

2. MÉTODOS Y MODELOS.

2.1. Modelos matemáticos.

Como ya se discutió en el capítulo anterior, se han ensayado diferentes estructuras E-S para la medida con métodos basados en IM para ser utilizadas en el área biomédica.Cuál resulta ser la más conveniente, depende de la aplicación específica; en cualquier caso resulta útil y necesario poder realizar una estimación de la señal esperada. De acuerdo a la que se intentará en este estudio y al tipo de sensor utilizado, es apropiado intentar desarrollar una expresión analítica para una estructura E-S de tipo bobina-bobina.

Se describirán las condiciones en las que se desarrolla el modelo, lo que determinará sus límites de utilización y validez.

2.1.1. Métodos utilizados.

Para el presente desarrollo se considera un sistema bobina-bobina coaxial, el cual está constituido por una excitadora E separada una distancia $2a$ de la sensora S (figura 2.1). Cuando se alimenta E con una fuente variable, se produce un campo magnético \mathbf{B}_0 también variable que se puede registrar en S. Si la separación entre las bobinas se considera grande respecto a sus radios y sus longitudes (de las bobinas) son pequeñas, se puede modelar la excitadora como un dipolo magnético y calcular el flujo en la sensora tomando en cuenta sólo la componente del campo en su centro proyectado en la dirección del eje de la bobina (en este caso será z). En un sistema como éste se calcula el campo magnético sobre el objeto y se calibran sus efectos.

Con el fin de evaluar la respuesta del sistema, se puede definir la relación entre la señal a medir debida a la muestra y la que existe de fondo en S sin muestra. En la estructura

indicada, con el fin de calcular el campo principal y el de perturbación, se supone el caso de una muestra cilíndrica ubicada coaxial con la estructura, primero centrada (punto medio entre bobinas) y luego en una posición general en el eje.

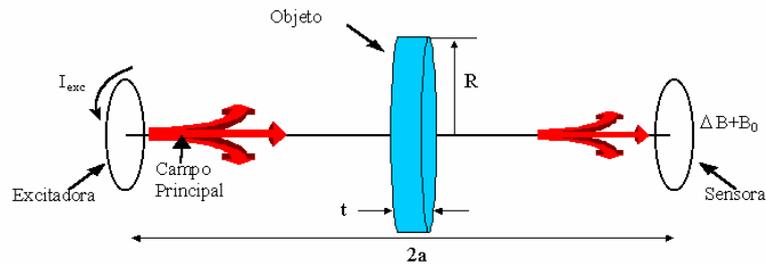


Figura 2.1. Estructura bobina–bobina con objeto.

Se evaluarán los efectos debidos a las propiedades eléctricas y magnéticas de la muestra y de allí se podrán combinar para determinar su influencia conjunta.

2.2. Definición de la Relación Señal – Portadora.

Cuando en una estructura E–S se alimenta la excitadora con una fuente alterna, se producirá en el espacio un campo B_0 , llamado principal, el cual puede ser detectado en la sensora a través del potencial inducido V_0 o de la corriente I_0 que se establece en esta última. Si la estructura E–S se coloca cerca de un medio con ciertas propiedades eléctricas pasivas (PEP), éste producirá un campo ΔB llamado de perturbación, debido al efecto del campo B_0 sobre él, el cual también producirá un efecto en la sensora en forma de potencial ΔV_0 o corriente inducida ΔI_0 adicionales. Se define la Relación Señal–Portadora, SCR (*Signal-Carrier Ratio*), como el cociente entre estos campos, es decir, $\Delta B/B_0$. Dado que el registro se realiza en la misma bobina sensora, la relación entre campos es equivalente a la

de los potenciales, $\Delta V/V_0$ o las corrientes $\Delta I/I_0$, inducidas en la sonda. Esta magnitud da una idea de la importancia de la perturbación con respecto al campo principal. Evidentemente está relacionada con las características eléctricas del entorno de la estructura E-S.

Para medios conductores (metales con conductividad entre $10^4 - 10^7$ S/m), se obtienen valores de SCR cuyo módulo puede estar entre $1 - 10^{-3}$. Este es un valor fácilmente observable, motivo por el cual el método de las corrientes inducidas es útil como un procedimiento de análisis no destructivo de muestras construidas con materiales que son buenos conductores.

Disponiendo de una expresión analítica de la SCR para un sistema y una geometría dada, sería posible evaluar si la medida obtenida coincide con el valor esperado. Por este motivo es de gran interés establecer un modelo teórico que permita la predicción.

A continuación se presenta el desarrollo de la expresión analítica para la SCR en el caso particular de un cilindro, la cual permitirá determinar la dependencia explícita de esta cantidad con los PEP de la muestra y evaluar la respuesta obtenida experimentalmente.

2.3. La relación señal - portadora de un sistema bobina - bobina para un disco centrado y en el espacio vacío.

Se supone una estructura bobina-bobina separadas una distancia $2a$, en la que la excitadora se alimenta con una fuente senoidal de frecuencia angular ω . En el espacio entre ellas, denominado espacio del objeto, se inserta una muestra en forma de cilindro de radio R , espesor $t \ll 2a$, conductividad compleja $\kappa = \sigma + j\omega\epsilon_0\epsilon_r$ y permeabilidad magnética relativa μ_r (figura 2.1).

Primero se evaluará la contribución debida a las características eléctricas del objeto y luego a las magnéticas. Con las condiciones indicadas se hace válida la suposición de la excitadora modelada como un dipolo magnético y será suficiente considerar la contribución del campo en la sensora en la dirección z.

2.3.1. Respuesta eléctrica.

El campo magnético principal induce corrientes de pérdida (*eddy currents*) en el disco de muestra, las cuales dependen de sus propiedades eléctricas. Éstas generan un campo de perturbación ΔB_e sobre la sensora estableciendo una relación $\Delta B_e/B_0$ determinada. La expresión reportada por Griffiths y otros 1999 en una estructura como la descrita, despreciando las propiedades magnéticas de la muestra y con las suposiciones antes indicadas, se puede escribir de la siguiente manera

$$SCR_e = \frac{\Delta B_e}{B_0} = \frac{a^3 t}{2} \left\{ -j(\mathbf{s} + j\omega \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_r) \mathbf{m}_0 \left[\frac{1}{a^2} - \frac{a^2 + 2R^2}{(a^2 + R^2)^2} \right] \right\} \quad (2.1)$$

El subíndice “e” indica que esta perturbación relativa al campo principal está asociada con los parámetros eléctricos de la muestra. Como dato de interés se puede observar que la información relacionada con la conductividad eléctrica σ , se encuentra en la parte imaginaria de la expresión, mientras que la parte real refleja la dependencia con la permitividad eléctrica afectada por la frecuencia angular.

Si se aplica esta relación a una muestra con conductividad eléctrica de 10^5 S/m y permitividad eléctrica relativa de 1, radio de 4 cm y 2 cm de espesor a 50 kHz se obtiene un $\Delta B_e/B_0$ de $12 \times 10^{-12} - j0.4$. Observando el módulo de esta variación se entiende que la respuesta para buenos conductores sea fácilmente observable, así como se evidencia la utilidad y posibilidad cierta de uso de esta técnica en estos materiales.

Para una muestra de sal disuelta en agua destilada con las mismas dimensiones de la anterior con conductividad pequeña ($\sigma \sim 0,1 \text{ S/m}$) y permitividad eléctrica relativa de 80 se obtiene una $\Delta B_e/B_0$ de $9,4 \times 10^{-10} - j4 \times 10^{-7}$. Esta variación relativa ilustra las dificultades para la aplicación de técnicas de IM para el análisis de muestras poco conductoras.

2.3.2. Respuesta magnética.

En los estudios utilizados para evaluar las PEP de material biológico a través de métodos **basados en el contacto físico**, se desprecian las características magnéticas de la sustancia bajo estudio. Este criterio se mantiene en aquellos que recientemente estudian las PEP por métodos basados en IM, dirigiendo la atención hacia el intento de medir σ .

Aquí se intenta establecer que, en aquellos casos en los que se utilizan métodos de medida basados en IM en muestras similares al tejido biológico, es necesario tomar en cuenta sus propiedades magnéticas. Evaluando esta contribución se evidenciará que su omisión puede conducir a errores importantes. Adicionalmente se establece que esta técnica puede ser utilizada para evaluar las características magnéticas del objeto.

Al tomar en cuenta las características magnéticas de la muestra se produce una modificación importante en la respuesta debida a la aparición de un campo de perturbación adicional ΔB_m en la sensora asociado con la magnetización que experimenta la muestra.

Si ahora se supone que la muestra tiene permeabilidad magnética relativa μ_r (o susceptibilidad χ_m), mientras se mantienen el resto de las condiciones bajo las cuales Griffiths obtuvo la ecuación anterior, se presentará la situación mostrada en la figura 2.2. El cilindro puede dividirse en elementos diferenciales dV como se muestra en la figura 2.3. En estas condiciones se tiene que sobre cada uno de ellos se produce un campo magnético resultante debido a la excitadora, dado por (apéndice 1)

$$B_d = \mathbf{m}_0 m (4a^2 + \mathbf{r}^2)^{1/2} / 4\mathbf{p} (a^2 + \mathbf{r}^2)^2 \quad (2.2)$$

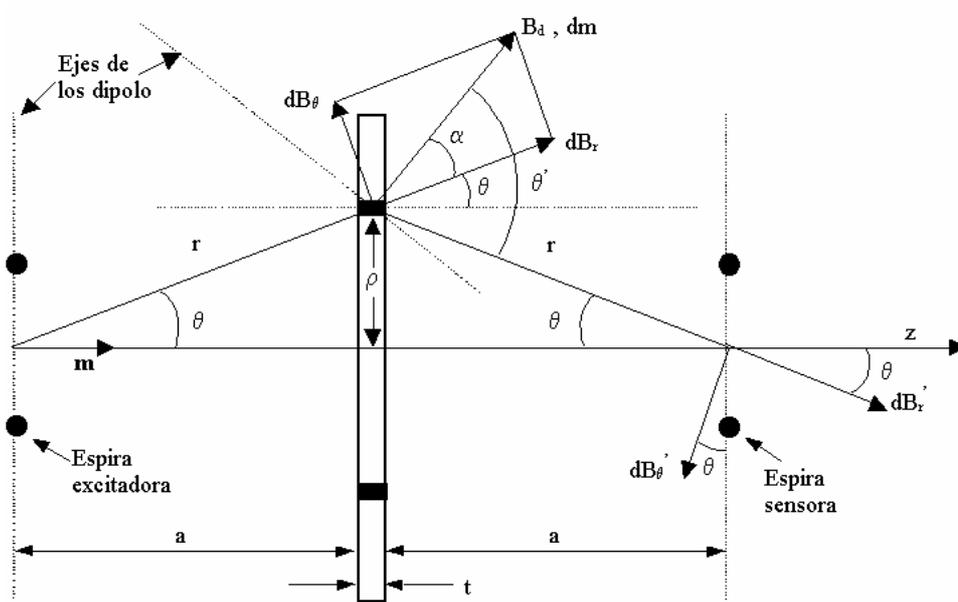


Figura 2.2. Respuesta en un disco centrado debido a sus características magnéticas en un sistema bobina–bobina.

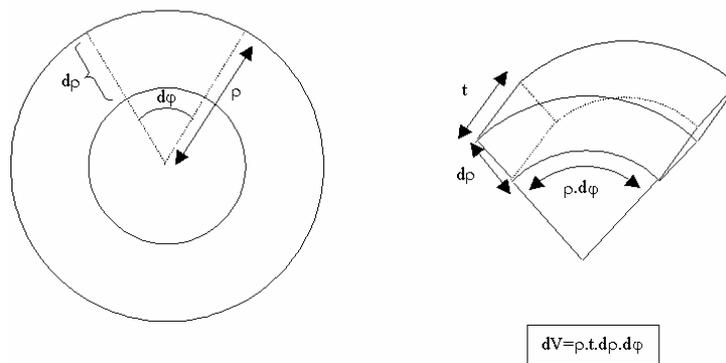


Figura 2.3. Elemento diferencial del disco.

Si este es el único campo que actúa sobre el elemento diferencial ubicado entre ρ , $\rho + d\rho$ y φ , $\varphi + d\varphi$, se inducirá en él un momento dipolar $d\mathbf{m}$ cuya magnitud vendrá dada por

$$d_m = \left[\frac{(\mathbf{m}_r - 1) m t (4a^2 + \mathbf{r}^2)^{1/2} \mathbf{r}}{4\mathbf{p}\mathbf{m}_r (a^2 + \mathbf{r}^2)^2} \right] d\mathbf{r} d\mathbf{j} \quad (2.3)$$

En el caso de magnetismo débil, se puede considerar que estos dipolos no interactúan entre sí. De esta manera, el campo magnético que experimenta cada uno de los elementos diferenciales dV se debe solo a la excitadora.

Así, cada dipolo diferencial $d\mathbf{m}$ aporta su propia contribución al campo de perturbación resultante en la bobina sensora. Integrando sobre el volumen completo del cilindro (supuesto $t \ll 2a$), se tiene que la perturbación relativa, debida a la magnetización del objeto, solamente la componente en la dirección z (como en el caso de la ecuación de Griffiths), estará dada por (apéndice 1)

$$\frac{\Delta B_m}{B_0} = \frac{a^3 t R^2 (8a^2 - R^2) (\mathbf{m}_r - 1)}{2(a^2 + R^2)^4 \mathbf{m}_r} = \frac{a^3 t R^2 (8a^2 - R^2)}{2(a^2 + R^2)^4} \frac{\mathbf{c}_m}{(\mathbf{c}_m + 1)} \quad (2.4)$$

donde la susceptibilidad magnética $\chi_m = \mu_r - 1$. El subíndice “m” en ΔB_m indica que ésta es la contribución a la SCR asociada con las características magnéticas de la muestra y que en el modelo de Griffiths fueron despreciadas. Tanto μ_r como χ_m son, en general, parámetros complejos. Así, la expresión para la SCR debida a la perturbación total sobre la bobina sensora estará dada por la superposición de ambas contribuciones, es decir, la debida a los parámetros eléctricos y magnéticos. La expresión general será

$$\frac{\Delta B_t}{B_0} = \frac{\Delta B_m}{B_0} + \frac{\Delta B_e}{B_0} = \frac{\Delta B_t}{B_0} = \frac{a^3 t}{2} \left\{ \frac{\mathbf{c}_m}{\mathbf{c}_m + 1} \frac{R^2 (8a^2 - R^2)}{(a^2 + R^2)^4} - j\mathbf{k}\mathbf{w}\mathbf{m}_0 \left[\frac{1}{a^2} - \frac{a^2 + 2R^2}{(a^2 + R^2)^2} \right] \right\} \quad (2.5)$$

Según Allen y otros 2000, para materiales paramagnéticos o diamagnéticos, a temperaturas mayores a 60 °K y para frecuencias bajas, la parte imaginaria de la susceptibilidad magnética es esencialmente cero. Por esta razón, el comportamiento complejo de μ_r o χ_m , al menos para el tejido biológico, se puede despreciar, tomándose como valores reales. Como en este tipo de materiales la susceptibilidad magnética es muy pequeña ($\sim \pm 10^{-3} - \pm 10^{-6}$), se puede hacer la aproximación $1 + \chi_m \approx 1$. Así, la SCR en función de la perturbación total, para material biológico en estas condiciones, vendrá dada por:

$$SCR = \frac{\Delta B_t}{B_0} = \frac{a^3 t}{2} \left\{ c_m \frac{R^2 (8a^2 - R^2)}{(a^2 + R^2)^4} - j(\mathbf{s} + j\omega \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_r) \omega \mathbf{m}_0 \left[\frac{1}{a^2} - \frac{a^2 + 2R^2}{(a^2 + R^2)^2} \right] \right\} \quad (2.6)$$

donde c_m se considera real.

A partir de esta solución analítica se pueden extraer las siguientes conclusiones. En primer lugar, las propiedades magnéticas de la muestra se reflejan en la parte real $\text{Re}(SCR)$ junto con la permitividad eléctrica (afectada por la frecuencia), mientras que la parte imaginaria $\text{Im}(SCR)$ contiene información de la conductividad. En segundo lugar, se tiene que la respuesta asociada con las propiedades magnéticas está relacionada con propiedades locales (magnetismo de los elementos dV) y por lo tanto una propiedad local, mientras que la respuesta eléctrica se debe a un promedio sobre las corrientes de pérdida en el conjunto de la muestra y por lo tanto a una propiedad distribuida.

En este punto, y con el objetivo de fijar ideas, es necesario hacer una estimación que permita evaluar la importancia de cada una de las contribuciones. Supongamos una muestra como la del ejemplo anterior pero ahora con susceptibilidad magnética de 1×10^{-5} [SI] (agua). La SCR obtenida en esta ocasión es $4,4 \times 10^{-7} - j4,3 \times 10^{-7}$.

Se pueden notar varios efectos interesantes. Por una parte, si se compara con la respuesta anterior se observa que aquí la parte real es casi 3 ordenes de magnitud mayor que cuando no se considera la contribución de las propiedades magnéticas. Por otro lado, la parte real se asemeja a la parte imaginaria que depende de la conductividad eléctrica, con lo

que también representará un aporte significativo de información en el módulo de la SCR. De acuerdo con el ejemplo, la omisión de las propiedades magnéticas del tejido biológico cuando se utilizan métodos basados en IM se traduciría en un error importante, bien al hacer espectroscopía o tomografía.

Como una conclusión en este punto se puede señalar la posibilidad **teórica** cierta de separar en la SCR las contribuciones relacionadas con cada uno de los PEP (eléctricos y magnéticos). Esta posibilidad abre numerosos caminos de aplicación e investigación futura.

2.4. La relación señal - portadora en un sistema bobina - bobina para un disco descentrado en el espacio vacío.

En la sección anterior, se citó la expresión de la SCR reportada por Griffiths y otros 1999, para una muestra cilíndrica centrada en un sistema bobina – bobina coaxial. Además, se desarrolló una expresión para la contribución magnética a la SCR para la misma geometría y ubicación de la muestra. Ahora se ampliará la solución, tanto en el caso eléctrico como en el magnético para el caso más general de una muestra cilíndrica coaxial delgada, pero que no se encuentra centrada en el sistema E-S (figura 2.4). Un desarrollo como este sería una herramienta útil que permitiría estimar la respuesta para otra geometría, a través de la discretización del objeto, conservando nuevamente la limitación impuesta en el desarrollo. Se encontrará, igual que antes, la respuesta debida a las propiedades eléctricas y luego las magnéticas.

2.4.1. Respuesta eléctrica.

La figura 2.4 refleja la situación antes descrita con el cilindro en una posición descentrada. Nuevamente, la excitadora se aproxima como un dipolo que crea un campo

sobre el disco originando como antes corrientes de pérdida en el material. La expresión para la contribución a la SCR asociada con los parámetros eléctricos vendrá dada por (apéndice 2)

$$\frac{\Delta B_e}{B_0} = -\frac{4jta^3}{d^2} \int_0^R \frac{r^3}{r_1^3 r_2^3} dr \quad (2.7)$$

o

$$\frac{\Delta B_e}{B_0} = -\frac{4jta^3}{d^2} \int_0^R \frac{r^3}{(h^2 + r^2)^{3/2} [(2a-h)^2 + r^2]^{3/2}} dr \quad (2.8)$$

la cual es integrable a través de software de cálculo disponibles comercialmente (por ejemplo Matlab®).

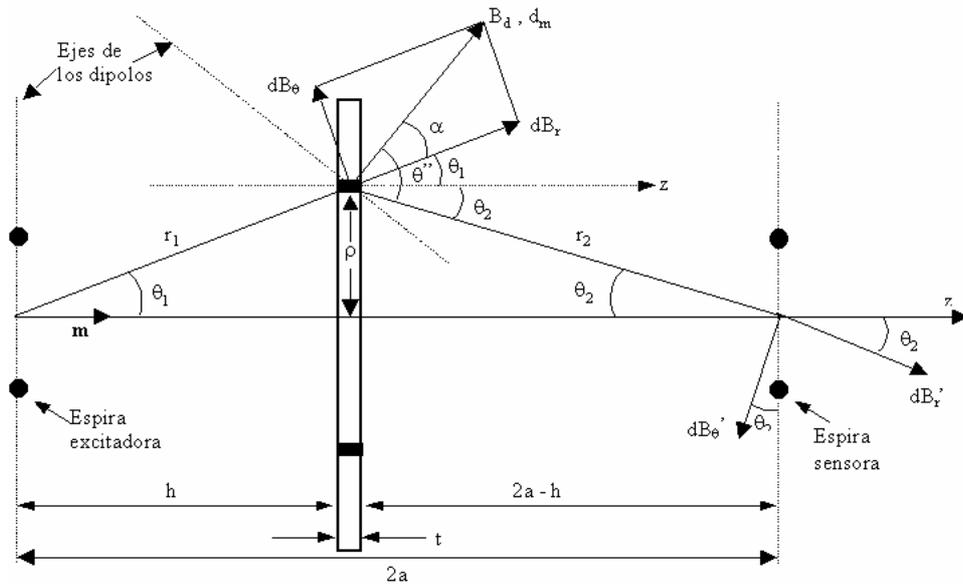


Figura 2.4. Disco descentrado en un sistema bobina–bobina.

Se puede observar que, cuando $r_1 = r_2$ o $h = a$, la integral se reduce al caso centrado de Griffiths (como debe ser), es decir

$$\int_0^R \frac{\mathbf{r}^3}{r_1^3 r_2^3} d\mathbf{r} = \int_0^R \frac{\mathbf{r}^3}{(a^2 + \mathbf{r}^2)^3} d\mathbf{r} \quad (2.9)$$

2.4.2. Respuesta magnética.

En la figura 2.4 se muestra la situación para un disco magnético coaxial descentrado. El campo resultante sobre el elemento diferencial del disco está dado por (apéndice 3)

$$B_d = \frac{\mathbf{m}_0 m}{4\mathbf{p}(\mathbf{r}^2 + h^2)^2} (4h^2 + \mathbf{r}^2)^{1/2} \quad (2.10)$$

El dipolo diferencial que aparece debido a la magnetización tendrá una forma similar a la del caso centrado, dada por

$$dm'' = \frac{(\mathbf{m}_r - 1)mt}{4\mathbf{p}(\mathbf{r}^2 + h^2)^2 \mathbf{m}_r} (4h^2 + \mathbf{r}^2)^{1/2} \mathbf{r} d\mathbf{r} d\mathbf{j} \quad (2.11)$$

La contribución a la SCR debido a las propiedades magnéticas del disco será

$$\frac{dB_m}{B_0} = \frac{2a^3 t(\mathbf{m}_r - 1)}{\mathbf{m}_r} \frac{\mathbf{r}(16a^3 h - 16a^2 h^2 + 4ah^3 - 20a^2 \mathbf{r}^2 + 6ah\mathbf{r}^2 + h^2 \mathbf{r}^2 + \mathbf{r}^4)}{r_1^5 r_2^5} d\mathbf{r} \quad (2.12)$$

Dado que

$$r_1^5 r_2^5 = (h^2 + \mathbf{r}^2)^{5/2} [(2a - h)^2 + \mathbf{r}^2]^{5/2} \quad (2.13)$$

entonces se deben encontrar los resultados de las siguientes integrales, las cuales se pueden resolver con un software de cálculo (Matlab®)

$$\int_0^R \frac{\mathbf{r}}{\left\{ (h^2 + \mathbf{r}^2) [(2a-h)^2 + \mathbf{r}^2] \right\}^{5/2}} d\mathbf{r}; \quad \int_0^R \frac{\mathbf{r}^3}{r_1^5 r_2^5} d\mathbf{r} \quad \text{y} \quad \int_0^R \frac{\mathbf{r}^5}{r_1^5 r_2^5} d\mathbf{r}; \quad (2.14)$$

Como antes, si $r_1 = r_2$, la solución se reduce al caso centrado anterior.

De esta manera se completa el tratamiento teórico de los modelos que se plantearon de entrada, con lo que se pueden determinar dependencias y hacer estimaciones que permitan saber a ciencia cierta cuáles deben ser los resultados de las medidas para diferentes valores de los parámetros eléctricos (PEP). El siguiente paso sería determinar la posibilidad de medir los valores que se esperan (predichos teóricamente), con qué instrumentación y describir los procedimientos para hacerlo, de manera que se procederá a detallar la instrumentación y los protocolos utilizados.