

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departamento de Ingeniería Hidráulica, Marítima y Ambiental

**ESTABILIZACIÓN DE LA SUPERFICIE
LIBRE EN LA SOLUCIÓN DE
ECUACIONES SHALLOW-WATER POR
ELEMENTOS FINITOS.
APLICACIONES OCEANOGRÁFICAS.**

Autor: Manuel Espino Infantes

Directores: Marc A. García

Agustín Sánchez-Arcilla

Barcelona, mayo de 1994

CAPÍTULO 1.

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

El movimiento del mar (corrientes, olas...) es un factor determinante de las condiciones ambientales del medio marino. Estas condiciones son alteradas por las actuaciones humanas mediante la construcción de diques o espigones, el tendido de tuberías submarinas, la ejecución de planes de ordenación de playas, etc...

Para evaluar y predecir los efectos de las actuaciones humanas en la zona litoral (e.g. alteraciones de la línea de orilla, contaminación debida a la emisión de efluentes químicos o térmicos, etc...) es necesario simular el flujo marino mediante un modelo matemático que nos permita abordar este cometido con total generalidad, aunque introduciendo por economía computacional, todas las simplificaciones que la naturaleza física del problema permita. En el estudio de la circulación marina en áreas de plataforma continental, bahías y estuarios poco estratificados, etc, es frecuente el uso de una versión simplificada de las ecuaciones de Navier-Stokes para aguas someras, comúnmente denominadas ecuaciones de Shallow-Water (SWE) (ver e.g. Abbot, 1979).

Entre 1987 y 1990, se desarrolló en el Laboratorio de Ingeniería Marítima de la Universitat Politècnica de Catalunya un modelo quasi-3D en elementos finitos (ANASTASE) para resolver las SWE en régimen estacionario, encaminado al estudio oceanográfico de la circulación en las zonas de rompientes y de plataforma continental a bajo coste computacional. El esquema numérico del modelo se basaba en una versión modificada del método de la función de penalización (García, 1990). Su uso práctico puso de manifiesto un conjunto de problemas característicos de códigos similares a éste (García et al., 1990; Espino et al.; 1992), cuyo denominador común es el no cumplimiento de la condición de incompresibilidad (Pelletier et al., 1989). Por otro lado, la elección de elementos Q1/P0 para "abaratar" el coste de las soluciones numéricas planteaba, además de inconvenientes de tipo teórico, restricciones en cuanto a la bondad de los campos de presión (o altura de la superficie libre) calculadas por el modelo.

En esta memoria se pretende desarrollar un modelo quasi-3D en elementos finitos que elimine los problemas que limitan la aplicabilidad de ANASTASE. En segundo lugar, se investigan, haciendo uso del nuevo código, rasgos de la circulación general inducida por el viento en dos regiones con interés oceanográfico: El Golfo de St. Jordi (Mediterraneo Occidental) y el Estrecho de Bransfield (Antártida).

1.1. El uso de las SWE en oceanografía. Antecedentes

Clásicamente, el concepto "Circulación costera y de plataforma" se aplica a las corrientes que existen entre la línea de orilla y el pie del talud continental, cuyos periodos son altos si se comparan con los de la corriente de marea. Estas corrientes están influenciadas por la presencia de los contornos costeros, la geometría de la plataforma, el viento y la meteorología local, el grado de estratificación y la circulación de las aguas del océano adyacente (y dentro de la zona de rompientes, también y fundamentalmente, por el oleaje).

Nuestro conocimiento de la circulación costera y de plataforma se debe principalmente a mediciones de correntímetros, seguimiento de trazadores y boyas lagrangianas, o a campañas hidrográficas en las que se mide la distribución de las propiedades del agua y se infiere indirectamente la intensidad y dirección de la corriente. En general, los correntímetros nos proporcionan datos de velocidad en un punto fijo durante periodos de varios meses o incluso años. Los datos almacenados corresponden a unos pocos minutos de cada hora y tienen que ser filtrados para eliminar el posible ruido de las componentes de mayor o igual frecuencia que las mareas. Los datos de temperatura y salinidad obtenidos en las campañas hidrográficas son usados para calcular el campo de densidades, y con ellos, estimar la componente geostrófica del campo de

velocidades resultante del equilibrio entre los gradientes de presión y las fuerzas de Coriolis.

Como, por motivos económicos, no disponemos nunca de un número de medidas que nos permitan elaborar una descripción suficientemente detallada de la dinámica de la zona de interés en cuestión, hay que recurrir a modelos numéricos hidrodinámicos que consideren todos los términos de las ecuaciones básicas que describen el problema. Por supuesto, seguirán siendo necesarios los datos medidos in situ, si bien sólo para conocer las condiciones de contorno, ajustar los valores de los coeficientes libres del modelo y validar cuantitativamente las soluciones.

Las ecuaciones que gobiernan el flujo, en un medio cualquiera de densidad conocida son el principio de la conservación de la masa (ecuación de la continuidad) y la segunda ley de Newton (ecuaciones del momentum). La expresión habitual de estas ecuaciones en el campo de la oceanografía es en forma diferencial y utilizando una descripción euleriana del flujo. Así mismo, se suele considerar un sistema de ejes cartesianos con origen en algún punto de la superficie terrestre, lo que determina la inclusión de un término de aceleración aparente debido a la rotación en las ecuaciones del momentum.

Si lo que se pretende es calcular el flujo medio, conviene realizar un promedio temporal de las ecuaciones sobre un periodo de tiempo representativo de la escala temporal de la turbulencia o del oleaje, según el tipo de flujo que estamos estudiando. Al promediar temporalmente las ecuaciones del momentum aparecen unos términos de correlación de las componentes oscilatorias (e.g.

para las componentes turbulentas de la velocidad del flujo las tensiones correspondientes se conocen como tensiones de Reynolds). Estos términos deben ser evaluados mediante alguna teoría externa al modelo, como por ejemplo la hipótesis de Boussinesq, la cual relaciona las tensiones de Reynolds (turbulentas) con los gradientes del flujo medio (turbulento), en la misma forma como la ley de Newton-Stokes relaciona las tensiones viscosas con los gradientes del flujo medio (laminar).

Aceptando que el agua de mar es un fluido incompresible, la expresión de la ecuación de la continuidad para el flujo medio es la siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

Por su parte, las ecuaciones del momentum promediadas a la escala del oleaje se escriben de este modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + \frac{\partial}{\partial x} (2K_H \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} [K_H (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial u}{\partial z}) + S_x \end{aligned} \quad (1.2.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + \frac{\partial}{\partial y} (2K_H \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} [K_H (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial v}{\partial z}) + S_y \quad (1.2.b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (K_z \frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_z \frac{\partial v}{\partial z}) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z} (2K_z \frac{\partial v}{\partial z}) - g \quad (1.2.c)$$

En las ecuaciones anteriores, ∂ es el operador derivada parcial. x , y , z son las coordenadas espaciales (z es la coordenada vertical en esta notación), t es la variable tiempo, la u , v , w son las componentes cartesianas de la velocidad, p es la presión, ρ es la densidad, $f=2\Omega \text{sen}\phi$ es el parámetro de Coriolis que depende de la velocidad angular de la tierra (Ω) y de la latitud (ϕ), g es la aceleración debida a la gravedad, K_H es la viscosidad turbulenta horizontal, K_z es la viscosidad turbulenta vertical y S_x , S_y son términos que contienen derivadas de las componentes del tensor de radiación correspondiente a las correlaciones de las componentes oscilatorias del oleaje (aparecen al promediar temporalmente en un periodo de tiempo similar al periodo del oleaje, y desde el punto de vista dimensional son tensiones por unidad de masa y altura).

Los términos de la izquierda de las tres ecuaciones del momentum representan la aceleración total de una parcela de fluido, que es la suma de la

aceleración local, que se puede medir mediante un correntímetro fijo, y la convectiva, que refleja la no homogeneidad espacial del flujo. Los términos de la derecha de esas mismas ecuaciones representan las fuerzas que actúan sobre esa parcela de fluido. El primero de ellos es la fuerza asociada al gradiente de presión. En las ecuaciones del momentum según los ejes x e y , los segundos términos de la derecha son las componentes horizontales de la fuerza de Coriolis (i.e. la aceleración aparente debida a la rotación de la tierra). Esta fuerza actúa perpendicularmente a la dirección del movimiento (hacia la derecha en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el sur), con una magnitud que depende de la velocidad y del valor local del parámetro de Coriolis. Siguen los términos que representan la fricción turbulenta, la cual suele describirse como una tensión (τ) actuando paralela a la superficie considerada. Al adoptar la hipótesis de Boussinesq para evaluar las tensiones turbulentas de Reynolds, dichas tensiones pueden expresarse así:

$$\tau_{ij} = K_{ij} \partial_{x_i} u_j + K_{ij} \partial_{x_j} u_i \quad (1.3)$$

(sin convenio de suma) siendo K_{ij} los coeficientes del tensor de viscosidades turbulentas, función de las características del flujo (a diferencia de la viscosidad molecular μ , que es una propiedad del fluido). Aquí se emplea una versión simplificada de tensor:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_H & K_H & K_Z \\ K_H & K_H & K_Z \\ K_Z & K_Z & K_Z \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Las estimas realizadas para la viscosidad turbulenta horizontal (K_H), así como para la vertical (K_z), indican que por regla general su valor debe ser varios órdenes de magnitud superior al de la viscosidad molecular ($K_H \approx 10$ a 10^5 m²/s, $K_z \approx 10^{-5}$ a 10^{-1} m²/s) (Pond y Pickard, 1978). Es por esta razón que en las ecuaciones (1.2a, b y c) se desprecian los términos viscosos en presencia de los términos de tensiones turbulentas.

Los gradientes de los esfuerzos de radiación, S_x y S_y , son los que incluyen la acción de las olas sobre el flujo medio. Se puede definir a estos esfuerzos como el exceso de flujo de momentum debido a la presencia de olas, y es necesaria una teoría de oleaje para calcularlos.

En la ecuación del momentum según el eje z (1.2c) no aparece la componente vertical de la fuerza de Coriolis, ya que es muy pequeña en comparación con la fuerza de la gravedad (Huyer, 1990). Tampoco aparecen derivadas de las componentes del tensor de radiación, que se desprecian, en este caso, frente a los términos viscosos turbulentos (Rivero y S.-Arcilla, 1991).

Este conjunto de ecuaciones son las conocidas ecuaciones de Reynolds. Si el promediado temporal se hubiera realizado a lo largo de un periodo representativo de la escala de la turbulencia, $S_x = S_y = 0$, por lo que se habrían obtenido ecuaciones adecuadas para el estudio de la circulación general válidas sólo fuera de la zona de rompientes. Promediando con la escala temporal del oleaje, se deducen unas ecuaciones del flujo medio útiles para simular la circulación costera en zona de rompientes (S.-Arcilla y Lemos, 1990).

Si se consideran solamente problemas en ámbitos costeros o de plataforma continental, es frecuente el uso de la aproximación de aguas someras. Ésta equivale a admitir que la aceleración convectiva vertical es despreciable en la escala de tiempos de interés, así como que la distribución de presiones es hidrostática (e.g. Abbot, 1979). Esta aproximación es compatible con la variación vertical de la velocidad y con la existencia de movimientos verticales de afloramiento (upwelling) o convergencia (downwelling) (Pedlosky, 1979).

Por otra parte, si se pretende estudiar la componente permanente del movimiento prescindiendo de su fluctuación, el flujo puede considerarse estacionario. En este caso la expresión de las SWE es la siguiente:

Ecuación de la continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.5)$$

Ecuaciones del momento

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + \frac{\partial}{\partial x} (2K_H \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} [K_H (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial u}{\partial z}) + S_x \quad (1.6.a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + \frac{\partial}{\partial y} (2K_H \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} [K_H (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial v}{\partial z}) + S_y \quad (1.6.b)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.6.c)$$

Esta forma de presentar las ecuaciones de la hidrodinámica, incluso con las simplificaciones introducidas, refleja las características especiales del flujo en las zonas de aguas someras. Al no poder prescindir de ningún término de las mismas, especialmente de los términos convectivos, porque todos pueden ser relevantes para explicar la dinámica en un caso dado, y pretender construir un modelo de circulación generalista, no será posible resolver el problema planteado de forma analítica, por lo que debe recurrirse a un método numérico de solución. Para ello hay que transformar el dominio continuo en uno discreto, y el sistema de ecuaciones diferenciales, en un sistema de ecuaciones algebraicas. Solucionar el problema se reduce entonces a invertir una matriz, para lo cual hay métodos numéricos muy eficaces.

Hasta la década de los 70, el método clásico de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes (y de las SWE por ser éstas formalmente equivalentes a las primeras en problemas 2D) eran las Diferencias Finitas

(MDF). A finales de los 60, se inicia la aplicación del Método de los Elementos Finitos (MEF) a problemas de flúidos, y en la actualidad, la elección de uno u otro método depende de la ecuación a resolver y del tipo de dominio considerado. En particular, para solucionar las SWE estacionarias, el MEF tiene las siguientes ventajas sobre el MDF:

- Es una técnica idónea para el estudio de regiones costeras de geometría irregular por permitir una mejor aproximación espacial a la misma y una imposición sencilla de las condiciones de contorno.
- Por ser una técnica muy estructurada, facilita la programación en forma modular, con pasos muy bien definidos.

En el Laboratorio de Ingeniería Marítima de la Universitat Politècnica de Catalunya se abordó a partir de 1987 el estudio oceanográfico de la circulación en áreas de plataforma continental catalana haciendo uso de modelos numéricos de las SWE en elementos finitos. La revisión de la bibliografía especializada del momento puso de relieve que el estado del desarrollo de modelos para investigar la circulación en zona de aguas someras, utilizando el MEF, era el siguiente (García, 1990):

- No habían sido desarrollados modelos, con validez tanto dentro como fuera de la zona de rompientes, que incluyeran todos los términos que puedan resultar relevantes en la circulación de dichas regiones costeras.

- Sólo abundaban los modelos que resolvían la expresión verticalmente integrada de las SWE mediante el MEF, perdiendo de este modo la información sobre la variación vertical de la velocidad (e.g. Taylor y Davis, 1975).

- Había sido propuesta en la bibliografía, pero apenas desarrollada, la aproximación quasi-3D consistente en reproducir el gradiente vertical de las incógnitas a través de un desarrollo en una serie finita de funciones base conocidas (Zienkiewicz y Heinrich, 1979).

- Aunque, en el ámbito del MDF, se habían incorporado métodos standard de obtención de dichas funciones base para cada problema (Davies, 1988), éstas resultaban incompatibles con la imposición de condiciones de contorno en la superficie libre y en el fondo.

- La mayoría de los modelos revisados resolvían las ecuaciones de la continuidad y del momentum de forma integrada. Se trataba de modelos bastantes costosos en términos computacionales y que exigían el uso de ordenadores de gran capacidad de cálculo.

- Había un campo abierto para la investigación de métodos de bajo coste. Tales modelos podían agruparse en dos categorías: los métodos segregados, en los que de forma iterativa la presión y la velocidad se resuelven alternativamente a través de las ecuaciones de la continuidad y del momentum (e.g. Benim y Zinser, 1986); y los métodos basados en la función de penalización, en los que se perturba la ecuación de la

continuidad de manera que es posible despejar la presión en función de la velocidad y sustituir aquella en las ecuaciones del momentum (e.g. Engelman et al., 1982).

En definitiva, no se habían publicado esquemas numéricos, aptos para el estudio que se proponía con los métodos informáticos disponibles. Por esta razón, se desarrolló entre 1987 y 1990 un nuevo modelo quasi-3D en elementos finitos para resolver las SWE estacionarias. Las características principales del código (ANASTASE -Algoritmo para las ecuaciones de NAVier-STokes en Aguas Someras por Elementos finitos) eran:

- Tener una formulación tridimensional adaptada al uso de capacidades medias de cálculo, de tipo micro- o miniordenador.
- Considerar todos los términos de las ecuaciones básicas que puedan resultar relevantes en la dinámica de la zona considerada.
- Tener validez dentro y fuera de la zona de rompientes.
- Asegurar la compatibilidad de las soluciones numéricas con todas las condiciones de contorno sin excepción, incluyendo las correspondientes al fondo y a la superficie.

El modelo pertenece a la familia de los "modelos quasi-3D". Se trata, pues, de un esquema propiamente tridimensional en el que la variación vertical de las variables que intervienen en la formulación se descompone en la suma de un

número finito de perfiles o funciones base. Las funciones elegidas son polinomios de Legendre de grado par, esto es:

$$N_l(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi} ((\xi^2 - 1)^n), \quad n=2(l-1), \quad l=1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Estas funciones son ortogonales entre sí y además satisfacen a priori las condiciones de contorno en la superficie libre ($\xi=1$) y en el fondo ($\xi=0$), cumpliendo la continuidad de tensiones en la interfase aire-mar y mar-fondo (S.-Arcilla y García, 1990).

El código utiliza elementos isoparamétricos bilineales de 4 nodos para interpolar las variaciones horizontales de la velocidad. Para la presión, la interpolación horizontal se realiza mediante funciones discontinuas de tipo escalón, de valor constante en el interior de cada elemento y nulo en el resto del dominio. Este elemento, denominado Q1/P0, puede provocar la ocurrencia de oscilaciones espúreas del campo de presiones, comúnmente denominadas "checkerboarding modes" (Donea et al, 1981), pero su bajo número de grados de libertad lo hace atractivo en problemas 3D frente a otros elementos de orden superior, menos conflictivos desde el punto de vista teórico. Pueden encontrarse aplicaciones de este elemento en los trabajos de Engelman et al (1982) y Benim y Zinser (1986).

La discretización de las ecuaciones del momentum es de tipo Galerkin. En la ecuación de la continuidad, se introduce una aproximación nueva que permite

deducir una expresión explícita para la altura de la superficie libre en función de la velocidad. Considerando la expresión verticalmente integrada de la ecuación de la continuidad (1.5) desde el fondo ($z=-h$) hasta la superficie ($z=\eta$):

$$\partial_x((\eta+h)\bar{u}) + \partial_y((\eta+h)\bar{v}) = 0 \quad (1.8)$$

, con

$$\bar{u} = \frac{1}{\eta+h} \int_{-h}^{\eta} u dz \quad (1.9.a)$$

$$\bar{v} = \frac{1}{\eta+h} \int_{-h}^{\eta} v dz \quad (1.9.b)$$

, la correspondiente aproximación en residuos ponderados a la ecuación (1.8) es, en notación vectorial:

$$\int_{\Omega} G_i \nabla_H \cdot ((\eta+h)\bar{\mathbf{u}}) d\Omega = 0 \quad (1.10)$$

siendo G_i una función peso arbitraria, ∇ . el operador divergencia y el subíndice H indica que sólo se consideran las componentes horizontales. Si asumimos:

$$\nabla_H \eta + \nabla_H h \approx \nabla_H h \quad (1.11)$$

, con la discretización 2DH del tipo Q1/P0 y empleando el método de Galerkin, después de algunas transformaciones obtenemos:

$$\eta^e = -\lambda^e \oint_{\Gamma^e} h(\bar{u} \cdot \bar{n}) d\Gamma \quad (1.12)$$

donde e indica elemento y λ^e es un parámetro definido como:

$$\lambda^e = \left[\oint_{\Gamma^e} \bar{u} \cdot \bar{n} d\Gamma \right]^{-1} \quad (1.13)$$

García (1990) justifica que la hipótesis implícita en la ecuación (1.11) - que el gradiente de la altura media de la superficie libre es pequeño en comparación con las derivadas de la profundidad- es pausable en todo el ámbito de aplicación del modelo. No obstante, por razones de tipo físico y numérico, el valor de λ^e debe ser positivo y estar acotado superiormente, lo que impone restricciones a la validez de la ecuación (1.13).

Este método tiene puntos de contacto con la versión discreta de la técnica de la función de penalización (ver e.g. Cuvelier et al, 1986) y posee la enorme

ventaja de que es una simplificación físicamente realista. El único inconveniente deriva del hecho de que en la dependencia funcional explícita entre la presión y la velocidad definida por la ecuación (1.12) se incluyen términos no lineales.

Al aplicar el método de residuos ponderados de Galerkin, según el eje z , para discretizar las ecuaciones del momentum, se integran verticalmente los términos viscosos que contienen las derivadas respecto de la coordenada z , por lo que aparecen, como una condición de contorno natural, tanto los esfuerzos tangenciales en la superficie libre debidos al viento, como los esfuerzos de fricción con el fondo. Para evaluar los primeros se asume una ley potencial del tipo:

$$\vec{\tau}^S = \rho_a C_d |\vec{u}_{10}| \vec{u}_{10} \quad (1.14)$$

donde ρ_a es la densidad del fluido, \vec{u}_{10} el vector velocidad del viento a 10 m de altura y C_d un coeficiente de arrastre.

La validez del modelo dentro de la zona de rompientes se debe a que se incluye el gradiente del tensor de esfuerzos de radiación en las ecuaciones del momentum como un término impulsor más, el cual se evalúa de acuerdo con Longuet-Higgins (1970):

$$\vec{\tau}^R = \frac{D}{C} \frac{\vec{K}_w}{|\vec{K}_w|} \quad (1.15)$$

donde:

D = Fracción de energía disipada por las olas

C = Celeridad de onda

\vec{K}_w = Vector número de onda

D se calcula usando la zona de rompiente como volumen de control para el flujo de energía, tal como proponen Losada et al. (1986):

$$D = \frac{\rho g H_b^2 (1 - K_{Rb}^2) \cos \theta_b C_{gb} m}{8 h_b} \quad (1.16)$$

donde ρ es la densidad, g es la aceleración de la gravedad, H es la altura de ola, K_R es el coeficiente de reflexión, θ es el ángulo que forman las crestas del tren de olas con la línea de costa, C_g es la celeridad de grupo, m es la pendiente media de la playa, h es la profundidad y el subíndice b indica los valores de las variables en rotura.

Para estimar la fricción con el fondo, el modelo supone una capa límite en las proximidades del mismo, de espesor δ_{BL} , dentro de la cual los términos no lineales son despreciables. Solucionando el flujo en su interior, los términos de fricción con el fondo ($\vec{\tau}^B$) se calculan a partir del perfil de velocidades obtenido (\vec{u}^{BL}). Para mar abierto se ha elegido la teoría de Ekman (e.g. Pedlosky, 1979):

$$\tau_x^B = \frac{1}{\delta_{BL}} \rho K_Z (u-v) |_{z=0} \quad (1.17.a)$$

$$\tau_y^B = \frac{1}{\delta_{BL}} \rho K_Z (u+v) |_{z=0} \quad (1.17.b)$$

Para zona de rompientes, admitiendo que la magnitud de la corriente inducida por las olas es más pequeña que la velocidad orbital, se emplea una expresión compacta de la fricción con el fondo promediada en zona de surf usando la teoría lineal de oleaje (S.-Arcilla y Vidaor, 1986).

$$\tau_x^B = \rho C_f \frac{4\gamma_b}{3\pi} \sqrt{g(h_b + \bar{\eta}_b)} [u(1 + \cos^2 \alpha_m) - v \operatorname{sen} \alpha_m \cos \alpha_m] \quad (1.18.a)$$

$$\tau_y^B = \rho C_f \frac{4\gamma_b}{3\pi} \sqrt{g(h_b + \bar{\eta}_b)} [v(1 + \operatorname{sen}^2 \alpha_m) - u \operatorname{sen} \alpha_m \cos \alpha_m] \quad (1.18.b)$$

donde

x, y = Dirección perpendicular y paralela a la costa respectivamente

ρ = Densidad

C_f = Coeficiente de fricción adimensional con el fondo

$\gamma_b = H_b/h_b$

g = Aceleración de la gravedad

h = Profundidad

H = Altura de ola

$\bar{\eta}$ = Altura de la superficie libre debida a las olas (set up)

u, v = Componentes x- e y- de la velocidad de la corriente

α_m = Angulo medio del oleaje incidente

b = Subíndice que denota valor en la línea de rotura

La resolución del sistema de ecuaciones del modelo se efectua de forma iterativa. A partir de una primera estima del campo de velocidades, calculada solucionando la parte lineal de las ecuaciones del momentum y sustituyendo la estima resultante del campo de velocidades en la ecuación de la continuidad penalizada, se obtiene la primera aproximación al campo de presiones. Con ésta se resuelve nuevamente el sistema de ecuaciones del momentum (ahora ya en su versión no lineal completa), y se calculan los valores actualizados para la velocidad, de donde se puede deducir el campo de presiones. El algoritmo iterativo es de tipo Newton-Rapshon, y la solución de los sistemas lineales intermedios se efectua mediante un método frontal de reducción gaussiana, con el cual se evita haber de ensamblar la matriz de coeficientes del sistema (Hinton y Owen, 1977). El error de truncamiento calculado para la soluciones numéricas, a la vista de la discretización realizada, resulta de tipo cuadrático para la velocidad y lineal para la presión.

Se utilizó el modelo ANASTASE en el estudio de la circulación inducida por el viento en un sector de la plataforma continental catalana. La estructura general de las soluciones numéricas obtenidas es coherente, pero un análisis detallado del campo de velocidades en las proximidades de los contornos laterales del dominio considerado revela ciertas paradojas. La solución que se

muestra en la figura 1.2 - ampliada en la figura 1.3- muestra que no hay conservación de la masa en la región SW de la malla computacional, donde el contorno es de tipo costero o "sólido" y se han impuesto consecuentemente condiciones de contorno tipo Dirichlet homogéneas.

Zienkiewicz y Heinrich (1979) sugieren que los métodos mixtos y los de la función de penalización podían resolver de forma rutinaria las ecuaciones de Navier-Stokes 2D estacionarias (y por ser formalmente equivalentes a éstas también, las SWE). Pelletier et al. (1989) demostraron, en el ámbito de las primeras, que se podían llegar a soluciones paradójicas cuya sintomatología común era precisamente el no cumplimiento del principio de conservación de la masa (=condición de incompresibilidad) por parte de los campos de velocidad. Las causas de ello, pueden ser de dos tipos:

- La acumulación de errores de redondeo en el proceso de solución que tendrá como consecuencia un mal condicionamiento de la matriz del sistema.
- Una discretización no adecuada de las incógnitas del problema.

Estos autores proponen el cálculo de la máxima divergencia discreta del transporte integrada a nivel elemental, esto es:

$$\max_{\forall e} \left| \int_{\Omega^e} \nabla \cdot ((\eta + h) \bar{\mathbf{u}}) d\Omega \right| \quad (1.19)$$

FIGURA 1.1. Malla computacional empleada para el estudio de la circulación en la plataforma continental catalana (Golfo de Sant Jordi).

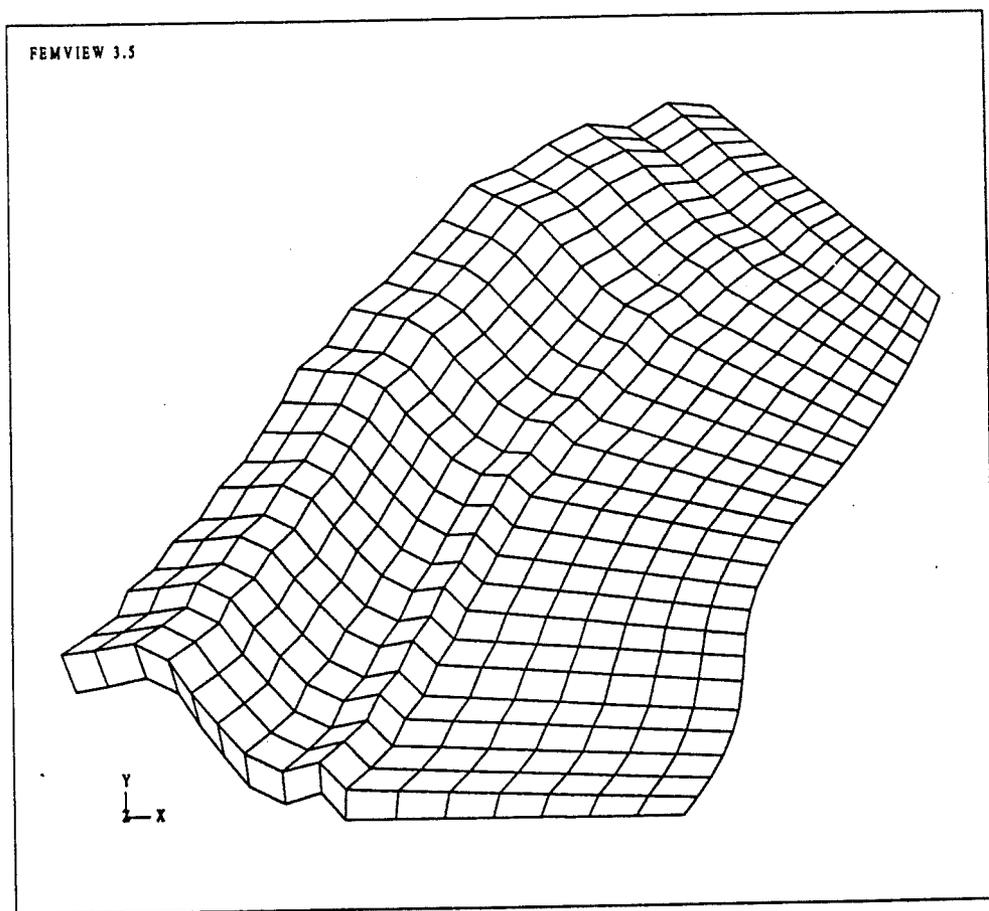


FIGURA 1.2. Caso: circulación en el Golfo de Sant Jordi. Solución para el campo de velocidades medias. Resultados del modelo ANASTASE.

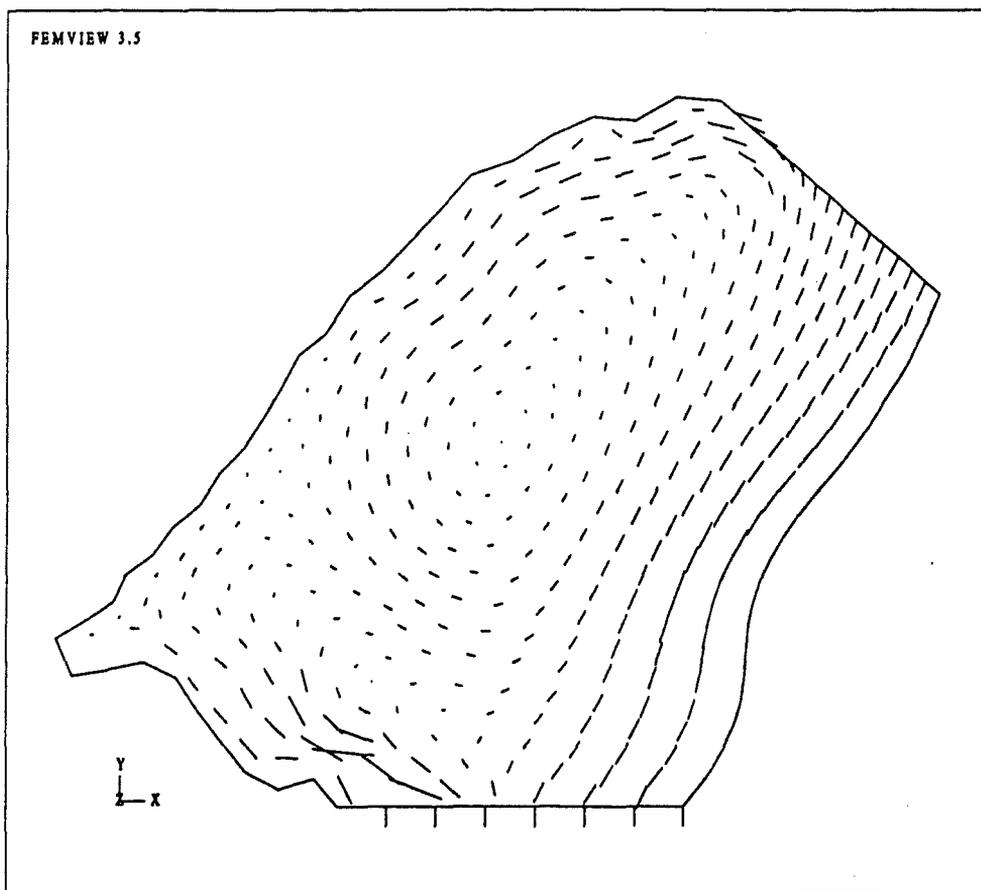
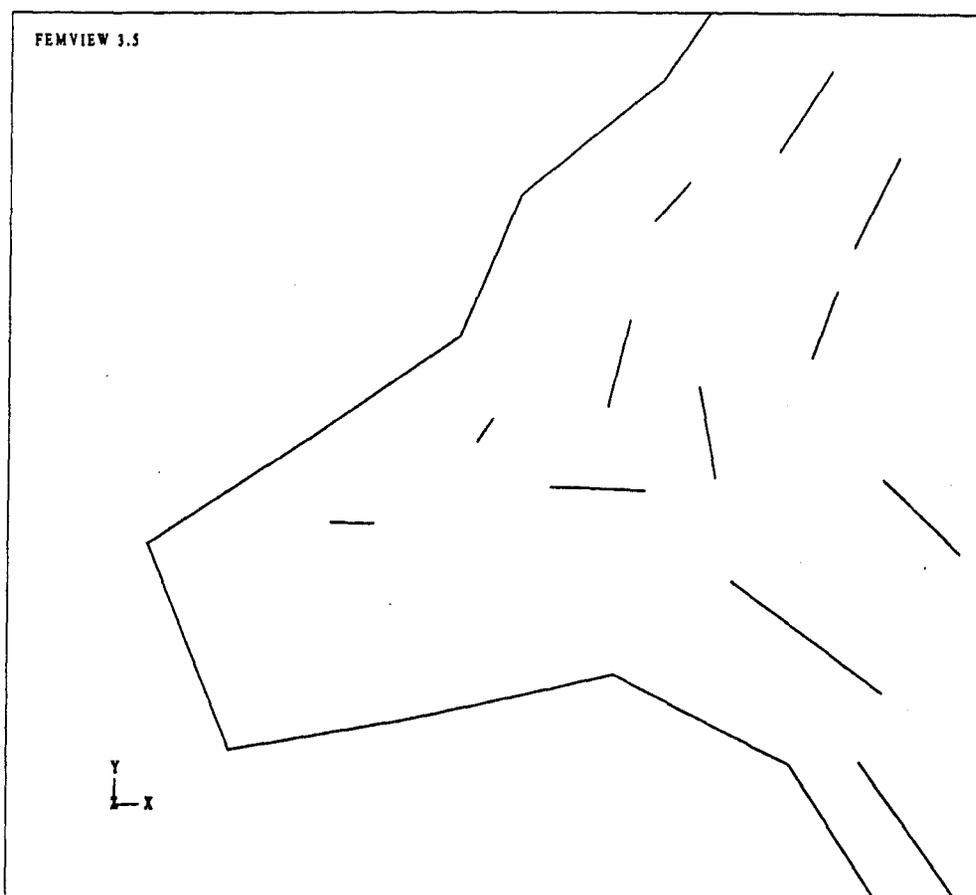


FIGURA 1.3. Caso: circulación en el Golfo de Sant Jordi. Detalle de la solución para el campo de velocidades medias. Resultados del modelo ANASTASE.



como una herramienta de diagnóstico de la medida de incompresibilidad de la solución.

Para comprobar si los problemas de las soluciones de ANASTASE tienen el mismo origen que los mencionados por Pelletier et al. (1989) en el ámbito de las ecuaciones de Navier-Stokes, se han realizado dos experimentos numéricos, correspondientes a casos 2DH de geometría y física simples.

El primero de ellos es el de la circulación en un canal rectangular de 800 m de largo y de 600 m de ancho, con calado constante $h=10$ m. Por un extremo del canal penetra un flujo estacionario con distribución de velocidades prescrita. Se supone que no actúa ningún término impulsor exterior al fluido. El dominio se discretiza haciendo uso de la malla de 63 nodos y 48 elementos que se muestra en la figura 1.4.

Se eligen condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas en los dos contornos laterales y Neuman homogéneas en el contorno abierto "norte", y se prescribe una distribución de velocidades parabólica en el contorno "sur" con una velocidad máxima de 5 cm/s sobre el eje del canal y 0 cm/s en las paredes. Se adoptan unos coeficientes de viscosidad turbulenta horizontal y vertical constantes $K_H=10$ m²/s, $K_Z=0.01$ m²/s (parámetros escogidos dentro de los valores recomendados por la bibliografía), una densidad $\rho=1000$ kg/m³ y $\lambda^e=0.1$ (estimado tomando órdenes de magnitud en la ecuación 1.13). Los resultados de velocidad y altura de superficie libre que se obtienen son los de las figuras 1.5 y 1.6 respectivamente. Calculando el máximo valor de la divergencia discreta del transporte sobre todos los elementos del dominio, se obtiene un valor de 20 m³/s que está muy alejado de ser un valor pequeño si se

FIGURA 1.4. Malla computacional empleada para los casos del canal rectangular y de la corriente inducida por el viento en una darsena cerrada.

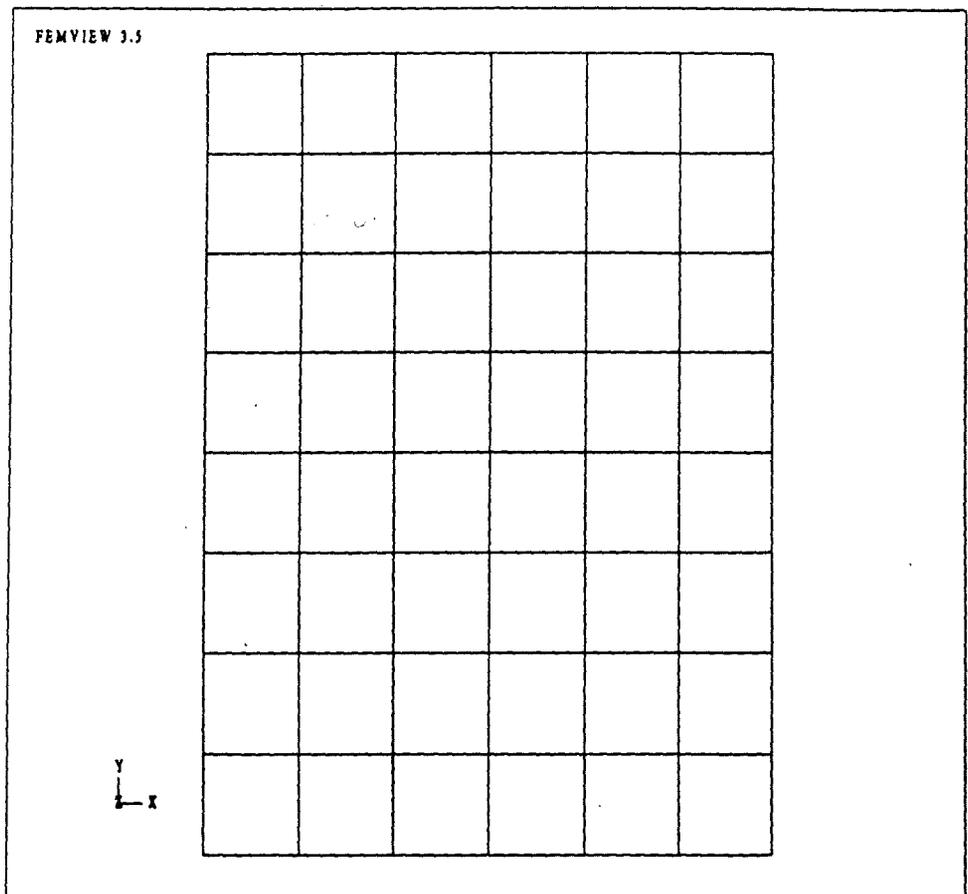


FIGURA 1.5. Caso: canal rectangular. Solución para el campo de velocidades. Resultados del modelo ANASTASE.

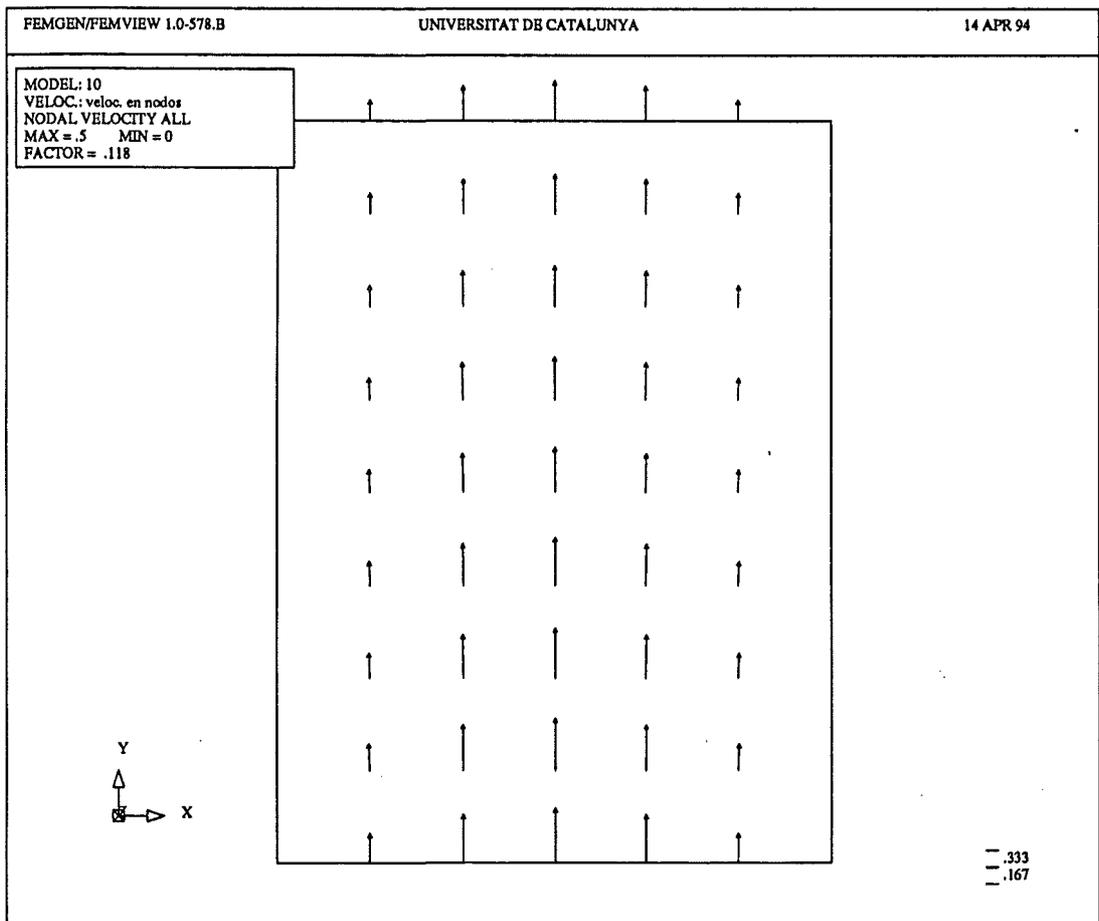
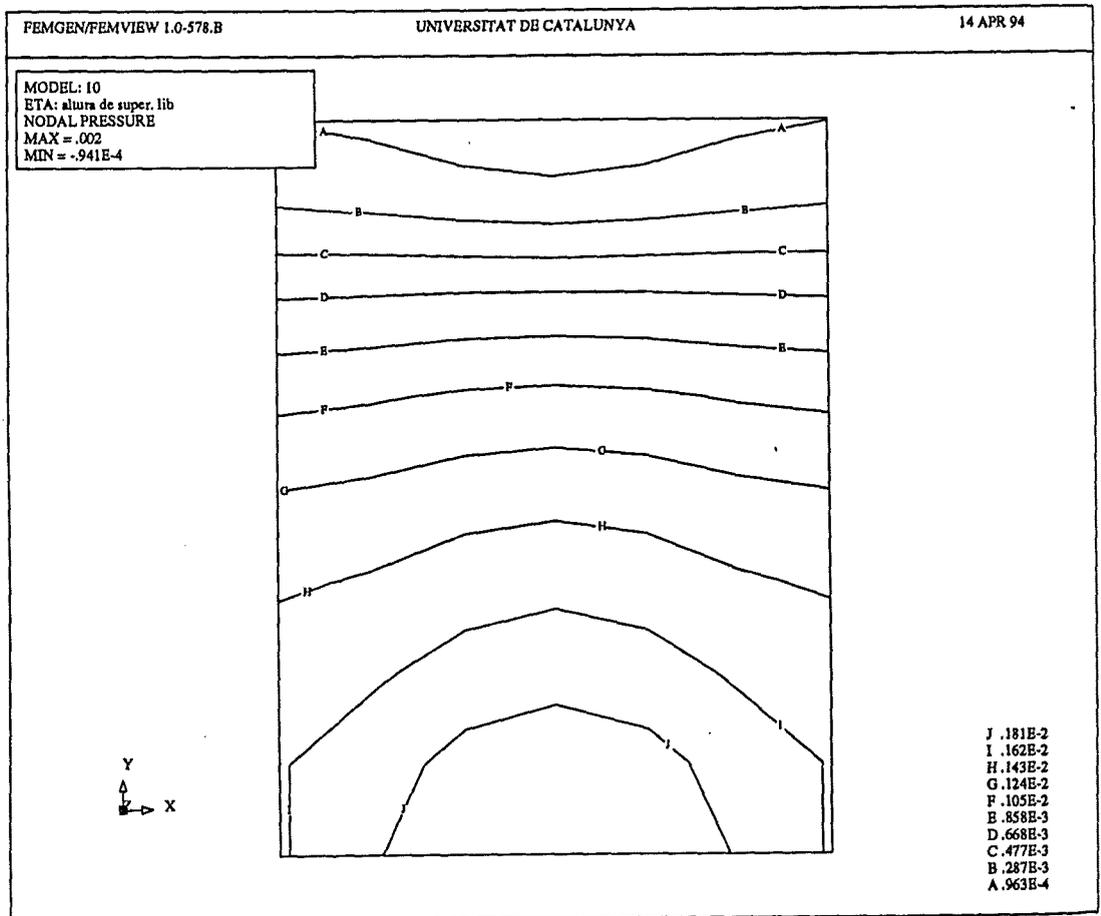


FIGURA 1.6. Caso: canal rectangular. Solución para el campo de η . Resultados del modelo ANASTASE.



considera que el caudal total de entrada que imponemos con las condiciones de contorno es de ese orden. Por tanto, la solución numérica viola de forma importante el requisito de conservación de la masa. En cuanto a la solución de la altura de la superficie libre, esta es claramente incorrecta.

Un análisis detallado del problema pone de manifiesto que los valores asignados a las propiedades, tanto del flujo como del fluido, producen desajustes entre los diferentes términos de las ecuaciones a resolver (1.6). Los términos relevantes son, en este caso, el gradiente de presión y los términos turbulentos, ambos con órdenes de magnitud muy diferentes. Los coeficientes de la matriz global correspondientes a los términos de presión son mucho más pequeños que los coeficientes correspondientes a los términos disipativos. El hecho de operar con precisión finita hace que se produzca la acumulación de importantes errores de redondeo en el proceso iterativo de solución, existiendo la posibilidad de que "se pierdan" los términos de presión.

Los errores de redondeo introducen pequeñas alteraciones en la matriz global del sistema que pueden dar lugar a grandes cambios en la solución, especialmente en métodos como el de la función de penalización que suelen conducir a sistemas de ecuaciones no muy bien condicionados.

El segundo experimento numérico es el de una circulación inducida por el viento en una darsena cerrada. La hipotética dársena rectangular, de $800 \times 600 \text{ m}^2$ y calado constante $h=10 \text{ m}$, se discretiza con la misma malla numérica definida en la figura 1.4. El "forcing" es una distribución triangular de tensión de viento variable en la dirección x , cuyos valores máximo y mínimo son 0.3 Nw/m^2 y 0 Nw/m^2 , respectivamente. Se supone un coeficiente de

fricción $\gamma=1 \text{ kg/m}^2\text{s}$, un parámetro constante de viscosidad turbulenta horizontal $K_H=10 \text{ m}^2/\text{s}$ y $\lambda^e=0.1$ (estimado otra vez a partir de la ecuación 1.13).

Este caso se ha resuelto con dos "juegos" de condiciones de contorno. En el primero de ellos, se especifican condiciones de tipo "free slip" (i.e. Dirichlet homogéneas para la componente de la velocidad normal al contorno, y Neumann homogéneas para la componente tangencial) en todos los contornos. En las figuras 1.7 y 1.8 se muestran los resultados obtenidos. El campo de velocidades, en forma de vórtice antihorario, y la distribución de alturas de la superficie libre son congruentes entre sí y con la sollicitación considerada. El campo de alturas de superficie libre no presenta inestabilidades (figura 1.9).

Por contra, si imponemos condiciones Dirichlet homogéneas en los nodos contiguos a la esquina suroeste del contorno, y "free slip" en el resto, volvemos a obtener resultados aparentemente buenos en velocidades (figura 1.10), pero en la solución para la altura de la superficie libre se advierten oscilaciones espúreas (figuras 1.11 y 1.12).

Este último ejemplo numérico ilustra el efecto de la discretización Q1/P0 empleada en ANASTASE. Para elementos mixtos (o sea, elementos en los que la velocidad y la altura de la superficie libre se interpolan con funciones de forma distintas), una cota superior del error de la solución es (Cuvelier et al, 1986):

FIGURA 1.7. Caso: corriente inducida por el viento en una darsena cerrada. Solución con condiciones de contorno "free slip". Campo de velocidades. Resultados del modelo ANASTASE.

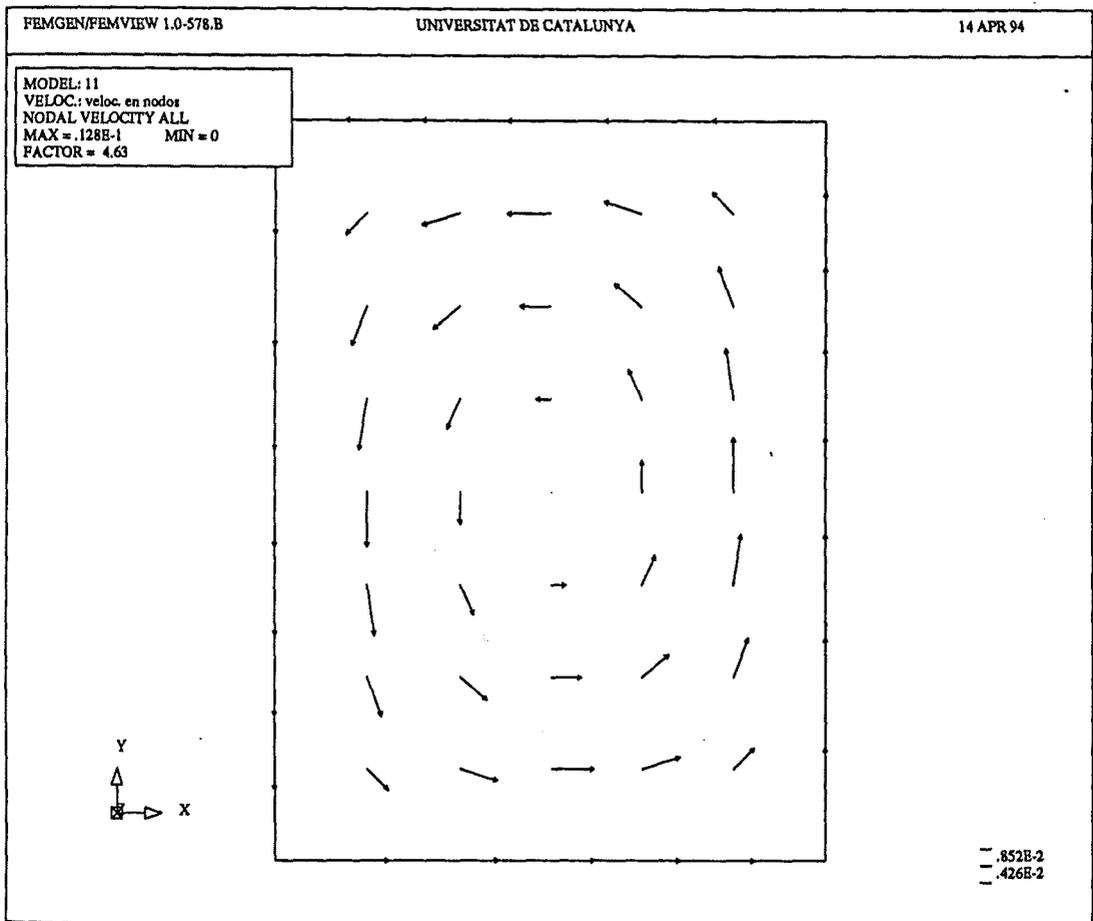


FIGURA 1.8. Caso: corriente inducida por el viento en una darsena cerrada. Solución con condiciones de contorno "free slip". Campo de η . Resultados del modelo ANASTASE.

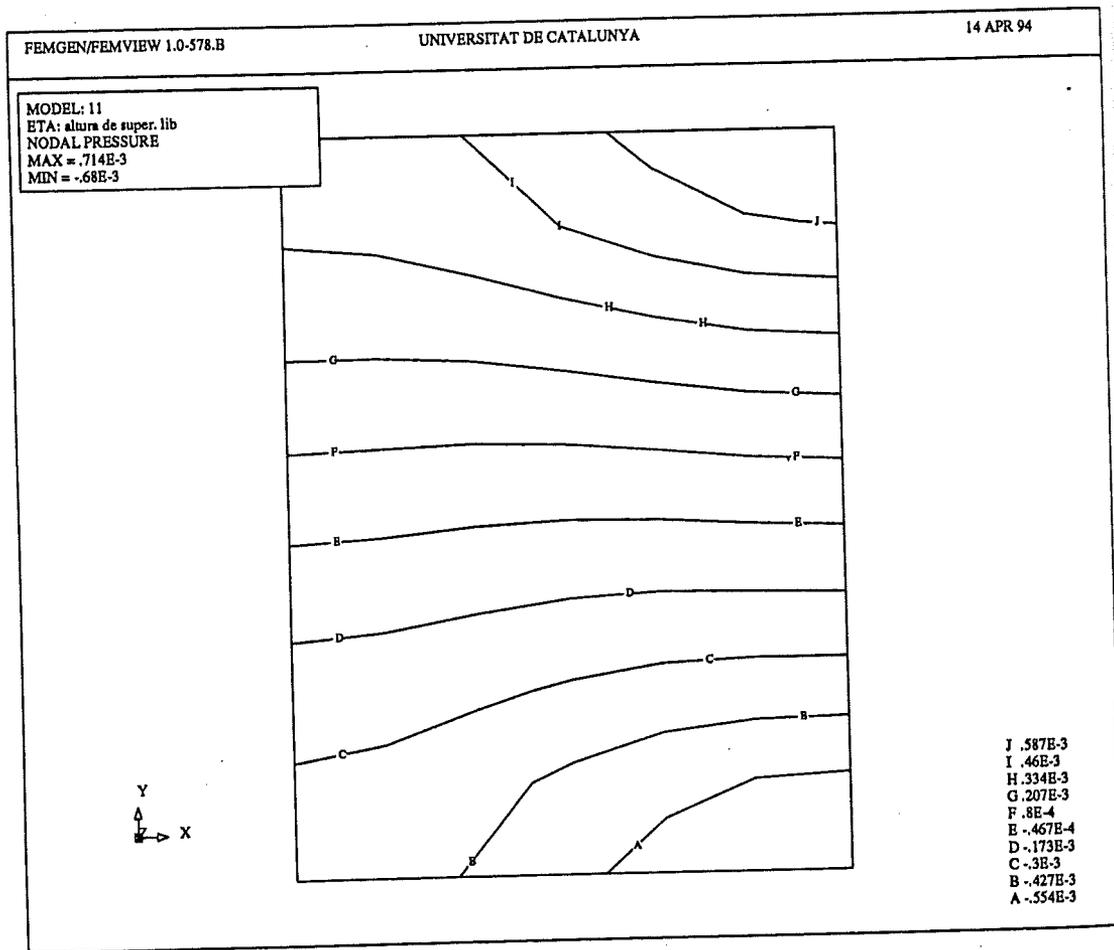


FIGURA 1.9. Caso: corriente inducida por el viento en una darsena cerrada. Solución con condiciones de contorno "free slip". Diferencias positivas (\circ) y negativas (\times) de η con respecto a su valor medio. Resultados del modelo ANASTASE.

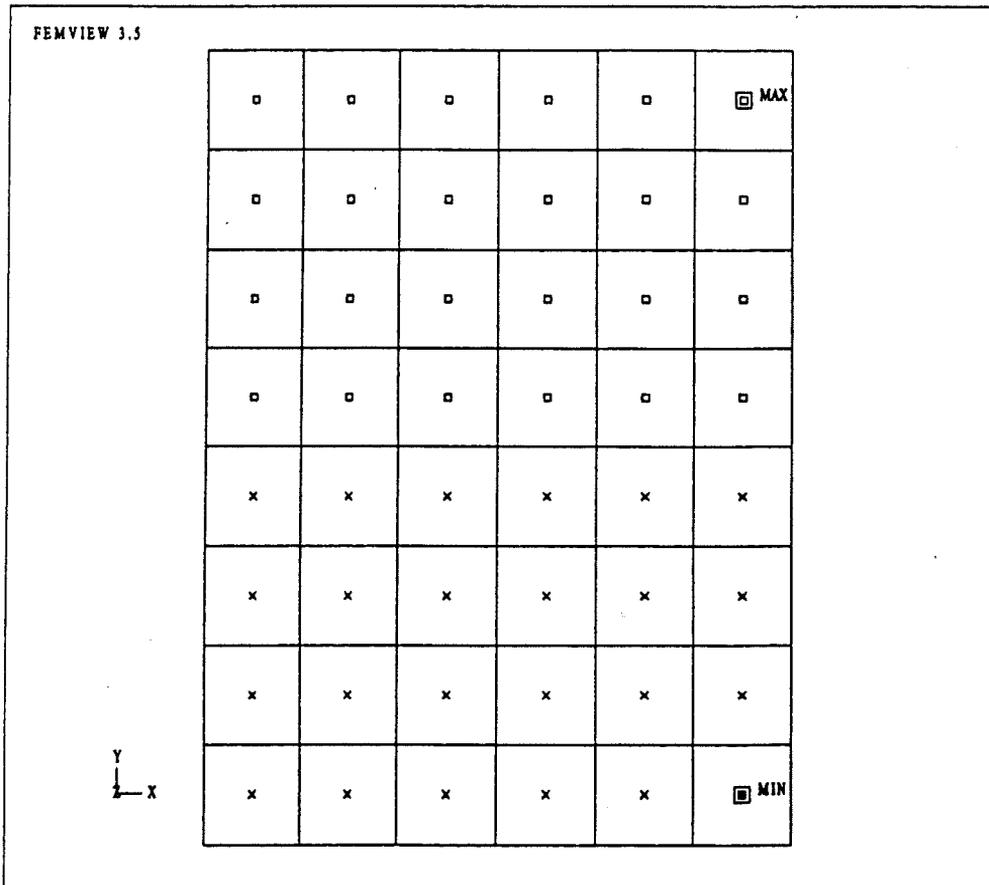


FIGURA 1.10. Caso: corriente inducida por el viento en una darsena cerrada. Solución con condiciones de contorno "free slip" excepto cerca de la esquina SW. Campo de velocidades. Resultados del modelo ANASTASE.

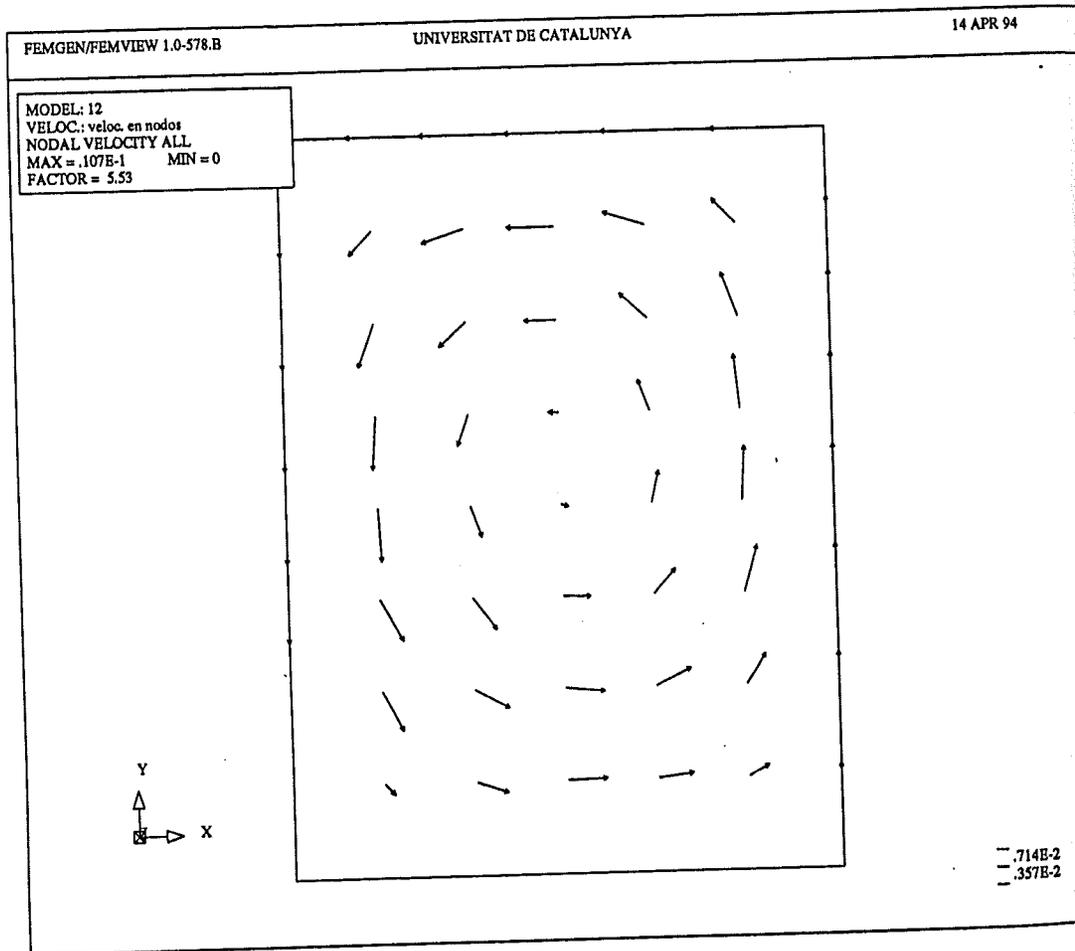


FIGURA 1.11. Caso: corriente inducida por el viento en una darsena cerrada. Solución con condiciones de contorno "free slip" excepto cerca de la esquina SW. Campo de η . Resultados del modelo ANASTASE.

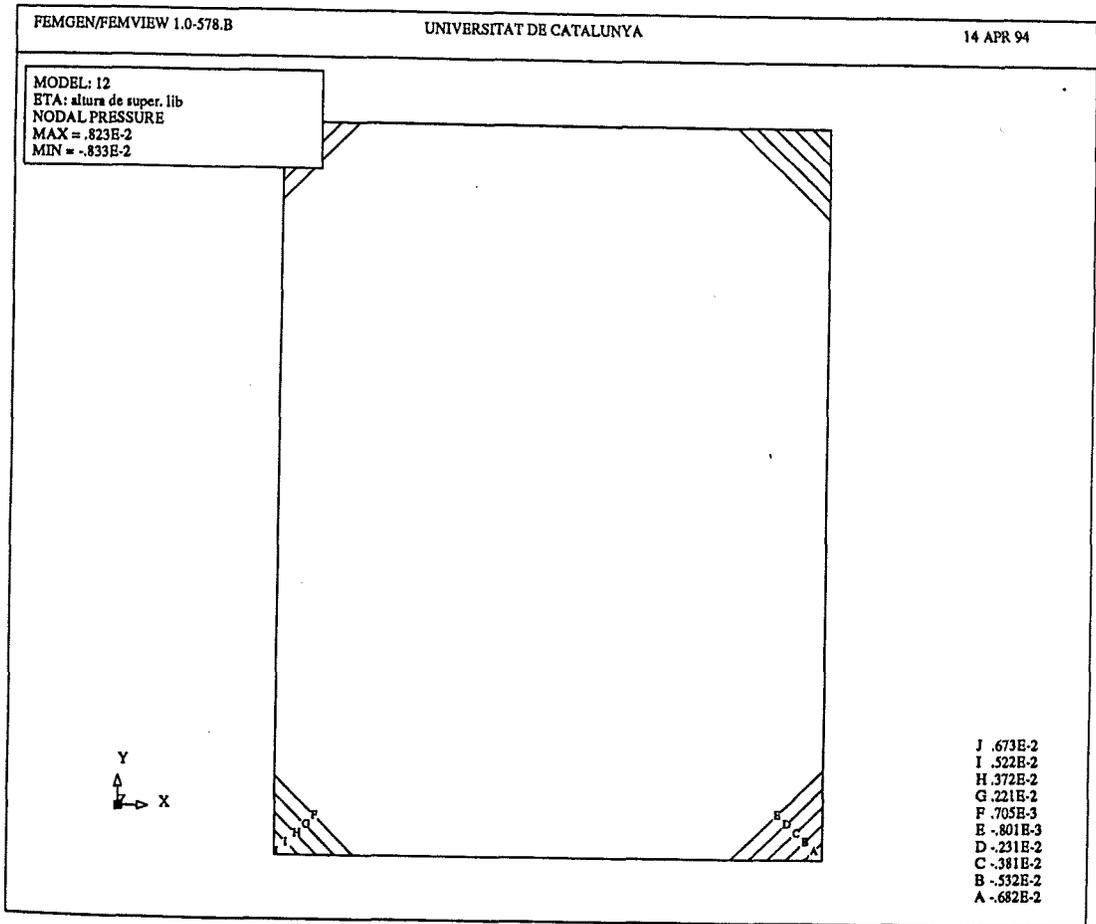
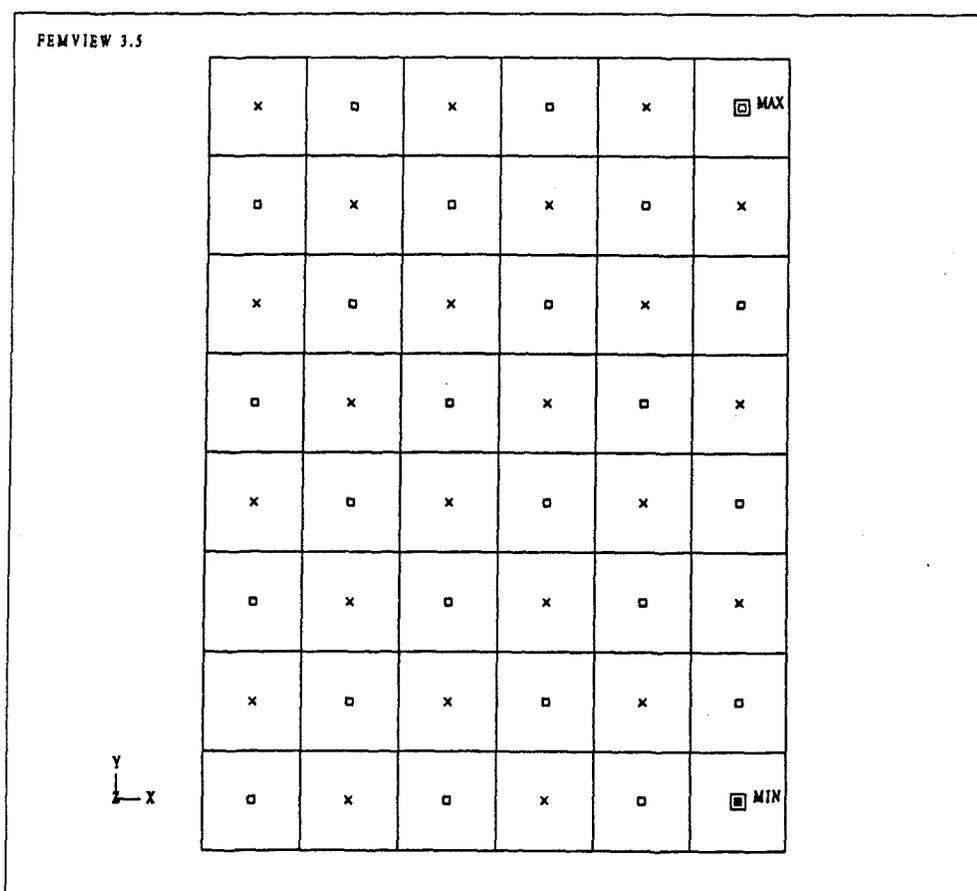


FIGURA 1.12. Caso: corriente inducida por el viento en una darsena cerrada. Solución con condiciones de contorno "free slip" excepto cerca de la esquina SW. Diferencias positivas (○) y negativas (×) de η con respecto a su valor medio . Resultados del modelo ANASTASE.



$$\| u - u_n \| \leq \inf_{v_h \in V_h} \| u - v_h \| + \inf_{P \in Q_h} \| p - q_n \| \quad (1.20)$$

donde:

$u \in V, p \in H$ = Soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales originales (continuidad y momentum)

V, H = Espacios de Hilbert dados

$v_h \in V_h, q_h \in H_h$ = Soluciones del problema discreto (ecuaciones en residuos ponderados)

$V_h \in V, H_h \in H$ = Subespacios de Hilbert de aproximaciones a la velocidad y a la altura de la superficie libre, respectivamente

$\| \cdot \|$ = Norma de cada subespacio

La ecuación 1.20 indica que la bondad de la solución numérica para la velocidad esta controlada por la calidad de las aproximaciones tanto de la velocidad como de la presión. Por otra parte, el elemento Q1/P0 (bilineal para la velocidad, constante para la presión) es conocido como un elemento que produce razonables resultados para la velocidad pero inestable para la presión (Oden, 1982). Aunque, como se desprende de los ejemplos anteriores estas inestabilidades no se observan en mallas uniformes cuando el campo de soluciones varía suavemente, pequeñas perturbaciones en la malla o alguna ligera irregularidad en la solución como ocurre en el caso representado por las figuras 1.10, 1.11 y 1.12, donde se imponen condiciones de contorno Dirichlet homogéneas en varios nodos del contorno de forma no simétrica, producen oscilaciones espúreas en el campo de alturas de la superficie libre.

Los dos ejemplos anteriores ponen de manifiesto que, incluso en problemas sencillos, las técnicas del MEF implementadas en el modelo ANASTASE para resolver las SWE estacionarias pueden dar lugar a soluciones numéricas que no conserven la masa.

Pelletier et al. (1989) proponen reducir las diferencias entre los órdenes de magnitud de los distintos términos de las SWE (causa, como hemos visto, de la acumulación de errores de redondeo y posterior mal condicionamiento del sistema de ecuaciones a resolver) por medio de la adimensionalización de las ecuaciones. La alternativa para igualar los órdenes de magnitud de los términos de las ecuaciones sería emplear parámetros de penalización pequeños; pero esto haría que la condición de incompresibilidad no se impusiera correctamente.

De cualquier manera, el método de penalización clásico sólo permite cumplir la condición de incompresibilidad de forma aproximada (Heinrich y Dyne, 1991). Frente a esto, es conocida la existencia de un algoritmo de solución que mantiene las ventajas computacionales del método de penalización pero permitiendo la satisfacción de la ecuación de la continuidad en la medida deseada. Es el algoritmo de Uzawa o técnica de penalización iterativa, muy popular en la escuela francesa de análisis numérico para la solución de los problemas de Stokes y que fue generalizada para las ecuaciones de Navier-Stokes por Fortin y Fortin (1985).

El resultado de combinar la adimensionalización de las ecuaciones y el uso del algoritmo de Uzawa es una forma robusta de resolver los problemas de flujo no lineales incompresible (Pelletier et al, 1989). Pero ambas medidas serían

ineficaces para nuestros propósitos si topamos con inestabilidades como las que puede producir el elemento Q1/P0.

Por otro lado, son obvias las ventajas de trabajar con una discretización de tipo Q1/P0 en un modelo quasi-3D de las SWE. En problemas no lineales como los que consideramos, es interesante disponer de un bajo número de nodos por elemento. De este modo, los sucesivos ensamblajes de las matrices elementales presentan un coste computacional por iteración limitado. Además, aunque como es bien conocido que el elemento Q1/P0 no satisface la condición inf-sup (Cuvelier et al., 1986); códigos basados en este elemento proporcionan razonables resultados los campos de velocidad (ver e.g. Robichaud et al.; 1990; García, 1990).

Brezzi y Fortin (1991) demuestran la existencia de un subespacio de funciones de interpolación constantes para la altura de la superficie libre que conducen a aproximaciones estables de la misma. Fortin y Boivin (1990) han propuesto al respecto una técnica para estabilizar los campos de presión obtenidos como solución de modelos numéricos que trabajan con elementos tipo Q1/P0. La idea central es proyectar los campos de presión, en cada paso del proceso iterativo de solución, sobre el subespacio libre de modos espúreos de presión. El coste computacional asociado a dicho esquema proyectado puede ser razonablemente pequeño si se asocia a un algoritmo de solución tipo Uzawa.

1.2. Objetivos del trabajo

Como se ha puesto de relieve, existe un modelo numérico en elementos finitos (ANASTASE) para el estudio oceanográfico de la circulación en las zonas de rompientes y de plataforma continental que plantea problemas semejantes a otros modelos de las ecuaciones de Navier-Stokes resueltos mediante técnicas convencionales del MEF, y cuya sintomatología común es el no cumplimiento de la condición de incompresibilidad. Es necesario, pues, corregir este inconveniente para llegar a disponer de un instrumento numérico robusto apto para los fines propuestos.

Así, en la primera parte de esta memoria, se pretende la puesta a punto de un código quasi-3D en elementos finitos que resuelva las SWE estacionarias, sin los problemas encontrados en ANASTASE, pero teniendo a este código como punto de partida.

En la línea de las propuestas formuladas en la bibliografía reciente, se abordan, en esta primera parte:

- La adimensionalización de las SWE y su posterior discretización.
- La adaptación del algoritmo de Uzawa generalizado como esquema de solución del sistema de ecuaciones algebraico que proviene de las SWE adimensionales.

- La implementación de una técnica de estabilización iterativa de las oscilaciones espúreas de la altura de superficie libre.

El primero de estos temas se trata en el capítulo 2, y el segundo en el 3. En el capítulo 4, antes de introducir la estabilización de las oscilaciones espúreas de la altura de la superficie libre en la formulación del modelo, se analiza desde el punto de vista matemático la causa que produce dichas oscilaciones, y se presenta una revisión del estado del arte de las posibles técnicas alternativas. Por último, en el capítulo 5, se describe el nuevo modelo haciendo un especial énfasis en su calibración y validación.

Además, como creemos que los modelos numéricos tienen poco valor en sí mismos, si no se aplican a problemas reales (por ser simples herramientas de trabajo que sólo pueden ayudar a la comprensión de ciertos fenómenos), la segunda parte de la memoria está dedicada al empleo del nuevo modelo en el estudio de la circulación inducida por el viento, en dos áreas pertenecientes a distintas regiones oceanográficas de interés: el Golfo de Sant Jordi en la plataforma continental catalana, y el Estrecho de Bransfield, región del océano Antártico, ubicada entre la península Antártica y las islas Shetland del Sur.

Ambas son zonas en las que el Laboratorio de Ingeniería Marítima de la UPC está desarrollando proyectos de investigación. Es en el capítulo 6 donde se estudia, con la ayuda del nuevo modelo numérico, la influencia del viento local sobre la estructura de la circulación en el Golfo de Sant Jordi. En el capítulo 7, se caracteriza la circulación inducida por el viento en el estrecho de Bransfield. Esta última área es una de las zonas de la Antártida que soporta mayores densidades de tráfico marítimo -y por tanto, mayores riesgos

potenciales de contaminación- pese lo cual la hidrodinámica regional se conoce poco.

Se completa la exposición con el capítulo 8, donde se resume el trabajo llevado a cabo, se enumeran las conclusiones del mismo y se plantean posibles futuras líneas de trabajo.

1.3. Notación empleada.

El significado de la notación empleada en esta memoria es el siguiente::

$\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t$ = derivadas parciales respecto de las coordenadas cartesianas x, y, z y al tiempo t

x', y', z' = coordenadas cartesianas adimensionales

ξ = profundidad normalizada adimensional

u, v, w = componentes del vector velocidad según los ejes x, y, z

u', v', w' = componentes del vector velocidad adimensional según los ejes x, y, z

\bar{u}, \bar{v} = componentes de la velocidad verticalmente promediada ($\bar{\mathbf{u}}$) según los ejes x, y

ρ = densidad del agua

ρ' = densidad del agua adimensional

ρ_0 = densidad característica del agua en la superficie marina

α = volumen específico del agua

p = presión

p' = presión adimensional

f = parámetro de Coriolis

K_H = coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal

K'_H = coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal adimensional

K_z = coeficiente de viscosidad turbulenta vertical

K'_z = coeficiente de viscosidad turbulenta vertical adimensional

S_x, S_y = componentes del gradiente del tensor de radiación según los ejes x, y

g = aceleración de la gravedad

h = profundidad o calado

h' = profundidad o calado adimensional

η = altura de la superficie libre del mar

η' = altura de la superficie libre del mar adimensional

U = escala característica de la velocidad

L = longitud horizontal característica

D = distancia vertical característica

R = densidad característica

A_H = viscosidad turbulenta horizontal característica

A_z = viscosidad turbulenta vertical característica

ϵ = radio de deformación de Rosbby

E_H = número de Ekman horizontal

E_z = número de Ekman vertical

$W_k(z)$ = función peso según el eje z

$N_1(z)$ = función base o de interpolación a lo largo del eje z

$G^i(x,y)$; $L^s(x,y)$ = funciones peso en el plano xy

$M^q(x,y)$ = función de forma o de interpolación en el plano xy (para la velocidad)

M = vector de funciones de forma para la velocidad

$P^e(x,y)$ = función de forma o de interpolación en el plano xy (para la altura de la superficie libre)

P = vector de funciones de forma para la altura de la superficie libre

\int_{Ω} = integral de área

\int_{Γ} = integral de línea

\oint_{Γ} = integral de línea sobre todo el contorno

n_x, n_y = componentes del vector unitario normal al contorno (\vec{n}) según los ejes x, y

τ_x^S, τ_y^S = componentes de la tensión tangencial ejercida por el viento sobre la superficie libre ($\vec{\tau}^S$) según los ejes x, y

τ_x^B, τ_y^B = componentes de la tensión tangencial de fricción con el fondo ($\vec{\tau}^B$) según los ejes x, y

$a_{kj}, b_{klm}, c_{kl}, d_{kjm}, e_{kl}, h_j$ = coeficientes del modelo numérico dependientes de las funciones base

u_j^q, v_j^q = valores nodales de u, v (el subíndice j indica el grado de libertad vertical, y el superíndice q corresponde a la numeración local del nodo)

η^e = valor de la altura de la superficie libre del mar en el centroide del elemento e

$\nabla \cdot$ = operador divergencia

∇ = operador gradiente

$\nabla_H \cdot$ = operador divergencia horizontal

λ^e = parámetro del modelo ANASTASE equivalente a la función de penalización

λ = parámetro de penalización

λ' = parámetro de penalización adimensional

$\gamma_{xx}^B, \gamma_{xy}^B, \gamma_{yx}^B, \gamma_{yy}^B$ = coeficientes de fricción con el fondo

$A_{\alpha\beta\gamma}$ = matriz de coeficientes asociada a los términos no lineales del sistema de ecuaciones discretizadas

$G'_{\alpha\beta}$ = matriz de coeficientes asociada a los términos difusivos y de Coriolis del sistema de ecuaciones discretizado

$D_{\alpha\delta}^t$ = matriz de coeficientes que contiene la parte barotrópica del gradiente de presión

$D_{\alpha\beta}$ = matriz divergencia que expresa la condición de incompresibilidad del fluido

F_{α} = vector de términos independientes

ρ_a = densidad del aire

c_d = coeficiente de arrastre para el cálculo de las tensiones tangenciales ejercidas por el viento sobre la superficie libre

\vec{u}_{10} = velocidad del viento normalizada a 10 m de altura

z_0 = coeficiente de rugosidad local

σ_0 = sección radar normalizada

θ = ángulo de incidencia del oleaje

θ_b = ángulo de incidencia del oleaje en rompientes

H = altura de ola

H_b = altura de ola en rotura

h_b = calado de rotura

γ_b = índice de rotura

T = período de ola

$\bar{\eta}_b$ = sobreelevación (set-up) de la superficie libre debida a la rotura del oleaje

$\vec{\tau}^R$ = vector gradiente del tensor de esfuerzos de radiación

D = fracción de energía disipada por las olas en zona de rompientes

c = celeridad de onda

c_g = celeridad de grupo

\vec{K}_w = vector número de onda

K_R = coeficiente de reflexión del oleaje

m = pendiente media de la playa

α_m = ángulo medio del oleaje incidente

\vec{u}_w = velocidad orbital de una partícula de fluido debida al oleaje

C_f = coeficiente adimensional de fricción con el fondo

Φ = geopotencial

$\alpha_{35,0,p}$ = volumen específico standard

δ = anomalía de volumen específico

$\Delta\Phi_s$ = distancia geopotencial standard

$\Delta\Phi$ = anomalía de geopotencial

D_E = profundidad de Ekman

v_o = velocidad superficial de la espiral de Ekman

V, Q = espacios de Hilbert

$V_h \subset V, Q_h \subset Q$ = subespacios de Hilbert de aproximaciones a la velocidad y a la altura de la superficie libre, respectivamente

$\|.. \|$ = norma de un subespacio de Hilbert

$u \in V, p \in Q$ = soluciones exactas de las ecuaciones de la continuidad y del momentum

$v_h \in V_h, q_h \in Q_h =$ soluciones del problema discreto

$Q''_h \subset Q_h =$ subespacio al que pertenecen los modos espureos de presión

$Q^*_h \subset Q_h =$ subespacio libre de modos espureos de presión

$\{\phi_{i,M}\} =$ base ortogonal de Q_h

1.4. Agradecimientos

Quisiera aquí, dar las gracias a todas aquellas personas que me han ayudado, o simplemente, han estado cerca de mí durante la ejecución de este trabajo. Es al escribir estas líneas cuando la memoria se llena de cuatro años de recuerdos, rostros conocidos y momentos agradables, olvidándome de sinsabores, puesto que de todo ha habido.

En primer lugar, quiero nombrar a mis dos directores de tesis: Marc A. García y Agustín S.-Arcilla. Del primero de ellos he recibido una dedicación casi permanente durante estos primeros años, siendo uno de sus logros el haberme transferido sus conocimientos tanto de oceanografía como de modelado numérico, así como gran parte de su pasión por el mar y su entorno. El segundo, es el principal responsable de mi talante como investigador. Su visión global de los problemas y sus críticas bien fundamentadas, me han permitido avanzar con rigor en el trabajo.

También, me gustaría recordar aquí, a todo el equipo humano del Laboratorio de Ingeniería Marítima de la UPC, al que estoy orgulloso de pertenecer. Y sobre todo, a aquellos de sus miembros con los que este doctorando ha compartido trabajos:

- Vicenç Gràcia y Herminia Valdemoro, con ellos he vivido muy buenos momentos entre las arenas del Delta del Ebro, intentando medir, cuando la climatología no nos lo impedía, las variables hidrodinámicas en la zona de surf.

- Jesus Gómez, con el que conviví unos dos meses en la Base Antártica Española "Juan Carlos I" durante el verano austral 91-92, y del que aprendí algo de sus conocimientos de "soft" y "hard", lo justo para poder llegar hasta aquí.

- Quim Sospedra, Oswaldo López y Pilar Rojas, junto a ellos navegué varias semanas de 1993 a bordo del BIO Hespérides por las aguas de la Antártida y también del Mediterráneo, y me introdujeron en el mundo de las campañas hidrográficas.

- Felipe Collado y Miguel Coussirat, autores de una parte de las utilidades gráficas y de cálculo que he utilizado: interpolación y representación gráfica de los campos de viento en el Bransfield, cálculo analítico de la corriente longitudinal a través del modelo de Longuet-Higgins, etc... . Sus famosos "ficheros verdes" me han facilitado en parte el trabajo. Además, las largas charlas mantenidas con Felipe han dado luz a algunos puntos oscuros durante el desarrollo del trabajo.

- Joan Puigdefàbregas, experto en temas de teledetección y autor del programa de lectura de cintas magnéticas donde estaban recogidos los datos de viento del ERS-1. El trabajo conjunto en el tema del "wind scatterometer" me ha resultado muy enriquecedor.

- Manuel González, al que corresponde una parte del trabajo de generación de la malla computacional empleada para el estudio del Estrecho de Bransfield y con el que comparto la afinidad, dentro del LIM, hacia los modelos de elementos finitos.

Y sobre todo, no quisiera olvidarme de los habitantes de la "sala de becarios" donde se ha gestado la mayor parte de este trabajo, y con los que he convivido en el día a día en el laboratorio.

Para finalizar, hay una larga lista de personas que han "sufrido" el desarrollo de esta tesis, sobre todo su parte final: mis padres (a los que esta dedicado este trabajo), Nuria (mi novia, que ha participado activamente en la impresión de este documento) , demás familia, amigos, compañeros... . A todos ellos, les doy las gracias, esperando compensarlos para que su impresión sea que "a pesar de todo, ha valido la pena".