



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

DEPARTAMENT D'ENGINYERIA ELECTRÒNICA

Diseño Microelectrónico de Controladores para Convertidores Conmutados Continua-Continua

Tesis doctoral presentada
para la obtención del título de
Doctor Ingeniero de Telecomunicación por

Eduard Alarcón Cot

Director:

Dr. Alberto Poveda López

Barcelona, Noviembre de 1999

2.9 Sistemas difusos como aproximadores universales de funciones

2.9.1 Introducción

Los apartados anteriores establecen la equivalencia funcional entre los sistemas difusos y diversas redes de procesamiento paralelo de acción local, lo que dispone una frontera *difusa* entre los paradigmas de aproximación no lineal de los sistemas difusos y las redes neuronales desde el punto de vista estructural, aunque no de aprendizaje o de su interpretación lingüística, y justifica por tanto un estudio unificado de sus características analíticas de aproximación funcional. El subsiguiente estudio llevado a cabo tratando los efectos de la operación de normalización sobre las características analíticas de transferencia entrada-salida permite, por su parte, justificar una versión agregada de la operación de los mismos. El objetivo del presente capítulo es presentar un conjunto de resultados analíticos que demuestran las capacidades de aproximación universal de los sistemas controladores difusos bajo distintas ópticas, enmarcadas fundamentalmente desde la perspectiva de la teoría de sistemas.

2.9.2 Antecedentes sobre las propiedades de aproximación universal

Tras tratar la equivalencia funcional entre los sistemas difusos y diversos sistemas de procesamiento paralelo, y con vistas a demostrar la propiedad común que exhiben estos sistemas de realizar una interpolación o aproximación universal de funciones, se exponen los antecedentes existentes que versan sobre dichos aspectos. La propiedad que presentan los sistemas difusos de ser aproximadores universales ha sido demostrada desde diferentes perspectivas en la literatura especializada, que contiene un número considerable de resultados matemáticos al respecto. A continuación se contextualiza dicha temática con una exposición de las distintas justificaciones.

Desde el advenimiento, a finales de los años ochenta, de los primeros resultados pioneros [STI89], [CYB89] que detectan la verificación de la propiedad de ser aproximadores universales de funciones multidimensionales por parte de las redes neuronales de tipo MLP, hasta la aparición de los primeros resultados equivalentes en el área de los controladores difusos media un lapso de algunos años. Este lapso se justifica por el tiempo que la comunidad científica invierte en interpretar la operación de los sistemas difusos en base a redes de procesamiento paralelo e investigar las características analíticas de transferencia entrada-

salida para dichos sistemas. Por su parte, la necesidad de mostrar resultados concluyentes en dichos aspectos se intuye a la sazón necesaria con el fin de que la comunidad científica del área de Teoría de Control acepte un nuevo paradigma de control, cuyos cimientos son demasiado *lingüísticos*, pero que prelude y demuestra resultados prácticos por sus capacidades de aproximación no lineal. Los anteriores aspectos constituyen el inicio de una enconada pugna por demostrar la capacidad analítica, como aproximador universal, que exhiben los controladores difusos, aunque, como se evidencia en la siguiente recensión, las diversas aproximaciones a la resolución del problema adolecen de ser demostrativas, sin ser constructivas, aspecto que no facilita la síntesis de dichos sistemas difusos.

Los primeros trabajos co-originales [WAN92], [KOS94], [CAS95] que versan sobre las propiedades de aproximación universal de los controladores difusos tienen su origen en el año 1992, pese a su aparición escalonada en la literatura especializada. La propiedad de ser aproximadores universales se refiere, formalmente, a la capacidad de aproximar cualquier función real continua, definida sobre un conjunto compacto, con cualquier grado de precisión. Las investigaciones primigenias de Wang y Mendel en [WAN92] merecerán un tratamiento posterior por ser el origen de una línea de investigación varias veces retomada por otros trabajos.

B. Kosko, en [KOS94], y en una versión aumentada en [Cap 12, NGU95], demuestra la aproximación uniforme de funciones por parte de los sistemas aditivos difusos, estableciendo un símil gráfico de su operación, mostrando, para un caso unidimensional, que cada regla de un controlador Mamdani de antecedentes y consecuentes difusos define una zona (literalmente un parche, *patch*, en inglés) que cubre la función a aproximar. El autor, en virtud de la continuidad de la función a aproximar, aplica el clásico teorema de Cálculo univariable que demuestra la continuidad en un punto u_i de una función dada $v(u)$, si se cumple que $\forall \epsilon, \exists \delta$ tal que $|u - u_i| < \delta \Leftrightarrow |v(u) - v(u_i)| < \epsilon$. En concreto, la asimilación del producto cartesiano de los anteriores intervalos a un *patch* o zona difusa, permite demostrar el comportamiento de aproximación uniforme, que requiere de un número creciente de reglas al decrementar el error de aproximación. Los resultados matemáticos propuestos por Castro [CAS95] siguen una pauta similar a la propuesta anterior, aunque éste extiende los resultados al caso de un espacio multidimensional al extender la demostración basada en conceptos sobre continuidad desde intervalos hasta *bolas* (en el sentido del Cálculo multivariable, véase [MAR87]), implícitamente asignadas en dicho trabajo a relaciones difusas multidimensionales. La generalidad del método de demostración comprende los sistemas difusos de función de pertenencia trapezoidal o triangular y cualquier norma- t como modelo de la implicación

difusa (obsérvese que en el límite la conformación de la función de pertenencia multidimensional siempre está incluida en una *bola* multidimensional –véase el párrafo antes de la figura 2.8-), así como modelos difusos *singleton* o de valor real para las cláusulas difusas consecuentes. Como aspecto notable común a ambas demostraciones, obsérvese que los argumentos de demostración se mantienen para el caso de un sistema difuso de conjuntos antecedentes y consecuentes clásicos, *i.e.* sin gradación, lo que permite concluir la generalidad de la aproximación, aunque sea ésta ilustrativa. Un trabajo ligeramente posterior de Castro y Delgado [CAS96] extiende la línea argumental de [CAS95] al caso genérico de un sistema difuso basado no ya en un conjunto de reglas difusas sino, en general, en una relación difusa –no necesariamente sintetizada como agregación de reglas- como núcleo de conocimiento al que se aplica una regla de inferencia difusa. La generalidad del método entendemos que aparece en detrimento de su aplicabilidad.

Por su parte, la contribución principal del trabajo original de Wang y Mendel en [WAN92] consiste, más allá de constituir uno de los primeros trabajos que plantea el concepto de funciones base difusas, en considerar el bien establecido, aunque sofisticado (por poco intuitivo), teorema de Stone-Weierstraß^{2.7} [COT90] de Análisis Matemático con el fin de demostrar las capacidades de aproximación universal de determinados sistemas difusos. Bajo la restricción de considerar funciones gaussianas e implicaciones de tipo producto –Larsen, (2.37)-, particularización equivalente a la de la identificación RBF-difusa de Jang [JAN93a], Wang obtiene analíticamente un comportamiento de *álgebra* para la combinación lineal de dichas funciones base. La crítica ante esta demostración es el carácter *ciego* de la misma, dado que solo proporciona una demostración de existencia de una solución de aproximación universal, pero no proporciona las pautas de síntesis de dicha aproximación, ya que es una demostración constructiva.

La aplicación del teorema de Stone-Weierstraß a redes de procesado *feedforward* paralelo no es particular al anterior trabajo, sino que de hecho es una extensión interdisciplinar respecto de los trabajos sobre aproximación universal de las redes MLP (2.151)-(2.152), aspecto que

^{2.7} *Teorema de Stone-Weierstraß*: Sea Z un conjunto de funciones reales continuas definidas sobre un conjunto compacto $U \subset \mathcal{R}^n$ ($n \geq 1$). Si se cumple que 1) Z es un álgebra, *i.e.* el conjunto Z deviene cerrado bajo las operaciones de adición, producto y producto por un escalar, 2) Z separa puntos en U , *i.e.*, para cada $x, y \in U$, $x \neq y$ existe una función $f \in Z$ de forma que $f(x) \neq f(y)$, y 3) Z no desvanece en ningún punto de U , *i.e.* para cada $x \in U$ existe una función $f \in Z$ de forma que $f(x) \neq 0$; entonces Z consiste en todas las funciones reales continuas en U , *i.e.* (Z, d_∞) es denso en $(C[U], d_\infty)$

justifica un inciso que aborde dicha área de investigación, repleta de justificaciones analíticas alejadas de su aplicación en ingeniería.

Uno de los primeros trabajos, de carácter fuertemente matemático, que justifican la aproximación universal de las redes *feedforward* de tipo perceptrón multicapa es el firmado por Stichcombe y White [STI89], quienes detectan la aplicabilidad del teorema de Stone-Weierstraß, y demuestran, en base a conceptos de *densidad* —en el sentido analítico— que dicho teorema es aplicable a redes que contengan un número suficientemente elevado de elementos de procesado en paralelo. Los autores sostienen que dicha propiedad es esencial para demostrar la aproximación universal, frente a la forma específica de las funciones de activación, que no constituye una propiedad crucial en el proceso de aproximación. Este aspecto justificaría su extrapolación a funciones de base radial, y, por ende, a sistemas difusos. La demostración se completa para una red unicapa (como correspondería a la estructura de redes RBF-difusas), de forma que, por obvia extensión, un corolario demuestra la aproximación para redes multicapa MLP. Nótese que la generalidad de la demostración basada en el teorema de la nota 2.7, las bases de cuya aplicación a redes de procesado se sientan en [COT90], aparece en detrimento de su utilidad. En concreto, este teorema puede aplicarse incluso a redes cuyos nodos no lineales de procesado incluyeran funciones polinómicas, cuya acción no puede clasificarse de local (RBF) ni gradual (MLP), tal como se propone en [SHI95] en el contexto de una red conexionista polinómica cuyas capacidades de aproximación se demuestran mediante el corolario del teorema de Stone-Weierstraß conocido como *teorema generalizado de aproximación polinómica de Weierstraß* [LOR80]. La versatilidad y generalidad de este teorema justifican su aplicación en una miríada de trabajos, ejemplificada en su reciente aplicación a redes neuronales oscilatorias [GEL99].

Reanudando el estudio de las características de aproximación de los controladores difusos, tras la somera descripción sobre el contenido de [WAN92], [KOS94], [CAS95], cabe describir la propuesta de H. Ying [YIN93], aunque entendemos que su importancia radica, más que en el poco adecuado enfoque de su demostración, en ser la primera propuesta del único autor que posteriormente abordará las características de aproximación universal de los controladores TSK, y que serán descritas en un apartado posterior. Como aspectos notables de la demostración de Ying, destaca la generalidad de la misma, que no está sujeta a las restricciones impuestas por Wang y Mendel [WNA92], ya que el considerar una equipartición uniforme del universo de discurso permite considerar cualquier función de pertenencia de antecedentes, y el considerar conjuntos consecuentes *singleton* reduce el tipo de controladores

a los controladores de agregación local. Las hipótesis de Ying parten también de un método de defuzzyficación generalizado –en concreto la defuzzyficación BADD, (2.85)-, aspecto que demuestra, en virtud del lema 2.3 del presente trabajo, la validez de la demostración para el caso de controladores difusos formados por conjuntos clásicos, condición que también cumplen inherentemente las demostraciones de Castro [CAS95] y Kosko [KOS94], a diferencia de la demostración de Wang y Mendel [WAN92]. Cabe incidir en este aspecto, dado que la generalidad de este conjunto de demostraciones no recae en propiedades específicas de los sistemas difusos que no posean los sistemas expertos clásicos. Pese a que la demostración de Ying no es constructiva, este autor aduce cuáles son los mecanismos subyacentes de aproximación, al argumentar que los controladores difusos son capaces de aproximar cualquier polinomio multidimensional (con métodos de Cálculo equivalentes a los utilizados en [CAS95], [KOS94]) y que, por tanto, y gracias al *teorema generalizado de aproximación polinómica de Weierstraß* estos presentan la propiedad de aproximación universal. La perífrasis demostrativa de Ying propuesta en [YIN93], que mantiene una estrecha relación con el teorema de Lauricella –véase [FER98]- que pertenece al área de la teoría clásica de aproximación funcional, conduce a unos resultados muy conservadores en cuanto a las cotas de error que puede proporcionar la aproximación difusa, a pesar de constituir los primeros resultados analíticos al respecto.

Temporalmente correlativos a las anteriores demostraciones, y a diferencia de las mismas, los trabajos debidos a Zeng y Singh [ZEN94], [ZEN95], [ZEN96a] proporcionan un conjunto de resultados claramente constructivos, que serán posteriormente retomados en un apartado del presente trabajo, aunque se describen en este punto por proporcionar un carácter autocontenido al apartado. En [ZEN94], los autores demuestran las capacidades básicas de aproximación de los controladores difusos algebraicos –i.e. sin dinámica-, para el caso de funciones escalares unidimensionales o SISO, partiendo del concepto de funciones base difusas de Wang y Mendel [WAN92], y asignando, en virtud de la localidad de las mismas, el valor de la función a aproximar al peso de ponderación lineal. Extienden estas capacidades de los controladores difusos algebraicos a la característica de aproximación uniforme sobre todo el intervalo de aproximación y, posteriormente, considerando una mallado más preciso, demuestran, respectivamente, las propiedades de aproximación uniforme y universal. Zeng y Singh extienden formalmente los resultados anteriores al caso de una función vectorial sobre un universo de discurso multidimensional, o aproximación MIMO, en [ZEN95], demostrando implícitamente que la progresiva subdivisión del espacio de aproximación en relaciones difusas locales, asociadas a muestras de la función multidimensional a aproximar, conduce a

la propiedad de convergencia uniforme. Según esta interpretación, el incremento del número de muestras disponibles de la función a aproximar mejora dicha aproximación, lo que argumenta la aproximación uniforme exacta para el caso de un conocimiento apriorístico de la función (e.g. si se dispone de su expresión analítica). Los anteriores resultados son complementados en [ZEN96a] con una estimación sobre las cotas de error en función de la conformación de las funciones de pertenencia de las reglas difusas, cotas que devienen mucho menos conservadoras que las proporcionadas por [YIN93]. En relación con dichos trabajos de Zeng y Singh, y a pesar de su carácter determinante, destaca la crítica que éstos suscitan –entendemos que inapropiada- y debida a Watkins [WAT96a], quien invalida el concepto de función base difusa y aduce, como argumento, que cualquier función puede ser *exactamente* representada por un sistemas difuso lo que desacredita el estudio de las propiedades de *aproximación* de dichos sistemas. Según Watkins, basta considerar la definición de un conjunto difuso con tanta complejidad como la función a aproximar, de modo que el uso de una o dos reglas recupera de forma exacta dicha función. Como respuesta de los autores originales Zeng y Singh [WAT96a], éstos invalidan el modelo –supuestamente- difuso propuesto por Watkins, justificando que no es independiente del modelo a aproximar (obsérvese que de hecho es totalmente dependiente), como correspondería a un modelo de regresión difusa, y que no es capaz de incorporar información lingüística (modelable por funciones *base* cuya conformación no es precisa sino aproximada). Parece obvio, ante esta discusión, que el disponer directamente de la función deseada no justifica el uso de un modelo difuso para su aproximación –o implementación-. La anterior línea de análisis de los controladores difusos, que considera no tanto una *aproximación* como una *reproducción* funcional aparece asimismo en la propuesta de Bauer *et al* [Cap. 5, NGU95], aunque no son considerados conjuntos antecedentes que impliquen la reproducción de la función original como en [WAT96a] sino que, aprovechando la generalidad del modelo consecuente de salida en sistemas difusos Takagi-Sugeno generalizados, proponen considerar directamente la función objetivo como modelo consecuente, lo que comporta una reproducción mediante una sola regla–supuestamente- difusa.

Por último, en el marco de las analogías entre métodos de aproximación funcional descritas en apartados precedentes, diversos trabajos ejemplifican estudios sobre las propiedades analíticas de aproximación de dichos métodos, y constituyen por tanto antecedentes para los resultados del presente trabajo. Destaca el reciente trabajo, firmado por Mao *et al* [MAO97], que engloba a las demostraciones anteriores sobre las propiedades de aproximación de sistemas difusos, en base a conceptos más afines a la teoría de *wavelets* que a los sistemas difusos. Los

autores demuestran que la adición de *traslaciones* y *dilaciones* (o escalados) de una función local fija, interpretable como un caso particular de (2.104) o (2.161), resulta en la propiedad de aproximación universal, basándose en la acción local y generalizando el resultado, por tanto, a cualquier tipo de función de pertenencia local y a implicaciones locales. Destaca, por su parte, el comentario de Ferreira [FER98], quien, en base a antiguos resultados de Wiener, demuestra que la condición para que una combinación agregada –unidimensional– del tipo (2.122) sea uniformemente convergente en un problema de aproximación es que la transformada de Fourier de la función base no contenga ceros. Desafortunadamente, los resultados de Wiener son tan sólo demostrativos, que no constructivos, lo que impide aplicar dicho teorema a cuestiones que no planteen el problema de la existencia de solución. Ambos enfoques son afines a parte del trabajo desarrollado de forma paralela en la presente tesis y serán abordados en apartados subsiguientes.

En el contexto de las analogías consideradas, mención aparte merece el temprano trabajo de Poggio y Girosi [GIR89], quienes demuestran las propiedades de unicidad de mejor aproximación para las redes RBF, y que son, gracias a las justificaciones de capítulos anteriores, extensibles a las redes de agregación local (2.104).

La relevancia de sus resultados no ha sido aplicada a los sistemas difusos, si bien que los principios clave de dicho trabajo son retomados en [WIL95] para demostrar la aproximación de redes de tipos MLP, bajo la restricción de considerar un caso SISO de capa oculta única, considerando conformaciones de funciones locales mediante la agregación de funciones sigmoidales generalizadas, de modo equivalente a la demostración de Cybenko [CYB89], citada en un apartado anterior, y cuya extensión definitiva a funciones tipo MLP para el caso multidimensional y con funciones sigmoidales generalizadas es presentada por Chen y Chen en [CHE95c]. Los resultados anteriores, no obstante, se fundamentan en la conformación de funciones locales, que no es connatural a las redes MLP, y que, en general, no modela adecuadamente la operación de dichas redes, constituyendo una condición necesaria pero no suficiente de aproximación universal. Los propios Chen y Chen, en un artículo simultáneo [CHE95a], reconsideran el trabajo original de [GIR89], aplicado a las redes RBF, realizando un análisis con detalle del efecto de la conformación de las funciones base radiales.

2.9.3 Sobre las propiedades de Aproximación Universal de Funciones

A pesar de las múltiples alternativas al estudio de las capacidades analíticas y de aproximación de los sistemas difusos, entendemos que cabe extender las investigaciones en

dicho ámbito, con el fin de establecer un vínculo entre las fundadas capacidades analíticas de dichos sistemas difusos y su aplicabilidad, y de este modo reducir el escepticismo de la comunidad de Teoría de Control (debido, en parte, a la considerable diferencia en cuanto a madurez de resultados entre la descripción lingüística de los sistemas difusos y los modelos matemáticos propios a la teoría de control de sistemas dinámicos). En este sentido, el presente trabajo propone un camino no tanto lingüístico como analítico, si bien que no *ciego* en el sentido matemático, en la interpretación de los controladores difusos con el fin ulterior de derivar un método analítico de síntesis de controladores difusos.

En este apartado se presentan tres interpretaciones alternativas, si bien que interrelacionadas, sobre el estudio de las propiedades de aproximación de los sistemas (difusos) de agregación local, de las que no tan solo se deriva la propiedad de aproximación universal, sino que se extraen diversas conclusiones de índole teórico y práctico. A diferencia de las demostraciones teóricas que han sido objeto de descripción en el apartado precedente, y que se basan en conceptos de densidad de espacios métricos y el teorema de Stone-Weierstraß, aplicable a una amplia variedad de sistemas de aproximación (entre los que se cuentan la aproximación polinómica, las redes MLP, las redes RBF, los sistemas difusos y los sistemas expertos clásicos), se pretende extraer conclusiones sobre las características específicas de aproximación que exhiben los sistemas de agregación local, que engloban los sistemas difusos y las redes RBF.

La primera interpretación y descripción se fundamenta en conceptos de espacios de Hilbert y la noción de base ortogonal en un espacio de aproximación, interpretación que permite concluir la propiedad de aproximación *óptima* para sistemas de agregación local, condición que no cumplen las redes de tipo MLP, a pesar de que ambas son redes de aproximación universal, en virtud del teorema de Stone-Weierstraß. La segunda interpretación relaja parte de las hipótesis sobre ortogonalidad, y auspiciada por una perspectiva de teoría de sistemas, permite extraer conclusiones sobre la influencia de la forma de la función base local. Por su parte, la tercera y última interpretación, además de relajar las hipótesis sobre ortogonalidad y estar enmarcada en la teoría de sistemas, permite inferir resultados analíticos de interés práctico en base a una interpretación frecuencial y de reconstrucción de señal espacial muestreada.

Como paso preliminar a la posterior presentación de resultados, considérese la reformulación de las expresiones que expresan la operación de un controlador difuso de agregación local, (2.104), en su versión normalizada, y la operación de una red RBF (2.122), ambas

reinterpretadas en base a un indexado múltiple sobre cada dimensión en lugar de un indexado simple sobre todo el espacio multidimensional:

$$v = f(\mathbf{u}) = \sum_{l_1=1}^{M_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{M_n} v_C^{l_1, \dots, l_n} \cdot \mu_{R^{l_1, \dots, l_n}}(\mathbf{u}) \quad (2.179)$$

$$y = f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} \lambda_{i_1, \dots, i_n} \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i_1, \dots, i_n}\|) \quad (2.180)$$

Dichas expresiones, que pueden, por su parte, considerarse extensibles a la operación del resto de sistemas análogos a las redes RBF y los sistemas difusos, según los paralelismos expuestos en el apartado 2., permiten establecer una relación directa con los resultados que a continuación se presentan.

2.9.4 Existencia y unicidad de la aproximación óptima de una función no lineal multidimensional mediante sistemas difusos de agregación local. Proyección en espacios de Hilbert

Considérese, para iniciar el estudio, el problema teórico de aproximación de una función escalar univariable o función real de variable real (correspondiente a control SISO), definida en un cierto intervalo $I=[a,b]$:

$$f_{NL}(x) : I \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \quad (2.181)$$

La aproximación de una función dada f_{NL} , en general no lineal, es un problema ubicuo en casos de ajuste o síntesis de modelos matemáticos. Según conceptos de teoría de análisis matemático, una función definida sobre un espacio abstracto (en particular, una señal temporal) es interpretable como vector de dimensión infinita, y por tanto está definida sobre un espacio vectorial. Se considera un *espacio euclideo* a aquel espacio vectorial dotado de *producto escalar* (operación definida sobre un conjunto de axiomas, véase [YEB91]). En base al producto escalar es posible definir tanto una *norma* para un elemento dado del espacio euclideo como una *distancia* entre dos elementos del mismo, de forma que éste deviene un espacio *métrico* y por tanto admite interpretaciones propias de espacios topológicos. Como extensión del concepto de espacio euclideo (aunque ambos conceptos son equivalentes para dimensionalidad finita), se define un *espacio de Hilbert* como aquel espacio dotado de

producto escalar y completo para la métrica correspondiente. La noción de completitud, definida formalmente en [YEB91], está vinculada a la convergencia de cualquier *sucesión de Cauchy* sobre un espacio, siendo una sucesión de Cauchy aquella que, resultando convergente a un elemento límite, no incluye dicho límite en la definición de convergencia. En base a los anteriores conceptos, puede demostrarse que diversos espacios significativos, como \mathbf{R}^n y \mathbf{C}^n , son espacios de Hilbert, aunque, por su importancia en el contexto de ingeniería, destaca la condición de espacio de Hilbert que detenta el espacio $L^2(a,b)$ (espacio de funciones de cuadrado Lebesgue-integrable)^{2.7}. Dado que toda función continua o continua a tramos (como corresponde al tipo de funciones consideradas en problemas de control) es Riemann-integrable y por tanto es Lebesgue-integrable, los resultados genéricos obtenidos en el presente apartado para espacios de Hilbert son aplicables a dicha familia de funciones.

Partiendo de los anteriores aspectos teóricos, y retomando el problema de la aproximación de la función (2.181), cabe explorar una solución a dicho problema en forma de combinación lineal de funciones básicas o sencillas (polinomios, señales trigonométricas,...), que engendran un subespacio vectorial, según:

$$\hat{f}_{NL}(x) = a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) \quad (2.182)$$

Supuesta f_{NL} (2.181) conocida en todos los puntos del intervalo I , el objetivo del problema de aproximación es la obtención de una función aproximada que se ajuste a la función original, de forma que el error de aproximación sea mínimo, es decir:

^{2.7} Se designa por $L^p(I)$ al conjunto de (clases de) funciones f medibles y tales que $|f|^p$ es Lebesgue-integrable, de forma que, para $1 \leq p < \infty$, se tiene:

$$L^p(I) = \{ f \text{ medible en el intervalo } I, \int_I |f(x)|^p dx \leq +\infty \}$$

El concepto de integral de Lebesgue como generalización de la integral clásica de Riemann aparece descrito en [YEB91]. Cabe citar, no obstante, que la importancia de la integral de Lebesgue es más teórica que práctica; en este sentido, es posible establecer una analogía entre la relación existente entre las funciones integrables según Riemann y aquellas funciones integrables según Lebesgue con la relación existente entre números reales y número racionales.

Considerando el caso particular de interés práctico $p=2$ (que corresponde, entre otros casos, al espacio de señales temporales de energía finita), la norma del espacio $L^2(I)$ de las funciones de cuadrado integrable puede introducirse mediante el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x)g(x)dx$$

$$\hat{f}_{NL}(x) \equiv f_{NL}(x) \quad \forall x \in I \Leftrightarrow \quad (2.183)$$

$$\Leftrightarrow \hat{f}_{NL}(x) - f_{NL}(x) = e(x) \equiv 0 \quad \forall x \in I \quad (2.183)$$

Nótese que en la anterior descripción, y como extrapolación del caso discreto en que sólo se conoce la función f_{NL} en un conjunto finito de puntos del intervalo I , es posible interpretar las relaciones (2.183) como relaciones entre vectores de infinitas componentes, vectores pertenecientes a un espacio de Hilbert de funciones. Una descripción formal de la anterior idea expresada en (2.183) requiere del concepto previamente citado de norma en un espacio vectorial (en este caso infinito-dimensional), ligado al concepto de distancia, -véase [FIO90]-, de forma que (2.183) deviene:

$$\min d(f_{NL}, \hat{f}_{NL}) = \min \|f_{NL} - \hat{f}_{NL}\| = \min \|e\| \quad (2.184)$$

La anterior expresión, que constituye el planteamiento del problema de aproximación, puede considerarse para cualquier definición posible de norma en un espacio de Hilbert. No obstante, el conjunto de normas más frecuentemente consideradas pertenece a la familia

$$\|f\|_{p,w} = \left[\int_a^b |f(x)|^p w(x) dx \right]^{1/p} \quad (2.185)$$

siendo $w(x)$ una función continua y estrictamente positiva en $[a,b]$ denominada función peso. De entre las posibles normas de la familia anterior, destaca, por ser especialmente tratable matemáticamente y aparecer en problemas de índole teórico y práctico, la norma euclídea (2.186) que particulariza la expresión anterior para $p=2$:

$$\|f\|_{2,w} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx} \quad (2.186)$$

expresión que también podría derivarse de la definición de producto escalar de la nota al pie de página 2.7. La composición de la norma (2.186) sobre la expresión (2.184) conduce a la formulación del denominado problema de mínimos cuadrados:

$$\min \|e\|_{2,w} = \min \sqrt{\int_a^b |e(x)|^2 w(x) dx} \quad (2.187)$$

Entre otros resultados de carácter geométrico sobre espacios de Hilbert, destaca, por su relevancia, el *teorema de proyección* o descomposición ortogonal, cuya aplicación permite resolver el problema de aproximación funcional descrito por la expresión anterior. Dicho teorema se fundamenta en resultados teóricos que aseguran la existencia y unicidad de un vector de norma mínima (vector o función minimizante) para un conjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert.

En efecto, asociado a los conceptos de norma y distancia en un espacio euclideo, se sitúa el concepto de producto escalar entre dos funciones –como extensión del concepto homónimo aplicado a vectores–, del que se deriva la condición de *ortogonalidad* entre dos funciones correspondiente al caso de un producto escalar nulo entre las mismas. En esencia, el concepto de funciones ortogonales es una extensión del concepto de vectores ortogonales.

En base a los aspectos anteriores, el teorema de proyección se enuncia como sigue : Dado un conjunto de funciones (vectores) $\{\varphi_k(x), 1 \leq k \leq m\}$ ortogonales y no nulos en un espacio de Hilbert X , la mejor aproximación de un elemento $f_{NL} \in X$ mediante una combinación lineal de $\varphi_k(x)$,

$$\hat{f}_{NL}(x) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x) \cong f_{NL}(x) \quad (2.188)$$

viene determinada por la proyección \hat{f}_{NL} de f_{NL} sobre el subespacio engendrado por $\varphi_k(x)$, de forma que la función-error (vector-error) sea ortogonal a dicho subespacio, cumpliéndose, por tanto:

$$\min \left\| f_{NL} - \hat{f}_{NL} \right\|_{2,w}^2 \Leftrightarrow \quad (2.189)$$

$$\langle \hat{f}_{NL}(x), \varphi_l(x) \rangle = \langle f_{NL}(x), \varphi_l(x) \rangle \quad l = 0, 1, \dots, m$$

La interpretación gráfica de la figura 2.33 permite razonar los resultados anteriores en base a un símil geométrico o topológico. Efectivamente, la ortogonalidad (*perpendicularidad*) del vector error respecto del subespacio (*plano*) generado por los vectores base ortogonales corresponde a la resolución del problema de aproximación, y viene formulado por (2.189).

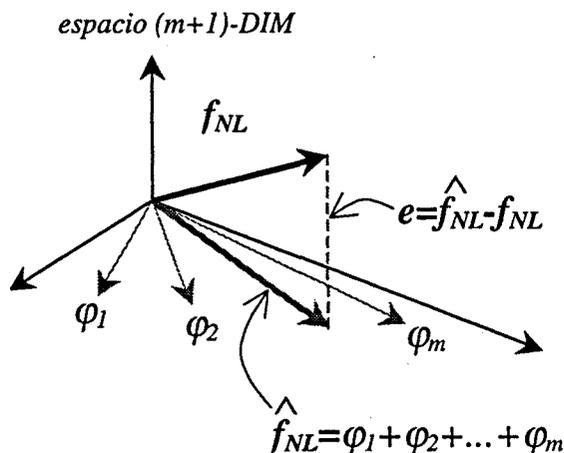


Figura 2.33 Interpretación geométrica del teorema de proyección en espacios de Hilbert.

La resolución del conjunto de m ecuaciones (2.189), denominadas *ecuaciones normales*, soluciona, en general, el problema de minimización del error de aproximación. Considerando la particularización del error cuadrático (2.187) asociado al producto escalar de la nota 2.7, el conjunto de ecuaciones normales resulta en:

$$\int_a^b \hat{f}_{NL}(x) \varphi_l(x) w(x) dx = \sum_{k=0}^m a_k \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_l(x) w(x) dx \quad (2.190)$$

$$= \int_a^b f_{NL}(x) \varphi_l(x) w(x) dx \quad l = 0, 1, \dots, m.$$

La condición de ortogonalidad entre funciones base permite resolver de forma directa el anterior conjunto de ecuaciones normales, independizando el efecto de cada una de ellas y obteniéndose directamente a_k , denominados *coeficientes de Fourier* de f_{NL} respecto a φ_k que resuelven de forma óptima el problema de aproximación mediante la expresión (2.191):

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_l(x) w(x) dx = 0 \Leftrightarrow l \neq k$$

$$a_l = \frac{\int_a^b f_{NL}(x) \varphi_l(x) w(x) dx}{\int_a^b |\varphi_l(x)|^2 w(x) dx} \quad l = 0, 1, \dots, m \quad (2.191)$$

La relevancia de la anterior resolución del problema de aproximación mediante una combinación lineal de funciones base ortogonales no reside tan sólo en la condición de existencia y unicidad de la solución óptima, o en la resolución directa de dicha solución mediante expresiones cerradas (2.191), sino que, en base al *Teorema de Riesz-Fischer* –véase [YEB91]-, se tiene que, dada una sucesión ortogonal de funciones base $\varphi_k(x)$ y una función f_{NL} , la serie de Fourier de f_{NL} respecto a $\varphi_k(x)$ converge a f_{NL} , i.e.:

$$f_{NL}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (2.192)$$

expresión denominada *desarrollo* o *expansión ortogonal* de Fourier.

La generalización de las anteriores derivaciones matemáticas para el caso de una función escalar definida sobre un espacio multidimensional de entrada (correspondiente a control MISO):

$$f_{NL}(x_1, \dots, x_n) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R} \quad (2.193)$$

permite presentar modelos matemáticos para los sistemas difusos de agregación local y métodos equivalentes. En efecto, una solución plausible al problema multidimensional de aproximación, cimentada en los resultados sobre espacios de Hilbert, que son aplicables dado que la función (2.193) pertenece a un espacio vectorial, se plantea como una combinación lineal de funciones base multidimensionales que aproxima la función original.

$$\hat{f}_{NL}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \dots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1, \dots, k_n} \varphi_{k_1, \dots, k_n}(x_1, \dots, x_n) \cong f_{NL}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.194)$$

Obsérvese que la dimensionalidad del problema crece, y particularizando la complejidad o granularidad en cada dimensión del espacio multidimensional a un valor común, ésta deviene:

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n \xrightarrow{m_i=m} m^n \quad (2.195)$$

En la anterior expresión se observa la explosión en complejidad del problema de aproximación funcional multidimensional previamente acuñada como *curse of dimensionality*, que no es propia a una red RBF o a un sistema difuso basado en reglas, sino connatural a cualquier problema de aproximación multidimensional. Los resultados obtenidos para espacios de Hilbert en cuanto al uso del teorema de proyección como solución al problema de aproximación formulado como un problema de minimización de error cuadrático son extensibles al caso de funciones multidimensionales. De suerte que la condición de ortogonalidad del error respecto al subespacio vectorial engendrado por las funciones base requiere la igualdad de productos escalares entre la función aproximada y la función a aproximar respecto del conjunto de funciones base, resultando en

$$\langle \hat{f}_{NL}(x_1, \dots, x_n), \varphi_{l_1, \dots, l_n}(x_1, \dots, x_n) \rangle = \langle f_{NL}(x_1, \dots, x_n), \varphi_{l_1, \dots, l_n}(x_1, \dots, x_n) \rangle \quad \begin{cases} l_1 = 0, 1, \dots, m_1 \\ \dots \\ l_n = 0, 1, \dots, m_n \end{cases} \quad (2.196)$$

Particularizando el conjunto de $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ ecuaciones anteriores para la versión multidimensional del producto escalar propio a las funciones $L^2(a, b)$, y considerando la aproximación mediante agregación linealmente ponderada descrita por (2.194), se obtiene el conjunto de *ecuaciones normales multidimensionales*:

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \hat{f}_{NL}(x_1, \dots, x_n) \cdot \varphi_{l_1, \dots, l_n}(x_1, \dots, x_n) \cdot w(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n = \\ & = \sum_{k_1=0}^{m_1} \dots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1, \dots, k_n} \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \varphi_{k_1, \dots, k_n}(x_1, \dots, x_n) \cdot \varphi_{l_1, \dots, l_n}(x_1, \dots, x_n) \cdot w(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n = \\ & = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f_{NL}(x_1, \dots, x_n) \cdot \varphi_{l_1, \dots, l_n}(x_1, \dots, x_n) \cdot w(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n \end{aligned} \quad \begin{cases} l_1 = 0, 1, \dots, m_1 \\ \dots \\ l_n = 0, 1, \dots, m_n \end{cases} \quad (2.197)$$

En virtud de la ortogonalidad de las funciones base que engendran el subespacio vectorial de aproximación multidimensional, cuya formulación analítica requiere la anulación del producto escalar multidimensional entre funciones base multidimensionales distintas:

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \varphi_{k_1, \dots, k_n}(x_1, \dots, x_n) \cdot \varphi_{l_1, \dots, l_n}(x_1, \dots, x_n) \cdot w(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n = 0 \quad (2.198)$$

$$l_i \neq k_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

la resolución del conjunto de ecuaciones descrito por (2.197), que soluciona el problema de aproximación, requiere de la resolución del conjunto de $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ independientes que resulta en la obtención directa de los parámetros de ponderación lineal del desarrollo original (2.194):

$$a_{k_1, \dots, k_n} = \frac{\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f_{NL}(x_1, \dots, x_n) \cdot \varphi_{l_1, \dots, l_n}(x_1, \dots, x_n) \cdot w(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n}{\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} |\varphi_{l_1, \dots, l_n}(x_1, \dots, x_n)|^2 \cdot w(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n} \quad \begin{cases} l_1 = 0, 1, \dots, m_1 \\ \dots \\ l_n = 0, 1, \dots, m_n \end{cases} \quad (2.199)$$

Finalmente, como extensión de las conclusiones sobre la convergencia de la serie (2.192), puede concluirse que el siguiente desarrollo o expansión ortogonal de Fourier multidimensional

$$f_{NL}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_n} \varphi_{k_1, \dots, k_n}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.200)$$

presenta la propiedad de ser la solución óptima al problema de aproximación, resoluble en base al conjunto de ecuaciones (2.199), y que presenta asimismo convergencia uniforme a la función original. Nótese que, en virtud de la expresión (2.200), la descomposición ortogonal multidimensional presenta la propiedad de aproximación universal.

La interpretación de los resultados anteriores, con el fin de su aplicabilidad posterior, se enriquece con la interpretación del concepto de funciones base ortogonal.

Existen tipos clásicos matemáticos de funciones base que constituyen una base ortogonal y que resuelven el problema de aproximación polinómica partiendo del teorema de proyección

en espacios de Hilbert. En concreto, la familia de polinomios de Legendre (ortogonales con respecto al producto escalar en (2.191) con función peso unitaria) y la familia de polinomios de Tchebycheff (ortogonales con respecto al producto escalar en (2.191) con función peso $w(x)=(1-x^2)^{-1/2}$) constituyen dos tipos de conjuntos ortogonales polinómicos usualmente considerados en teoría de aproximación polinómica.

Otros caso particular de la expresión (2.192), más afín al área de teoría de sistemas, es la expansión en serie ortogonal sinusoidal de Fourier unidimensional con funciones base trigonométricas y su versión truncada, correspondiente a (2.188). Dicha expansión en serie, que conduce a una interpretación frecuencial de una señal temporal, está constituida por un conjunto de funciones base ortogonales en virtud de su *localidad* frecuencial. Nótese, no obstante, que la incorrelación u ortogonalidad frecuencial encuentra un comportamiento dual en la incorrelación u ortogonalidad temporal, asociada a un comportamiento *local* temporal. Estos aspectos duales fundamentan los sistemas de telecomunicación por multiplexación frecuencial FDM (*frequency division multiplexing*, en inglés) junto a los sistemas de telecomunicación por multiplexación temporal TDM (*time division multiplexing*, en inglés).

Si se extiende la noción de expansión en serie de Fourier sinusoidal, normalmente asociada a una función unidimensional con dependencia temporal (señal), a cualquier función definida sobre un espacio multidimensional (2.193), la interpretación de la ortogonalidad de las funciones base multidimensionales considera la ortogonalidad o incorrelación espacial que exhiben las funciones base *locales* propias a los sistemas difusos y al resto de métodos o redes de aproximación no lineal estudiados en apartados anteriores.

Ante esta interpretación, de la misma forma que la variación de un coeficiente de la expansión en serie de Fourier sinusoidal sólo varía el contenido espectral o frecuencial en una banda de frecuencias localizadas y que dicha variación de contenido frecuencial es proporcional a la variación del parámetro de la expansión, asimismo el considerar funciones base multidimensionales localizadas en el espacio asegura la independencia zonal para la superficie de control sintetizada, garantizando un control por zonas controlable por parámetros de acción independiente. Nótese que la característica de ortogonalidad, o incorrelación espacial (por local en el espacio) torna especialmente interpretable (lingüísticamente) la acción de una descomposición de tipo (2.194)

La anterior interpretación permite asignar un carácter de aproximación óptima (y universal) a los sistemas de aproximación basados en acciones locales e independientes (asociadas al control por zonas), que son independientes de modelos (*model-free*, en inglés), como corresponde a sistemas difusos de agregación local, redes RBF, controladores CMAC, redes

GRNN y redes *wavelet*, frente a los métodos de aproximación mediante regresión lineal o no lineal ligada a modelos. De hecho, la representación gráfica en forma de red o esquema de la anterior expresión (2.194) correspondiente a la descomposición ortogonal, mostrada en la figura 2.34 recupera los esquemas de las redes (neuronales) estudiadas en apartados previos.

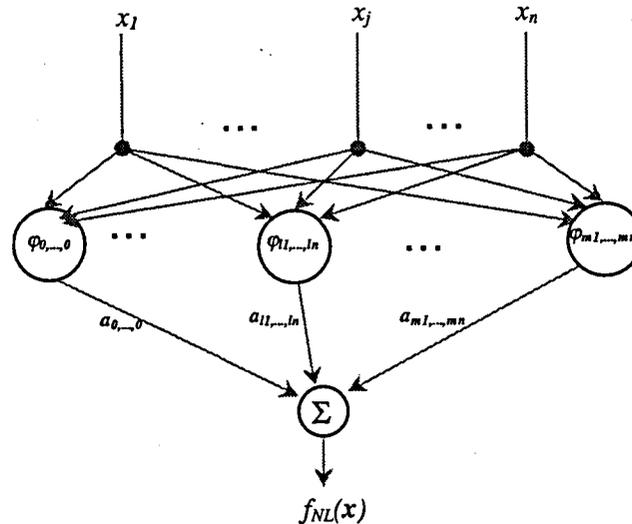


Figura 2.34 Representación en forma de red de procesamiento paralelo de la descomposición ortogonal debida al teorema de proyección multidimensional en espacios de Hilbert.

Obsérvese que el esquema de procesamiento mostrado en la figura 2.34, que modela la expresión (2.194) y cuyos nodos de la capa oculta, por tanto, pueden corresponder a funciones ortogonales multidimensionales polinómicas, a funciones armónicas sinusoidales multidimensionales o a funciones locales multidimensionales, es formalmente equivalente a los esquemas de las figuras 2.19 y 2.21. En el caso de considerar funciones locales multidimensionales en el esquema de la figura 2.34, se establece una correspondencia completa entre dichos esquemas, que devienen funcionalmente equivalentes.

Sin embargo, y a pesar de que los anteriores aspectos sobre independencia espacial son intuitivamente razonables, un análisis estricto de la condición de ortogonalidad descrita por (2.198) revela que las funciones base difusas o RBF no son ortogonales sino *cuasi-ortogonales*. En efecto, el nivel de solapamiento entre funciones base adyacentes (requerido por sus propiedades de interpolación) comporta un producto escalar residual únicamente entre funciones base contiguas, aspecto que justifica el término de cuasi-ortogonalidad. Por su parte, la condición de ortogonalidad (2.198) aplica estrictamente sobre las funciones base de tipo *wavelet* aunque, recordando el símil establecido en el apartado 2.7.4, el comportamiento oscilatorio de las mismas que, junto a su localidad espacial asegura la ortogonalidad, aparece en detrimento de su implementabilidad e interpretabilidad, dado que son funciones base de

conformación compleja. Estos aspectos permiten interpretar la versión difusa o RBF de la expansión ortogonal como un versión de la expansión (2.194) de mayor carácter práctico o aplicable en ámbitos de ingeniería, cuyas propiedades convergen uniformemente a las del desarrollo teórico precedente. En efecto, y en el límite, como corresponde a la aproximación completa de la función original (2.200), la creciente cardinalidad de funciones base, asociada a una disminución del soporte de las mismas conduce un comportamiento equivalente entre los diversos tipos de funciones base espacialmente locales. Estos aspectos se retomarán en las dos siguientes interpretaciones que consideran conceptos de delta de Dirac extendida y reconstrucción de señal muestreada.

A pesar de la anterior objeción a la teoría estudiada como modelo de los controladores difusos y demás sistemas análogos, cabe investigar ciertas modificaciones sobre el análisis previo que justificarían una equivalencia completa.

Como primera propuesta, puede plantearse el uso de productos escalares distintos al clásico (nota 2.7), considerando, por ejemplo, una integración del producto drástico asociado a las normas- t (véase la tabla 2.1), constituyendo así un *producto escalar difuso* (2.201), y que aseguraría la condición de ortogonalidad entre funciones base difusas, en el caso práctico en que no existiera solapamiento entre más de dos funciones base difusas contiguas (véase 2.30 en el apartado sobre normalización) y, por extensión, entre cualquier función base local. Nótese que una interpretación del uso de este producto escalar difuso justificaría la independencia que se obtiene *de facto* con el ajuste independiente del control zonal justo en el centro del soporte de la función de pertenencia que modela la función base local al variar el parámetro de consecuentes para un regla difusa dada. Obsérvese que para un número creciente de funciones base, con el comportamiento límite (2.200), el comportamiento del producto escalar (2.201) tiende al producto escalar clásico.

$$\langle f, g \rangle_{difuso} = \int_I t_{dp} [f, g] \cdot dx \quad (2.201)$$

Otra posible línea de extensión del análisis presentado correspondería a un análisis mediante teoría de tramas (*frames*, en inglés) que estudia los conjuntos no necesariamente linealmente independientes que constiuyen una base de un espacio de Hilbert [SHM95]. Una discusión sobre la aproximación mediante funciones base no estrictamente ortogonales (gaussianas o funciones de *Gabor*) aparece en [BEN95], aunque dicho trabajo se fundamente en una demostración afín al teorema de Lauricella (también aplicado implícitamente en [YIN93] para

sistemas difusos), aproximando por tanto señales sinusoidales mediante funciones locales gaussianas, aspecto que constituye de este modo un doble paso de aproximación ortogonal que elimina el carácter óptimo de la aproximación.

En cuanto a la relación con los resultados precedentes sobre características de aproximación (universal), destaca, retomando las investigaciones de Poggio y Girosi [GIR89], el análisis propuesto por dichos autores quienes demuestran la condición de esquema de aproximación con solución óptima única para las redes RBF, a diferencia de las redes MLP, basándose en propiedades de convexidad topológica, implícitamente relacionadas con el teorema de proyección en espacios de Hilbert.

El tipo de demostraciones descritas anteriormente basadas en conceptos de *densidad*, que consideran el teorema de Stone-Weierstraß para justificar las características de aproximación de redes no lineales, frente a la demostración según una base ortogonal sobre un espacio de Hilbert, que proporciona un resultado de unicidad de la solución óptima, adolecen del mismo problema que los modelos de Volterra frente a los modelos de Wiener para sistemas dinámicos no lineales, aspecto que será retomado en un apartado posterior. Efectivamente, el teorema de Weierstraß, que demuestra la completitud del conjunto de funciones polinómicas, es extendido por Fréchet [SCH80] al conjunto de funcionales de Volterra, mientras que los modelos de Wiener extienden los conceptos de Volterra a bases ortogonales.

2.9.4.1 Aplicación a la aproximación de sistemas MIMO

Para concluir el apartado sobre la interpretación del procesado de un sistema difuso como solución óptima al problema de aproximación mediante funciones base ortogonales, se presenta a continuación una reinterpretación de la generalización de la operación de un controlador difuso MISO hacia un sistema controlador difuso MIMO (figura 2.35a). Tal como fue descrito en el apartado de introducción al control difuso, la demostración de [LEE90II] en que se comprueba la expresabilidad de un sistema controlador difuso MIMO como combinación de sistemas controladores difusos MISO (ilustrada en la figura 2.35b) corresponde a una extensión de la propiedad equivalente que exhibe cualquier sistema genérico de control MIMO y que mantiene su validez para un controlador difuso, aunque la anterior demostración (ampliamente referenciada, véase *e.g.* [ZEN95]) no considera ningún factor diferenciador de la operación de un controlador difuso. Obsérvese que, según muestra la figura 2.35c, considerando la operación de un controlador difuso MISO como una combinación lineal de un conjunto de elementos (de característica no lineal y local) ortogonales entre sí (correspondientes a los antecedentes lógicos difusos), la salida única del

controlador MISO se conforma mediante la combinación o agregación (lineal, mediante el peso proporcionado por los consecuentes lógicos difusos) de dichas funciones locales –véase (2.194)-. Esta representación permite expresar la operación de un controlador difuso no ya como una combinación de controladores MISO (no lineales) independientes, sino, tal como ilustra la figura 2.35d, como un conjunto común ortogonal no lineal local, seguido de un conjunto de agregaciones independientes para conformar cada salida del controlador MIMO.

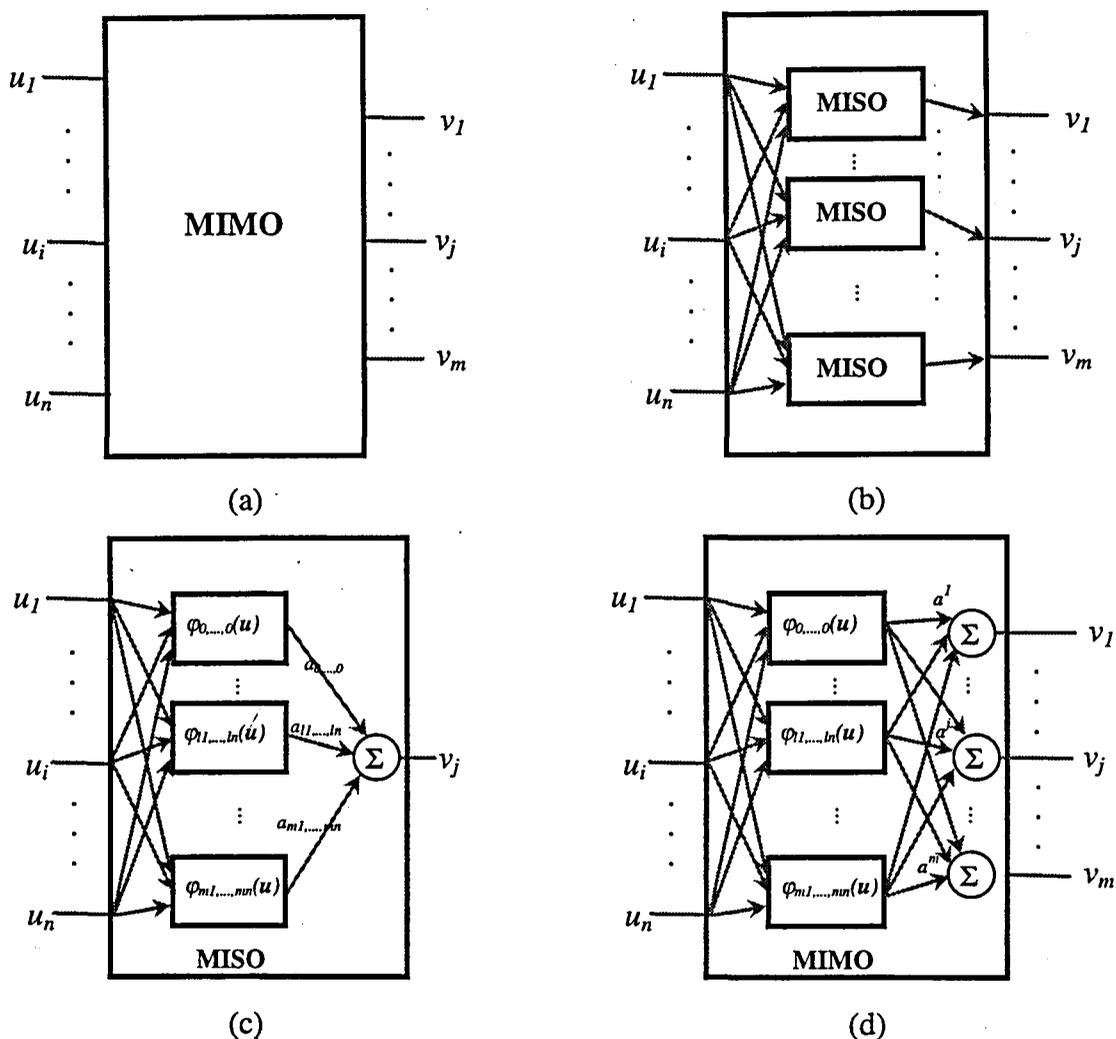


Figura 2.35 Representación de la combinación de sistemas de control difuso MISO para conformar un sistema de control difuso MIMO (a) Sistema difuso MIMO (b) Sistema difuso MIMO como combinación de sistemas difuso MISO (c) Estructura de Sistema difuso MISO ortogonal (d) Sistema difuso MIMO como combinación de sistemas difusos MISO ortogonales

Como conclusión de esta interpretación, la resolución de un problema MIMO no lineal (en general compuesto de m problemas *no lineales*) puede ser descrita, en virtud de la

descomposición ortogonal sobre espacios de Hilbert que realiza un controlador difuso, como el efecto combinado de un solo problema no lineal (distribución ortogonal de las bases o antecedentes) seguido de m problemas *lineales* de asignación paramétrica.

A continuación se presenta una segunda interpretación alternativa a la descripción analítica de la operación de un sistema de agregación local, que proporciona soporte analítico a la idea de que en el límite –bajo condiciones de convergencia hacia aproximación universal- la estricta ortogonalidad de las funciones adjuntas no es necesaria, y que la forma de la función localizada en el espacio no es relevante.

2.9.5 Descripción de una función no lineal multidimensional mediante sistemas difusos de agregación local en base al concepto de delta de Dirac generalizada

En este apartado se plantea la representación de la aproximación de una función no lineal partiendo de una extensión del concepto de función o distribución *delta de Dirac*. Considérese, para iniciar el estudio, una función real de variable real, definida, en general, sobre todo el intervalo real

$$f_{NL}(x) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \quad (2.202)$$

función que corresponde, entre otros casos, a la relación entrada-salida de un sistema controlador SISO sin dinámica. Partiendo de la ecuación de convolución de señales temporales, asociada a aspectos teóricos de las técnicas de procesado de señal –véase [CAR86]-, que relaciona la evolución temporal de una señal en el tiempo con la denominada *integral de convolución*, cualquier función no lineal definida sobre un espacio abstracto (2.202) puede expresarse según:

$$f_{NL}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{NL}(\chi) \cdot \delta(x - \chi) \cdot d\chi \quad (2.203)$$

expresión en la que aparece la función delta de Dirac (estrictamente debiera denominarse una distribución), función que siempre aparece en el integrando de una integral, y que queda definida por su comportamiento de área finita y dominio de abscisas o soporte de un solo punto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot dx = 1 \quad \text{y} \quad \delta(x) = 0, \forall x \neq 0 \quad (2.204)$$

Con el objetivo de expresar la anterior expresión (2.203a) en forma de desarrollo en serie, debe salvarse el inconveniente de la anchura nula de la función delta, que impide dicha representación. Para superar dicha dificultad analítica, cabe expresar la función delta como límite de una *serie funcional* cuya anchura en abscisas tiende a ser nula y cuyo nivel de ordenadas tiende a infinito, de forma que se mantiene hasta el límite la condición de área constante, serie funcional que corresponde a familias de deltas generalizadas:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \delta_{\alpha}(x) \quad (2.205)$$

Como ejemplos representativos de funciones delta generalizada $\delta_{\alpha}(x)$ que verifican el comportamiento límite (2.205) cabe citar las familias de funciones,

$$\delta_{\alpha}(x) = \alpha \cdot e^{-\alpha|x|} \quad (2.206)$$

$$\delta_{\alpha}(x) = \alpha \cdot \Pi(\alpha x) \quad (2.207)$$

$$\delta_{\alpha}(x) = \alpha \cdot \Lambda(\alpha x) \quad (2.208)$$

$$\delta_{\alpha}(x) = \alpha \cdot \text{sinc}(\alpha x) \quad (2.209)$$

que corresponden a conformaciones exponenciales, rectangulares, triangulares y en forma de funciones *sinc*, respectivamente. De hecho, de las definiciones anteriores puede inferirse que para cualquier función Ω que cumpla la condición de área finita, y por tanto normalizable a área unitaria

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Omega(x) \cdot dx = 1 \quad (2.210)$$

se verifica

$$\delta(\chi) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha \cdot \Omega(\alpha \cdot \chi) = \lim_{\Delta\chi \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\chi} \cdot \Omega\left(\frac{\chi}{\Delta\chi}\right) \quad (2.211)$$

nótese que independientemente de su forma, cualquier función de comportamiento localizado, es decir, aquella función que verifica:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Omega(\chi) \cdot d\chi = 1 \quad (2.212)$$

y cumple por tanto (2.210), es susceptible de ser definida como delta generalizada. En particular para cualquier forma de función de pertenencia –véase (2.68), (2.69)- o función RBF –(2.126) a (2.130)-, en virtud de su comportamiento local, que verifica (2.212), es posible recuperar un comportamiento de delta generalizada.

El concepto de función delta de Dirac encuentra aplicación en distintos ámbitos de ingeniería. Más allá de su aplicación en teoría de procesamiento de señal, la función delta de Dirac, en el área de Sistemas de Control, modela adecuadamente excitaciones o perturbaciones del sistema de carácter impulsivo, en cuyo caso el comportamiento de la respuesta del sistema de control depende más del área de dicha excitación (como índice de su energía) que de la forma concreta de la misma. Como otro ejemplo ilustrativo, en radiación de campos electromagnéticos y antenas, obsérvese que, a distancias elevadas del foco de radiación, éste puede considerarse puntual en el espacio (delta tridimensional), independientemente de si la forma del elemento de radiación es esférica, rectangular, triangular o completamente irregular.

Una interpretación alternativa complementaria, sustentada analíticamente por (2.212), y que no está sujeta a formas susceptibles de ser descritas analíticamente –como puedan ser (2.206-2.209)-, considera que una función delta es aquella función cuyo soporte está por debajo de la resolución espacial (o ancho de banda de medida) del sistema. Esta interpretación deviene intuitiva ante una representación en el dominio frecuencial de la expresión de convolución (2.203), que permite establecer la equivalencia (2.213) gracias a la transformada de Fourier unitaria de la función delta.

$$F_{NL}(f_x) = F_{NL}(f_x) \cdot \delta(f_x) \quad (2.213)$$

expresión en la que, denotando \mathfrak{F} como transformación de Fourier, f_x denota la frecuencia espacial de definición de la transformada -[CAR86]-, con $F_{NL}(f_x) = \mathfrak{F}\{f_{NL}(x)\}$ y $\delta(f_x) = \mathfrak{F}\{\delta(x)\}$. Esta expresión permite, en virtud de la dualidad entre los conceptos de espacio y frecuencia espacial, interpretar que los cambios en la forma de la función delta generalizada que aparecen por encima del ancho de banda de la función original no son significativos en la representación de dicha función. La figura 2.36 ilustra los anteriores conceptos con la representación de tres tipos de deltas generalizadas: una delta de Dirac ideal (de espectro plano), una delta generalizada triangular (de espectro sinc^2) y una delta generalizada irregular local (de espectro irregular). Se observa que la limitación en banda del espectro espacial de la función original ($F_{NL}(f_x) \approx 0$ para $f_x > f_\epsilon$) permite representar correctamente dicha función con deltas generalizadas de soporte menor que ϵ , aspecto que permite generalizar (2.213).

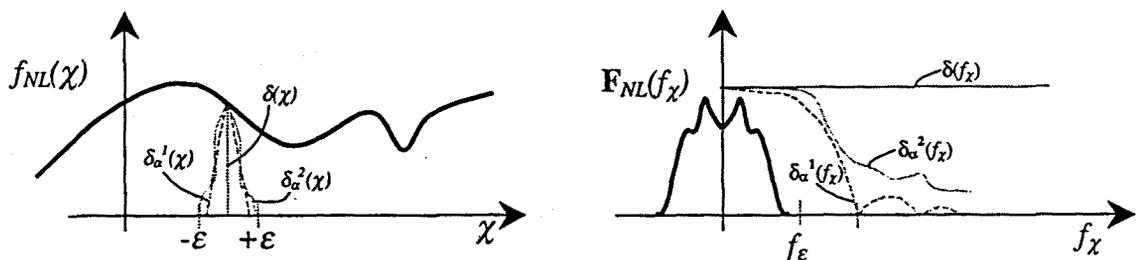


Figura 2.36 Interpretación frecuencial de la localidad sobre la integral de convolución

Retomando la aplicación del concepto de delta generalizada como base analítica del problema de aproximación funcional, nótese que la anterior extensión (2.205), que define la función delta generalizada $\delta_\alpha(x)$, permite representar la ecuación de convolución (2.203), que representa cualquier función no lineal a partir de los valores de las muestras de dicha función, como límite de una serie funcional, que admite la descripción:

$$\begin{aligned}
 f_{NL}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{NL}(x) \cdot \delta(x-x) \cdot dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{NL}(k\Delta x) \cdot \left(\frac{1}{\Delta x} \right) \cdot \Omega\left(\frac{x-k\Delta x}{\Delta x} \right) \cdot \Delta x = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{NL}(k\Delta x) \delta_{1/\Delta x}(x-k\Delta x)
 \end{aligned} \quad (2.214)$$

donde la convergencia de esta serie aparece en el sentido de anulación de la norma euclídea correspondiente definida en el espacio vectorial de las funciones continuas a representar, esto es:

$$\left\| f_{NL}(x) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{NL}(k\Delta\chi) \delta_{1/\Delta\chi}(x - k\Delta\chi) \right\| \xrightarrow{\Delta\chi \rightarrow 0} 0 \quad (2.215)$$

Nótese que la expresión (2.214), en la que se ha supuesto una distribución equiespaciada de funciones delta generalizadas con el fin de simplificar las expresiones resultantes, pero sin pérdida de generalidad, es susceptible de ser interpretada como una extensión de la derivación o demostración del concepto de integral de Riemann, vinculado a la teoría de Cálculo Analítico, con la generalización de que la agregación de áreas de rectángulos con soporte decreciente infinitesimalmente es sustituida por áreas infinitesimales de cualquier conformación. Nótese que, en la construcción de una serie funcional de funciones área partiendo de áreas de rectángulos, las funciones base rectangulares (asimilables a conjuntos lógicos clásicos) son estrictamente ortogonales (por ser disjuntas en el espacio), mientras que, a su vez, la expresión (2.214) no requiere de la estricta ortogonalidad de las funciones base, aunque sí una convergencia hacia la ortogonalidad límite, comportamiento este último inherente a las funciones delta generalizadas (2.205).

A diferencia del desarrollo en serie ortogonal multidimensional (2.194) que constituye una generalización natural del caso unidimensional, la ecuación de convolución, usualmente aplicada a señales temporales, es convencionalmente utilizada en su forma unidimensional (2.203). A pesar de ello, una extensión multidimensional de dicha ecuación, definida sobre el espacio abstracto de aproximación, deviene:

$$f_{NL}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{NL}(\chi_1, \dots, \chi_n) \cdot \delta(x - \chi_1, \dots, x - \chi_n) \cdot d\chi_1 \cdot \dots \cdot d\chi_n \quad (2.216)$$

En dicho caso, las características que satisface la función o distribución delta de Dirac multidimensional que aparece en el integrando de (2.216) resultan en:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\chi_1, \dots, \chi_n) \cdot d\chi_1 \cdot \dots \cdot d\chi_n = 1 \quad \delta(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0) \quad (2.217)$$

El comportamiento límite de la serie funcional multidimensional formada por funciones delta generalizadas multidimensionales

$$\delta(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \rightarrow \infty} \delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.218)$$

conlleva una tendencia al límite hacia la función delta multidimensional que verifica (2.217), hecho que permite la recuperación de la integral múltiple de convolución (2.216) como comportamiento límite de la siguiente serie funcional (2.21), al considerar una tendencia de reducción infinitesimal del soporte $\Delta\chi_i = 1/\alpha_i$ de las funciones delta generalizadas (2.218).

$$\begin{aligned} f_{NL}(x_1, \dots, x_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{NL}(\chi_1, \dots, \chi_n) \cdot \delta(x - \chi_1, \dots, x - \chi_n) \cdot d\chi_1 \cdot \dots \cdot d\chi_n = \\ &= \lim_{\Delta\chi_1, \dots, \Delta\chi_n \rightarrow 0 \dots 0} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} f_{NL}(k_1\Delta\chi_1, \dots, k_n\Delta\chi_n) \cdot \left(\frac{1}{\Delta\chi_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{\Delta\chi_n}\right) \cdot \Omega\left(\frac{x_1 - k_1\Delta\chi_1}{\Delta\chi_1}, \dots, \frac{x_n - k_n\Delta\chi_n}{\Delta\chi_n}\right) \cdot \Delta\chi_1 \cdot \dots \cdot \Delta\chi_n \quad (2.219) \\ &= \lim_{\Delta\chi_1, \dots, \Delta\chi_n \rightarrow 0 \dots 0} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} f_{NL}(k_1\Delta\chi_1, \dots, k_n\Delta\chi_n) \delta_{1/\Delta\chi_1, \dots, 1/\Delta\chi_n}(x_1 - k_1\Delta\chi_1, \dots, x_n - k_n\Delta\chi_n) \end{aligned}$$

La anterior expresión, en la que $\Omega(x_1, \dots, x_n)$ corresponde a la extensión multidimensional de la función que cumple (2.210)-(2.212), asegura las características de aproximación universal como convergencia uniforme, considerando un comportamiento asintótico, para la descripción multidimensional en serie, según:

$$\left\| f_{NL}(x_1, \dots, x_n) - \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} f_{NL}(k_1\Delta\chi_1, \dots, k_n\Delta\chi_n) \delta_{1/\Delta\chi_1, \dots, 1/\Delta\chi_n}(x_1 - k_1\Delta\chi_1, \dots, x_n - k_n\Delta\chi_n) \right\| \xrightarrow{\Delta\chi_1, \dots, \Delta\chi_n \rightarrow 0 \dots 0} 0 \quad (2.220)$$

Como conclusión al desarrollo analítico, obsérvese que la estructura analítica del modelo que proporciona la serie funcional en (2.219) es funcionalmente equivalente a la descomposición ortogonal multidimensional (2.200), siendo ambos formalmente coincidentes con la expresión que modela la transferencia analítica de los controladores difusos (2.179) y las redes RBF (2.180). La disposición en forma de red de procesamiento paralelo de la expresión en serie (2.219), mostrada en la figura 2.37a, recupera el comportamiento esperado para los sistemas de agregación local.

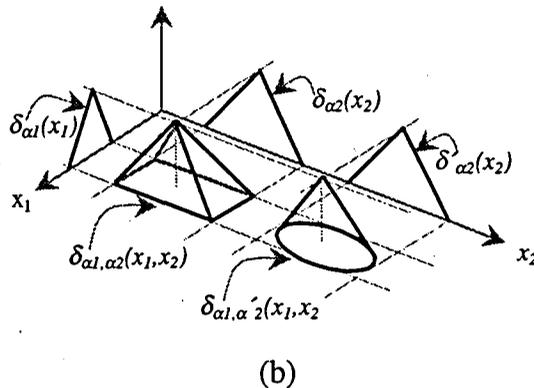
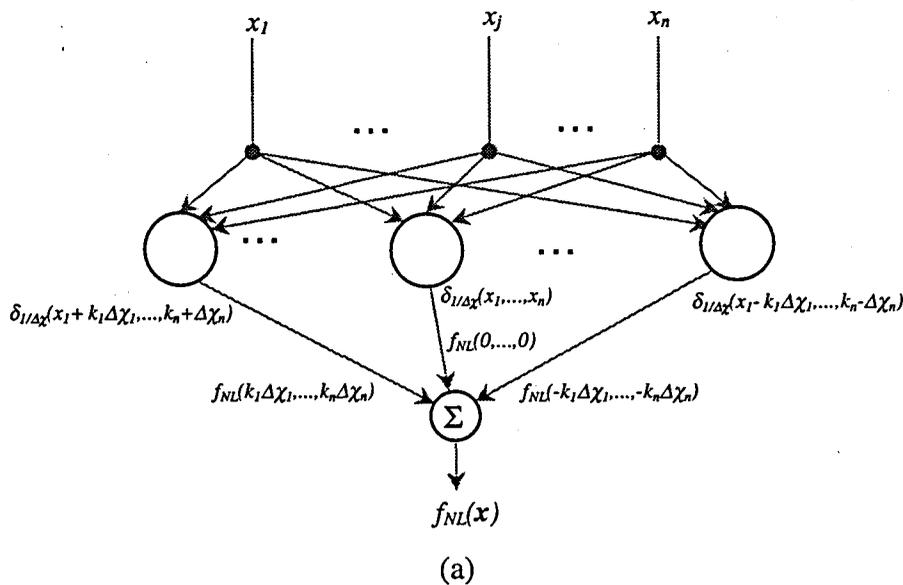


Figura 2.37 (a) Esquema de la red *feedforward* de agregación de deltas generalizadas multidimensionales
 (b) Interpretación gráfica de la definición de implicación difusa en base al concepto de delta generalizada

Nótese que el modelo debido a la expresión (2.219) y su versión esquemática de la figura 2.37a establecen un paso no tan sólo descriptivo sino constructivo en la búsqueda hacia un modelo de síntesis de controladores difusos. Efectivamente, obsérvese que el conjunto de coeficientes de la distribución ortogonal óptima (2.200), aunque resoluble mediante una formulación compactada (2.199), es en principio desconocido. En el presente caso, no obstante, la descripción en base al concepto de función delta generalizada multidimensional permite interpretar el valor de dichos pesos abstractos de ponderación lineal a_{k_1, \dots, k_n} como muestras espaciales de la función a aproximar $f_{NL}(k_1 \Delta x_1, \dots, k_n \Delta x_n)$.

A la luz de estos resultados, cabe razonar que este comportamiento bien pudiera haberse inferido para la descomposición ortogonal, en general *ciega* (plántese el caso de descomposición ortogonal polinómica), para los casos duales de descomposición ortogonal

local en espacio (funciones base locales) o local en el dominio de la frecuencia (funciones base sinusoidales). Efectivamente, en este último caso, es conocido que los coeficientes de Fourier son obtenidos mediante un producto escalar (2.199) que establece la correlación de la señal original con el conjunto de funciones base frecuenciales, reflejando de este modo una asociación de los coeficientes del desarrollo ortogonal con el contenido frecuencial local. Una interpretación dual espacial permite justificar el resultado (2.219) que establece la equivalencia entre los pesos lineales de ponderación de las funciones base localizadas no lineales con *muestras* de la función original.

Considerando un razonamiento análogo al expresado por las ecuaciones (2.210)-(2.212), en su versión multidimensional, puede argumentarse analíticamente que la condición necesaria para que una función en un espacio multidimensional sea considerada una función delta generalizada multidimensional es su localidad. Esta argumentación resulta en una clara relajación de la hipótesis **J4** de Jang sobre la equivalencia RBF-difusa, de forma que no se requiere la simetría radial sino la localidad para que funciones base sean calificadas de deltas generalizadas de forma que la agregación de un conjunto disjunto y completo de las mismas detente la condición de aproximación universal demostrada por (2.211). Asimismo, y justificado por el análisis precedente, cabría extender la interpretación de la implicación difusa de tipo Mamdani que define la interpretación de las reglas SI-ENTONCES –véase (2.46)-, (o bien una reinterpretación de las normas-*t* difusas), como aquella operación que transforma un conjunto de funciones deltas generalizadas unidimensionales en una delta generalizada multidimensional, según expresa (2.220b), de forma que las implicaciones de Mamdani (2.36) o de Larsen (2.37), y la definición de funciones base de simetría radial (RBF) constituirían casos particulares, tal como ilustra la figura 2.37b.

$$\delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) = t\{\delta_{\alpha_1}(x_1), \dots, \delta_{\alpha_n}(x_n)\} \quad (2.220b)$$

Explorando los vínculos entre la interpretación presentada en el presente apartado y los trabajos de la literatura, destaca un razonamiento similar al presentado que aparece en el reciente trabajo [MAO97], en el que se estudian las características de aproximación de sistemas difusos mediante la traslación y dilación (a su vez conceptos propios de teoría de *wavelet*) de un tipo de funciones base, cuya descripción de comportamiento sigue el concepto de delta extendida, actuando como funciones de pertenencia. Destaca asimismo el reciente trabajo de Turchetti *et al* [TUR98] quienes proponen un nuevo concepto de red neuronal

artificial denominado *red neuronal de identidades aproximadas* cuyos nodos de procesado siguen las pautas de comportamiento local, no estrictamente dependiente de la forma, análogas al análisis precedente. Por último, y para cerrar la revisión de las propuestas existentes en la literatura que están relacionadas con el trabajo presentado en este apartado, destaca nuevamente el trabajo de Girosi y Poggio [GIR89], quienes concluyen un resultado similar a la identificación de (2.214) con las redes *feedforward* RBF sorteando el problema del mal condicionamiento de la integral de convolución (2.203a) en su descripción en serie (2.205) por medio del concepto de función de Green^{2.8} aplicada a la integral de Riemann.

2.9.6 Modelo de la operación de un sistema difuso de agregación local como reconstrucción mediante filtrado de una función multidimensional muestreada

Los resultados analíticos precedentes que tratan la operación de los sistemas de agregación local, a pesar de haber permitido profundizar en el alcance de la interpretación de los sistemas de inferencia difusos y demás sistemas de agregación local, pueden ser aplicados como casos particulares a sistemas expertos de inferencia lógica clásica, dado que las características de aproximación universal se obtienen como un comportamiento límite. Por tanto, es razonable plantear un análisis que tome en consideración la característica más relevante y diferenciadora de los sistemas difusos y redes RBF, a saber, la conformación *gradual* y *monótona* (a diferencia de las *wavelet*) además de *local* (común a cualquier función base ortogonal y cualquier función delta generalizada) que proporciona la característica de interpolación entre modelos locales. La clave de dicho análisis, como conjunción y mejora de los análisis previos, radica en la interpretación frecuencial que ya fue esbozada en la representación de la figura 2.36, pero que requiere de una sólida base matemática. En el presente apartado se presenta una interpretación analítica que permite, retomando el concepto de muestreo de la función multidimensional bajo estudio previamente introducido, investigar el impacto de la conformación de las funciones base (a pesar de que en el límite su forma no sea relevante según la discusión previa) considerando una extensión multidimensional del teorema de reconstrucción de señales muestreadas, convencionalmente aplicado a la recuperación de señales analógicas temporales a partir de señales muestreadas o discretas en el tiempo.

^{2.8} Considerando P un operador diferencial y P' su operador adjunto, la función de *Green* del operador diferencial $P'P$ es aquella función que satisface [GIR89]:

$$P'PG(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Considérese, para introducir el análisis de esta sección, una función no lineal multidimensional:

$$f_{NL}(x_1, \dots, x_n): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R} \quad (2.221)$$

De forma análoga a la definición de la transformada de Fourier para una señal de evolución temporal [CAR80], es posible definir F_{NL} , función transformada de Fourier sobre el dominio de frecuencias f_{x_1}, \dots, f_{x_n} de la función no lineal multidimensional bajo estudio (2.221), que permite interpretar la información contenida en (2.221) en base a criterios de frecuencia espacial, según:

$$F_{NL}(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) \stackrel{\Delta}{=} \mathfrak{S}(f_{NL}(x_1, \dots, x_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{NL}(x_1, \dots, x_n) e^{-j2\pi(x_1 f_{x_1} + \dots + x_n f_{x_n})} dx_1 \dots dx_n \quad (2.222)$$

A título ilustrativo, cabe citar que la definición de la transformación de Fourier multidimensional aparece asimismo aplicada a señales de variación temporal unidimensional en el contexto de las series de Volterra y de Wiener, aspecto que será tratado posteriormente. Por otra parte, el uso de de la transformación de Fourier bidimensional –particularizando $n=2$ en la expresión (2.222)– es una herramienta analítica bien establecida en el tratamiento de señales de imagen, *e.g.* en aplicaciones de televisión.

En este apartado, recomponiendo y extendiendo parte de los resultados analíticos anteriores, se pretende expresar la función original en base a una descomposición (2.223) cuyos coeficientes coinciden con las muestras de la función original, consideradas éstas regularmente equiespaciadas si bien que con separaciones independientes en cada dirección espacial, con el fin de obtener una formulación expresable analíticamente.

$$f_{NL}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} a_{m_1 \dots m_n} f_{NL}^{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.223)$$

$$\text{con} \quad a_{m_1 \dots m_n} = f_{NL}(m_1 \Delta x_1, \dots, m_n \Delta x_n)$$

siendo $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ los intervalos de muestreo en cada dirección espacial. El siguiente estudio pretende investigar bajo qué condiciones se asegura el signo de igualdad en dicha expresión.

Como extensión del concepto de señal temporal de banda limitada, asociada a aquella señal cuyo contenido armónico o frecuencial es despreciable para frecuencias superiores a una frecuencia dada, el establecimiento de la anterior transformación de Fourier multidimensional (2.222) permite asignar el carácter de función de banda limitada a la función multidimensional f_{NL} (2.221) si verifica

$$F_{NL}(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) < \varepsilon \quad (2.224)$$

para el hiperparalelepípedo

$$|f_{x_1}| > f_{x_1}^0, \dots, |f_{x_n}| > f_{x_n}^0 \quad (2.225)$$

siendo $f_{x_1}^0, \dots, f_{x_n}^0$ los anchos de banda x_1, \dots, x_n , respectivamente, de forma que su producto cartesiano define la región multidimensional de soporte espectral. Dada una función genérica (2.221) es fundado anticipar, en base a criterios de *suavidad* de dicha función, que presenta la propiedad de limitación en banda. Si éste no fuera el caso, cabrá suponer un error de aproximación en la expresión (2.223), o bien predistorsionar el contenido armónico de la función original mediante un filtrado espacial multidimensional *antialiasing*, aspecto que será retomado posteriormente.

Considérese, continuando el análisis, una extensión multidimensional del conjunto equiespaciado o *tren* de deltas temporales, como una función malla (*mesh*, en inglés), interpretable como una función de muestreo ideal multidimensional:

$$mesh(x_1, \dots, x_n; \Delta x_1, \dots, \Delta x_n) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \delta(x_1 - m_1 \Delta x_1, \dots, x_n - m_n \Delta x_n) \quad (2.226)$$

La anterior expresión modela una distribución de funciones delta multidimensional que divide el espacio multidimensional en hiperparalelepípedos de volumen $\Delta x_1 \times \dots \times \Delta x_n$. Dicha función permite expresar la versión muestreada en el espacio multidimensional de la función original como producto de la misma con la función de mallado de deltas (2.226), según:

$$\begin{aligned}
f_{NL}^s(x_1, \dots, x_n) &= f_{NL}(x_1, \dots, x_n) \cdot \text{mesh}(x_1, \dots, x_n; \Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \\
&= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} f_{NL}(m_1 \Delta x_1, \dots, m_n \Delta x_n) \cdot \delta(x_1 - m_1 \Delta x_1, \dots, x_n - m_n \Delta x_n)
\end{aligned}
\tag{2.227}$$

Con la intención de obtener el espectro de la función muestreada (2.227), nótese que la transformación de Fourier multidimensional de la red de muestreo resulta en una red de mallado frecuencial o distribución de deltas en el dominio multidimensional de frecuencias espaciales descrita por la expresión:

$$\text{MESH}(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) = f_{x_1}^s \cdots f_{x_n}^s \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{\infty} \delta(f_{x_1} - j_1 f_{x_1}^s, \dots, f_{x_n} - j_n f_{x_n}^s)
\tag{2.228}$$

expresión en la que, en virtud de la dualidad inversa de conceptos entre el espacio y la frecuencia espacial, la distribución regular aparece equiespaciada según las frecuencias de repetición:

$$f_{x_i}^s = (\Delta x_i)^{-1}
\tag{2.229}$$

Los anteriores resultados permiten obtener la transformación de Fourier multidimensional de la versión muestreada de la función no lineal (2.227) como convolución entre el espectro de la función original (2.222) y la distribución de mallado espectral (2.228)

$$F_{NL}^s = F_{NL}(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) * \text{MESH}(f_{x_1}, \dots, f_{x_n})
\tag{2.230}$$

resultando en:

$$F_{NL}^s = f_{x_1}^s \cdots f_{x_n}^s \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{\infty} F_{NL}(f_{x_1} - j_1 f_{x_1}^s, \dots, f_{x_n} - j_n f_{x_n}^s)
\tag{2.231}$$

Obsérvese que la anterior expresión representa una réplica periódica multidimensional de la función transformada original, cuyos intervalos de repetición están regidos por (2.229) y son por tanto inversamente proporcionales a los intervalos de muestreo espacial $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$.

A continuación se desarrolla un análisis que permite argumentar bajo qué condiciones la función original admite una representación *exacta* según (2.223). Obsérvese que en dicha expresión, suponiendo un soporte espacial finito en la definición original (2.221), el número de términos de la expansión no es necesariamente infinito, a diferencia de las expresiones basadas en la propiedad de convergencia uniforme como comportamiento límite –véase (2.200) y (2.220)-. Dicho análisis admite como interpretación una extensión del conocido criterio de Nyquist que predice la recuperabilidad de una señal temporal en base a un conjunto de muestras si la frecuencia de muestreo es mayor que el doble del ancho de banda de la señal.

Efectivamente, bajo la condición definida sobre el espacio frecuencial

$$f_{x_1}^s > 2f_{x_1}^0, \dots, f_{x_n}^s > 2f_{x_n}^0 \quad (2.232)$$

o, equivalentemente, en su versión dual espacial

$$\Delta x_1 < \frac{1}{2f_{x_1}^0}, \dots, \Delta x_n < \frac{1}{2f_{x_n}^0} \quad (2.233)$$

en dicho caso es posible recuperar la función original multidimensional mediante un filtrado frecuencial multidimensional cuyas características están descritas por:

$$H_{member}(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) = \begin{cases} \frac{1}{f_{x_1}^s \dots f_{x_n}^s} & (f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) \in R \subset \mathfrak{R}^n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.234)$$

expresión en la que R corresponde a cualquier región del espacio frecuencial multidimensional que esté confinada entre la región (2.225) y aquella definida por las réplicas adyacentes a la replica en el origen en la distribución (2.230), aspecto que ilustra la figura 2.38f.

Como conclusión a este análisis, obsérvese que la función multidimensional reconstruida mediante el filtrado en el dominio frecuencial espacial (2.231) es recuperada *exactamente* por la expresión en serie, en virtud de la limitación en banda (2.224)-(2.225), es decir:

$$\tilde{F}_{NL}(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) \stackrel{\Delta}{=} H_{membership}^f(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) \cdot F_{NL}^s(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) = F_{NL}(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) \quad (2.235)$$

La interpretación del concepto de filtrado en el dominio de frecuencias espaciales considerado en (2.235) -convencionalmente asociado al procesado en el dominio de la frecuencia de señales de variación temporal- encuentra con el concepto dual de *convolución espacial* multidimensional una interpretación más adecuada al problema bajo estudio. En efecto, considérese la función antitransformada de Fourier multidimensional de la respuesta frecuencial multidimensional (2.234), descrita por

$$h_{membership}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\Delta}{=} \mathfrak{F}^{-1}(H_{membership}(f_{x_1}, \dots, f_{x_n})) \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} H_{membership}(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) \cdot e^{+j2\pi(x_1 f_{x_1} + \dots + x_n f_{x_n})} df_{x_1} \dots df_{x_n} \quad (2.236)$$

de forma que la expresión de recuperación de la función multidimensional muestreada (2.235) deviene representada sobre el espacio multidimensional de definición de la función original por:

$$f_{NL}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} f_{NL}(m_1 \Delta x_1, \dots, m_n \Delta x_n) \cdot h_{membership}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.237)$$

que corresponde a la formulación de la transferencia entrada-salida de los sistemas difusos, redes RBF y demás redes análogas, y justifica la nomenclatura usada en (2.234)-(2.237). Nótese, empero, que la representación en red paralela de la anterior expresión (2.237), mostrada en la figura 2.39, aunque es formalmente equivalente a las figuras 2.34 y 2.37a, a diferencia de ellas el número de nodos de procesado no lineal de la capa oculta no *debe* ser infinito para obtener una recuperación *exacta* de la señal, sino que aquella cardinalidad que asegure (2.233) bajo las condiciones de limitación en banda (2.224)-(2.225) establece una recuperación exacta de la función. El proceso global de muestreo de la función original y recuperación de la misma según filtrado espacial en base a una red de mallado de muestreo y su versión dual de repetición frecuencial se muestra en la figura 2.38 para un caso bidimensional.

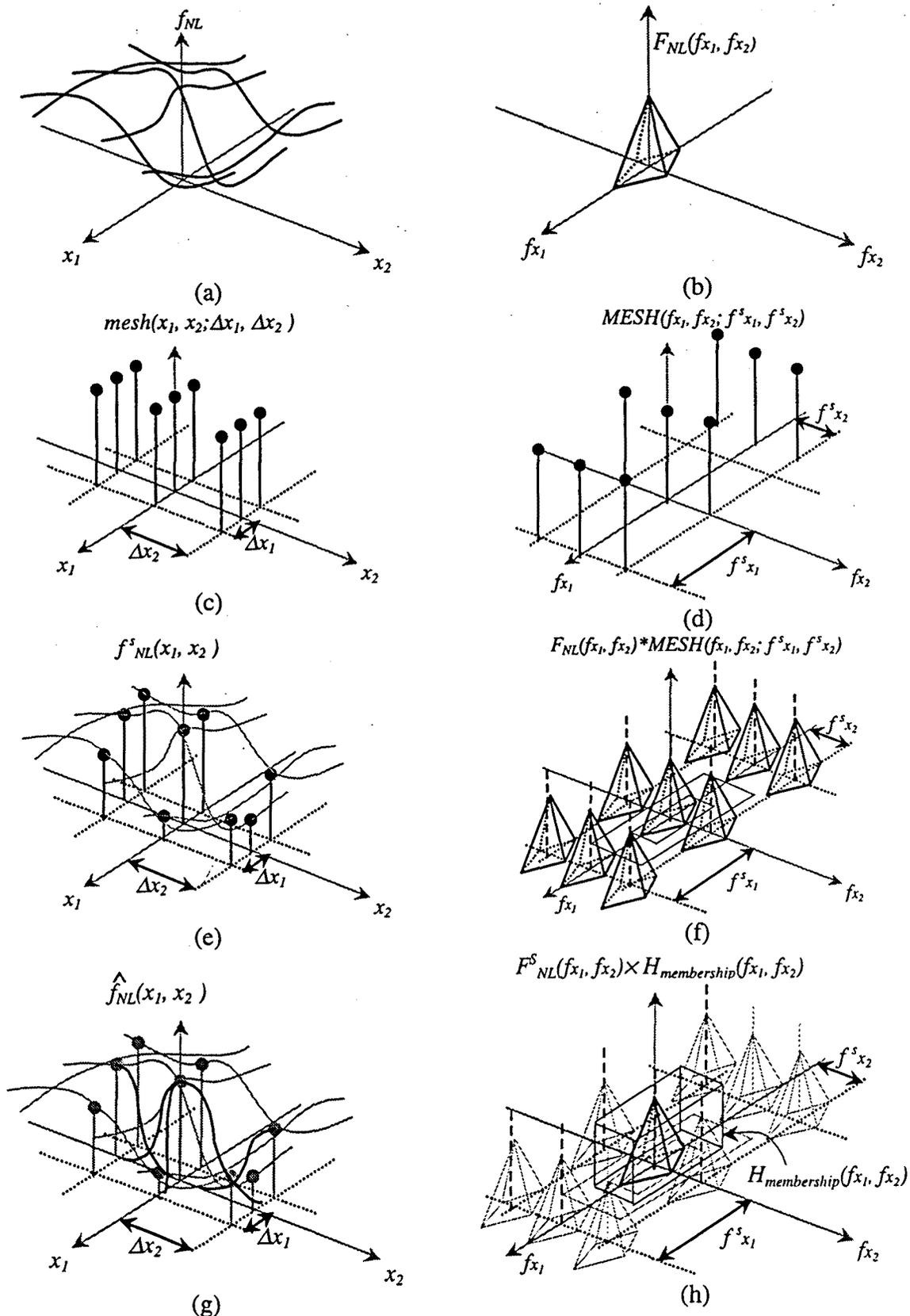


Figura 2.38 Representación del procesado de reconstrucción de una función multidimensional muestreada (a) función original (b) espectro de función original (c) malla de muestreo (d) transformada malla de muestreo (e) función muestreada (f) espectro función muestreada (g) recuperación espacial función (h) recuperación frecuencial o filtrado función

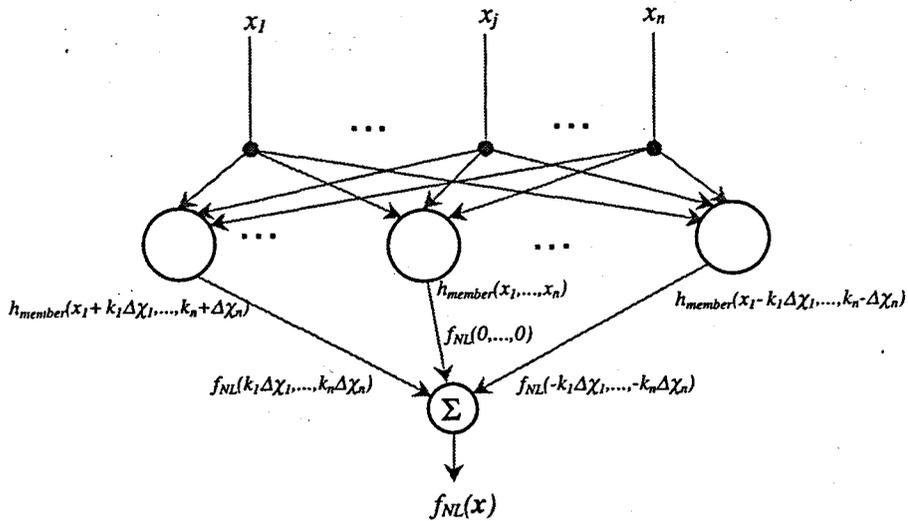


Figura 2.39 Esquema de la red *feedforward* de agregación local que representa la convolución espacial de filtrado sobre la función multidimensional muestreada.

Con el objetivo de continuar el análisis, se presentan a continuación ciertos casos representativos de conformaciones del filtro de reconstrucción y su respuesta espacial asociada.

2.9.6.1 Reconstrucción ideal. Criterio de Nyquist multidimensional espacial.

Considérese la particularización de la expresión que modela el procesado de filtrado espacial multidimensional (2.235) para el caso de un filtro espacial de respuesta constante –como indica (2.234)- cuyo soporte esté definido por un hiperparalelepípedo centrado en el origen de coordenadas frecuenciales (asociado a un soporte rectangular y un filtro ideal en los casos bidimensional y unidimensional, respectivamente), según la característica:

$$R = \left[-\frac{f_{x_1}^s}{2}, \frac{f_{x_1}^s}{2} \right] \times \dots \times \left[-\frac{f_{x_n}^s}{2}, \frac{f_{x_n}^s}{2} \right] \quad (2.238)$$

Asociada al anterior filtrado multidimensional, la respuesta impulsional n -dimensional o función antitransformada de Fourier corresponde a:

$$h_{member}^f(x_1, \dots, x_n) = \text{sinc}(x_1 f_{x_1}^s, \dots, x_n f_{x_n}^s) \quad (2.239)$$

Bajo la anterior particularización, la recuperación de la función original como convolución espacial sobre el espacio de entrada (2.237) resulta en:

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) &= h_{member}^f(x_1, \dots, x_n) * f_{NL}^s(x_1, \dots, x_n) = \\
 &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} f_{NL}(m_1 \Delta x_1, \dots, m_n \Delta x_n) \cdot \left[\text{sinc}(x_1 f_{x_1}^s - m_1) \cdot \dots \cdot \text{sinc}(x_n f_{x_n}^s - m_n) \right] \\
 &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} f_{NL}(m_1 \Delta x_1, \dots, m_n \Delta x_n) \cdot \left[\frac{\text{sin}(x_1 f_{x_1}^s - m_1)}{x_1 f_{x_1}^s - m_1} \cdot \dots \cdot \frac{\text{sin}(x_n f_{x_n}^s - m_n)}{x_n f_{x_n}^s - m_n} \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.240}$$

ecuación que satisface la recuperación de la función original (2.221) si se cumple el criterio de Nyquist n -dimensional (2.232), es decir, si se asegura la suficiente separación entre réplicas espectrales. La función de convolución espacial

$$\frac{\text{sin}(x_1 f_{x_1}^s - m_1)}{x_1 f_{x_1}^s - m_1} \cdot \dots \cdot \frac{\text{sin}(x_n f_{x_n}^s - m_n)}{x_n f_{x_n}^s - m_n} = \prod_{i=1}^n \frac{\text{sin}(x_i f_{x_i}^s - m_i)}{x_i f_{x_i}^s - m_i}
 \tag{2.241}$$

corresponde, en base a la equivalencia con los sistemas difusos de agregación local, a una función de pertenencia localmente sintonizada en el espacio, que modela una relación difusa n -dimensional local conformada como implicación de *Larsen* o de producto (2.37) aplicada sobre funciones de pertenencia unidimensionales de tipo *sinc*.

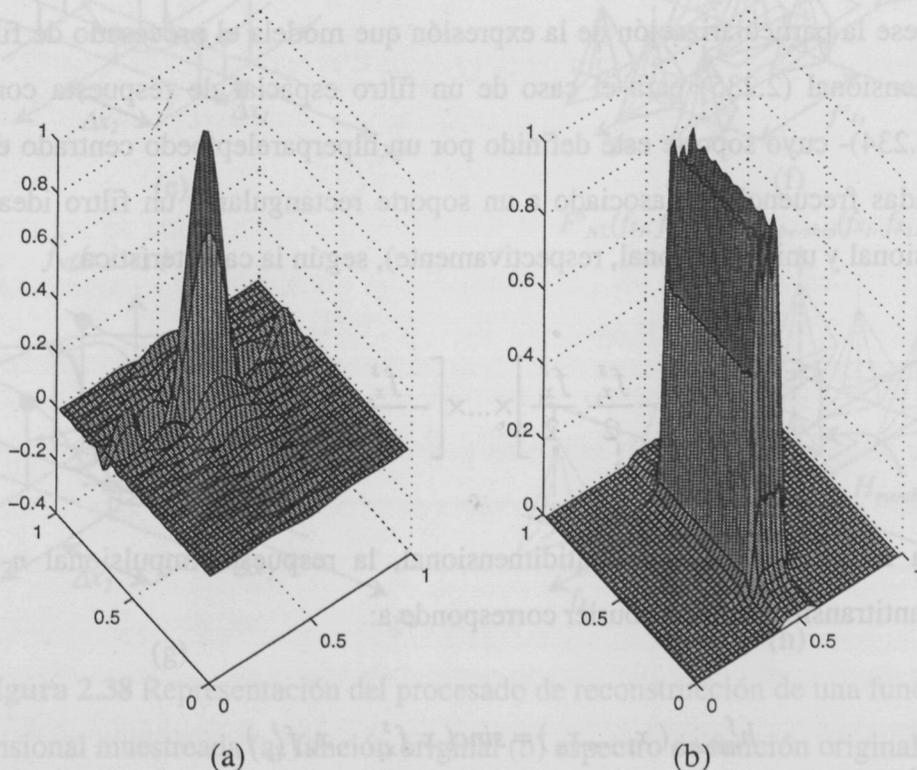


Figura 2.40 (a) Función base difusa bidimensional de tipo *sinc* (b) Transformada de Fourier espacial asociada como filtro ideal de reconstrucción de dominio rectangular.

Si en el caso anterior se considerase la versión bidimensional con simetría radial de la función *sinc*, correspondiente a una red RBF, el filtrado equivalente seguiría siendo ideal, si bien que con un soporte no rectangular sino elipsoidal. Nótese que, en dicho caso, un conocimiento apriorístico sobre el contenido espectral (e.g. distribución de frecuencias diagonales) de la función original puede hacer óptima una aproximación frente a la otra.

Cabe apreciar que para el caso de una recuperación exacta de la función muestreada, como corresponde al ejemplo anterior, y debido al soporte estrictamente acotado de la transformada de Fourier del filtro de reconstrucción (2.234), en virtud de las propiedades de la transformada de Fourier, el soporte espacial de la respuesta impulsional espacial es infinito. Este comportamiento es ilustrado en el ejemplo anterior por el comportamiento de tipo *sinc* para un filtro ideal, pero su generalización sigue siendo válida.

Efectivamente, la anterior operación de filtrado, cuyo soporte en el dominio espacial es infinito, puede interpretarse como una interpolación de orden infinito (grado de solapamiento o interacción entre funciones base infinita) que recupera exactamente la función original, si bien que su aplicación es impráctica, fundamentalmente por dos motivos. Por una parte, nótese que considerando señales de variación temporal, el procesado en el dominio de la frecuencia es práctico, existiendo elaborados métodos de síntesis de respuesta frecuencial, quedando el procesado equivalente en el dominio temporal asociado (como ejemplo, cabe plantear un filtro cuya memoria temporal sea infinita o cuasi-infinita).

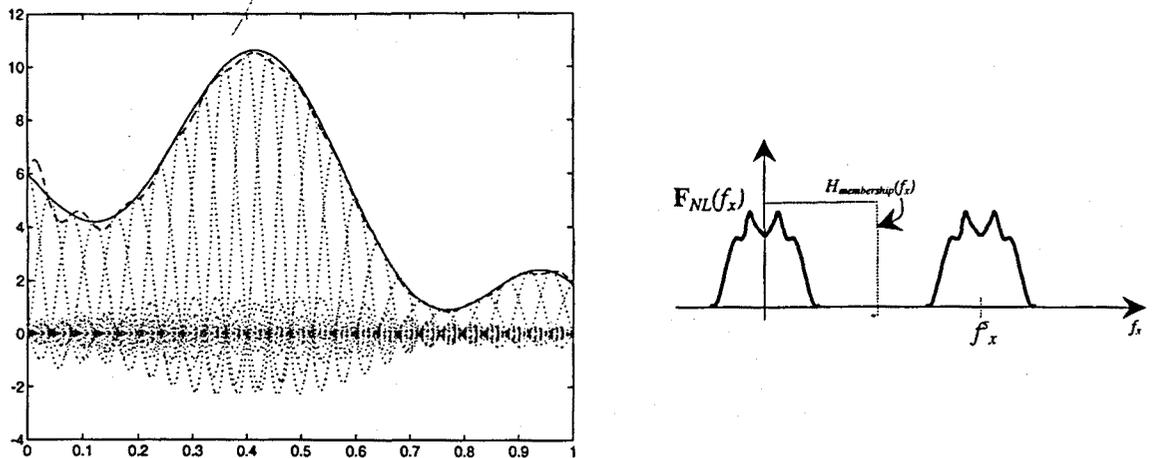


Figura 2.41 Reconstrucción de una función unidimensional mediante funciones base *sinc* (filtro ideal)

Sin embargo en aplicaciones de reconstrucción de funciones sobre espacios multidimensionales abstractos, como corresponde a sistemas difusos y redes RBF, a pesar de

que la interpretación frecuencial es intuitiva y constituye un potente herramienta de análisis, la síntesis del problema de reconstrucción o interpolación se realiza en el dominio espacial. Ello conlleva el elevado carácter impráctico de la interpolación de soporte infinito en el dominio espacial, especialmente desde el punto de vista de la implementación de dichos sistemas. Por otra parte, la consideración de una función definida sobre un soporte no acotado resulta en una pérdida de la reconstrucción exacta en los extremos del soporte, debido a la falta de interacción entre funciones *sinc*. Este efecto aparece equivalentemente en descripciones en serie truncada de Fourier, denominándose *fenómeno de Gibbs*, así como en el comportamiento de aproximaciones polinómicas del tipo aproximación de Lagrange.

Ambos efectos anteriores, ilustrados en la figura 2.41 para el proceso de reconstrucción mediante funciones base *sinc* de la función $f_{NL}(x)=2-x^2+\cos(2x)+2.2\sin(2.3)-3\sin(11x)$, determinan el carácter impráctico de este tipo de reconstrucción, contrariamente a la síntesis de reconstrucción difusa o de tipo RBF.

En este punto cabe citar los recientes resultados de Mitaim y Kosko [MIT96], [MIT97], [MIT98], quienes plantean la cuestión de cuál es la forma óptima para un conjunto difuso en un sistema de inferencia difusa en relación con sus capacidades analíticas de aproximación. Los autores, partiendo de un conjunto de posibles conformaciones seleccionadas de forma heurística (triangular, trapezoidal, gaussiana, de Cauchy, *sinc*, tangente hiperbólica localizada y función logística localizada), concluyen, en base a resultados extraídos de un elevado número de simulaciones, que la conformación de tipo *sinc* es aquella que proporciona los mejores resultados. Esta conclusión, justificada analíticamente en el presente trabajo (2.235), conduce a los autores a extender el tipo de funciones de pertenencia (convencionalmente asociadas a valores de pertenencia en el intervalo de ordenadas $[0,1]$) a las denominadas *funciones de pertenencia extendidas* que pueden presentar valores de pertenencia negativos, a cuya familia pertenece la función *sinc*, a pesar de que los propios autores reconocen la falta de interpretabilidad lingüística de los lóbulos oscilantes de la misma.

Puede también demostrarse que, incluso considerando un filtro no ideal (en el sentido de no presentar un comportamiento idealizado bivaluado –véase (2.234)-), pero que presente una respuesta constante en el espacio frecuencial de contenido armónico significativo de la función, con el fin de establecer una recuperación exacta de la función, y con un decaimiento de cualquier conformación fuera de dicho intervalo, su respuesta impulsional también presenta oscilaciones, si bien que puede estar acotada. Esto es así debido a un comportamiento de convolución frecuencial entre una respuesta gradual y un filtro ideal rectangular de reconstrucción que resulta en un producto espacial que conforma el

comportamiento oscilante propio de la función *sinc*, aspectos ilustrados por la figura 2.41'. Del anterior comportamiento cabe extraer como conclusión que la recuperación *exacta* de una función requiere de la consideración de funciones de pertenencia extendidas. De hecho, la anterior función *sinc*, además de tener un soporte infinito, no es monótona en su definición, presentando características más propias de *wavelets* que de funciones de pertenencia difusas o RBF que pretenden un coste computacional y de implementación reducido, a pesar de que aquélla admite la interpretación ortogonal y de delta generalizada de los apartados anteriores.

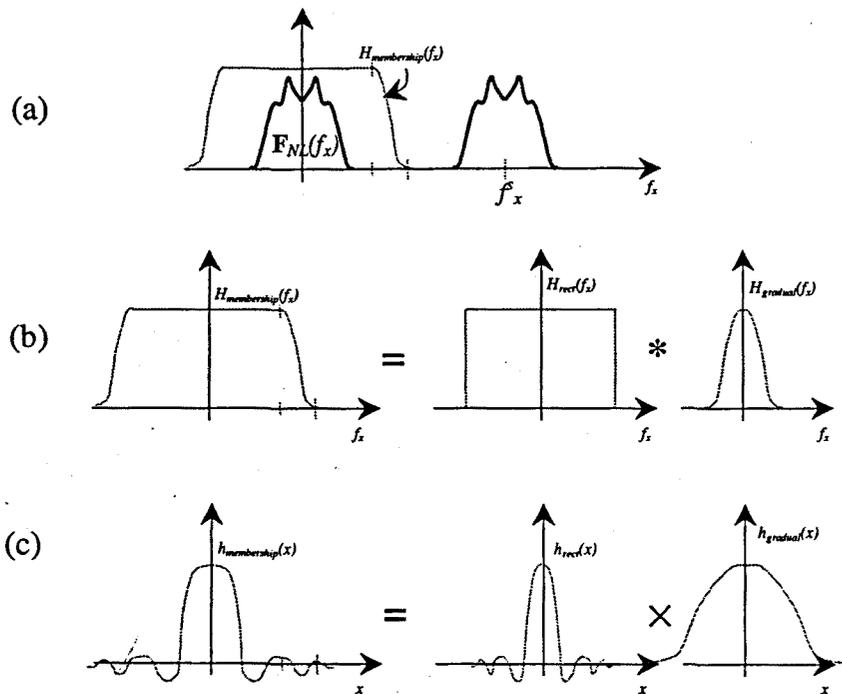


Figura 2.41' Reconstrucción exacta de una función –caso unidimensional-

(a) representación frecuencial (b) transformada de la función de pertenencia expresada como convolución (c) comportamiento espacial de la función de pertenencia generalizada correspondiente a un filtrado de reconstrucción exacta.

Considerando el anterior resultado, que destaca el carácter impráctico a nivel de implementación (e implausible lingüísticamente) de las funciones base de recuperación exacta de la función multidimensional, a continuación se estudian las implicaciones de la interpretación bajo estudio en este apartado para funciones monótonas sencillas y tradicionalmente empleadas en redes RBF (conformación gaussiana) y controladores difusos (conformación triangular), que teóricamente no pueden sintetizar una recuperación exacta.

La obtención de una versión aproximada de la ecuación de recuperación (2.237) no debe interpretarse como una limitación significativa del método de aproximación, ya que, como se

presenta a continuación, es posible obtener aproximaciones razonables a la función original, considerando frecuencias de muestreo apropiadas al ancho de banda de dicha función y una reconstrucción aproximada de la misma (cuantitativamente asociada a un error de reconstrucción que puede tender infinitesimalmente a cero). Obsérvese, como paralelismo, que en la reconstrucción de señales temporales muestreadas, incluso se realiza una recuperación de señal con un pulso temporal rectangular (asociado a un elemento ZOH) cuya conformación en forma de *sinc* frecuencial no impide una reconstrucción apropiada de la señal original.

2.9.6.2 Reconstrucción gaussiana

A continuación se particulariza el desarrollo anterior (2.237) para funciones base de conformación gaussiana. Nótese que la función gaussiana es ubicua en redes RBF así como usualmente considerada en sistemas difusos. Una propiedad relevante de la función gaussiana se debe a que es aquella única función que satisface la condición de invariabilidad de conformación bajo la operación de producto multidimensional -véase (2.137)- y transformación de Fourier, como se muestra a continuación.

Considérese una función gaussiana multidimensional, de varianzas desacopladas en cada dimensión del dominio frecuencial, como filtro de reconstrucción de una función muestreada,

$$H_{member}^f(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) = \frac{1}{b_1} e^{-\pi \left(\frac{f_{x_1}}{b_1}\right)^2} \dots \frac{1}{b_n} e^{-\pi \left(\frac{f_{x_n}}{b_n}\right)^2} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b_i} e^{-\pi \left(\frac{f_{x_i}}{b_i}\right)^2} \quad (2.242)$$

en dicho caso, la función antitransformada de Fourier corresponde a la función multidimensional gaussiana definida sobre el dominio del espacio de aproximación

$$h_{member}^f(x_1, \dots, x_n) = e^{-\pi(b_1 x_1)^2} \dots e^{-\pi(b_n x_n)^2} = \prod_{i=1}^n e^{-\pi(b_i x_i)^2} \quad (2.243)$$

que constituye una función base n -radial, de forma que la particularización de (2.237) resulta en

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} f_{NL}(m_1 \Delta x_1, \dots, m_n \Delta x_n) \cdot e^{-\pi b_1^2 (x_1 f_{x_1}^1 - m_1)^2} \dots e^{-\pi b_n^2 (x_n f_{x_n}^n - m_n)^2} \quad (2.244)$$

ecuación que corresponde a la formulación analítica de la arquitectura de procesamiento paralelo propia al método de redes neuronales RBF.

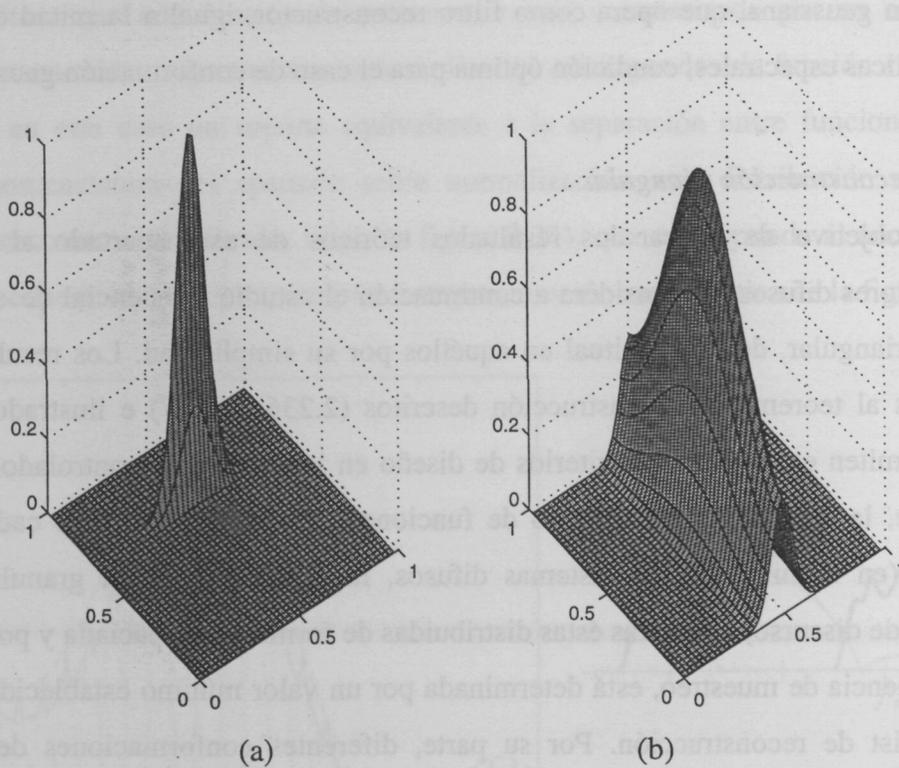


Figura 2.42 (a) Función base bidimensional de tipo gaussiano (b) Transformada espacial de Fourier asociada como filtro de reconstrucción de tipo gaussiano.

La figura 2.42 muestra, a título ilustrativo, la versión bidimensional de una función base gaussiana (2.243), junto a su transformada de Fourier (2.242). Nótese que, tal como anticipan los exponentes en las expresiones (2.243)-(2.242), la interpretación frecuencial de la función base local (interpretable como función de pertenencia asociada a una relación difusa como modelo de un antecedente lógico, o campo receptivo RBF) permite, en virtud de la dualidad espacio/frecuencia, establecer que un comportamiento localizado sobre el espacio de aproximación comporta un mayor ancho de banda de recuperación, y viceversa, siendo comportamientos que se recuperan sobre cada dimensión del problema. Este hecho incide claramente en la densidad direccional del mallado de muestreo, tal como indica analíticamente el criterio de Nyquist (2.232)-(2.233), condicionando por tanto el número de funciones base no lineales (reglas difusas o nodos RBF). Como ejemplo de resultados aparecidos en la literatura que son interpretables bajo esta óptica, destaca, en el área de las redes RBF, la regla heurística que proponen diversos autores y ampliamente aceptada –véase [GOR95] y [TOW99], y sus referencias- calificada de comportamiento *cuasi-óptimo* y que asigna a la varianza de las funciones de reconstrucción la distancia de separación entre redes

RBF contiguas. Bajo la hipótesis de un equiespaciado de funciones RBF, esta condición corresponde a la obtención de un ancho de banda equivalente de la transformada de Fourier de la función gaussiana, que opera como filtro reconstuctor, igual a la mitad de la separación entre réplicas espectrales, condición óptima para el caso de conformación gaussiana.

2.9.6.3 Reconstrucción triangular

Con el objetivo de aplicar los resultados teóricos de este apartado al ámbito de los controladores difusos, se considera a continuación el estudio frecuencial de conformaciones de tipo triangular, de uso habitual en aquéllos por su simplicidad. Los resultados analíticos asociados al teorema de reconstrucción descritos (2.236)-(2.237) e ilustrados por la figura 2.38, permiten establecer dos criterios de diseño en la síntesis de controladores difusos. Por una parte, la estimación del número de funciones de pertenencia sobre cada dirección del espacio, (en terminología de sistemas difusos, la estimación de la granularidad sobre el universo de discurso) supuestas éstas distribuidas de forma equiespaciada y por tanto asociada a la frecuencia de muestreo, está determinada por un valor mínimo establecido por el criterio de Nyquist de reconstrucción. Por su parte, diferentes conformaciones de la función de pertenencia resultan en diferentes conformaciones frecuenciales de la respuesta de recuperación de la función original, de forma que para una conformación dada, puede analizarse su impacto en el proceso de reconstrucción. Estos aspectos se ilustran en las siguientes gráficas para la función ejemplo $f_{NL}(x)=2-x^2+\cos(2x)+2.2\sin(2.3)-3\sin(11x)$ y diferente casuística.

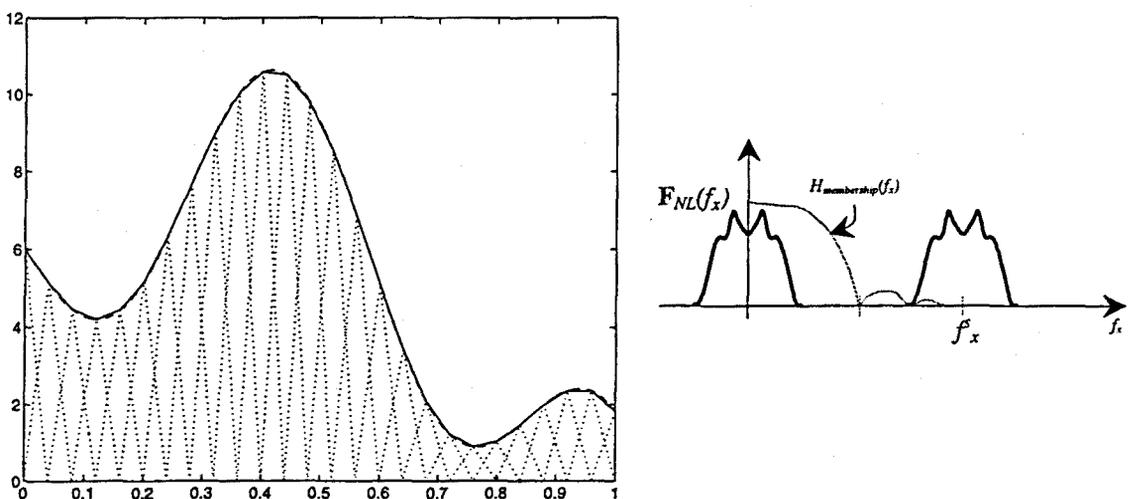


Figura 2.43 Reconstrucción de una función unidimensional mediante funciones base triangulares. Caso óptimo $h=d$.

La figura 2.43 corresponde a una separación entre funciones de pertenencia contiguas cuya frecuencia de réplica espacial satisface el criterio de Nyquist y no comporta una pérdida por *aliasing*. Nótese que una función de pertenencia está caracterizada por su conformación (triangular en este caso, cuya transformada de Fourier corresponde a la función $\text{sinc}^2(f)$) y por su anchura, en este caso un soporte equivalente a la separación entre funciones contiguas (según la nomenclatura del apartado sobre normalización, una distribución con $h=d$, de comportamiento autonormalizado, véase la figura 2.31), que corresponde al ancho de banda óptimo de recuperación, tal como muestra la representación esquemática de la figura 2.42.

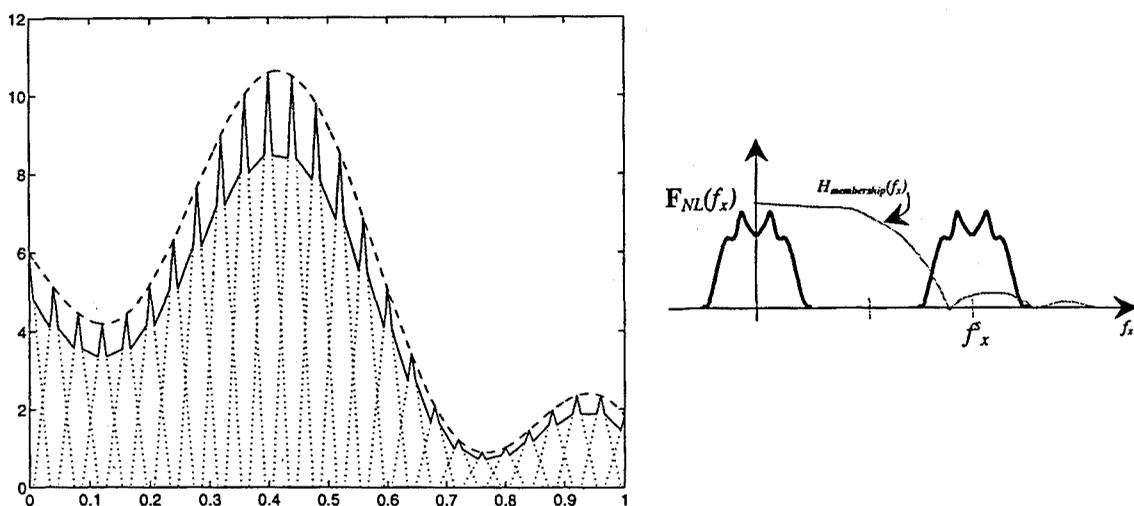


Figura 2.44 Reconstrucción de una función unidimensional mediante funciones base triangulares. Efecto de réplicas frecuenciales.

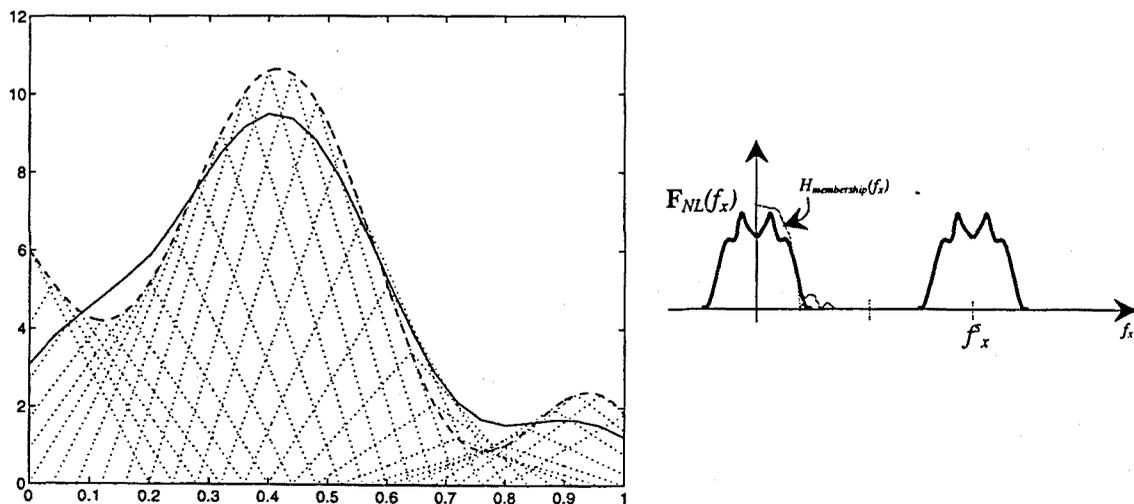


Figura 2.45 Reconstrucción de una función unidimensional mediante funciones base triangulares. Efecto de filtrado de las componentes de f_{NL} .

Cabe citar que en la reconstrucción de la función mostrada para el caso óptimo en la figura 2.43, la conformación de interpolación de primer orden que se aprecia en la función reconstruida puede asociarse a los efectos de filtrado imperfecto debido a la conformación $\text{sinc}^2(f)$, cuyos lóbulos frecuenciales de atenuación finita resultan en un residuo de la réplica frecuencial.

Las figuras 2.44 y 2.45 representan los casos en que, manteniendo la frecuencia espacial de muestreo, (*i.e.* sin existencia del fenómeno de *aliasing*) se considera una variación del soporte de las funciones de pertenencia, con $h < d$ y $h > d$, respectivamente. El primer caso corresponde a una situación en la que no se filtran adecuadamente las réplicas de alta frecuencia, debido a un soporte insuficiente de las funciones triangulares, que no realizan la interpolación esperada, apareciendo de este modo en la reconstrucción de la función componentes de variación de alta frecuencia debidas a réplicas frecuenciales. En el caso opuesto (figura 2.45), la excesiva interacción o solapamiento entre funciones base contiguas resulta en un filtrado espacial de las componentes de alta frecuencia de la función original.

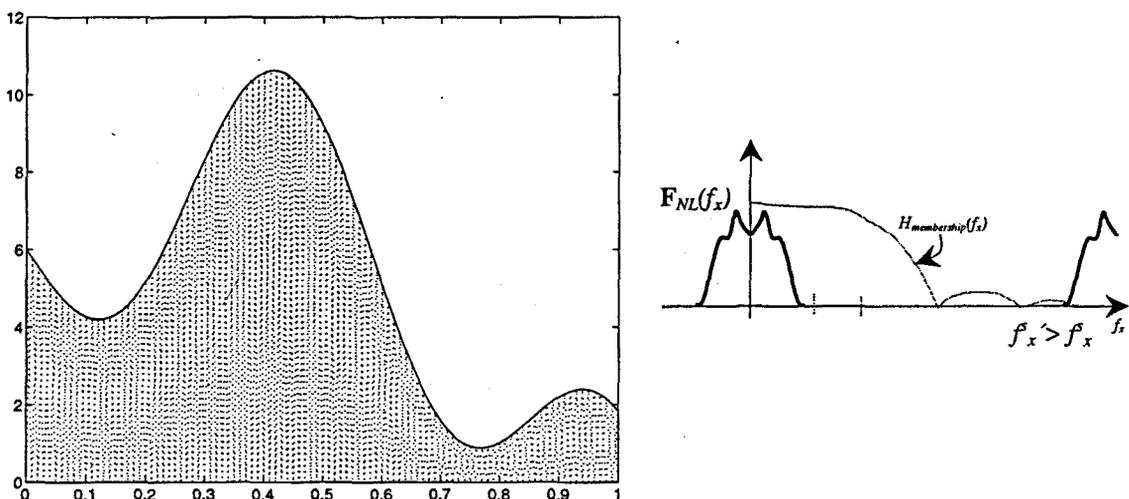


Figura 2.46 Reconstrucción de una función unidimensional mediante funciones base triangulares. Sobremuestreo, recuperación óptima teórica.

El conocimiento apriorístico de la información que contiene la función multidimensional a aproximar por el sistema difuso es crucial en la optimización del número de reglas. En relación con los aspectos de reconstrucción, dicho conocimiento pasa por la obtención del ancho de banda para asegurar un número de funciones base (reglas) apropiado al problema, para una cierta cota de error considerada. En dicho sentido, la figura 2.46 muestra un caso de excesiva frecuencia de muestreo (separación menor a la necesaria), sobremuestreo que resulta

en un exceso de funciones base, de forma que la primera réplica espectral está situada muy por encima del ancho de banda de la función original, siendo así que una mayor interacción entre reglas (*i.e.*, $h \gg d$), aunque lingüísticamente implausible, permitiría la recuperación de la señal, tal como muestra la figura 2.47.

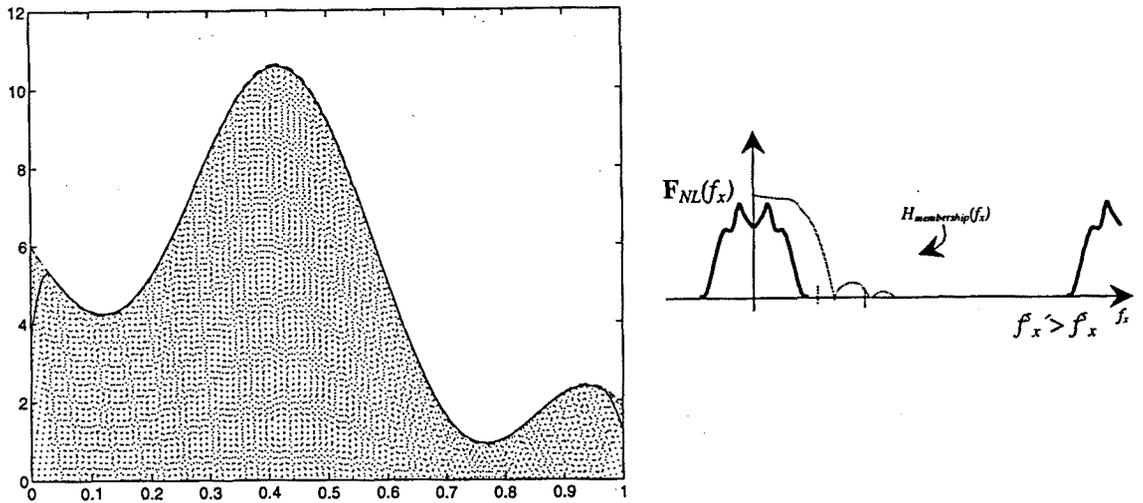


Figura 2.47 Reconstrucción de una función unidimensional mediante funciones base triangulares. Sobremuestreo con recuperación suficiente.

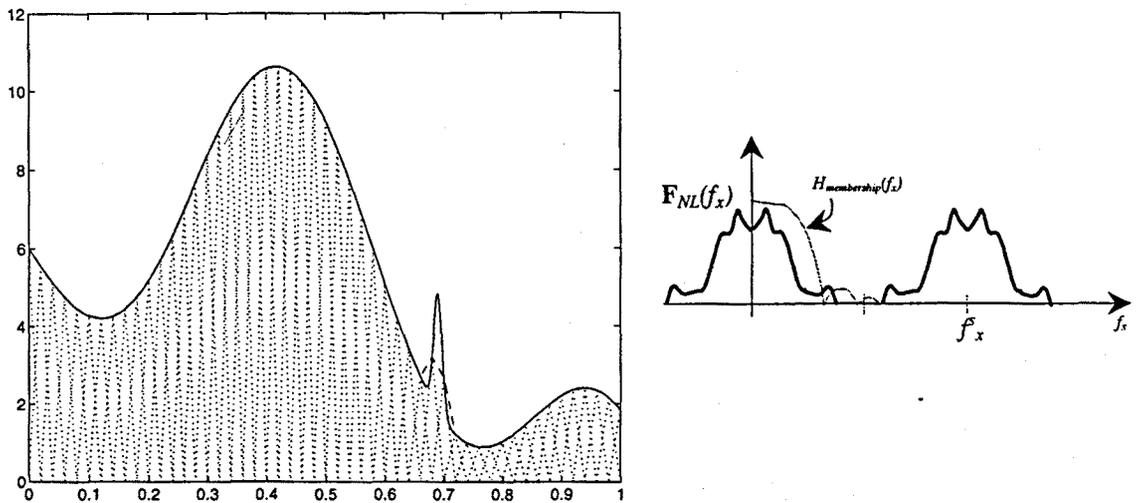


Figura 2.48 Reconstrucción de una función unidimensional mediante funciones base triangulares. Componentes de alta frecuencia en $f_{NL}(x)$

La figura 2.48 constituye un ejemplo ilustrativo en que, a pesar de que la conformación global de la función original es recuperada, el sistema de interpolación difusa es incapaz de recuperar comportamientos locales de alta variabilidad.

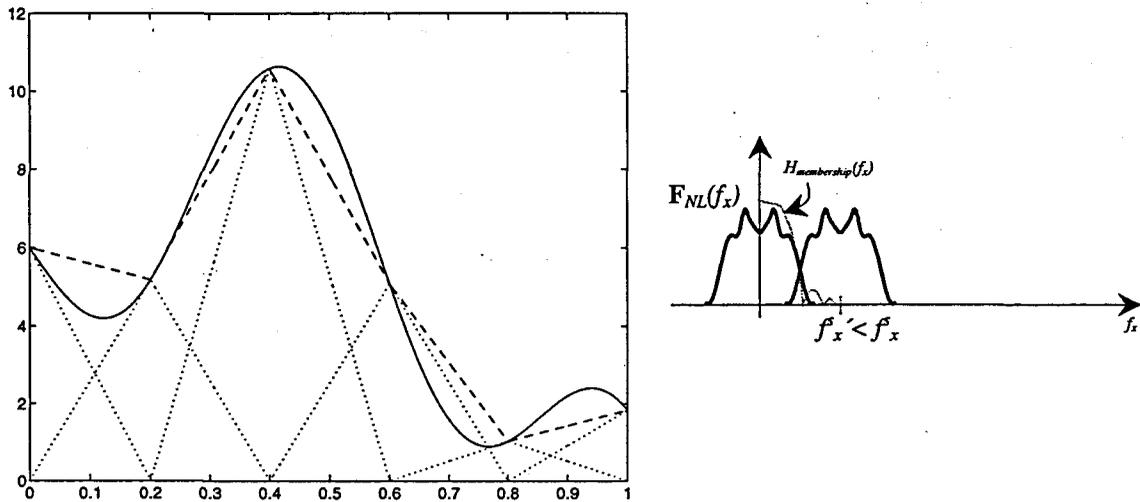


Figura 2.49 Reconstrucción de una función unidimensional mediante funciones base triangulares. Efecto de *aliasing*.

El último de los casos mostrados –figura 2.49- corresponde a la existencia de *aliasing*, que implica una interacción entre réplicas espectrales, debido al insuficiente muestreo, que resulta en la irrecuperabilidad de la función original, independientemente de la conformación y la anchura de la función base. Obsérvese que, aunque la anchura del filtro es óptima, la recuperación de señal no es satisfactoria debida al *aliasing*. En dicho caso, el error de recuperación depende del contenido armónico particular a cada función.

La generalidad de las expresiones (2.236) y (2.237) que modelan el proceso de reconstrucción para cualquier orden de dimensionalidad del problema permiten extender los razonamientos anteriores, realizados para el caso particular de la síntesis de funciones unidimensionales no lineales mediante controladores difusos, al caso práctico de controladores difusos MISO o MIMO. En este sentido, la figura 2.50 ilustra el comportamiento de la función transformada de Fourier de la relación difusa bidimensional obtenida como norma-*t* de tipo mínimo sobre las extensiones cilíndricas de funciones de pertenencia triangular. En la figura se aprecia cómo la existencia de aristas en la función local obtenida (a diferencia de la relación difusa obtenida mediante una función radial triangular) resulta en componentes espectrales diagonales de tipo *sinc*² en su función transformada.

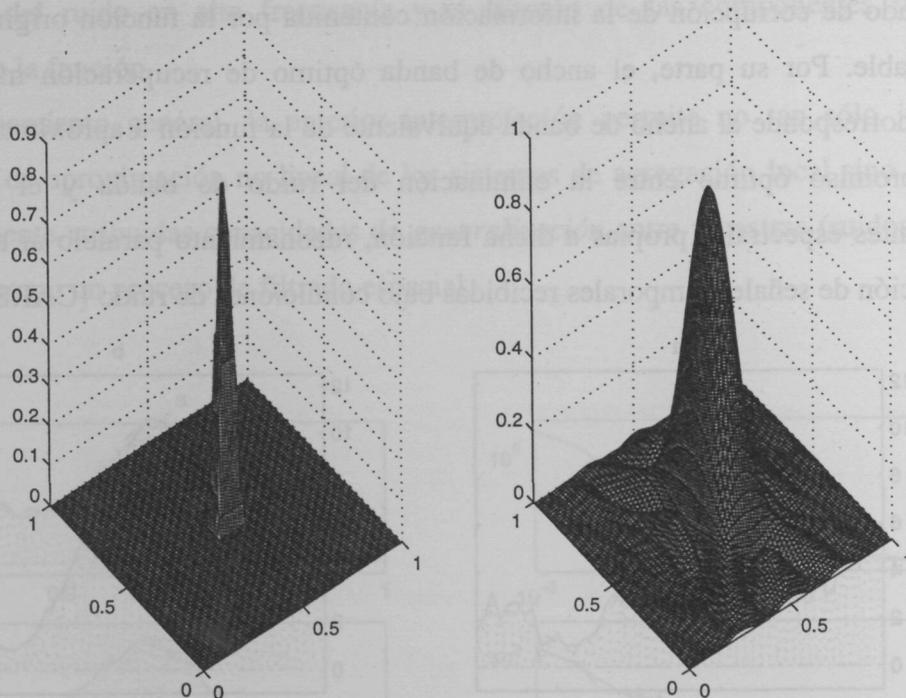


Figura 2.50 Función base bidimensional como relación difusa obtenida mediante norma- t de mínimo sobre funciones de pertenencia triangular y su función transformada como filtro de reconstrucción

2.9.6.4 Filtrado espacial óptimo de ruido

Como último ejemplo que muestra la relevancia de la interpretación en base a conceptos de muestreo y recuperación frecuencial, cabe plantear la aplicación de esta interpretación al estudio de los efectos del ruido presente en las muestras de la función a aproximar. Muy recientemente, algún trabajo de la literatura sobre redes neuronales y controladores difusos aborda este aspecto, que pretende estudiar, a diferencia de los análisis clásicos sobre la determinación del error sobre la función recuperada en la salida debido a las imperfectas propiedades de aproximación funcional, el efecto del ruido presente en las muestras (que corresponden a ejemplos de entrenamiento en el caso de aprendizaje neuronal). Destaca la propuesta de Townsend y Tarassenko [TOW99] quienes plantean, para redes neuronales RBF, la obtención de cotas para el error de salida debido al ruido presente en las muestras de aprendizaje, basándose en análisis matemáticos de modelos de perturbaciones. El estudio del efecto de la superposición de ruido en base a los modelos de muestreo presentados en este apartado, supuesto éste de distribución espectral plana como corresponde al ruido presente en un entorno de implementación o de medida, permite extraer las siguientes conclusiones. Supuesto un ruido distribuido uniformemente sobre toda la banda, el fenómeno de *aliasing* presente en los métodos de interpolación de funciones base locales comporta siempre un

cierto grado de corrupción de la información contenida por la función original que deviene irrecuperable. Por su parte, el ancho de banda óptimo de recuperación mediante filtrado espacial corresponde al ancho de banda equivalente de la función a aproximar, que establece un compromiso óptimo entre la eliminación del ruido de banda y el filtrado de las componentes espectrales propias a dicha función, razonamiento paralelo al aplicado para la recuperación de señales temporales recibidas bajo condiciones de ruido [CAR80].

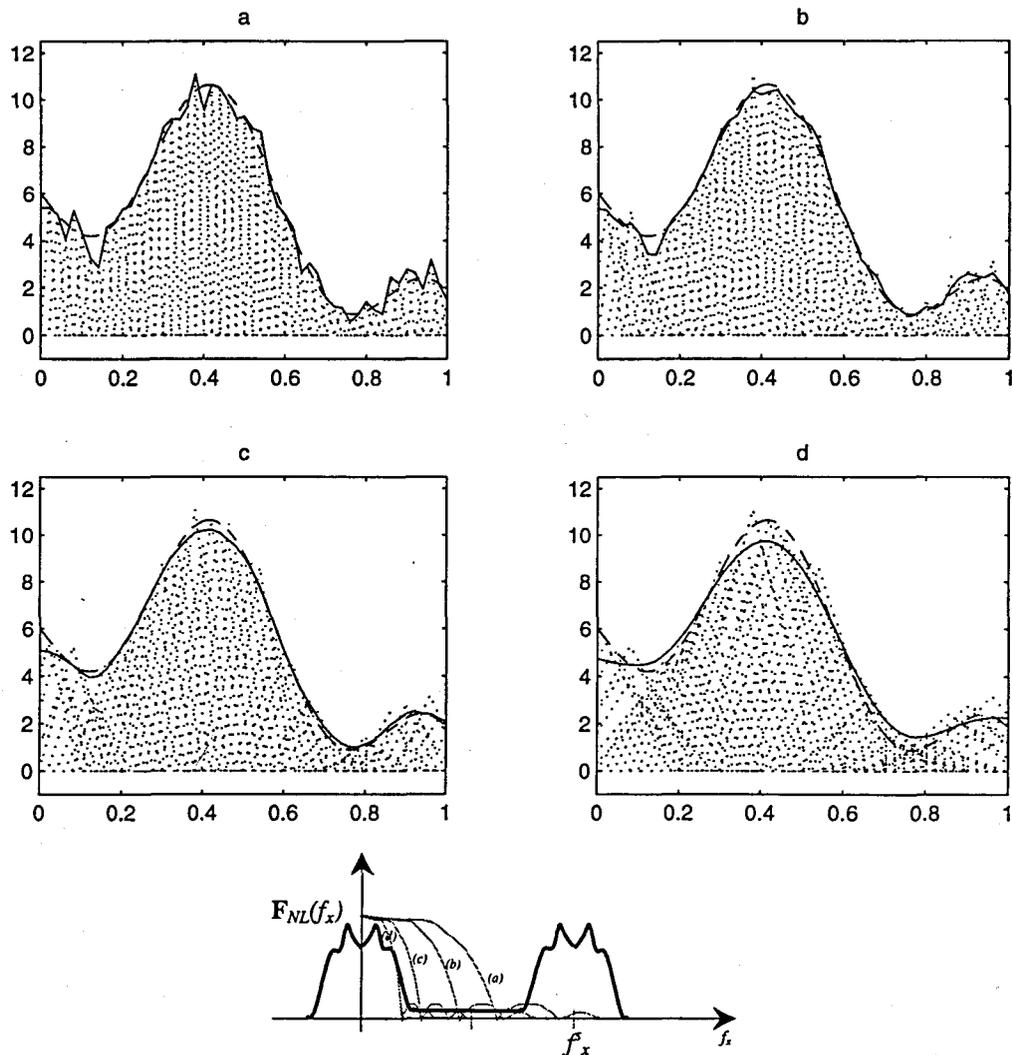


Figura 2.51 Reconstrucción de una función unidimensional mediante interpolación de funciones locales en presencia de ruido en las muestras de reconstrucción.

La figura 2.51 muestra el comportamiento óptimo de reconstrucción mediante funciones de pertenencia difusas triangulares respecto al contenido armónico deseado (subfigura c) relacionado con los anteriores aspectos, mostrándose en la figura 2.52 el comportamiento espectral correspondiente, en el que puede apreciarse el compromiso entre el filtrado

insuficiente del ruido en alta frecuencia y el filtrado de las componentes frecuenciales relevantes de la función.

Como razonamiento general, la anterior interpretación permite no tan sólo justificar las capacidades de aproximación no lineal de los sistemas de agregación local sino también sus tradicionalmente atribuidas capacidades de *generalización* entre muestras (ruidosas), aspecto justificable como un proceso de filtrado espacial.

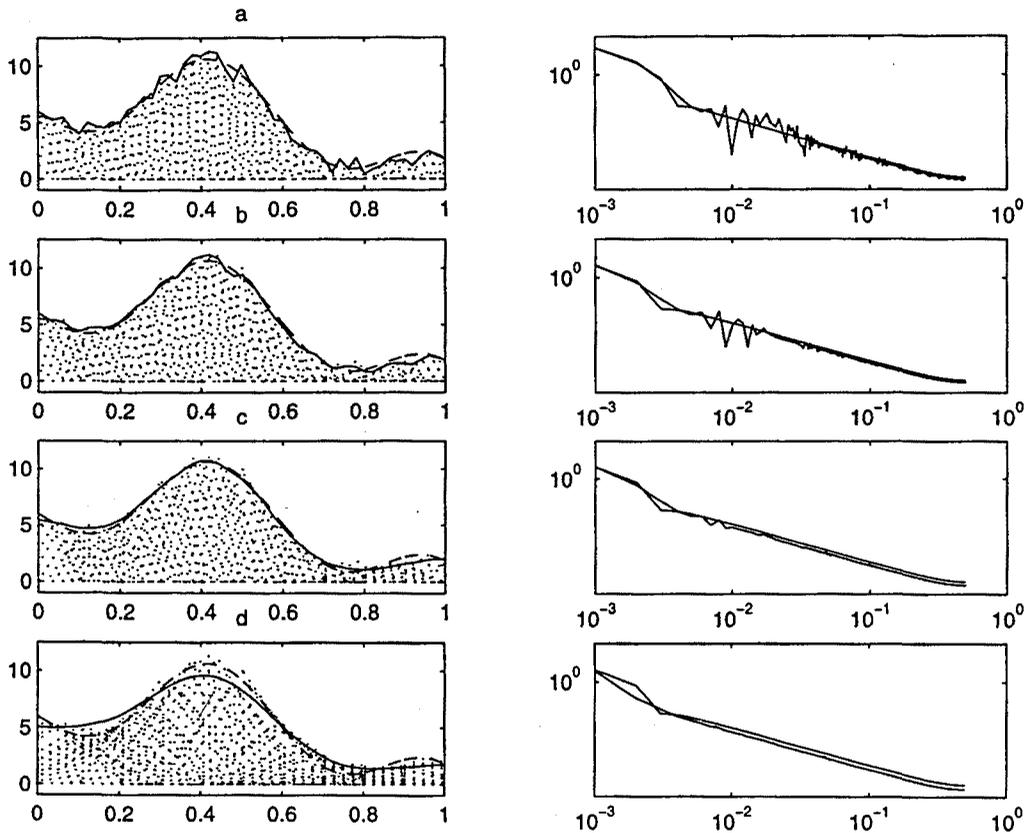


Figura 2.52 Reconstrucción de una función unidimensional mediante interpolación de funciones locales en presencia de ruido en las muestras de reconstrucción. Espectros correspondientes al proceso de reconstrucción.

Cabe extender el análisis representado sobre funciones locales de conformación triangular, de aplicación clásica a sistemas de inferencia, a cualquier conformación polinómica local, es decir a conformaciones de tipo *spline*, dado que éstas presentan la propiedad de ser descritas de forma recurrente a partir de la *spline* rectangular o de orden cero, correspondiente a un conjunto de lógica clásica:

$$\beta_o(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.244b)$$

según una relación recursiva de correlación espacial

$$\beta_n(x) = \beta_{n-1}(x) * \beta_0(x) \quad (2.244c)$$

que resulta, en virtud de la propiedad de convolucion de la función transformada de Fourier, en la n -ésima exponenciación de la función *sinc*:

$$B_n(\omega) = B_0(\omega) = \text{sinc}^{n+1}(\omega) \quad (2.244c)$$

2.9.6.5 Formulación matricial. Muestreo genérico

La formulación del teorema de reconstrucción (2.237) que modela la operación de los sistemas de agregación local y permite su interpretación frecuencial admite como crítica el hecho de corresponder a un mallado uniforme de la función original, si bien que incorrelado en cada dirección del espacio y asignable en función de los anchos de banda direccionales, distribución que no siempre presentan los sistemas difusos y redes RBF. Con el objetivo de salvar este obstáculo de modelado, se presenta a continuación una reformulación matricial de dicho teorema que modela una operación cuyas funciones base no están condicionadas direccionalmente, a pesar de constituir un mallado regular, independientemente del indexado dimensional asociado a (2.237), y por tanto a (2.179)-(2.180) y de forma más afín a las formulaciones originales de los controladores difusos (2.104) y redes RBF (2.122). Esta descripción, a pesar de constituir un mallado regular, permite investigar diferentes redes de muestreo con el fin de disminuir la densidad de muestreo, que resulta directamente en una reducción de reglas difusas o nodos RBF.

Considérese, para iniciar la descripción, el conjunto de vectores independientes de muestreo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (v_{11}, v_{21}, \dots, v_{n1})' \\ \mathbf{v}_2 &= (v_{12}, v_{22}, \dots, v_{n2})' \\ &\dots \\ \mathbf{v}_n &= (v_{1n}, v_{2n}, \dots, v_{nn})' \end{aligned} \quad (2.245)$$

a partir del cual las coordenadas que marcan la posición de las muestras de la función, que no presentan necesariamente distribución rectangular, quedan descritas por:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= v_{11}m_1 + v_{21}m_2 + \dots + v_{n1}m_n \\
 x_2 &= v_{12}m_1 + v_{22}m_2 + \dots + v_{n2}m_n \\
 &\dots \\
 x_n &= v_{1n}m_1 + v_{2n}m_2 + \dots + v_{nn}m_n
 \end{aligned}
 \tag{2.246}$$

cuya representación en notación compacta matricial es

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{m}
 \tag{2.247}$$

expresión en la que el vector de posiciones de muestreo, el vector de índices y la matriz de vectores de muestreo o matriz de muestreo son, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= (x_1, \dots, x_n) \\
 \mathbf{m} &= (m_1, \dots, m_n) \\
 \mathbf{V} &= [\mathbf{v}_1 | \dots | \mathbf{v}_n]
 \end{aligned}
 \tag{2.248}$$

Según la anterior notación matricial de muestreo (2.247), la secuencia multidimensional que describe la versión muestreada de la función no lineal bajo estudio – véase la figura 2.38e – sigue la expresión:

$$\mathbf{x}(\mathbf{m}) = f_{NL}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{m})
 \tag{2.249}$$

A continuación se describe, mediante dicha formulación matricial, la expresión que representa la operación de los sistemas de agregación local como reconstrucción de una función a partir de sus muestras. Considerando la expresión generalizada a nivel vectorial de la transformada de Fourier multidimensional de la función f_{NL} :

$$F_{NL}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{NL}(\mathbf{x}) e^{-j\Omega' \mathbf{x}} d\mathbf{x}
 \tag{2.251}$$

en la que se considera definido el vector de frecuencias continuas:

$$\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_n) \quad (2.252)$$

la expresión que modela la extensión periódica de $F(\Omega)$, es decir, la transformada de Fourier de la secuencia $x(\mathbf{m})$ (2.249) resulta, en notación vectorial:

$$\mathbf{X}(\omega) = \sum_m x(\mathbf{m}) e^{-j\omega \mathbf{m}} = \mathbf{X}(\mathbf{V}'\Omega) = \frac{1}{|\det \mathbf{V}|} \sum_k F(\Omega - \mathbf{V}k) \quad (2.253)$$

A partir de la descripción vectorial del comportamiento de réplica frecuencial, que representa la señal muestreada, y considerando un filtro reconstructor paso bajo definido por

$$F(\Omega) = \begin{cases} |\det \mathbf{V}| \cdot \mathbf{X}(\mathbf{V}\Omega) & \Omega \in B \\ 0 & \Omega \notin B \end{cases} \quad (2.254)$$

la señal reconstruida queda representada por:

$$f_{NL}(\mathbf{x}) = \sum_m x(\mathbf{m}) \cdot g(\mathbf{x} - \mathbf{V}\mathbf{m}) \quad (2.255)$$

expresión en la que la función g define, de forma genérica, la función local como función de pertenencia multidimensional difusa o campo receptivo RBF, que sigue la expresión:

$$g(\mathbf{x}) = \frac{|\det \mathbf{V}|}{(2\pi)^n} \int_B e^{j\Omega' \mathbf{x}} d\Omega \quad (2.256)$$

El desarrollo anterior (2.255), además de representar de forma más compacta el teorema de reconstrucción por filtrado espacial, permite seleccionar, en virtud de los grados de libertad que imponen la definición de los vectores de muestreo (2.245), una adecuada densidad de muestras sobre el espacio de aproximación para distintas conformaciones espectrales de la función multidimensional de banda limitada. En concreto, si el espectro de la función f_{NL} no presenta simultáneamente contenido de alta frecuencia sobre todas las frecuencias espaciales,

puede afirmarse (extendiendo los resultados de [TOR93] obtenidos para una versión bidimensional del anterior desarrollo, y aplicados a muestreo de señal de televisión) que, considerando redes de muestreo diagonales en el espacio, la densidad de muestras (número de reglas difusas o nodos RBF) se reduce en un factor $(1/2)^{n-1}$.

Nótese que, como conclusión relevante, los aspectos anteriores formalizan la idea, propuesta por diversos autores del área de los controladores difusos y redes RBF –véase *e.g.* [POG90]–, de que un conocimiento apriorístico de las características de la función a aproximar permite optimizar el proceso de aproximación de la misma.

La generalización definitiva de las anteriores formulaciones del teorema de muestreo en su versión rectangular (2.237) o de muestreo regular genérico (2.255) requeriría del uso de técnicas de descripción de muestreo no uniforme, cuya descripción analítica, especialmente compleja, ha podido ser parcialmente abordada mediante análisis de *tramas* –véase *e.g.* [SAN94a]–. Efectivamente, a pesar del conocimiento extraído de la interpretación de muestreo espacial, la distribución de reglas de un controlador difuso y los campos receptivos de redes RBF puede presentar distribuciones no uniformes (plántese el caso en el que se pretende obtener una mejor resolución espacial de reconstrucción en zonas espaciales en las que se requiere mayor precisión, *e.g.* en aquéllas en las que converge el régimen permanente del sistema de control, o en las que las características no lineales son más abruptas). En dicho caso sería posible aplicar el análisis precedente de forma local, de forma que el espacio de entrada fuera dividido en ciertas zonas sobre las que se obtendría el contenido espectral o ancho de banda local de la función original, en función del cual podría asignarse la densidad de muestreo local.

2.9.6.6 Convolución difusa

Por último, una reflexión sobre la interpretación del teorema de recuperación de una función muestreada como convolución en el dominio espacial, según (2.237), permite reinterpretar la operación de un sistema de inferencia difusa. En efecto, supóngase la transferencia no lineal zonal que representa un sistema experto clásico (o equivalentemene un control por zonas de transferencia abrupta, *i.e.* un *gain-scheduler* o *look-up table*), en dicho caso el efecto difuso proviene exclusivamente de un filtrado espacial, debido a la convolución con la función impulsional multidimensional $h_{membership}(x_1, \dots, x_n)$ que corresponde al conjunto base difuso y que establece un suavizado de la característica de transferencia no lineal, según ilustra la figura 2.52.

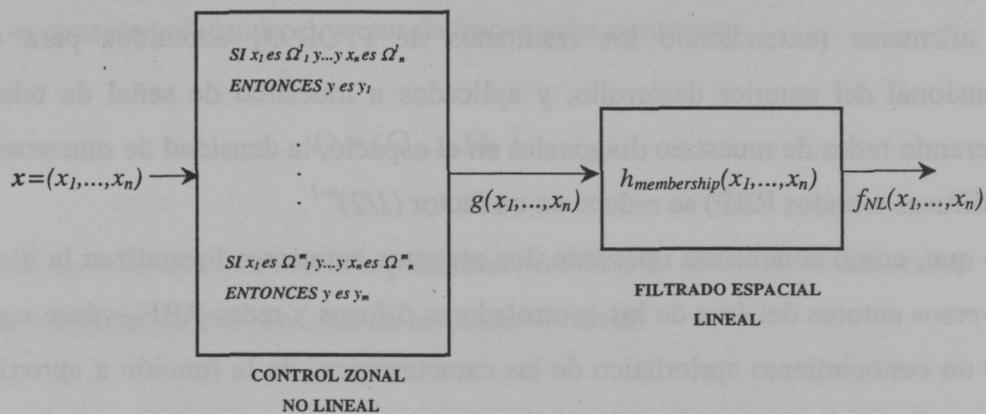


Figura 2.53 Interpretación de la operación de un sistema difuso como combinación de un sistema experto basado en reglas que establece una división zonal no lineal del espacio de entrada seguido de un filtro lineal modelado por su respuesta impulsional

El anterior concepto, que interpreta la característica difusa de un sistema como el filtrado espacial o convolución mediante kernels o funciones locales difusas, se aplica en un ejemplo ilustrativo en la figura 2.54, en la que se observa, por una parte, un conjunto o relación bidimensional clásica (aunque multivaluado, que corresponde a una imagen *crisp*, nítida) al que se aplica un filtrado de convolución difuso mediante una función gaussiana bidimensional que torna *visualmente* difuso, por establecer una gradación difusa sobre los contornos, el conjunto original.

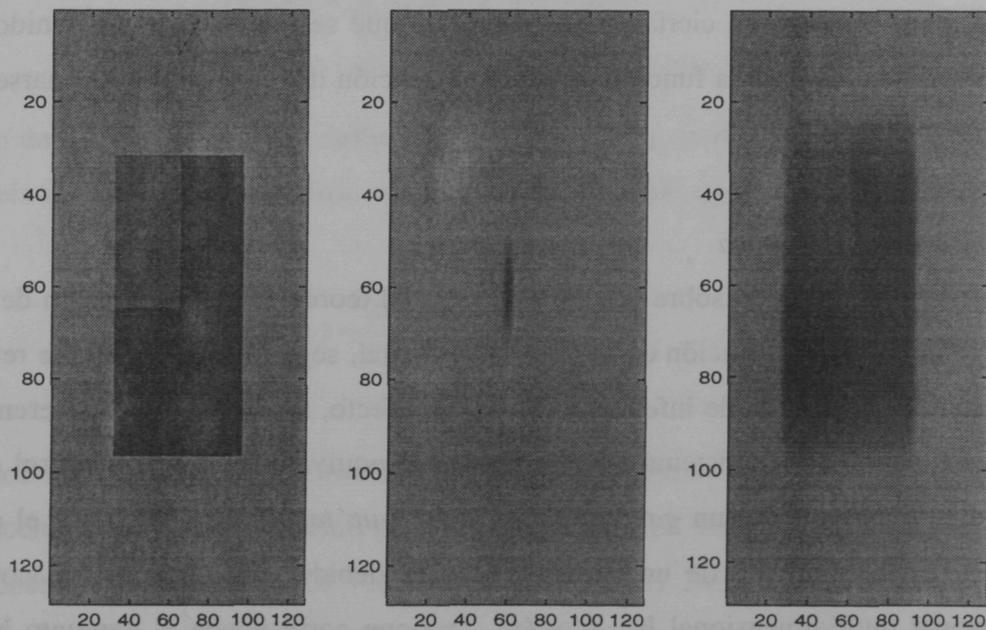


Figura 2.54 Interpretación de la calidad de difuso de un conjunto como convolución con un filtro espacial. Efecto visual difuso. (a) Función bidimensional original (b) Respuesta impulsional espacial gaussiana de convolución (c) Función bidimensional *fuzzyfieda*.

Ante los resultados mostrados en el apartado de interpretación de los sistemas de agregación local como reconstrucción mediante filtrado de una señal muestreada, cabe destacar ciertos trabajos de la literatura especializada que presentan relación con los mismos.

El trabajo de Pedrycz [PED97] destaca por su propuesta de formular el concepto de *variabilidad* de la función multidimensional a aproximar mediante un sistema difuso, concepto matemático ya descrito en teoría clásica de aproximación de funciones –véase el concepto de *widths* o anchuras en [LOR80]-, y que persigue modelar mediante un índice analítico la *suavidad* de una función, que de hecho corresponde al ancho de banda de la misma en su descripción frecuencial, y cuya interpretación se sustenta en la sólida base teórica del teorema de reconstrucción multidimensional.

Destacan de forma especial los trabajos de Sanner y Slotine [SAN92b] y de González-Serrano *et al.* [GON98a] quienes aplican conceptos frecuenciales al estudio de la aproximación de funciones para los casos, respectivamente, de redes neuronales de función base gaussiana (aplicados a la síntesis de controladores adaptativos no lineales) y del controlador CMAC.

Destaca, asimismo, la descripción de la operación de la interpolación *spline* en una aplicación reciente a procesado de imagen [MIH99] en base a criterios de dominio frecuencial.

2.9.7 Conclusiones sobre las propiedades de aproximación universal

Para concluir el apartado, cabe considerar ciertas reflexiones sobre las implicaciones de los modelos propuestos. Frente al conjunto de resultados publicados que demuestran la aproximación universal de los sistemas difusos, la interpretación fundamentada en el teorema de reconstrucción frecuencial de función muestreada presenta una serie de propiedades que le confieren cierta ventaja. Este modelo demuestra la asignación de los pesos de la combinación lineal (2.104) –que corresponden a los valores *singleton* consecuentes de control local en modelos TSK0 o los centros de los conjuntos difusos consecuentes en controladores Mamdani- a muestras de la función f_{NL} estableciendo así un puente hacia un método de síntesis. Asimismo, constituye la única representación que asegura la aproximación universal (para funciones de banda limitada) sin requerir un comportamiento límite, es decir, sin necesitar de un número infinito de nodos de procesado local no lineal o reglas –en comparación con las demostraciones en base al teorema de Stone-Weierstraß, la demostración en base a conjuntos ortogonales definidos sobre espacios de Hilbert y la demostración que considera el concepto de delta generalizada multidimensional-. Mas allá de las anteriores

características, el modelo de reconstrucción frecuencial resuelve tres cuestiones que diversos trabajos previos mantienen como cuestiones abiertas, a saber:

- 1) ¿Cuántas funciones base (funciones de pertenencia) deben considerarse para resolver el problema de aproximación?. Cuestión, asociada a la granularidad de división del espacio multidimensional sobre el que se plantea el problema de aproximación, cuya respuesta deviene resuelta por la frecuencia de muestreo mínima según el teorema de Nyquist (2.224), condición aplicable independientemente sobre cada dimensión del problema, e incluso de forma local para funciones con características de variabilidad localmente diferenciadas.
- 2) ¿De qué forma deben considerarse las funciones base para resolver el problema de aproximación?. La interpretación de recuperación mediante filtrado en el dominio frecuencial permite predecir el efecto de la conformación de la función base. En concreto, ha sido demostrado que tanto la forma óptima, correspondiente al filtro ideal rectangular, como cualquier filtro de transferencia estrictamente plana requiere de funciones base generalizadas con comportamiento oscilante en el dominio espacial. Para otros tipos de funciones base, el estudio de su conformación frecuencial permite asignar las características de aproximación.
- 3) Seleccionada la frecuencia de muestreo y la conformación de la función base, ¿cuáles son los parámetros (óptimos) que definen las mismas (e.g. anchura de soporte)?. Según conceptos duales entre espacio y frecuencia espacial (según los cuales un menor soporte resulta en una mayor banda de filtrado y viceversa), diversos ejemplos han demostrado el efecto de la anchura sobre la señal recuperada.

2.10 Características analíticas de los controladores difusos Takagi-Sugeno

En los apartados anteriores se han establecido métodos de análisis para el estudio de las características de los sistemas de aproximación no lineal multidimensional de agregación local, que engloban a los sistemas difusos de consecuentes *singleton* constantes (o aquéllos, ubicuos, defuzzyficados con métodos centroidales mediante medias de centros), redes neuronales de función base radial, controladores CMAC, redes probabilísticas GNN, aproximandos *spline* multidimensionales y redes de procesamiento paralelo basadas en *wavelets*. Las analogías expuestas entre los distintos métodos y sus correspondientes representaciones en forma de red de procesamiento paralelo concurrente (neuronal) parecen asignar un carácter homogéneo a todos los métodos, estableciendo una unificación de modelos que no justificaría la adecuada implantación de los controladores difusos en el ámbito de control frente a los demás métodos. El motivo de la diferenciación de los controladores difusos se debe a una extensión *analítica* de los mismos, que conduce al comúnmente denominado controlador difuso Takagi-Sugeno (apócope de Takagi-Sugeno-Kang, tríada de autores de la que se deriva el acrónimo TSK), ya citado en apartados previos, y que amplía de forma determinante tanto sus capacidades analíticas de aproximación estática, como su capacidad de modelar sistemas dinámicos, confiriendo una notable ventaja a estos sistemas de aproximación TSK frente a aquellos otros métodos, si bien que cualquier método de aproximación local es susceptible de incorporar dicha extensión analítica, que a continuación se describe y estudia.

Como introducción al modelo difuso TSK, considérese éste definido, para un espacio de entrada n -dimensional y una de las salidas independientes en un sistema difuso MIMO, modelado como una relación MISO, por un conjunto de M reglas del tipo:

$$R^l: \quad \text{SI } (u_1, \dots, u_n) \text{ es } A^l \mid_{\mu_{R^l}(u_1, \dots, u_n)} \text{ ENTONCES } v \text{ es } f^l_{\text{local}}(u_1, \dots, u_n) \quad (2.256)$$

La anterior definición permite justificar un paso más en la interpretación no tanto lógica o inferencial como analítica del controlador Mamdani –véase (2.45)-, ya expuesta en apartados anteriores. Entendemos, a su vez, que dicha definición (2.256), que establece una clara mejora de carácter analítico, como se discute en el presente apartado, es difícilmente justificable en el ámbito de los controladores difusos según consideraciones lingüísticas. De forma paralela, esta ampliación es difícilmente justificable, si bien que analíticamente plausible, como extensión propia dentro del contexto de la teoría de los campos perceptivos en que se

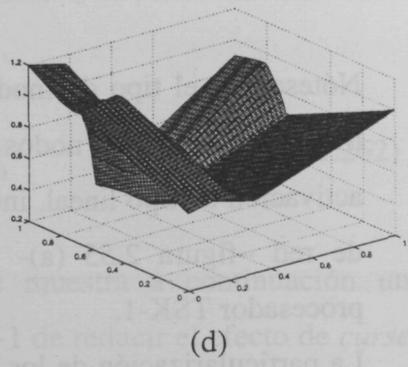
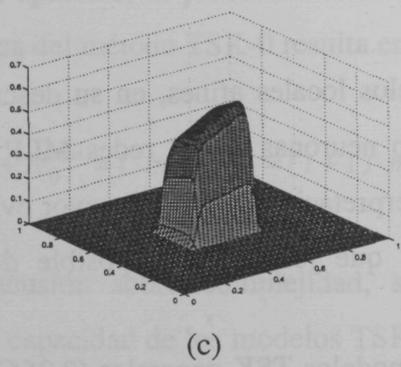
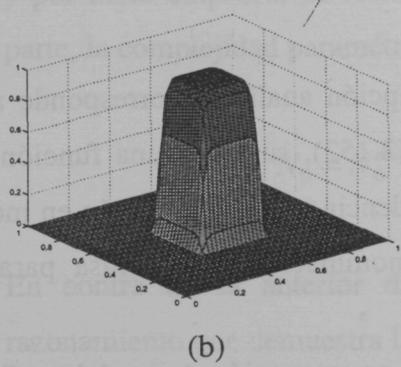
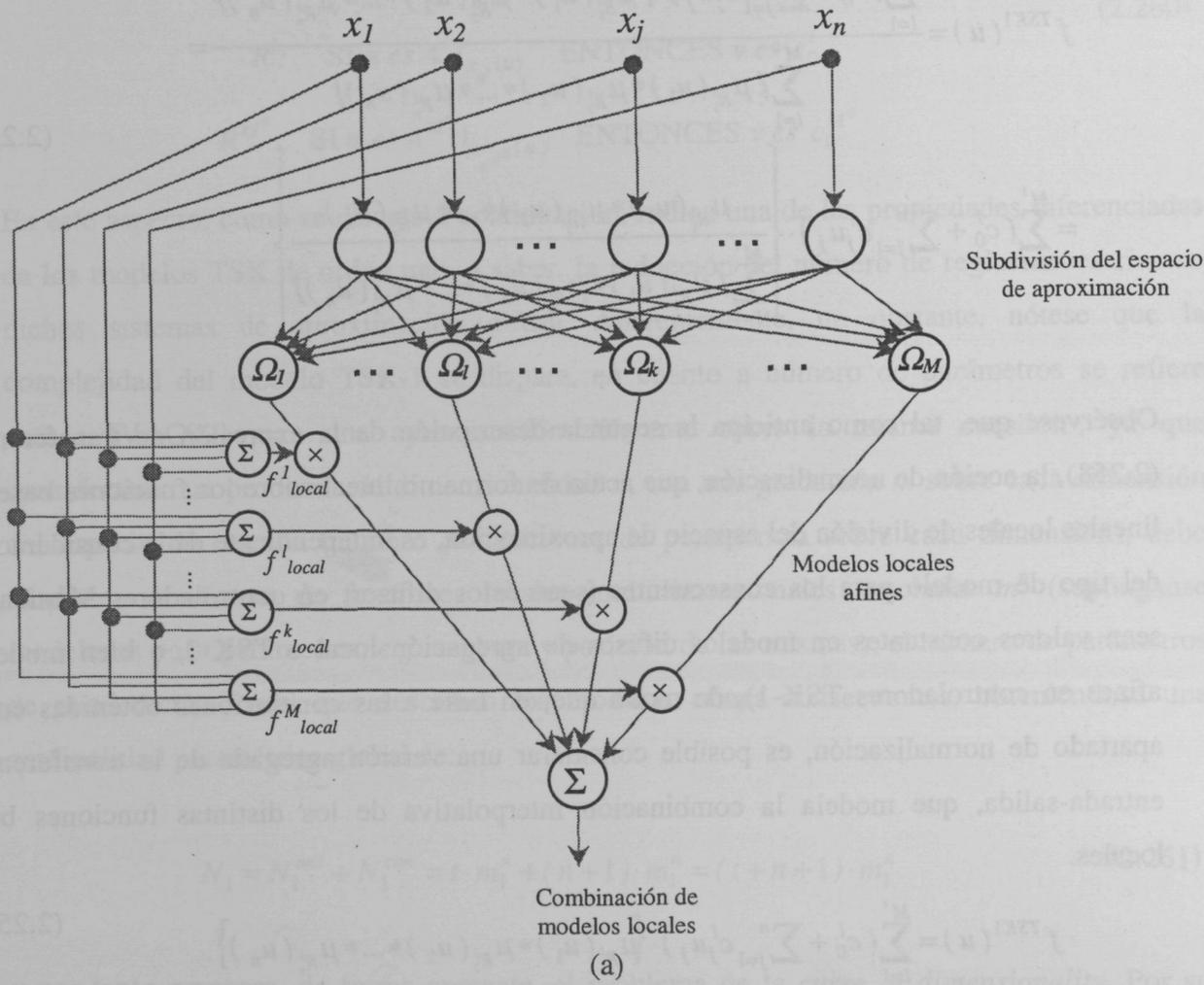


Figura 2.55 Controlador difuso TSK de orden uno o de modelos locales afines (a) Diagrama de bloques a modo de red neuronal (b) Ejemplo de función local de división del espacio (c) Ejemplo de función local afectada del modelo local afín (d) Ejemplo de agregación de 4 modelos locales

$$f^{TSK1}(u) = \frac{\sum_{l=1}^{M^1} (c_0^l + \sum_{j=1}^n c_j^l u_j) \cdot \{ \mu_{R_1^l}(u_1) * \mu_{R_2^l}(u_2) * \dots * \mu_{R_n^l}(u_n) \}}{\sum_{l=1}^{M^1} \{ \mu_{R_1^l}(u_1) * \mu_{R_2^l}(u_2) * \dots * \mu_{R_n^l}(u_n) \}} =$$

$$= \sum_{l=1}^{M^1} (c_0^l + \sum_{j=1}^n c_j^l u_j) \cdot \left\{ \frac{\mu_{R_1^l}(u_1) * \mu_{R_2^l}(u_2) * \dots * \mu_{R_n^l}(u_n)}{\sum_{l=1}^{M^1} \{ \mu_{R_1^l}(u_1) * \mu_{R_2^l}(u_2) * \dots * \mu_{R_n^l}(u_n) \}} \right\} \quad (2.258)$$

Obsérvese que, tal como anticipa la segunda descripción de la expresión de transferencia (2.258), la acción de normalización, que actúa de forma no lineal sobre las funciones base no lineales locales de división del espacio de aproximación, es independiente de la consideración del tipo de modelo para los consecuentes (sean éstos difusos, en controladores Mamdani, sean valores constantes en modelos difusos de agregación local o TSK-0, o bien modelos afines en controladores TSK-1), de modo que, en base a las conclusiones obtenidas en el apartado de normalización, es posible considerar una versión agregada de la transferencia entrada-salida, que modela la combinación interpolativa de las distintas funciones base locales.

$$f^{TSK1}(u) = \sum_{l=1}^{M^1} (c_0^l + \sum_{j=1}^n c_j^l u_j) \cdot \{ \mu_{R_1^l}(u_1) * \mu_{R_2^l}(u_2) * \dots * \mu_{R_n^l}(u_n) \} \quad (2.259)$$

Nótese que el tipo de modelos locales afines, en su descripción analítica, corresponde a la transferencia de los nodos o neuronas de las redes MLP (2.152), supuesta una función de activación de tipo lineal, interpretación que toma mayor evidencia en su descripción en modo de red –figura 2.55 (a)- y que justifica una posible denominación neurodifusa para el procesador TSK-1.

La particularización de los modelos TSK generales (2.256), en su versión de modelos afines (2.257), para el caso $c_j^l=0, j \neq 0, l=1, \dots, M^1$ recupera el modelo TSK-0 de modelos constantes, que corresponde a los modelos de agregación local, y que, en virtud del lema 2.2, modela a sistemas difusos Mamdani bajo condiciones suficientemente generales. Este modelo Takagi-Sugeno de orden cero, compuesto por un conjunto de M^0 reglas del tipo (2.260) corresponde al modelo presentado en el apartado de introducción del control difuso (2.105), si bien que en general se cumple $M^0 \gg M^1$ para un problema de aproximación considerado y una cierta cota de error permitida en el mismo.

$$\begin{array}{l}
R^1: \text{ SI } u \text{ es } A^1 |_{\mu_{R^1}(u)} \text{ ENTONCES } v \text{ es } c_0^1 \\
\vdots \\
R^l: \text{ SI } u \text{ es } A^l |_{\mu_{R^l}(u)} \text{ ENTONCES } v \text{ es } c_0^l \\
\vdots \\
R^{M^0}: \text{ SI } u \text{ es } A^{M^0} |_{\mu_{R^{M^0}}(u)} \text{ ENTONCES } v \text{ es } c_0^{M^0}
\end{array} \quad (2.260)$$

En este aspecto, como se discute a continuación, radica una de las propiedades diferenciadas de los modelos TSK de orden uno, a saber, la reducción del número de reglas necesarias en dichos sistemas de aproximación difusa. Aparentemente, no obstante, nótese que la complejidad del modelo TSK-1 se dispara, en cuanto a número de parámetros se refiere -véase [VAC99] para una aproximación diferente sobre la misma cuestión-, ya que considerando un problema de dimensionalidad n , con una gradación m sobre cada dimensión del espacio de entrada (número de funciones de pertenencia sobre cada dimensión), debe añadirse, al número de funciones locales multidimensionales asociadas m^n (supónganse modeladas por t parámetros, *e.g.* anchura y posición de las mismas), el número de parámetros de ponderación lineal que describen los modelos afines consecuentes, obteniéndose una cardinalidad paramétrica global de:

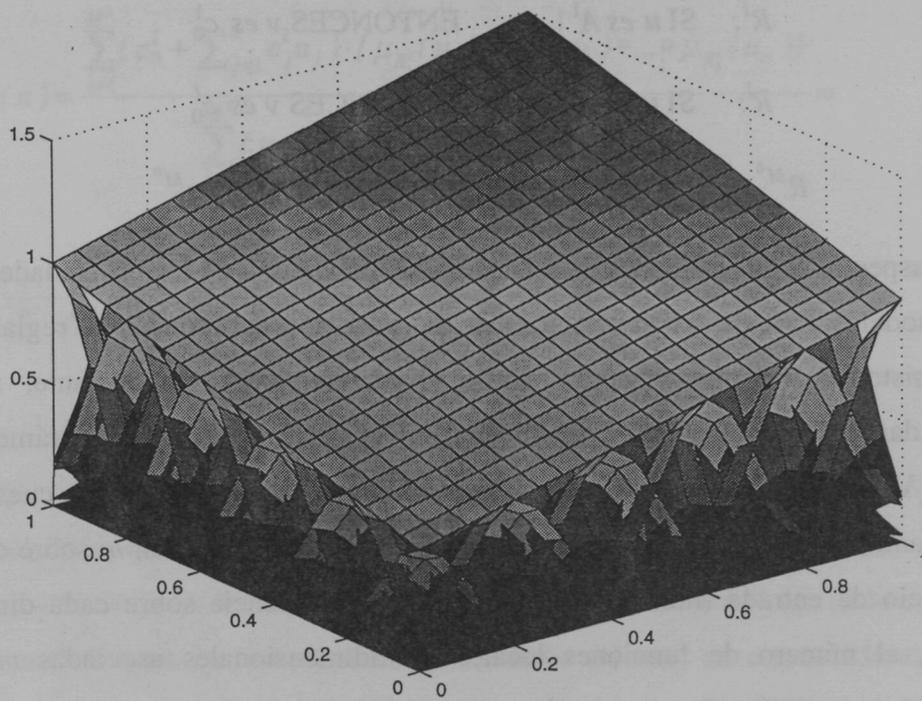
$$N_1 = N_1^{ant} + N_1^{con} = t \cdot m_1^n + (n+1) \cdot m_1^n = (t+n+1) \cdot m_1^n \quad (2.261)$$

y por tanto empeora, de forma aparente, el problema de la *curse of dimensionality*. Por su parte, la complejidad paramétrica del método TSK-0 resulta en:

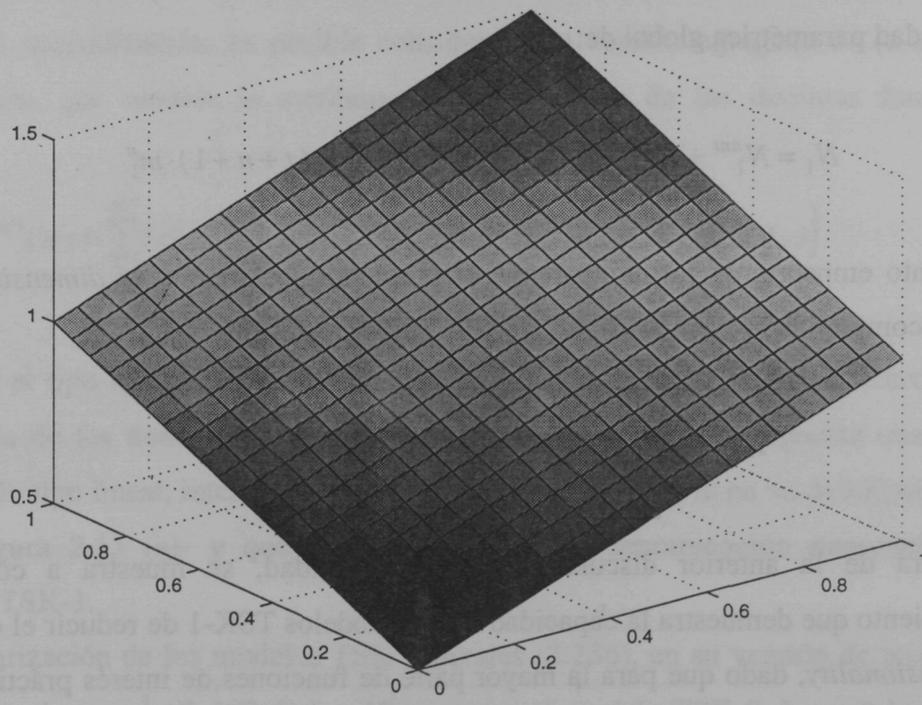
$$N_0 = N_0^{ant} + N_0^{con} = t \cdot m_0^n + m_0^n = (t+1) \cdot m_0^n \quad (2.262)$$

En contra de la anterior discusión sobre complejidad, se muestra a continuación un razonamiento que demuestra la capacidad de los modelos TSK-1 de reducir el efecto de *curse of dimensionality*, dado que para la mayor parte de funciones de interés práctico, la potencia de síntesis y aproximación mediante los modelos afines propios al modelo TSK-1 reduce el parámetro m_l de división del universo de discurso reduciendo ostensiblemente la complejidad del problema.

Considérese un caso sencillo pero ilustrativo, y de interés práctico, de aproximación de una función multidimensional afín, que corresponde a un modelo apropiado de ciertos sistemas físicos, y por tanto es susceptible de ser aproximada por un sistema difuso.



(a)



(b)

Figura 2.56 Aproximación de una función afín bidimensional

(a) Mediante un sistema difuso TSK-0 (b) Mediante un sistema difuso TSK-1

La aproximación TSK-0 de dicha función, mostrada para un caso simplificado bidimensional en la figura 2.56, requiere la distribución homogénea del conjunto de funciones base sobre

todo el espacio de aproximación, de forma que para problemas de dimensionalidad creciente, se pone de manifiesto el problema de la *curse of dimensionality*. Efectivamente, todos los métodos de agregación local, si bien son aproximadores universales, requieren de un número elevado de reglas M^0 (de dependencia inversa con el error de aproximación, y tendiente a infinito para recuperación exacta de la función), que resulta en sistemas imprácticos, situación que el modelo difuso TSK-1 mejora de forma patente. Las aproximaciones de modelos de agregación local adolecen de cubrir el espacio de aproximación de un número elevado de reglas, de forma que la *curse of dimensionality* está por tanto connaturalmente asociada a los mismos, que engloban a distintos paradigmas de aproximación no lineal.

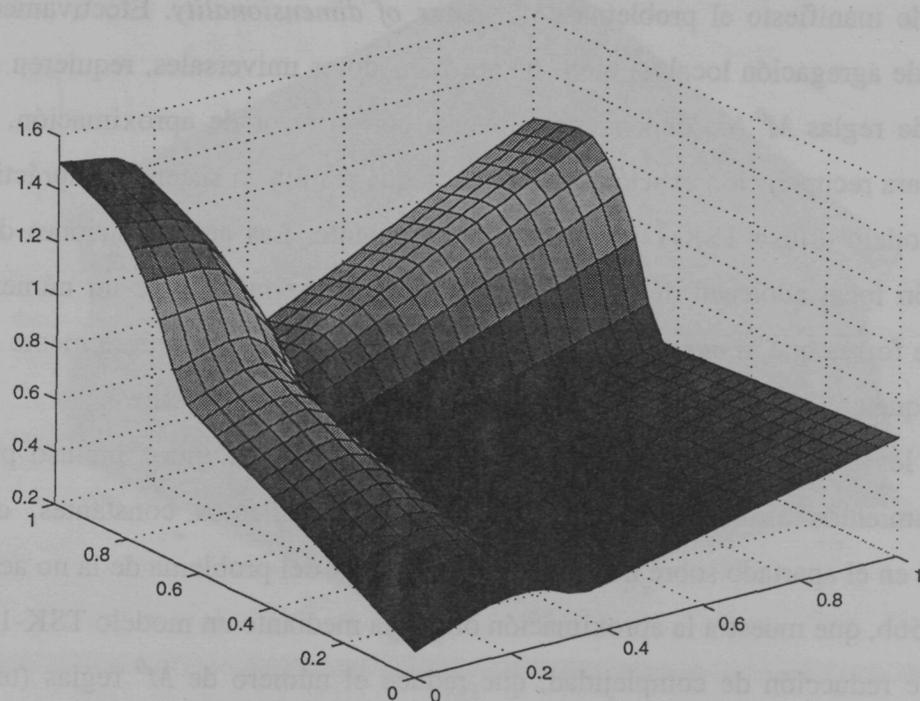
Frente a los modelos TSK-0, que requieren de toda la complejidad incluso para aproximar comportamientos afines (más aún si cabe, comportamientos constantes, como ha sido discutido en el apartado sobre normalización, al hablar del problema de la no acotación), en la figura 2.56b, que muestra la aproximación obtenida mediante un modelo TSK-1, se aprecia la ostensible reducción de complejidad, que reduce el número de M^0 reglas (teóricamente se requiere un mallado infinitamente fino) a una simple regla, del tipo

$$R^1: \text{ SI } \langle \text{cierto} \rangle \text{ ENTONCES } v = c_0^1 + \sum_{j=1}^n c_j^1 u_j \quad (2.263)$$

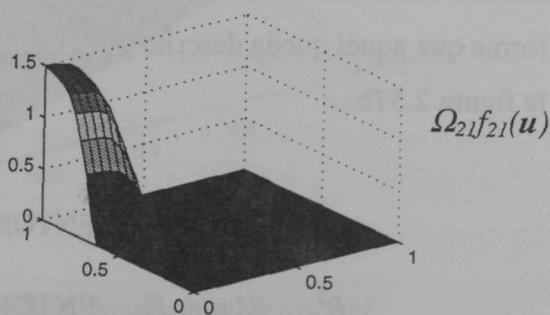
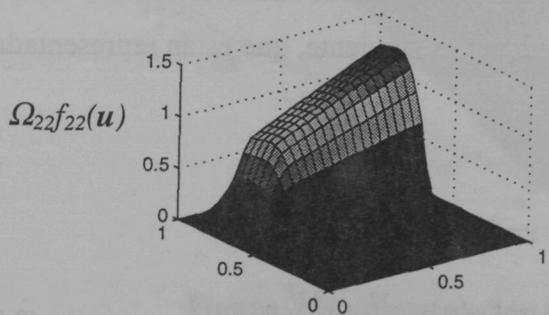
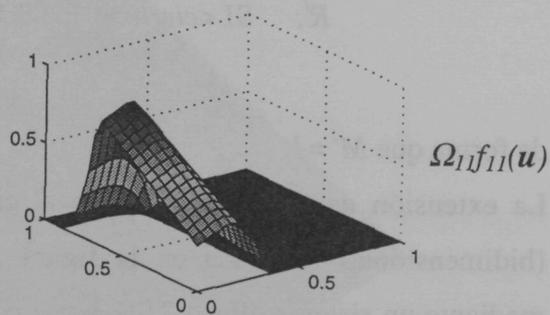
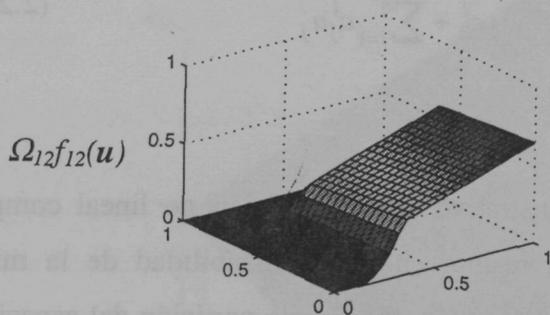
de forma que $M^1=1$.

La extensión de este razonamiento al caso ilustrativo de una función no lineal compleja (bidimensional) mostrada en la figura 2.57a, resulta en la sintetizabilidad de la misma mediante un sistema difuso TSK-1 que contiene tan sólo una simple partición del espacio de entrada en cuatro subzonas, a las que se aplican los respectivos modelos locales afines, de forma que aquél queda descrito por el conjunto de reglas siguiente, que están representadas en la figura 2.57b.

$$\begin{aligned} R^1: & \text{ SI } u \text{ es } \Omega_{11} \text{ ENTONCES } v = f_{11}(u) = c_0^{11} + c_0^{11T} \mathbf{u} \\ R^2: & \text{ SI } u \text{ es } \Omega_{12} \text{ ENTONCES } v = f_{12}(u) = c_0^{12} + c_0^{12T} \mathbf{u} \\ R^3: & \text{ SI } u \text{ es } \Omega_{21} \text{ ENTONCES } v = f_{21}(u) = c_0^{21} + c_0^{21T} \mathbf{u} \\ R^4: & \text{ SI } u \text{ es } \Omega_{22} \text{ ENTONCES } v = f_{22}(u) = c_0^{22} + c_0^{22T} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.264)$$



(a)



(b)

Figura 2.57 Aproximación de una función no lineal bidimensional

(a) función original (b) Representación de la transferencia de cada regla del sistema difuso TSK de orden uno

Como es esperable, la complejidad del problema mediante una aproximación TSK-0, tal como muestra la figura 2.58, requiere del mismo número de funciones base que en el caso unimodelo anterior, lo que permite argumentar que la generalidad como aproximador universal de dicho sistema de aproximación aparece en detrimento de su eficacia. Dada la particularización del modelo TSK-0 dentro del modelo TSK-1, siempre se cumple $M^0 \geq M^1$, si bien que, excepto para casos de funciones no lineales de alta variabilidad, se cumple $M^0 \gg M^1$, rompiéndose el efecto de *curse of dimensionality*. Esta característica revierte tanto en una mayor interpretabilidad lingüística del procesador difuso (del conjunto de antecedentes, que establecen una división proporcionada del espacio de entrada, aunque no los consecuentes analíticos), como, y de forma destacada, en una reducción de la complejidad de implementación electrónica, tanto en los circuitos de procesado como en los de almacenamiento de parámetros.

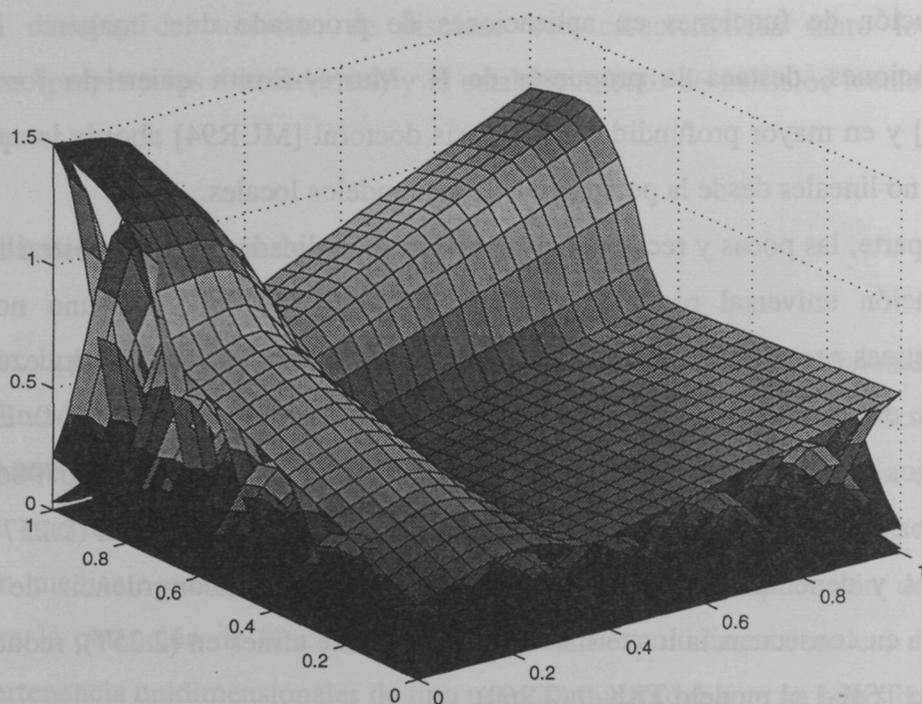


Figura 2.58 Aproximación de una función no lineal bidimensional. Distribución de funciones base como modelo de reglas del Controlador difuso TSK de orden cero

El anterior razonamiento, que es por su generalidad extensible a problemas multidimensionales más allá de su ejemplificación para un caso bidimensional, adquiere mayor crédito con la discusión sobre modelos dinámicos, cuya descripción es inherentemente lineal, aspecto que será discutido posteriormente.

Llegados a este punto, cabe citar que la interpretación de la síntesis de modelos no lineales como modelos locales propia a los controladores TSK admite similitudes con ciertas propuestas de la literatura desligadas de los sistemas de inferencia difusa, si bien que éstas son muy reducidas en número. Destaca, entre ellas, la temprana propuesta de P. Meijer [MEI90], quien, en una aplicación al modelado de las características no lineales multidimensionales de dispositivos electrónicos, plantea la síntesis de dichos modelos mediante la construcción de descripciones locales n -dimensionales (que pueden contener, en el sentido de (2.256) cualquier función no lineal apropiada, *e.g.* funciones exponenciales) para el modelado global de características cualitativamente diferenciadas entre regiones disjuntas del espacio de aproximación. Más recientemente, la propuesta de J. Marroquin [MAR95] repara en la interpretación en base a modelos localizados para el caso de redes gaussianas generalizadas (de tipo RBF), estableciendo modelos de bajo orden polinómico (orden cero o uno) para la aproximación de funciones en aplicaciones de procesamiento de imagen. Frente a estas interpretaciones, destaca la propuesta de R. Murray-Smith quien de forma somera en [HUN96] y en mayor profundidad en su tesis doctoral [MUR94] aborda la aproximación de sistemas no lineales desde la perspectiva de los modelos locales.

Por otra parte, las pocas y recientes justificaciones publicadas para demostrar la condición de aproximación universal para los sistemas difusos TSK de orden uno no explotan las características propias de estos sistemas, reduciendo implícitamente la riqueza y potencia de modelado del método TSK-1 (2.257) a las ya conocidas del método TSK-0. En este sentido, los trabajos de H. Ying, ([YIN98b], para el caso SISO, y [YIN98c], [YIN98d], para el caso MIMO) basan su demostración en la asignación a los parámetros c_0^l en (2.257) de valores no constantes y dependientes de las entradas de forma afín, incongruencia de modelado que compensa en consecuencia los términos explícitamente afines en (2.257), reduciendo *de facto* el modelo TSK-1 al modelo TSK-0 (2.260).

Los anteriores razonamientos requieren de un análisis por separado para cada tipo de problema. A pesar de ello, la relación de este método con el método clásico de aproximación lineal a tramos PWL permite extraer conclusiones relevantes. El establecimiento de la equivalencia entre sistemas difusos y la aproximación PWL está precedido de un método de síntesis, presentado a continuación, a partir de controladores difusos TSK-1 (y en particular de controladores difusos de agregación local TSK-0) que, tomando en consideración las conclusiones sobre el efecto de la normalización y la previa descripción de los modelos TSK, permite sintetizar modelos no lineales bien condicionados.