

Apèndix C:

Distribució de potencial a l'exterior de $N+1$ cilindres concèntrics sotmesos a l'acció d'un camp elèctric uniforme

Considerem que l'elèctrode de corrent que crea el camp elèctric està molt lluny, de forma que el camp que produeix en absència d'anomalia és uniforme i de valor E_0 .

Donada la geometria del problema, s'utilitzaran coordenades cilíndriques (r, θ, y) per a la seva resolució. Considerem que l'eix del cilindre es troba sobre l'eix y de coordenades.

El potencial haurà de complir l'equació de Laplace en tots els punts de l'espai:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{C.1})$$

En la direcció y el potencial no variarà i per tant l'equació de Laplace quedarà simplificada.

La solució general té la forma següent:

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^{-m} + B_m r^m) (C_m \cos m\theta + D_m \sin m\theta) \quad (\text{C.2})$$

Considerant que el valor del potencial ha d'estar afitat es dedueix que a l'exterior de l'anomalia complirà la següent expressió:

$$V = -E_0 r \cos \theta + \sum_{m=1}^{\infty} F_m r^{-m} \cos m\theta \quad (\text{C.3})$$

A l'interior de l'anomalia el potencial es pot expressar com:

$$V_i = \sum_{m=1}^{\infty} E_m r^{-m} \cos m\theta + G_m r^m \cos m\theta \quad (\text{C4})$$

Tal i com s'observa en l'estudi realitzat per Orellana (1982), la solució es particularitza per $m = 1$.

Inicialment considerarem el cas de disposar de 3 corones cilíndriques de radis $(a, b$ i $c)$ i conductivitats $(\sigma_1, \sigma_2$ i $\sigma_3)$. Per aquesta raó l'espai queda dividit en

quatre regions. El potencial en cada una d'elles es pot expressar de la forma següent:

$$V = -E_o r \cos \theta - \chi_3 E_o \frac{c^2}{r} \cos \theta \quad \text{per } r > c \quad (\text{C.5})$$

$$V_3 = \gamma r \cos \theta + \mu r^{-1} \cos \theta \quad \text{per } b < r < c \quad (\text{C.6})$$

$$V_2 = \alpha r \cos \theta + \beta r^{-1} \cos \theta \quad \text{per } a < r < b \quad (\text{C.7})$$

$$V_1 = -E_1 r \cos \theta \quad \text{per } r < a \quad (\text{C.8})$$

Per calcular la distribució de potencial a l'exterior de l'anomalia ens interessa conèixer el paràmetre χ_3 . Per obtenir-lo haurem d'aplicar les condicions de contorn de continuïtat del potencial elèctric i de la densitat de corrent radial a cada interfície.

$$\begin{aligned} \sigma_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} &= \sigma_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{r=a} \\ -E_1 \sigma_1 &= \sigma_2 \left(\alpha - \frac{\beta}{a^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 \Big|_{r=a} \\ E_1 &= -\alpha - \frac{\beta}{a^2} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} &= \sigma_3 \frac{\partial V_3}{\partial r} \Big|_{r=b} \\ \sigma_2 \alpha \left[1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \frac{1}{b^2} \right] &= \sigma_3 \gamma \left[1 - \left(\frac{\mu}{\gamma} \right) \frac{1}{b^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} V_2 &= V_3 \Big|_{r=b} \\ \alpha \left[b + \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{b} \right] &= \gamma \left[b + \left(\frac{\mu}{\gamma} \right) \frac{1}{b} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$\sigma_3 \frac{\partial V_3}{\partial r} = \sigma_4 \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=c}$$

$$E_o = \frac{\gamma \sigma_3 \left[1 - \left(\frac{\mu}{\gamma} \right) \frac{1}{c^2} \right]}{\sigma_4 (\chi_3 - 1)} \quad (C.13)$$

$$V_3 = V \Big|_{r=c}$$

$$\gamma c + \mu c^{-1} = -E_o c (1 + \chi_3) \quad (C.14)$$

Resolent el sistema d'equacions s'obté el paràmetre χ_3 .

De (C.9) i (C.10) obtenim la següent relació:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{a^2 (\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_2 + \sigma_1} \quad (C.15)$$

A partir del quocient de les expressions (C.11) / C.12), arribem a:

$$\frac{\sigma_2 \left(1 - \frac{\alpha'}{b^2} \right)}{b + \frac{\alpha'}{b}} = \frac{\sigma_3 \left(1 - \frac{\beta'}{b^2} \right)}{b + \frac{\beta'}{b}} \quad (C.16)$$

$$\text{on } \alpha' = \frac{\beta}{\alpha} \text{ i } \beta' = \frac{\mu}{\gamma}$$

Fent les operacions oportunes i agrupant convenientment els termes de (C.16), s'arriba a

$$\beta' = \frac{\left[\left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right) + \left(1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right) \left(\frac{1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \right) \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] b^2}{\left(1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right) + \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right) \left(\frac{1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \right) \left(\frac{a}{b} \right)^2} \quad (C.17)$$

Aquest paràmetre es pot expressar abreujadament de la següent manera:

$$\beta' = \chi_2 b^2 \quad (C.18)$$

Substituint (C.13) en (C.14) trobem

$$\chi_3 = \frac{\sigma_4 (c + \beta' c^{-1}) - \sigma_3 c (1 - \beta' c^{-2})}{\sigma_4 (c + \beta' c^{-1}) + \sigma_3 c (1 - \beta' c^{-2})} \quad (\text{C.19})$$

Ordenant els termes arribem a la següent expressió:

$$\chi_3 = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_4}\right) + \left(1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_4}\right) \chi_2 \left(\frac{b}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_4}\right) + \left(1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_4}\right) \chi_2 \left(\frac{b}{c}\right)^2} \quad (\text{C.20})$$

on

$$\chi_2 = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) + \left(1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) \chi_1 \left(\frac{a}{b}\right)^2}{\left(1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) + \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) \chi_1 \left(\frac{a}{b}\right)^2}, \text{ on } \chi_1 = \frac{1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}$$

D'aquestes expressions es pot trobar una fórmula de recurrència pel cas de tenir N+1 cilindres concèntrics.

$$\chi_{i+1} = \frac{(1 - \beta_{i+1}) + (1 + \beta_{i+1}) \chi_i z_{i+1}^2}{(1 + \beta_{i+1}) + (1 - \beta_{i+1}) \chi_i z_{i+1}^2} \quad (\text{C.21})$$

on $z_{i+1} = a_i/a_{i+1}$ i $\beta_{i+1} = \sigma_{i+1}/\sigma_{i+2}$, sent σ_i , la conductivitat de la ièsima corona cilíndrica.

Apèndix D:

Potencial creat a l'exterior de $N+1$ esferes concèntriques a causa d'un elèctrode puntual de corrent

Es parteix de l'estudi de 3 esferes concèntriques sotmeses a la influència d'un elèctrode de corrent i es generalitza el resultat a $N+1$ esferes concèntriques.

Tres esferes concèntriques divideixen l'espai en 4 regions, en cada una de les quals es pot calcular el potencial. El potencial $V(r, \theta)$ ha de complir l'equació de Laplace en tots els punts de l'espai menys on es troba la font.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (\text{D.1})$$

Les expressions pel potencial a cada una de les quatre regions, començant per l'exterior a l'anomalia són:

$$V = \frac{I\rho}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{z_o^{n+1}} P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (\text{D.2})$$

$$V_3 = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} F_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (\text{D.3})$$

$$V_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (\text{D.4})$$

$$V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (\text{D.5})$$

A continuació apliquem les condicions de contorn a les interfícies:

$$V = V_3 \Big|_{r=c} \quad (\text{D.6})$$
$$A_n = E_n + c^{2n+1} F_n - \frac{I\rho}{4\pi} \frac{c^{2n+1}}{z_o^{n+1}}$$

$$V_3 = V_2 \Big|_{r=b} \quad (\text{D.7})$$
$$C_n = E_n + F_n b^{2n+1} - D_n b^{2n+1}$$

$$V_1 = V_2 \Big|_{r=a}$$

$$D_n = B_n - \frac{C_n}{a^{2n+1}} \quad (D.8)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial V_3}{\partial r} \Big|_{r=c}$$

$$A_n = \frac{I\rho}{4\pi} \frac{n}{n+1} \frac{c^{2n+1}}{z_o^{n+1}} - \frac{\rho}{\rho_3} \left(\frac{n}{n+1} c^{2n+1} F_n - E_n \right) \quad (D.9)$$

$$\frac{1}{\rho_3} \frac{\partial V_3}{\partial r} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{r=b}$$

$$E_n = \frac{\rho_3}{\rho_2} C_n + \frac{n}{n+1} F_n b^{2n+1} - \frac{\rho_3}{\rho_2} \frac{n}{n+1} D_n b^{2n+1} \quad (D.10)$$

$$\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_2}{\partial r} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

$$B_n = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[D_n - C_n \frac{n+1}{n} \frac{1}{a^{2n+1}} \right] \quad (D.11)$$

A partir de (D.8) i (D.9) trobem C_n en funció de D_n .

$$C_n = z D_n \quad (D.12)$$

$$\text{On } z = \frac{\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) a^{2n+1}}{\left[1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{n+1}{n} \right) \right]_n}$$

A partir de (D.7) i (D.11) s'obté:

$$D_n = x E_n + y F_n \quad (D.13)$$

on

$$x = \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3} \right) \left(\frac{2n+1}{n+1} \right) \frac{1}{b^{2n+1}} \quad \text{i} \quad y = \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_3} \frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{2n+1}{n+1} \right)$$

Substituint (D.13) en (D.7)

$$C_n = E_n + F_n b^{2n+1} - b^{2n+1} (E_n x + F_n y) \quad (\text{D.14})$$

Per mitjà de (D.12) i (D.14), s'obté

$$E_n = \mu_3 F_n \quad (\text{D.15})$$

$$\text{on } \mu_3 = \frac{F_n (b^{2n+1} - zy - y b^{2n+1})}{x (z + b^{2n+1}) - 1}$$

Desenvolupant l'expressió s'arriba a

$$\mu_3 = \frac{y \left(\frac{z}{b^{2n+1}} + 1 \right) - 1}{1 - \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3} \right) \left(1 + \frac{z}{b^{2n+1}} \right) \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)} b^{2n+1} \quad (\text{D.16})$$

Operant s'obté la recursivitat en el paràmetre μ_3

$$\mu_3 = \frac{\left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_3} \frac{n}{n+1} \right) \left(1 + \frac{\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \left(\frac{a}{b} \right)^{2n+1}}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{n+1}{n} \right)} \right) - 1}{1 - \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3} \right) \left(\frac{n+1}{2n+1} \right) \left(1 + \frac{\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \left(\frac{a}{b} \right)^{2n+1}}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{n+1}{n} \right)} \right)} b^{2n+1} \quad (\text{D.17})$$

on

$$\mu_2 = \left(1 + \frac{\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) a^{2n+1}}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{n+1}{n} \right)} \right) \quad (\text{D.18})$$

correspon al cas de tenir dues esferes concèntriques.

A partir de (D.6) i (D.9) aïllem F_n i obtenim

$$F_n = \frac{\gamma_3}{\beta_3 \mu_3 + \alpha_3} \quad (\text{D.19})$$

on

$$\alpha_3 = \left(1 + \frac{\rho}{\rho_3} \frac{n}{n+1}\right) c^{2n+1} \quad (\text{D.20})$$

$$\beta_3 = 1 - \frac{\rho}{\rho_3} \quad (\text{D.21})$$

$$\gamma_3 = \frac{I\rho}{4\pi} \frac{c^{2n+1}}{z_o^{n+1}} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \quad (\text{D.22})$$

Finalment s'obté el paràmetre A_n corresponent a tres esferes concèntriques.

$$A_n = \frac{\gamma_3}{\alpha_3 + \beta_3 \mu_3} (\mu_3 + c^{2n+1}) - \frac{I\rho_{N+2}}{4\pi} \frac{c^{2n+1}}{z_o^{n+1}} \quad (\text{D.23})$$

Generalitzant a N+1 esferes concèntriques el paràmetre A_n passa a ser

$$A_n = \frac{\gamma_{N+1}}{\alpha_{N+1} + \beta_{N+1} \mu_{N+1}} (\mu_{N+1} + a_{N+1}^{2n+1}) - \frac{I\rho_{N+2}}{4\pi} \frac{a_{N+1}^{2n+1}}{z_o^{n+1}} \quad (\text{D.24})$$

Apèndix E:

Distribució de potencial a l'exterior de $N + 1$ esferes concèntriques sotmeses a l'acció d'un camp elèctric uniforme

Considerem que l'elèctrode de corrent que crea el camp elèctric està molt lluny, de forma que el camp que produeix en absència d'anomalia és uniforme i de valor E_0 .

Donada la geometria del problema, s'utilitzaran coordenades esfèriques (r, θ, φ) per a la seva resolució

El potencial haurà de complir l'equació de Laplace en tots els punts de l'espai:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (\text{E.1})$$

La solució general de la distribució de potencial té la forma següent:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n(\cos \theta) \quad (\text{E.2})$$

Considerarem el cas de disposar de 3 corones esfèriques. Per aquesta raó l'espai queda dividit en quatre regions. El potencial en cada una d'elles es pot expressar de la forma següent:

$$V = -E_0 r \cos \theta - \chi_3 E_0 \frac{c^3}{r^2} \cos \theta \quad \text{per } r > c \quad (\text{E.3})$$

$$V_3 = \gamma r \cos \theta + \mu r^{-2} \cos \theta \quad \text{per } b < r < c \quad (\text{E.4})$$

$$V_2 = \alpha r \cos \theta + \beta r^{-2} \cos \theta \quad \text{per } a < r < b \quad (\text{E.5})$$

$$V_1 = -E_1 r \cos \theta \quad \text{per } r < a \quad (\text{E.6})$$

Per calcular la distribució de potencial a l'exterior de l'anomalia ens interessa conèixer el paràmetre χ_3 . Per obtenir-lo haurem d'aplicar les condicions de contorn de continuïtat del potencial elèctric i de la densitat de corrent radial a cada interfície.

$$\sigma_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (\text{E.7})$$

$$E_1 = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1} (\alpha - 2 \beta a^{-3})$$

$$V_1 = V_2 \Big|_{r=a}$$

$$E_1 = -(\alpha + \beta a^{-3}) \quad (\text{E.8})$$

$$\sigma_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} = \sigma_3 \frac{\partial V_3}{\partial r} \Big|_{r=b}$$

$$\sigma_2 \alpha \left[1 - 2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \frac{1}{b^3} \right] = \sigma_3 \gamma \left[1 - 2 \left(\frac{\mu}{\gamma} \right) \frac{1}{b^3} \right] \quad (\text{E.9})$$

$$V_2 = V_3 \Big|_{r=b}$$

$$\alpha \left[b + \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{b^2} \right] = \gamma \left[b + \left(\frac{\mu}{\gamma} \right) \frac{1}{b^2} \right] \quad (\text{E.10})$$

$$\sigma_3 \frac{\partial V_3}{\partial r} = \sigma_4 \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=c}$$

$$E_o = \frac{\gamma \sigma_3 \left[1 - 2 \left(\frac{\mu}{\gamma} \right) \frac{1}{c^3} \right]}{\sigma_4 (2 \chi_3 - 1)} \quad (\text{E.11})$$

$$V_3 = V_2 \Big|_{r=c}$$

$$\gamma c + \mu c^{-2} = -E_o c (1 + \chi_3) \quad (\text{E.12})$$

Resolent el sistema d'equacions trobarem el paràmetre d'interès χ_3 .

De (E.7) i (E.8) obtenim la següent relació:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{a^3 (\sigma_2 - \sigma_1)}{2 \sigma_2 + \sigma_1} \quad (\text{E.13})$$

A partir del quocient de les expressions (E.9) / (E.10), arribem a:

$$\frac{\sigma_2 \left(1 - 2 \frac{\alpha'}{b^3}\right)}{b + \frac{\alpha'}{b^2}} = \frac{\sigma_3 \left(1 - 2 \frac{\beta'}{b^3}\right)}{b + \frac{\beta'}{b^2}} \quad (\text{E.14})$$

on $\alpha' = \frac{\beta}{\alpha}$ i $\beta' = \frac{\mu}{\gamma}$

Fent les operacions oportunes i agrupant convenientment els termes de (E.14), s'arriba a

$$\beta' = \frac{\left[\left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) + \left(1 + 2 \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) \frac{\left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)}{2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \left(\frac{a}{b}\right)^3 \right] b^3}{\left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) + 2 \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) \frac{\left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)}{2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \left(\frac{a}{b}\right)^3} \quad (\text{E.15})$$

Abreujadament es pot escriure de la forma

$$\beta' = \chi_2 b^3 \quad (\text{E.16})$$

Substituint (E.13) en (E.14) finalment obtenim

$$\chi_3 = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_4}\right) + \left(1 + 2 \frac{\sigma_3}{\sigma_4}\right) \chi_2 \left(\frac{b}{c}\right)^3}{\left(2 + \frac{\sigma_3}{\sigma_4}\right) + 2 \left(1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_4}\right) \chi_2 \left(\frac{b}{c}\right)^3} \quad (\text{E.17})$$

on

$$\chi_2 = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) + \left(1 + 2 \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) \chi_1 \left(\frac{a}{b}\right)^3}{\left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) + 2 \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) \chi_1 \left(\frac{a}{b}\right)^3} \quad \text{on} \quad \chi_1 = \frac{1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \quad (\text{E.18})$$

Com es pot observar, d'aquestes expressions es pot trobar una fórmula de recurrència pel cas de tenir N+1 esferes concèntriques.

$$\chi_{i+1} = \frac{(1 - \beta_{i+1}) + (1 + 2\beta_{i+1})\chi_i z_{i+1}^3}{(2 + \beta_{i+1}) + 2(1 - \beta_{i+1})\chi_i z_{i+1}^3} \quad (\text{E.19})$$

on $z_{i+1} = a/a_{i+1}$ i $\beta_{i+1} = \sigma_{i+1}/\sigma_{i+2}$, sent σ_i la conductivitat de la ièsima corona esfèrica.

Apèndix F:

Moment dipolar corresponent a una capa prima cilíndrica: Cas conductor i aïllant

Particularitzant el moment dipolar normalitzat a dos cilindres concèntrics obtenim l'expressió:

$$\chi_2 = \frac{(1 - \beta_2) + (1 + \beta_2)A}{(1 + \beta_2) + (1 - \beta_2)A} \quad (\text{F.1})$$

$$\text{on } A = \left(\frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1} \right) \left(\frac{a_N}{a_{N+1}} \right)^2, \beta_1 = \frac{\sigma_{eN}}{\sigma_{N+1}}, \beta_2 = \frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_{N+2}}$$

Capa prima perfectament conductora:

Si desenvolupem A obtenim la següent expressió,

$$A = \frac{1 - \frac{\sigma_{eN}}{\sigma_{N+1}}}{1 + \frac{\sigma_{eN}}{\sigma_{N+1}}} \left(\frac{1}{1 + \frac{a_{N+1} - a_N}{a_N}} \right)^2 \quad (\text{F.2})$$

Si $\sigma_{N+1} \rightarrow \infty$

$$\frac{1 - \frac{\sigma_{eN}}{\sigma_{N+1}}}{1 + \frac{\sigma_{eN}}{\sigma_{N+1}}} \approx 1 - 2 \frac{\sigma_{eN}}{\sigma_{N+1}}$$

Si $(a_{N+1} - a_N) \ll a_N$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{a_{N+1} - a_N}{a_N} \right)^2} \approx 1 - 2 \frac{a_{N+1} - a_N}{a_N}$$

De forma que A queda simplificada a:

$$A \approx 1 - \frac{2\sigma_{eN}}{\sigma_{N+1}} - 2 \frac{a_{N+1} - a_N}{a_N} \quad (\text{F.3})$$

χ_2 es pot expressar de la forma següent:

$$\chi_2 = \frac{\frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{N+1}} \left(\frac{1+A}{1-A} \right) - 1}{\frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{N+1}} \left(\frac{1+A}{1-A} \right) + 1} \quad (\text{F.4})$$

Reordenant l'expressió s'arriba a,

$$\chi_2 = \frac{\frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{eN} + \frac{\sigma_{N+1}(a_{N+1} - a_N)}{a_N}} - 1}{\frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{eN} + \frac{\sigma_{N+1}(a_{N+1} - a_N)}{a_N}} + 1} \quad (\text{F.5})$$

$$\text{Definim } \delta = \frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{eN} + \frac{y}{a_N}}$$

on $y = \sigma_{N+1}(a_{N+1} - a_N)$ és l'admitància de la capa conductora.

En aquest cas el moment dipolar induït pren la següent forma:

$$\chi_2 = \frac{\delta - 1}{\delta + 1} \quad (\text{F.6})$$

Des d'un punt de vista matemàtic, aquesta relació prové d'aplicar els següents límits: $\sigma_{N+1} \rightarrow \infty$ i $(a_{N+1} - a_N) \rightarrow 0$, a l'expressió inicial de χ_2 .

Capa prima perfectament aïllant

En aquest cas $\sigma_{N+1} \rightarrow 0$ i $(a_{N+1} - a_N) \rightarrow 0$. Tenint en compte aquest fet, l'expressió de A es pot posar de la següent manera:

$$A = \left(\frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1} \right) \left(\frac{a_N}{a_{N+1}} \right)^2 = \frac{\frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_{eN}} - 1}{\frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_{eN}} + 1} \left(\frac{a_N}{a_{N+1}} \right)^2 = - \frac{1 - \frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_{eN}}}{1 - \frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_{eN}}} \left(\frac{1}{1 + \frac{a_{N+1} - a_N}{a_N}} \right)^2 \quad (\text{F.7})$$

$$A \approx -1 + 2 \left(\frac{a_{N+1} - a_N}{a_N} \right) + 2 \left(\frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_{eN}} \right) \quad (\text{F.8})$$

El paràmetre χ_2 es pot expressar de la forma següent:

$$\chi_2 = \frac{1 - \frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_{N+2}} \left(\frac{1-A}{1+A} \right)}{1 + \frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_{N+2}} \left(\frac{1-A}{1+A} \right)} \quad (\text{F.9})$$

$$\frac{1-A}{1+A} = \frac{1}{\frac{a_{N+1} - a_N}{a_N} + \frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{N+1}}} - 1$$

$$\chi_2 \approx \frac{\frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{N+1}} \left(\frac{a_{N+1} a_N}{a_N} \right) + \frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_N} - 1}{\frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{N+1}} \left(\frac{a_{N+1} a_N}{a_N} \right) + \frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_N} + 1} \quad (\text{F.10})$$

on es defineix $z = \frac{a_{N+1} - a_N}{\sigma_{N+1}}$ com la impedància de la capa aïllant i

$$\delta = \frac{\sigma_{N+2} z}{a_N} + \frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{eN}}.$$

S'obté: (F.11)

$$\chi_2 = \frac{\delta - 1}{\delta + 1}$$

que pren la mateixa forma que pel cas conductor.

Apèndix G:

Moment dipolar corresponent a una capa prima esfèrica. Cas conductor i aïllant

Particularitzant el moment dipolar normalitzat a dues esferes concèntriques obtenim l'expressió:

$$\chi_2 = \frac{(\beta_2 - 1) + (2\beta_2 - 1)A}{(\beta_2 + 2) + 2(\beta_2 - 1)A} \quad (\text{G.1})$$

que equival a

$$\chi_2 = \frac{1 - \frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{N+1}} \left(\frac{1-A}{1+2A} \right)}{1 + 2 \frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{N+1}} \left(\frac{1-A}{1+2A} \right)} \quad (\text{G.2})$$

$$\text{on } A = \frac{\sigma_{eN} - \sigma_{N+1}}{\sigma_{eN} + 2\sigma_{N+1}} \left(\frac{a_N}{a_{N+1}} \right)^3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{eN}}{\sigma_{N+1}}}{1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{eN}}{\sigma_{N+1}}} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{a_{N+1} - a_N}{a_N}} \right)$$

Capa prima perfectament conductora:

Si $\sigma_{N+1} \rightarrow \infty$ i $a_{N+1} - a_N \ll a_N$

Fent les aproximacions oportunes s'arriba a

$$A \approx \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \frac{\sigma_{eN}}{\sigma_{N+1}} \right) \left(1 - 3 \frac{a_{N+1} - a_N}{a_N} \right) \approx -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \frac{\sigma_{eN}}{\sigma_{N+1}} + \frac{3}{2} \frac{a_{N+1}}{a_N} \quad (\text{G.3})$$

Substituint (G.3) en (G.2) obtenim

$$\chi_2 = \frac{1 - \delta}{1 + \delta}$$

$$\text{on } \delta = \frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{eN} + \frac{2y}{a_N}} \text{ i } y = \sigma_{N+1} (a_{N+1} - a_N)$$

Capa prima perfectament aïllant

En aquest cas $\sigma_{N+1} \rightarrow 0$ i $(a_{N+1} - a_N) \rightarrow 0$. Tenint en compte aquest fet, l'expressió de χ_2 queda com:

$$\chi_2 = \frac{\frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_{N+2}} \left(\frac{1+2A}{1-A} \right)^{-1}}{\frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_{N+2}} \left(\frac{1+2A}{1-A} \right)^{-2}} \quad (\text{G.5})$$

En aquest cas A es pot aproximar per:

$$A = \frac{\sigma_{eN} - \sigma_{N+1}}{\sigma_{eN} + 2\sigma_{N+1}} \left(\frac{a_N}{a_{N+1}} \right)^3 = \left(1 - \frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_{eN}} \right) \left(1 + 2 \frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_{eN}} \right)^{-1} \left(1 + \frac{a_{N+1} - a_N}{a_N} \right)^{-3} \quad (\text{G.6})$$

$$A \approx 1 - 3 \frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_{eN}} - 3 \frac{a_{N+1} - a_N}{a_N} \quad (\text{G.7})$$

D'aquesta manera

$$\frac{1+2A}{1-A} \approx \frac{1}{\frac{\sigma_{N+1}}{\sigma_{eN}} + \frac{a_{N+1} - a_N}{a_N}} - 2$$

Finalment s'obté:

$$\chi_2 = \frac{1 - \delta}{1 + \delta} \quad (\text{G.8})$$

on $\delta = \frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{eN}} + \frac{z\sigma_{N+2}}{a_N}$ i $z = \frac{a_{N+1} - a_N}{\sigma_{N+1}}$ és la impedància de la capa prima perfectament aïllant.

Apèndix H:

Resistivitat aparent d'anomalies cilíndriques i esfèriques concèntriques sotmeses a un camp elèctric uniforme

En aquest apèndix es dedueixen les expressions de la resistivitat aparent per estructures cilíndriques i esfèriques soterrades, que es troben sota l'efecte d'un camp elèctric uniforme. També s'ha considerat l'efecte de la distància dels elèctrodes de potencial.

Anomalia cilíndrica

L'expressió aproximada del potencial per $r > a_{N+1}$ en coordenades polars és:

$$V = -E_o r \cos\theta - 2\chi_{cN+1} E_o \frac{a_{N+1}^2}{r} \cos\theta \quad (\text{H.1})$$

El primer terme és el potencial quan no hi ha anomalia i el segon terme representa la influència de l'anomalia i l'efecte de la interfície terra-aire.

Estem interessats en calcular el camp elèctric $E(x)$ perpendicular a l'eix del cilindre i mesurat a la superfície.

$$E_x(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{H.2})$$

$$E_x(x) \approx E_o - 2E_o \frac{\chi_c}{r^4} a_{N+1}^2 (x^2 - h^2) \quad (\text{H.3})$$

$$E_x(x) \approx E_o \left[1 - 2 \frac{\chi_c}{r^4} a_{N+1}^2 (x^2 - h^2) \right] \quad (\text{H.4})$$

Per la configuració Schlumberger la resistivitat aparent es relaciona amb el camp elèctric segons la següent expressió:

$$\rho_a(x) = \frac{\pi L^2}{I} E(x) \quad (\text{H.5})$$

Finalment obtenim la resistivitat aparent

$$\rho_a \approx \rho_2 \left[1 + 2\chi_{N+1} \left(\frac{a_{N+1}}{h} \right)^2 \frac{1 - \left(\frac{x}{h} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{x}{h} \right)^2 \right]^2} \right] \quad (\text{H.6})$$

Anomalia esfèrica:

L'expressió del potencial per $r > a_{N+1}$ és

$$V = -E_o r \cos \theta - 2\chi_{sN+1} E_o \frac{a_{N+1}^3}{r^2} \cos \theta \quad (\text{H.7})$$

El camp elèctric perpendicular a l'eix del cilindre i mesurat a la superfície serà:

$$E_x(x) \approx E_o \left[1 - 2\frac{\chi_{sN+1}}{r^{5/2}} a_{N+1}^3 (2x^2 - h^2) \right] \quad (\text{H.8})$$

La resistivitat aparent segons la configuració Schlumberger serà

$$\rho_a(x) = \rho_2 \left[1 + 2\chi_{sN+1} \left(\frac{a_{N+1}}{h} \right)^3 \frac{1 - 2\left(\frac{x}{h} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{x}{h} \right)^2 \right]^{3/2}} \right] \quad (\text{H.9})$$

Espaiat entre els elèctrodes de potencial

L'efecte de l'espaiat interelectròdic d , es pot observar a la figura H.1.

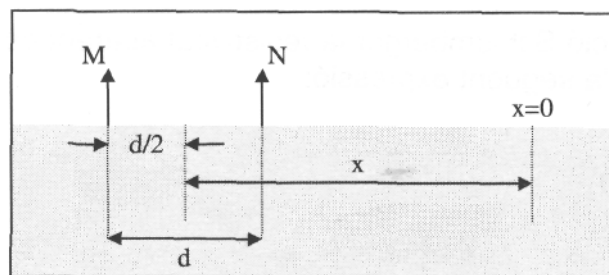


Figura H.1: Espaiat entre els elèctrodes de potencial

Per avaluar la influència de d , expressarem les relacions (H.1) i (H.7) en coordenades rectangulars i les particularitzarem en dos punts de la superfície (M i N). Restarem aquestes dues tensions i obtindrem $\Delta V(x)$.

Per realitzar el pas a coordenades cartesianes hem de tenir en compte que:

$$x = r \cos \theta \quad i \quad r = \sqrt{x^2 + h^2}, \quad \text{sent } h \text{ la profunditat de l'anomalia.}$$

Anomalia cilíndrica

El potencial en un punt de la superfície ve donat per la següent expressió

$$V = -E_o \left[x + 2 \chi_{c_{N+1}} \frac{a_{N+1}^2}{h^2} \frac{x}{1 + \left(\frac{x}{h}\right)^2} \right] \quad (\text{H.10})$$

La caiguda de tensió entre dos elèctrodes de potencial M i N serà:

$$\Delta V(x) = E_o \left[d + 2 \chi_{c_{N+1}} \left(\frac{a_{N+1}}{h}\right)^2 \left(\frac{x + d/2}{1 + \left(\frac{x + d/2}{h}\right)^2} - \frac{x - d/2}{1 + \left(\frac{x - d/2}{h}\right)^2} \right) \right] \quad (\text{H.11})$$

Com que la distància entre els elèctrodes injectors (L) és molt gran, la resistivitat aparent es pot escriure de la forma següent:

$$\rho_a = \frac{\pi L^2}{d} \frac{\Delta V(x)}{I} \quad (\text{H.12})$$

Finalment obtenim

$$\rho_a = \rho_{N+2} \left[1 + 2 \chi_{c_{N+1}} \left(\frac{a_{N+1}}{h}\right)^2 \frac{1 - \frac{x^2 - d^2/4}{h^2}}{\left(1 + \left(\frac{x + d/2}{h}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{x - d/2}{h}\right)^2\right)} \right] \quad (\text{H.13})$$

Anomalia esfèrica

El potencial en un punt de la superfície ve donat per la següent expressió

$$V = -E_o \left[x + 2 \chi_{s_{N+1}} \frac{a_{N+1}^3}{h^3} \frac{x}{\left[1 + \left(\frac{x}{h} \right)^2 \right]^{3/2}} \right] \quad (\text{H.14})$$

$$\Delta V(x) = E_o \left[d + 2 \chi_{s_{N+1}} \left(\frac{a_{N+1}}{h} \right)^3 \left(\frac{x+d/2}{\left(1 + \left(\frac{x+d/2}{h} \right)^2 \right)^{3/2}} - \frac{x-d/2}{\left(1 + \left(\frac{x-d/2}{h} \right)^2 \right)^{3/2}} \right) \right] \quad (\text{H.15})$$

Finalment obtenim la resistivitat aparent que conté la influència de l'espaiat interelectròdic.

$$\rho_a = \rho_{N+2} \left[1 + 2 \chi_{s_{N+1}} \left(\frac{a_{N+1}}{h} \right)^3 \left(\frac{x/d+1/2}{\left(1 + \left(\frac{x+d/2}{h} \right)^2 \right)^{3/2}} - \frac{x/d-1/2}{\left(1 + \left(\frac{x-d/2}{h} \right)^2 \right)^{3/2}} \right) \right] \quad (\text{H.16})$$

Apèndix I:

Configuració electròdica Sch-49

Les tensions analítiques utilitzades en el capítol 7 s'han obtingut a partir d'un programa que resol el problema directe d'una esfera soterrada. Seria interessant poder reconstruir imatges de cilindres soterrats, doncs simulen d'una forma més realista la presència d'una canonada en el subsòl. La implementació de les expressions que solucionen aquest problema directe (capítol 3), únicament ens permeten reproduir amb fidelitat aquelles configuracions electròdiques en les que els elèctrodes injectors es troben equidistants del cilindre, donada la dificultat en afitar la integral que apareix en les expressions que resolen el problema directe.

A continuació proposem una nova configuració molt útil en el cas de disposar d'anomalies centrades. Equival a la realització de diferents calicates Schlumberger, que en el cas de diposar de 16 elèctrodes, dóna lloc a $13+11+9+\dots+1 = 49$ mesures (Sch-49). La figura I.1 mostra la realització d'aquesta configuració. Per cada posició dels elèctrodes injectors es realitzen les mesures centrals associades.

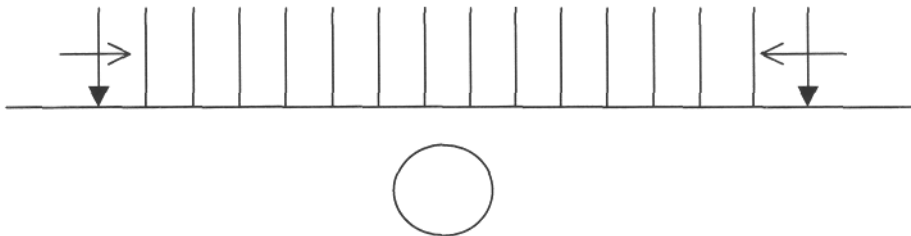


Figura I.1: Configuració Sch-49.

La figura 1.2 compara els resultats obtinguts en la reconstrucció d'una esfera aïllant i d'un cilindre aïllant de 1 UE de radi, situats a 2 UE. Es pot observar la similitud de les imatges reconstruïdes pels diferents mètodes de reconstrucció emprats. Les imatges de la primera columna corresponen a l'esfera aïllant i les de la segona columna a les del cilindre aïllant.

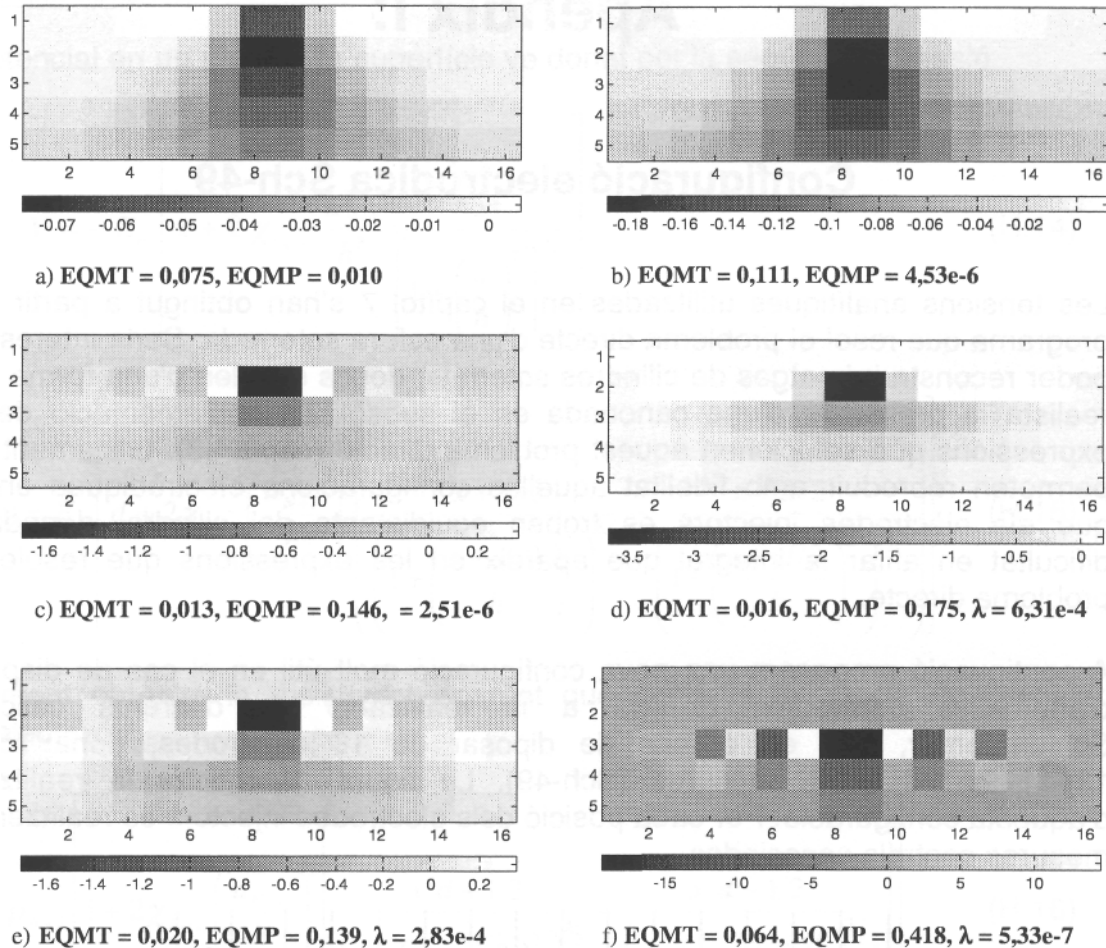


Figura I.2: Reconstrucció a partir de tensions analítiques obtingudes per mitjà de la configuració Sch-49. a) i b) Retroprojecció. c) i d) Mètode de Tikhonov i el criteri de la corba L. e) i f) Mètode de Marquardt-Levenberg. Les imatges de la primera columna corresponen a l'esfera aïllant i les de la segona columna corresponen a les del cilindre aïllant de 1 UE de radi i situats a una profunditat de 2 UE.

Es pot observar la gran similitud entre les imatges corresponents a l'esfera i al cilindre, tot i que el valor absolut dels pixels reconstruïts corresponents al cilindre presenten un valor superior.

Si les anomalies es situen a 6 UE de profunditat, s'obtenen les imatges de la figura I.3. Es pot veure que tot i ser els factors d'amortiment molt petits, no s'aconsegueix situar correctament les anomalies a la seva posició real, al contrari del que succeïa amb les configuracions dd-104 i Sch-91. Cal dir que el petit nombre de mesures d'aquesta configuració té un paper decisiu en aquest fet. Tot i això, la localització horitzontal de les anomalies és correcta.

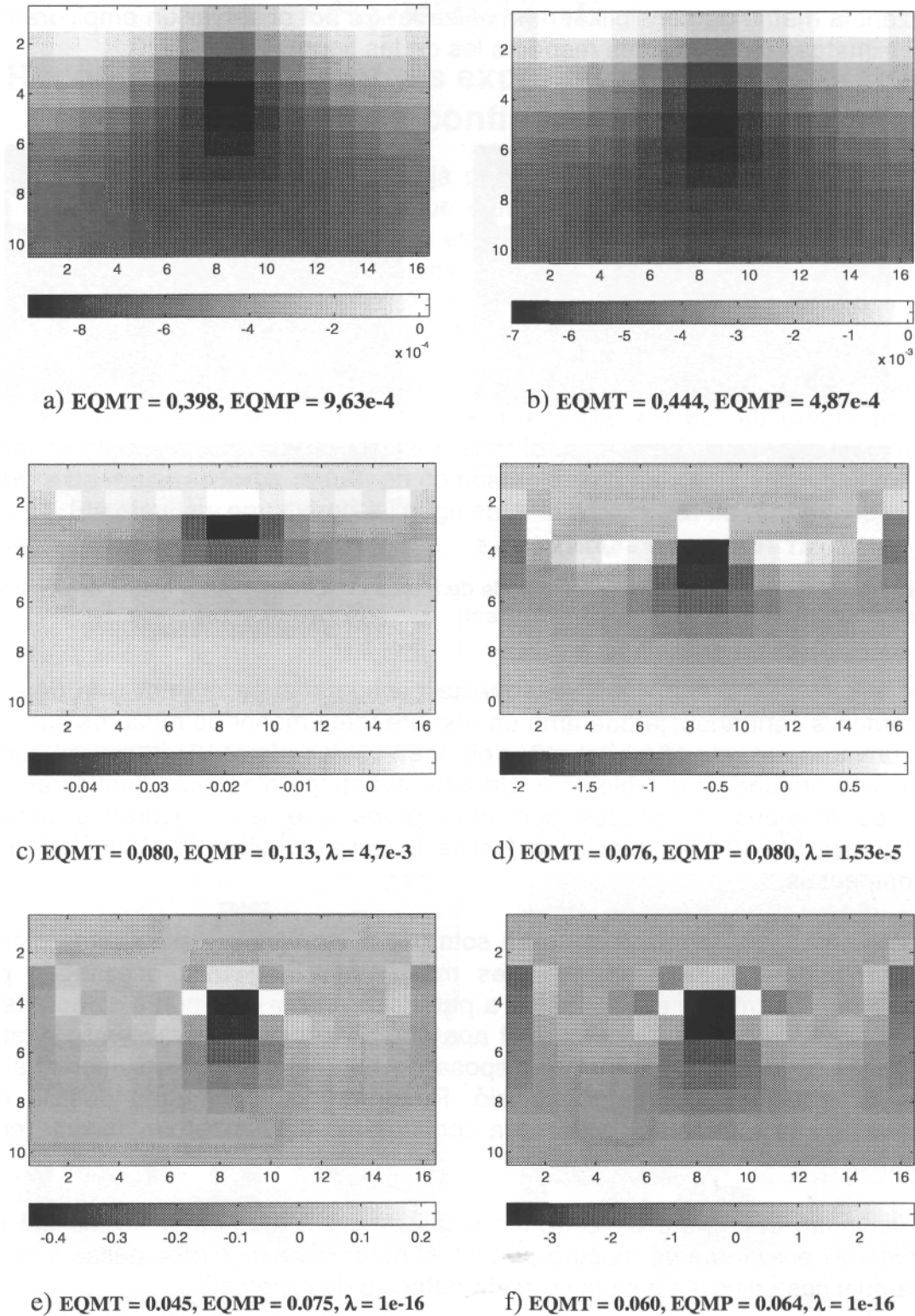


Figura 1.3: Reconstrucció d'una esfera aïllant i d'un cilindre aïllant de 1 UE de radi, situats a una profunditat de 6 UE. a) i b) Retroprojecció. c) i d) Mètode de Tikhonov i corba L. e) i f) Mètode de Marquardt-Levenberg.

La figura 1.4 mostra la reconstrucció per mitjà de Marquardt-Levenberg, però utilitzant la matriu de sensibilitat normalitzada. Es pot observar un empitjorament de les imatges reconstruïdes respecte les de les figures I.3e i I.3f.

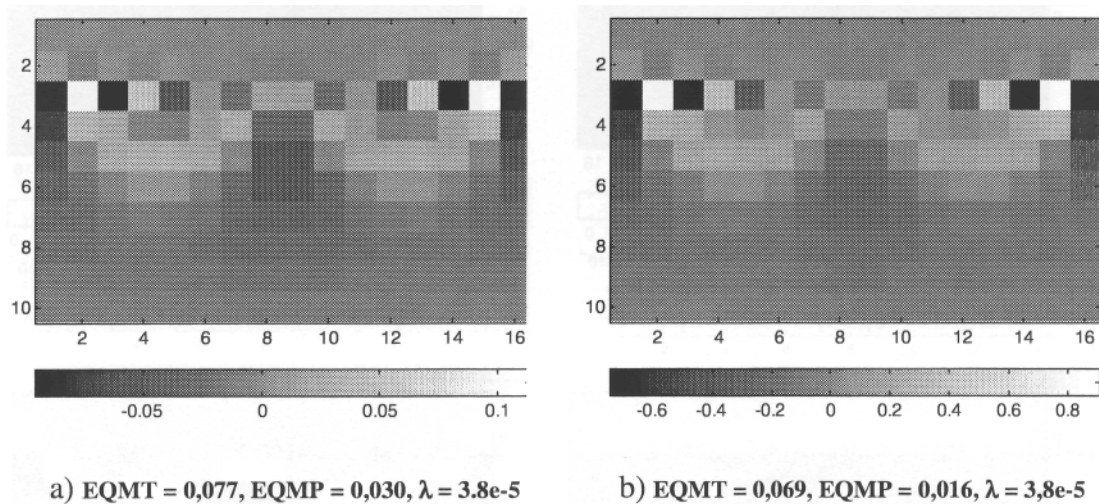


Figura I.4: Reconstrucció per mitjà del mètode de Marquardt-Levenberg i la matriu de sensibilitat normalitzada, a) Esfera aïllant, b) Cilindre aïllant.

Com a conclusió podem dir que aquesta configuració és útil per a la detecció d'anomalies centrades, ja que amb un nombre força menor de mesures que amb les configuracions dd-104 i Sch-49, s'obtenen imatges força similars, tot i que es redueix la profunditat d'exploració. Un altre avantatge d'aquesta configuració és que les tensions detectades són més grans que les mesurades amb la configuració dd-104, la qual cosa facilita la seva adquisició en les mesures experimentals.

A més a més, si l'anomalia es troba sotmesa a la influència d'un camp elèctric quasibé uniforme aquestes mateixes mesures poden ser processades pels algorismes descrits en el capítol 6 i, a partir de l'anàlisi dels punts característics de les diferents corbes de resistivitat aparent, determinar el radi i profunditat de l'anomalia. D'aquesta manera es disposa de dos mètodes complementaris per poder-la detectar amb major precisió. Recordem que per cada posició dels elèctrodes injectors estem aplicant la configuració Schlumberger descrita en el capítol 3.

Si disminuïm el número d'elèctrodes a únicament 8, que és la possibilitat que ens ofereix el sistema de mesura portàtil, el número de mesures passa a ser de 9, la qual cosa dificulta molt la correcta detecció de l'anomalia.

Apèndix J:

Reconstrucció d'imatges experimentals de laboratori per mitjà de la configuració Sch-49

En aquest apèndix estudiem per mitjà de mesures experimentals de laboratori una nova configuració electròdica que deriva de la configuració Schlumberger que hem vist en el capítol 8, però on els elèctrodes injectors es van desplaçant cap el centre de l'agrupació electròdica i es van realitzant les mesures entre els elèctrodes interiors. Les mesures s'han realitzat per mitjà de 16 elèctrodes i per tant es disposa de 49 mesures per realitzar la reconstrucció.

La figura J.1 correspon a la reconstrucció d'una esfera de 1 UE de radi situada a dues profunditats diferents: $h = 2$ UE i $h = 3$ UE. Es pot observar com els diferents algorismes utilitzats localitzen amb força precisió l'anomalia tot i ser el nombre de mesures força reduït, en comparació amb les configuracions dd-104 i Sch-91. Els resultats empitjoren a l'augmentar la profunditat de l'anomalia.

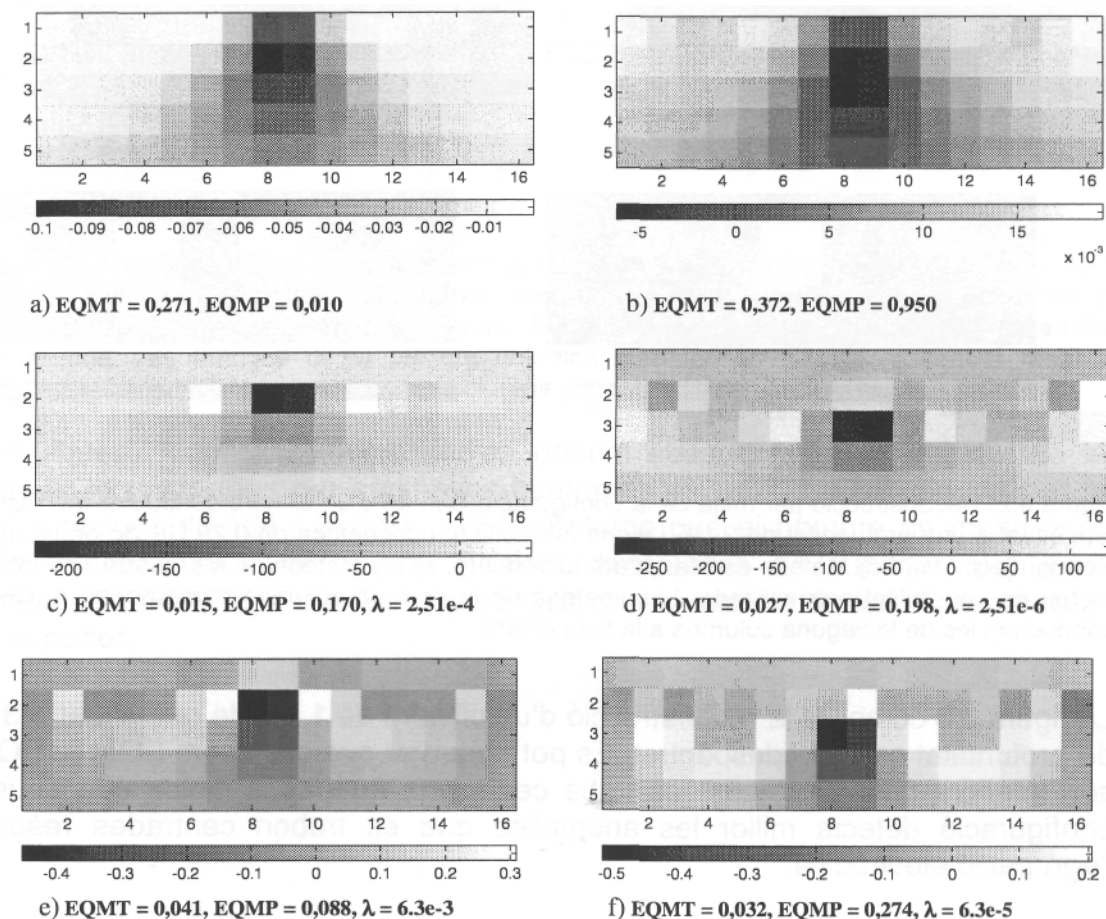


Figura J.1: Reconstrucció per mitjà de la configuració Sch-49 d'una esfera de 1 UE de radi. a) i b) Retroprojecció. c) i d) Mètode de Marquardt-Levenberg. e) i f) Mètode de Marquardt-Levenberg i matriu de sensibilitat normalitzada. Les imatges de la primera columna corresponen a una profunditat de 2 UE i les de la segona columna corresponen a una profunditat de 3 UE.

La figura J.2 mostra la detecció d'un cilindre conductor de 1 UE de radi i situat a 2 UE de profunditat i d'una fuga concèntrica aïllant de 0,25 UE de gruix, on s'ha fet la normalització de les tensions detectades respecte les mesures en presència del tub conductor.

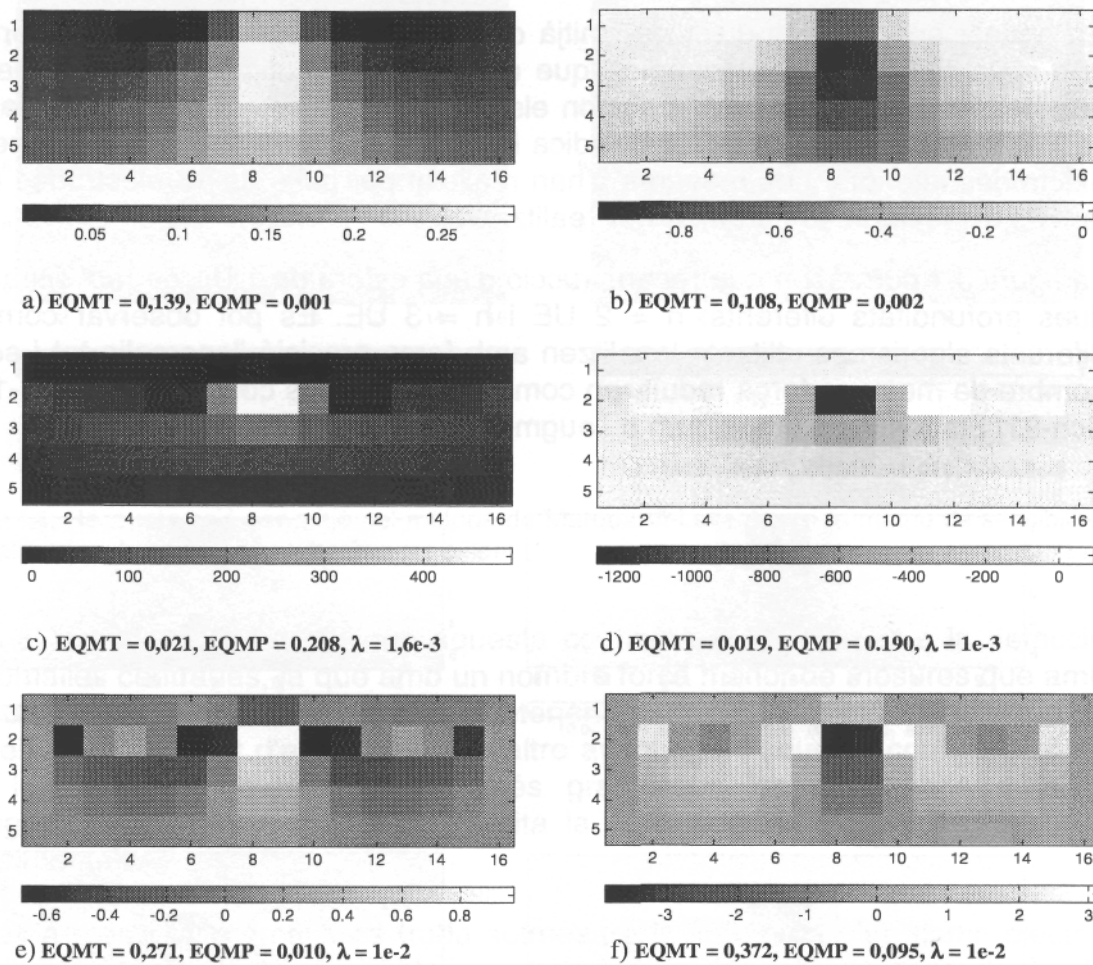


Figura J.2: Reconstrucció per mitjà de la configuració Sch-49 d'un cilindre conductor de 1 UE de radi situat a una profunditat de 2 UE i d'una fuga aïllant concèntrica de 0.25 UE de gruix, a) i b) Retroprojecció. c) i d) Mètode de Marquardt-Levenberg. e) i f) Mètode de Marquardt-Levenberg i matriu de sensibilitat normalitzada. Les imatges de la primera columna corresponen al cilindre conductor i les de la segona columna a la fuga aïllant.

La figura J.3 compara la reconstrucció d'un cilindre de 1 UE de radi situat a 3 UE de profunditat centrat i descentrat. Es pot observar que els valors EQMT i EQMP són inferiors quan el cilindre es troba centrat, la qual cosa indica que aquesta configuració detecta millor les anomalies que es troben centrades respecte l'agrupació electròdica.

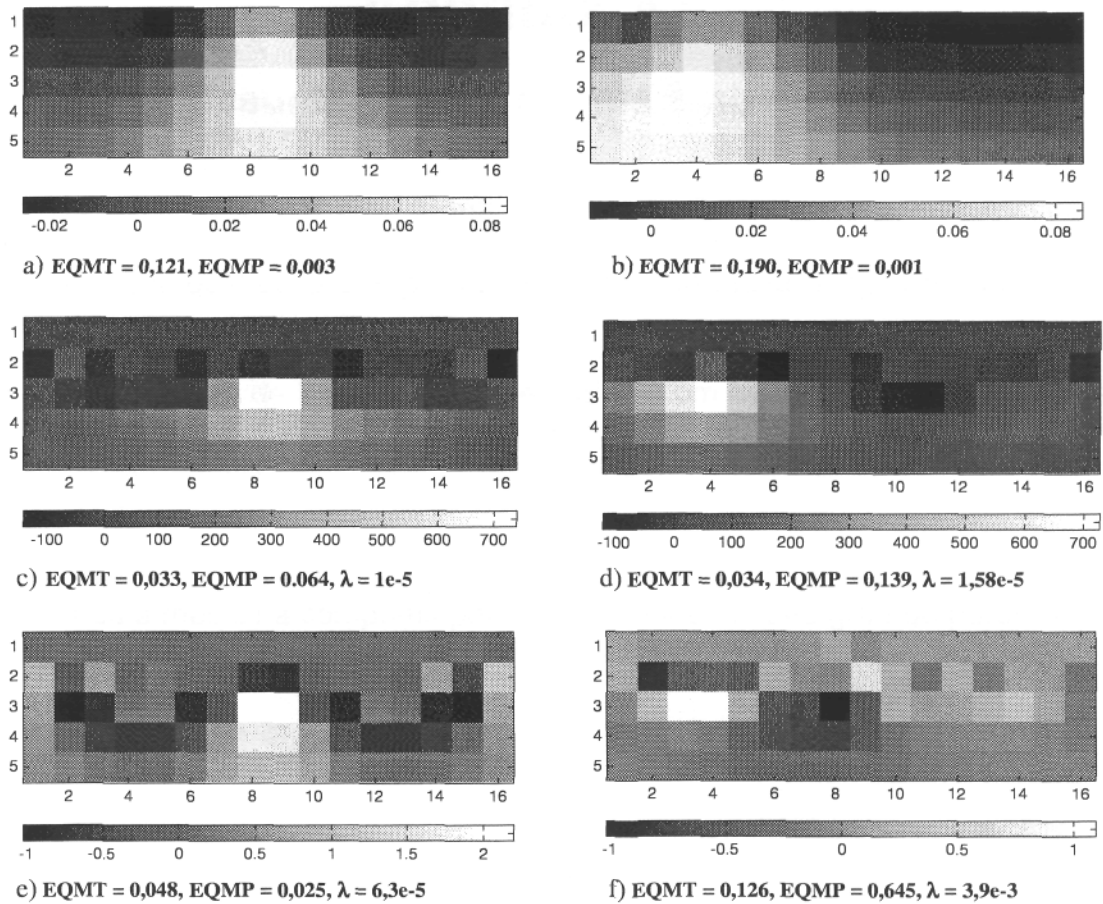


Figura J.3: Reconstrucció per mitjà de la configuració Sch-49 d'una cilindre conductor de 1 UE de radi situat a una profunditat de 3 UE, centrat i descentrat, a) i b) Retroprojecció. c) i d) Mètode de Marquardt-Levenberg. e) i f) Mètode de Marquardt-Levenberg i matriu de sensibilitat normalitzada. Les imatges de la primera columna corresponen al cilindre centrat respecte l'agrupació elèctrica i les de la segona columna corresponen al cilindre descentrat.

Amb aquesta configuració elèctrica podem observar com la qualitat de les imatges reconstruïdes per anomalies centrades és similar a l'obtinguda per les configuracions dd-104 i Sch-91, i té l'avantatge que el nombre de mesures és força inferior i el nivell de les tensions detectades és superior que en la configuració dd-104, la qual cosa garanteix que la qualitat de les mesures pugui ser superior.

Apèndix K:

Mesures en una cubeta amb sorra

Les mesures realitzades en el capítol 8 corresponen a la introducció d'una sèrie d'objectes en una cubeta amb aigua de l'aixeta. En aquest apèndix mostrem algunes mesures realitzades en una cubeta amb sorra de la platja de Castelldefels, la qual cosa ens permetrà generar una fuita d'aigua en un tub de PVC.

Hem introduït un tub de PVC de 2 cm de radi i 10 cm de longitud en una cubeta amb sorra a una profunditat de 4 cm respecte el seu centre (figura k.1). Les mesures s'han realitzat per mitjà del sistema portàtil (capítol 4) mitjançant una agrupació electròdica de 8 elèctrodes.

La sorra s'ha humitejat per tal de garantir un bon contacte dels elèctrodes amb el medi i a més a més s'ha comprimit per tal de disminuir el seu grau de porositat.

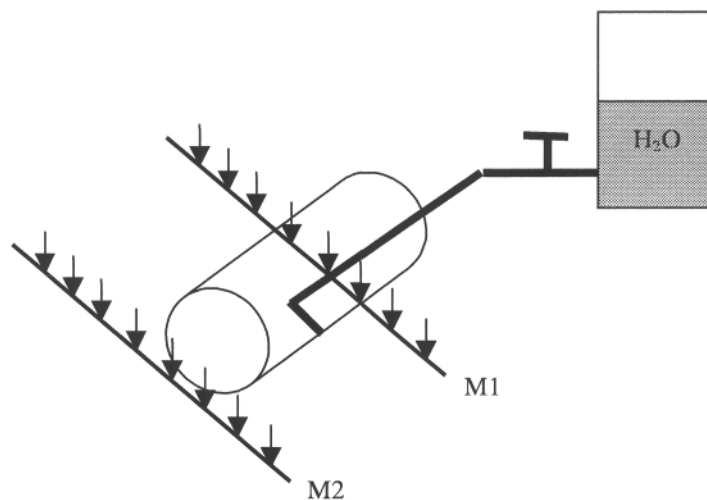


Figura K.1: Generació d'una fuita d'aigua en tub de PVC de 2 cm de radi, soterrat a 4 cm en una cubeta amb sorra. Les mesures s'han realitzat per mitjà de dues agrupacions elèctriques de 8 elèctrodes equiespaiats 2 cm.

S'han utilitzat 2 agrupacions elèctriques situades perpendicularment a l'eix del tub buit de PVC. Una està situada en la part central del tub (M1), sobre el lloc on es generarà la fuita i l'altra es troba a uns 8 cm del tub (M2), que representa la mesura homogènia.

La figura k2 mostra les resistivitats aparents i les tensions mesurades en tres situacions diferents. S'ha mesurat sobre el tub (M1), en el medi homogeni (M2) i finalment s'ha generat una fuita d' 250 cm³ i al cap d'uns 5 minuts s'ha tornat a mesurar sobre el tub.

Es pot observar com la mesura sobre el tub correspon a una resistivitat aparent superior que en el medi homogeni, però que aquesta disminueix a l'afegir-se la fuga d'aigua. La tendència és la mateixa tant amb la configuració doble dipol amb extrems com amb la configuració Schlumberger, tot i que en aquest cas els nivells de tensió són superiors.

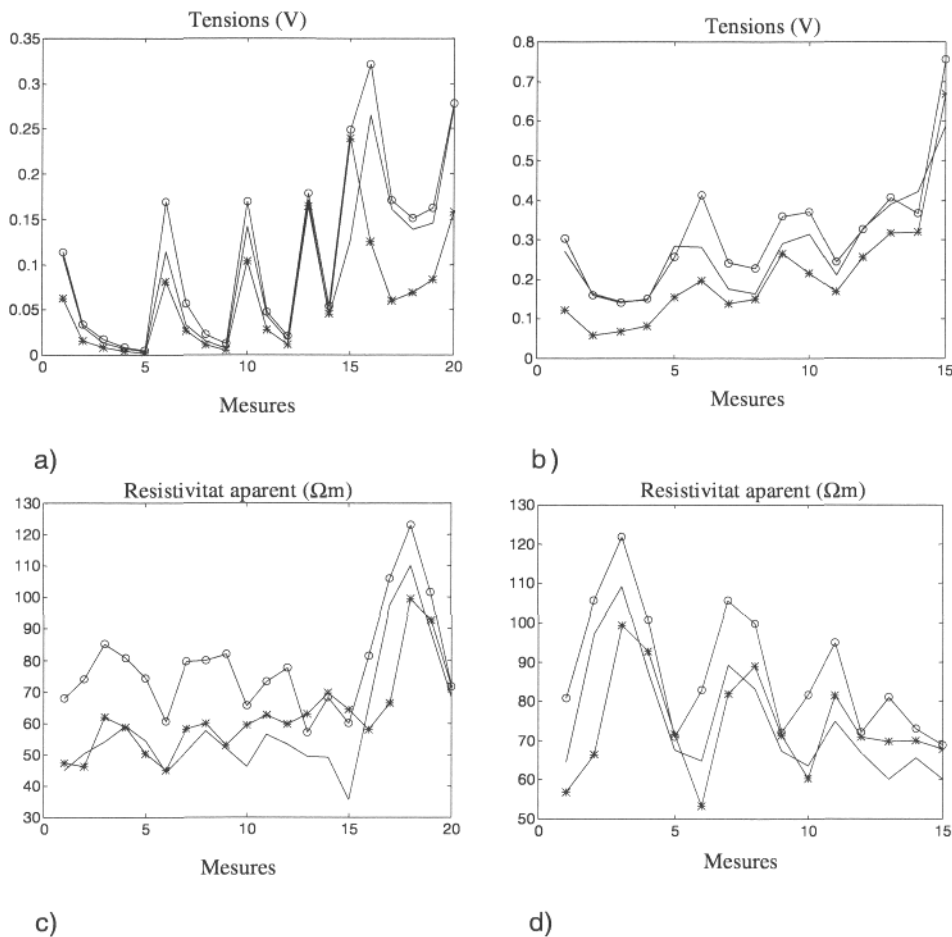


Figura K.2: Tensions i resistivitats aparents mesurades en l'experiment de la figura k.1. a) i c) Configuració doble dipol amb extrems (dd-20). b) i d) Configuració Schlumberger.

La figura K.3 mostra la reconstrucció per mitjà de retroprojecció de la fuga, d'aigua normalitzada respecte les tensions en presència del tub aïllant. Es pot observar que entre els elèctrodes 5 i 6 es detecta quelcom aïllant. Es tracta del tub de PVC, ja que donada la gran porositat de la sorra, la fuga no permet emascarar el tub.

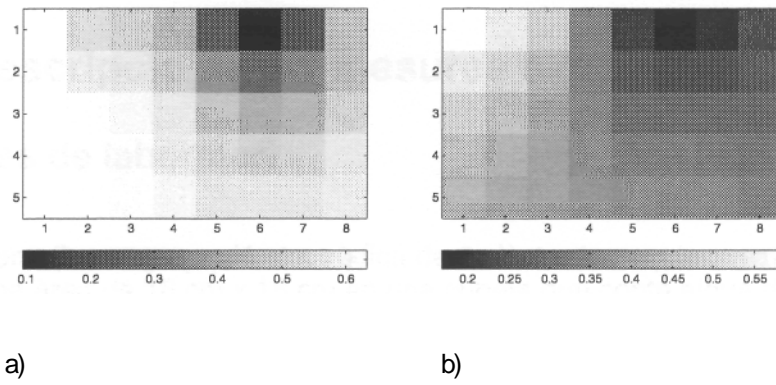


Figura K.3: Reconstrucció de la fuga d'aigua respecte el tub aïllant, a) dd-20. b)Sch-15.

Apèndix L:

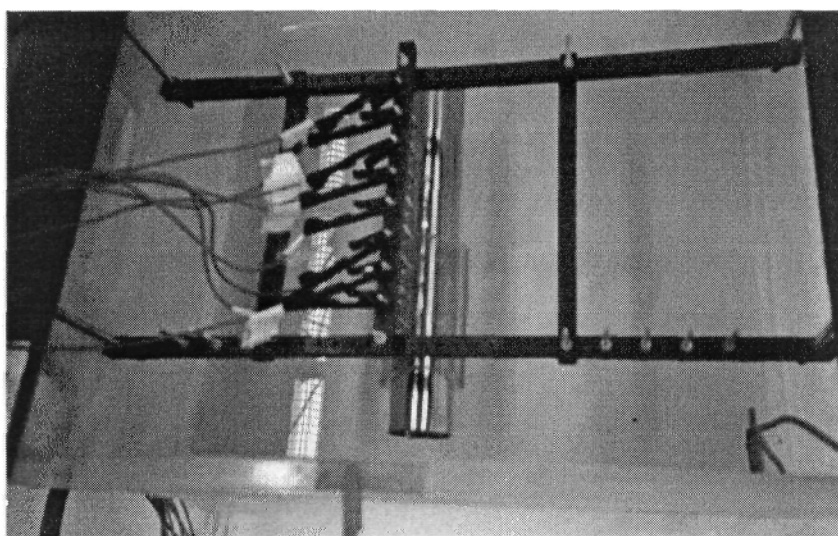
Descripció de les mesures experimentals

L.1. Mesures de laboratori

Desplaçament d'una agrupació electròdica de 8 elèctrodes equiespaiats 2 cm per explorar una àrea de 16 cm x 16 cm en una cubeta que conté aigua de l'aixeta. L'anomalia que es vol detectar és un cilindre conductor de 2 cm de radi i 25 cm de longitud situat a una profunditat de 4 cm respecte el seu centre. La meitat del cilindre es troba recoberta per una capa aïllant de 0,5 cm de gruix.



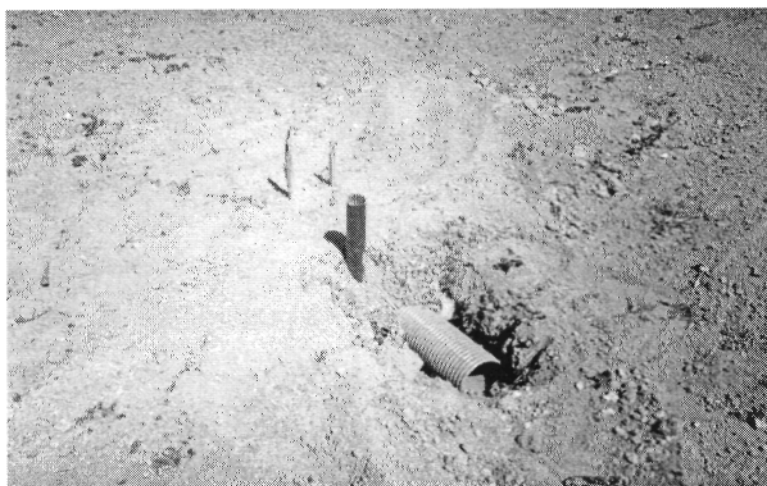
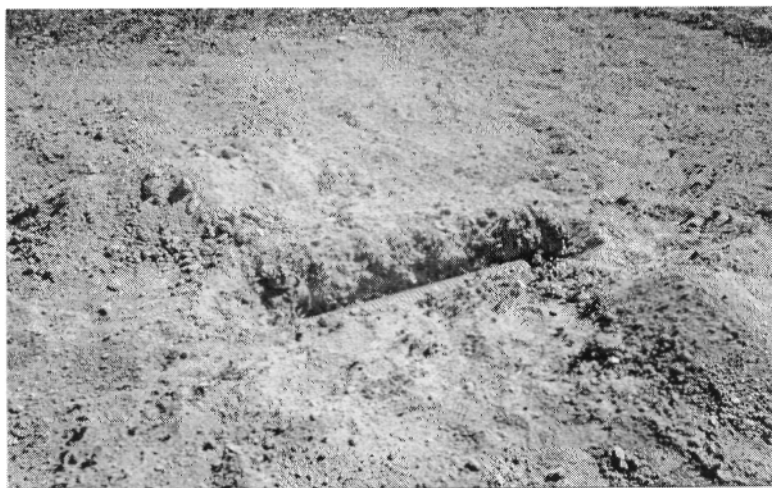
Mesures ortogonals a l'eix del cilindre



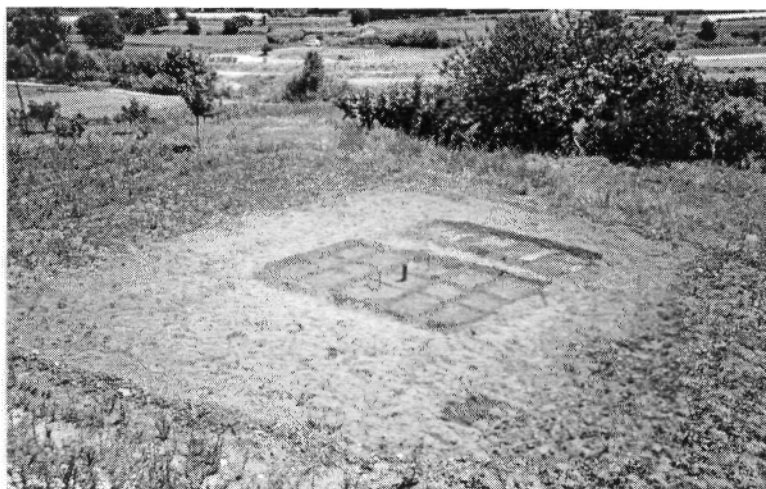
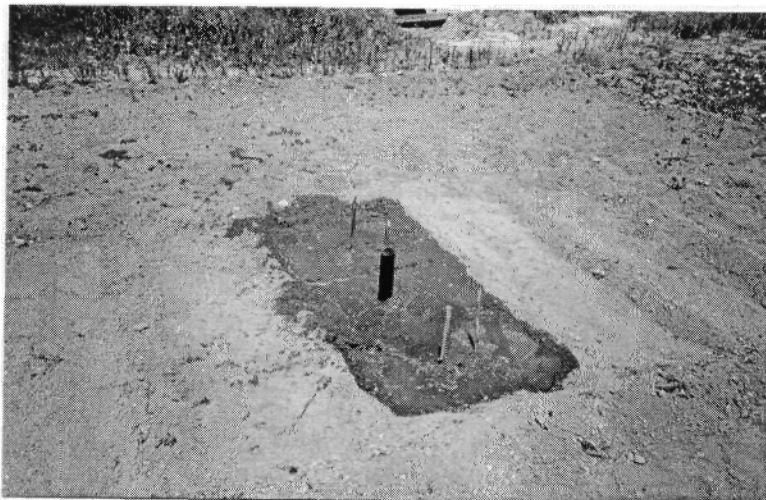
Mesures paral.leles a l'eix del cilindre

L.2. Descripció de les mesures realitzades en el camp

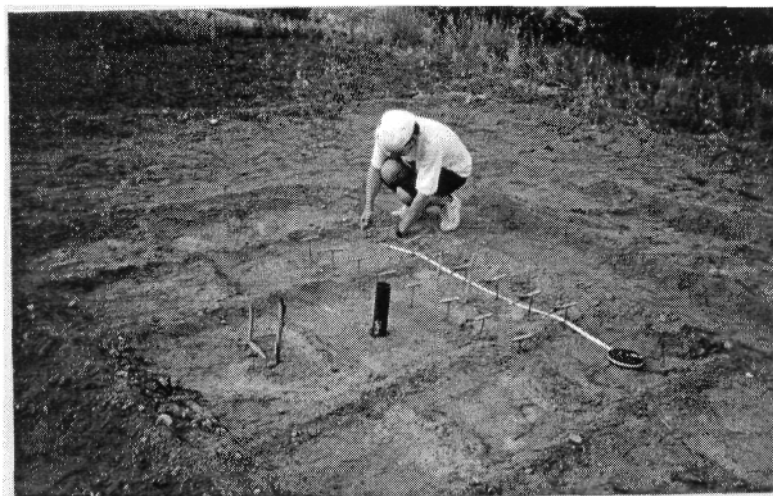
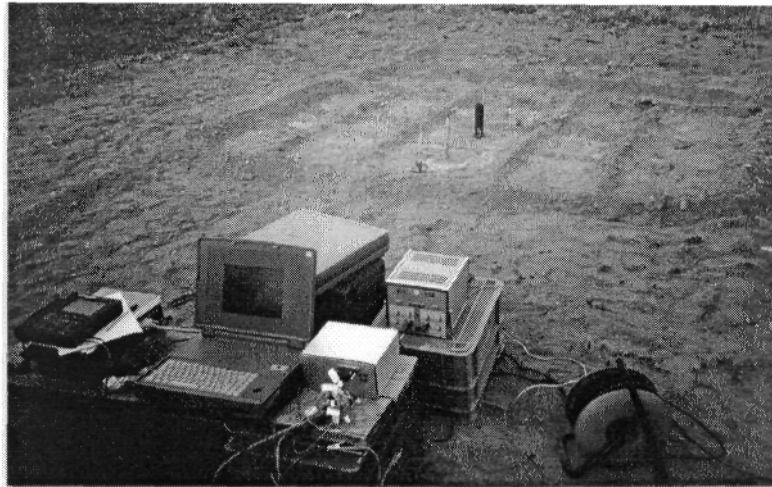
Soterrament d'un tub de PVC de 8 cm de radi i 106 cm de longitud a 24 cm de profunditat respecte el seu centre, en un terreny agrícola. (Sta Eulàlia de Ronçana. (Barcelona) 6 de Juliol de 1998).



Preparació del terreny per tal que presenti unes bones condicions d'humitat

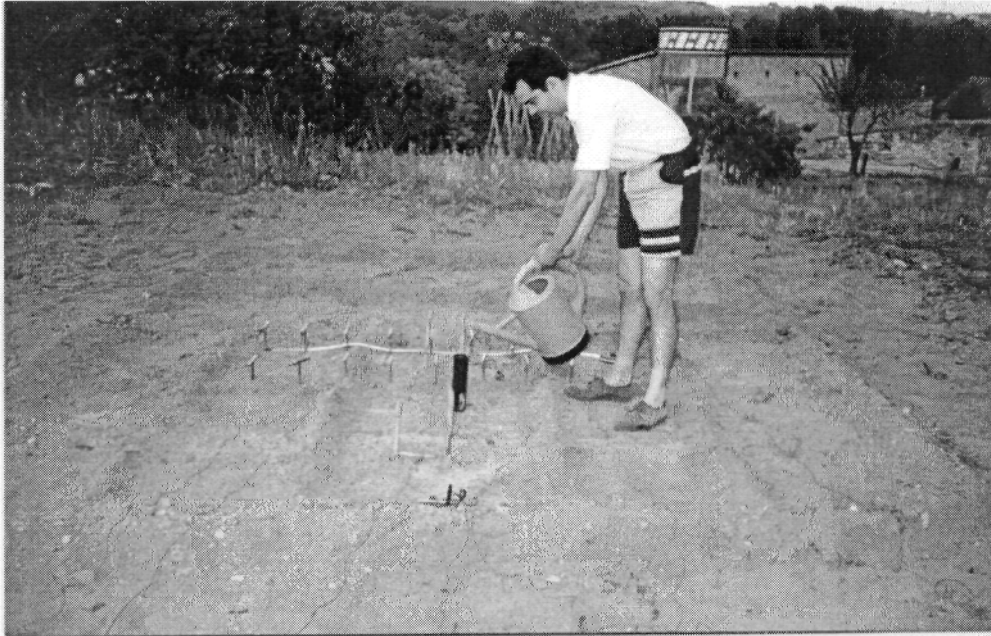


Instrumentació utilitzada i procés de realització de les mesures



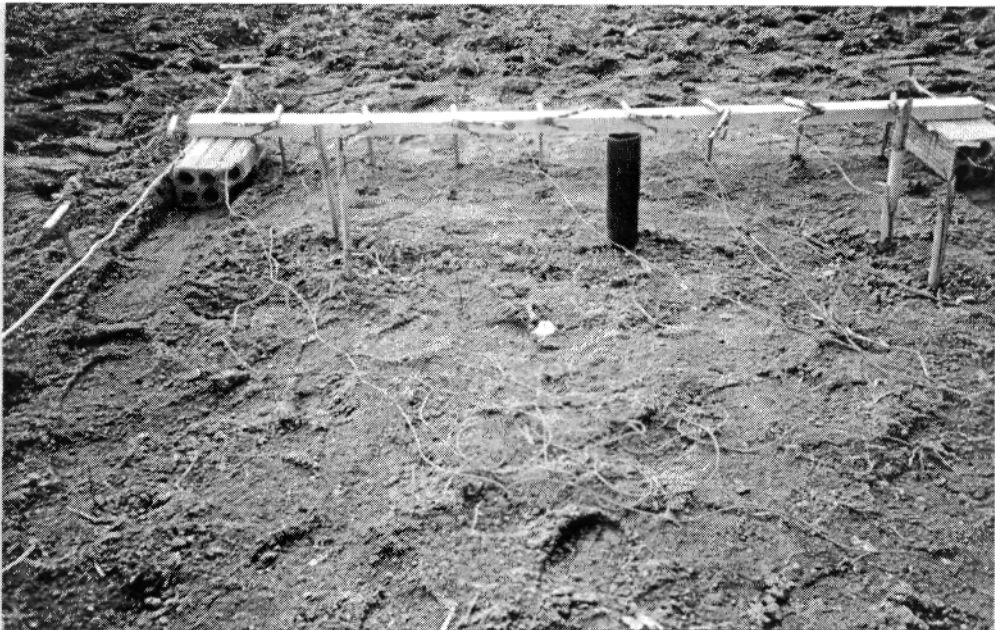
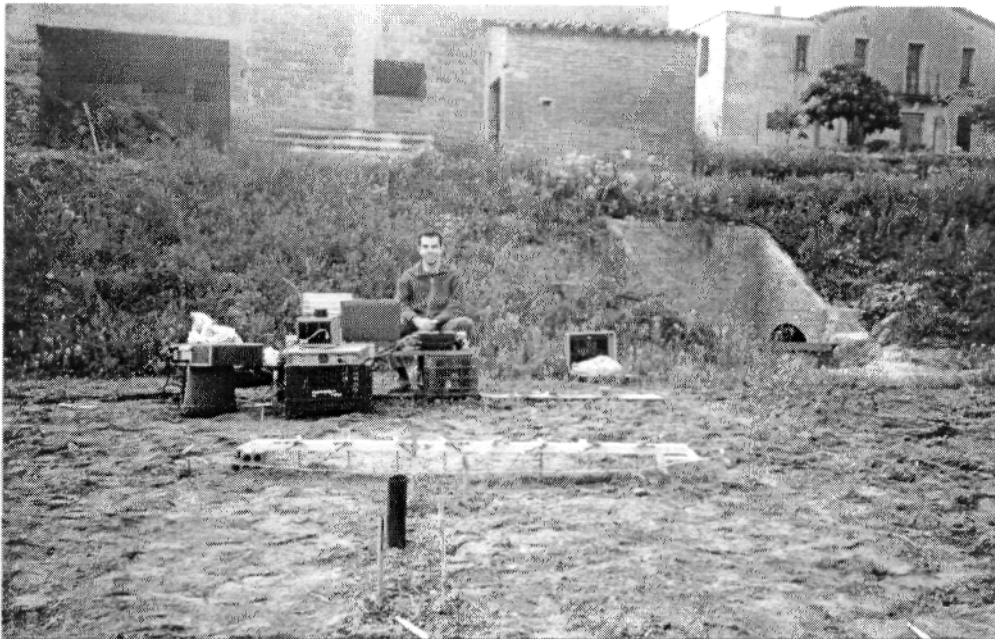
Mesures ortogonals a l'eix del tub, per mitjà d'una agrupació de 8 elèctrodes equiespaiats 20 cm

Generació d'una fuga d'aigua en el tub soterrat



Per generar la fuga en el tub soterrat introduïm una certa quantitat d'aigua des de la superfície per mitjà del tub exterior que es veu en la imatge, el qual està en contacte amb el tub soterrat. La detecció de la fuga es realitza per mitjà de la comparació de les mesures obtingudes abans i després de generar-se la fuga, sense desclavar els elèctrodes.

Mesures de camp realitzades el 6 de Novembre de 1998



Mesures paral.leles a l'eix del tub soterrat

AGRAÏMENTS

Aquest treball ha estat finançat per la DGICYT, Projecte PB93-0961.

Vull expressar el meu agraïment a tot el Departament d'Enginyeria Electrònica per la seva ajuda i col·laboració. En especial a Ramon Pallàs Areny, Manel Gasulla i Josep Maria Torrents pels seus consells, comentaris i ajuda en la realització de les mesures de camp, així com a totes aquelles persones que s'han interessat en l'elaboració d'aquesta tesi.