

CAPÍTULO 2: ELEMENTOS BÁSICOS

2.1. - Introducción

Los motores eléctricos son convertidores electromecánicos de energía, es decir, que utilizan las fuerzas de origen electromagnético para producir trabajo mecánico.

Puesto que todas las transformaciones de energía se hacen a través de un campo magnético, el conocimiento del mismo es esencial para la descripción del funcionamiento de la máquina.

En las máquinas eléctricas se han usado, desde su invención, materiales ferromagnéticos e imanes permanentes para generar y conducir los campos magnéticos. En general, estos materiales son bien conocidos y la literatura técnica sobre los mismos es muy abundante.

La contribución de los materiales magnéticos en la interacción electromagnética, suele parametrizarse mediante la permeabilidad μ . El valor de la misma es prácticamente el mismo para la mayoría de materiales aislantes no magnéticos que forman parte de las máquinas eléctricas (aceite, plásticos, cerámicos, aire, etc.).

En los materiales conductores no ferromagnéticos como el cobre, aluminio, estaño y sus aleaciones, la permeabilidad es similar a la del aire para intensidades de campo continuas. En el caso de campos alternos, sin embargo, la permeabilidad debe incluir los efectos del campo debido a las corrientes inducidas que dan al conductor un comportamiento parcialmente diamagnético, aunque el hecho de que estas corrientes no están en fase con el campo, obliga a considerar la permeabilidad como una magnitud compleja que afecta a la fase de campo^[Fitzgerald].

Para los materiales ferromagnéticos (hierro y derivados), la permeabilidad alcanza valores mayores que en el resto hasta cuatro ordenes de magnitud. Esto les convierte en materiales idóneos para obtener campos intensos con corrientes bajas. Sin embargo, estos materiales se saturan dando lugar a un comportamiento no lineal, por lo que la permeabilidad no es constante.

En los cálculos técnicos para circuitos magnéticos, se usan las ecuaciones de Maxwell que se simplifican por la dimensionalidad de los circuitos, simetrías de los mismos y las frecuencias utilizadas en la práctica. Se usan preferentemente aquellas cuyos parámetros sean fácilmente medibles o conocidos y, por lo tanto, aplicables prácticamente.

El presente trabajo trata de motores con materiales superconductores, cuyo comportamiento magnético es diferente al de los materiales conocidos hasta ahora. La magnetización de los mismos sigue un proceso opuesto a los materiales ferromagnéticos y por ello su estudio debe realizarse de forma diferente.

En este capítulo se introducen de forma breve las ecuaciones generales que estudian los campos magnéticos y, a continuación, se introducen los imanes permanentes y los superconductores.

Un estudio detallado de los materiales magnéticos puede ser encontrado en [Plonus]. Aquí se resumen sus propiedades para mostrar las diferencias entre materiales ferromagnéticos y superconductores.

2.2 Ecuaciones generales

La forma diferencial de las leyes del electromagnetismo es conocida como ecuaciones de Maxwell ^[Lorrain], donde cada una de ellas relata localmente el comportamiento eléctrico y magnético. Son las siguientes:

$$\text{Conservación del flujo:} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{Ley de Gauss:} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.2)$$

Generalización de Maxwell de la Ley de Ampere:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (2.3)$$

Ley de Inducción de Faraday

$$\nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.4)$$

A ellas, suele unirse la de conservación de la de la carga:

$$\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

El conjunto de ecuaciones de Maxwell proporcionan soluciones a la propagación de ondas que permiten el estudio de guías de onda, antenas, etc. Sin embargo, para muchos problemas magnetodinámicos, no se requiere una solución que incluya la radiación electromagnética. Esto es porque para frecuencias menores que 10^7 Hz, las longitudes de onda asociadas a estas ondas son mucho más largas que el propio circuito en el que estamos interesados. Por ejemplo, la longitud de onda de una onda de 10^6 Hz es de 300 m. ($3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6}$).

El término de las ecuaciones de Maxwell que tiene en cuenta la propagación de ondas es la corriente de desplazamiento:

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (2.6)$$

Si se desprecia, tenemos la aproximación quasi-estática, donde la ley de Ampere queda , en forma diferencial e integral así :

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \quad (2.7)$$

$$\oint_c \bar{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \bar{J} \cdot d\mathbf{a} = I \quad (2.8)$$

Donde I es la corriente total que penetra en el área cerrada por C.

Como hemos visto, tenemos dos ecuaciones para describir los campos magnéticos:

-Ley de Ampere:

$$\nabla \times \bar{B} = \mu \cdot \bar{J} \quad (2.9)$$

-Ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (2.10)$$

La aplicación directa de las mismas es complicada y conduce a sistemas difícilmente resolubles analíticamente. Por ello, se introduce la definición de potencial vector A .

La ley de Gauss indica que B es solenoidal (divergencia igual a cero), y por lo tanto, existe un vector A que cumple:

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad (2.11)$$

Éste se completa con la condición de Coulomb

$$\nabla \times \bar{A} = 0 \quad (2.12)$$

para definir unívocamente dicho potencial vector

Ahora, la ley de Ampere queda como:

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = -\nabla^2 \bar{A} - \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) = \mu_0 \bar{J} \quad (2.13)$$

Es decir:

$$\nabla^2 \bar{A} = \mu_0 \bar{J} \quad (2.14)$$

conocida como ecuación de Poisson, que es una expresión más sencilla de resolver por cuanto podemos descomponer la laplaciana en tres ecuaciones escalares.

La introducción de medios materiales en un campo se puede representar mediante la magnetización, que se define como:

$$\bar{M} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{H} \quad (2.15)$$

Es una de las maneras de representar las propiedades magnéticas de un objeto. En algunos casos, ésta es la única magnitud que se conoce del material, lo que justifica la utilización de una formulación basada en la misma para resolver los problemas.

Una carga, al girar sobre si misma o alrededor de un núcleo, define un circuito eléctrico por el que circula corriente. Se le puede asociar un vector momento magnético dado por:

$$\bar{m} = I \cdot \bar{S} \quad (2.16)$$

Donde m = momento magnético
 I = corriente que circula
 S = área que define esta corriente

Este vector es ortogonal al plano que contiene la corriente

Dentro de un material, al girar los electrones tanto sobre si mismos como en sus órbitas, o los propios núcleos, generan un momento magnético que es responsable de sus propiedades magnéticas macroscópicas.

Se define el vector magnetización como el momento magnético por unidad de volumen, es decir, la densidad de momentos magnéticos:

$$\bar{M} = \frac{\bar{m}}{V} \quad (2.17)$$

2.3 Fuerzas magnéticas

Teniendo en cuenta que el objetivo de este trabajo es el estudio de un motor con elementos superconductores, debe hacerse especial mención a las distintas expresiones que se pueden utilizar para el cálculo de fuerzas^[Moon] y, por lo tanto, de pares en el motor. A continuación se presentan las expresiones más conocidas:

a.- Fuerza sobre un cuerpo magnetizado

Cuando un momento está sometido a un campo magnético, la fuerza que se ejerce sobre él viene dada por la expresión:

$$\bar{F} = \mu_0 \cdot (\bar{m} \cdot \nabla) \bar{H} \quad (2.18)$$

donde H= campo magnético externo

Si en vez del momento aislado tenemos un material donde hay una distribución de momentos, entonces se llega a la expresión:

$$\bar{F} = \mu_0 \cdot \int_v (\bar{M} \cdot \nabla) \bar{H}_0 \, dv \quad (2.19)$$

Esta expresión nos permite calcular la fuerza que se ejerce sobre un volumen V con una magnetización M sobre el que se aplica un campo externo H. Se puede obtener la fuerza a partir de la curva de magnetización y el campo externo aplicado

b.- Fuerza entre corrientes

La fuerza, expresada por unidad de longitud, entre dos corrientes que circulen por hilos paralelos viene dada por:

$$\frac{\bar{F}}{l} = \mu_0 \frac{l_1 l_2}{2\pi r} \quad (2.20)$$

donde: I₁= corriente por el hilo 1

I₂= Corriente por el hilo 2

r= distancia entre dos hilos

En el caso de ser corrientes de sentido contrario, entre ambos conductores aparece una fuerza de repulsión. Si las corrientes tienen el mismo sentido, el sentido de la fuerza que aparece es el de atracción

Esta expresión se puede extender para cualquier par de circuitos aunque no sean paralelos:

$$\vec{F} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4 \pi r} \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{\partial \vec{S}_1 \times (\partial \vec{S}_2 \times \vec{R})}{R^3} \quad (2.21)$$

Donde: $dS_1 =$ vector

diferencial a lo largo del camino 1

$dS_2 =$ vector diferencial a lo largo del camino 2

$R =$ vector de posición de dS_1 a dS_2

Esta expresión se utilizará cuando modelicemos los dos cuerpos con las corrientes que circulan por ellos o por corrientes que produzcan campos magnéticos equivalentes.

c.- Fuerza sobre corrientes:

Si tenemos una corriente en presencia de un campo:

$$\vec{F} = I \oint d\vec{S} \times \vec{B}_0 \quad (2.22)$$

donde $I =$ corriente que circula

$dS =$ vector diferencial en este camino

$B =$ campo magnético

Si la corriente está distribuida en un volumen:

$$\vec{F} = \int_V \vec{J} \times \vec{B}_0 \, dV \quad (2.23)$$

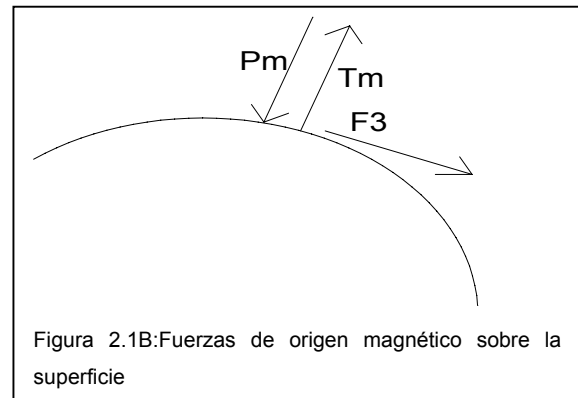
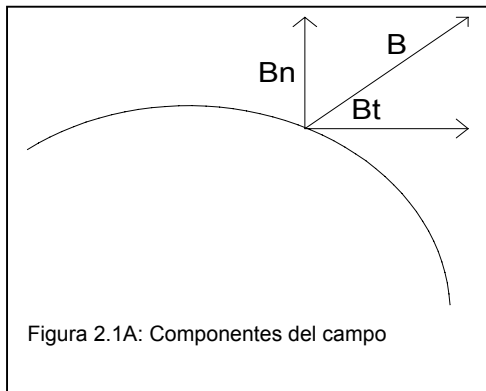
donde: $J =$ densidad de corriente

$B =$ campo magnético

$V =$ volumen sobre el que está distribuida la corriente

d.- Fuerza sobre un recinto cerrado:

A partir de las ecuaciones de Maxwell, se puede demostrar que dada una superficie cerrada S , que define un volumen V que contiene fuentes de campo magnético, cada elemento de superficie está sometido a una fuerza magnética que puede descomponerse en tres términos ^[Moon] :



1.- Tensión magnética:

$$\overline{T}_m = \frac{\overline{B}_n^2}{2 \mu_0} \quad (2.24)$$

2.- Presión magnética:

$$\overline{P}_m = \frac{\overline{B}_t^2}{2 \mu_0} \quad (2.25)$$

3.- Corte o deslizamiento magnético:

$$\overline{F}_3 = \frac{\overline{B}_n \overline{B}_t}{\mu_0} \quad (2.26)$$

La fuerza total ejercida sobre la superficie es :

$$\overline{F} = \frac{1}{2 \mu_0} \int_s \left[(\overline{B}_n^2 - \overline{B}_t^2) \vec{n} + 2 \overline{B}_t \overline{B}_n \vec{t} \right] dA \quad (2.27)$$

La expresión 2.26 se usa cuando se conocen los campos magnéticos totales resultantes de la interacción entre dos cuerpos. No interviene la contribución de cada uno al campo magnético total. De ella pueden extraerse algunas ideas que nos permitirán comprender aspectos fundamentales en nuestro motor como son la fuerza de levitación del rotor y el par producido. Puede observarse como:

- Si se aumenta la componente normal del campo total, se incrementa la fuerza repulsiva.

- Si se incrementa la componente tangencial del campo total, se incrementa la fuerza de atracción.

- Ambas componentes contribuyen a la fuerza de levitación el rotor

- La fuerza tangencial es proporcional a ambas componentes del campo. Esta componente será la responsable del par ejercido por el rotor.

e.- Fuerza como variación de la energía

Un método general que permite calcular la fuerza magnética viene dado por la expresión ^[Fitzgerald]:

$$\overline{F} = -\nabla \cdot W \quad (2.28)$$

Donde W = Energía del sistema

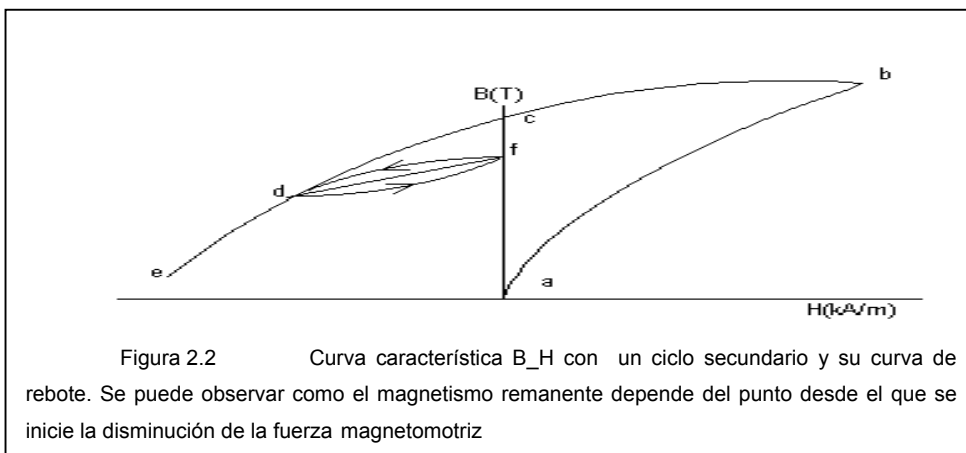
Según el modelo que se tome para el superconductor se usará una u otra expresión. En nuestro caso, la (2.18) nos permitirá analizar la bondad de las distintas configuraciones, puesto que se conoce la curva de magnetización del superconductor y no resulta complicado conocer la forma del campo magnético externo, que será el creado por los devanados del motor.

Para el cálculo del campo externo se pueden usar las anteriores ecuaciones de Maxwell, pero estas ecuaciones no son resolubles con facilidad, salvo para estructuras geométricas muy simples. Para la mayoría de casos, la complejidad geométrica de las estructuras utilizadas aconsejan usar programas de elementos finitos, para el cálculo de campos magnéticos, fuerza, etc.. Se basan en la aplicación de las ecuaciones de Maxwell en sistemas que han sido previamente discretizados. La mayoría de ellos permiten que sea el usuario quien escoja tanto la discretización, mediante la definición del tamaño de la malla, como las condiciones de contorno.

Alguno de los programas comerciales más usados para estos cálculos, han sido comprobados y validados por múltiples investigaciones previas^[Mora]. En el apartado de simulaciones, veremos los resultados de aplicar uno de ellos a la modelización de nuestra máquina.

2.4 Imanes permanentes

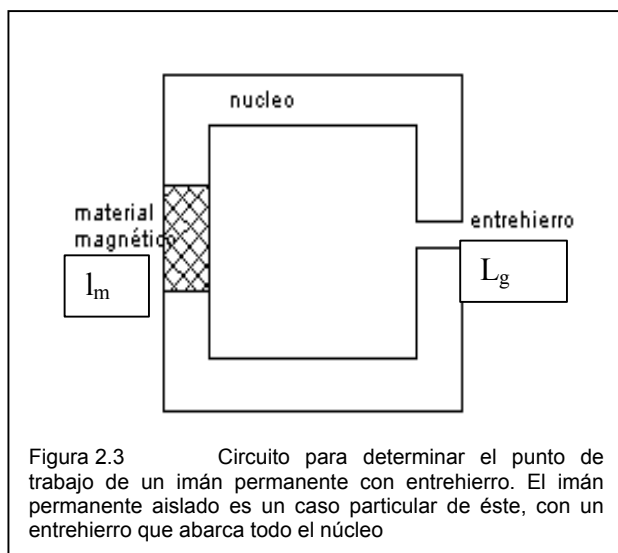
Las ecuaciones vistas en los apartados anteriores muestran la generación y comportamiento de los campos magnéticos. En todos los dispositivos de conversión de energía, es grande la importancia de los materiales magnéticos. Se usan para obtener grandes densidades de flujo con valores pequeños de fuerza magnetizante. La densidad de energía almacenada y las fuerzas magnéticas aumentan con la densidad de flujo^[Fitzgerald].



Los materiales magnéticos también se usan para delimitar y dirigir los campos magnéticos por trayectorias que permitan buenos acoplamientos magnéticos entre devanados en el caso de los transformadores, o conseguir buenas características de par en el caso de las máquinas eléctricas rotativas.

Para conducir y crear campo en las máquinas eléctricas tradicionales se han empleado extensamente los materiales ferromagnéticos (blandos) y los imanes permanentes (duros). En los apartados siguientes se muestran las características más importantes de los mismos y su comparación con los materiales superconductores.

Los imanes permanentes son materiales fuertemente histéricos. En la figura 2.2 puede observarse una parte del ciclo de histéresis. En ella se muestra como puede variar el magnetismo remanente según como se produzca la puesta a cero de la corriente magnetizante del circuito. El punto c corresponde al magnetismo remanente para un circuito cerrado si se recorre la curva de histéresis desde el punto b. Si la intensidad magnetizante se hace negativa llegando al punto d y se vuelve a cero, se pasa al punto f. de magnetismo remanente inferior al c. Entre el punto f y el d se ha reproducido un bucle menor que puede ser representado por una recta cuya pendiente algunos autores denominan permeabilidad de rebote^[Fitzgerald].



Si la desmagnetización se llevara más allá del punto d, por ejemplo al punto e, se establecería un nuevo camino de retorno que llevaría al material a un magnetismo remanente inferior al del punto f.

La figura 2.3 muestra un circuito con entrehierro para mostrar el punto de funcionamiento de un imán.

Si se tienen los siguientes valores:

$L_m =$ Longitud del imán

$L_g =$ Longitud del entrehierro

$A_m =$ Área del imán

$A_g =$ Área del entrehierro

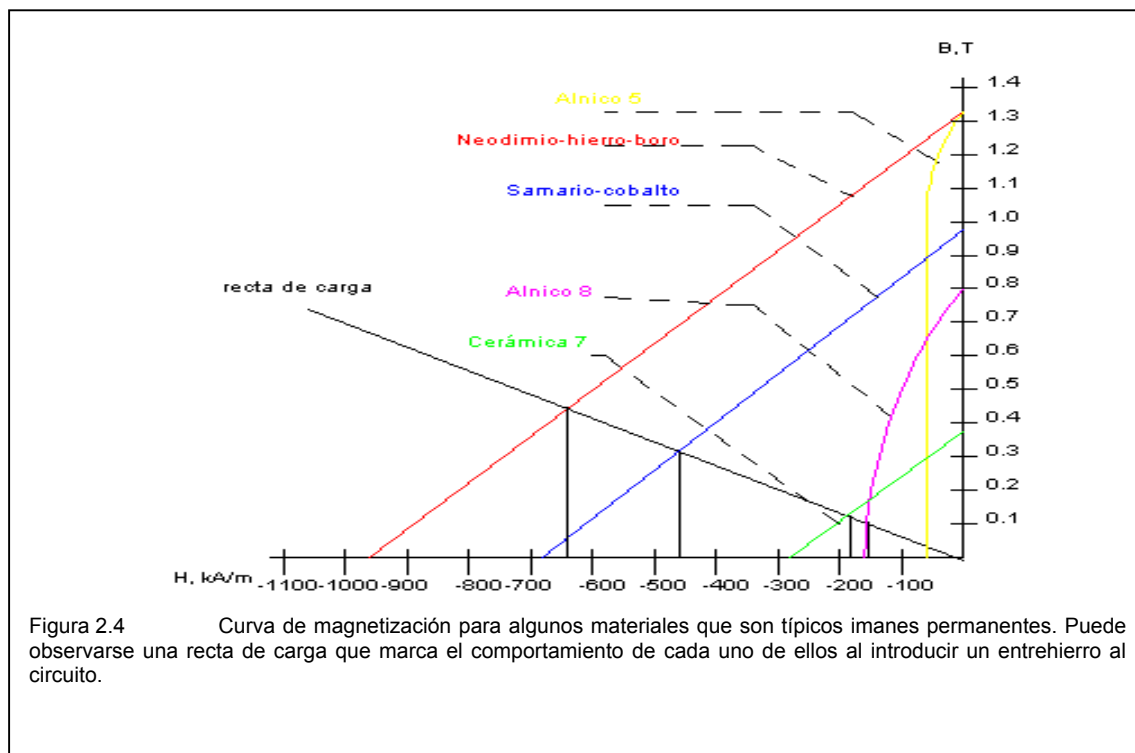
Si se supone para el núcleo de material magnético una permeabilidad infinita, teniendo en cuenta que la fuerza magnetomotriz es igual a cero, se puede poner:

$$F_{mm} = 0 = \bar{H}_g \bar{l}_g + \bar{H}_m \bar{l}_m \quad (2.28)$$

$$\bar{H}_g = -\frac{\bar{l}_m}{\bar{l}_g} \bar{H}_m \quad (2.29)$$

Como el flujo es constante,

$$\bar{B}_g = \frac{\bar{A}_m}{\bar{A}_g} \bar{B}_m \quad (2.30)$$



Y de aquí:

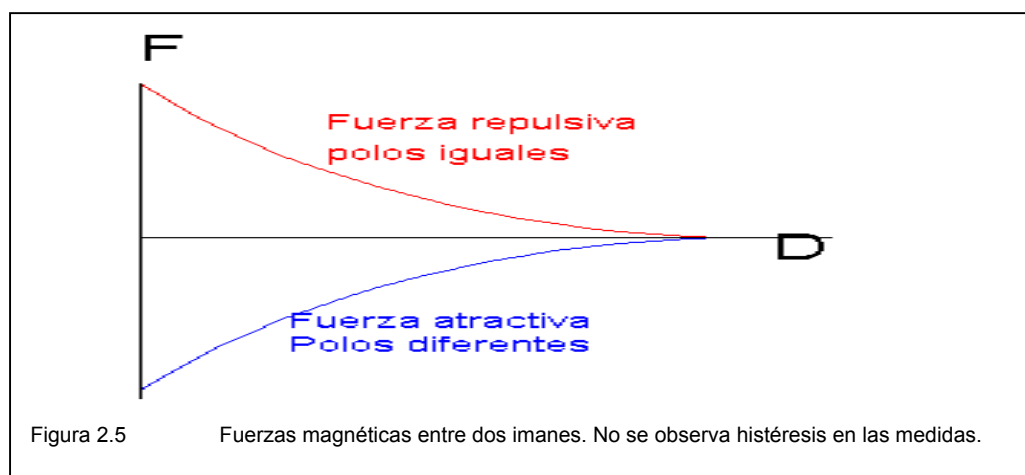
$$\bar{B}_m = -\mu_0 \frac{\bar{A}_g}{\bar{A}_m} \frac{\bar{l}_m}{\bar{l}_g} \bar{H}_m \quad (2.31)$$

que es la ecuación de una recta. La intersección de esta recta, que define la geometría y la curva de magnetización del material, da el punto de trabajo de cada uno de los imanes permanentes.

La figura 2.4 muestra el segundo cuadrante del ciclo de histéresis para materiales que se usan habitualmente como imanes permanentes típicos. Un acero como el M5 tiene un valor parecido de magnetismo remanente (superior a un Tesla). La diferencia entre este material y el acero es que este último tiene un valor de coercitividad de unos 5 A/m. La magnetización remanente B_r corresponde, como se ha dicho en el apartado anterior, a la densidad de flujo que quedaría en una estructura magnética cerrada si la fuerza magnetomotriz aplicada se redujera a cero.

En una estructura con entrehierro, el comportamiento del imán depende no solo del magnetismo remanente sino también de la coercitividad del mismo. Como se puede ver en la figura 2.4, el comportamiento de cada material es muy distinto. Se ha incluido una recta de carga que interseca con los materiales representados en la misma. Se puede observar la gran diferencia de comportamiento entre ellos, incluso entre aquellos que tienen un magnetismo remanente parecido.

Si se juntan dos imanes permanentes iguales, el conjunto resultante actúa como uno único de doble tamaño, como puede deducirse de la ecuación 2.31. En la figura 2.4 la recta de carga del conjunto tendría una pendiente doble, pero la curva B-H se



mantiene igual, puesto que lo caracteriza de forma intrínseca. Por lo tanto, no depende de las dimensiones ni la geometría de la pieza.

La figura 2.5 muestra las fuerzas entre imanes en función de la distancia entre ellos. En ella puede observarse que la fuerza entre dos imanes de la misma polaridad es repulsiva y creciente conforme disminuye la distancia^[Parker]. Análogamente, si los imanes se encuentran en oposición de polos, la fuerza que experimentarán será atractiva y también creciente al reducir la distancia. En ambos casos no se observa histéresis en la medida y los valores máximos de fuerza se corresponden con sus situaciones de equilibrio, estable en el caso atractivo e inestable en el caso repulsivo.

2.5 Superconductores

El presente trabajo está dedicado al estudio de un motor superconductor. Por lo tanto, los materiales superconductores han de ser objeto prioritario de estudio y se dedicará un capítulo entero (capítulo 3) completamente a su descripción. Ahora, nos interesa un resumen de sus propiedades para poder ser comparados con los imanes permanentes que han sido descritos en los párrafos anteriores. Aquí nos referiremos a los superconductores tipo II. Las diferencias con los de tipo I se estudian en el capítulo 3.

2.5.1 El modelo histérico

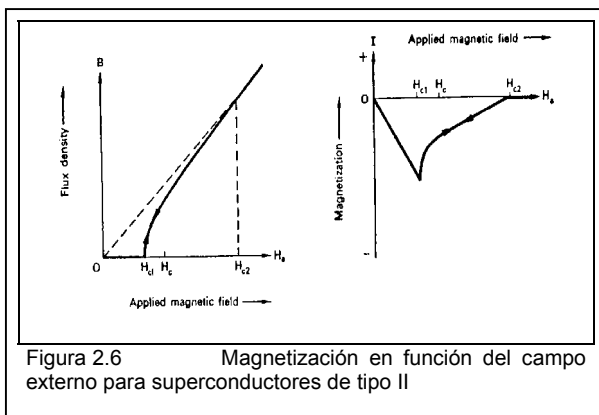
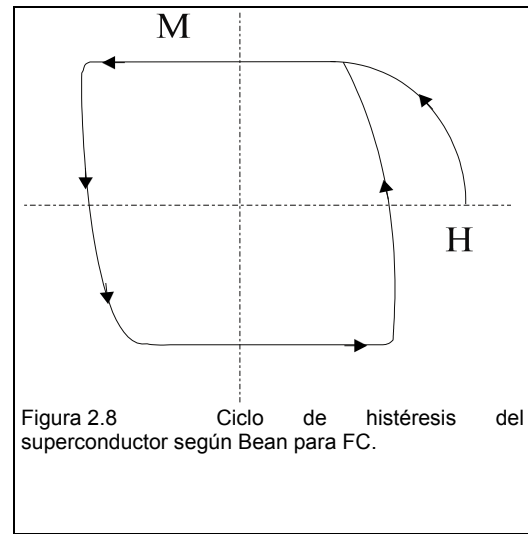
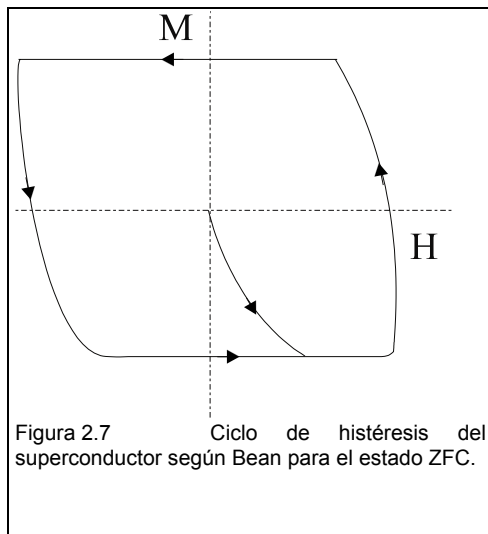


Figura 2.6 Magnetización en función del campo externo para superconductores de tipo II

Un superconductor tiene un comportamiento diamagnético perfecto, siempre que el campo aplicado sea inferior a cierto valor crítico H_{c1} (figura 2.6). La expulsión del campo se consigue mediante la creación de corrientes de apantallamiento en la superficie del superconductor.^{[Sheaden] [Brandt]}

Desde H_{C1} hasta H_{C2} , se produce un estado híbrido que permite la penetración de flujo en el interior del material formando una red de vórtices cada uno de los cuales atrapa un cuanto de flujo magnético. Estos vórtices están formados por pares de electrones superconductores y se desplazan sobre el material de acuerdo con las interacciones con otros vórtices y los defectos de la red cristalina que los puede atrapar anclándolos en la red. La distribución de vórtices, el número de ellos y la movilidad dentro de la red, dependen del campo aplicado, de la temperatura y de los defectos de la red capaces de fijar vórtices. Aumentar el campo aplicado, aumenta el número de

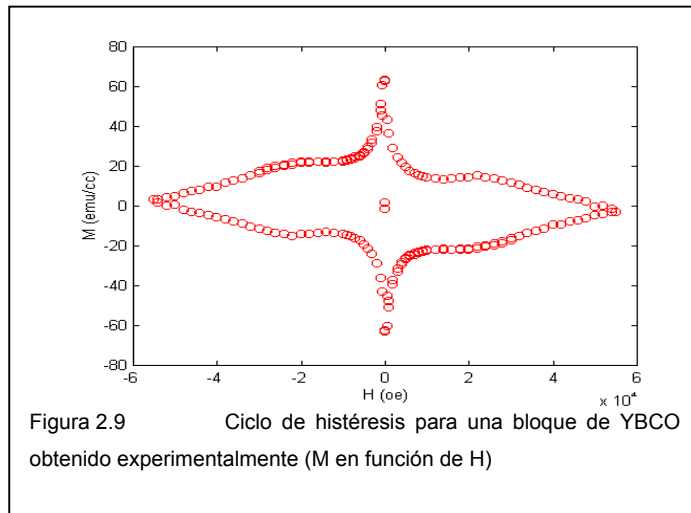


vórtices y, consecuentemente, la magnetización del superconductor, disminuye hasta anularse cuándo el campo alcanza el valor de H_{C2} . En el estado mixto, se acepta la coexistencia de superelectrones libres y superelectrones en estado vórtice. Cuando se supera el valor H_{C2} , el superconductor deja de serlo

La creación y destrucción de la red de vórtices así como su distribución sobre el material introducen una profunda histéresis en el comportamiento de la magnetización del material

Las figuras 2.7 y 2.8 muestran el ciclo de histéresis de este modelo para los casos en que el material ha sido sometido a un campo tras haber sido enfriado (ZFC, enfriado sin campo) y en el que el material ha sido enfriado con el campo aplicado (FC)

En ellas, puede observarse que el ciclo de histéresis se recorre en sentido contrario que en el caso de los imanes permanentes. O sea que, a medida que el campo externo se incrementa en un sentido, se magnetizan en sentido contrario con el objeto, como se ha dicho, de impedir la penetración de flujo en su interior. En el siguiente



capítulo se describe la forma en que esta magnetización tiene lugar.

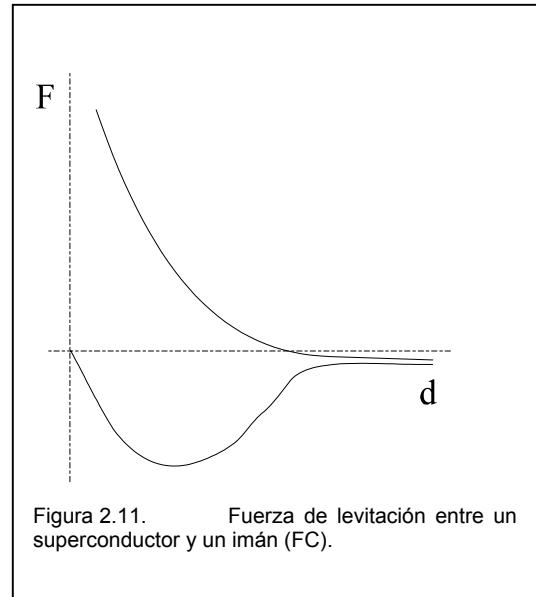
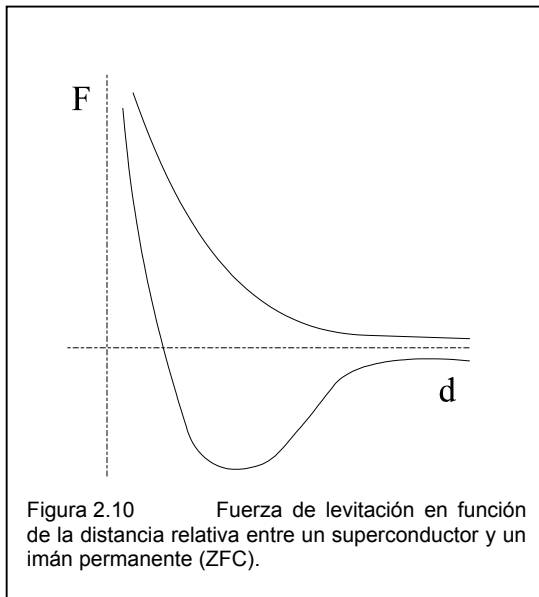
También puede observarse el carácter fuertemente histérico de los superconductores y el efecto de la saturación a partir de un cierto valor de campo externo.

La figura 2.9 muestra el ciclo de histéresis^[Márquez] obtenido experimentalmente

Esta curva muestra los valores de campo magnético externo y la magnetización deducida de los valores obtenidos en distintos puntos de la muestra escogida en la zona de gradientes. La forma es parecida a las curvas correspondientes a medidas directas y muestra un ciclo de histéresis muy ancho.

No existen, para los materiales superconductores, curvas como las mostradas en la figura 2.4 correspondientes a imanes permanentes ya que la magnetización, además de ser opuesta, depende del tamaño y geometría del material. Existen materiales superconductores capaces de atrapar densidades de flujo muy grandes (hasta 13 T). Esto los convertiría en los mejores imanes conocidos hasta el momento. Desgraciadamente los materiales cerámicos difícilmente pueden soportar las fuerzas que se producen con estas densidades de flujo sin fatiga. Actualmente se han conseguido atrapar campos de 4 Tesla de forma reversible, o sea, sin degradación tras diversos procesos de magnetización.

Las figuras 2.10 y 2.11 muestran este comportamiento de la fuerza que ejerce un



imán sobre un superconductor cuando se acercan o alejan en los casos de enfriamiento sin campo (ZFC) y enfriamiento en el interior de un campo magnético (FC)

En ambos casos, la fuerza repulsiva se considera positiva y la atractiva de signo negativo. El acercamiento y alejamiento entre ambos (eje X) se realiza a velocidad muy lenta para evitar contribuciones dinámicas y desde suficiente distancia como para considerar que la interacción inicial o final entre ellos es nula.

-ZFC : Al acercarlos desde la posición más alejada, situación en la que se ha enfriado, el campo en la dirección OX aumenta. Esto origina en el superconductor una magnetización negativa. Como el gradiente en la dirección OX es menor que cero, el producto de la magnetización por el gradiente de campo es mayor que cero, lo que da lugar a una fuerza de repulsión. Si la muestra superconductor llega a saturarse durante el proceso, la curva de la fuerza se correspondería con la del gradiente del campo. En caso de no saturarse, el crecimiento de la fuerza sería mayor.

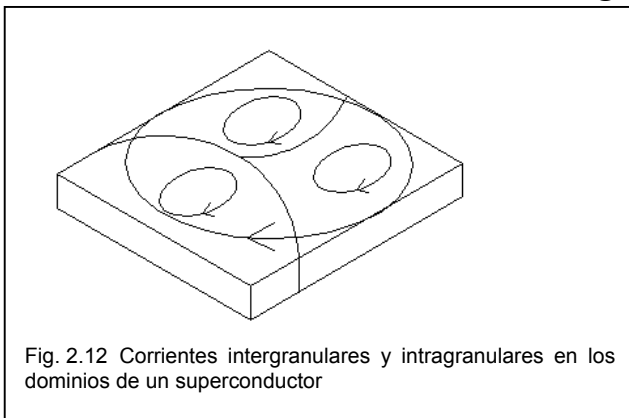
Al alejarse, el campo disminuye, con lo que la magnetización, antes negativa, se invierte pasando por cero. Consecuentemente la fuerza de repulsión decae hasta anularse donde se anula la magnetización. La fuerza se vuelve de atracción justo a partir

de ese punto, ya que la magnetización se invierte y se mantiene así tras pasar por un mínimo, aumentando asintóticamente hasta anularse

-FC : El proceso empieza con el imán y el superconductor tocándose, situación en la que se enfría el superconductor. La fuerza es cero, puesto que la magnetización es cero. Si los intentamos separar, la disminución del campo produce en el superconductor una magnetización positiva. Como el gradiente es negativo, produce una fuerza de atracción. Ésta pasa por un máximo y luego disminuye hasta hacerse cero a distancia infinita. Si ahora los acercamos, M y H siguen siendo positivos, lo que resulta un producto positivo y, por lo tanto, atractivo. H sigue creciendo y M disminuyendo. Cuando M llega a cero se anula la fuerza y a partir de este momento se hace repulsiva hasta llegar a juntarlos con F llegando al máximo. En el capítulo 3 se amplía la explicación de éste fenómeno

Como puede observarse, el comportamiento es totalmente diferente al de un imán permanente cuya magnetización, por orientación de dominios, tiende a reforzar el campo exterior.

2.5.2 Parametrización de la magnetización



En un superconductor, además, hay que escalar la magnetización en función de la geometría de la muestra, de la corriente crítica de la misma, de la temperatura y del tamaño de los granos de la muestra (número de dominios). Diversos estudios muestran^[Mora] que para

un superconductor cilíndrico se pueden tener los valores de la fuerza siguientes:

Pastilla monodominio de radio=15 mm, $J_c=2 \cdot 10^7$ A/m² y altura variable

Altura h(mm)	3	15	60
F_{MAX} ZFC (N)	7	18	32
F_{MAX} FC (N)	7	20	25

Pastilla monodominio de altura=15 mm, $J_c=2 \cdot 10^7$ A/m² y radio variable

Radio (mm)	10	15	20
F_{MAX} ZFC (N)	6	25	58
F_{MAX} FC (N)	7	20	38

Pastilla monodominio de radio=15 mm, altura=15mm y J_c variable

J_c (A/m ²)	$1 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^7$
F_{MAX} ZFC (N)	12	25	45
F_{MAX} FC (N)	12	20	21

Pastilla de radio=15mm, altura=15mm, $J_c=2 \cdot 10^7$ A/m² y numero de dominios variable

Dominios	1	4	9
F_{MAX} ZFC (N)	25	12	7
F_{MAX} FC (N)	20	11	7

En todos los casos puede observarse la gran disparidad de F_{MAX} al variar los diferentes parámetros de la muestra. Ello indica que, al contrario que los imanes permanentes, la curva de magnetización no los caracteriza intrínsecamente sino que se tiene una familia de curvas escaladas con los parámetros indicados. De aquí la enorme dificultad que se presenta en la obtención de una solución analítica, puesto que los

procesos de fabricación actuales no permiten conocer con exactitud como serán las pastillas que se obtendrán al final del mismo.

La temperatura de trabajo será normalmente la de ebullición del nitrógeno. Es por ello que no se ha considerado como variable. Si se trabaja a otra temperatura, habría que modificar todas las fuerzas obtenidas en función de la misma, puesto que modificar la temperatura equivale a variar la corriente crítica de la muestra.

Se pueden correlacionar los tres parámetros modificables en el proceso de fabricación de los materiales superconductores, (presencia o ausencia de semilla, temperatura máxima y gradiente de temperatura), con la fuerza máxima obtenida en la levitación sobre imanes. La siguiente tabla muestra dicha correlación, junto a otros datos como el número de muestras analizado y el tamaño de grano obtenido.

Semilla	Nº muestras	Grano(mm)	Tmax (°C)	Observaciones	F _{MAX} ZFC (N)
No	2	10-20	1060	Gradiente=10°C/cm	15
No	1	10-15	1080	Gradiente=10°C/cm	20
No	2	8-12	1120	Gradiente=10°C/cm	25
Mg O	3	5-8	1050	Isotérmico	18
Nd-123	1	5-8	1050	isotérmico	21
Mg O	1	10-20	1060	Gradiente=10°C/cm	20
Mg O	1	10-15	1060	Gradiente=10°C/cm	23
Nd-123	1	10-20	1060	Gradiente=10°C/cm	25

Las tres primeras, sin semilla, indican la importancia del valor de la temperatura máxima empleada al fundirlas. Las muestras tratadas a 1120 °C optimizaron el binomio orientación- tamaño de grano.

Las siguientes muestran la mejora introducida al usar semilla y en este caso parece preferible usar Nd-123 frente a Mg O como semilla .

2.5.3 Movimiento de un bloque superconductor en el interior de un campo magnético a través de una zona de gradientes

En la figura 2.13 se muestra el campo originado por dos imanes de distinto signo encarados y unidos por un bloque de acero. El conjunto ha sido pensado para conseguir un fuerte gradiente de campo. En esta configuración $\frac{dB_x}{dx}$ es el término más relevante.

La expresión de la fuerza aplicada en el método de la magnetización es:

Si la dimensión es 2:

$$\vec{F} = \int_v (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_0 dV$$

$$\vec{M} = (M_x, M_y)$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y)$$

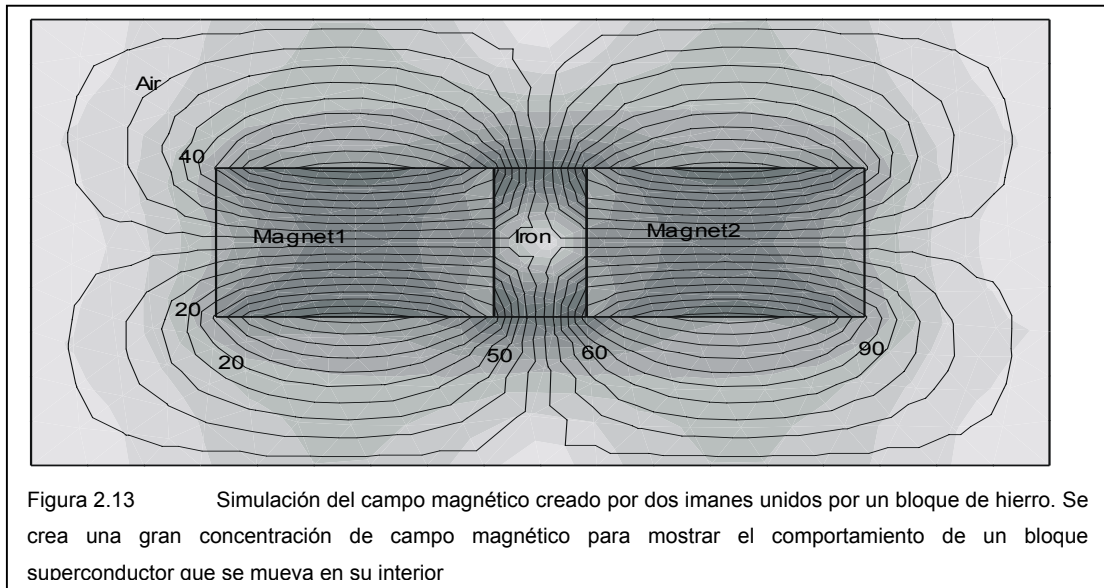
$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$(\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \left(\vec{M}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{M}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) (\vec{B}_x, \vec{B}_y) = \left[\left(\vec{M}_x \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial x} + \vec{M}_y \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial y} \right), \left(\vec{M}_x \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial x} + \vec{M}_y \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial y} \right) \right]$$

$$\vec{F}_x = \left(\vec{M}_x \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial x} + \vec{M}_y \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial y} \right)$$

La fuerza sobre un superconductor que avance de izquierda a derecha, depende del valor de las derivadas del campo externo y la magnetización que se produce en el material superconductor. El valor del campo lo obtendremos mediante simulación. Del archivo de datos procedente de la simulación, obtendremos las derivadas. Para conocer la magnetización, se debe disponer de las curvas M-H del material superconductor.

Para la simulación se ha tomado los siguientes valores:



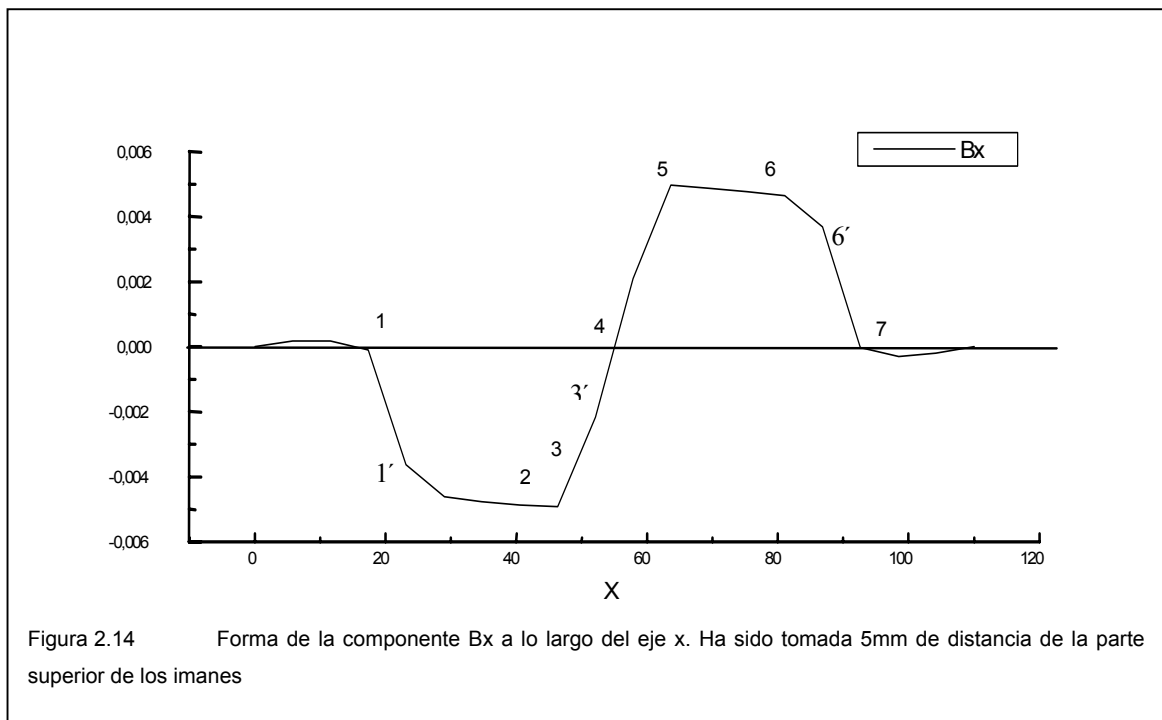
Aire: $\mu_{RX}=\mu_{RY}=1$;

Hierro: $\mu_{RX}=\mu_{RY}=2000$;

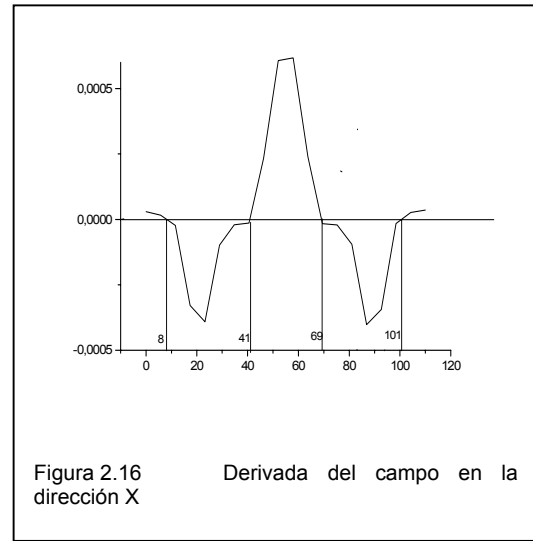
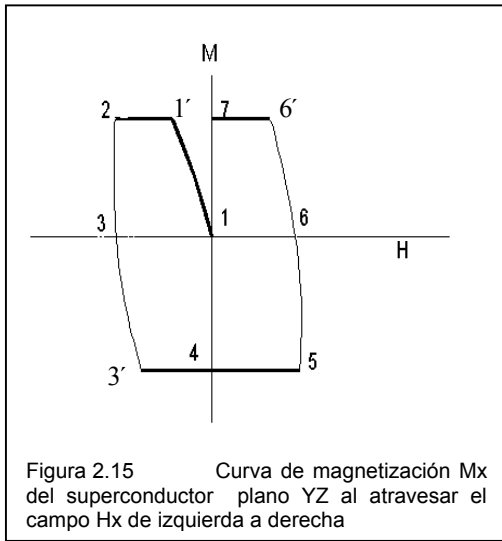
Imán 1: $\mu_{RX}=\mu_{RY}=1$; $H_{CX}=10000$ A/m; $H_{CY}=0$ A/m

Imán 2: $\mu_{RX}=\mu_{RY}=1$; $H_{CX}=-10000$ A/m; $H_{CY}=0$ A/m

La figura 2.13 muestra el conjunto de imanes - hierro y el campo magnético creado.



La figura 2.14 muestra la forma de la componente B_x a lo largo del eje x . Se ha tomado a una distancia de 5mm de la parte superior de los imanes.



Como hemos visto, la fuerza que se ejerce sobre el bloque superconductor en la dirección del eje x depende de la derivada del campo externo (dB_x/dx) y de la magnetización del superconductor. La figura 2.15 muestra una curva típica de magnetización del superconductor y la figura 2.16 el valor de la derivada indicada.

La curva de magnetización empieza con un valor cero (suponemos un proceso ZFC).

A medida que penetra en el campo magnético negativo (1), empieza a magnetizarse positivamente hasta alcanzar la saturación. La magnetización entonces se mantiene constante a pesar que el campo externo siga disminuyendo. (2)

A partir de (2), el campo externo empieza a crecer positivamente, con lo que la magnetización disminuye hasta pasar por cero y hacerse negativa hasta su saturación (4). Ahora se mantiene constante a pesar que el campo siga creciendo hasta (5). A partir del punto de campo máximo, éste empieza a disminuir con el consiguiente incremento de la magnetización que pasa por cero en (6), sigue hacia su saturación positiva y luego se mantiene constante hasta el punto (7).

Estos puntos están indicados tanto en la curva de magnetización como en la curva de la componente B_x del campo externo (Figura 2.14) para comprobar su correspondencia.

Puesto que la fuerza viene dada por el producto de ambas, interesa ver en cada punto el signo de las mismas, para conocer si el producto es positivo (fuerza atractiva) o negativo (fuerza repulsiva). La siguiente tabla muestra este signo para distintos valores del eje X:




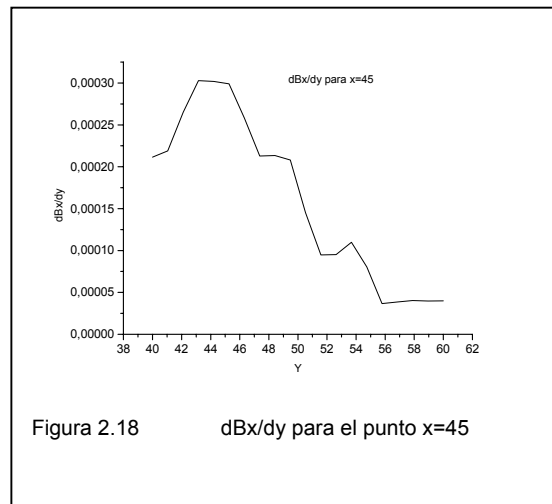
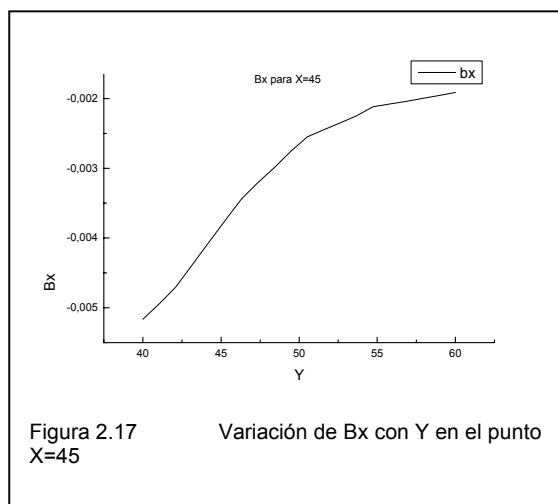
		51		79	
M		+	-	-	+
		41		69	
D		-	+	-	-
		41	51	69	79
P		-	+	-	+

Tabla 2.1 Signo de la magnetización (M) y la derivada del campo en la dirección x(D), para cada punto del ejemplo. P representa el signo del producto de M *D

Hay 2 tramos donde el producto es positivo. Son puntos de equilibrio. Para pasar por el resto hay que ejercer fuerza sobre el superconductor.

Hasta aquí, hemos visto como es el primer término de la ecuación de la fuerza F_x . Veamos como sería el segundo:

Para el segundo término de la fuerza en la dirección de las X, $(M_y \cdot dB_x/dy)$, buscaremos ambos en diversos puntos del recorrido. Tomemos por ejemplo el punto $X=45$. Encontraremos la forma de B_x en esta coordenada X y de ella y la curva B-H del superconductor, podemos saber el valor de la magnetización en cada punto. Recordemos que la magnetización en la dirección Y es distinta de la magnetización en la dirección X, puesto que, como hemos visto, el superconductor es un material claramente anisótropo. El producto de la magnetización por la derivada, nos dará el valor del segundo término de la fuerza. Las figuras 2.17 y 2.18 muestran los valores indicados.



Si se supone conocida la curva de magnetización en la dirección Y, el procedimiento a seguir es el mismo al usado para calcular el primer término de la ecuación

Si suponemos una magnetización negativa (B_x está creciendo) y la derivada positiva, vemos que el producto es negativo. Para conocer el sentido total de la fuerza habría que cuantificar cada uno de los dos términos de la misma. En este caso, se consideran los planos ab del superconductor perpendiculares al movimiento, y por lo tanto, la magnetización M_y será de un orden de magnitud inferior, por lo que los términos afectados por ella, no se han considerado

Se ha indicado el proceso a seguir para un punto de la coordenada X del superconductor, pero éste ocupa el volumen definido por las coordenadas $X=20$ mm hasta $X=90$ mm y desde $Y=20$ mm hasta $Y=40$ mm, o sea 70×20 mm². El proceso indicado anteriormente habría que hacerlo para todo el volumen del superconductor

El apartado anterior muestra la dificultad de modelizar el comportamiento real del superconductor. Algunas geometrías permiten simplificaciones a base de discretizar una dimensión (por ejemplo el eje X) y realizar los cálculos para varios puntos del mismo. Se toma el valor medio de los mismos como representativo.

Esta técnica ha sido usada en el capítulo 6 al realizar el análisis del motor de flujo axial. Con ello se pierde exactitud, pero permitirá sacar conclusiones para el diseño de motores superconductores.

A lo largo de este capítulo hemos visto como se comporta un imán y un superconductor y algunos ejemplos de cálculo en cada caso. En el siguiente apartado se muestra la simulación de un imán y un superconductor geoméricamente iguales y las curvas de campo tomadas a distancias regulares de los mismos.

La geometría para la modelización del imán y del superconductor, supone simetría axial y se ha dibujado en el plano RZ. Las coordenadas están en milímetros y se han incluido en el dibujo del imán. Para poder comparar, se han incluido las curvas de la componente Bz para cinco líneas de longitud 100 mm y distintas coordenadas Z. La primera a 20 mm de la superficie del material y las otras cuatro a 20 mm de la anterior.

Para la simulación del imán se ha supuesto una intensidad de campo de $9,6 \cdot 10^5$ A/m. La permeabilidad del material se ha considerado algo inferior a la del aire, que se corresponde con la del Nd Fe B de grado 35. La figura 2.19 muestra la geometría y el campo resultante. La figura 2.20 muestra el valor de Bz a lo largo de las cinco líneas indicadas. Puede observarse como el efecto de autocampo hace que el campo crezca desde el centro hacia los bordes.

Para la simulación del superconductor se ha supuesto una densidad de corriente de $2 \cdot 10^8$ A/m² y una permeabilidad relativa de valor 1. La figura 2.21 muestra como el campo decrece desde el centro hacia los bordes.

En las figuras 2.19 y 2.21, se ha aprovechado la simetría para representar solo una parte del componente. En ambas el eje R es el vertical y el eje Z el horizontal. Las coordenadas son las indicadas en la figura 2.19.

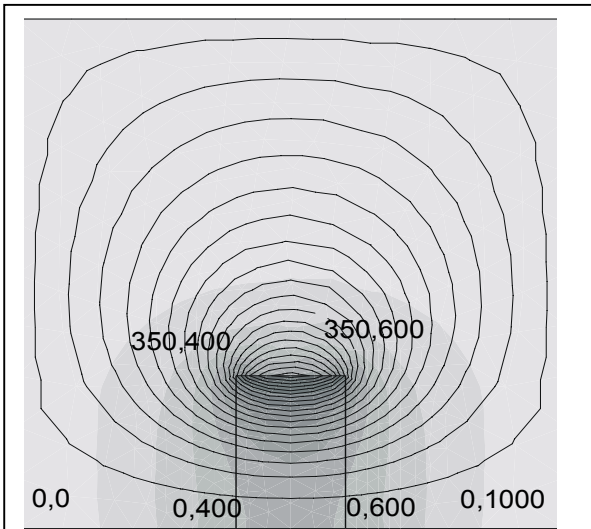


Figura 2.19 Modelización de un imán (NdFeBizq). Se han incluido las coordenadas Z y R en mm. Para la simulación se ha considerado una $H_z=960000$ A/m y $\mu_z=\mu_R=0.994718$

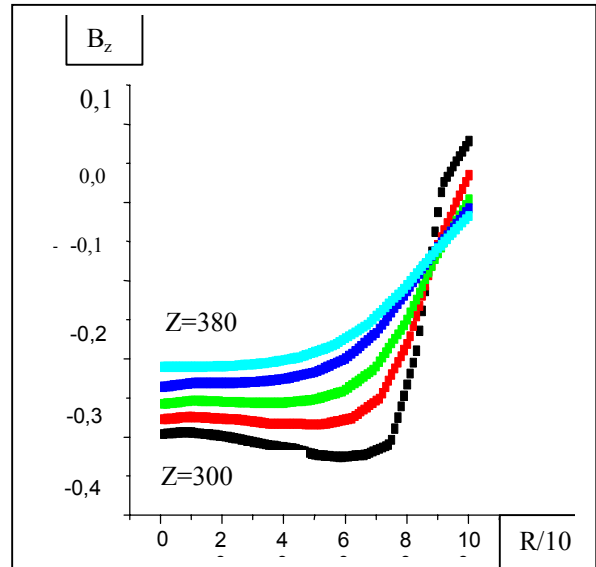


Figura 2.20 Campo creado por el imán de la figura 2.19. Se puede observar el efecto de autocampo.

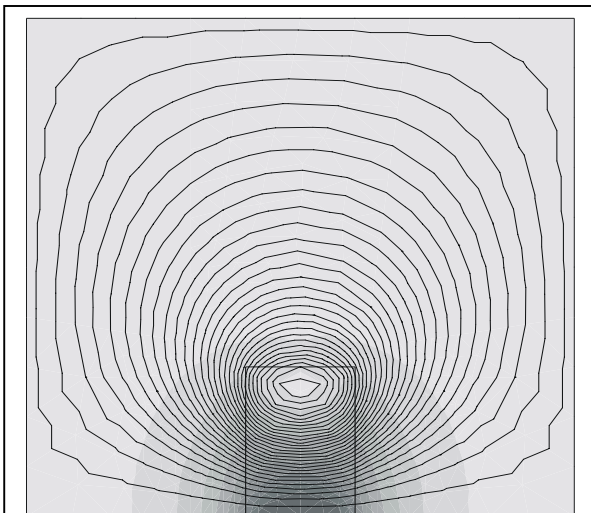


Figura 2.21 Modelización de un superconductor de las mismas dimensiones que el imán de la figura 2.21. Se ha supuesto una densidad de corriente de $j=2e^8$ A/m².

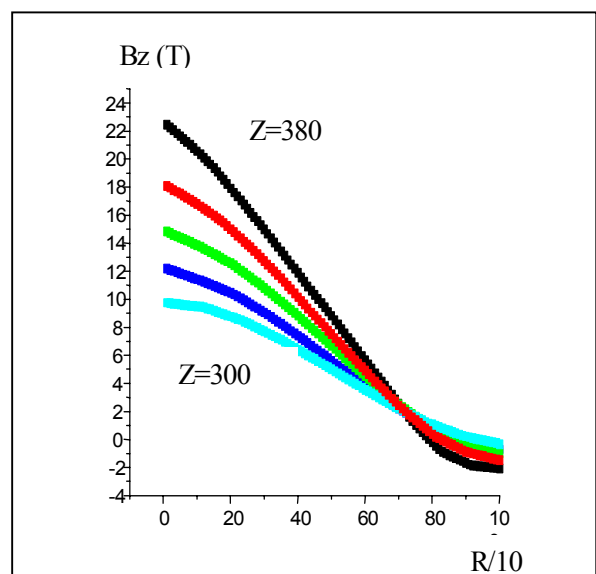


Figura 2.22 Campo creado por el superconductor de la figura 2.21

2.6 Analogías y diferencias entre un imán y un superconductor

Como se ha visto a lo largo del presente capítulo, los imanes usados habitualmente y los superconductores, muestran un comportamiento magnético que presenta ciertas analogías y diferencias.

-Analogías:

- Ambos son materiales que se magnetizan al introducirlos en un campo externo
- Ambos son materiales fuertemente histeréticos.

-Diferencias:

La siguiente tabla muestra las diferencias de comportamiento de un superconductor y un imán en tres aspectos importantes como son el principio de magnetización, como se comportan al acercarlos a un imán y su curva de magnetización.

	Imán	Superconductor
Principio de magnetización	Momentos magnéticos orientados	Corrientes que apantallan el campo externo
Al acercarlo a un imán	Atracción estable Repulsión inestable	Estable siempre
Curva de magnetización M-H	Lo caracteriza intrínsecamente	Hay que escalarla en función de: -geometría -dimensiones -número de granos - J_c