



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

DEPARTAMENT D'ENGINYERIA ELECTRÒNICA

Diseño Microelectrónico de Controladores para Convertidores Conmutados Continua-Continua

Tesis doctoral presentada
para la obtención del título de
Doctor Ingeniero de Telecomunicación por

Eduard Alarcón Cot

Director:

Dr. Alberto Poveda López

Barcelona, Noviembre de 1999

2.4 Características analíticas de los controladores difusos

Una virtud clave de los controladores difusos radica en la interpretabilidad de su acción desde dos perspectivas distintas. En los apartados previos, y, en base a razonamientos propios de los principios de lógica difusa, los sistemas o controladores difusos han sido descritos como sistemas expertos que incorporan conocimiento cuyo procesamiento simbólico no es tan rígido como en los sistemas expertos convencionales. En el apartado que nos ocupa se estudiará la operación de un controlador difuso como un sistema que establece un mapeado analítico multidimensional, es decir, que opera como un sistema algebraico no lineal, estableciendo una relación biunívoca estática, independiente de la variable tiempo. La condición de operación sin dinámica se verá relajada en un apartado posterior dedicado a la operación no lineal dinámica de los controladores difusos. Nótese que la combinación sinérgica de ambos aspectos, es decir, la interpretabilidad de una aproximación no lineal genérica, o bien la justificación analítica de una descripción cualitativa, confiere a los sistemas o controladores difusos una ventaja de cierto relieve frente a otros sistemas de aproximación genérica como puedan ser las redes neuronales artificiales. No obstante, aunque la lógica difusa establece un entorno en el que el conocimiento experto puede imbricarse, el proceso de extracción de conocimiento no es trivial, de forma que aún se requieren métodos más eficientes y sistemáticos para adquirir conocimiento [LEE90II]. A pesar de no incluir conocimiento experto, la capacidad de aproximación analítica que presentan los controladores difusos sigue intacta, de ahí que se estudie su efecto en los apartados posteriores.

Al afrontar el estudio de la acción de un controlador difuso como sistema de aproximación funcional, debe considerarse el amplio espectro de posibles combinaciones estructurales existentes para un sistema difuso, en función del tipo de inferencia lógica considerada, de interpretación de la implicación difusa, y de métodos de fuzzyficación y defuzzyficación. A continuación se formula la operación de diversos sistemas difusos demostrando su facultad de operación como mapeadores multidimensionales analíticos. Se estudiarán tres casos representativos.

2.4.1 Caso A (Implicación local, defuzzyficación MC).

Considerando sistemas difusos definidos por una base de reglas cuyos consecuentes B^i son conjuntos difusos normales (máxima pertenencia unitaria) con valores centrales de los soportes

denominados v_C^l ; si se establecen la implicaciones locales de Mamdani (i.e., núcleos de inferencia de producto o de mínimo) (2.56), (2.57), y la fuzzyficación es del tipo *singleton* (2.62), mientras que la defuzzyficación es del tipo media de centros (2.72), las expresiones que rigen la operación de dichos sistemas difusos son, respectivamente:

$$v = f(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{l=1}^M v_C^l \cdot \prod_{i=1}^n \mu_{R_i^l}(u_i)}{\sum_{l=1}^M \prod_{i=1}^n \mu_{R_i^l}(u_i)} \quad (2.101)$$

$$v = f(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{l=1}^M v_C^l \cdot \min_{i=1}^n (\mu_{R_i^l}(u_i))}{\sum_{l=1}^M \min_{i=1}^n (\mu_{R_i^l}(u_i))} \quad (2.102)$$

donde se considera que los sistemas difusos representan una función o mapeado entre un vector de un espacio n -dimensional $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \dots, u_n) \in U \subset \mathfrak{R}^n$ y una salida unidimensional $v \in V \subset \mathfrak{R}$. Obsérvese que la anterior expresión describe la operación entrada-salida entre valores reales, que no difusos, al estar incluidas en la formulación las etapas de fuzzyficación y defuzzyficación. De las expresiones anteriores se comprueba que la salida establece una ponderación de las posiciones centrales de los consecuentes de las reglas. Una conclusión importante que ya establece el lema 2.2, y que se aprecia en las anteriores expresiones es que la variable de salida no depende de la forma de los conjuntos difusos consecuentes, y por tanto los consecuentes de las reglas pueden interpretarse como singletons difusos (de pertenencia unitaria en v_C^l y nula para otro punto), o, en particular como números reales (v_C^l). Esta última interpretación será extendida con el estudio de los controladores difusos tipo Takagi-Sugeno que tratará un capítulo posterior. Por otra parte, se advierte en las expresiones (2.101) y (2.102) que los factores de ponderación de dichos valores equivalen a la acción agregada de las funciones de pertenencia individuales (formalmente, de sus extensiones cilíndricas), vía operadores de intersección extendida, consecuencia de la interpretación local de las reglas según la inferencia Mamdani. Por tanto, considerando funciones de pertenencia multidimensionales definidas por

$$\begin{aligned} \mu_{R^l}(\mathbf{u}) &= \mu_{U_1^l \times U_2^l \times \dots \times U_n^l}(u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv t[\mu_{R_1^l}(u_1), \mu_{R_2^l}(u_2), \dots, \mu_{R_n^l}(u_n)] = \\ &= \mu_{R_1^l}(u_1) * \mu_{R_2^l}(u_2) * \dots * \mu_{R_n^l}(u_n) \end{aligned} \quad (2.103)$$

las anteriores expresiones (2.101) y (2.102) son casos particulares de un formulación genérica compactada:

$$v = f(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{l=1}^M v_C^l \cdot \mu_{R^l}(\mathbf{u})}{\sum_{l=1}^M \mu_{R^l}(\mathbf{u})} \quad (2.104)$$

La reconsideración de la anterior expresión en forma de base de reglas de conocimiento experto da lugar a la siguiente reinterpretación de las mismas:

$$\begin{aligned} R^1: & \text{ SI } \mathbf{u} \text{ es } A^1 \mid_{\mu_{R^1}(\mathbf{u})} \text{ ENTONCES } v \text{ es } v_C^1 \\ R^l: & \text{ SI } \mathbf{u} \text{ es } A^l \mid_{\mu_{R^l}(\mathbf{u})} \text{ ENTONCES } v \text{ es } v_C^l \\ R^M: & \text{ SI } \mathbf{u} \text{ es } A^M \mid_{\mu_{R^M}(\mathbf{u})} \text{ ENTONCES } v \text{ es } v_C^M \end{aligned} \quad (2.105)$$

La premisa o antecedente de estas reglas expertas puede interpretarse de forma cualitativa como la obtención del grado de proximidad de un vector de entrada a una etiqueta difusa multidimensional, mientras que las conclusiones o consecuentes de cada regla corresponden a un valor real, interpretable como una acción de control concreta y localizada. La consideración de casos particulares típicos para las funciones de pertenencia (*e.g.* gaussianas, triangulares) lleva a diferentes particularizaciones de la anterior expresión. Si se consideran funciones de pertenencia gaussianas (de modo que la acción local queda descrita por una sólo ecuación compacta, a diferencia de las funciones de pertenencia triangulares), las expresiones (2.101) y (2.102) resultan en:

$$v = f(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{l=1}^M v_C^l \cdot \prod_{i=1}^n e^{-((u_i - \mu_i^l) / \sigma_i^l)^2}}{\sum_{l=1}^M \prod_{i=1}^n e^{-((u_i - \mu_i^l) / \sigma_i^l)^2}} \quad (2.106)$$

$$v = f(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{l=1}^M v_C^l \cdot e^{-\sum_{i=1}^n ((u_i - \mu_i^l) / \sigma_i^l)^2}}{\sum_{l=1}^M e^{-\sum_{i=1}^n ((u_i - \mu_i^l) / \sigma_i^l)^2}} \quad (2.107)$$

Estos tipos de sistema de control difuso caso A (con inferencia Mamdani, fuzzyficación singleton y defuzzyficación con media de centros), que consideran funciones de pertenencia

gaussianas o triangulares son el tipo de sistemas difusos más aceptados en aplicaciones prácticas. En ambos casos (funciones gaussianas o triangulares), y tal como se describió en el apartado que trataba los distintos métodos de fuzzyficación, si tiene sentido considerar etapas de fuzzyficación –si existe una indeterminación en los valores de entrada al sistema difuso–, es posible describir la operación del sistema difuso con expresiones compactadas [WAN97]. Obsérvese que las salidas asociadas a cada regla, los consecuentes, son meros valores constantes, por tanto, singletons difusos. Denominaremos a esta clase de controladores difusos *sistemas difusos de agregación o adición local*, denominación que volverá a justificarse en apartados posteriores. En particular, este tipo de sistemas corresponde a sistemas difuso del tipo Takagi-Sugeno de orden cero (TSK-0), que serán introducidos en el apartado posterior dedicado a sistemas difusos dinámicos.

2.4.2 Caso B (Implicación global, defuzzyficación MC)

En el capítulo dedicado a los distintos métodos de inferencia difusa, se advirtió la notable diferencia entre las implicaciones locales de Mamdani y el resto de implicaciones (de carácter global); cabe plantear por tanto en qué difieren los sistemas difusos que, siendo equivalentes en parte a los sistemas difusos del caso A (fuzzyficación singleton, defuzzyficación de media de centros), incluyen núcleos de inferencia del tipo Zadeh (2.65), Lukasiewicz (2.66) o Dienes-Rescher (2.67), que recordemos que consideran las tres implicaciones respectivas, así como agregación gödeliana. Considerando sistemas difusos definidos por una base de reglas cuyos consecuentes B^l son conjuntos difusos normales (máxima pertenencia unitaria) con valores centrales de los soporte denominados v_C^l ; si se establecen la implicaciones de Zadeh, Lukasiewicz o Dienes-Rescher, y la fuzzyficación es del tipo *singleton* (2.62), mientras que la defuzzyficación es del tipo media de centros (2.72), la expresión [WAN97] que rige la operación de dichos sistemas difusos es:

$$v = f(u) = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M v_C^l \quad (2.108)$$

El resultado anterior describe una función cuya salida es independiente de las entradas, lo que demuestra el carácter altamente impráctico de la combinación de este tipo de inferencias cuando se considera defuzzyficación via media de centros. Una explicación intuitiva de este efecto pasa por advertir el carácter global del tipo de implicaciones bajo estudio (véase la

figura (2.9)), que distribuyen el peso lógico de cada regla no tanto en el valor máximo que toma su centro como en la conformación de la función de pertenencia, conformación ésta que no es tomada en consideración por el método de defuzzyficación de media de centros (lema 2.2).

2.4.3 Caso C (Implicación local, defuzzyficación MAX)

Se estudia a continuación el efecto que resulta de la aplicación del método de defuzzyficación tipo MAX (2.80-2.82) a sistemas difusos definidos por una base de reglas cuyos consecuentes B^l son conjuntos difusos normales (máxima pertenencia unitaria) con valores centrales de los soporte denominados v_C^l . Si se establecen las implicaciones locales tipo Mamdani, y la fuzzyficación es del tipo *singleton* (2.62), mientras que la defuzzyficación se basa en máximos (2.80-2.82), la expresión que rige la operación de dichos sistemas difusos es:

$$v = f(\mathbf{u}) = v_C^{l^{MAX}} \quad (2.109)$$

donde $l^{MAX} \in \{1, 2, \dots, M\}$ es el índice de la regla que proporciona el valor máximo de disparo para una cierta entrada, es decir aquella regla que cumple

$$\prod_{i=1}^n \mu_{R_i^{MAX}}(u_i) \geq \prod_{i=1}^n \mu_{R_i}(u_i) \quad (2.110)$$

o bien, equivalentemente

$$\mu_{R_i^{MAX}}(\mathbf{u}) \geq \mu_{R_i}(\mathbf{u}) \quad (2.111)$$

Si se asume que los consecuentes de las reglas son invariables (como corresponde a sistemas difusos que no sean dinámicos adaptativos), la expresión anterior describe funciones lineales a tramos con discontinuidades de salto no derivables tipo escalón. Existe un número importante de afirmaciones expuestas en la literatura especializada, que comparan la operación del método MOM (por *mean of maxima*, media de máximos, según la expresión (2.82)) con el de CDG (2.70), concluyendo que ninguno de ellos presenta ventajas sobre el otro:

The COA strategy yields better steady-state performance and smoother response, but is less transient than the MOM strategy [JIA96].^{2.1}

The MOM method takes no account of the rules triggered below the maximum level, it is no properly fuzzy. The COG has the disadvantage of rarely recommending control actions toward the extremes of the action range [SAA96].^{2.2}

The MOM defuzzyfier gives less smooth response and worse steady-state behaviour, but the better transient performance in comparison with the COG defuzzyfier [MEN98].^{2.3}

De hecho, la operación de defuzzyficación llevada a cabo mediante un criterio de máximos resulta en una transferencia abrupta, dado que se elimina tanto la acción interpoladora (debida a las funciones de pertenencia de los antecedentes) como la acción promediadora de filtrado espacial que establecen otros métodos de defuzzyficación, como pueda ser la acción del *CDG*, y que sitúa en desventaja al primer método. El siguiente lema establece resultados formales sobre las consideraciones anteriores.

2.4.3.1 Sobre el efecto del método de defuzzyficación de máximos

lema 2.3 Considérese un sistema de inferencia difusa con defuzzyficador tipo *singleton*, base de reglas difusa compuesta de M reglas, cuyos conjuntos difusos consecuentes B^l , definidos en $V \subset \mathfrak{R}$ son normales de centro v_C^l y se considera el método de defuzzyficación de media de máximos (2.82); en dicho caso la relación entrada-salida es independiente de la forma de las funciones de pertenencia $\mu_A(u)$ que definen los conjuntos difusos antecedentes, y depende tan sólo del punto de intersección entre conjuntos difusos adyacentes.

Prueba del lema 2.3: Sin pérdida de generalidad, la justificación del método se establece para una función unidimensional. La formulación en (2.109) expresa la propiedad que presenta el defuzzyficador basado en máximos de obtener como salida del controlador difuso

^{2.1} La estrategia de *CDG* resulta en mejor operación en estado estacionario y una respuesta más suave, pero es menos transitoria que la respuesta *MOM*.

^{2.2} El método *MOM* no considera las reglas disparadas por debajo del nivel máximo, no es propiamente difuso. El *CDG* tiene la desventaja de recomendar raramente acciones de control hacia los extremos del rango de acción.

^{2.3} El defuzzyficador *MOM* proporciona una respuesta menos suave y peor comportamiento en estado estacionario, pero una mejor respuesta transitoria en comparación con el defuzzyficador *CDG*.

una función no lineal discontinua, constante a tramos. Una justificación gráfica de esta operación se presenta en la figura 2.17, donde se muestra la función de salida del controlador difuso descrito por las reglas difusas

$$\begin{aligned}
 & \text{SI } u \text{ es } A^{l-1} \text{ ENTONCES } v \text{ es } B^{l-1} \\
 & \text{SI } u \text{ es } A^l \text{ ENTONCES } v \text{ es } B^l \\
 & \text{SI } u \text{ es } A^{l+1} \text{ ENTONCES } v \text{ es } B^{l+1}
 \end{aligned}
 \tag{2.112}$$

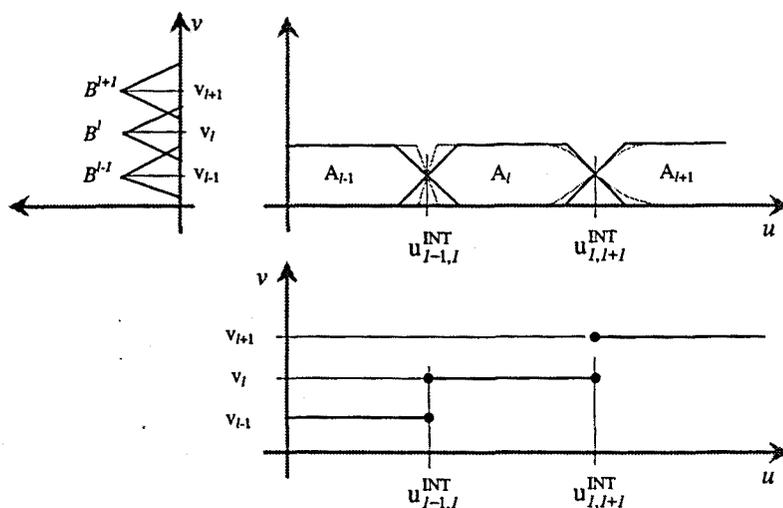


Figura 2.17 Un ejemplo de funciones de pertenencia y función entrada-salida del lema 2.3 sobre el efecto de la defuzzyficación tipo MAX

La justificación al lema 2.3 es directa a partir del diagrama de la figura 2.17. Como se observa en la definición gráfica de las funciones de pertenencia que los conjuntos difusos antecedentes A_{l-1} , A_l , A_{l+1} , la conformación específica de dichos conjuntos difusos (distintas conformaciones se muestran en trazo suave) no contribuye a la forma de la función $v=f(u)$ que define la transferencia no lineal de controlador difuso, cuyos puntos de salto están determinados unívocamente por los puntos en U de intersección $u_{i,j}^{INT}$ #.

La relevancia del lema anterior estriba en que el método de defuzzyficación de máximos aplicado a los núcleos de inferencia usualmente utilizados en control difuso ignora su capacidad de interpolación o filtrado espacial, que resulta en una transición suave entre las distintas zonas en que un controlador difuso divide el espacio de entrada. Esta característica, que algunos autores interpretan como una robustez o insensibilidad de la variable de salida ante cambios de la variable de entrada [WAN97], de hecho no es particular a los

controladores difusos sino que, al eliminar la interpolación debida a los conjuntos antecedentes (de hecho la característica difusa de los controladores) se comparte con sistemas expertos basados en lógica clásica, tal como presenta el siguiente corolario al lema 2.2.

Corolario al lema 2.2. La selección, como caso particular de los conjuntos difusos A_{l-1} , A_l, A_{l+1} , de conjuntos *crisp* o de lógica clásica cuyo soporte esté definido por $A_{l-1}=[0, u_{l-1,l}^{INT}]$, $A_l=[u_{l-1,l}^{INT}, u_{l,l+1}^{INT}]$ y $A_{l+1}=[u_{l-1,l}^{INT}, \infty]$ lleva a un salida equivalente a cualquier otra forma de función de pertenencia difusa #.

Este corolario demuestra que, bajo la operación de defuzzyficación basada en máximos, y para cualquier sistema controlador difuso, siempre existe un sistema experto basado en lógica clásica que representa la misma relación no lineal entrada-salida. Recapitulando las implicaciones prácticas del lema 2.3 y el lema 2.2 expuesto en el capítulo anterior, cabe observar que el efecto de la operación de un controlador difuso como el considerado en el lema 2.3 elimina o torna *crisp* la parte de los antecedentes del sistema de inferencia lógica, lo que implica una pérdida de generalización o interpolación. Por su parte, y de forma dual, el lema 2.2 que identifica la aplicación del método de defuzzyficación de media de centros con la operación de salidas tipo *singleton*, torna *crisp* la parte debida a los consecuentes de las reglas de inferencia lógica difusa; este acción, no obstante, mantiene la capacidad de división suave del espacio de entrada, añadiendo a su vez interpretabilidad analítica a las acciones de control locales.

En esta tipología de controladores difusos no se ha considerado el método de defuzzyficación de centro de gravedad por dos motivos: (a) Por la dificultad que conlleva su implementación (b) Por la razonable aproximación que de dicho método se obtiene aplicando el método de defuzzyficación de media de centros –según demuestran los lemas 2.1 y 2.2-. Por otra parte, el considerar el método de defuzzyficación de *CDG* no permite obtener expresiones matemáticas cerradas para la formulación de la operación de los sistemas difusos que lo contienen.

Del anterior análisis expuesto para los distintos sistemas difusos, se desprende que la operación de los sistemas difusos de agregación local, *i.e.* sistemas difusos con valores consecuentes reales o TSK-0, devienen la solución más plausible a la aproximación difusa de funciones multidimensionales no lineales.

De forma cualitativa, la aproximación de funciones multidimensionales mediante sistemas difusos tipo A se muestra en la figura 2.18 en un ejemplo bidimensional. La bondad de la

aproximación de la función bidimensional no es muy dependiente de la forma de la función local de pertenencia bidimensional (en el límite es independiente). Esta idea se formalizará en el apartado siguiente, que trata de la propiedad que exhiben los sistemas difusos de agregación o adición local de ser aproximadores universales de funciones, propiedad que comparten con otros sistemas de procesamiento distribuido, que serán expuestos a continuación, a saber, las redes neuronales de función base radial (*Radial Basis Functions*, en inglés), el Controlador del Modelo Aritmético del Cerebelo, (*Cerebellar Model Arithmetic Controller*, abreviado CMAC en inglés), las redes neuronales probabilísticas o de regresión generalizada (*Probabilistic neural networks, PNNs o General Regression Networks, GRNNs* en inglés), la interpolación mediante *splines*, y las descomposiciones en *wavelets*.

Aproximación con funciones base locales

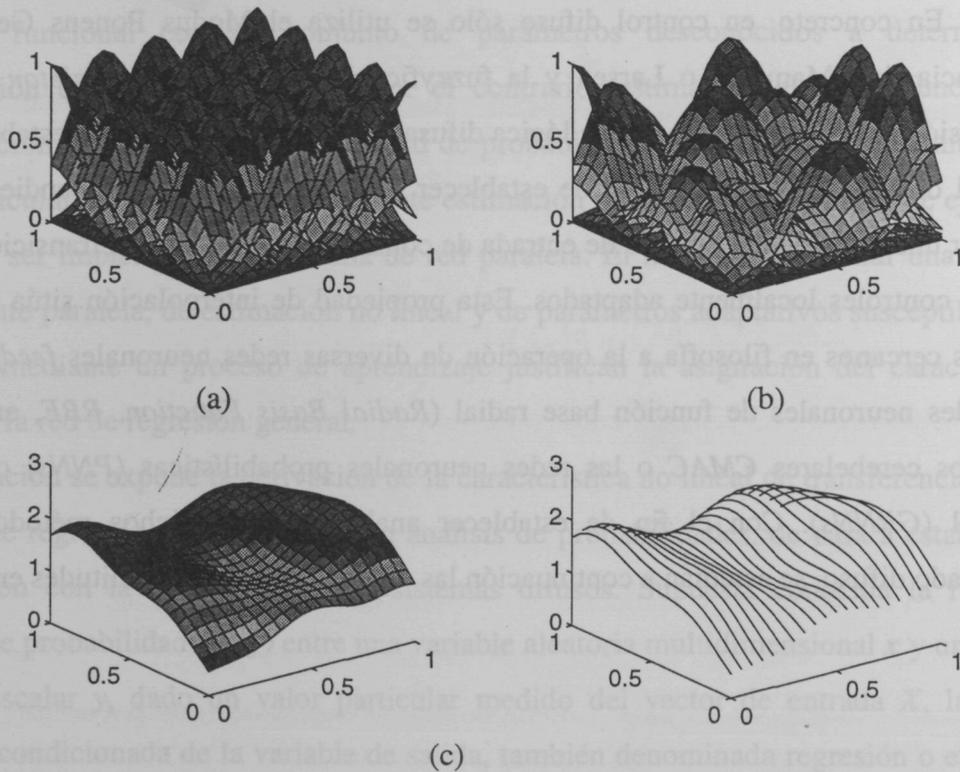


Figura 2.18 Aproximación de funciones mediante funciones base locales.

- (a) Distribución ortogonal de las funciones base
- (b) Ponderación de las funciones base
- (c) Agregación ponderada de las funciones base

2.4.4 Operación lógica frente a Operación analítica en controladores difusos

En los apartados anteriores se han introducido formalmente los conceptos de conjunto difuso, lógica difusa y sistema difuso de inferencia, con vistas a realizar un análisis crítico y detectar así los requerimientos reales de procesamiento de señal de cara a una implementación práctica como circuito de aplicación específica. Existe una amplia diversidad de campos matemáticos en que la extensión difusa ha sido aplicada (de hecho, cualquier rama o disciplina matemática pueden ser *fuzzyficada*, llevando, por ejemplo a la definición de la topología difusa, el álgebra difusa, el análisis difuso, la teoría de la medida difusa, entre otras). No obstante, siendo el éxito del control difuso la aplicación que justifica la viabilidad práctica del razonamiento difuso, es paradójico que no se utilicen todas las prestaciones que proporciona la lógica difusa. En concreto, en control difuso sólo se utiliza el Modus Ponens Generalizado, la inferencia tipo Mamdani o Larsen y la fuzzyficación directa tipo *singleton*. O tal vez la conclusión más plausible sea que la lógica difusa en sí no sea la razón del establecimiento del control difuso, sino la capacidad de establecer acciones locales e independientes, es decir, realizar una división del espacio de entrada de control, y establecer una transición suave entre dichos controles localmente adaptados. Esta propiedad de interpolación sitúa a los sistemas difusos cercanos en filosofía a la operación de diversas redes neuronales *feedforward* como las redes neuronales de función base radial (*Radial Basis Function, RBF*, en inglés), los modelos cerebelares *CMAC* o las redes neuronales probabilísticas (*PNNs*) o de regresión general (*GRNNs*). Con el fin de establecer analogías entre dichos métodos respecto al procesamiento difuso, se estudian a continuación las equivalencias y disimilitudes entre ellos.

2.5 Analogía entre sistemas difusos y redes neuronales probabilísticas (PNNs) o de regresión general (GRNNs).

Los modelos de redes neuronales artificiales probabilísticas (*PNNs*) constituyen sistemas de estructura altamente paralela de aproximación de funciones, *i.e.*, que realizan una regresión, en general no lineal, (de ahí su equivalencia con la denominada red neuronal de regresión general, *GRNN*), actuando como predictores probabilísticos (si estiman funciones de control, actúan como controladores), asociando por tanto la regresión de una variable dependiente Y , sobre una cierta variable independiente X , al valor más probable de Y (esperanza condicionada), computado en base a un conjunto finito de medidas, posiblemente ruidosas, de X y sus valores asociados Y . En general, la regresión no lineal convencional asume una estructura funcional con un conjunto de parámetros desconocidos a determinar. La aproximación de la *GRNN* o *PNN*, por el contrario, estima la salida en función de la reconstrucción de una función de densidad de probabilidad –pdf– que no está limitada a una forma particular, sino aproximada mediante estimación no paramétrica a partir de ejemplos, y que puede ser implementada en forma de red paralela. El hecho de presentar una estructura masivamente paralela, de estimación no lineal y de parámetros adaptativos susceptibles de ser obtenidos mediante un proceso de aprendizaje justifican la asignación del carácter de red neuronal a la red de regresión general.

A continuación se expone la derivación de la característica no lineal de transferencia de la red neuronal de regresión general basada en análisis de probabilidades, de cara a establecer una comparación con la operación de los sistemas difusos. Supuesta conocida la función de densidad de probabilidad $f(x,y)$ entre una variable aleatoria multidimensional x y una variable aleatoria escalar y , dado un valor particular medido del vector de entrada X , la media o esperanza condicionada de la variable de salida, también denominada regresión o estimación, queda definida por :

$$E[y | X] = \hat{Y}(X) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(X, y) dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(X, y) dy} \quad (2.113)$$

Cuando la función de densidad de probabilidad no es conocida, como corresponde al caso bajo estudio, puede ser modelada por una estimación no paramétrica construida en función de un conjunto discreto de n medidas X^i e Y^i . Una elección plausible de dicha estimación es

aquella que considera la suma de un conjunto de funciones de distribución de probabilidad localizadas (conocidas como ventanas de Parzen) asociadas a cada punto muestra del espacio multidimensional; considerando que dicha estimación local presenta una característica gaussiana con varianza σ , la estimación de la función de densidad de probabilidad resulta en:

$$\hat{f}(X, y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p+1}{2}}} \cdot \frac{1}{(\sigma)^{p+1}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{(X-X^i)^T \cdot (X-X^i)}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(Y-Y^i)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.114)$$

Recurriendo a la anterior estimación no paramétrica de la función de densidad de probabilidad (2.114), la esperanza de la variable de salida y , según la expresión (2.113), deviene:

$$E[y | X] = \hat{Y}(X) = \frac{\sum_{i=1}^n e^{-\frac{(X-X^i)^T \cdot (X-X^i)}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{(Y-Y^i)^2}{2\sigma^2}} dy}{\sum_{i=1}^n e^{-\frac{(X-X^i)^T \cdot (X-X^i)}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(Y-Y^i)^2}{2\sigma^2}} dy}$$

$$\xrightarrow{D_i^2 \equiv (X-X^i)^T \cdot (X-X^i)} E[y | X] = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \cdot e^{-\frac{D_i^2}{2\sigma^2}}}{\sum_{i=1}^n e^{-\frac{D_i^2}{2\sigma^2}}} \quad (2.115)$$

donde se define D_i como la distancia euclídea entre el vector medido X y el i -ésimo centro asignado a los vectores de aprendizaje X^i . Obsérvese que la propiedad de linealidad permite intercambiar el orden de la operaciones de suma e integración y por tanto extraer las estimaciones locales de salida Y^i , de modo que la expresión final puerder ser tanto aplicada analíticamente a problemas concernientes a datos numéricos como implementada en forma de red neuronal *feedforward*, tal y como se muestra en la figura 2.19.

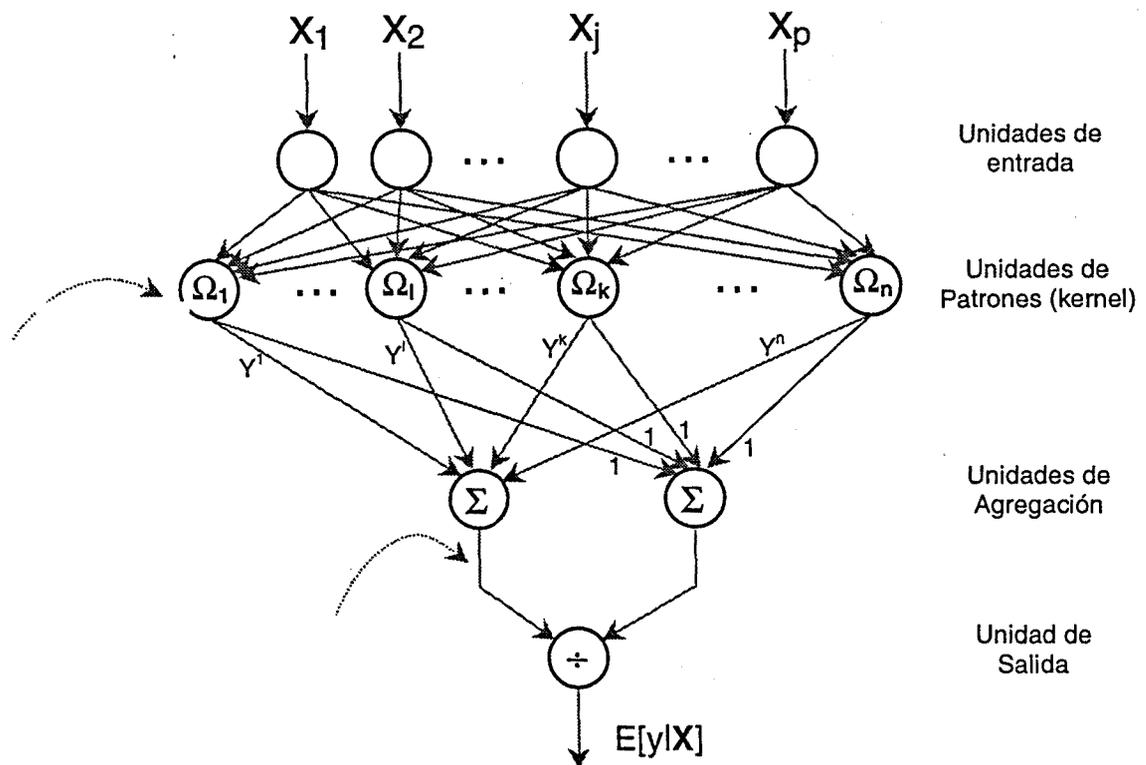


Figura 2.19 Diagrama de bloques de la red neuronal *feedforward* de regresión general (GRNN) .

La red neuronal de regresión general fue originalmente propuesta en [SPE91] por D. F. Specht (de *Lockheed Missiles and Space Company, Inc.*, en EE.UU.), y aplicada tanto a la aproximación de una característica estática de saturación como al modelado de un sistema dinámico. En este segundo ejemplo, según el autor, la influencia localizada de cada nodo gaussiano permite al algoritmo de aprendizaje el refinamiento de la acción de control en una región del espacio de medida sin degradar la aproximación en regiones distantes. Esta característica ya fue advertida como una virtud compartida con los sistemas de control difusos con inferencia local tipo Mamdani; un análisis de las anteriores expresiones que justifican la operación de las redes neuronales de regresión, sin embargo, permite establecer una equivalencia completa entre ambas redes de procesamiento. En efecto, la expresión de obtención de la esperanza condicionada (2.113) corresponde exactamente a la defuzzyficación mediante centroide -expresión (2.70)-. Por su parte, la función de densidad de probabilidad agregada $f(x,y)$ expresada en (2.114) admite la interpretación de una combinación de Mamdani (en general la unión difusa, y en este caso la suma escalada) del efecto de n reglas, definidas para este caso en sus antecedentes mediante funciones de pertenencia locales gaussianas agregadas según norma- t de Larsen (2.37), que definen una relación difusa descrita por una función de

pertenencia multidimensional gaussiana centrada en X^i , y definida la función de pertenencia asociada al conjunto difuso consecuente como una función gaussiana de centro Y^i . La expresión definitiva (2.115) que describe la operación de la red neuronal *GRNN* corresponde a la expresión (2.104) que describe a los sistemas difusos de agregación local, y en particular, a aquellos que contienen funciones de pertenencia gaussianas (2.106). La rigidez de la forma de la función de pertenencia equivalente gaussiana de las *GRNNs* no debe considerarse una objeción a la equivalencia, ya que en la descripción de (2.114) pueden considerarse diversos estimadores de Parzen probabilísticos (*Parzen window function*, en inglés, del área de teoría de la probabilidad), cuyas conformaciones siguen las diversas formas que pueden presentar las funciones de pertenencia.

La anterior justificación demuestra que, a pesar de presentar un origen histórico distinto, el tipo de procesado que realizan ambos sistemas es funcionalmente equivalente. Obsérvese que bajo la óptica de la similitud estructural de ambos sistemas no lineales, cabe interpretar la operación de un sistema difuso como un sistema que realiza una regresión no lineal, aunque sin considerar una especificación *a priori* sobre la forma de la ecuación de regresión.

Una vez demostrada la equivalencia estructural entre las redes neuronales artificiales de regresión general y los sistemas difusos de agregación local, que permite interpretar la operación de un controlador difuso según la red *feedforward* mostrada en la figura 2.19, cabe tratar dos aspectos que extienden la equivalencia. El primero de ellos trata la cuestión del aprendizaje de ambas redes no lineales. Obsérvese que, en su definición, las funciones gaussianas de la *GRNNs* tiene varianza fija, lo que justifica, según el autor [SPE91], un aprendizaje inmediato de dicha red (dicha varianza fija, que en el trabajo original se asigna de forma heurística, podrá ser interpretada y asignada en base al criterio frecuencial que se expondrá en un capítulo posterior). Cada par de aprendizaje aumenta la información que contiene la red (cualitativamente equivalente a la adición de una regla difusa en la base de reglas IF-THEN) y permite su uso instantáneo para valores diferentes a los del conjunto de entrenamiento. Si el número de elementos del conjunto de entrenamiento es elevado, de forma que sea impráctico respecto a la complejidad de la red el asignar un nodo separado (o neurona) a cada par de entrenamiento, puede aplicarse alguno de los métodos de agrupación (*clustering*, en inglés). Este tipo de aprendizaje puede por tanto aplicarse a los controladores difusos de parámetros adaptativos. Con vistas a extender la equivalencia global y no tan sólo la estructural (aunque ésta última consideración sea suficiente cuando se trate el tema de la implementación microelectrónica de dichos sistemas como controladores), puede plantearse la interpretabilidad lingüística de la operación de las *GRNNs*. Entendemos que una condición

para equiparar la equivalencia completa entre ambos sistemas pasa por la consideración de un conjunto de muestras X^i e Y^i que conlleve una base de reglas lingüísticamente plausible. Este conjunto de reglas requiere que las funciones de pertenencia proyectadas sobre cada dimensión correspondan a un conjunto de reglas completo, consistente y continuo, tal como se definió en (2.48). Dicho comportamiento puede asegurarse mediante la asignación de un conjunto de entrenamiento en base a un mallado, si no equiespaciado, sí cuasi-regular, que asegure la plausibilidad lingüística de las reglas equivalentes. Obsérvese que esta distribución de información no es posible en general, pero sí lo es cuando se tiene un conocimiento *apriorístico* de la función que debe aproximar la red no lineal.

Cabe citar que existen trabajos previos que establecen de forma cualitativa una identificación entre la acción de un sistema difuso y la teoría clásica de probabilidades. En particular, B. Kosko, en [KOS94] y para la operación de un sistema difuso SISO, sostiene que la acción de un sistema difuso de inferencia puede explicarse en base a un conjunto de reglas que calculan una serie de probabilidades condicionadas que son representadas en la salida como la esperanza condicionada de media local *a posteriori*, aunque establece esta comparación de forma cualitativa y no mediante una equivalencia estructural. Si la salida se obtiene según la defuzzyficación de máximo, Kosko argumenta que esta operación equivale, en el área de teoría de probabilidad, al cómputo de una estimación MAP o máximo *a posteriori*.

Respecto a la similitud con otro tipo de redes no lineales de acción local, el propio Specht [SPE91] detecta la similitud entre las GRNNs y PNNs con las redes neuronales de función base local, RBFs, aunque cita que la diferencia proviene de la normalización presente en las GRNNs y ausente, en general, en las RBF. La normalización en las GRNNs asegura, aunque no lo identifique explícitamente el autor, que el problema de aproximación esté bien condicionado (en el sentido de mantener una interpolación suave) cuando $\sigma \rightarrow 0$. El impacto de la normalización será abordado de nuevo en el capítulo que tratará sobre el efecto de la normalización sobre la operación de las redes de acción local agregada.

Como última consideración sobre la equivalencia entre las PNNs o GRNNs y los sistemas difusos, debe remarcarse que en este apartado se ha tratado la equivalencia funcional entre ambas aproximaciones, de cara a unificar las propiedades comunes que ambos sistemas no lineales presentan tanto como aproximadores (universales) de funciones multidimensionales, como la equivalencia en cuanto a los requerimientos en lo referente a su implementación hardware. Con la identificación anterior no se pretende participar en el amplio debate existente en distintos ámbitos de investigación que confronta la teoría de la probabilidad y la teoría de la posibilidad (asociada a los conjuntos difusos). Ambas áreas tratan el problema de

la incerteza; mientras la primera de ellas lo hace con información intrínsecamente estadística, la segunda estudia el significado o interpretación –subjetiva- de la información. La última tendencia en esta controversia pretende abarcar el problema desde un punto cooperativo y no excluyente, en lo que se denomina *soft computing*, vasto campo que incluye la lógica difusa, la neurocomputación y el razonamiento probabilístico [ZAD99]. A distancia del debate, no obstante, podemos aventurar que en el ámbito del control difuso (área que constituye el adalid de las aplicaciones en ingeniería de la lógica difusa y por tanto su justificación práctica), no siempre se explota la descripción subjetiva de la dinámica de una planta bajo control, sino que, en una parte relevante de los casos (entre los que se encuentra el control de convertidores de potencia conmutados), tan sólo se explota la capacidad de interpolación no lineal que presentan los controladores difusos; esta capacidad, empero, tal y como se ha demostrado, se comparte con las redes neuronales probabilísticas. En ambos casos, la aplicación de control no trata ni información de naturaleza estadística ni de naturaleza subjetiva.

2.6 Analogía entre sistemas difusos y el *Cerebellar Model Articulation Controller* (CMAC).

El controlador basado en el modelo de la articulación del cerebelo (*Cerebellar Model Articulation Controller*, en inglés, abreviado *CMAC*), es una arquitectura de procesamiento paralelo basada en una propuesta de mediados de la década de los setenta, que se fundamenta en un modelo de los principios neurológicos del cerebelo humano como sistema de control motor. Su operación como red neuronal *feedforward* de memoria asociativa, que proporciona generalización para distintos estados de entrada, se basa en aprendizaje local. Amén de su operación como controlador (propuesta original), el CMAC ha sido utilizado en la literatura en diversas aplicaciones, *e.g.* procesamiento de señal, predicción de series temporales, reconocimiento de patrones [MIL90] y ecualización no lineal [GON96], entre otras. El CMAC recibe en ocasiones la denominación de controlador de espacio de estado [MIL90], en el sentido de que establece una acción de control local en función del estado del vector de entrada, lo que justifica su acción como controlador no lineal.

Cualitativamente, la operación del CMAC, en su versión básica, parte de una cuantización del espacio de entrada n -dimensional, de forma que el espacio del problema queda dividido en estados discretos, quedando definida la función no lineal multidimensional de aproximación en $f: A^n \subset Z^n \rightarrow \mathfrak{R}$. Un cierto vector de entrada al sistema activa un conjunto finito de campos

receptivos de dominio acotado en forma de hipercubos (dimensionados por un factor de generalización ρ), cuya activación direcciona información de memoria que es promediada para obtener la variable de salida y . La figura 2.20 ilustra la operación de la propuesta original del CMAC para un espacio de entrada bidimensional ($n=2$), con una discretización equivalente de tres bits, y una anchura de los cuadrados (hipercubos de orden dos) que definen los campos receptivos o factor de generalización $\rho=2$.

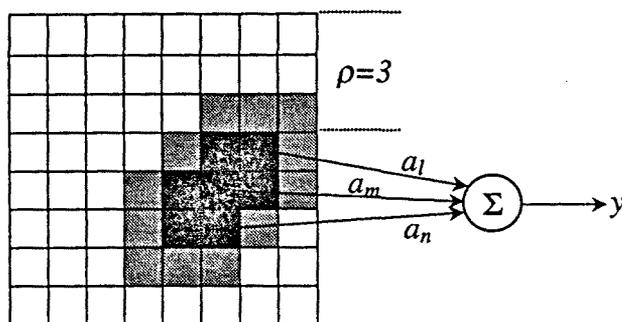


Figura 2.20 Esquema de operación de una red CMAC standard (bases *crisp*).

Campos receptivos activados por la entrada (6,5) para un caso bidimensional ($n=2$) y anchura de hipercubos $\rho=2$.

La operación de una red CMAC puede interpretarse como una tabla *look-up* con dos extensiones. La primera de ellas, con implicaciones sobre su estructura funcional, la constituye su capacidad de generalización, debida al solapamiento de campos receptivos (esto justifica la denominación del factor ρ), y que resulta en un almacenamiento distribuido de la información que se aprende del conjunto de datos de entrada-salida. Obsérvese que el CMAC es una tabla de información promediada, de forma que considerar $\rho=1$ equivale a una *look-up table* estándar. La segunda extensión se debe al método de mapeado virtual en memoria de los pesos de ponderación, que resulta en menor complejidad de *hardware* para el método de aprendizaje [JAG95]; este aspecto, no obstante, no interviene en la descripción funcional de la red CMAC y no será por tanto considerado como factor diferencial en la presente descripción. En base al funcionamiento descrito, la operación del CMAC estándar consiste en la generalización de un vector de entrada x en un conjunto de vectores base x_b según una función local (*kernel*) binaria:

$$\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b) = \begin{cases} 1 & \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_b\|_\infty < \frac{\rho}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.116)$$

en tanto que la salida de la red CMAC se obtiene como una agregación linealmente ponderada (vía c_g) y normalizada según:

$$y = \frac{\sum_{g=1}^M c_g \cdot \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b^g)}{\sum_{g=1}^M \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b^g)} \quad (2.117)$$

Una de las virtudes atribuidas al CMAC en la literatura es su simplicidad. Efectivamente, en su origen, el CMAC implementa una aproximación no lineal de forma simple, tanto por el tipo de partición que realiza del espacio de entrada (discretización, inherente a una conversión analógico/digital), como por la forma binaria en valor de cada *kernel* y su conformación a modo de hipercubo (que no requiere el cómputo de funciones no lineales graduales), así como el método de direccionamiento de pesos en memoria. Conjuntamente, la dependencia de la salida respecto a los pesos de ponderación es lineal, lo que justifica la diversidad de estrategias de aprendizaje que pueden ser aplicadas (*e.g.* Widrow-Hoff, de minimización del error cuadrático medio) [WON93]. Comparada la operación de la red CMAC con otras familias de redes neuronales, destaca el hecho de que la acción –generalización– local de la red CMAC asegura tiempos de convergencia algún orden de magnitud menores que en redes perceptrón multicapa (*Multilayer Perceptron*, en inglés, abreviado MLP) entrenadas con retropropagación del error (*backpropagation*, en inglés) [MIL90]. Estructuralmente, la no linealidad que cualquier red neuronal exhibe está situada, para el caso del CMAC, en el mapa asociativo de entrada (campos receptivos locales) y no en la función sigmoideal o de umbral presente en MLPs [MIL90].

Como ampliación de la operación del CMAC original, diversas propuestas en aplicaciones prácticas existentes en la literatura extienden su operación. Entre ellas se cuenta el denominado modelo CMAC Generalizado (GCMAC), propuesto originalmente en [LAN92] y descrito en [CHI96], que generaliza el uso de funciones base locales constantes en el CMAC original (*plateau functions*, en inglés), por funciones base generalizadas locales no constantes y diferenciables, como puedan ser las *spline* locales [LAN92] u otras funciones graduales.

Esta extensión identifica la operación del GCMAC al de otras redes basadas en agregación de campos receptivos locales, (*e.g.* redes neuronales RBF). Según los autores, no obstante, la diferencia entre el GCMAC y las redes RBF estriba en la estricta localidad o acotación en su dominio de las funciones base en el modelo GCMAC, lo que resulta en la adición de un conjunto finito de acciones de funciones base para obtener la variable de salida, a diferencia de la necesidad de agregar el efecto de la totalidad de las funciones base RBF exponenciales, cuyo dominio cubre todo el espacio multidimensional.

Es posible describir mediante una formulación compactada la operación de una red GCMAC, tal como se expone en [CHI96]. Considerando un conjunto de funciones base generalizadas $\Omega_{GEN}^g(\mathbf{x})$ asociadas al g -ésimo hipercubo, la salida de la red GCMAC puede ser expresada matemáticamente por

$$y = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_M] \cdot \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{x}) \\ w_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ w_M(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

$$= \sum_{g=1}^M a_g \cdot w_g(\mathbf{x})$$

donde los factores $a_g \in [0, 1]$ forman un vector de selección de las funciones base consideradas activas, que impone explícitamente la localidad de las funciones base y asegura por tanto la necesidad de calcular sólo la contribución de los campos receptivos con $a_g = 1$. Por su parte el vector de funciones está ponderado por los pesos de aprendizaje según:

$$w_g(\mathbf{x}) \equiv v_g \cdot \Omega_{GEN}^g(\mathbf{x}) \quad (2.119)$$

de forma que el vector de funciones base puede reescribirse:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} v_1 \cdot \Omega_{GEN}^1(\mathbf{x}) \\ v_2 \cdot \Omega_{GEN}^2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ v_M \cdot \Omega_{GEN}^M(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{GEN}^1(\mathbf{x}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Omega_{GEN}^2(\mathbf{x}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \Omega_{GEN}^M(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_M \end{bmatrix} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \quad (2.120)$$

lo que permite expresar la función entrada salida de forma compacta matricial:

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \quad (2.121)$$

Otra extensión fundada de la operación del modelo GCMAC, propuesta recientemente en [GON96], [GON98], considera, de forma pareja a la extensión de las redes RBF a GRBF, el tratamiento independiente de cada entrada, *i.e.*, considera simetría pseudo-radial direccionada, de modo que el espacio de entrada pasa de estar dividido en hipercubos a estar dividido en hiperparalelepípedos, al sustituir el parámetro de generalización ρ por un vector que define la generalización (anchura del campo receptivo) en cada dimensión $\rho = \rho_1, \dots, \rho_n$. A título ilustrativo, cabe citar que en dicho trabajo, los autores utilizan la versión generalizada de la red CMAC para aproximar una función no lineal bidimensional de predistorsión en una aplicación de transmisión de datos digitales con modulación 64-QAM.

Tras la descripción de la operación de la red CMAC, se establece a continuación la analogía con la operación de los sistemas difusos (operen éstos como controladores difusos o como modelos difusos), correspondencia que tiene como precedentes los trabajos en [NIE93], donde se establece la identificación entre un sistema difuso de agregación local con funciones de pertenencia triangulares y una red CMAC extendida –fuzzyficada–, así como la coincidencia expuesta en [JAG95], donde se plantea una equivalencia parcial. La conjunción de las dos extensiones introducidas previamente, a saber, el uso de funciones de pertenencia gradual y de anchuras diferentes en cada proyección relaciona directamente la operación de un GCMAC con la de un sistema difuso. Obsérvese que la identificación de los núcleos locales o *kernels* del CMAC a funciones de pertenencia multidimensionales asociadas a relaciones difusas, permite asociar cada campo receptivo con una regla local tipo Mamdani, lo que permite reinterpretar la variable de salida del CMAC descrita por (2.117) como una inferencia lógica difusa computada según la aplicación del Modus Ponens Generalizado a un conjunto de M reglas de implicación y defuzzyficada según (2.104). Obsérvese que en este caso se asocia grado de generalización con dominio de pertenencia y, dado que la distribución de reglas es uniforme, ello conlleva un aumento de solapamiento. El diagrama bidimensional de la figura 2.20 puede ser interpretado, bajo esta analogía, como un diagrama de Venn difuso con diferentes grados de pertenencia, correspondiente a una relación difusa binaria o conjunto difuso bidimensional. Es directo advertir que la formulación inicial de la operación del CMAC standard considera funciones de pertenencia correspondientes a lógica clásica que asignan pertenencia o no-pertenencia a cada vector de entrada, lo que permite identificar la

operación del CMAC con un sistema de aproximación no lineal constante a tramos, es decir, el CMAC standard opera como un *gain-scheduler* o controlador por zonas, o bien, si cada partición admite una significación lingüística, el CMAC deviene un sistemas experto clásico, cuya variable de salida presenta transiciones bruscas. Obsérvese que, a pesar de que el CMAC incluye campos receptivos locales binarios, éstos presentan solapamiento, a diferencia de la computación en base a lógica clásica, en que los campos lingüísticos son disjuntos. Este punto justifica que, de hecho, en la red CMAC se conformen conjuntos difusos de pertenencia gradual mediante la agregación de conjuntos binarios con solapamiento, lo que explica que se requieran cientos de miles de campos perceptivos y pesos [MIL90].

Un punto relevante en la arquitectura del GCMAC, que puede ser extrapolado y ser de utilidad al implementar controladores difusos, es la factorización del peso de cada hipercubo c_g en los parámetros a_g y v_g . El parámetro v_g se interpreta como el peso de aprendizaje en el sentido standard, del mismo modo que se interpreta el centro de las funciones de pertenencia consecuentes o *singletons* de salida de cada regla en controladores difuso. Por su parte, el parámetro a_g (que puede asimilarse a una versión bivaluada de los pesos de adaptación de los sistemas difusos aditivos planteados por B. Kosko [KOS94]), fuerza la acción estrictamente local de cada campo receptivo del GCMAC. Este concepto puede extenderse al concepto de reglas activas, de importancia clave en la implementación de controladores difusos, y que será discutido en un capítulo posterior.

Como última consideración, observamos que existen diferentes versiones de la red CMAC según las propuestas de diversos autores. En efecto, la descripción de la operación del CMAC original en (2.117) considera normalización como contribución agregada a la salida de cada campo perceptivo. Por su parte, la descripción presentada en (2.118), realiza una operación equivalente sin considerar explícitamente la normalización. En un apartado posterior se estudiará el efecto de la normalización sobre las propiedades de aproximación de este tipo de sistemas de agregación local, concluyéndose que su efecto no es determinante.

Para finalizar la analogía estructural entre ambos sistemas, se concluye que ambos sistemas de procesado paralelo realizan una aproximación funcional en base a una interpolación que establece una generalización implícita: el sistema produce salidas similares en respuesta a patrones o vectores de entrada similares, y produce salidas independientes a vectores de entrada disímiles.

2.7 Analogía entre sistemas difusos y redes de función base radial (RBF)

2.7.1 Interpolación mediante funciones base radiales. Redes RBF

El origen de las redes (neuronales) de función base radial (*Radial Basis Function*, *RBF*, en inglés) procede de la técnica homónima de interpolación real en un espacio altamente dimensional, técnica que experimentó un considerable desarrollo en la década de los ochenta, aplicada en áreas como la generación de gráficos mediante computadora, o en aplicaciones de procesamiento de datos experimentales (*e.g.* datos geofísicos) [GOR95]. La consideración de dicho método de interpolación en forma de estructuras o redes de procesamiento paralelo y la adición de un mecanismo de aprendizaje permite reinterpretar dichas estructuras como redes neuronales de procesamiento *feedforward*, bien que sus propiedades difieren de aquéllas propias a la otra gran familia de redes neuronales de procesamiento *feedforward*, los perceptrones multicapa o MLPs.

Volviendo al origen de las redes RBF como estructuración del método de interpolación de base radial (*Radial Basis Interpolation*, *RBI*, en inglés), debe destacarse que es precisamente la característica de función base radial (también denominada *kernel*), y por tanto local, la que confiere a dicho método de interpolación una clara ventaja frente a los métodos de interpolación polinómicos (*e.g.* polinomios interpolantes de Lagrange), que adolecen de comportamientos oscilatorios [MEE92]. La característica de localidad multidimensional de las funciones base de interpolación es compartida con otros métodos de interpolación, como pueda ser el método de aproximación o interpolación de funciones mediante *splines*, aunque éste habitualmente esté restringido a funciones uni- o bi-dimensionales.

Supuesto un problema de interpolación exacta o de reconstrucción de una hipersuperficie a partir de un conjunto de datos, que consiste en la determinación de una variable dependiente y en función de una variable independiente multidimensional $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, y conocidos m puntos dispersos (*sparse data*) y_1, y_2, \dots, y_m en $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ que deben ser interpolados, la interpolación **RBI** mediante funciones base radiales está definida por la combinación lineal de funciones base según la expansión:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) \quad (2.122)$$

expresión en la que ϕ es una función escalar univariable que conforma la RBF multidimensional, $\|\cdot\|$ expresa distancia y λ_i denota los pesos de combinación de las funciones base. Nótese que, en la expresión anterior, puede interpretarse la variable $r=\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|$ como un radio, lo que justifica la denominación del método y permite interpretar \mathbf{x}_i como *centro* o localización de la función base multidimensional. En el caso RBI bajo estudio, esto es, para conseguir una interpolación exacta en los puntos conocidos, debe cumplirse

$$y_j = \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|) \quad \text{para } j=1, \dots, m \quad (2.123)$$

expresión que puede reinterpretarse como un conjunto de m ecuaciones lineales de m incógnitas, expresable de forma matricial:

$$\Phi \lambda = \mathbf{y} \quad (2.124)$$

donde λ e \mathbf{y} son vectores de elementos λ_j e y_j para $j=1, \dots, m$, y se considera Φ la matriz definida por la evaluación de las funciones radiales centradas sobre los puntos multidimensionales \mathbf{x}_i como la matriz de elementos

$$\Phi_{ij} = \phi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|) \quad (2.125)$$

Obsérvese que definida la forma de la función base radial, los únicos parámetros desconocidos en (2.123) son λ_i , de ahí que la obtención de dicho conjunto de parámetros resolviendo el problema lineal (2.124) vía la inversión de la matriz Φ , según $\lambda = \Phi^{-1} \mathbf{y}$, resuelve el problema de interpolación. Se concluye que la condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución única al problema de interpolación planteado requiere la invertibilidad de la matriz Φ de funciones RBF, lo que se asegura si los vectores columna de Φ forman una base en \mathcal{R}^n . La acción de la interpolación tipo RBF puede ser por tanto interpretada como un ajuste de no linealidades linealmente parametrizadas a un conjunto multidimensional de datos de entrada y salida. Su operación corresponde a una regresión lineal paramétrica cuyo vector regresor obtiene sus componentes evaluando funciones no lineales radiales de las entradas. Cabe destacar las notables equivalencias que Poggio y Girosi plantean, en un temprano artículo [POG90], entre el método de interpolación RBF y los

principios variacionales y la teoría de la regularización mediante estabilizadores en el área de aproximación funcional.

La selección de la función base $\phi(r)$ es, en general, relevante. No obstante, la elección de funciones radiales que definan una acción local n -dimensional garantiza una correcta interpolación, demostrando además cierta independencia con la forma concreta de la función RBF [MEE92], aspecto que será abordado en el capítulo posterior sobre aproximación funcional. A continuación se citan casos particulares de funciones base comunes en la literatura especializada, que garantizan al conjunto de funciones linealmente ponderadas en [2.122] la condición de formar una base en el espacio multidimensional:

$$\phi(r) = r \quad (2.126)$$

$$\phi(r) = r^{2k+1} \quad (2.127)$$

$$\phi(r) = r^{2k+1} \log(r) \quad (2.128)$$

$$\phi(r) = (r^2 + d^2)^{\pm 1/2} \quad (2.129)$$

$$\phi(r) = e^{-(r^2/d^2)} \quad (2.130)$$

La consideración de las anteriores funciones base proviene del hecho de que la primera derivada de las mismas es completamente monótona, lo que asegura la invertibilidad de la matriz Φ [POG89]. Concretamente, la función radial (2.126) corresponde a la simple identidad, que convierte a la interpolación RBF en un caso ligeramente modificado [MEE92] respecto la representación canónica lineal a tramos (*Piecewise-Linear, PWL*, en inglés) [CHU77], representación que será considerada en un capítulo posterior por su similitud con los controladores difusos. Por su parte, la selección de funciones base definidas por (2.127) y (2.128) –en las que los exponentes son números enteros impares positivos–, puede asimilarse a una extensión de la interpolación *spline* al caso multivariable. En particular, la expresión (2.128) corresponde a la técnica de ajuste mediante *thin-plate spline*, que asegura una aproximación suave en C^{2k+1} . La función (2.129) corresponde a la *multicuadrática de Hardy* (para el caso de la raíz cuadrada) en tanto que dicha expresión corresponde a la denominada *multicuadrática inversa* (para el caso de la función inversa de la raíz cuadrada). Por último, la expresión (2.130) corresponde a una función base radial de tipo gaussiano, que es ubicua en la adaptación del método de interpolación RBI a las redes neuronales RBF, que se describe a continuación. Nótese que estas dos últimas elecciones de función base radial (2.129) y (2.130)

incluyen la selección de un parámetro de *anchura* expresado por el parámetro d , que modela la dispersión de la función no lineal local multidimensional que resulta de la aplicación de dichas expresiones para describir la función escalar ϕ .

Sentadas las bases del método de interpolación RBI, se describe y justifica a continuación el resurgimiento experimentado por dicho método a finales de la década de los ochenta, al ser interpretado en un entorno conexionista o de operación masivamente paralela en forma de red neuronal. Cabe citar que las respuestas locales radialmente simétricas de los nodos RBF conforman campos perceptivos locales –equivalentes a aquéllos presentes en el córtex visual– que permiten establecer cierta analogía de origen neurobiológico para estas redes neuronales artificiales. Conjuntamente a dicha reinterpretación en forma de red, dos aspectos justifican la importancia de las redes neuronales RBF; por una parte la relajación de la hipótesis asociada a una *interpolación* exacta (2.123) hacia la idea de *aproximación* en un espacio multidimensional, y por otra parte el sorteo de la dificultad asociada al mal condicionamiento de la invertibilidad de la matriz (2.124) mediante un problema de aprendizaje en base a ejemplos o *entrenamiento*.

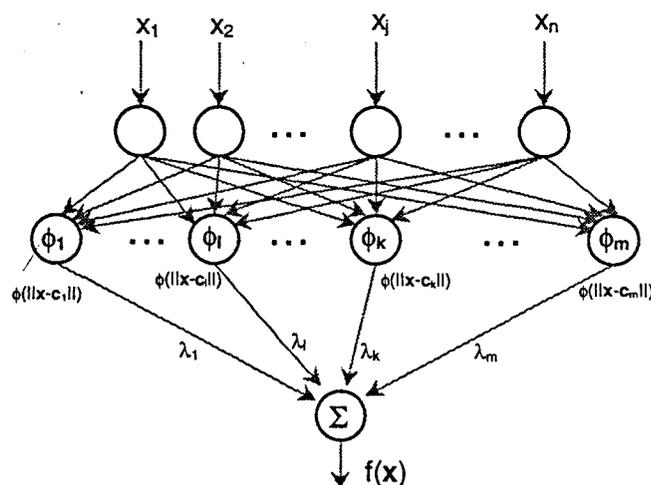


Figura 2.21 Esquema de la red *feedforward* RBF.

La figura 2.21 demuestra la remarcable propiedad de la expresión (2.122) de poder ser descrita e implementada por una simple red *feedforward* que incluye una sola capa oculta de nodos, unidades o neuronas. La primera capa de la red consta de un conjunto de n unidades, siendo n la dimensión del espacio de entrada, que meramente distribuyen la información hacia la capa subsiguiente. La única capa oculta está compuesta por un conjunto de m unidades no lineales totalmente interconectadas con los nodos de entrada, cuyo procesado presenta dos partes diferenciadas: por una parte realizan la proyección del espacio n -dimensional a un

espacio unidimensional vía la obtención de la norma $\| \cdot \|$, operación parametrizada por los centros c_i , y posteriormente afectan dicha norma mediante la función no lineal ϕ , de modo que a su salida se obtiene la función base multidimensional local radial. Cada nodo de esta capa está descrito por la selección *a priori* de la función escalar ϕ , así como por parámetros que describen su *centro* $-x_i$ en (2.122)- y eventualmente su *anchura* $-d$ en (2.129) y (2.130)-. Por último, la capa de salida consta de un único nodo lineal (en general, para un espacio de salida k -dimensional dicha capa constaría de k nodos), que obtiene una combinación lineal mediante los pesos λ_i que corresponden a los parámetros indeterminados de la expansión (2.122). Este último nodo admite en algún caso la inclusión de una función no lineal de compresión tipo sigmoideal, que suele corresponder al procesado no lineal de las neuronas en una red perceptrón multicapa, cuyo único fin es, en el caso de la red RBF, realizar una adaptación no lineal del margen de salida de la función aproximada o interpolada, pero que no es connatural a la expresión (2.122) [POG89].

Considerada por tanto la red de la figura 2.21 como una red neuronal *feedforward* que implementa el método de interpolación RBF, su operación compara favorablemente con el paradigma de red neuronal de uso generalizado correspondiente a redes tipo perceptrón multicapa o MLP, ya que la red RBF establece un mecanismo de aproximación híbrido entre un esquema lineal y un esquema tipo MLP, atestado de elementos no lineales distribuidos, al incluir la red RBF un combinación lineal parametrizada de elementos no lineales confinados en una sola capa. Dado que cada nodo que procesa mediante simetría radial en la capa oculta define una hipersuperficie n -dimensional local, la red RBF generaliza o reconstruye la función a aproximar mediante la adición escalada de dichas hipersuperficies.

Para espacios de aproximación altamente dimensionales y un conjunto de datos elevados, el problema de interpolación es impracticable, *i.e.*, la inversión de la matriz Φ es un problema mal condicionado. De forma que, históricamente, la descripción del algoritmo interpolativo RBI en forma de red advino acompañado por la consideración de un número de nodos de la capa intermedia diferente del conjunto de entrenamiento, de modo que, en general, $c_i \neq x_i$. De esta simplificación de hipótesis se deduce el carácter *aproximador*, y no ya estrictamente interpolador, de las redes de procesado RBF, aspecto que argumenta la propiedad de generalización que dichas redes presentan [GOR95]. Puede advertirse que, bajo esta óptica, los elementos en el espacio multidimensional c_i aparecen como vectores prototipo que representan una región en el espacio de entrada sobre la que aplica la función local. El carácter aproximador que presentan las redes RBF, por su parte, justifica su amplio uso en

tareas de clasificación o bien de reconstrucción o aprendizaje de funciones Booleanas [POG90], [MUS92], operando como clasificadores binarios. En dicho caso, la función sigmoideal previamente comentada asociada al nodo de salida suele aparecer a modo de comparador o detector de nivel, o de WTA (*Winner Take All*) en su versión multidimensional. La simplificación debida a la reducción de número de nodos en la capa oculta o número de funciones locales en el espacio multivariable, permite obtener la distribución de pesos como una problema de aproximación formulado y resuelto por el método lineal de estimación del error cuadrático, descrito por

$$y = \Phi \lambda + e \quad (2.131)$$

y de cuya resolución resulta un vector de coeficientes óptimo que minimiza la energía de error $e^T e$, de donde deriva la denominación alternativa como método de compactación de energía. Equivalentemente, se trata de la obtención de la distribución de parámetros λ_j para $j=1, \dots, q$,

$$\min_{\lambda_j} \left(y_l - \sum_{j=1}^q \lambda_j \phi(\|x_l - c_j\|) \right)^2 \quad \text{para } l=1, \dots, n \quad (2.132)$$

estimación que no requiere, tal como se ha comentado previamente, la identificación de los centros de las funciones BRF con los datos de entrenamiento. El problema formulado en (2.132) deviene, cuando el conjunto de funciones base es ortogonal, un problema de mínimos cuadrados ortogonal (*Orthogonal Least Squares, OLS*) [SHE96]. Como posible extensión, por su parte, destaca la aplicación de un método de ortonormalización al conjunto de ecuaciones normales que de (2.132) se derivan, estableciendo una combinación lineal de las funciones base multidimensionales RBF, y que resulta en un algoritmo iterativo de aprendizaje, propuesto y descrito en [KAM97], aunque previamente utilizado en [MUS92], que evita el recalcular los coeficientes del desarrollo (2.122) al añadir nuevos elementos como ejemplos de aprendizaje, de forma paralela a la propuesta del método de Newton respecto al polinomio interpolante de Lagrange [FIO90].

Esta aproximación OLS para la resolución del problema de aproximación (2.132) requiere la aplicación previa de técnicas de agrupación o *clustering*, que implican el movimiento de los centros c_i en base a un algoritmo de aprendizaje y la adaptación o generalización sobre un conjunto de datos para cada función base radial. Un tratamiento original que establece la

metodología de aplicación de dichos métodos de *clustering* así como la reducción de nodos en la capa oculta y la estimación de las anchuras d de las funciones radiales puede encontrarse en [MUS92], donde una red RBF se aplica a un problema práctico octodimensional. La designación de los centros, anchuras y número de unidades en la red RBF reduce el problema a un caso lineal, resoluble mediante (2.132) [UYK97]. La consideración de nodos RBF de parámetros adaptativos asociados a la aplicación de métodos de *clustering* es denominada por Poggio y Girosi [POG90], con el fin de diferenciar su operación del uso de nodos de parámetros fijos, redes de hiperfunciones base (*Hyper Basis Functions*).

Las buenas prestaciones que las redes RBF presentan como aproximadores de funciones argumentan su utilización en una amplia variedad de problemas prácticos, como puedan ser, entre otros, la aproximación de funciones multidimensionales para el modelado de la operación de dispositivos microelectrónicos submicrónicos [MEE92], la identificación de sistemas dinámicos no lineales [GOR95], la predicción de series temporales no estacionarias mediante la adición de respuesta al gradiente en el modelo RBF estándar, estableciendo el modelo designado GRBF-*Gradient RBF* [CHN96] y la reciente aplicación a la identificación y estimación de respuestas de sistemas en el dominio frecuencial aplicando funciones RBF generalizadas como una extensión de la descomposición en base a funciones de Laguerre [VRI98].

Por último, y antes de exponer las equivalencias funcionales entre el procesado que efectúan las redes *feedforward* RBF y aquél que corresponde a los controladores difusos, se presentan a continuación dos extensiones de la operación estándar de las redes RBF previamente descritas de cara a la ulterior comparación de dichos paradigmas de aproximación no lineal.

A pesar de que una característica propia a las redes RBF es la radialidad de los *kernels* locales definidos, asociada a una distancia radial que define el grado de solapamiento entre funcionales locales contiguas, diversos trabajos [POG90], [MUS92] plantean una extensión de la respuesta de simetría radial hacia una simetría pseudo-radial generalizada, simetría que no está restringida a un único radio, sino que define la distancia generalizada, conocida como la distancia de Mahalanobis [ZUR92], según:

$$d_j^2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_j\|_{\Sigma}^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{c}_j)^T \Sigma_j^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{c}_j) \quad (2.133)$$

donde Σ_j es una matriz (denominada matriz de covarianza para el caso de funciones radiales gaussianas) que asigna un peso específico hacia cada dirección del espacio. En concreto, si la

matriz es diagonal, cada elemento $\Sigma_j(i,i)$ asocia un peso a cada coordenada del espacio multidimensional, de forma que la expresión original se recupera a partir de (2.133) bajo la siguiente particularización [TOW99], en la que \mathbf{I} representa la matriz identidad.

$$\Sigma_j = \sigma_j^2 \mathbf{I} \quad (2.134)$$

De la definición de distancia (2.133) se infiere que, para el caso de funciones base gaussianas (2.130), el contorno de las superficies equipotenciales asociadas a cada función local corresponde a un hiperelipsoide en el espacio multidimensional de aproximación.

El segundo aspecto que supone una extensión del modelo RBF respecto al modelo establecido por (2.122) considera la adición de términos a dicha expansión con el objetivo de mejorar las capacidades interpolativas o aproximadoras de (2.122). La propuesta de Mees y Chua [MEE92] considera un modelo de interpolación RBF que incluye un término afín, denominando a dicho modelo ARBI (*Affine plus Radial Basis Interpolation*, en inglés), y que queda descrito por:

$$f(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{x} + \beta + \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) \quad (2.135)$$

Este modelo, aunque introducido sin justificación y por analogía con los métodos canónicos de aproximación lineal a tramos [CHU77], pretende eludir el mal condicionamiento de aproximación global que exhiben los métodos RBF. En un capítulo posterior se estudiará el efecto de la normalización sobre la expresión (2.122) y sus implicaciones en cuanto a las propiedades de aproximación global, lo que justificará la supuesta necesidad de (2.135). Previamente, el trabajo [POG89] justifica la adición de un término no ya afín sino, en general, polinómico, a la expansión (2.122), de modo que dicha expresión deviene, como generalización del modelo RBI:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) + \sum_{i=1}^k d_i p_i(\mathbf{x}) \quad (2.136)$$

donde $\{p_i | i=1, \dots, k\}$ forma una base del espacio lineal $\pi_k(\mathcal{R}^n)$ de los polinomios algebraicos de grado menor que k . La justificación de una expresión del tipo (2.136) para extender las propiedades de interpolación y aproximación de las redes RBF proviene, según la propuesta

de Poggio y Girosi [POG89], recuperada en [NIY98], de su similitud con las técnicas de regularización. La técnica de regularización estándar es aquella técnica utilizada en problemas de aproximación que explota o aprovecha conocimiento apriorístico sobre las restricciones en cuanto a la *suavidad* de la función a aproximar [POG89].

2.7.2 Equivalencia entre controladores difusos y redes RBF

La aparición del término *neurofuzzy*, que representa la conjunción de la operación neuronal de los controladores difusos y que fue acuñado bien entrada la década de los noventa, tiene su origen en dos aspectos diferenciados, asociados bien a cuestiones sobre aprendizaje, bien a cuestiones estructurales. Por una parte, considerando un sistema de inferencia difusa como un sistema paramétrico, éste es susceptible de incorporar un método de aprendizaje, hecho que, por extensión de lenguaje, conduce al término *neurofuzzy* como denominación del procesador difuso que incorpora algoritmos de aprendizaje *neuronal*, si bien que el término *procesador difuso adaptativo* conllevaría el mismo significado. Nótese, empero, que en dicho caso no se explota aquella característica supuestamente diferenciadora de los sistemas difusos que permite la incorporación de conocimiento experto humano. Dado que este aspecto sobre el aprendizaje no tiene implicaciones sobre la capacidad estructural de aproximación analítica de los controladores difusos o neurodifusos ni sobre la estructura de procesado que afecta al diseño *hardware*, aspectos ambos que serán estudiados en apartados posteriores, no se considerarán sus efectos. Por otra parte, la equivalencia funcional entre la operación en forma de red *feedforward* de un controlador difuso de agregación local (2.104) y la operación *feedforward* de las redes RBF da testimonio del uso del término *neurofuzzy* al advertirse la estrecha similitud o relación entre dos sistemas de aproximación no lineal de origen harto distinto: los controladores difusos, cuyo origen parte de los sistemas de inferencia difusa asociados a la teoría de lógica difusa, y las redes RBF, cuya estructura en forma de campos receptivos con solapamiento y localmente adaptados proviene de modelos del córtex cerebral y visual, en conjunción a métodos de interpolación de datos.

Se presenta a continuación una visión sobre el tratamiento en la literatura de dicha equivalencia funcional o estructural, con el fin de extender parte de los aspectos de la misma.

La aparición del primer trabajo, debido a Jang [JAN93a], que detecta la similitud (literalmente, *la intrigante similitud*) entre los sistemas RBF y difusos, comporta la interpretación original de la operación de un sistema de inferencia difuso en forma de red compuesta por capas, cada una de las cuales contiene un conjunto de nodos de procesado -o

neuronas- que incluyen parámetros, y que pueden ser por tanto adaptativos o *neuronales*. Cabe destacar, como inciso, que esta identificación permitió a Jang la propuesta del método ANFIS [JAN93b], un método bien establecido de aprendizaje en sistemas difusos, que obtiene los parámetros propios de los antecedentes lógicos difusos (forma y posición de las funciones de pertenencia) mediante un método de descenso de gradiente tipo retropropagación del error, y aplica un método lineal de minimización de error cuadrático, equivalente a (2.132), para identificar los valores constantes que definen los consecuentes. La correspondencia entre las redes RBF y los sistemas difusos que establece Jang requiere la verificación de cinco puntos:

- J1) El número de unidades de campo receptivo en el modelo RBF - m en (2.122)- iguala el número de reglas SI-ENTONCES en el controlador difuso - M en (2.104)-.
- J2) El conjunto de salida difuso consecuente está compuesto por una constante, o equivalentemente, se considera un modelo TSK-0 que no incluye dependencia respecto del vector de entrada.
- J3) Las funciones de pertenencia que modelan las etiquetas lingüísticas son gaussianas de la misma varianza.
- J4) La operación conectiva norma- t que evalúa el peso de cada regla es el producto algebraico (véase TABLA 2.1).
- J5) Ambos métodos utilizan la misma expresión para obtener la variable de salida (*i.e.*, suma ponderada o media ponderada), considerando o no normalización.

La primera condición **J1** es claramente manifiesta, ya que al identificar las funciones base radiales multidimensionales del modelo RBF con las relaciones difusas multidimensionales que proporciona la inferencia lógica difusa local de Mamdani (2.35), se requiere el mismo número de unidades para establecer una identificación de modelos. Las tres condiciones siguientes reducen o acotan el grado de equivalencia y serán relajadas posteriormente. Nótese que **J2** presupone un modelo de controladores difusos como sistemas difusos de agregación o adición local (2.104) o de Caso A. La condición **J3** considera funciones RBF gaussianas (2.130) por ser éste el modelo más extendido, pero ya ha sido expuesto que no es el único (2.126)-(2.129), ni el más natural como funciones de pertenencia difusas. La particular propiedad analítica de factorizabilidad que presentan las funciones gaussianas multidimensionales de poder expresarse [POG90] como producto de funciones unidimensionales gaussianas, *e.g.* para un caso bidimensional según

$$\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2) \equiv e^{-\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2} = e^{-(x-c_x)^2} \cdot e^{-(x-c_y)^2} \quad (2.137)$$

permite justificar cuantitativamente la obtención del *kernel* multidimensional que proporciona cada nodo de la capa interna en una red RBF como la obtención de una relación difusa de inferencia local o Mamdani. Esta obtención, partiendo de la aplicación de una norma conectiva aplicada a las extensiones cilíndricas de conjuntos difusos unidimensionales (2.30) requiere la condición **J4** para establecer la identificación. Por último, el punto **J5** persigue deshacer la controversia en cuanto a la consideración o no de normalización en la agregación del efecto debido a cada acción local multidimensional agregada por la última capa. A pesar de que, históricamente, la respuesta de los controladores difusos se agrega vía una operación de normalización -operación que proviene del método centroidal aplicado a conjuntos difusos *singleton* según se ha expuesto en el lema 2.1-, y la respuesta de la red RBF es en general una mera suma lineal ponderada, dichas propiedades no son connaturales a ninguno de los dos métodos no lineales de aproximación funcional, dado que existen tanto versiones normalizadas de algoritmos RBF (véase [JAN93a] y las referencias incluidas) como versiones no normalizadas de la acción de controladores difusos de agregación local, como pueda ser el caso de los modelos aditivos de Kosko [Cap 12-Ngu95].

Se describen a continuación dos trabajos [NIE93], [SUH94] publicados en un periodo ligeramente posterior al trabajo original de Jang [JAN93a], pero obtenidos de forma independiente, y que asimismo demuestran la equivalencia entre las redes RBF y los procesadores difusos, y que pueden por tanto ser considerados resultados simultáneos.

En [NIE93], los autores proponen las redes FBFN (*Fuzzyfied Basis Function Networks*), estableciendo así una equivalencia implícita entre los dos ámbitos, además de detectar someramente el vínculo entre un algoritmo de control difuso, su formulación analítica y su disposición en forma de red o arquitectura de procesado. En dicho estudio se propone un controlador RBF-difuso con capacidad auto-organizativa a modo de aprendizaje no supervisado, y éste es aplicado a un problema dinámico de control de la presión sanguínea. Este trabajo no establece una identificación exhaustiva entre ambos métodos sino que ofrece una explicación cualitativa. Tras derivar una versión simplificada de la inferencia difusa (denominada *Simplified Fuzzy Control Algorithm, SFCA*), asimilable a los controladores difusos de agregación local (2.104), interpreta la operación de la etapa de antecedentes o premisas lógicas difusas como la obtención del grado de cercanía de *patrones de entrada* a *patrones de regla*, que definen subespacios multidimensionales locales que están solapados en

virtud del efecto *difuso* de gradación entre pertenencia y no-pertenencia a cada patrón. Este punto de vista interpreta los antecedentes difusos en base a conceptos de un espacio métrico multidimensional más propios de las redes RBF, pero, a su vez, podemos interpretar que relaja la hipótesis **J4** de Jang al postular que las propiedades clave de las redes RBF no son inherentes tanto a la *radialidad* como a la *localidad* del modelo y a su posterior agregación lineal. De forma que sustituye funciones locales *radiales* que puedan ser *factorizables* –e.g. (2.137)-, asociadas a la implicación de Mamdani 1 o Larsen (2.37), por, en general, funciones locales que puedan ser *sinetizables* en el sentido lógico difuso, partiendo de un conjunto de funciones locales unidimensionales y una norma-*t*, por ejemplo aquéllas obtenidas mediante la implicación Mamdani 2, lo que justifica la denominación *FBFN*. Otros aspectos destacados de este trabajo los constituyen tanto el hecho de considerar una versión normalizada del algoritmo RBF estándar (2.122), como el aprovechamiento de la equivalencia RBF-difusa para justificar (sin una prueba matemática rigurosa, según el autor), partiendo de la suposición de existencia de la justificación matemática (rigurosa) que demuestra la propiedad que presentan las redes RBF de ser aproximadores universales, la propiedad de ser aproximadores universales que ostentan los sistemas difusos. Ambos aspectos, tanto la influencia de la localidad frente a la importancia de la forma concreta de la función local, así como la capacidad de aproximación universal serán tratados y justificados de forma analítica en un apartado posterior –2.9.5- sobre la interpretación en base a la función delta generalizada multidimensional.

El tercer trabajo que puede considerarse co-originario de la interpretación de un controlador difuso en forma de red neuronal RBF de procesado *feedforward* se debe a Suh y Kim [SUH94], y aparece contextualizado en la propuesta de un sistema de interpolación o aproximación de funciones no lineales para el tratamiento de transformación de imágenes en cámaras digitales con el fin ulterior del servocontrol de manipuladores robot. Este trabajo, además de establecer un mecanismo de aprendizaje sobre los parámetros del sistema difuso, propone la denominada red neuronal basada en funciones de pertenencia difusas (*Fuzzy membership Function based Neural Network*), que conforma implícitamente un modelo RBF-difuso, al detectar que el procesado de las redes RBF y los sistemas difusos es común y admite la interpretación de una red simple de dos capas cuya primera capa establece una transformación no lineal local asociada a un mapeado entre el espacio de entrada y un espacio intermedio (de hecho el espacio de funciones base) y cuya capa de salida establece una combinación lineal aplicada sobre dicho espacio intermedio, combinación lineal resoluble mediante métodos lineales, lo que justifica la ventaja del método. Detectada, sin embargo, la

dificultad de selección de centros y distancias en la capa de entrada, y partiendo de la equivalencia funcional RBF-difusa, los autores proponen el uso de una red RBF cuyas funciones locales de entrada son ajustadas en base a conocimiento apriorístico de tipo lingüístico, de ahí su denominación. Adicionalmente, y como beneficio de la equivalencia, de la que se deriva la interpretabilidad lingüística de los parámetros de la red RBF, el estudio [SUH94] propone la selección inicial de parámetros de significación lingüística para los valores λ_i del modelo (2.122) en lugar de la clásica asignación aleatoria de valores previa a la aplicación de un mecanismo de aprendizaje. Como comentarios colaterales sobre el trabajo, destaca la adición al sistema difuso de un nodo terminal con característica no lineal de tipo sigmoideal, tal y como fue descrito en las redes RBF, cuyo objetivo es la adaptación del margen dinámico de salida, aunque su efecto debiera ser compensado, mediante predistorsión, al considerar la función a aproximar. Destaca también, como aspecto negativo, la utilización en dicho trabajo del controlador híbrido difuso-RBF como sistema no lineal algebraico, *i.e.* que no incorpora dinámica, a pesar de actuar imbricado como controlador en un sistema realimentado de control.

A dicha línea de estudio sobre la equivalencia cualitativa RBF-neuronal de los sistemas de inferencia difusa se ciñe el posterior trabajo de Lin y Cunningham [LIN95] quienes proponen, como aproximación novel al modelado de sistemas no lineales, un tipo de redes con funcionamiento equivalente a las redes RBF (2.122) en las que cada elemento o parámetro recibe una interpretación en base a conceptos de lógica difusa, lo que justifica su inclusión en el grupo de estudios sobre la equivalencia RBF-difusa. Como punto destacable del estudio y de las equivalencias entre ambos campos, el trabajo cita, aunque no profundiza en ella, la ventaja que resulta de la independencia entre zonas y la libertad en cuanto a número de zonas en que se divide el espacio multidimensional de entrada, característica propia de la aproximación RBF, dado que cada zona local está asociada a un centro c_i independiente del resto de centros $c_j \neq c_i$, y el número de *kernels* no está predeterminado. Por su parte, y en sistemas difusos estándar, la conformación de zonas locales multidimensionales o relaciones difusas tipo Mamdani como combinación de zonas locales unidimensionales asociadas a funciones de pertenencia, estén éstas equiespaciadas o no, resulta en la denominada *curse of dimensionality*, maldición de la dimensionalidad inherente a las tablas de conocimiento difuso y entendida como una explosión en el número de reglas o subespacios difusos (de orden $K_1 \times K_2 \times \dots \times K_M$ siendo M la dimensionalidad del problema y K_i la granularidad de división de la i -ésima coordenada) que acaece al crecer la dimensionalidad de entrada del problema de

aproximación. Como otros aspectos del trabajo, destaca la utilización directa de agregación sin normalización para obtener la salida del sistema neurodifuso, según (2.122), así como la extensión parcial de la hipótesis J3 de Jang al considerar funciones de pertenencia del tipo

$$\mu_{ij}(u_i) = \exp(-|\omega_{ij} u_i + \omega_{ij0}|^l) \quad (2.138)$$

que aproximan razonablemente funciones de pertenencia tanto triangulares, trapezoidales como *bell-shape*, y bajo la acción de una implicación difusa de Larsen (2.37), conforman relaciones difusas de simetría radial.

La propuesta de Kim y Mendel [KIM95] consiste en diferenciar los tipos de sistemas no tanto por su constitución o arquitectura como por la naturaleza o el tipo de información que procesan. Así, tras realizar un juicioso análisis sobre el tipo de tratamiento analítico que realiza un controlador difuso TSK-0 respecto a su relación entrada/salida, establecen una equivalencia funcional con el procesamiento de las redes HyperBF previamente expuestas y debidas a Poggio y Girosi [POG90].

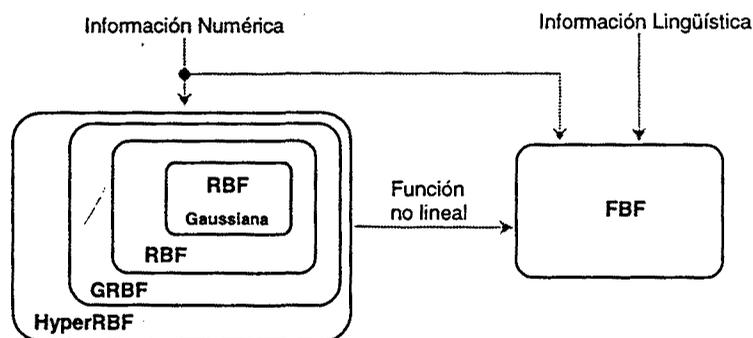


Figura 2.22 Comparación entre diferentes esquemas de aproximación según las funciones base y el tipo de información tratada (extraído de [KIM95])

La figura 2.22 representa gráficamente las interrelaciones entre los diferentes tipos de funciones base. Según esta tipología, las redes HyperBF son una extensión de las redes GRBF o RBF Generalizadas al considerar un factor de suavidad (que corresponde al parámetro σ para funciones gaussianas) diferente para cada dimensión, mientras que a su vez las funciones GRBF permiten considerar, como centros, vectores en general diferentes de los vectores datos tal y como corresponde al problema de interpolación, constituyendo una extensión de las funciones RBF que resuelven el problema anteriormente descrito con dependencia radial vía las funciones base (2.126)-(2.130), una de cuyas particularizaciones es la función radial

gaussiana. La operación de las redes HyperBF presenta una equivalencia completa respecto a la operación de los controladores difusos de clase A, que admiten la denominación de sistemas de función base difusa (*Fuzzy Basis Function, FBFs*, en inglés), por su expresabilidad mediante (2.104). Este aspecto extiende la generalidad del punto J3 de la equivalencia de Jang, pero retiene la necesidad de considerar implicación multiplicativa (2.37) asociada a J4 . Por lo que respecta a la equivalencia a nivel estructural, Kim y Mendel sostienen que la diferencia fundamental entre ambos paradigmas de aproximación no lineal reside en la inclusión o no en la última etapa, encargada de agregar el efecto de las equivalentes HyperBF o FBF, de un efecto de normalización, que puede interpretarse como una conexión lateral entre distintas HyperBFs, restringiendo así la validez de J5. En un apartado posterior se establecerán argumentos en contra de este aspecto. Asumiendo la equivalencia, no obstante, el hecho diferencial que confiere una ventaja a los sistemas difusos FBFs no es particular a la estructura, y por tanto no interviene en su capacidad analítica ni en sus especificaciones de implementación, sino que se debe, tal y como muestra la figura 2.22, a la capacidad de incorporar conocimiento interpretable lingüísticamente, razonamiento propio de la corriente de pensamiento asociada a la teoría de lógica difusa. En base a este razonamiento, la expresión matemática que modela la propuesta de las redes FBF debidas a Kim y Mendel es [KIM95], reformulada según la notación de [2.104]:

$$f(u) = \frac{\sum_{l=1}^K v_C^l \cdot \mu_{R^l}(u)}{\sum_{l=1}^K \mu_{R^l}(u)} + \frac{\sum_{l=K}^M v_C^l \cdot \mu_{R^l}(u)}{\sum_{l=K}^M \mu_{R^l}(u)} = f_N(u) + f_L(u) \quad (2.139)$$

expresión en la que el número K de *kernels* RBF está asociado a los datos numéricos que conforman la función no lineal $f_N(x)$, y el número $M-K$ de reglas difusas está asociado a la información lingüística, que conforma la función no lineal $f_L(x)$. Cabe citar, por último, que los autores establecen una comparación estructural entre uno de los términos equivalentes $f_N(x)$ o $f_L(x)$ en (2.139) con la expresión que rige la operación de las redes de regresión general relacionadas con la estimación de funciones de probabilidad mediante ventanas de Parzen, que merecieron un apartado anterior, de forma que dichas estimaciones probabilísticas pueden interpretarse, aunque de forma retrospectiva dado que son anteriores en su origen, equivalentes al procesado de las redes RBF y los sistemas difusos clase A.

En un trabajo reciente de destacable interés [HUN96], Hunt *et aliter* plantean explícitamente una extensión de la equivalencia original de Jang [JAN93a] cuya clave consiste en la

extensión del modelo RBF original (2.122) hacia un modelo que se puede interpretar paralelo al modelo difuso TSK de orden mayor que 0, *i.e.* un modelo cuyos pesos de ponderación dependen de la disposición del vector de entrada. El trabajo retiene las hipótesis más plausibles de Jang: **J1**, de carácter estructural y **J5**, revelando o constatando, aunque no justificando, la no inherencia de la acción de normalización sobre un modelo particular RBF o difuso. Se relaja en parte el punto **J3** al considerar una definición de distancia extendida, en base a la formulación (2.133), aunque restringida a una independencia radial respecto a cada coordenada espacial, mediante la asignación:

$$\Sigma_j = \begin{bmatrix} \sigma_{j1}^2 & 0 & \dots & & \\ 0 & \sigma_{j2}^2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & & \sigma_{jM}^2 \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

lo que permite extender las hiperesferas del modelo RBF estándar a hiperelipsoides, aunque la diagonalidad de (2.140) impone preferencia direccional. Como aspectos neutros de la equivalencia propuesta, además de retener la conformación gaussiana de las funciones de pertenencia o locales de la hipótesis **J3**, mantiene, por ende, el requerimiento **J4** de sintetizabilidad a partir de funciones unidimensional en base a una norma-*t* multiplicativa, aspectos ambos impuestos por la propiedad de factorización (2.137). Tal como se ha citado, no obstante, el avance clave exclusivo de este trabajo es la extensión de **J2** hacia un modelo RBF con dependencia de entrada, formulado por la expresión:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mathbf{x}) \cdot \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) \quad (2.141)$$

Este modelo GRBF extendido compartirá las ventajas de aproximación funcional no lineal que se discutirán en el apartado posterior dedicado a los controladores difusos Takagi-Sugeno. Se destaca, para concluir la revisión de las equivalencias RBF-difusas y sus interrelaciones, la reciente aparición de algún trabajo que no tan sólo plantea una equivalencia entre modelos, sino que revela la necesidad o la ventaja de reinterpretar la operación de las premisas difusas en los controladores difusos basados en reglas SI-ENTONCES, de una forma propia a las redes RBF. Predycz, en [PED97], sostiene la equivalencia funcional entre cada nodo no lineal

de la red RBF y la relación difusa debida al conjunto antecedente de cada regla difusa, dado que la agregación lineal de ambas presenta las propiedades de generar acciones *locales*, y establecer una conmutación suave entre modelos en virtud de la gradación continua de la pertenencia zonal. De forma que, el considerar directamente *relaciones* difusas como modelo de los antecedentes o premisas lógicas (*relational-based premise*, en inglés) permite, frente al formato de premisas basado en *conjuntos* difusos (*fuzzy-set-based premise*, en inglés), establecer, como gránulos de información sobre el universo de discurso, particiones difusas de formas más irregulares y diversificadas [PED97]. Esta interpretación relacional de los antecedentes difusos, ya discutida en un apartado previo de la presente tesis –véase (2.105)– sobre la interpretación analítica de los controladores difusos, e interpretada en este apartado como una extensión asociada al modelo RBF, resulta en un enriquecimiento del modelo difuso a partir de la equivalencia RBF-difusa. Las directrices marcadas por el trabajo de Pedrycz han sido muy recientemente retomadas por Wei y Mendel [WEI99], en un trabajo sobre clasificación difusa de señales digitales moduladas en amplitud y fase en aplicaciones de telecomunicación, aplicable a diversos tipos de modulaciones digitales, asociados a distintas constelaciones. Cabe destacar, como inciso, que la aproximación difusa permite a los autores considerar esquemas propios de teoría de la detección probabilística cuyos *kernels* no están restringidos a formas gaussianas. En dicho trabajo, los autores presentan una interpretación bidimensional del concepto de interpretación relacional de las premisas difusas, que lleva a la definición de los *kernels* difusos que modelan diversos *clusters* sobre el plano complejo de modulación en base a diversas métricas y diferentes funciones base, de una forma paralela a la definición métrica de las redes RBF. Ya que la propiedad definitiva de ambos modelos, la localidad en el espacio multidimensional para las acciones base, sean éstas *kernels* RBF o premisas de reglas difusas, se mantiene tanto para el modelo RBF como el difuso, el aspecto más importante que soluciona la anterior interpretación relacional o RBFiana de los antecedentes lógicos difusos es la prevención de la explosión combinatorial del número de reglas. En efecto, tal como ya ha sido comentado, la denominada *curse of dimensionality* se relaciona con una construcción de modelos multidimensionales a partir de sus extensiones unidimensionales (2.30), como corresponde a los controladores difusos clásicos, en lugar de una síntesis directa multidimensional, como corresponde a modelos RBF. Este hecho de evitar la explosión exponencial del número de reglas, asociado a la independencia de modelos locales en redes RBF, frente a la dependencia que marca la división reticular propia a la división de cada dimensión en controladores difusos, es un

aspecto que también ha sido recientemente tratado de forma tangencial en una réplica tardía al trabajo original de Jang [JAN93a], debida a Andersen *et al* [AND98].

En la figura 2.23 se muestra, a título ilustrativo, un ejemplo bidimensional en que puede apreciarse la distribución de tres funciones locales que presentan independencia en cuanto a posición y conformación, y que son fruto de la aplicación de una distancia métrica generalizada (2.133), asociada a las redes RBF. Nótese que, a pesar de que la función no lineal es gaussiana, lo que garantiza, en virtud de J4 y de la propiedad (2.137) una equivalencia total entre los modelos RBF y difuso para una sola relación local, la distribución de funciones no lineales de la figura no pueden proyectarse de forma unívoca sobre divisiones de cada dirección x e y , o, entendido de otra forma, no pueden ser sintetizadas a partir de dos grupos de conjuntos difusos de definición unidimensional. Puede observarse que la libertad de distribución de los *kernels* métricos permite recuperar, como caso particular, una distribución de malla regular como corresponde a la síntesis difusa de *kernels* multidimensionales, recuperándose en dicho caso el fenómeno de la complejidad exponencial.

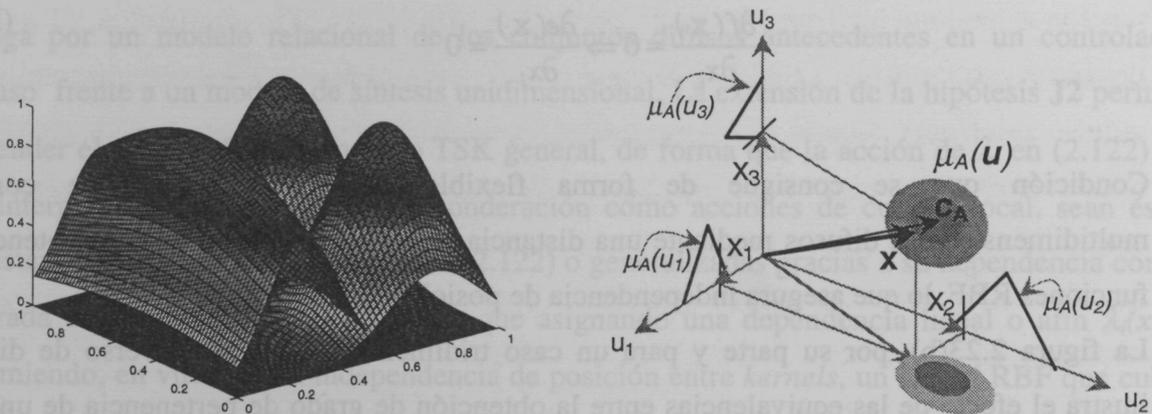


Figura 2.23 (a) Ejemplo de división de un espacio bidimensional mediante funciones definidas en base a una métrica RBF (b) Ejemplo tridimensional de la evaluación, directamente o a partir de sus proyecciones unidimensionales, del grado de pertenencia a una relación difusa asociada a la premisa de una regla difusa.

Cabe destacar, como resultado complementario asociado a la condición de independencia espacial del posicionamiento de las funciones de pertenencia multidimensionales obtenidas mediante distancias métricas, de forma análoga a las redes RBF, que este aspecto permitiría minimizar el error de aproximación funcional multidimensional al permitir asignar el centro de cada función local a cada extremo de la función multidimensional. Este resultado vendría auspiciado por un análisis llevado a cabo recientemente por Mitaim y Kosko [MIT98] para

controladores difusos unidimensionales (caso en que los métodos RBF y difuso coinciden), quienes demuestran que la posición óptima de los conjuntos difusos antecedentes es aquella que corresponde a los máximos o mínimos de la función a aproximar, propiedad que los autores vienen a denominar *patch the bumps*. Como extensión a dicho análisis, supóngase una versión localizada de un conjunto difuso que consta (localmente) de una sola regla y que pretende aproximar una función multidimensional $f(\mathbf{x})$, en dicho caso la salida del sistema de inferencia difusa F es una constante c . La minimización del error definido localmente según $e(\mathbf{x})=(f(\mathbf{x})-F)^2=(f(\mathbf{x})-c)^2$ requiere la anulación del gradiente:

$$\nabla e(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 2(f(\mathbf{x}) - c)^2 \cdot \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0 \quad (2.142)$$

de donde se infiere que el mínimo error se obtiene en los extremos multidimensionales de f :

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0 \quad (2.143)$$

Condición que se consigue de forma flexible con la obtención de conjuntos multidimensionales difusos mediante una distancia métrica en el sentido de la obtención de funciones RBF, lo que asegura independencia de posicionamiento.

La figura 2.23(b), por su parte y para un caso tridimensional como universo de discurso, ilustra el efecto de las equivalencias entre la obtención de grado de pertenencia de un vector *singleton* de entrada \mathbf{x} sobre una relación difusa $\mu_A(\mathbf{u})$ que establece un subespacio local de contorno difuso, bien directamente de forma multidimensional evaluando un norma entre \mathbf{x} y c_A y aplicando posteriormente una función no lineal unidimensional, o bien a partir de cada una de las funciones de pertenencia unidimensionales $\mu_A(u_1), \mu_A(u_2), \mu_A(u_3)$ asociadas a conjuntos difusos sobre cada una de las componentes u_1, u_2 y u_3 .

La anterior interpretación no aparece en detrimento de la interpretabilidad lingüística de los modelos difusos. Entendemos que el modelo difuso inicial basado en una base de reglas, asociadas a una intersección de extensiones cilíndricas (2.30), del tipo

$$R^l: \quad \text{SI } u_1 \text{ es } A_1^l \text{ y } \dots \text{ y } u_n \text{ es } A_n^l \text{ ENTONCES } v \text{ es } v_c \quad (2.144)$$

admite la interpretación lingüística multidimensional relacional:

$$R^l: \quad \text{SI } (u_1 \text{ y } u_1 \text{ y } \dots \text{ y } u_n) \text{ son } (A_1^l \text{ y } \dots \text{ y } A_n^l) \text{ ENTONCES } v \text{ es } v_C \quad (2.145)$$

cuya interpretación analítica en forma de regla de conocimiento difuso fue ya introducida en (2.105) y deviene más manifiesta bajo la equivalencia RBF-difusa.

Como recolección y extensión de los resultados anteriores, la primera conclusión a reseñar es que la operación de los modelos RBF o difusos puede entenderse como un modelo local, en virtud de la localidad de las funciones base sean éstas de simetría radial, de simetría radial extendida o meramente locales y sintetizables en el sentido de relación difusa local. Bajo esta perspectiva, es fundado extender o relajar las hipótesis de equivalencia parcial de Jang **J3** y **J4**, manteniendo **J1**, **J5**, propias de la equivalencia funcional, hacia funciones de acción no lineal local independientemente de su forma, sintetizabilidad radial o como agregación de funciones unidimensionales, o direccionalidad espacial. Como conclusión, esta equivalencia aboga por un modelo relacional de los conjuntos difusos antecedentes en un controlador difuso frente a un modelo de síntesis unidimensional. La extensión de la hipótesis **J2** permite extender el modelo RBF al modelo TSK general, de forma que la acción de λ_i en (2.122) no se interpreta tanto como pesos de ponderación como acciones de control local, sean éstas constantes en el modelo RBF estándar (2.122) o generalizadas gracias a su dependencia con la entrada de control (2.141). Obsérvese que asignando una dependencia lineal o afín $\lambda_i(x)$ y asumiendo, en virtud de la independencia de posición entre *kernels*, un *kernel* RBF que cubra todo el espacio multidimensional (o equivalentemente una regla difusa que es *cierta* para cualquier valor del vector de entrada), puede recuperarse el comportamiento descrito por (2.135), asociado a los modelos ARBI y deseable por sus propiedades de aproximación global por similitud a los modelos PWL, al tener:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mathbf{x}) \cdot \phi_i(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i(\mathbf{x}) \cdot \phi_i(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) + \lambda_m(\mathbf{x}) \cdot \phi_m(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m\|) \\ &\xrightarrow{\phi_m(r)=1 \text{ (máxima credibilidad)}} \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i(\mathbf{x}) \cdot \phi_i(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) + \lambda_m(\mathbf{x}) \\ &\xrightarrow{\lambda_m(\mathbf{x})=\alpha\mathbf{x}+\beta \text{ (modelo local afín)}} \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i(\mathbf{x}) \cdot \phi_i(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) + \alpha\mathbf{x} + \beta \end{aligned} \quad (2.146)$$

En la expresión resultante, el término de expansión puede interpretarse como un aproximador con propiedades de aproximación local, mientras que el término afín agregado puede interpretarse como una acción global de aproximación, que puede mejorar el buen condicionamiento del problema de aproximación RBF, fundamentalmente en los extremos de espacio de aproximación, aspecto que será tratado de nuevo en el apartado referente a la normalización.

El modelo agregado definitivo que generaliza la interrelación entre los dos paradigmas de aproximación no lineal, puede formularse por tanto, como

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i(\mathbf{x}) \cdot \phi((\mathbf{x} - \mathbf{c}_j)^T \Sigma_j^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{c}_j))}{\sum_{i=1}^m \phi((\mathbf{x} - \mathbf{c}_j)^T \Sigma_j^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{c}_j))} \quad (2.147)$$

en su versión RBF, donde la distribución de la matriz Σ_j , así como la libre elección de la función ϕ permite modelar funciones hiperradiales de cualquier conformación. El procesado llevado a cabo por una expresión del tipo (2.147) es equivalente a los sistemas difusos que utilizan relaciones difusas hiperelipsoidales, como las propuestas por Kosko en [Cap 12, NGU95]. En la versión difusa de (2.147), en que la relación difusa multidimensional se conforma en base a pertenencias unidimensionales, que permiten sintetizar funciones locales que no exhiben simetría radial o hiperradial, la expresión deviene, de forma equivalente:

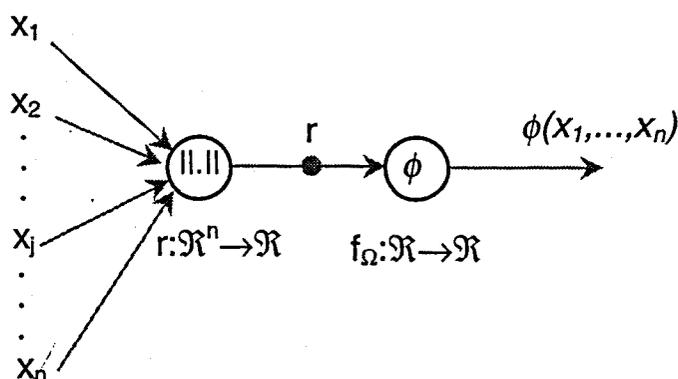
$$f(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i(\mathbf{u}) \cdot \{ \mu_{R_1^i}(u_1) * \mu_{R_2^i}(u_2) * \dots * \mu_{R_n^i}(u_n) \}}{\sum_{i=1}^m \{ \mu_{R_1^i}(u_1) * \mu_{R_2^i}(u_2) * \dots * \mu_{R_n^i}(u_n) \}} \quad (2.148)$$

Ambos modelos incluyen dependencia con el vector de entrada en los modelos locales definidos en cada subzona del espacio $\lambda(\mathbf{x})$ o $\lambda(\mathbf{u})$, interpolados de forma suave en virtud de la continuidad de las funciones graduales ϕ o las funciones de pertenencia $\mu_A(u_i)$. Las versiones no normalizadas de ambos métodos serán las consideradas tanto en la demostración de las propiedades analíticas de aproximación universal, como en el estudio de las implicaciones en cuanto a su implementación, y auspiciadas por un análisis posterior en el apartado correspondiente. Dichas expresiones devienen, en los casos hiperradiales o difusos, respectivamente:

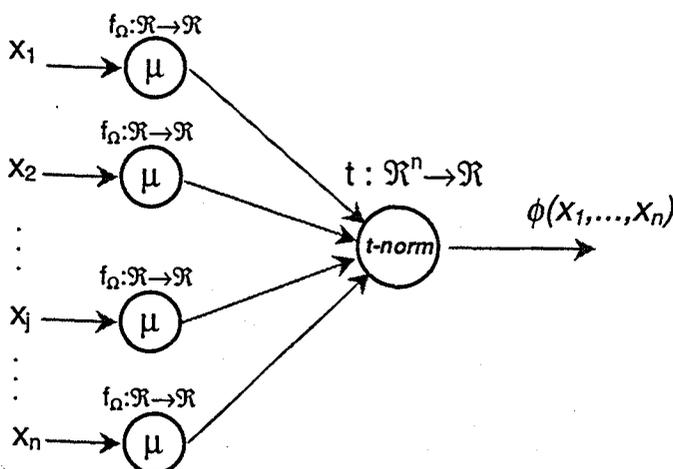
$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mathbf{x}) \cdot \phi((\mathbf{x} - \mathbf{c}_j)^T \Sigma_j^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{c}_j)) \quad (2.149)$$

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mathbf{u}) \cdot \{ \mu_{R_1'}(u_1) * \mu_{R_2'}(u_2) * \dots * \mu_{R_n'}(u_n) \} \quad (2.150)$$

Para concluir el apartado de equivalencias entre el modelo RBF y el modelo difuso, la figura 2.24 presenta la representación esquemática en forma de red de la obtención de las funciones base multidimensionales en ambos métodos de aproximación multidimensional, es decir, de cada nodo o neurona no lineal, de cara a una comparación definitiva y su repercusión en ulteriores implementaciones *hardware*. Obsérvese en las figuras el cometido de la función de norma métrica frente a la norma-*t* difusa, ambas encargadas de establecer la reducción de dimensionalidad.



(a)



(b)

Figura 2.24 Comparación entre los esquemas de definición de funciones base locales (a) red RBF (b) Inferencia difusa Mamdani

2.7.3 Relación entre controladores difusos y redes neuronales de tipo Perceptrón Multicapa

En el apartado anterior se ha estudiado la estrecha coincidencia entre los controladores difusos de clase A y las redes neuronales de procesamiento *feedforward* de tipo RBF, que conlleva una coincidencia bajo ciertas condiciones. Por su parte, la familia de redes neuronales de tipo *feedforward*, incluye otro tipo de red neuronal que ostenta una mayor aceptación, sino implantación, la denominada red perceptrón multicapa (*multilayer perceptron*, MLP, en inglés) [ZUR92]. Este tipo de red neuronal MLP, de un origen neurobiológico ciertamente más manifiesto que en las redes RBF, presenta una serie de puntos en común con el grupo de redes de función base local (sean éstos redes RBF o procesadores difusos). Ambos grupos de sistemas (MLP y redes de acción local) son sistemas altamente no lineales, que de hecho presentan la propiedad de ser aproximadores universales; son sistemas multientrada /multisalida y por tanto devienen una solución fundada a distintos problemas en espacios altamente no lineales y altamente dimensionales como puedan ser problemas de clasificación, o su operación como controladores MIMO [OND99]. Nótese que ambos paradigmas de aproximación no lineal son redes paramétricas de regresión, susceptibles de ser adaptativas. A pesar de las concordancias genéricas, el método subyacente de aproximación funcional es notoriamente distinto. A diferencia de los sistemas RBF-difusos, los perceptrones multicapa, que pueden presentar más de una capa oculta, están caracterizados por neuronas cuya acción no lineal puede interpretarse como el establecimiento de una frontera gradual entre las zonas en que queda dividido el espacio multidimensional por un hiperplano definido sobre el espacio de entrada de cada neurona no lineal. La agregación intra-capa de estas separaciones binarias graduales (difusas), que permite recuperar su interpretación parcial como clasificadores, conduce a funciones altamente no lineales. Sin embargo, la no decorrelación entre las acciones de cada neurona (como es el caso de las redes RBF-difusas, que presentan acciones locales decorreladas u ortogonales en el espacio), revierte en la pobre interpretabilidad de los parámetros de la red MLP, aspecto que justifica su reconocimiento como red de aproximación *ciega* o de tipo *caja negra*. Su aceptación se debe, no obstante, tanto a su anticipación histórica como a la existencia de métodos de aprendizaje bien establecidos, como pueda ser el método retropropagación del error. Con vistas a realizar una investigación sobre posibles equivalencias o interrelaciones se describe a continuación y de forma sucinta el procesamiento llevado a cabo por las redes MLP. Para poder establecer dicha comparación posterior, considérese como particularización del caso general una red

feedforward de una única capa oculta, representada en la figura (2.25a), cuyos nodos de salida establecen como salida

$$v_k = g \left(\sum_{j=1}^h z_j \beta_{jk} \right) \quad (2.151)$$

siendo

$$z_j = f \left(\sum_{i=1}^n u_i \omega_{ij} + \tau_j \right) \quad (2.152)$$

En las anteriores expresiones, las funciones no lineales f y g son usualmente funciones continuas, acotadas y monótonas. La función f , clave del efecto no lineal de separación, suele ser de tipo sigmoidal $f(x)=1/1+e^{-x}$ mientras que la función g suele ser una función lineal, e incluso la identidad [ZUR92]. De forma cualitativa, la necesidad de utilizar pesos β_{jk} de valor positivo y negativo, restricción no necesaria en la aproximación RBF-difusa, parte de la necesidad de aproximar funciones, en general no monótonas, a partir de la agregación de funciones monótonas no locales (sigmoidales). La figura 2.25(b) muestra, para un caso bidimensional, el procesado no lineal descrito por (2.152) que implementa una neurona del tipo perceptrón. La agregación ponderada $u_i \omega_{ij} + \tau_j$ que define un hiperplano en general, define en este caso la ecuación de una recta sobre la que aplica la saturación gradual sigmoidal.

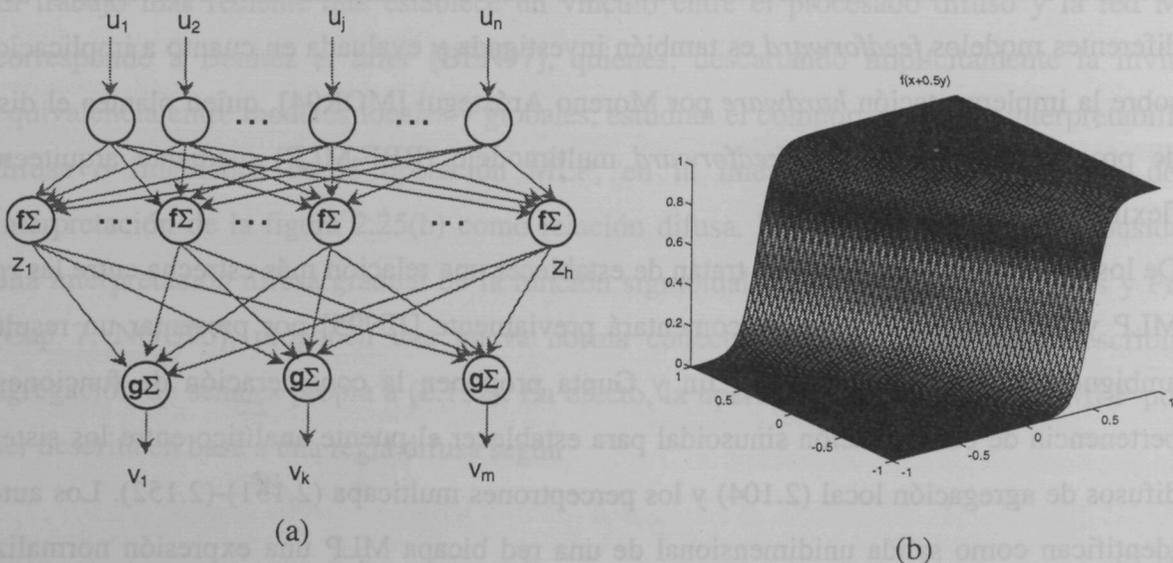


Figura 2.25 (a) Esquema de la red *feedforward* MLP.

(b) División de un espacio bidimensional mediante una neurona tipo perceptrón

La anterior representación cualitativa de la expresión (2.152) permite concluir que los nodos o neuronas de un MLP no implementan funciones *locales* sino de acción *global*, aunque de forma gradual. Ciertamente, la figura (b) admite una interpretación como relación difusa, pero no como fruto de una implicación local tipo Mamdani –véanse las fig. 2.10 (a) y (b)-. El tipo de reglas difusas que comportan este tipo de relaciones no locales sino graduales, se denominan *reglas graduales* [Cap 7, NGU95], aunque solo están definidas en un espacio unidimensional, al que corresponde una interpretación lingüística del tipo ‘*SI x es mayor que A ENTONCES B*’.

Aunque la red neuronal por antonomasia es el perceptron multicapa MLP, la acepción *neurofuzzy* aplicada a una estructura, y no en lo relativo a su aprendizaje, nunca se refiere a una combinación sinérgica entre sistemas difusos y redes MLP, sino, tal y como se comentó en el apartado anterior, entre redes RBF y sistemas difusos. A pesar de ello, aparece en la literatura alguna publicación que trata esta interrelación MLP-difusa. Nótese que desde el punto de vista estructural, e interpretados como redes *feedforward*, los tres tipos de métodos de aproximación son susceptibles de ser compactados bajo una formulación común -véanse las similitudes entre las figuras (2.21) y (2.25a)- tal como presenta Reynieri [REY95]. El autor introduce una formulación genérica neuro-difusa que asocia a cada nodo de computación o neurona una cierta función no lineal flexible, lo que permite plantear un modelo genérico, tras establecer en dicho trabajo, de forma subrepticia, una equivalencia entre procesado RBF y procesado difuso. Este modelo, no obstante, deviene conformado local o globalmente en función del tipo de funciones no lineales seleccionadas, lo que determina la posterior resolubilidad del problema, así como sus características. Esta equivalencia de los diferentes modelos *feedforward* es también investigada y evaluada en cuanto a implicaciones sobre la implementación *hardware* por Moreno Aróstegui [MOR94], quien plantea el diseño de procesadores neuronales *feedforward* multimodelo (RBF-MLP) mediante arquitecturas flexibles sistólicas secuenciales.

De los dos trabajos restantes que tratan de establecer una relación más estrecha entre las redes MLP y los sistemas difusos, se comentará previamente [JIN95] por presentar un resultado ambiguo. En efecto, en [JIN95], Jin y Gupta proponen la consideración de funciones de pertenencia de conformación sinusoidal para establecer el puente analítico entre los sistemas difusos de agregación local (2.104) y los perceptrones multicapa (2.151)-(2.152). Los autores identifican como salida unidimensional de una red bicapa MLP una expresión normalizada (conjunción de (2.151) y (2.152)) según

$$y = \frac{\sum_{j=1}^N v_j \phi(\sum_{i=1}^n \omega_{ji} x_i + \tau_j)}{\sum_{j=1}^N \phi(\sum_{i=1}^n \omega_{ji} x_i + \tau_j)} \quad (2.153)$$

y tras proponer como función de pertenencia difusa la función local

$$\phi(x) = \begin{cases} \sin(x) & 0 < x < \pi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.154)$$

argumentan la equivalencia trigonométrica que permite establecer un producto de funciones sinusoidales como doble sumatorio según

$$\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) = \prod_{i=1}^n \phi(x_i) = \sum_{j=1}^{2^{2^n-1}} a_j \phi(\sum_{i=1}^{2^{2^n-1}} b_{ji} x_i + c_j) \quad (2.155)$$

Esta característica permite, según los autores, establecer la equivalencia entre la expresión (2.153) asociada a una red MLP y la expresión que modela la transferencia de un sistema difuso con inferencia multiplicativa (2.101). Entendemos que este argumento es matemáticamente falaz. La localidad de una función de pertenencia -véase la figura Mamdani (2.10a)-, no puede reemplazar la globalidad de una neurona MLP, y es precisamente dicha condición local la que restringe la validez de la igualdad (2.155) a la zona de existencia de la función de pertenencia, aspecto que invalida la equivalencia.

El trabajo más reciente que establece un vínculo entre el procesado difuso y la red MLP corresponde a Benítez *et aliter* [BEN97], quienes, descartando implícitamente la inviable equivalencia entre modelos locales y globales, estudian el comportamiento o interpretabilidad difusa o lingüística de la operación MLP, en la línea previamente comentada de la interpretación de la figura 2.25(b) como relación difusa. Los autores, además de considerar una interpretación difusa gradual de la función sigmoideal según las ideas de Dubois y Prade [Cap 7, NGU95], proponen una nueva norma conectiva difusa que permite describir la agregación de señales propia a (2.152). En efecto, la operación de cada neurona MLP puede ser descrita en base a una regla difusa según

$$R^j: \quad \text{SI } f\left(\sum_{i=1}^n x_i \omega_{ij} + \tau_j\right) \text{ es } A_i^j \text{ ENTONCES } v \text{ es } v_c \quad (2.156)$$

La anterior regla difusa no es estándar, y no corresponde a ninguna de las implicaciones difusas conocidas, ni en particular a las implicaciones locales de Mamdani, como es esperable. Los autores detectan que la sintetizabilidad lógica difusa de dicha regla, que permite una interpretabilidad lingüística, requiere la reconsideración de la anterior regla según una construcción unidimensional del tipo

$$R^j: \quad \text{SI } x_1 \text{ es } A_1^j \theta \dots \theta x_n \text{ es } A_n^j \text{ ENTONCES } v \text{ es } v_C \quad (2.157)$$

La identificación de las expresiones (2.156) y (2.157) no es posible para las familias de normas- t y conormas- t conocidas, lo que conduce a los autores a proponer el concepto de f -dualidad conectiva de un operador difuso \oplus , definida como la operación conectiva \otimes que verifica

$$f(x_1 \oplus x_2) = f(x_1) \otimes f(x_2) \quad (2.158)$$

En base a la anterior definición, el trabajo propone, como nueva operación conectiva difusa, la sigmoide-dual de la adición o suma: la o -interactiva, denotada $*$ e interpretable como un híbrido entre una norma- t y una conorma- t , y definida por

$$a * b = \frac{a \cdot b}{(1-a) \cdot (1-b) + a \cdot b} \quad (2.159)$$

La consideración de dicha conectiva permite expresar (2.156) en forma de (2.157), paso que concluye la interpretabilidad difusa de la operación de las redes MLP. Como extensión colateral de este trabajo, cabe observar que, si la disposición del hiperplano que sitúa la división del espacio de aproximación es paralela a una de las dimensiones x_i de dicho espacio, basta considerar la operación de una relación difusa formada a partir de conjuntos difusos graduales y un conjunto difuso de pertenencia unitaria sobre toda la dirección u_i para obtener la respuesta de un nodo de perceptrón. Por otra parte, si el hiperplano no es paralelo a ninguna de las dimensiones del espacio, el uso de una red tipo RBF con distancia generalizada (2.133), con una anchura infinita en la dirección de división perceptrónica, permite recuperar el comportamiento de par de sigmoides, debido a las restricciones de simetría radial. Las

anteriores observaciones permiten, bajo algunas consideraciones, clasificar la operación de un perceptron MLP como un caso particular de procesadores difusos generalizados o RBF.

2.7.4 Analogía entre controladores difusos y la teoría de *Wavelets*

Aunque el establecimiento de una equivalencia entre el procesado llevado a cabo por las denominadas *wavelets* y los controladores difusos está fuera del propósito de este trabajo, se describen a continuación ciertas analogías entre dichos métodos de aproximación de funciones. Partiendo de la teoría sobre las *wavelets*, cuyo nicho de aplicación suele corresponder al modelado o síntesis de señales temporales, y para el caso unidimensional, el representante más aceptado de éstas son las denominadas *wavelets* ortogonales, funciones cuya traslación y dilatación conduce a una base ortonormal sobre el espacio de aproximación. Específicamente, existe una función $\psi(t)$ (designada *mother wavelet*) tal que el conjunto

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - n) \quad (2.160)$$

forma una base ortonormal en $L^2(\mathcal{R})$. En función de la anterior familia de funciones (2.160), la aproximación de una función $f(t)$ deviene:

$$f(t) = \sum_{m,n} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \cdot \psi_{m,n}(t) \quad (2.161)$$

Dada la localidad espacial de las funciones (2.160), impuesta por la condición de ortonormalidad cuando no existe decorrelación frecuencial, la expresión (2.161) es funcionalmente equivalente tanto a la ecuación que modela un controlador difuso de tipo A (2.104) como a la expresión (2.122) que describe la operación de la red RBF, ambas en sus versiones unidimensionales. La extensión del anterior desarrollo (2.161) a un caso de múltiples dimensiones puede conseguirse bien mediante la generación de *wavelets separables* vía el producto de *wavelets* unidimensionales -de forma paralela a la generación de relaciones difusas a partir de conjuntos difusos-, o bien mediante métodos no separables que garanticen la localidad de las funciones base.

La disposición en forma de red del procesado llevado a cabo por la versión multidimensional de (2.161), denominable por extensión de lenguaje *red neuronal wavelet*, tal como ha sido propuesta recientemente en [ZHA95], conduce a una identificación directa de dicha red con

una red RBF (tal como identifica el propio trabajo [ZHA95]) o un controlador difuso, equivalencia esta última insinuada en [SHM97]. Los tres tipos de red *feedforward*, en virtud de la localidad de las funciones base correspondientes a la expansión de aproximación, comparten una propiedad clave, no compartida con las redes MLP, a saber: la proyección del problema de aproximación no lineal hacia un problema lineal de obtención de parámetros, gracias a la no linealidad local de las funciones base, aspecto que facilita el aprendizaje de los mismos. Estableciendo una comparación entre las funciones base multidimensionales difusas, RBF y *wavelet*, pueden concluirse los siguientes aspectos. La simetría radial, propiedad *per se* de las redes RBF, no está impuesta ni sobre las funciones base difusas FBFs ni las funciones base *wavelet*. Por otra parte, la condición de ortogonalidad (ortonormalidad) de las funciones base *wavelet* requiere de un comportamiento oscilatorio de las mismas, si bien que localizado, de forma similar a una función *sinc*. Formalmente, la primera derivada de las *wavelet* no cumple la condición de monotonía —compárese con (2.126)-(2.130)—. Este comportamiento no es propio de las funciones RBF clásicas aunque su extensión sería natural, mientras que funciones de pertenencia con valores negativos y oscilantes pueden ser planteadas como funciones de pertenencia extendidas (e.g. en [MIT98]), pero en perjuicio de su interpretabilidad lingüística. De forma que las funciones base locales tipo RBF o difuso admiten la interpretación analítica de funciones cuasi-ortogonales, en virtud de su localidad monótona, de forma que su optimización hacia las funciones base *wavelet* extiende sus propiedades. Esta generalidad asociada a la ortogonalidad de las *wavelet* aparece sin embargo en detrimento de su implementabilidad mediante circuitos *hardware* específicos así como de su interpretabilidad lingüística, características que sí califican a las redes RBF y controladores difusos. Al mismo tiempo, el comportamiento oscilatorio localizado de las *wavelet*, por no ser monótono, no permite, a pesar de la localidad, las características de interpolación con transición suave entre modelos propias de los controladores difusos TSK y las redes RBF extendidas (2.141), de capital importancia en aplicaciones de control, como será estudiado en un apartado posterior. Cabe citar, por último, que a las redes neuronales *wavelet*, o en general al procesado mediante *wavelet*, se les atribuyen propiedades de reducción de ruido sobre las medidas o ejemplos en problemas de interpolación [BER98] o aproximación de funciones, propiedades que serán justificadas analíticamente en un apartado posterior y extendidas a los controladores difusos.

2.8 Estudio sobre los efectos de la normalización

En apartados anteriores se ha propuesto un modelo unificado para distintos métodos de aproximación de funciones, un modelo de regresión no lineal constituido por una agregación paramétrica lineal de funciones base locales. En función del origen histórico o de disciplina científica del método de aproximación, habitualmente éste incluye (en controladores difusos estándar, redes *GRNN*, redes *CMAC*) o no (redes *RBF*, redes *wavelet* o *spline*) una operación de normalización sobre las funciones base. No obstante, tal como ha sido detectado a lo largo del estudio de las analogías entre distintos métodos, la falta de connaturalidad de la normalización respecto a un método concreto da testimonio del hecho que, para cada uno de los métodos citados, distintos trabajos consideren o no dicha normalización. Dicha aparente disparidad en cuanto a la justificación y el tratamiento de la operación de normalización, así como las implicaciones en cuanto a la capacidad de aproximación funcional y en cuanto a consideraciones sobre la implementación *hardware* justifican un estudio sobre sus efectos.

En el presente apartado se aborda por tanto el estudio analítico del efecto de la normalización sobre las funciones base. En él, y en virtud de las analogías propuestas entre los controladores difusos y el resto de métodos de aproximación, se identifican, indistintamente, funciones base uni- o multi-dimensionales con funciones de pertenencia uni- o multi-dimensionales.

Como punto de partida de este examen, se observa, a modo de justificación intuitiva del uso de la normalización sobre el conjunto de funciones base, que ésta persigue la independencia no tan sólo relativa entre el efecto de funciones base contiguas ortogonales, sino la independencia absoluta entre dichas funciones base, convirtiéndolas en funciones base ortonormales. De esta forma, mediante la agregación de funciones base normalizadas según

$$v(u) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \varphi_k^N(u) = \frac{\sum_{k=1}^n c_k \cdot \varphi_k(u)}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(u)} \quad (2.162)$$

se obtiene una recuperación absoluta de la función a aproximar, mientras que la agregación directa de las funciones base recupera la conformación de la función a aproximar, afectada por un factor de escalado. Nótese que la expresión (2.162) corresponde a una operación de normalización de las funciones base de tipo no lineal, a diferencia de lo que constituiría una operación de normalización lineal de los parámetros c_k . En este apartado se demuestra que la condición de ortogonalidad local de las funciones base permite reemplazar la normalización

(no lineal) de funciones base, por una normalización (lineal) de los parámetros lineales de agregación.

La figura 2.26 ilustra los conceptos anteriores y revela otros efectos de la normalización, en un ejemplo de aproximación unidimensional mediante funciones base locales gaussianas a la función unidad $v=f(u)=u$. Las subfiguras (b) y (d) muestran, respectivamente y para una base que cubre todo el espacio de aproximación (universo de discurso en controladores difusos), el resultado de la aplicación de normalización –en (d)- o no –en (b)- sobre la reconstrucción de la señal a aproximar. Nótese que en ambos casos se recupera la *conformación* de la función que se aproxima, aunque la agregación no normalizada comporta un cambio de escala (lineal), que se justifica, cualitativamente, por la interacción entre funciones base contiguas en los puntos muestreados. El caso de aproximación mediante un subconjunto localizado de funciones base, que corresponde a una base de reglas no completa (2.48) –subfiguras (a) y (c)- revela otro efecto, que en la literatura se identifica como importante, a saber: el efecto que se denominará *efecto en los extremos*, que resulta en la supuesta capacidad de aproximación global o de generalización en los extremos que representa la operación de normalización.

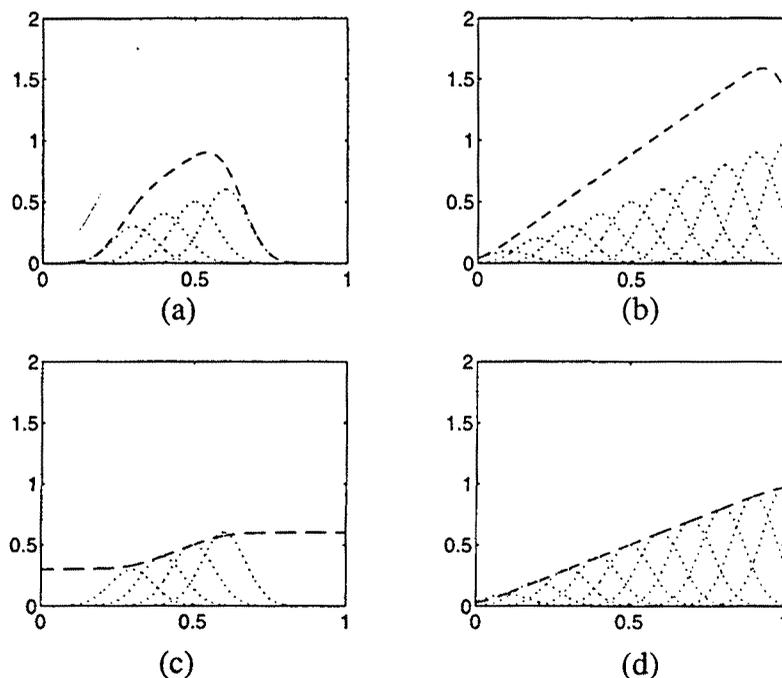


Figura 2.26 Ejemplo del efecto de normalización sobre la aproximación de la función identidad $v=u$ mediante funciones base gaussianas. Cada gráfica muestra el conjunto de funciones base escaladas y su efecto agregado (a) agregación no normalizada mediante base incompleta (b) agregación no normalizada mediante base completa (c) agregación normalizada mediante base incompleta (d) agregación normalizada mediante base completa

El análisis siguiente tiene como objetivo formalizar o justificar los anteriores efectos cualitativos. Considérese un conjunto B , definido sobre el espacio de aproximación (supuesto unidimensional, sin pérdida de generalidad, para simplificar el análisis), y formado por funciones base de aproximación:

$$B = \{\varphi_1(u), \dots, \varphi_j(u), \dots, \varphi_n(u)\} \quad (2.163)$$

El anterior conjunto admite como representación biunívoca, obtenida mediante transformación no lineal, el conjunto B^N de funciones base normalizadas:

$$B^N = \{\varphi_1^N(u), \dots, \varphi_j^N(u), \dots, \varphi_n^N(u)\} = \left\{ \frac{\varphi_1(u)}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(u)}, \dots, \frac{\varphi_j(u)}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(u)}, \dots, \frac{\varphi_n(u)}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(u)} \right\} \quad (2.164)$$

Como punto de partida se considera el estudio del comportamiento ante la normalización de un conjunto B que incluye tan sólo una función base

$$B = \{0, \dots, 0, \varphi_j(u), 0, \dots, 0\} \quad (2.165)$$

En dicho caso, se concluye que el efecto de la normalización sobre la j -ésima función base aislada, ponderada ésta por el correspondiente coeficiente c_j en un desarrollo de aproximación (2.162) resulta en un comportamiento constante:

$$c_j \varphi_j^N(u) = c_j \frac{\varphi_j(u)}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(u)} = c_j \frac{\varphi_j(u)}{\varphi_j(u)} = c_j = cte \quad (2.166)$$

La relevancia del resultado anterior, ilustrado en la figura 2.27(a) para distintas conformaciones de φ_j , no está asociada al caso impráctico de un conjunto unibase (2.165), sino que esta particularización modela apropiadamente la situación en que una función base φ_j aparece aislada en un conjunto completo. Esta situación de aislamiento corresponde al caso en que los valores del resto de funciones base de B son significativamente menores que los de φ_j , hecho que se interpreta como una falta de solapamiento, y que conlleva, en una cierta ventana

espacial, el comportamiento (local) descrito por (2.166). Se concluye que la acción de normalización elimina, en casos extremos, es decir, cuando no existe interacción entre funciones base adyacentes, la conformación gradual de la función base, conformación que es connatural a una función de pertenencia difusa y al resto de funciones locales, y que es fundamental en la capacidad de interpolación aproximativa. El efecto descrito por (2.166), poco significativo por sí mismo, será reconsiderado en situaciones posteriores, para justificar los efectos en los extremos del espacio de aproximación y el efecto de variación de las formas de las funciones base, debidos ambos a la normalización.

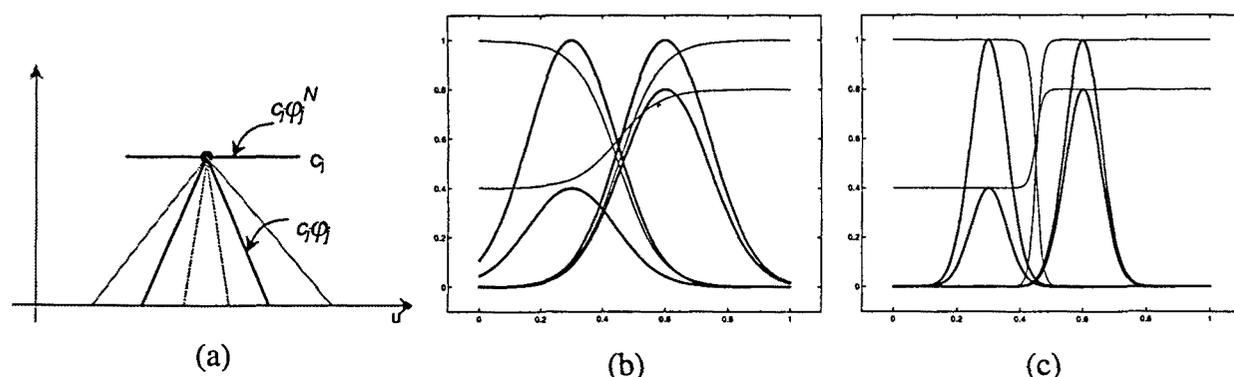


Figura 2.27 (a) Efecto de la normalización sobre una función base única (b) Efecto de la normalización sobre dos funciones base gaussianas de varianza $\sigma=0.2$: se representan las funciones base φ_j y φ_{j+1} , sus versiones escaladas $c_j\varphi_j$ y $c_{j+1}\varphi_{j+1}$ y normalizadas φ_j^N y φ_{j+1}^N , así como la agregación normalizada $c_j\varphi_j^N+c_{j+1}\varphi_{j+1}^N$ (c) *id.* a (b) con $\sigma=0.08$

Cabe mencionar que, tanto para casos de funciones base de soporte infinito, como corresponde a funciones base gaussianas, como para funciones base de soporte finito, como corresponde a funciones base triangulares –véase la figura 2.27(a)-, el comportamiento descrito por (2.166) se mantiene, estrictamente, para valores infinitesimalmente reducidos de la función base en unas, e incluso para valores nulos en otras, por continuidad, pero éste es un comportamiento en el límite que deviene computacionalmente inestable, aspecto que será tratado de nuevo posteriormente. Nótese, por último, que la generalización de (2.166) al caso multidimensional es inmediata.

Como extensión al caso anterior de base única, considérese el estudio de un conjunto de funciones base B formado por dos funciones base:

$$B = \{0, \dots, 0, \varphi_j(u), \varphi_{j+1}(u), 0, \dots, 0\} \quad (2.167)$$

En este caso, la agregación ponderada y normalizada de ambas funciones base particulariza el desarrollo de aproximación (2.162) en

$$\begin{aligned} v(u) &= \sum_{k=1}^n c_k \cdot \varphi_k^N(u) = \frac{\sum_{k=1}^n c_k \cdot \varphi_k(u)}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(u)} = \\ &= c_j \varphi_j^N(u) + c_{j+1} \varphi_{j+1}^N(u) = \frac{c_j \varphi_j(u) + c_{j+1} \varphi_{j+1}(u)}{\varphi_j(u) + \varphi_{j+1}(u)} \end{aligned} \quad (2.168)$$

expresión que presenta los siguientes comportamientos límite en los extremos del espacio de aproximación:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} v(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{c_j \varphi_j(u) + c_{j+1} \varphi_{j+1}(u)}{\varphi_j(u) + \varphi_{j+1}(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{c_j \frac{\varphi_j(u)}{\varphi_{j+1}(u)} + c_{j+1}}{\frac{\varphi_j(u)}{\varphi_{j+1}(u)} + 1} = c_{j+1} \quad (2.169)$$

y

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} v(u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{c_j \varphi_j(u) + c_{j+1} \varphi_{j+1}(u)}{\varphi_j(u) + \varphi_{j+1}(u)} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{c_j + c_{j+1} \frac{\varphi_{j+1}(u)}{\varphi_j(u)}}{1 + \frac{\varphi_{j+1}(u)}{\varphi_j(u)}} = c_j \quad (2.170)$$

Las anteriores expresiones extienden el resultado (2.166) a una combinación de dos funciones base, concluyéndose que el efecto de normalización estabiliza el comportamiento de la función aproximada en los extremos, es decir, en los intervalos en que no existe solapamiento. Como caso particular, aunque representativo, considerando la descripción de una de las funciones base normalizadas del conjunto (2.167):

$$\varphi_j^N(u) = \frac{\varphi_j(u)}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(u)} = \frac{\varphi_j(u)}{\varphi_j(u) + \varphi_{j+1}(u)} \quad (2.171)$$

y, particularizando la conformación de las funciones base a funciones gaussianas, se obtiene

$$\varphi_j^N(u) \Big|_{\varphi_j(u)=e^{-\left(\frac{u-u_j^c}{\sigma_j}\right)^2}} = \frac{e^{-\left(\frac{u-u_j^c}{\sigma_j}\right)^2}}{e^{-\left(\frac{u-u_j^c}{\sigma_j}\right)^2} + e^{-\left(\frac{u-u_{j+1}^c}{\sigma_{j+1}}\right)^2}} = \frac{1}{1 + e^{-\left[\left(\frac{u-u_j^c}{\sigma_j}\right)^2 - \left(\frac{u-u_{j+1}^c}{\sigma_{j+1}}\right)^2\right]}} \quad (2.172)$$

expresión que corresponde a la función logística de característica sigmoïdal. Este resultado (2.172) puede generalizarse a cualquier función base local, inferiéndose que la combinación normalizada de dos funciones locales conduce a una función sigmoïdal (en el sentido de función sigmoïdal generalizada de Chen^{2.4} [CHE95c]), resultado que establece cierta relación entre los modelos de red de agregación local (tipo red RBF o sistema difuso) y los modelos tipo MLP. Esta relación permitiría plantear un teorema dual al teorema de Cybenko [CYB89], quien demuestra la aproximación universal de las redes MLP partiendo de subagregaciones de dos sigmoïdes para conformar funciones locales posteriormente agregadas; en el teorema dual, la subagregación normalizada de dos funciones base locales conformaría funciones sigmoïdales posteriormente agregadas en forma de MLP.

Las conclusiones anteriores respecto a la aplicación de normalización sobre dos funciones base se muestran ejemplificadas en las figuras 2.27(b) y 2.27(c), donde aparece representado el efecto de la normalización tanto sobre las dos funciones base individuales (2.171) como sobre su agregación ponderada (2.168), particularizadas a un caso de conformación gaussiana. La figura 2.27(b) corresponde a dos funciones gaussianas cuya varianza es tal que garantiza el solapamiento entre ambas, de forma que se ponen de manifiesto los efectos previamente descritos. Por una parte, cada una de las funciones base normalizadas φ_j^N y φ_{j+1}^N presenta una forma sigmoïdal, según (2.172), hecho que, particularizado a una agregación de dos funciones base justifica los comportamientos límite descritos por (2.169) y (2.170). Obsérvese que los comportamientos en los extremos, que presentan un valor constante, pueden interpretarse en virtud de la propiedad de aislamiento (2.166), dado que en dichos intervalos del espacio de aproximación la localidad de las funciones base garantiza un efecto aislado a la función base situada en los extremos. Como extensión de esta reinterpretación de la propiedad de

^{2.4} Por definición [CHE95c], una función $\sigma: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función sigmoïdal (generalizada) si se cumplen los comportamientos límite : (nótese que la definición de σ no requiere continuidad ni monotonicidad):

$$\begin{cases} \lim_{u \rightarrow -\infty} \sigma(u) = 0 \\ \lim_{u \rightarrow \infty} \sigma(u) = 1 \end{cases}$$

estabilización debida al aislamiento de las funciones base (2.166), la figura 2.27(c) extiende la gráfica anterior a un caso de funciones gaussianas de mayor localidad (*i.e.* menor varianza). Conjuntamente a un comportamiento equivalente al caso de mayor varianza, este ejemplo incluye un cambio de forma en las funciones base (aparte del cambio de conformación local gaussiana a sigmoïdal), que resulta en una retención o mantenimiento del nivel alto de la función base sobre el soporte de aproximación, justificado por la falta de solapamiento entre funciones base, y que reduce la acción de la normalización sobre cada función base al comportamiento (2.166) en virtud del aislamiento local. Este comportamiento será reinterpretado en un caso de estudio posterior sobre funciones de pertenencia triangulares. Las anteriores conclusiones son generalizables a una base completa (2.163) y su versión normalizada (2.164). Mediante un razonamiento similar a los anteriores, puede estimarse el comportamiento asintótico de la combinación agregada normalizada:

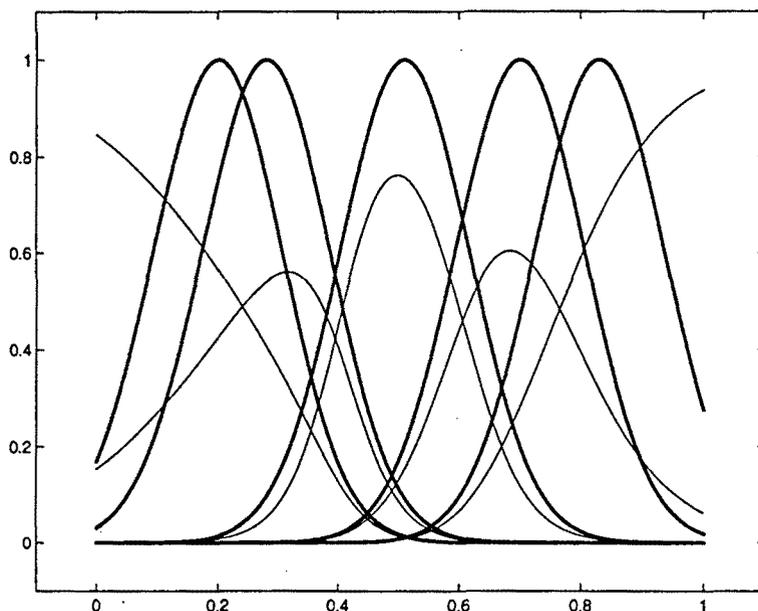
$$v(u) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \varphi_k^N(u) = \frac{\sum_{k=1}^n c_k \cdot \varphi_k(u)}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(u)} \quad (2.173)$$

como un comportamiento que tiende a una estabilización sobre el valor de los pesos de ponderación de las funciones base extremo, tal como demuestra el comportamiento límite:

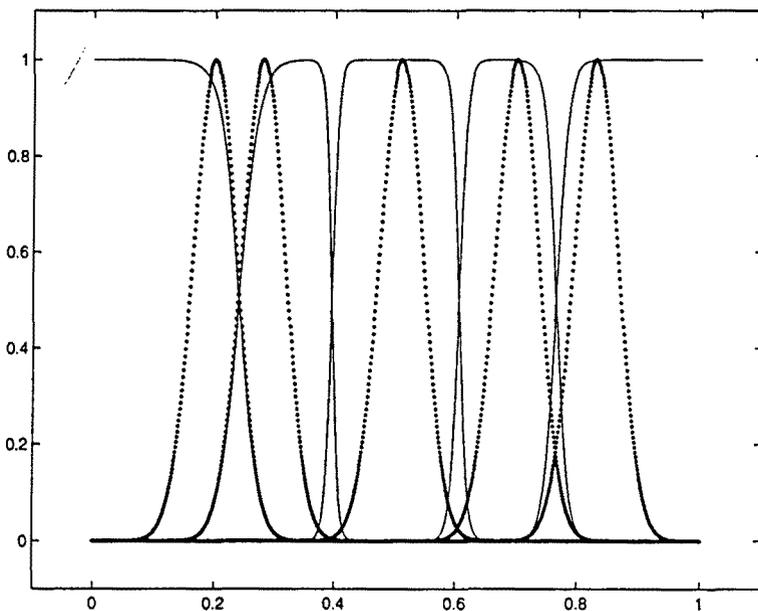
$$\lim_{u \rightarrow \infty} v(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(u)}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(u)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} c_k \frac{\varphi_k(u)}{\varphi_n(u)} + c_n}{\sum_{k=1}^{n-1} c_k \frac{\varphi_k(u)}{\varphi_n(u)} + 1} = c_n \quad (2.174)$$

El resultado anterior permite concluir que el comportamiento sigmoïdal de la función base situada en el extremo del espacio de aproximación es el aspecto que justifica el comportamiento estable de la aproximación mediante funciones base normalizadas, y que sugiere una mejora en cuanto a las capacidades de aproximación global (frecuentemente asociadas a la aproximación tipo MLP, en detrimento de su aproximación local) en desarrollos de aproximación normalizados frente a agregaciones locales. La figura 2.28, que muestra el efecto de la operación de normalización sobre un conjunto de cinco funciones base gaussianas de distribución irregular sobre el espacio de aproximación, complementa los aspectos anteriores. En la subfigura 2.28(a), que considera funciones gaussianas cuyo nivel de varianza garantiza un cierto nivel de solapamiento, puede apreciarse el comportamiento límite

esperado (2.174) ya que las funciones base situadas en los extremos adquieren conformación sigmoïdal -según la característica descrita en (2.172), y, por ende, en (2.166)-. Cabe citar que dicho comportamiento sigmoïdal es detectado por los autores Wang y Mendel en [WAN92], y asociado a la versatilidad de las funciones base difusas (normalizadas) frente a otro tipo de funciones base no normalizadas (RBF).



(a)



(b)

Figura 2.28 Efecto de la normalización sobre un conjunto de cinco funciones base gaussianas de distribución irregular. Se representan las funciones φ_j y φ_j^N $j=1, \dots, 5$ (a) funciones base gaussianas de varianza $\sigma=0.15$ (b) funciones base gaussianas de varianza $\sigma=0.05$

La reducción de varianza ilustrada en la figura 2.28(b) y, por tanto, el menor solapamiento entre funciones base anejas, resulta, por una parte, en un comportamiento equivalente en las funciones base extremo, que adquieren conformación sigmoideal. Por otra parte, la no interacción entre funciones base justifica la asignación de un valor unitario máximo a la posición central de cada función base, a diferencia del caso de mayor varianza, en que el proceso de normalización reajusta los valores máximos de las funciones locales en función del grado de interacción, asociada al solapamiento, y que es equivalente a la acción intuitiva de normalización, es decir, corresponde a una normalización lineal de los parámetros de agregación. Por último, bajo la condiciones de baja interacción interbase, destaca el efecto de encuadramiento sobre cada función base normalizada, efecto ya descrito previamente en el caso de base doble, y que resulta en un mantenimiento del comportamiento constante (local). Por extrapolación de resultados, cabe plantear el caso límite en que el conjunto de funciones base tiende a un comportamiento del tipo delta de Dirac, aun sin disminuir la separación entre funciones base, en cuyo caso la operación de normalización actúa como un efecto de retención de valor (asimilable a un ZOH en teoría de sistemas). Este comportamiento, interpretable como una pérdida de la gradación difusa (en el sentido de *less fuzzility*, apuntado por Zeng y Singh [ZEN94], y cuyo estudio se extenderá en una análisis posterior sobre funciones base triangulares), confiere, según expone Specht [SPE91] una ventaja al método de aproximación del tipo red GRNN –véase (2.115)- frente al método RBF –véase (2.122)-, al incluir aquél la operación de normalización que normalmente no incluye éste. Entendemos que este aspecto no es una ventaja en sí mismo, sino que el mal condicionamiento de la distribución inicial de funciones base –sin solapamiento o interacción- conlleva el mal comportamiento del problema de aproximación, problema que se evitaría mediante un rediseño de la distribución o forma de las funciones base. Más allá del argumento anterior, el siguiente análisis revela que tanto el comportamiento en los extremos de naturaleza sigmoideal, como el mantenimiento de valor en casos de baja interacción local es computacionalmente inestable, al deberse a un comportamiento infinitesimal de tipo (2.166). En efecto, considérese la adición de términos de ruido (asimilables a errores de precisión de implementación y en general función de la variable tiempo t) a la agregación normalizada descrita por (2.173); en dicho caso, el comportamiento límite que exhibe la agregación normalizada corresponde a:

$$\begin{aligned}
\lim_{u \rightarrow \infty} v(u) &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(u) + n_N(t)}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(u) + n_D(t)} = \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} c_k \frac{\varphi_k(u)}{\varphi_n(u)} + c_n + \frac{n_N(t)}{\varphi_n(u)}}{\sum_{k=1}^{n-1} c_k \frac{\varphi_k(u)}{\varphi_n(u)} + 1 + \frac{n_D(t)}{\varphi_n(u)}} \xrightarrow{\varphi_n(u) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0} \frac{n_N(t)}{n_D(t)}
\end{aligned} \tag{2.175}$$

El resultado anterior pone de manifiesto la elevada sensibilidad de la operación de normalización en casos mal condicionados (en el límite deviene infinita), *i.e.* en casos en que desvanece el valor de las funciones base aisladas (localmente o en los extremos del espacio de aproximación) hasta valores infinitesimalmente nulos. En dicho caso la salida del sistema responde a valores que dependen de no idealidades de cómputo o implementación, siendo independiente de los parámetros característicos de la agregación inicial (2.175). La figura 2.29 ilustra la distorsión en la forma de la función recuperada al considerar errores de implementación tres órdenes de magnitud menores que los coeficientes de aproximación.

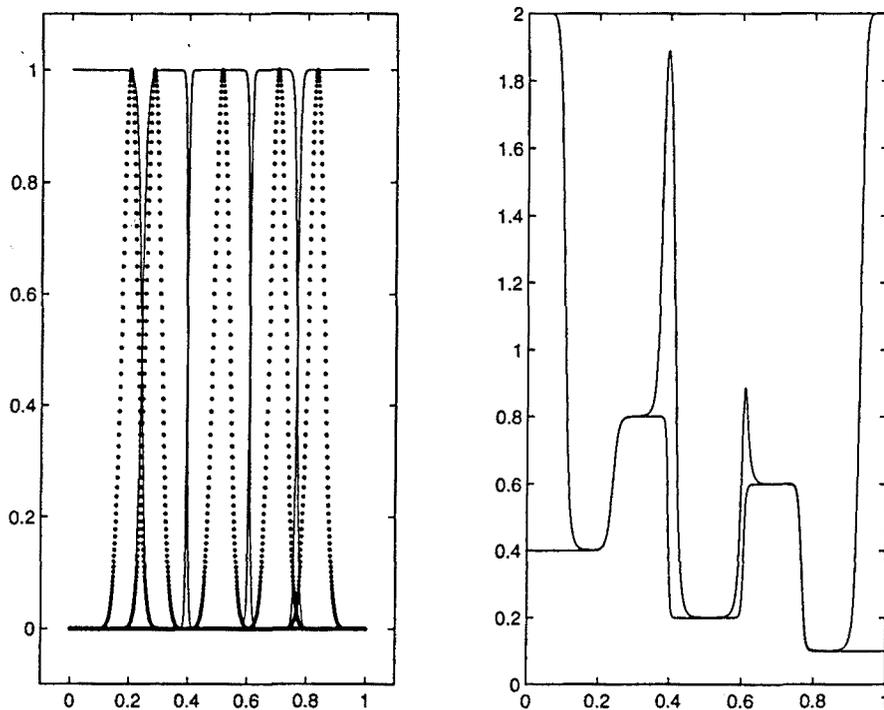


Figura 2.29 Efecto de la sensibilidad de la normalización frente a imperfecciones de cálculo

(a) conjunto de funciones base gaussianas de distribución irregular de varianza $\sigma=0.04$

(b) aproximación de la señal mediante la agregación normalizada (2.173) y mediante la

agregación normalizada (2.175) con $n_N=0.001$ y $n_D=0.0005$

El conjunto de resultados y conclusiones anteriores se aplican y estudian a continuación sobre un conjunto de funciones base triangulares, por ser éste un conjunto base representativo y clásico en controladores difusos (equivalente a funciones base RBF lineales (2.126), ventanas de Parzen en GRNNs de tipo triangular (figura 2.19) e interpolación *spline* de orden uno o *PWL*) y porque las conformaciones lineales de los tramos de pertenencia difusa son tanto aseQUIblemente analizables (o susceptibles de ser formulados) como implementables.

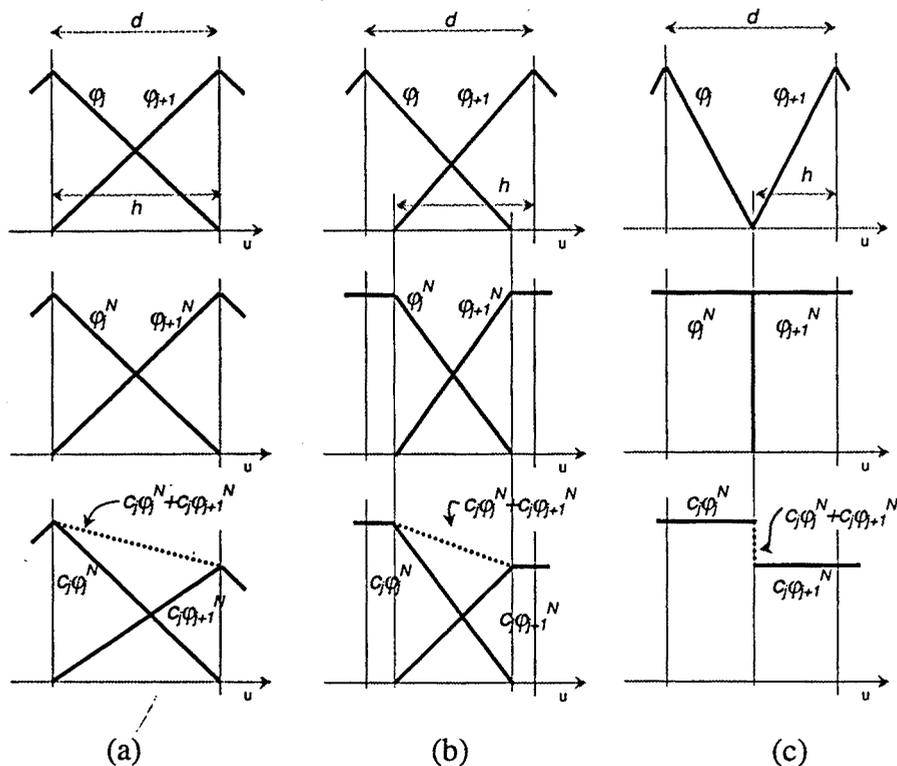


Figura 2.30 Efecto de la normalización sobre dos funciones de pertenencia triangulares.

Se representan, en disposición de columna, las funciones base φ_j y φ_{j+1} , sus versiones normalizadas φ_j^N y φ_{j+1}^N , y escaladas $c_j \varphi_j$ y $c_{j+1} \varphi_{j+1}$, así como la agregación normalizada $c_j \varphi_j^N + c_{j+1} \varphi_{j+1}^N$ (a) caso $h=d$ (b) caso $(d/2) < h < d$ (c) caso $h=(d/2)$

Considérese, para iniciar el estudio, el caso mostrado en la figura 2.30, que representa la interacción debida a la normalización entre dos funciones base triangulares bajo distintos grados de solapamiento, ya que dicho caso modela el comportamiento localizado de interacción entre funciones base adyacentes en una base triangular completa (2.48). Si los parámetros d y $2h$ denotan, respectivamente, la separación entre funciones de pertenencia y la anchura de su soporte, la tríada de figuras 2.30(a), correspondiente al caso $h=d$ constituye un interesante y paradigmático ejemplo en el estudio del efecto de normalización. En efecto, y en

este caso, el grado de solapamiento coincide con la separación entre bases, de forma que la normalización establece una mera identificación entre funciones base y funciones base normalizadas, constituyendo por tanto una operación superflua. Nótese, por otra parte, que este es un ejemplo de destacada plausibilidad lingüística. El caso $h > d$ (que corresponde a una interacción entre más de dos funciones base adyacentes) merecerá un análisis posterior considerando una base completa. Por su parte, la secuencia de figuras 2.30(b), que ilustra el comportamiento ante la normalización de funciones triangulares para el caso $(d/2) < h < d$, muestra cómo el efecto de la normalización mantiene constante el comportamiento de cada función de pertenencia normalizada en los intervalos del universo de discurso en que no existe solapamiento. De modo que dichas funciones base normalizadas φ_j^N y φ_{j+1}^N presentan una pérdida de gradación difusa (como sostiene el trabajo de Zeng y Singh [ZEN94] al advertir la propiedad de *less fuzzility*), lo que resulta en una pérdida de las capacidades de interpolación suave entre modelos locales. Como extrapolación de este comportamiento, el caso frontera $h = (d/2)$ mostrado en 2.30(c) resulta en una supresión completa de la característica de gradación de pertenencia lineal, obteniéndose dos funciones normalizadas que corresponden a conjuntos clásicos y cuya agregación proporciona características de transferencia con discontinuidades de salto evitables, de manera similar a los sistemas difusos analizados en el lema 2.2. Por motivos de continuidad de la operación (2.162), este efecto de retención o de interpolación de orden cero, análogo al descrito en (2.166), se mantendría para el caso impráctico de aislamiento $h < (d/2)$, es decir para un caso con ausencia completa de solapamiento entre funciones de pertenencia, pero en dicho caso se exacerbaría el efecto de la elevada sensibilidad frente a imperfecciones de implementación (2.175). No obstante, y en la línea de razonamientos apuntados previamente, entendemos que estos efectos no deseados no deben atribuirse tanto a la operación de normalización como a la incorrecta distribución de funciones de pertenencia o de base difusas sobre el universo de discurso.

Las propiedades anteriores son extendidas en la representación gráfica de la figura 2.31 para un caso correspondiente a un conjunto de funciones de pertenencia completo sobre el universo de discurso, configuración de funciones base del tipo a considerar en demostraciones de aproximación universal que se tratará en apartados próximos. La base mostrada en 2.31(a) y 2.31(b) corresponde al caso $h = d$, y, como puede comprobarse la base es autonormalizada por construcción, o bien, bajo otra perspectiva, la operación de normalización es redundante. Nótese que la autonormalización es completa, tanto en los niveles máximos de pertenencia, como en la conformación triangular de las funciones de pertenencia. La razonable plausibilidad lingüística de este conjunto base, que incorpora una interacción total entre

funciones de pertenencia adyacentes y que a su vez no incorpora ninguna interacción entre funciones de pertenencia disjuntas, argumenta su amplio uso, si bien que la mayor parte de implementaciones del método incluye la etapa de normalización ([Cap2, NGU95]), a pesar de la condición de autonormalización. Por su parte, y en consonancia con las conclusiones previas respecto a la figura 2.30, la distribución de funciones de pertenencia para $h < d$ representada en 2.31(e) presenta, en su versión normalizada 2.31(f), la esperable -según la figura 2.30 (b) y el comportamiento (2.166)- pérdida de gradación difusa. Obsérvese, empero, que en dicha transformación de funciones de pertenencia triangulares por funciones de pertenencia de tipo trapezoidal no existe un efecto de variación de los máximos niveles de pertenencia.

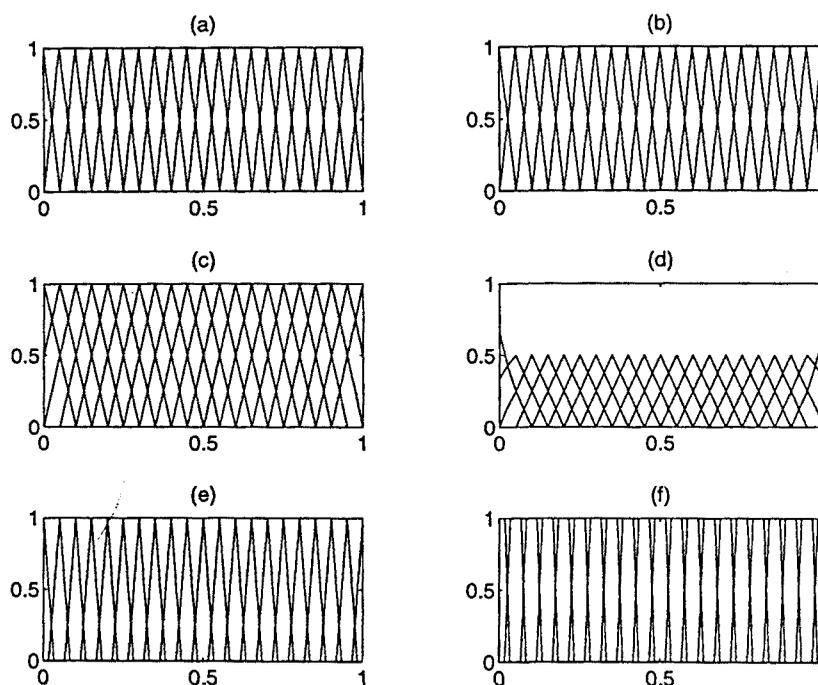


Figura 2.31 Efecto de la normalización sobre una conjunto base B de funciones de pertenencia triangulares. (a) $B|_{h=d}$ (b) $B^N|_{h=d}$ (c) $B|_{h=2d}$ (d) $B^N|_{h=2d}$ (e) $B|_{h < d}$ (f) $B^N|_{h < d}$

La última configuración mostrada en la figura 2.31 (c) corresponde a un caso de solapamiento extendido entre más de dos funciones de pertenencia, al verificarse $h=2d$. Obsérvese que, en este caso, y en general cuando se cumple $h > d$, es decir, cuando el grado de solapamiento conlleva una interacción que no afecta tan sólo a funciones de pertenencia contiguas, el efecto clave de la normalización radica en compensar la interacción en los puntos de nivel máximo mediante una normalización, valga la redundancia, de dichos niveles máximos en función del nivel de interacción, es decir, una ponderación lineal del máximo nivel de pertenencia. Este

aspecto será retomado en una discusión próxima. Anteriormente, cabe destacar que los comportamientos descritos en la discusión previa –figuras 2.30 y 2.31- son directamente extensibles al caso de un conjunto de funciones base multidimensionales. Con el objetivo de ilustrar esta extensión, la figura 2.32(a) representa una distribución regular bidimensional de funciones base, de forma que la función bidimensional puede recuperarse según la agregación normalizada

$$\begin{aligned}
 v(u_1, u_2) &= \sum_{k=1}^n c_k \cdot \varphi_k^N(u_1, u_2) = \frac{\sum_{k=1}^n c_k \cdot \varphi_k(u_1, u_2)}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(u_1, u_2)} = \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} \cdot \varphi_{ij}^N(u_1, u_2) = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} \cdot \varphi_{ij}(u_1, u_2)}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varphi_{ij}^N(u_1, u_2)}
 \end{aligned}
 \tag{2.176}$$

nótese que en la expresión anterior se muestra indistintamente la operación de agregación sobre un índice k asociado al número de funciones base bidimensionales (o relaciones difusas como modelo de reglas difusas) o bien en base a un doble sumatorio sobre índices los i, j –en concordancia con la doble interpretación de la figura 2.12-.

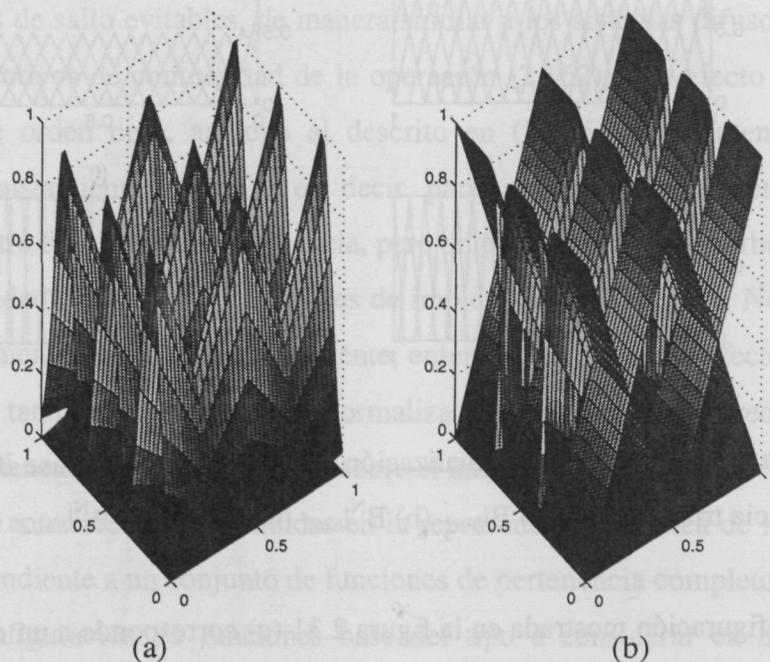


Figura 2.32 Efecto de la normalización sobre una distribución regular de funciones base bidimensionales (a) Representación de $\varphi_{ij}(u_1, u_2)$ (b) Representación de $\varphi_{ij}^N(u_1, u_2)$.

Puede apreciarse en la figura 2.32(a) que la distribución de funciones base presenta unos niveles de gradación y solapamiento que están incorrelados en cada dirección del espacio.

Una de las direcciones del espacio u_1 presenta una distribución autonormalizada, por cumplir $h=d$ en una conformación triangular, mientras que, a su vez, la dirección u_2 del espacio presenta una distribución desequilibrada, dado que el nivel de solapamiento es prácticamente despreciable en la conformación gaussiana de reducida varianza. La obtención de la versión normalizada en base a la transformación no lineal descrita en (2.176) evidencia un comportamiento autonormalizado en la dirección u_1 –de acuerdo con la figura 2.30(a) y figura 2.31(a),(b)- a la vez que un comportamiento de mantenimiento en la dirección u_2 –de acuerdo con las figuras 2.30 (b), (c) y figuras 2.31 (e), (f)-.

Reconsiderando el análisis para el caso $h>d$ mostrado en la figura 2.31 (c), y aunque quepa puntualizar que es un caso lingüísticamente implausible por la elevada interacción entre reglas (aspecto que en un capítulo posterior será interpretado en base a conceptos de filtrado espacial), se ha inferido previamente que el efecto de la normalización no lineal resulta en un efecto de reducción del nivel máximo en los puntos centrales de soporte de las funciones de pertenencia normales. Como conclusión relevante, obsérvese que el efecto de normalización no lineal puede sustituirse, en general, por una ponderación de los parámetros c_k en (2.162), que incluya, por predistorsión, el efecto del solapamiento entre funciones cercanas.

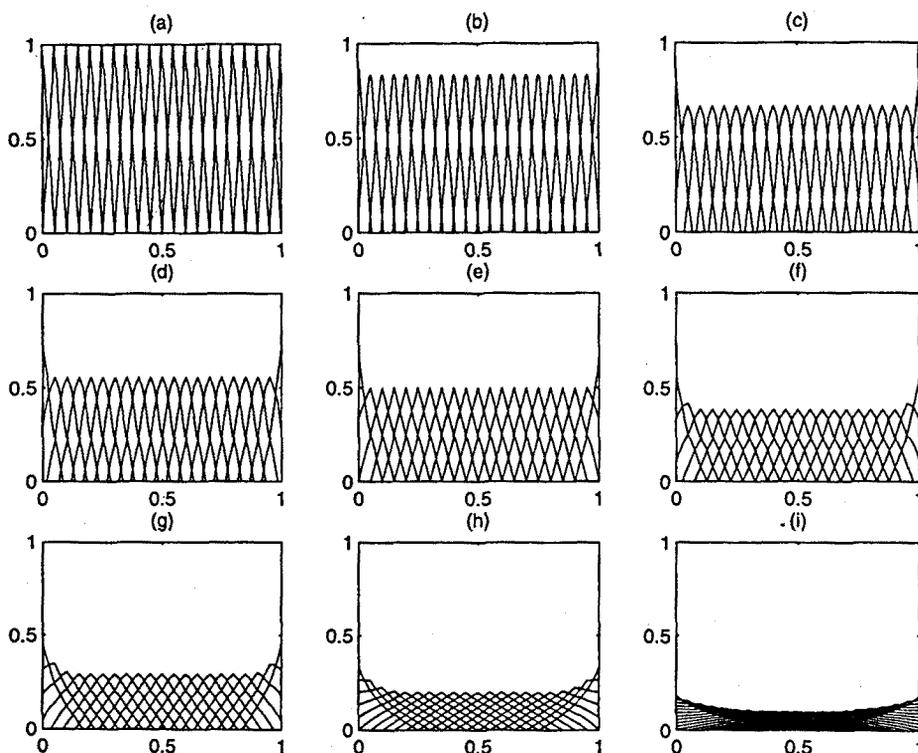


Figura 2.32' Efecto de la normalización sobre una conjunto base B de funciones de pertenencia triangulares con solapamiento $h>d$

(a) $B^N|_{h=d}$ (b) $B^N|_{h=1.12d}$ (c) $B^N|_{h=1.33d}$ (d) $B^N|_{h=1.6d}$ (e) $B^N|_{h=2d}$
(f) $B^N|_{h=2.5d}$ (g) $B^N|_{h=2.33d}$ (h) $B^N|_{h=5d}$ (i) $B^N|_{h=10d}$

En concreto, para el caso de funciones de pertenencia triangulares bajo estudio, la expresión que incluye el factor de predistorsión de pesos de ponderación en función del grado de solapamiento o interacción deviene:

$$c'_k = c_k \cdot \left(\frac{d}{h} \right) \quad (2.177)$$

La figura 2.32' ratifica el comportamiento descrito por (2.177), mostrando el comportamiento ante la operación de normalización de un conjunto de funciones de pertenencia regulares y triangulares con un variación $d < h < 10d$. Obsérvese que el efecto de la normalización, que puede identificarse en este caso como la acción más intuitiva de una operación de normalización, asociada a una variación de niveles máximos, puede ser predistorsionada en este caso mediante el cambio de escala (2.177). Obsérvese que la normalización nunca varía el soporte de las funciones de pertenencia.

Como último comentario al respecto de los resultados anteriores, puede argüirse que la variación de conformación presente tanto en el efecto de pérdida de gradación (*less fuzzylity*) –véase la figura 2.31(f)- como en el efecto mostrado por la figura 2.32', no representa implicaciones fundamentales sobre la capacidad de aproximación funcional de la aproximación (2.162) mientras se mantenga la condición de localidad, resultado que será posteriormente justificado de forma analítica en base al concepto de delta generalizada del siguiente capítulo.

Finalmente, se incluye el estudio del efecto de la normalización en el caso de una base incompleta (por localizada) de funciones de pertenencia triangulares, con el objetivo de evaluar el impacto del efecto sobre los extremos. El comportamiento mostrado por la figura 2.32" ratifica las pautas de variación detectadas en el estudio de la figura 2.31, mientras que a su vez, se pone de manifiesto el efecto de mantenimiento en los extremos, demostrándose un comportamiento límite como el que predice la ecuación (2.174) y una conformación sigmoideal extendida según (2.171) y la definición de la nota 2.4.

Con la intención de reflejar la relevancia del comportamiento en los extremos de la operación de normalización, obsérvese que la agregación simple sin normalización de funciones locales como estructura de aproximación de funciones, adolece, no ya de un comportamiento de *curse of dimensionality*^{2.5} (por explosión combinatorial de la complejidad del problema al aumentar

^{2.5} Maldición de la dimensionalidad

el orden del espacio multidimensional de aproximación), sino de un problema de no acotación del espacio de aproximación sobre el que se define la función (*curse of non-boundness*^{2.6}). En efecto, a pesar de que la función presente un comportamiento constante en los extremos, caso de notable interés práctico, la condición de localidad de las funciones base requiere de una cardinalidad creciente en cuanto a número de funciones base para aproximar la función, número que tiende infinito para funciones definidas sobre un espacio no acotado. Ante esta dificultad, existen distintas soluciones como pueda ser la red neuronal *MLP*, de comportamiento global, las redes *ARBI* descritas por (2.135) que incluyen término afines aditivos de aproximación global, o los modelos difusos *TSK* de orden uno, no incluyendo ninguno de ellos normalización y siendo métodos computacionalmente estables. La aplicación de la operación de normalización sobre cualquier red de agregación local resulta en comportamientos que evitan el número elevado de funciones base en el problema bajo estudio, en virtud del comportamiento constante (2.174), aunque en dicho caso el problema deviene computacionalmente inestable tal como demuestra (2.175) y entendemos que debe ser desconsiderada.

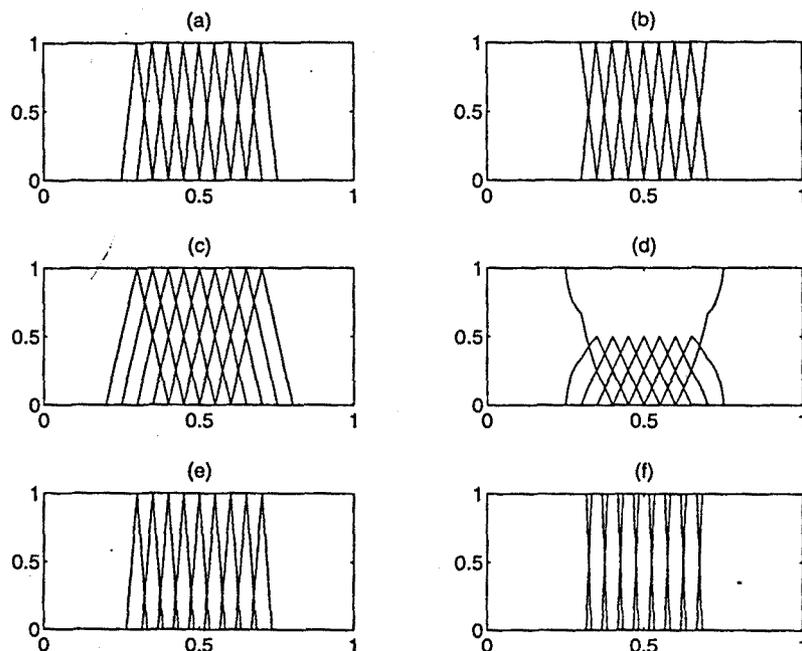


Figura 2.32'' Efecto de la normalización sobre un conjunto base incompleto B de funciones de pertenencia triangulares. (a) $B|_{h=d}$ (b) $B^N|_{h=d}$ (c) $B|_{h=2d}$ (d) $B^N|_{h=2d}$ (e) $B|_{h<d}$ (f) $B^N|_{h<d}$

Comoquiera que el problema de no acotación es, en el límite, un problema teórico, de forma que cualquier aproximación de funciones en ingeniería se plantea sobre un espacio de

^{2.6} Maldición de la no acotación

aproximación acotado (universo de discurso de soporte finito), es decir, no se considera la aproximación de funciones de energía infinita como símil respecto a señales temporales, el problema anterior admite como solución el uso de funciones en los extremos no ya de pertenencia local sino de pertenencia gradual [Cap 7, NGU95]. Esta solución, que aparece de forma implícita en la mayoría de aplicaciones prácticas de control difuso, considera funciones de pertenencia de tipo *s-shape* o *z-shape* en los extremos del universo (acotado) de discurso.

Con el objetivo de concluir el apartado sobre el estudio de los efectos de la operación de normalización se reseñan a continuación un conjunto de reflexiones y argumentos al respecto.

Los efectos fundamentales de la normalización pueden resumirse en tres:

N1) Reducción del nivel máximo de pertenencia en casos de solapamiento que comporte la interacción entre funciones base no estrictamente adyacentes -véase la figura 2.32'-.

N2) Variación de la conformación local de las funciones base, bien sea como una disminución del soporte de gradación difusa -véase la figura 2.31(f)- o como modificación no lineal de la conformación local -véase la figura 2.32'-.

N3) Retención del comportamiento constante estable en los extremos del espacio de aproximación.

Dado que las propiedades **N2** y **N3** son computacionalmente inestables (2.175), cabe plantear como solución al problema de la normalización el uso de funciones base pseudo-trapezoidales, en el sentido de Zeng y Singh [ZEN94] o Wang [WAN95], que serán reconsideradas en un apartado posterior sobre métodos constructivos para la síntesis de controladores difusos, y que son funciones continuas definidas por

$$\Lambda(u; u_a, u_b, u_c, u_d, v_h) = \begin{cases} I(u) & u \in [u_a, u_b) \\ v_h & u \in [u_b, u_c) \\ D(u) & u \in (u_c, u_d] \\ 0 & u = \{u \mid u \in U, u \notin [u_a, u_d]\} \end{cases} \quad (2.178)$$

expresión en la que $u_a \leq u_b \leq u_c \leq u_d$, $I(u) \geq 0$ es una función monótona estrictamente creciente en $[u_a, u_b)$ y $D(u) \geq 0$ es una función monótona estrictamente decreciente en $(u_c, u_d]$. De la anterior definición se deduce que la expresión (2.178) permite representar: 1) funciones base localizadas clásicas del tipo triangular o sigmoidal -presentando un comportamiento propio de bases autonormalizadas-, 2) funciones de conformación lineal o gaussiana con un intervalo no nulo de máxima pertenencia constante sean éstas *locales* -y reproduciendo por tanto el comportamiento de la figura 2.30(b), que aumenta la plausibilidad lingüística del conjunto al

asignar pertenencia máxima al intervalo en que la pertenencia corresponde a una sola base, si bien que de forma estable computacionalmente- o *graduales* –modelando por tanto el efecto de retención en los extremos propio a la normalización, conformando funciones sigmoideas generalizadas, bien que de forma computacionalmente estable-, así como 3) una variación en el máximo nivel de pertenencia –vía el parámetro v_h , lo que permite reproducir el comportamiento de ajuste de nivel máximo de la figura 2.32'-.

Entendemos que la versatilidad de las funciones pseudo-trapezoidales definidas por (2.178) fundamenta la propuesta definitiva de un conjunto de Funciones Base difusas definidas sobre un intervalo Acotado (*Fuzzy Bounded Basis Functions*, **FBBF**, en inglés) formado por funciones pseudo-trapezoidales definidas por (2.178) y que permite eliminar la operación de normalización en cualquier problema de aproximación mediante agregación de funciones base.

Finalmente, y a modo de conclusiones del apartado sobre normalización cabe destacar los siguientes razonamientos puntuales:

- La normalización no es crucial en la recuperación de la función aproximada, dado que la variación de la forma de las funciones base (debido al efecto no lineal de normalización en (2.162)) no es significativa según el concepto de delta multidimensional que será tratado en un apartado posterior.
- Los resultados descritos mantienen su aplicabilidad en modelos tipo TSK de orden uno o superior, ya que en éstos la normalización sólo afecta las características de las funciones base interpoladoras (antecedentes difusos).
- Se remarca la generalidad de los resultados expuestos para funciones base triangulares o gaussianas a cualquier otro tipo de funciones locales.
- La propiedad de localidad espacial de las funciones base convierte un problema de normalización no lineal en un problema de cambio de escala o de normalización de los parámetros de la expansión lineal original (2.162).
- De los comportamientos descritos se infiere la necesidad de solapar adecuadamente las funciones base adyacentes, y no asumir que la operación de normalización fuerce dicha acción, que resulta en un comportamiento computacionalmente inestable (2.175).
- La normalización puede aducirse necesaria en casos de aprendizaje, como corresponde a PNNs o GRNNs (2.115), en que se desconoce la conformación de los nuevos datos, siendo ésta una cuestión práctica asociada al método de aprendizaje y no estructural, pero no así en controladores difusos, en los que existe un conocimiento apriorístico del conjunto de reglas.

Nuestra tesis es que un conocimiento apriorístico de la distribución de reglas considerada en una aplicación específica permite evitar el uso de normalización.

- La consideración de normalización en implementaciones *hardware*, para casos en que el grado de solapamiento es insuficiente, tiene consecuencias negativas –elevada sensibilidad (2.175)- mientras que para casos en que el grado de solapamiento es suficiente, su operación tiende a ser superflua, afirmación esta última que gana predicamento para el caso de una base autonormalizada como la de la figura 2.31 (a).
- Cualquier aproximación funcional obtenida mediante una agregación normalizada (2.162) admite una versión sin normalizar, al considerar un conjunto base **FBBF**, aspecto que tiene obvias implicaciones en cuanto a su implementación *hardware* y que será retomado en el capítulo de implementaciones de controladores difusos.