

3.3.1. Introducción

En el medio ambiente, así como en flujos complejos donde el número de Reynolds es lo suficientemente alto, debido a la no-linealidad de las interacciones fluidas, se generan múltiples escalas que se detectan tanto en las velocidades como en la estructura de los campos escalares, como en la temperatura, la concentración de trazadores, la densidad, etc. Es interesante poder relacionar de alguna forma las características geométricas o topológicas de observaciones de imágenes del flujo en estudio con sus propiedades físicas y su dinámica.

En la figura 3.3.1 se muestra como ejemplo una curva fractal denominada Curva de Koch, generada en iteraciones sucesivas con un perímetro $4/3$ mayor que en el paso anterior, lógicamente con un gran número de iteraciones, la longitud tiende a infinito y sin embargo está conteniendo un área finita. La dimensión Euclídea de un objeto relaciona la unidad de medida utilizada con el valor geométrico medido $N(L) = (1/L)^D$, donde $1/L$ corresponde al número de unidades comprendidas en uno de los lados, D corresponde a 1 para una recta, 2 para una superficie y 3 para un volumen. Si se generaliza la utilización del concepto de la dimensión D a los números fraccionarios obtenemos una dimensión fractal. El cálculo de la dimensión fractal se basa en la correspondiente medición del número de recubrimientos o cajas necesarias para cubrir un determinado conjunto (línea, superficie o volumen) $N(L)$ en función de la escala L de los recubrimientos (o cajas). El correspondiente cálculo de la dimensión fractal, D , es sólo válido en el rango en el que la relación entre N y L es potencial y está bien definida mediante la expresión:

$$D = \log (N(L)) / \log (1/L) \tag{3.3.1}$$

Esta expresión es equivalente a otra más usual de la siguiente forma (Mandelbrot, 1983; Peitgen, 1992):

$$D = - \log(N(L)) / \log (L) \tag{3.3.2}$$

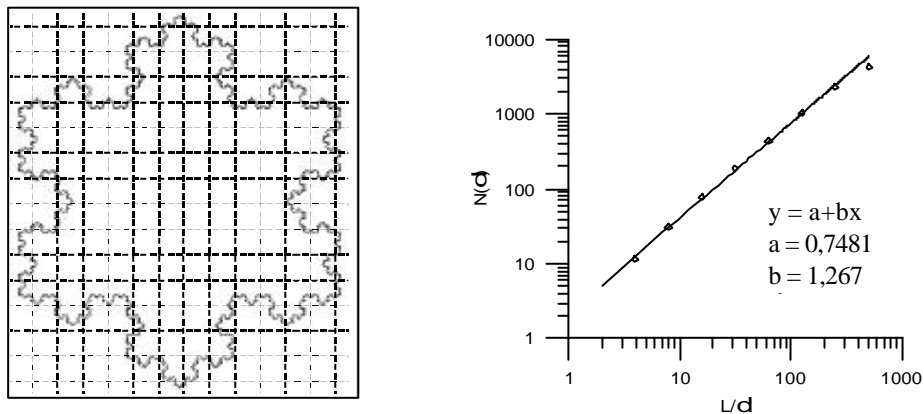


Figura 3.3.1. Izquierda, curva de Koch con una superposición de cajas. Derecha, caracterización *log-log* para la obtención de la dimensión fractal. El último punto no se utiliza en la regresión ya que corresponde a una escala δ del tamaño de un píxel, presentando una saturación en el cálculo de $N(\delta)$.

El problema de la implementación de esta metodología con datos experimentales es el cálculo de $N(L)$. También es necesario considerar la identificación del conjunto que se quiere analizar, por ejemplo, definiendo el nivel de intensidad de los puntos que pertenecen al conjunto que nos interesa.

El método Box-Counting propone la realización de este cálculo de la siguiente manera:

La zona de análisis tiene un lado L , se escoge un tamaño de caja de lado δ que también puede normalizarse con una escala característica del flujo. A partir de cajas de esta medida se realiza un recubrimiento de toda la imagen correspondiente al fenómeno a analizar. Se cuenta el número de cajas que “interseccionan” con la entidad de estudio, este valor se asigna a $N(\mathbf{d})$ y se repite el proceso para todos los valores de la escala de longitud \mathbf{d}_i posibles obteniendo los valores correspondientes $N(\mathbf{d}_i)$. Usualmente se divide la caja inicial entre 2, 3, 4, etc., hasta el número de píxeles. La existencia de una dimensión fractal única se demuestra con una buena correlación de la recta de regresión de los puntos $\log(N(\mathbf{d}_i))$ respecto $\log(\mathbf{d}_i)$. En el caso de fenómenos turbulentos, el hecho de que se desarrolle una cascada de energía entre las escalas de la producción y las escalas donde se produce la disipación, (que ocurre de forma distinta si el flujo dominante es tridimensional o bidimensional, donde se produce también una cascada inversa de energía), favorece la aparición de estructuras fractales.

Independientemente del tipo de proceso que genera las escalas más energéticas en el flujo, si existe un subrango donde la producción y la disipación están en equilibrio de forma similar a la propuesta por Kolmogorov (Kolmogorov, 1941) para el campo de velocidades, se puede buscar una relación funcional entre el exponente del espectro $E(k) = k^{-b}$ y la dimensión fractal D del campo escalar reflejado en la imagen. Si el proceso reflejado por cualquier propiedad escalar detectable en una imagen es debido fundamentalmente a la advección del campo de velocidades turbulento, podemos medir en un cierto lugar una señal espacial compleja, compuesta por múltiples escalas de forma que su relación con el número de onda k es de forma potencial:

$$E(k) = k^{-b} \quad (3.3.3)$$

Si el exponente es cero, la señal es un producto del ruido, si es 2 significa que tiene su origen asociado con un movimiento de tipo Browniano. Los fenómenos de turbulencia tridimensionales, sin embargo, se caracterizan por un valor de β igual a 5/3 en un intervalo llamado subrango inercial. En procesos turbulentos bidimensionales el valor de β es mucho mayor (3 o más).

Considerando que el período $T = 1/f$, la ecuación de la función de densidad espectral temporal espacio de frecuencias $E(f) = f^{-b}$ está relacionada con la escala espacial, $L = UT$, mediante la velocidad media U (Taylor, 1921) y podemos usar $E(L) = L^\beta$. Además, si $V(L)$ es una varianza, calculada a partir de las diferencias de la señal o de las formas del campo escalar observado, E_U es la dimensión Euclidiana y D es la dimensión fractal. (Redondo y Linden, 1996), También se cumple:

$$E(L) \approx LV \approx L^{2H+1} \approx L^{2E_U+1-2D} \quad (3.3.4)$$

donde H es la dimensión de Hausdorff, que cumple también la propiedad de ser codimensión de la dimensión fractal: $H = E_U - D$. Usando esta propiedad podemos obtener una relación directa entre el exponente de la función de densidad espectral y la dimensión fractal $\beta = 2E_U + 1 - 2D$. En efecto, la

dimensión fractal D , en el caso en que se cumplan las propiedades mencionadas se puede relacionar con el espectro de la turbulencia como:

$$D = E_v + \frac{1-b}{2}. \quad (3.3.5)$$

3.3.2. Descripción del modelo numérico de análisis multifractal utilizado

Dimensión Box-Counting.

Una de las diferentes versiones del cálculo de la dimensión fractal de Mandelbrot es la llamada dimensión de *box-counting* que se relaciona con el concepto de dimensión autosimilar. Otros nombres utilizados para referenciarla son entropía de Kolmogorov o la capacidad.

La metodología de cálculo consiste en sobreponer a la estructura a analizar una rejilla con una malla de tamaño δ , formando un recubrimiento de cajas. El número de cajas que contienen valores de la estructura a caracterizar es $N(\delta)$, variando con el valor de δ escogido (Grau et al., 2002).

Para realizar la correspondiente caracterización de la dimensión fractal se procede a calcular $N(\delta)$ para diferentes escalas, la variación de escala de un paso al siguiente es de $\delta_{i+1} = \delta_i / 2$. El valor de la dimensión corresponde a la pendiente de la representación $\log(N(\delta))$ frente a $-\log(\delta)$.

El caso observado en la figura 3.3.1 corresponde a la caracterización de la curva de Koch. Se puede observar la bondad de la caracterización por el método *box-counting* que nos facilita un valor de dimensión de 1,267, obtenido de la pendiente de la figura de la derecha, siendo el valor exacto 1,2619.

Se necesita una puntualización en la aplicación de esta metodología para matizar el rango de valores de escala utilizables, limitados teóricamente por las dimensiones máximas de la imagen y el tamaño del píxel en el otro extremo. En la práctica, el rango de escalas a estudiar, se traduce a un intervalo menor, debido a la poca información que se tiene en el caso de δ_i igual o superior a la mitad del lado de la imagen y el límite inferior de δ_i corresponde a un tamaño de varios píxel para evitar una saturación en el cálculo de $N(\delta_i)$. La gran ventaja de esta metodología es el hecho de poderla aplicar de forma sistemática debido a la simplicidad en la creación del recubrimiento de cajas y el correspondiente recuento, que se efectúa rápidamente, incluso para grandes imágenes de alta precisión.

La imagen se representa como una matriz de puntos M_{ij} (i corresponde a la fila y j a la columna), donde el valor en cada punto es la intensidad o nivel de gris (NDG). Sobre esta imagen existe una zona de interés a analizar, E , que corresponde a un intervalo de NDG que llamaremos ΔNDG tal que $ij \in E$ si $M_{ij} \in \Delta NDG$.

El método *box-counting* se aplica dividiendo el lado L de la imagen en s cajas de igual tamaño ($s=L/\delta$). Estas varían desde la dimensión máxima posible del lado hasta la unidad mínima de la imagen que corresponde a un píxel. Para cada uno de estos valores de s se realiza un recubrimiento de toda la imagen con una disposición regular de cajas de lado $\delta_i=L/s$, $R(\delta)$. Con el recuento de cajas que contienen algún valor de E en su interior se obtiene el valor de $N(\delta)$ mediante un algoritmo de la forma:

En la realización del recuento es necesario señalar que se puede dar la situación que una

$$N(\mathbf{d}) = \sum_{R(\mathbf{d}) \cap E \neq \emptyset} 1 \quad (3.3.6)$$

determinada caja contenga valores que estén fuera del intervalo de interés, superiores y inferiores a la vez, pero que no contenga valores del propio intervalo. En esta situación es importante destacar que se puede achacar a la pérdida de resolución que aparece cuando se realiza una digitalización de una imagen, y en realidad tenemos unos valores que sólo se apreciarían a mayor resolución. Una modificación del algoritmo

a realizar cuando las intensidades observadas se pueden considerar continuas es el conteo de las cajas que, aunque no tengan propiamente valores pertenecientes al intervalo de intensidades de interés, sí que tienen, a la vez, valores superiores e inferiores.

La representación $\log(N(\delta))$ respecto $\log(L/\delta)$ caracteriza a E , y si los puntos aparecen alineados tenemos una dimensión fractal característica que se corresponde a la pendiente de la recta de regresión que pasa por los puntos representativos del rango de escalas. Obviamente las pendientes asociadas a puntos aislados o a rectas en un plano corresponden a los valores Euclídeos de 0 o 1. Si el conjunto es lo suficientemente denso para cubrir totalmente el plano de la imagen a las distintas escalas estudiadas δ_i , entonces el valor de la dimensión es 2. En el caso de conjuntos fractales, si estos están formados por puntos inconexos, el valor de la dimensión fractal estará entre 0 y 1, en el caso que el conjunto forme una línea que se convoluciona a las diversas escalas, su dimensión fractal estará comprendida entre 1 y 2.

Caracterización multifractal

Cuando se aplica la caracterización fractal a imágenes, suele ocurrir que la entidad a estudiar presenta las intensidades que la forman distribuidas en un intervalo de NDG suficientemente amplio para no poder ser caracterizado adecuadamente con una única dimensión fractal. Para poder analizar correctamente esta situación se dispone de la caracterización multifractal.

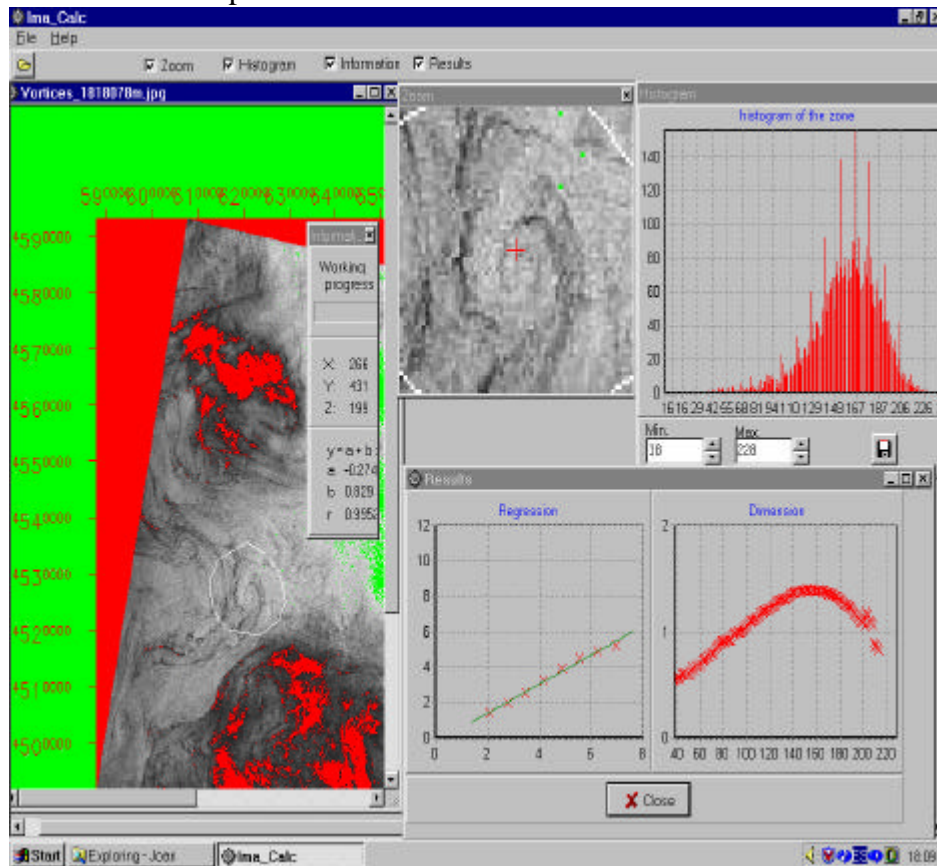


Figura 3.3.2. La presentación en la pantalla de PC de algunos resultados del cálculo de la dimensión multifractal y de otras características adicionales mediante el software especializado *ImaCalc* (Grau, 2002).

Esta metodología de análisis divide el intervalo de intensidades a analizar en diferentes subintervalos, para cada uno de estos se realiza la correspondiente caracterización fractal utilizando el método del *box-counting*. Ahora se obtiene como resultado una representación de las dimensiones

fractales obtenidas frente a las intensidades correspondientes. Un ejemplo de la aplicación del programa usado, con los resultados del histograma de niveles de gris NDG , la curva $N(\delta)$ y la variación de la dimensión fractal en función del nivel de gris, $D(NDG)$ se muestran en la figura 3.3.2.

En esta caracterización se pueden realizar múltiples análisis, pero es primordial asignar un significado a la intensidad observada en la imagen. Puede representar densidad, temperatura, altura, módulo de la velocidad o vorticidad, etc. o algún parámetro físico de interés relacionado con la imagen con estructura espacial autosimilar. Para cada una de estas situaciones podemos hablar de la complejidad observada en función de la intensidad de la magnitud caracterizada y usar la dimensión fractal máxima o bien el propio conjunto $D(NDG)$ para describir la geometría reflejada en la imagen por los procesos físicos inherentes.

En la figura 3.3.2 como ejemplo de un proceso dinámico que presenta unas características topológicas complejas, se presentan los resultados del cálculo de la caracterización multifractal aplicados a un vórtice oceánico. El proceso de cálculo multifractal empieza con una selección del dominio de cálculo de una imagen SAR de la superficie del mar (ver apartado 5). Por una parte se define la región a analizar con la ayuda de un *zoom* interactivo que permite una mayor precisión en la selección, se puede observar tanto la imagen global con la correspondiente selección junto al *zoom* en la parte superior izquierda. El segundo paso a realizar consiste en definir el intervalo de intensidades de la imagen a utilizar en el cálculo, se puede observar en la parte inferior de la ventana que lleva el título de *Histogram*. A continuación se escoge el incremento de intensidades que se utilizará para recorrer el intervalo de análisis y se asigna el fichero donde se guardarán los resultados del proceso de cálculo.

Una vez empezado el cálculo en modo interactivo se puede ir observando los resultados para cada uno de los subintervalos que se van analizando. En la ventana *Information* aparecen en la parte inferior los resultados de la regresión lineal que nos permite obtener la dimensión fractal. La dimensión corresponde al parámetro b , debajo aparece el parámetro r que corresponde a la correlación obtenida. En la ventana que se encuentra en la parte inferior derecha se observan las gráficas correspondientes a los resultados del subintervalo actual de cálculo (izquierda) y del conjunto de subintervalos (derecha). Esta última contiene la caracterización multifractal resultante del análisis.

3.3.3 Aplicación al Océano

En este apartado presentamos como la caracterización fractal de imágenes del SAR ayuda a entender los procesos de difusión del crudo y a la detección y discriminación de las causas de la contaminación de la superficie marina. Los resultados de los cálculos de dimensión fractal de las estructuras dinámicas superficiales mediante diferentes imágenes del SAR ayudan a evaluar cuantitativamente el espectro de la energía cinética *in situ*. Utilizando la información adecuada se puede determinar la variabilidad espacial de las coeficientes horizontales de difusión turbulenta en mesoescala $K(x,y)$ en el océano mencionados en el apartado 3.2.2.

La metodología de determinación de los coeficientes de difusión $K(x,y)$ está basada en análisis multifractal de las estructuras dinámicas obtenidas mediante imágenes SAR en el área de estudio. Los resultados de este análisis permiten evaluar cuantitativamente la escala de energía *in situ* relacionada con parámetros dinámicos de la zona.

El espectro de energía por unidad de masa en caso de turbulencia medida sobre la superficie del océano viene dada por

$$E(k) = ce^{2/3}k^{-b} \quad 3.3.7$$

donde e es la energía de disipación turbulenta y la dimensión Fractal D , se puede relacionar con la pendiente del espectro como $\beta = 5-2D$ en el caso que la dimensión euclidiana sea $E_U=2$, según se indica en el apartado 3.2.2 (Redondo y Linden, 1996).

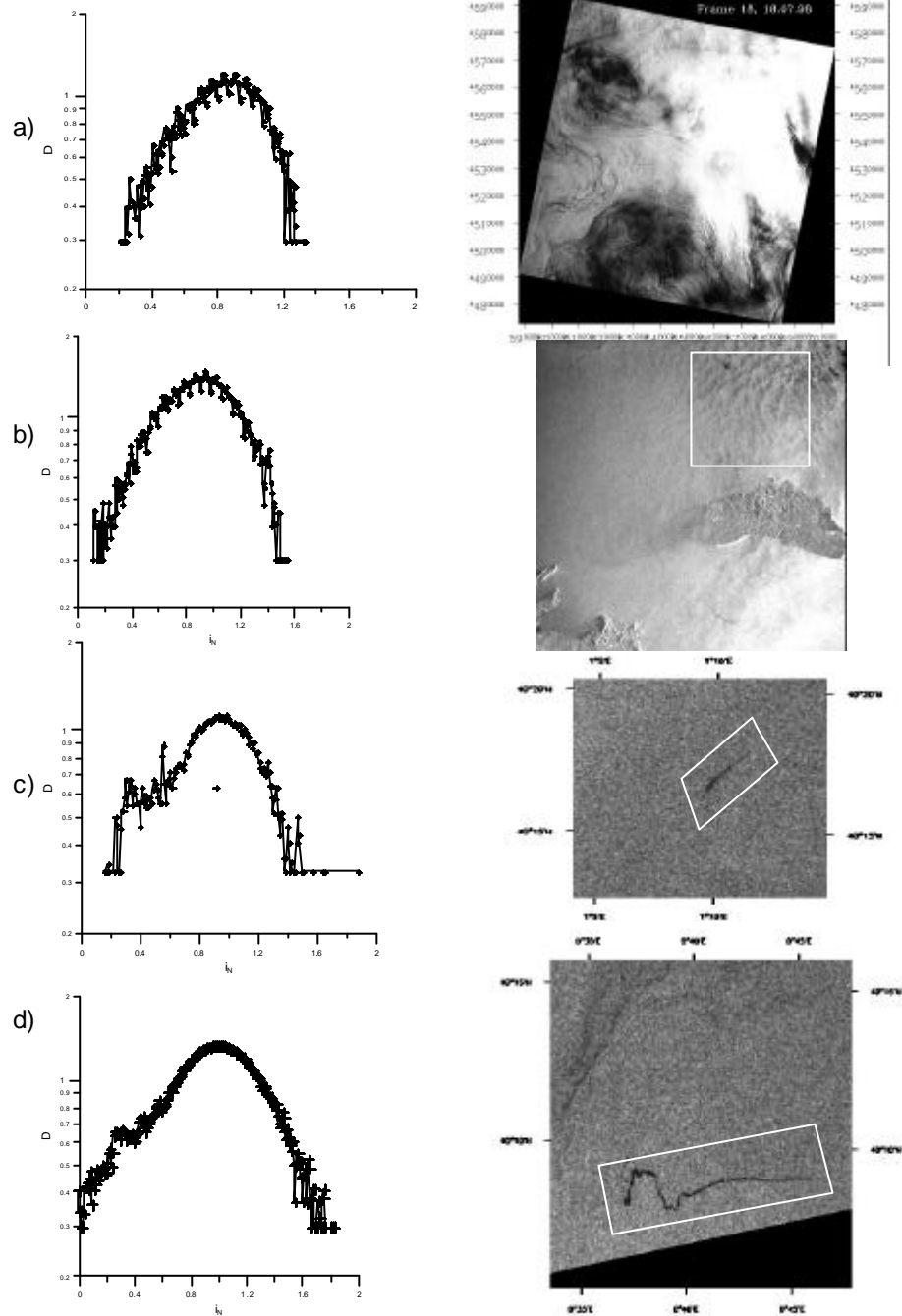


Figura 3.3.3. Dimensión multifractal D frente al fondo de niveles de gris normalizado I_N de SAR imagen; a) un vórtice; b) células de convección c) una mancha de petróleo d) una estela de petróleo.

En la figura 3.3.3 se observan una serie de ejemplos de caracterización multifractal de diversas imágenes SAR que reflejan procesos distintos en la superficie del mar, en este caso en nivel de gris NDG mencionado en el apartado 3.5.3 se corresponde con la rugosidad local (a pequeña escala) de la superficie del mar. Para poder comparar los resultados de la estructura topológica de las imágenes, se han usado niveles de gris normalizados $NDG = \frac{i_N}{i_N}$ en cada imagen según el fondo o promedio de la imagen sin tener en cuenta las estructuras visibles, se comparan a la izquierda de las imágenes las respectivas caracterizaciones multifractales $N(NDG)$ de a) un vórtice; b) células de convección c) una mancha de petróleo d) una estela de petróleo.

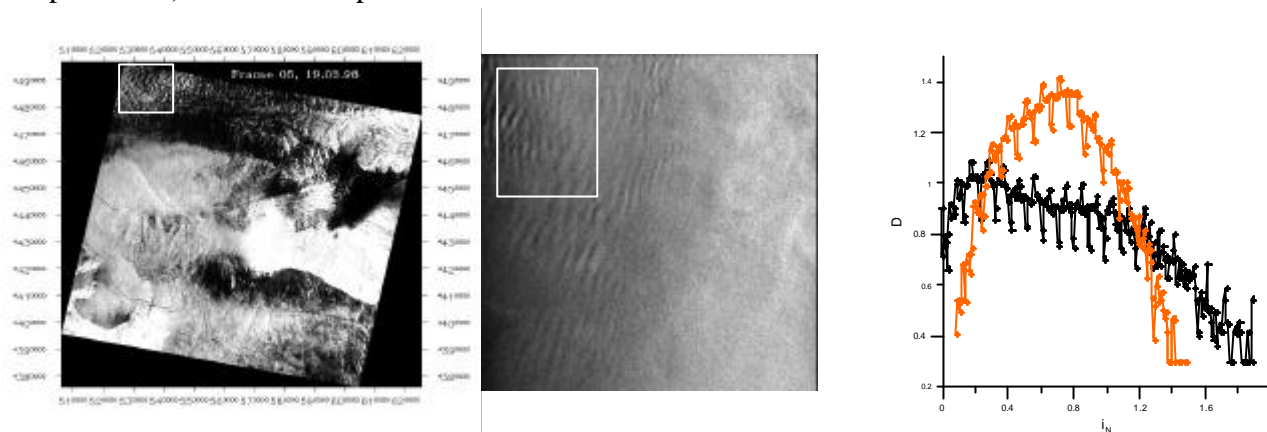


Figura 3.3.4. Células de convección (izquierda) y las ondas gravitatorias atmosféricas (derecha) detectadas en imágenes de SAR; al lado los resultados de análisis multifractal: línea en negro – ondas atmosféricas, línea en rojo – células de convección.

La distribución típica de un proceso natural en el océano, que esté sometido a una difusión horizontal turbulenta $K(x,y)$ tiene forma parabólica.

Sin embargo, las manchas o derrames de crudo en la superficie del mar, debido a que la propia estructura geométrica inicial del derrame es Euclídea (línea asociada a una estela o mancha puntual) producen una modificación de la dimensión fractal para valores de NDG bajos, que caracterizan la extensión del crudo sobre el mar.

El análisis multifractal también puede servir como una nueva herramienta de análisis topológico útil para procesos complejos donde intervienen múltiples escalas, la turbulencia está presente muchas veces en los fenómenos ambientales y así hemos aplicado el método multifractal de análisis a la superficie del mar (Grau et al., 2002). En el caso del estudio de la radiación electromagnética del SAR, que nos indica la rugosidad a pequeña escala de la superficie del mar hemos visto que una descripción multifractal de diferentes fenómenos oceanográficos, incluyendo la detección de derrames de petróleo, permite discriminar los diversos casos Gade y Redondo (1999), Gade y Alper (1999), Platonov et al., (2001). En la figura 3.3.4 se observa claramente la diferencia entre la distribución de la dimensión fractal para distintos grados de rugosidad (NDG) entre dos fenómenos tales como células de convección (izquierda) y el reflejo de ondas gravitatorias atmosféricas sobre la superficie del mar (derecha). Los resultados de análisis multifractal: línea en negro – ondas atmosféricas, línea en rojo – células de convección. El mismo tipo de diferencias se puede usar para distinguir entre las trazas debidas a aceites o derrames antropogénicos de contaminantes y trazas superficiales asociados al plancton, a algas o a la biología marina según se ve en la figura 3.3.3. En estos casos una diferencia clara se debe al tiempo de residencia de una traza en un ambiente dinámico turbulento, tal como el que existe en la superficie del mar, caracterizado por una difusividad $K(x,y)$ que también depende de la zona y de otros factores como viento, oleaje, corrientes, etc.

[Regresar al Índice](#)

[Seguir](#)