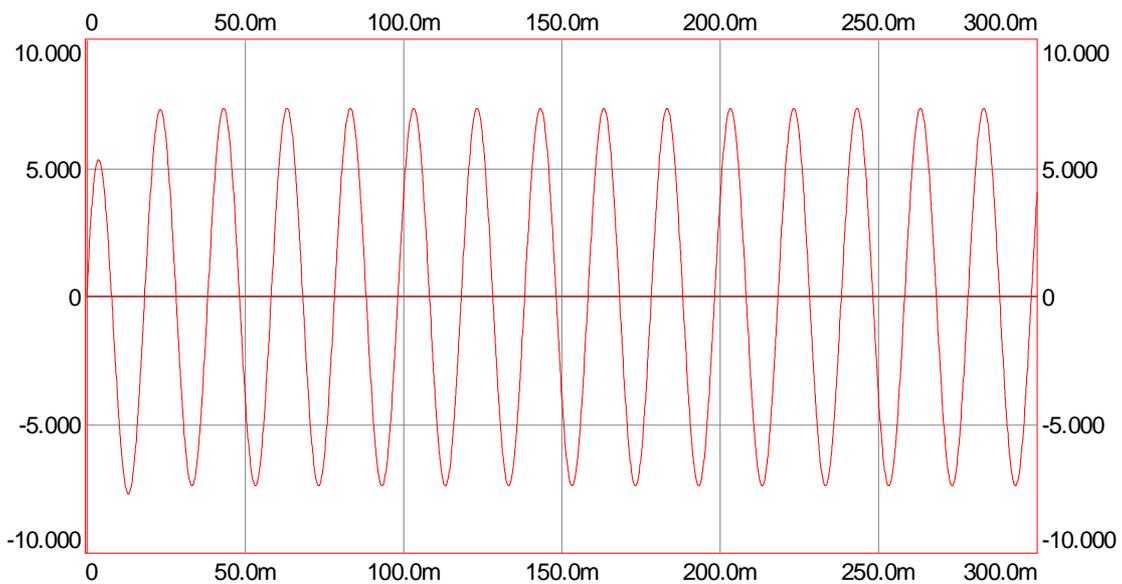


Figura 18. Corriente secundaria reducida al primario. Alimentación sinusoidal .Caso 2.

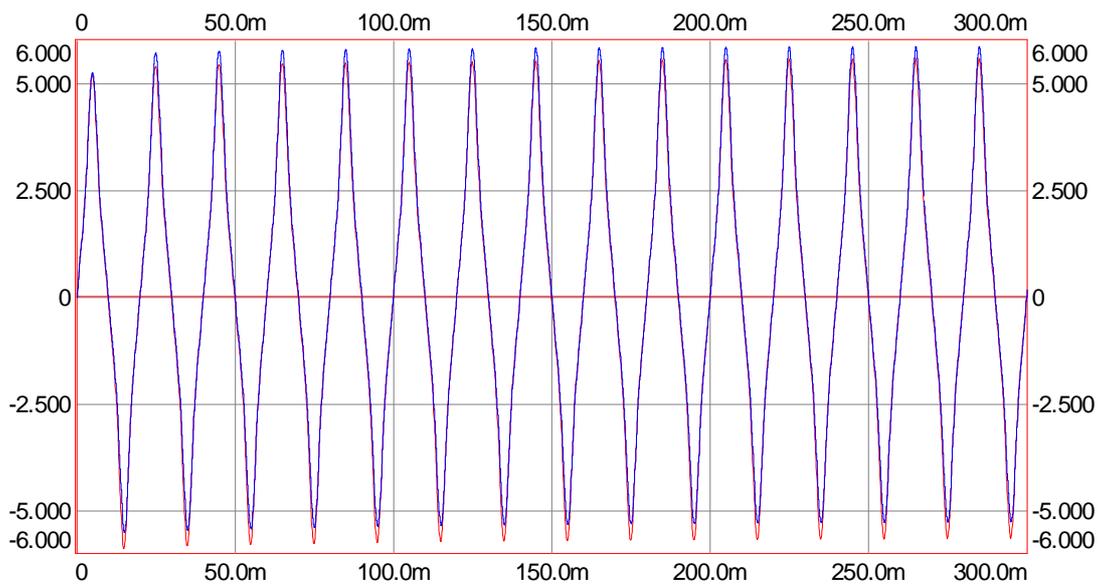


Figura 19. Corriente magnetizante calculada y estimada. Alimentación sinusoidal. Caso 2.

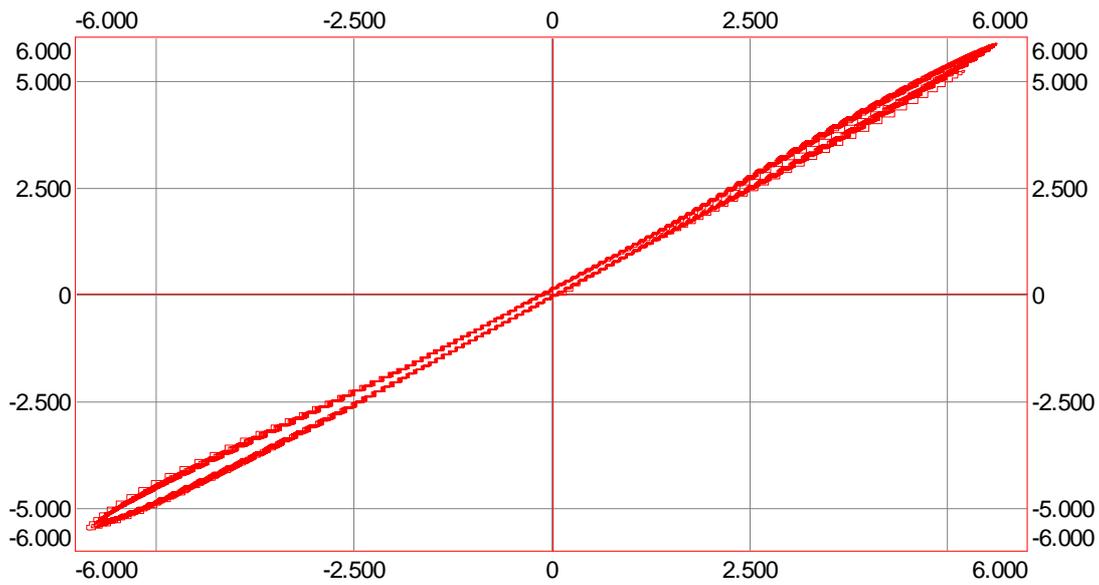


Figura 20. Corriente magnetizante estimada como función de la corriente magnetizante estimada. Alimentación sinusoidal. Caso 2.

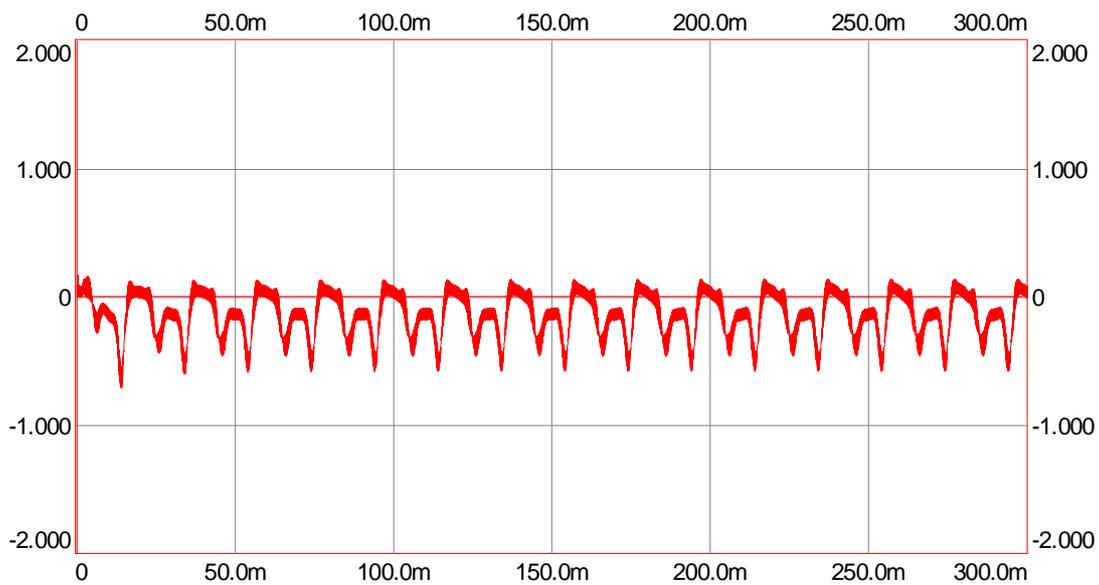


Figura 21. Error de estimación en corriente de magnetización. Alimentación sinusoidal .Caso 2.

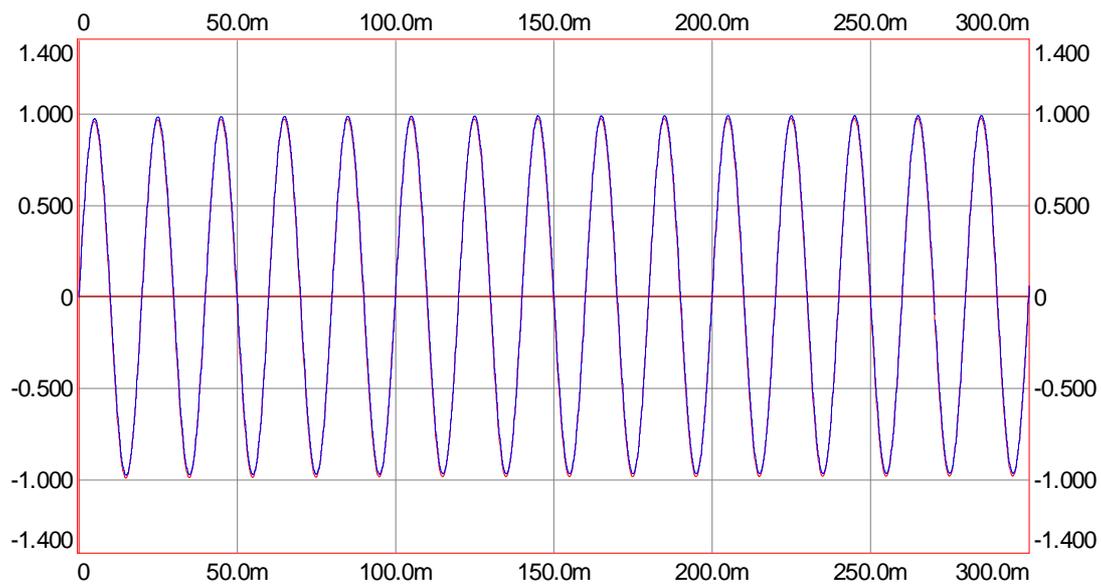


Figura 22. Flujo común calculado y estimado. Alimentación sinusoidal .Caso 2.

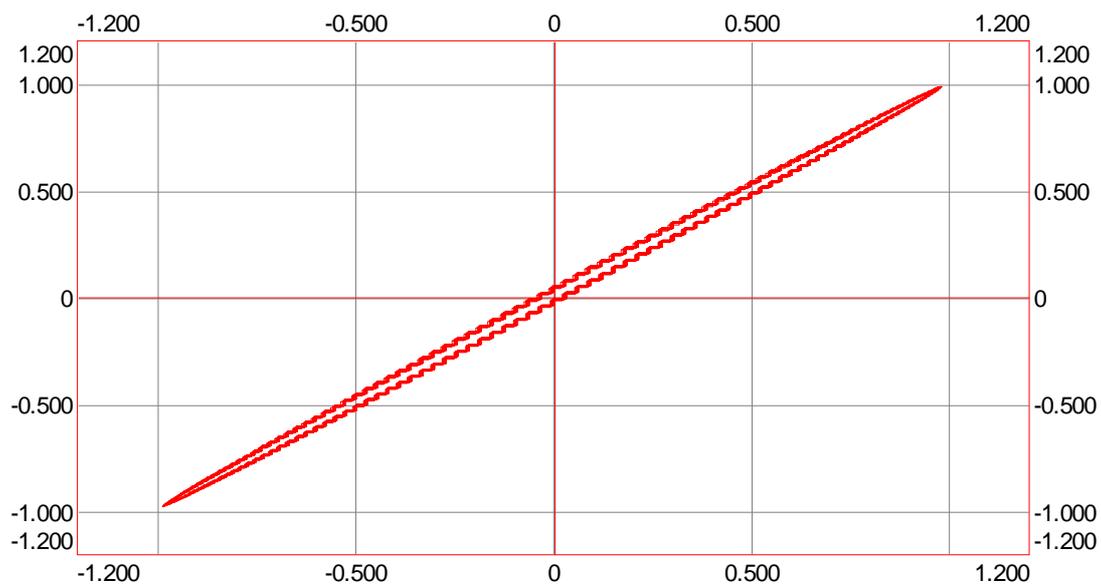


Figura 23. Flujo común estimado como función del flujo común calculado. Alimentación sinusoidal. Caso 2.

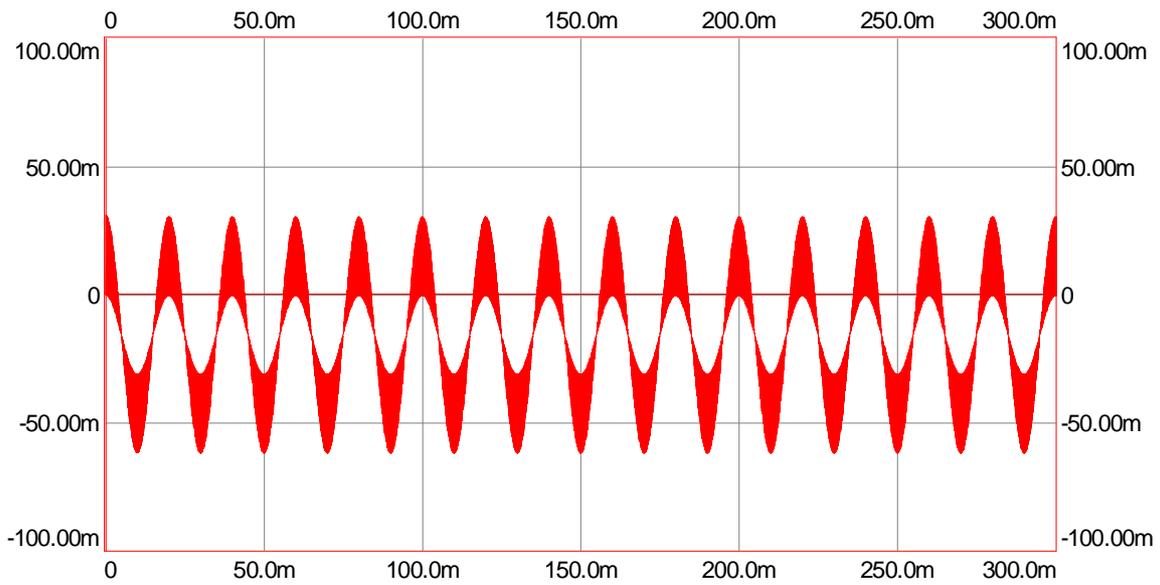


Figura 24. Error de estimación en flujo común. Alimentación sinusoidal .Caso 2.

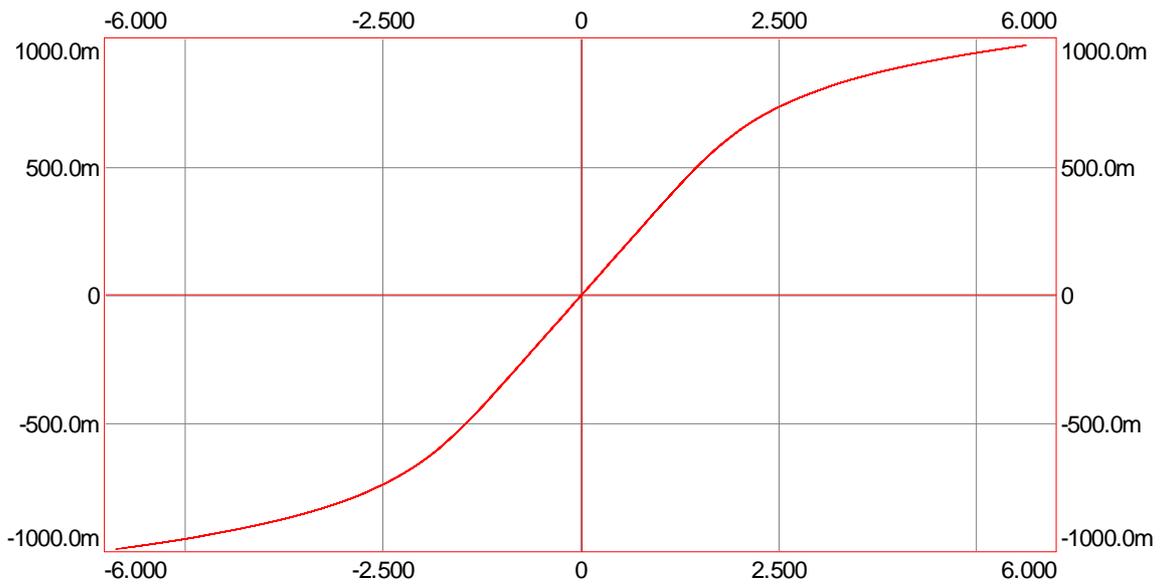


Figura 25. Característica de saturación calculada. Alimentación sinusoidal. Caso 2.

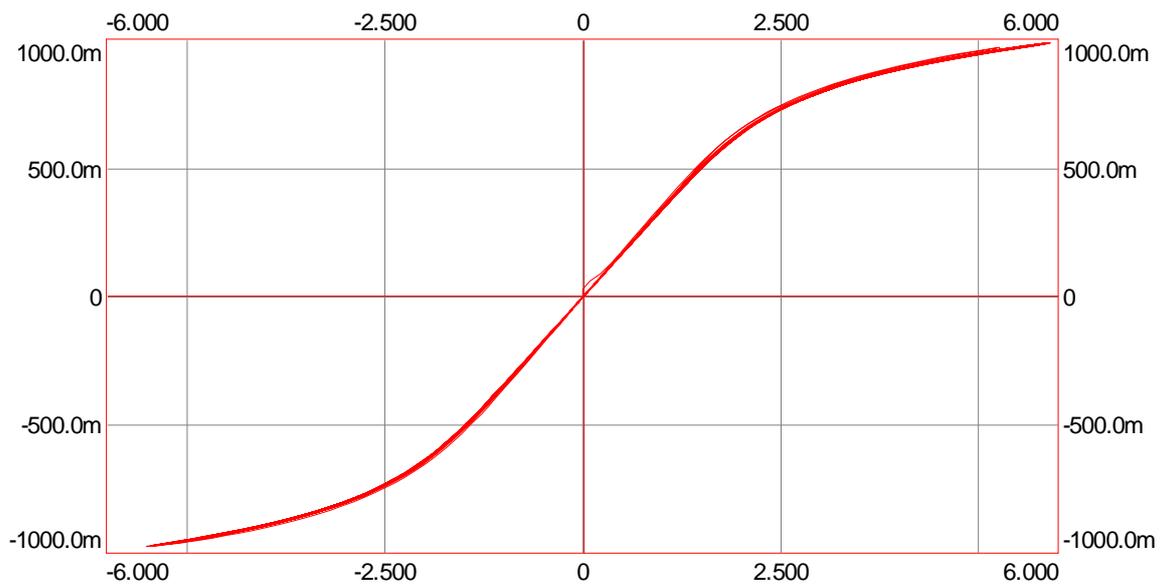


Figura 26. Característica de saturación estimada. Alimentación sinusoidal. Caso 2.

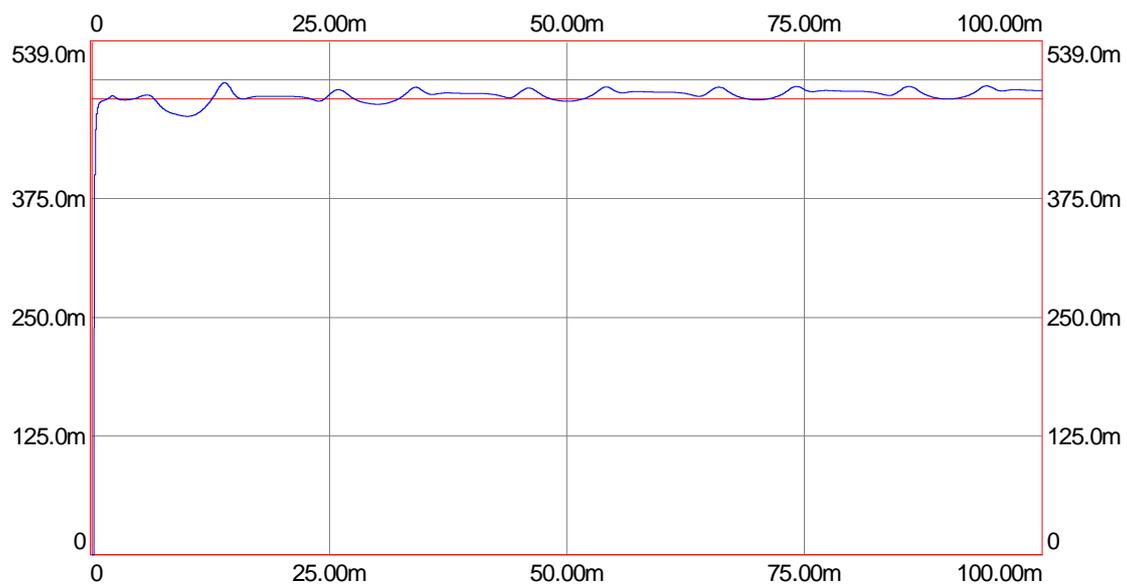


Figura 27. Parámetro $\hat{a}(k)$. Alimentación sinusoidal. Caso 2.

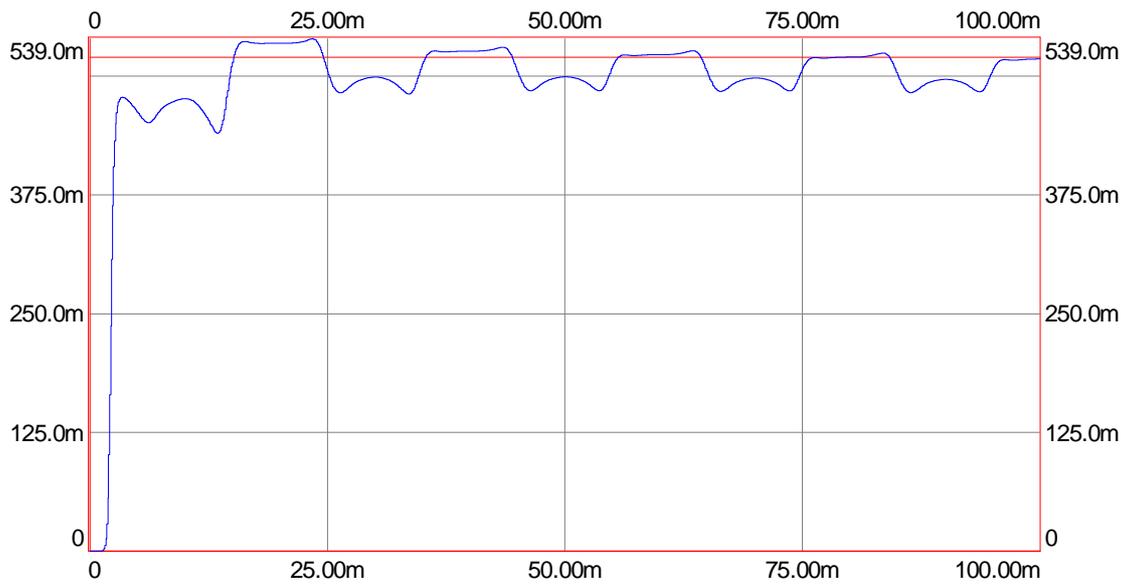


Figura 28. Parámetro $\hat{b}(k)$. Alimentación sinusoidal. Caso 2.

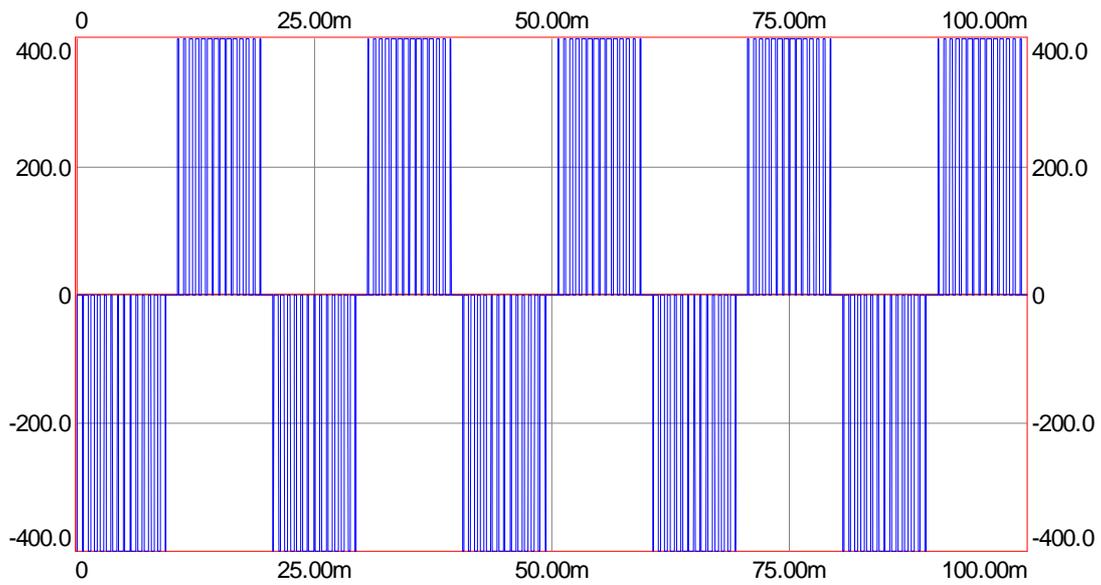


Figura 16. Tensión aplicada. Alimentación PWM. Caso 3.

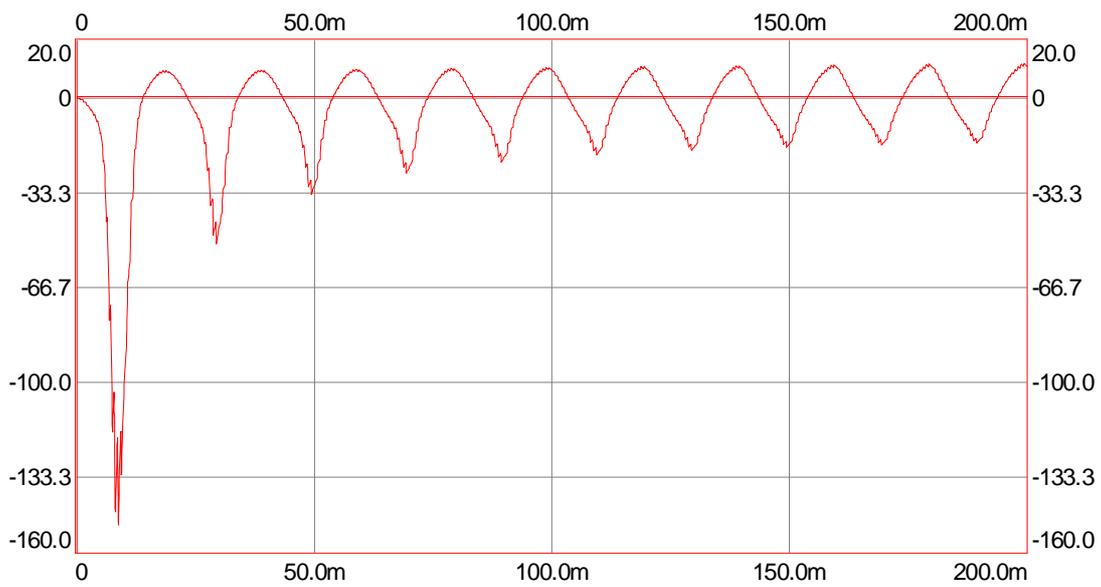


Figura 17. Corriente por el primario. Alimentación PWM. Caso 3.

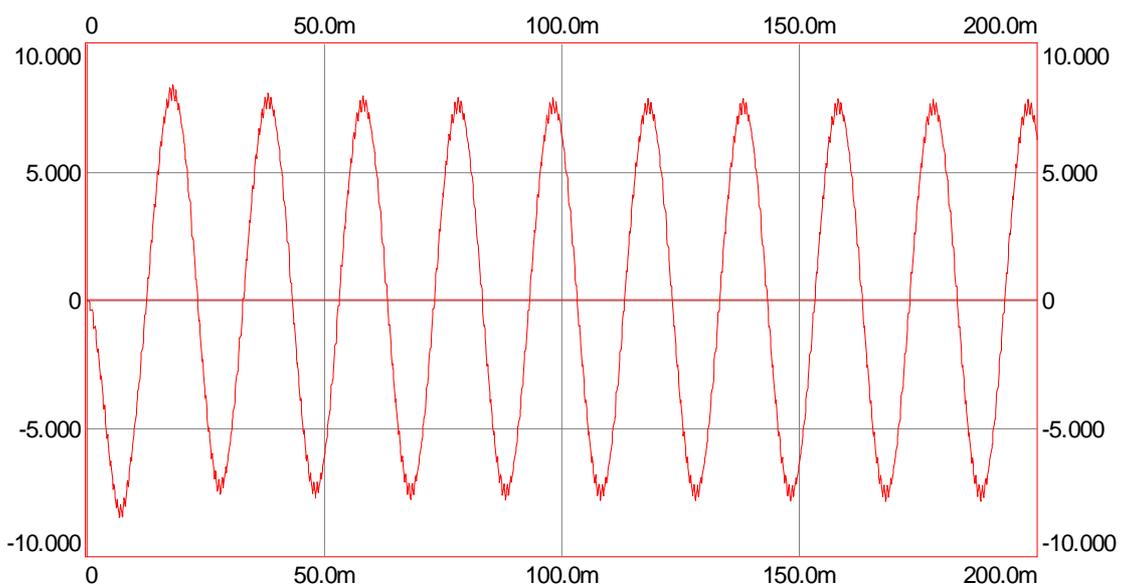


Figura 18. Corriente secundaria reducida al primario. Alimentación PWM. Caso 3.

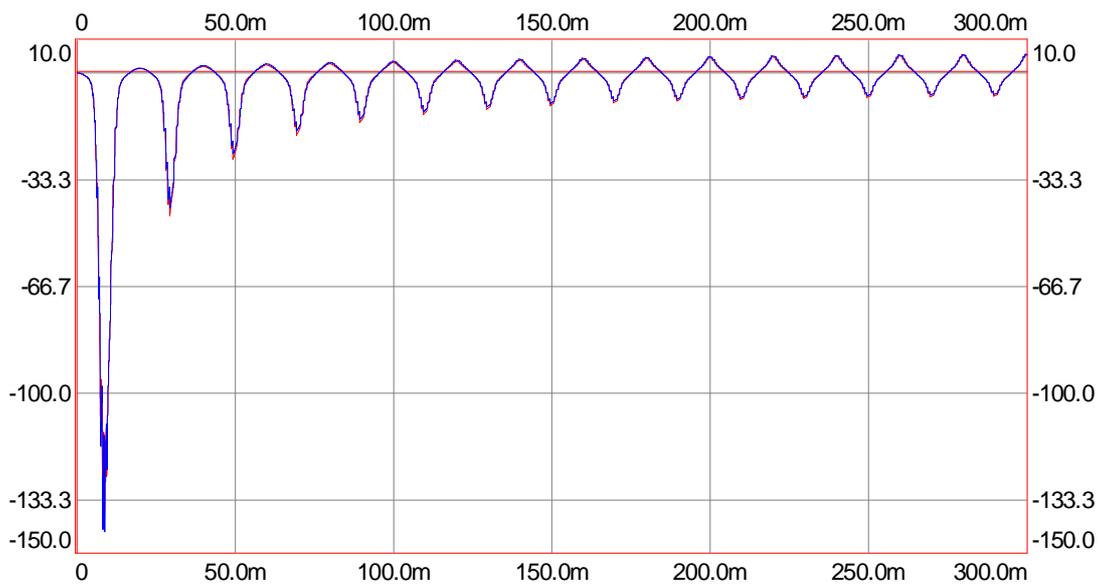


Figura 19. Corriente magnetizante calculada y estimada. Alimentación PWM. Caso 3.

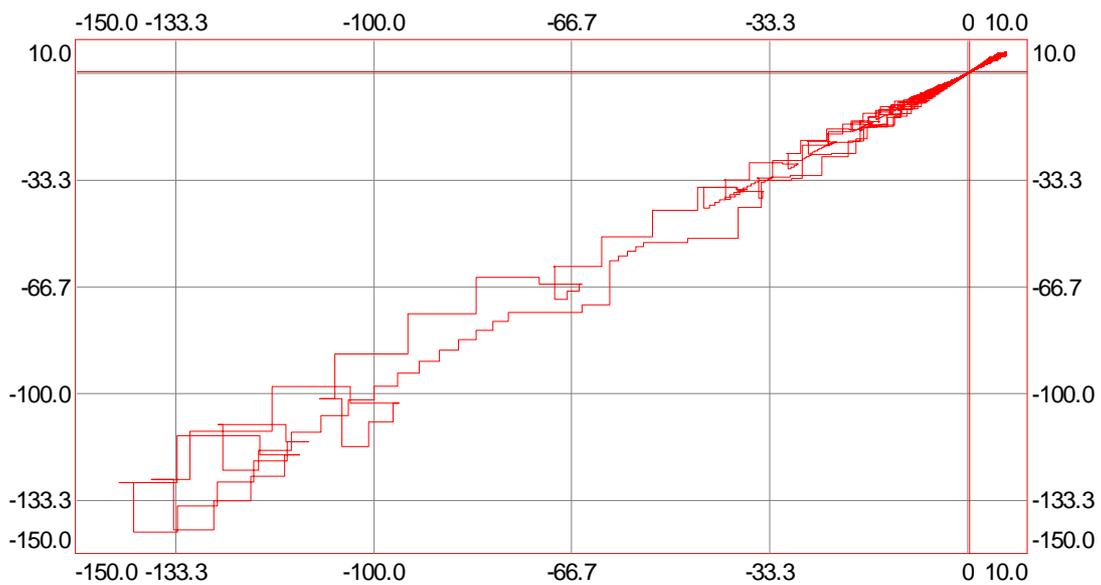


Figura 20. Corriente magnetizante estimada como función de la corriente magnetizante estimada. Alimentación PWM. Caso 3.

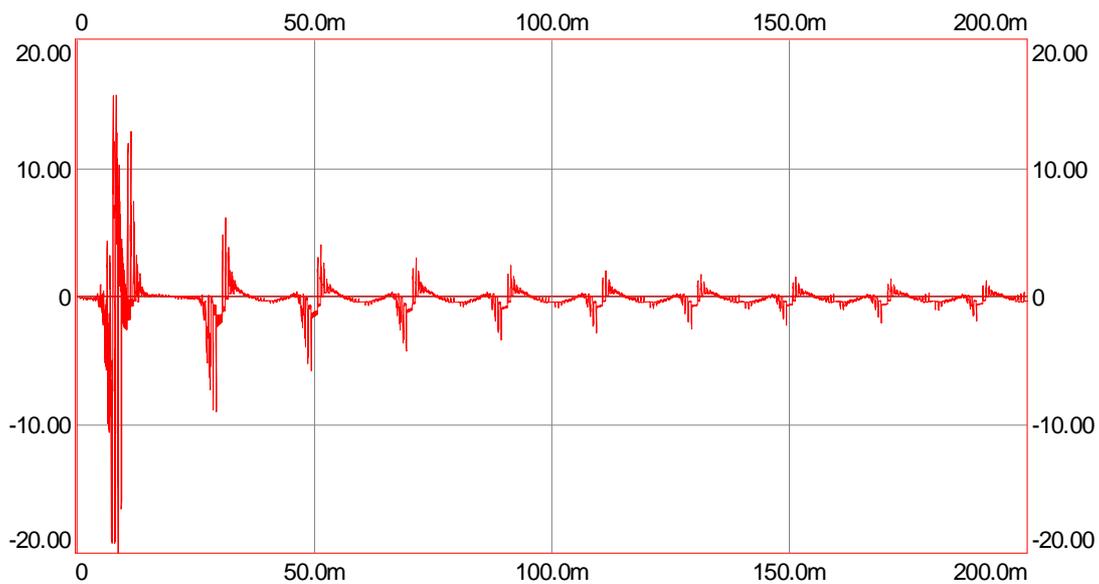


Figura 21. Error de estimación en corriente de magnetización. Alimentación PWM. Caso 3.

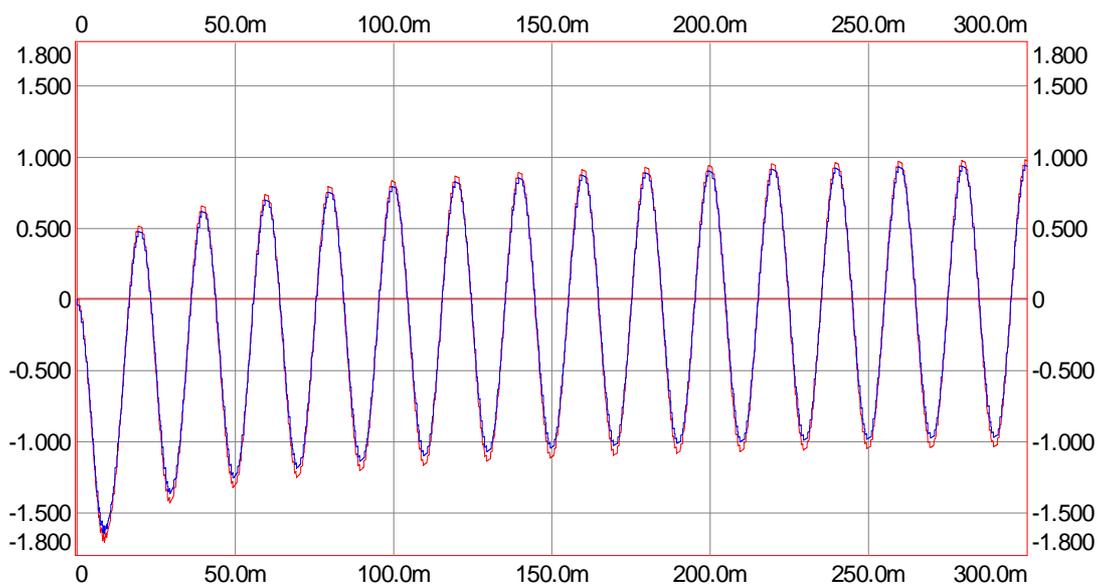


Figura 22. Flujo común calculado y estimado. Alimentación PWM. Caso 3.

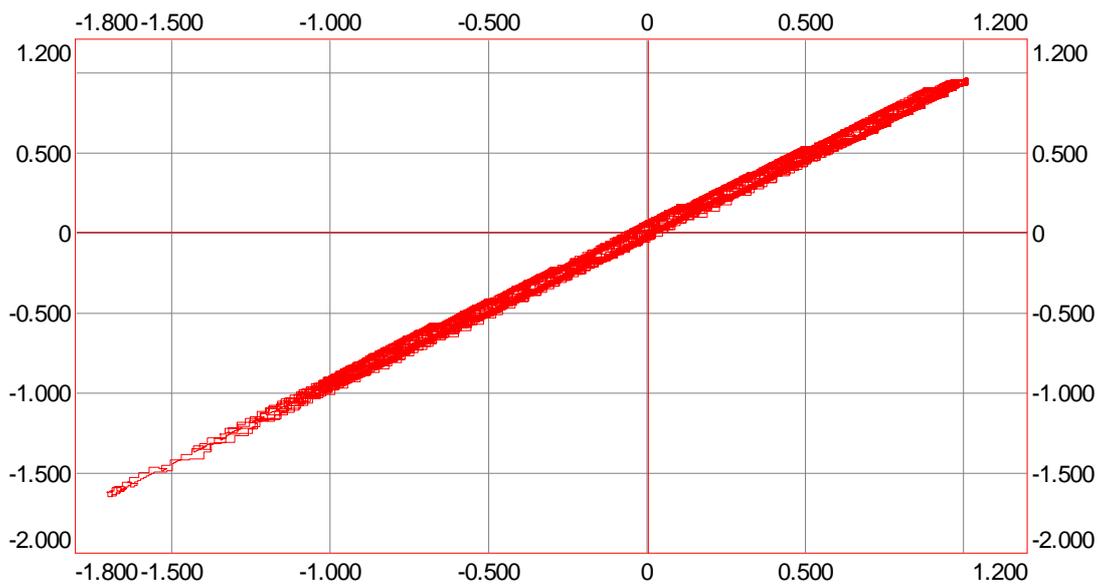


Figura 23. Flujo común estimado como función del flujo común calculado. Alimentación PWM. Caso 3.

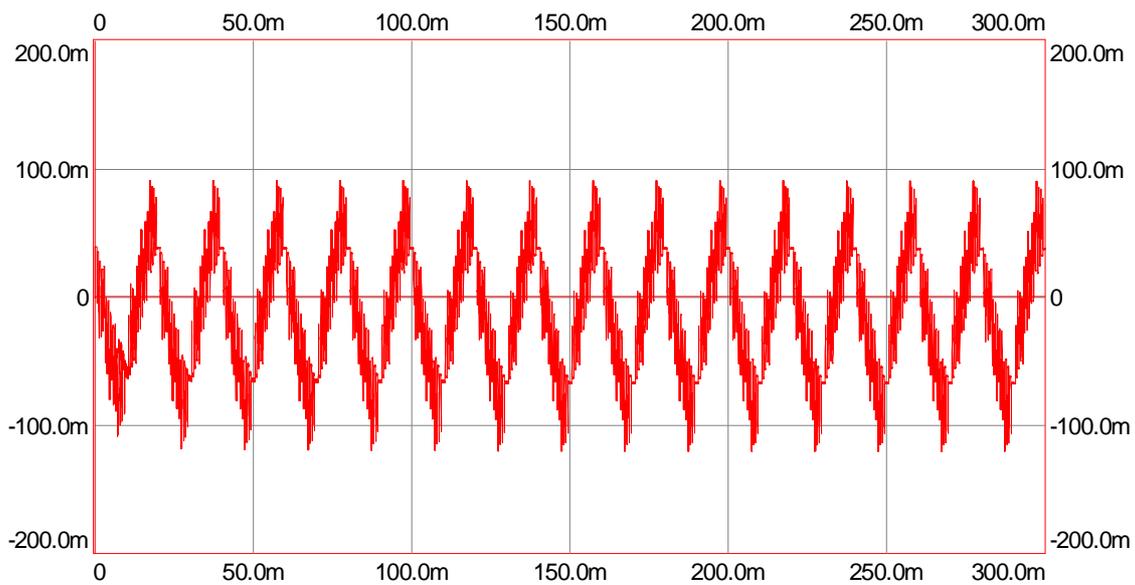


Figura 24. Error de estimación en flujo común. Alimentación PWM. Caso 3.

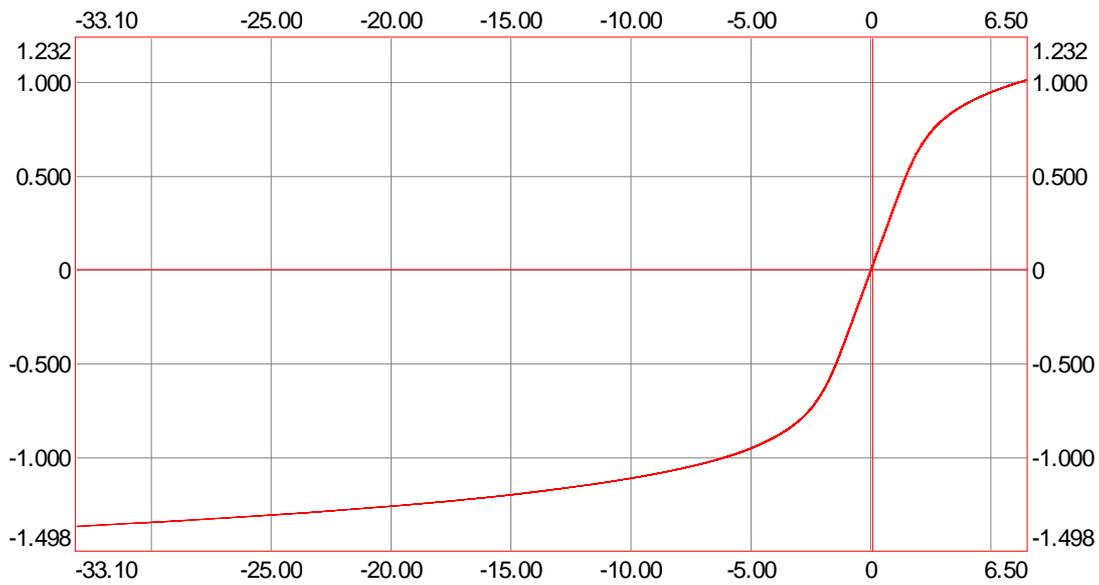


Figura 25. Característica de saturación calculada. Alimentación PWM. Caso 3.

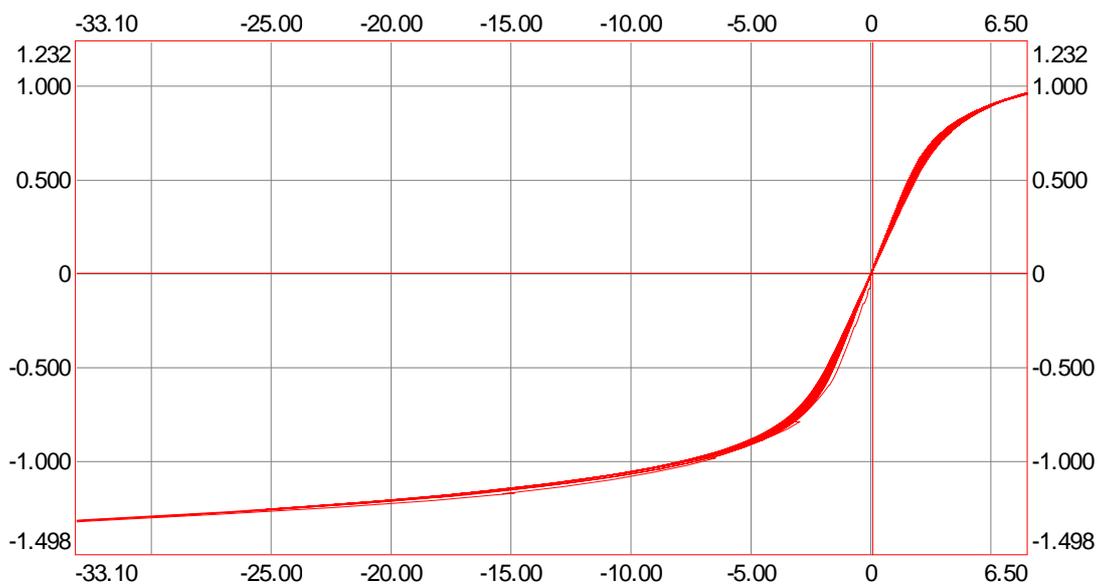
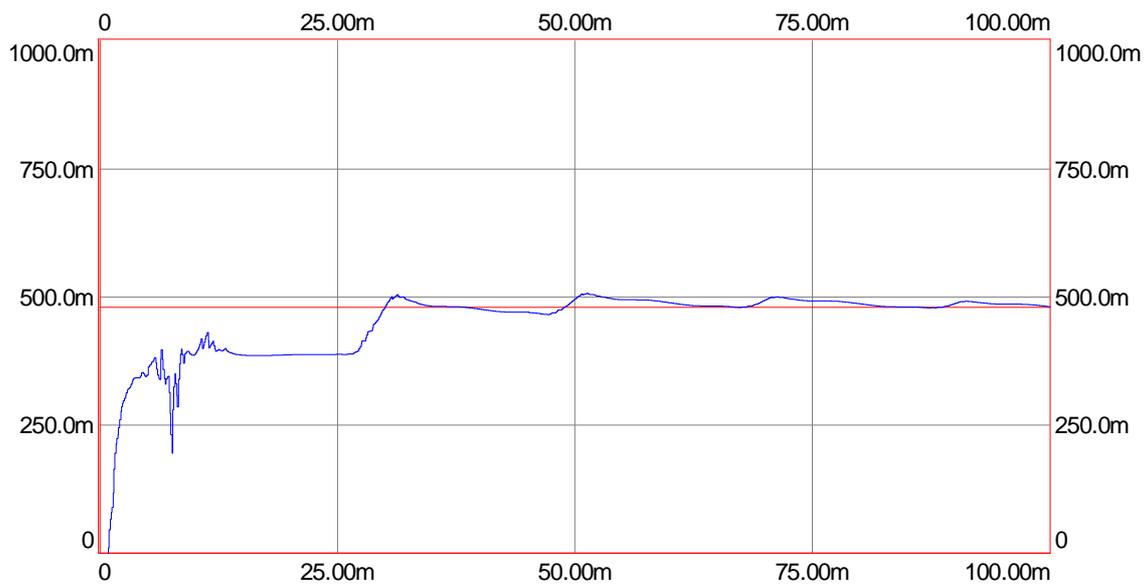
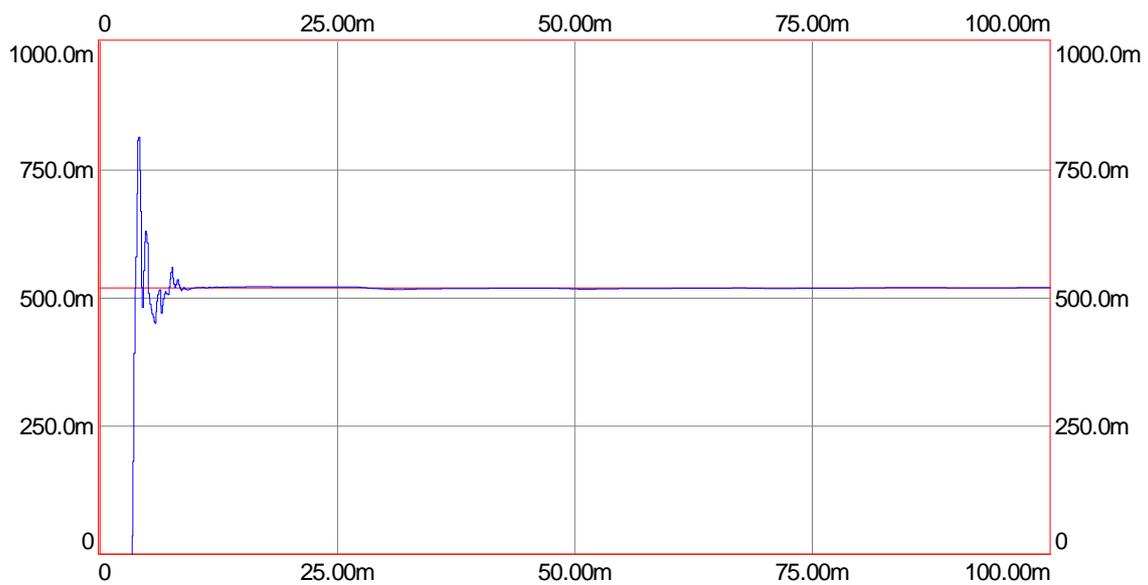


Figura 26. Característica de saturación estimada. Alimentación PWM. Caso 3.

Figura 27. Parámetro $\hat{a}(k)$. Alimentación PWM. Caso 3.Figura 28. Parámetro $\hat{b}(k)$. Alimentación PWM. Caso 3.

Contrastación experimental. Aplicación al caso de transformador en vacío

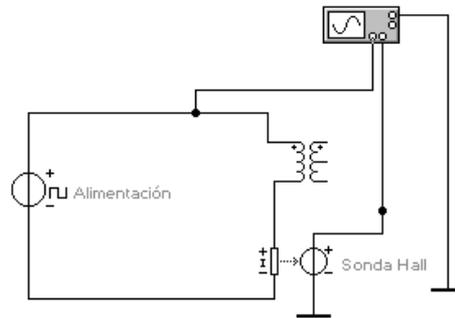


Figura 29. Disposición ensayos.

Se ha realizado el montaje de la figura 29 que representa un transformador monofásico en vacío, alimentado desde la red industrial (220 V, 50 Hz), y posteriormente a partir de una fuente proveniente de un ondulator PWM con las características siguientes :

Tensión de salida : 0 - 400 V frecuencia de salida : 0 - 120 Hz $m_f = 15$

Ensayo realizado para valores nominales de tensión y frecuencia.

Equipo de medida formado por :

- Sonda de corriente por efecto Hall.
- Osciloscopio digital de 20 MHz.
- Tarjeta de adquisición de datos (8 bits) conectada al osciloscopio y a un ordenador personal no representado.
- Transformador monofásico 220/380 V, 1.3 kVA, 5.9/3.5 A, $P_j = 40$ W, $P_o = 18$ W, $R_1 = 0.942 \Omega$, $R_2 = 1.202 \Omega$; $\Psi_m = 0.99$ Wb; $n = 7$ (es el transformador ensayado anteriormente).

En la figura 30 se representa la evolución de la corriente real y la corriente estimada para el caso de alimentación sinusoidal. Se observa la convergencia de la última al valor real en un tiempo no superior a 40 ms (2 periodos de la onda), lo que garantiza la identificación de los coeficientes buscados. En la figura 31, se representa el error de observación. Las figuras 32 y 33 representan la evolución de los parámetros identificados en función del tiempo.

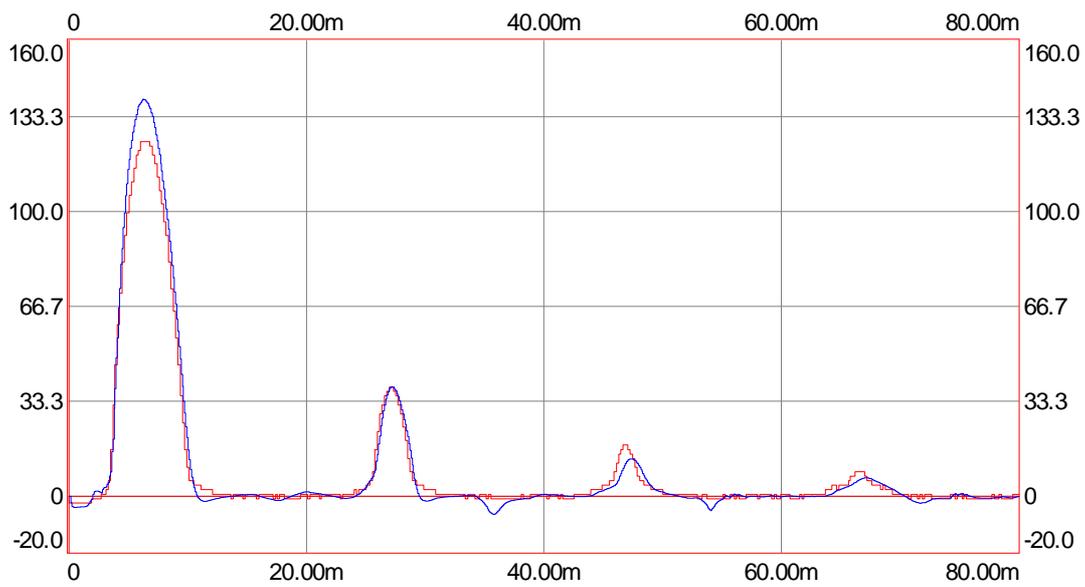


Figura 30. Comparación corriente real y estimada. Alimentación sinusoidal.

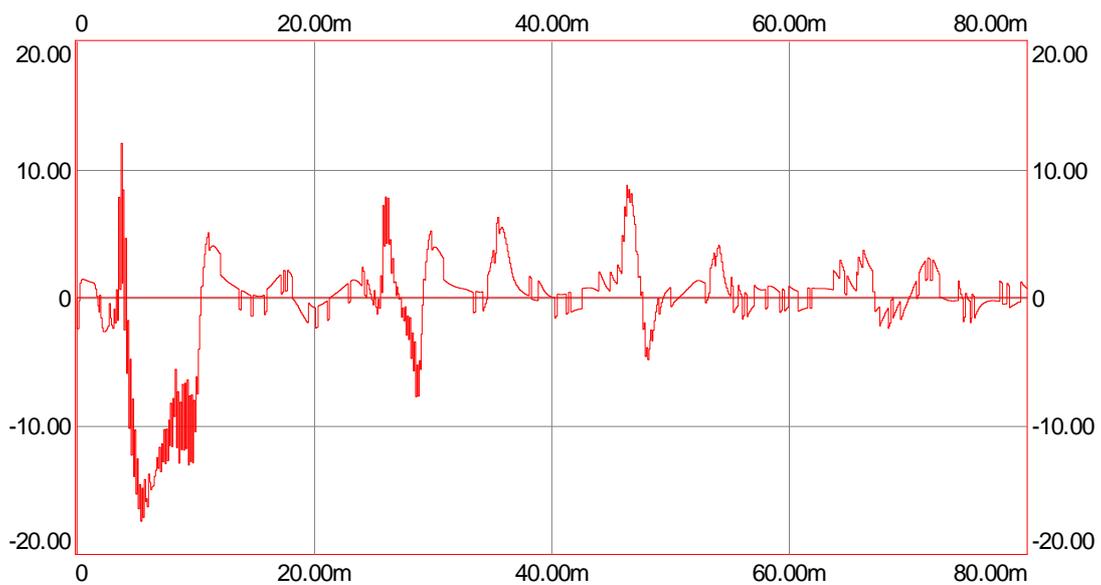
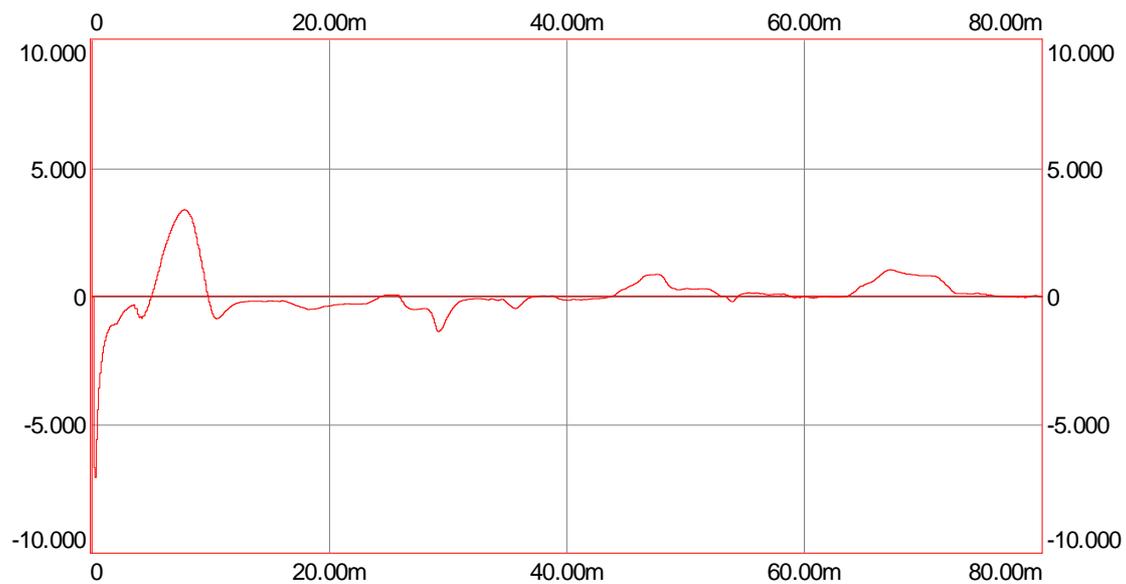
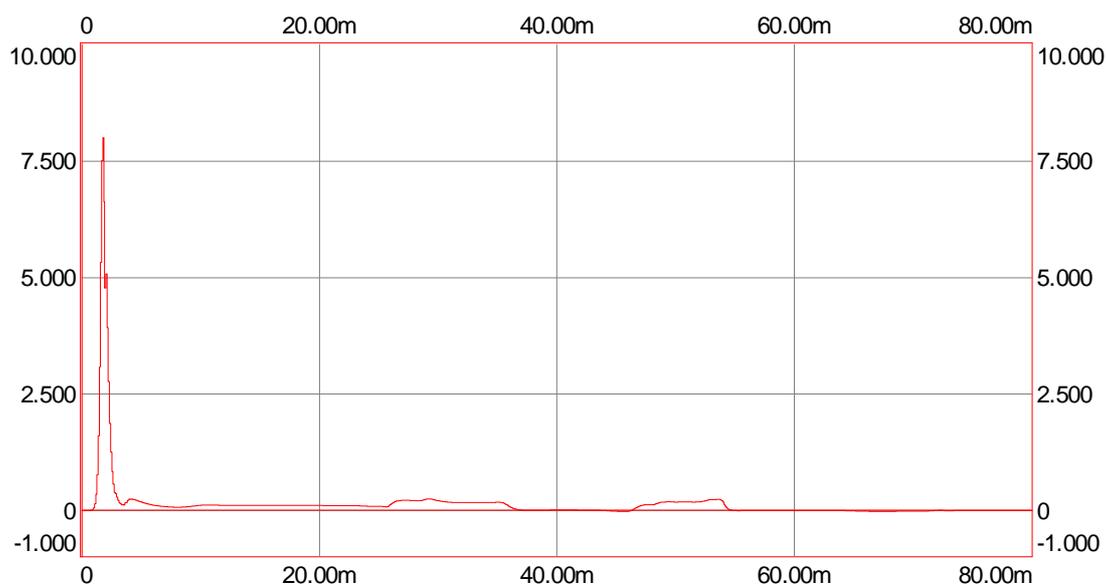


Figura 31. Error de estimación. Alimentación sinusoidal.

Figura 32. Parámetro $\hat{a}(t)$. Alimentación sinusoidal.Figura 33. Parámetro $\hat{b}(t)$. Alimentación sinusoidal.

En la figura 34 se representa la evolución de la corriente real y la corriente estimada para el caso de alimentación PWM. Se observa la convergencia de la última al valor real en un tiempo no superior a 15 ms (1 periodo de la onda). En la figura 35, se representa el error de observación. Las figuras 36 y 37 representan la evolución de los parámetros identificados en función del tiempo.

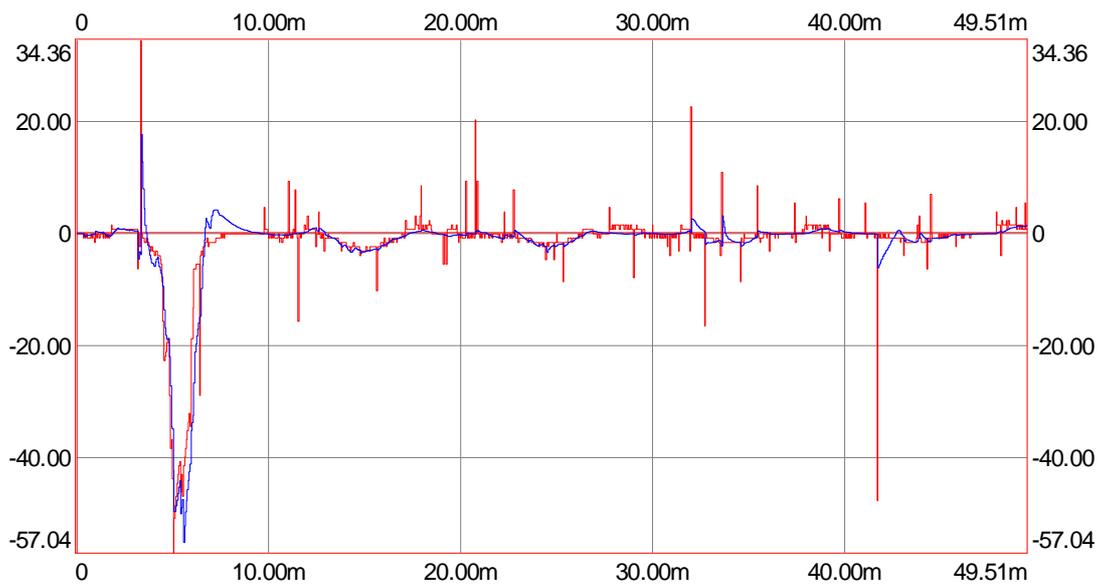


Figura 34. Comparación corriente real y estimada. Alimentación PWM.

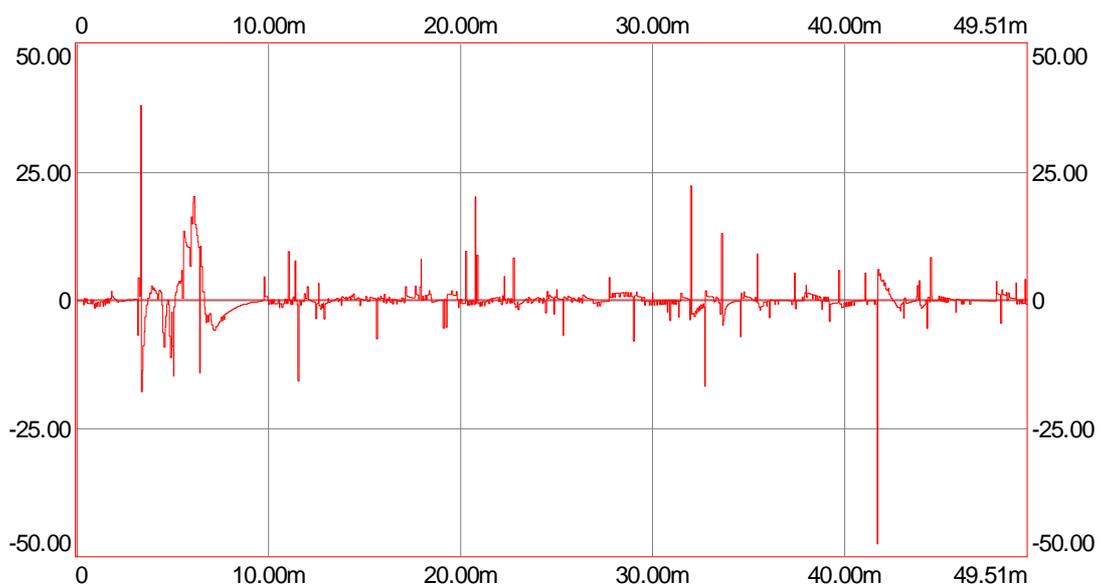
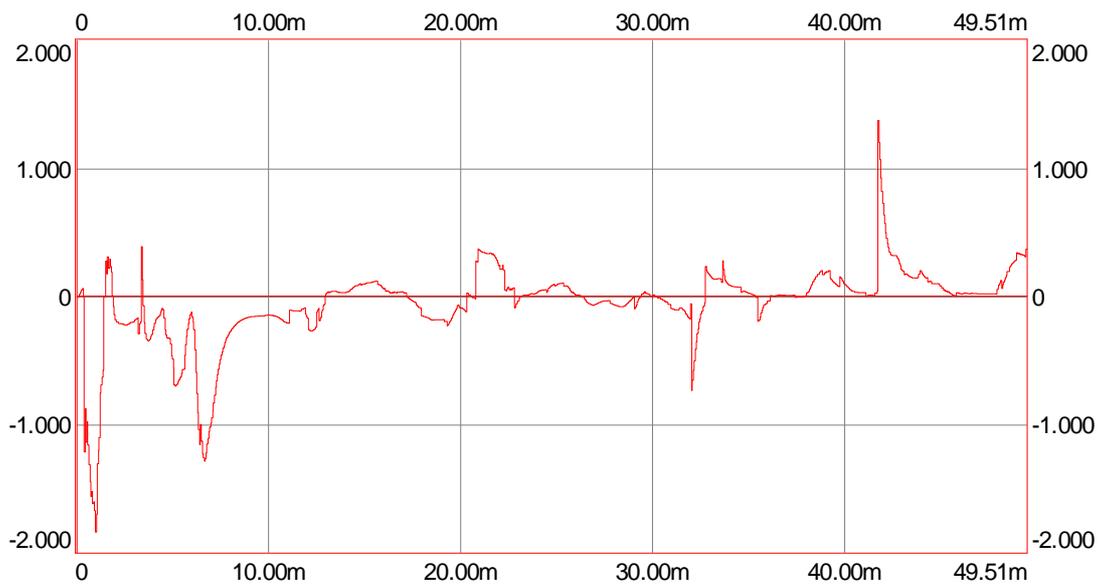
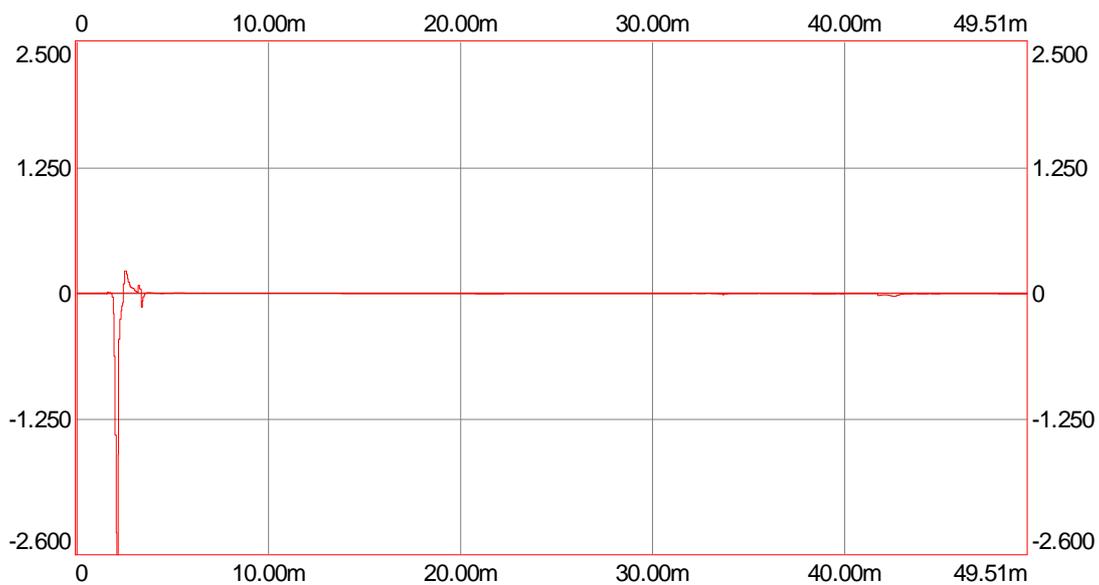


Figura 35. Error de observación. Alimentación PWM.

Figura 36. Parámetro $\hat{a}(t)$. Alimentación PWM.Figura 37. Parámetro $\hat{b}(t)$. Alimentación PWM.

Conclusiones

- El método presentado, permite la caracterización de sistemas magnéticos saturados a partir de medidas realizadas en línea.

- Simulación

- En todos los casos se llega a resultados correctos en la estimación del flujo y de la corriente de magnetización.
- En el segundo caso (alimentación sinusoidal sin apenas corriente de conexión) existe una desviación en el valor final de los parámetros estimados; ello puede ser debido a las relativamente pobres condiciones de la señal sinusoidal para discernir la identificación de dos parámetros (máximo teórico posible con este tipo de señal).
- En el caso de alimentación PWM se logra la convergencia a valores correctos.

- Contrastación experimental

- Los parámetros estimados difieren de los obtenidos en ensayos previos fuera de línea y de los obtenidos por simulación. Caben diversas fuentes de discrepancia:
 - Fenómenos no modelados : histéresis.
 - Error de cuantización. La resolución con la que se discretizan las señales es pobre (8 bits) para representar todo el rango de valores posibles en el transitorio de conexión (255 valores para un rango de corrientes que varía aproximadamente entre ± 140 A y para un rango de tensiones que varía entre ± 400 V).
- Los parámetros obtenidos por ensayos fuera de línea son hallados a partir de medidas en régimen permanente y considerando valores eficaces de tensión y corriente; en la identificación en línea se consideran valores instantáneos de tensión y corriente lo que puede llevar a una interpretación diferente para los parámetros obtenidos por el algoritmo.