UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departamento de Ingenieria Hidráulica, Marítima y Ambiental

ESTABILIZACIÓN DE LA SUPERFICIE LIBRE EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES SHALLOW-WATER POR ELEMENTOS FINITOS. APLICACIONES OCEANOGRÁFICAS.

Autor: Manuel Espino Infantes
Directores: Marc A. García
Agustín Sánchez-Arcilla

Barcelona, mayo de 1994

1ª PARTE :

MODELADO QUASI-3D EN ELEMENTOS FINITOS DE LAS ECUACIONES ADIMENSIONALES DE SHALLOW-WATER

"Amanecía, y el nuevo sol pintaba de oro las ondas de un mar tranquilo. Chapoteaba un pesquero a un kilómetro de la costa cuando, de pronto, rasgó el aire la voz llamando a la Bandada de la Comida y una multitud de mil gaviotas se aglomeró para regatear y luchar por cada pizca de comida. Comenzaba otro día de ajetreos".

Richard Bach.

(del libro "Juan Salvador Gaviota")

CAPÍTULO 2.

LAS ECUACIONES ADIMENSIONALES DE SHALLOW-WATER

Como hemos visto en el capítulo anterior, al resolver las SWE no adimensionales (1.5) y (1.6), pueden existir situaciones en las que los valores de las propiedades del flujo y del fluído se combinen y den lugar a desajustes en el orden de magnitud de los diferentes términos de las ecuaciones. En estos casos, dado que los ordenadores operan con precisión finita, se acumulan importantes errores de redondeo en el proceso de solución numérica. Por otro lado, es conocido que en sistemas de ecuaciones mal condicionados, como a los que conducen los métodos de penalización clásicos, los errores de redondeo en la solución de la matriz global del sistema dan lugar a resultados numéricos distorsionados.

El problema descrito anteriormente tendría solución con el uso de una forma adimensional de las ecuaciones, que consiguiera un escalado adecuado de los diferentes términos de las mismas (Pelletier et al., 1989). Además, el hecho de trabajar con un sistema de ecuaciones adimensionales nos proporcionaría una medida de la importancia relativa de los diferentes términos de la ecuación para poder identificar los fenómenos físicos relevantes en el problema considerado.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, será ventajoso trabajar con las SWE adimensionales. Pero la elección de una forma adimensional apropiada al tipo de problema que queremos resolver es un ejercicio que requiere un cuidadoso análisis previo.

2.1. Criterios de adimensionalización

Siguiendo el desarrollo de Pedlosky (1979), en primer lugar elegimos las escalas que caracterizan las magnitudes de la longitud, profundidad, velocidades horizontal y vertical, coeficientes de viscosidades turbulentas tanto horizontal como vertical, presión y densidad: L, D, U, W, A_H, A_z, P y R, respectivamente. Usamos estas escalas para definir las variables adimensionales dependientes e independientes (diferenciadas con primas) de este modo:

$$(x,y)=L(x',y') \qquad (2.1) \qquad\qquad z=Dz' \qquad (2.2)$$

$$(u,v)=U(u',v') \qquad (2.3) \qquad\qquad w=U\frac{D}{L}w' \qquad (2.4)$$

$$p=-\rho gz+Pp' \qquad (2.5) \qquad\qquad \rho=R\rho' \qquad (2.6)$$

$$K_H=A_HK_H' \qquad (2.7) \qquad\qquad K_z=A_zK_z' \qquad (2.8)$$

La hipótesis principal aquí implícita es que las escalas L, U, etc... han sido elegidas de forma que las variables adimensionales sean del orden de la unidad y que el producto de cualquier combinación de variables esté suficientemente aproximado por el producto de los factores de escala.

Si las variables adimensionales definidas en (2.1) a (2.8) se introducen en la ecuación (1.5) se obtiene la ecuación adimensional de la continuidad:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}=0 \qquad (2.9)$$

Sustituyendo en (1.6) -suponiendo por ahora $S_x=S_y=0$- resultan las 3 ecuaciones del momentum adimensionales:

$$\frac{U^2}{L}(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'})-fUv'=-\frac{P}{RL}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{UA_H}{L^2}[\frac{\partial}{\partial x'}(2K_H'\frac{\partial u'}{\partial x'})+\frac{\partial}{\partial y'}[K_H'(\frac{\partial v'}{\partial x'}+$$

$$+\frac{\partial u'}{\partial y'})]]+\frac{UA_z}{D^2}\frac{\partial}{\partial z'}(K_z'\frac{\partial u'}{\partial z'}) \qquad (2.10a)$$

$$\frac{U^2}{L}(u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'})+fUu'=-\frac{P}{RL}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial y'}+\frac{UA_H}{L^2}[\frac{\partial}{\partial y'}(2K_H'\frac{\partial v'}{\partial y'})+\frac{\partial}{\partial x'}[K_H'(\frac{\partial v'}{\partial x'}+$$

$$+\frac{\partial u'}{\partial y'})]]+\frac{UA_z}{D^2}\frac{\partial}{\partial z'}(K_z'\frac{\partial v'}{\partial z'}) \qquad (2.10b)$$

$$0=\frac{\partial p'}{\partial z'} \qquad (2.10c)$$

La coordenada vertical (z) ha sido escalada de modo diferente que las horizontales (x,y) debido a que las variaciones verticales tienen una dimensión característica D menor que L en aguas someras. La velocidad vertical se ha escalado suponiendo que, a priori, cada uno de los términos de la ecuación (2.9) es del mismo orden. El flujo de masa vertical a través de una superficie de área $O(L^2)$ resulta ser del orden $O(WL^2)$, que es igual a O(UDL). Esto es precisamente el orden de magnitud del flujo de masa horizontal a la profundidad D a través del perímetro O(L) de la misma región. Comprobamos, pues, que la adimensionalización efectuada no impone ninguna restricción sobre el balance de masa.

Toda vez que la circulación estacionaria o "residual" en los ámbitos de plataforma continental que nos conciernen es relativamente lenta, podemos suponer que los términos de aceleración convectiva serán pequeños comparados con los de Coriolis (2.5). El caso extremo es el del flujo geostrófico (al que se ajusta aproximadamente la circulación sobre el talud continental), en el cual el gradiente de presión equilibra la aceleración de Coriolis. Por tanto, conviene elegir el parámetro adimensional P como:

$$P=RfUL \qquad (2.11)$$

Siendo:

$$\varepsilon=\frac{U}{fL}=\textit{radio de deformación de Rossby} \qquad (2.12a)$$

$$E_H=\frac{2A_H}{fL^2}=\textit{ número de Ekman horizontal} \qquad (2.12b)$$

$$E_z=\frac{2A_z}{fD^2}=\textit{ número de Ekman vertical} \qquad (2.12c)$$

, podemos reescribir las ecuaciones (2.10) de este modo:

$$\varepsilon\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)-v'=-\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{E_H}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(2K_H'\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left[K_H'\left(\frac{\partial v'}{\partial x'}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)\right]\right]+\frac{E_z}{2}\frac{\partial}{\partial z'}\left(K_Z'\frac{\partial u'}{\partial z'}\right) \qquad (2.13a)$$

$$\varepsilon\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)+u'=-\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial y'}+\frac{E_H}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y'}\left(2K_H'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)+\frac{\partial}{\partial x'}\left[K_H'\left(\frac{\partial v'}{\partial x'}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)\right]\right]+\frac{E_z}{2}\frac{\partial}{\partial z'}\left(K_Z'\frac{\partial v'}{\partial z'}\right) \qquad (2.13b)$$

$$0=\frac{\partial p'}{\partial z'} \qquad (2.13c)$$

El sistema formado por las ecuaciones (2.9) y (2.13) forman un conjunto de ecuaciones adimensionales que describen el flujo medio en aguas someras promediado a la escala de la turbulencia. Para su posterior discretización conviene reformularlas en función de la velocidad y la altura de la superficie libre. Para ello integramos la ecuación (1.6c) según z y obtenemos:

$$p \simeq p_{atm} - g\int_{\eta}^{z} \rho\, dz \qquad (2.14)$$

donde p_{atm} es la presión atmosférica al nivel del mar, que suponemos igual en todos los puntos del dominio (escogeremos $p_{atm}=0$ como valor de referencia). Derivando (2.14) respecto a x, y aplicando la regla de Leibnitz se obtiene:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\rho_0\frac{\partial \eta}{\partial x} + g\int_0^{\eta}\frac{\partial \rho}{\partial x}dz + g\frac{\partial}{\partial x}\int_z^0 \rho\, dz \qquad (2.15)$$

siendo $\rho_0=\rho_0(x,y)$ una densidad característica de la superficie marina. suponiendo que el segundo término de (2.15) es, en general, pequeño frente a los otros dos términos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \simeq g\rho_0\frac{\partial \eta}{\partial x} + g\frac{\partial \alpha}{\partial x} \qquad (2.16)$$

con

$$\alpha = \alpha(x,y,z) = \int_z^0 \rho dz \qquad (2.17)$$

El término en η de (2.16) es la contribución barotrópica al gradiente de presión (equivaldría exactamente al gradiente de presión si la densidad fuera homogénea), mientras que el término en α es su parte baroclínica (es la contribución que aparece justamente por el hecho de que existe una variación espacial de la densidad).

Si elegimos N como la escala que caracteriza la magnitud de la elevación de la superficie libre, y tenemos en cuenta las relaciones (2.1) a (2.8), podemos escribir:

$$\eta = N\eta' \qquad \rho_0 = R\rho_0'$$

$$\alpha = RD\alpha' \qquad (2.18)$$

donde de nuevo, las primas denotan variables adimensionales. Si introducimos (2.18) en (2.16) y adimensionalizamos, obtenemos:

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{g}{fUL} N(\rho_0' \frac{\partial \eta'}{\partial x'}) + \frac{g}{fUL} D(\frac{\partial \alpha'}{\partial x'}) \qquad (2.19)$$

Podemos elegir;

$$N=D=\frac{fUL}{g} \qquad (2.20)$$

por lo que ahora la expresión del gradiente adimensional de presión según el eje x, será:

$$\frac{\partial p'}{\partial x'}=\rho_0'\frac{\partial \eta'}{\partial x'}+\frac{\partial \alpha'}{\partial x'} \qquad (2.21a)$$

Para la derivada según el eje y se obtiene de una manera análoga:

$$\frac{\partial p'}{\partial y'}=\rho_0'\frac{\partial \eta'}{\partial y'}+\frac{\partial \alpha'}{\partial y'} \qquad (2.21b)$$

Si ahora sustituímos (2.21a y b) en (2.13a y b) resultará:

$$\varepsilon(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y})-v=-\frac{1}{\rho}(\rho_0\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \alpha}{\partial x})+\frac{E_H}{2}[\frac{\partial}{\partial x}(2K_H\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}[K_H(\frac{\partial v}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial y})]]+\frac{E_z}{2}\frac{\partial}{\partial z}(K_Z\frac{\partial u}{\partial z}) \qquad (2.22a)$$

$$\varepsilon(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y})+u=-\frac{1}{\rho}(\rho_0\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \alpha}{\partial y})+\frac{E_H}{2}[\frac{\partial}{\partial y}(2K_H\frac{\partial v}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial x}[K_H(\frac{\partial v}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial y})]]+\frac{E_z}{2}\frac{\partial}{\partial z}(K_Z\frac{\partial v}{\partial z}) \qquad (2.22b)$$

donde hemos suprimido las primas por comodidad. Disponemos por tanto, de un sistema inicial de 4 ecuaciones adimensionales (2.9), (2.13c), (2.22a) y (2.22b) con 4 incógnitas: u, v, w y η. La relación entre η y p viene dado por (2.14).

2.2. Discretización de las ecuaciones adimensionales

La circulación marina es un fenómeno intrínsicamente tridimensional, incluso en zonas someras de plataforma. Su análisis requiere, pues, el uso de métodos capaces de reproducir la variación de las incógnitas con las tres coordenadas cartesianas. Alternativamente a una formulación 3D clásica del problema, de alto coste computacional, preferimos utilizar el modelado quasi-3D. Esta técnica permite obtener una resolución 3D con un coste 2D+1D (en principio, menor). La idea básica del modelado quasi-3D es la combinación de un modelado 2DH convencional del flujo medio, y un modelado 1DV local que describe la distribución vertical del flujo a través de la descomposición de la misma en funciones base o perfiles.

Existen varias técnicas quasi-3D para extraer la información de la estructura vertical del flujo:

- Asumir una descomposición en vertical para el campo de velocidades, en términos de un conjunto de funciones base. Aplicando el método de los residuos ponderados a cada una de las ecuaciones asociadas a las funciones base, aparece una nueva ecuación del momentum asociada a cada una de estas funciones (Zienkiewicz y Heinrich, 1979).

- Dividir el flujo en dos componentes, la primaria (sin variación vertical) y secundaria (variable con z), que se resuelven separadamente. Para ello, se promedia verticalmente la ecuación del moméntum (entre el fondo (z=-h) y la superficie (z=η)) y se compara con la misma ecuación sin promediar. Puesto que el término de gradiente barotrópico de presión (independiente de z) es idéntico en las dos, se despeja éste en ambas y se igualan las expresiones resultantes. Se obtienen de este modo sistemas de ecuaciones diferenciados y más simples que el primitivo para las componentes primaria y secundaria de la corriente (Stive y De Vriend, 1987). Según esta división, la corriente primaria posee la dirección del flujo medio, mientras que la corriente secundaria lleva la dirección de los esfuerzos que la inducen.

- Dividir, de nuevo, el flujo en una componente primaria y otra secundaria, pero considerando, al promediar verticalmente la ecuación del moméntum, un dominio vertical que sólo llege al nivel de senos de las olas. Así, el fluído puede considerarse acotado superiormente por una tapa rígida ("rigid-lid") sobre la cual actúan tensiones asociadas a la capa del fluído que se sitúa sobre este nivel (S.-Arcilla et al., 1990). En el caso de las SWE estacionarias, el supuesto de tapa rígida será razonable siempre y cuando el set up/ set down inducido por la corriente sea una pequeña fracción del calado local. Esta técnica y la anterior se aplican principalmente al estudio de problemas de flujo en zona de rompientes.

En principio, los tres métodos tienen en común la expansión vertical de las variables en términos de un conjunto de funciones base. La elección de estas, siempre es cuestión de ecomonía computacional o de la técnica numérica empleada en particular. Elegir funciones base mutuamente ortogonales es la opción de mínimo coste computacional. Por otra parte, al menos algunas de las funciones deben tener derivada no nula en la superficie libre para asegurar la compatibilidad de la solución con las condiciones de contorno.

La elección de un método de Galerkin convencional -funciones peso igual a funciones base (para el problema discreto 1DV) o de forma (para el problema 2DH)- para construir el sistema de ecuaciones es comprometida, puesto que la presencia de términos no lineales puede ser fuente de inestabilidad numérica en las soluciones. Una alternativa, desarrollada en el ámbito de problemas lineales de convección-difusión, es el uso de funciones de peso no simétricas tipo "upwinding" (ver e.g. Heinrich et al., 1977). Esta técnica, conocida como método de Petrov-Galerkin, se puede interpretar como la introducción de una disipación ficticia que atenúa las inestabilidades de la solución numérica. Ahora bien, no es inmediata la aplicación de estas técnicas en problemas no lineales (e.g. Sampaio, 1991). Afortunadamente, en los problemas que aquí se consideran la corriente es relativamente lenta, por lo que es presumible que el carácter no-lineal de las ecuaciones sea débil, y que la discretización usando el método de Galerkin dé buenos resultados.

Por claridad de exposición, se ha remitido al apéndice I incluído al final de la primera parte de esta memoria el desarrollo matemático que conduce del sistema de ecuaciones diferenciales adimensionales (2.9), (2.13c), (2.22a) y (2.22b) que definen nuestro problema al sistema algebraico equivalente en elementos finitos, para funciones base y de forma cualesquiera. En los apartados siguientes se discute la elección del conjunto de funciones base y del tipo de elemento.

2.2.1. Tipo de funciones base

Las funciones base $N_l = N_l(\xi)$ $l=1...N$, al aparecer en derivadas primeras en las ecuaciones (I.5a y b), concretamente, en los coeficientes e_{kj}, deben tener continuidad de clase C^0. Como cualquier función continua puede cumplir lo anterior, la exigencia más restriciva es que tales funciones base sean compatibles con las condiciones de contorno en la superficie libre ($\xi=1$) y en el fondo ($\xi=0$).

Las condiciones de contorno que se deben satisfacer son las de continuidad de tensiones a través de las interfases aire-mar y mar-fondo. La primera de ellas se expresa como:

$$\rho K_z \partial_z u = \tau_x^S \ ; \ \rho K_z \partial_z v = \tau_y^S \ en \ \xi = 1 \qquad (2.23a)$$

En el fondo el perfil de velocidades debe ser compatible con el esfuerzo tangencial de fricción , ésto es:

$$\rho K_z \partial_z u = \tau_x^B \ ; \ \rho K_z \partial_z v = \tau_y^B \ en \ \xi = 0 \qquad (2.23b)$$

Davis (1988) propone un método general para la elección de funciones base ortogonales. Pero, para asegurar que el problema de valores propios que plantea tenga solución real, la velocidad en la superficie libre debe ser nula, o alternativamente, serlo su gradiente vertical. Ninguna de las dos posibilidades es satisfactoria, a la vista de las condiciones de contorno a satisfacer.

Aquí optamos por interpolar la variación vertical de las variables dependientes mediante polinomios de Legendre de grado par, los cuales forman una serie ortogonal completa (1.7) y son compatibles con las condiciones (2.23a y b) (ver en García, 1990; S.-Arcilla y García, 1990). De esta forma, las ecuaciones en residuos ponderados (I.5a y b) coinciden con la formulación convencional verticalmente integrada de las ecuaciones del momentum si se considera un único grado de libertad vertical.

2.2.2. Tipo de elemento

Escoger un tipo de elemento para la discretización 2DH de las ecuaciones, implica la selección de las funciones de forma que gobiernan la variación de u,v y η en planos z=cte.

En las ecuaciones (I.9a, b y c), el orden máximo de las derivadas de las funciones $M^q(x,y)$ q=1,...M, es uno. Por consiguiente, estas funciones de forma deben ser como mínimo de tipo C^0 (continuamente diferenciables en el interior de cada elemento Ω^e y continua en todo el dominio Ω). Ahora bien, no aparecen derivadas de P^r, r=1,...K, y en consecuencia estas funciones de forma pueden ser continuas en Ω^e pero discontinuas en el dominio Ω (basta que sean integrables en él).

Por otro lado, si queremos utilizar un esquema de solución semejante al de la función de penalización, como veremos en el siguiente apartado, es conveniente emplear una interpolación discontinua para las η. Para asegurar la existencia y unicidad de la solución de manera que este garantizada la ausencia de inestabilidades númericas de los campos de soluciones, las funciones de forma de la velocidad y de η deben satisfacer la condición Babuska-Brezzi (ver el último apéndice al final de la primera parte de esta memória).

Así, el criterio a seguir sería seleccionar elementos/funciones de forma lo más simples posibles que satisfagan los anteriores requisitos. Las opciones más razonables serán:

- El elemento Q2⁻/P0: bicuadrático de 8 nodos para la velocidad y η constante. Interpola la velocidad mediante las funciones de forma serendípitas. Suele ser un elemento muy utilizado por su robustez (Hughes, 1987), aunque tiene problemas de sobredifusividad (Codina, 1992).

- El elemento Q2/P1: bicuadrático isoparamétrico de 9 nodos para la velocidad y lineal discontinua para η. Este elemento combina tres interesantes características: presenta convergencia cuadrática en velocidades, es un cuadrilátero y es discontinuo para la presión (la experimentación numérica demuestra que los elementos cuadráticos presenta un compromiso aceptable, entre el grado de exactitud de la solución y su complejidad computacional). Además, los elementos rectangulares son más exactos que los triangulares, especialmente en mallas estructuradas. Y finalmente, los elementos con presión discontinua son superiores a los elementos con presión continua cuando se trata de reproducir los detalles de la circulación, especialmente en las zonas de recirculación (Pelletier et al.,1989).

- El elemento P2/P0 (Crouzieux-Raviert): triangular cuadrático isoparamétrico de 6 nodos para la velocidad y constante para η. Dicho elemento presenta los mismo problemas que el $Q2^-$/P0, que ya hemos comentado (Oden, 1982).

- El elemento $P2^+$/P1 (Crouzieux-Raviert modificado): triangular cuadrático de 7 nodos para la velocidad y lineal para la η. Aquí, el elemento triangular cuadrático en velocidades se enriquece con una función burbuja (se añade un nodo en el baricentro del elemento). Su radio de convergencia, como en el Q2/P1, también es óptimo (Codina, 1992).

No obstante, la discretización Q1/P0 (elemento bilineal isoparamétrico de 4 nodos con η constante) es una alternativa de menos coste computacional que cualquiera de estas opciones. Ahora bien, este elemento no cumple la condición Babuska-Brezzi (Oden, 1982), lo que puede dar pie a la aparición de modos espureos de presión e incluso de campos de solución nulos ("locking") cuando el número de restricciones es superior al número de grados de libertad. En el capítulo 4 se aborda la discusión de las técnicas que permiten estabilizar el campo de presión (con un sobrecoste computacional pequeño) y eliminar así la restricción impuesta por la condición de estabilidad.

En cuanto al error de truncamiento que se comete al discretizar las ecuaciones del modelo con el elemento Q1/P0, las funciones de forma de la velocidad polinomios de primer grado -aunque incluyen un término espúreo adicional de segundo grado-, y las de la altura de la superficie libre polinomios grado cero, debe ser cuadrático para la velocidad, y lineal para la superficie libre.

2.3. Forma matricial de las nuevas ecuaciones

Retomando las ecuaciones (I.9a,b y c), podemos definir unos nuevos índices α, β, γ, δ y σ, tales que:

$$\alpha = \left(\begin{array}{ll} 2N(i-1)+2K & \textit{para la ec. (I.9b)} \\ 2N(i-1)+2K-1 & \textit{para la ec. (I.9a)} \end{array} \right.$$

$$\beta = \left(\begin{array}{ll} 2N(q-1)+2j & \textit{para los términos } v_j^q \\ 2N(q-1)+2j-1 & \textit{para la términos } u_j^q \end{array} \right.$$

$$\gamma = \left(\begin{array}{ll} 2N(r-1)+2l & \textit{para los términos } v_l^r \\ 2N(r-1)+2l-1 & \textit{para la términos } u_l^r \end{array} \right.$$

$$\delta = r \textit{ para los términos } \eta^r$$

$$\sigma = s \textit{ para la ec. (I.9c)}$$

$$(2.24)$$

Con ellos es posible reescribir el sistema de ecuaciones en forma matricial de esta manera:

$$A_{\alpha\beta\gamma}u_\beta u_\gamma + G'_{\alpha\beta}u_\beta + D^t_{\alpha\delta}\eta_\delta = F_\alpha \quad \alpha=1,2,...,2NM \qquad (2.25a)$$

$$D_{\sigma\beta}u_\beta = 0 \quad \sigma=1,2,...,K \qquad (2.25b)$$

(con convenio de suma para los subíndices repetidos), siendo $A_{\alpha\beta\gamma}$ el tensor que agrupa los coeficientes de los términos no lineales (convectivos); $G_{\alpha\beta}$, la matriz de coeficientes lineales que contiene los términos de Coriolis, viscosidad y fricción con el fondo; y $D_{\alpha\delta}{}^t$, la matriz que contiene los términos de gradiente barotrópico de presión. El término F_α es el vector de términos independientes, que emgloba al gradiente baroclínico de presión, la tensión tangencial exterior ejercida sobre la superficie del fluído y el gradiente del tensor de esfuerzos de radiación cuando se trabaja dentro de la zona de rompientes. Por último, $D_{\sigma\beta}$ es la matriz divergencia que expresa la condición de incompresibilidad del fluído.

Los términos de las ecuaciones (I.9a y b) que contenían los valores de la fricción con el fondo, se calculan a partir de las expresiones (1.18a y b) ó (1.19a y b) según se trabaje en mar abierto o en zona de rompientes, respectivamente. Ambas expresiones relacionan linealmente la fricción con el fondo y la velocidad de la corriente, por lo que haciendo uso de las discretizaciones definidas por (I.1a y b) y (I.8a y b) podemos escribir:

$$\tau_x^{B^p} = N_j \left|_{\xi=0} M^q [\gamma_{xx}^{B^p} u_j^q + \gamma_{xy}^{B^p} v_j^q]\right. \qquad (2.26a)$$

$$\tau_y^{B^p} = N_j \left|_{\xi=0} M^q [\gamma_{yx}^{B^p} u_j^q + \gamma_{yy}^{B^p} v_j^q]\right. \qquad (2.26b)$$

donde los $\gamma_{xx}{}^B$, $\gamma_{xy}{}^B$, $\gamma_{yx}{}^B$, $\gamma_{yy}{}^B$ son las componentes del tensor de coeficientes de fricción con el fondo, cuyo valor se deduce directamente de las ecuaciones mencionadas.

Considerando que la discretización horizontal es del tipo Q1/P0, la expresión de (2.25a y b) en notación local puede escribirse así:

$$\sum_e [A_{\alpha\beta\gamma}^{(e)} u_\beta^{(e)} u_\gamma^{(e)} + G_{\alpha\beta}^{\prime(e)} u_\beta^{(e)} + D_\alpha^{t(e)} \eta^{(e)}] = \sum_e F_\alpha^{(e)} \qquad \alpha = 1,2,\ldots,2N^{(e)}M^{(e)}$$

$$D_\beta^{(e)} u_\beta^{(e)} = 0 \qquad \forall e \qquad (2.27)$$

donde el superíndice (e) denota valores calculados para un elemento de los que componen el dominio considerado y Σ_e es el operador ensamblaje de todos los términos calculados a nivel elemental. El significado de estas matrices y vectores elementales se recoge en el apéndice II, también al final de la primera parte de esta memoria.

2.3.1. Un posible esquema de solución: el método clásico de la función de penalización

Las ecuaciones (2.27) tienen un caracter no lineal, por lo que es necesario el empleo de esquemas iterativos de solución. Sería interesante, no obstante, poder simplificar el sistema planteado. En esa línea, se puede pensar en transformar la ecuación discreta de la continuidad en una ecuación en la que $\eta^{(e)}$ dependa explícitamente de la velocidad; despejando en ella la altura de la superficie libre elemental, y sustituyendo la expresión resultante en las ecuaciones del momentum, el problema queda reducido al cálculo de los coeficientes u_j^q y v_j^q a través de un sistema de 2NM ecuaciones algebraicas.

El método convencional empleado para obtener una dependencia explícita de η respecto de las velocidades se conoce como la técnica de la función de penalización. Esta técnica aplicada a las SWE consiste en introducir una pseudo ley constitutiva, de la forma (ver e.g. Zienkiewicz y Heinrich, 1979):

$$\nabla_H \cdot (h\bar{u}) + \frac{\eta}{\lambda} = 0 \qquad (2.28)$$

donde ∇_H. es el operador divergencia horizontal, η es la altura de la superficie libre, h es el calado en reposo, $\bar{u}$ es el vector velocidad promediado verticalmente y λ es el parámetro de penalización (una constante positiva de valor muy grande). Esto equivale a perturbar la ecuación de la continuidad verticalmente integrada (I.6), sumando a la divergencia del transporte el término η/λ. De (2.28) es posible despejar η en función de la velocidad:

$$\eta = -\lambda \nabla_H . (h\bar{\vec{u}}) \qquad (2.29)$$

Este método presenta una ventaja computacional clara, puesto que da lugar a un sistema de ecuaciones con un menor número de incógnitas nodales. No obstante, aunque el planteamiento de (2.28) se justifica en el caso de flujos de Stokes, donde no se consideran los términos convectivos, no hay una adecuada interpretación física en problemas de flujo convectivo como los planteados por las SWE (Heinrich y Dyne, 1991).

Además, la implementación clásica de la técnica de la función de penalización, plantea una serie de inconvenientes, ampliamente tratados en la bibliografía. En primer lugar, si se eligen λ demasiado grande, los términos penalizados de las ecuaciones del moméntum pueden dominar sobre el resto y hacer que la matriz de coeficientes asociados al sistema de ecuaciones esté mal condicionada. Por el contrario, si se elige pequeño, no se cumplirá el principio de conservación de la masa (Pelletier et al., 1989). Por último, las aproximaciones que se obtienen para la altura de superficie libre con la ecuación (2.29), son muy pobres (Sohn y Heinrich, 1990).

Cuvalier et al. (1986) demuestra que cuando se usa la versión discreta del método de penalización, el sistema de ecuaciones degenera hacia la expresión de la continuidad a nivel elemental para valores crecientes de λ. Esta versión discreta se obtiene eliminando η a través de la expresión en residuos ponderados de la ecuación de la continuidad discretizada, en vez de hacerlo directamente en la ecuación diferencial. Es aquí donde es conveniente que el tipo de discretización para las η sea discontinuo; así, cuando se calcula "a posteriori" el campo de superficie libre, no hay que volver a ensamblar. Aplicando lo anterior a la ecuación discreta de la continuidad (2.27):

$$D_{\beta}^{(e)} u_{\beta}^{(e)} + \frac{\eta^{(e)}}{\lambda'} = 0 \qquad \forall e \qquad (2.30)$$

donde λ' es un parámetro de penalización adimensional de valor λ'=ULλ. Podemos despejar $\eta^{(e)}$ en función de la velocidad de la forma:

$$\eta^{(e)} = -\lambda' D_{\beta}^{(e)} u_{\beta}^{(e)} \qquad \forall e \qquad (2.31)$$

Introduciendo (2.31) en la ecuación discreta del momentum (2.27) y prescindiendo del operador ensamblaje, obtenemos:

$$A_{\alpha\beta\gamma}^{(e)} u_{\beta}^{(e)} u_{\gamma}^{(e)} + [G_{\alpha\beta}^{\prime(e)} - \lambda' [D_{\alpha}^{t(e)} D_{\beta}^{(e)}]] u_{\beta}^{(e)} = F_{\alpha}^{(e)}$$

$$\alpha = 1, \ldots, 2N^{(e)} M^{(e)} \qquad \forall e \qquad (2.32)$$

Podemos definir una nueva matriz:

$$G^{/K(e)}_{\alpha\beta} = -D^{t(e)}_{\alpha} D^{(e)}_{\beta} \qquad (2.33)$$

por lo que (2.32) se puede escribir ahora como:

$$A^{(e)}_{\alpha\beta\gamma}\, u^{(e)}_{\beta} u^{(e)}_{\gamma} + [G^{K(e)}_{\alpha\beta} + \lambda'\, G^{/K(e)}_{\alpha\beta}] u^{(e)}_{\beta} = F^{(e)}_{\alpha}$$

$$\alpha = 1,...,2N^{(e)}M^{(e)} \qquad \forall e \qquad (2.34)$$

Las expresiones (2.31) y (2.34) defienen el sistema de ecuaciones algebraicas a resolver

2.3.2. Análisis dimensional de las ecuaciones matriciales. Elección de parámetros adimensionales.

La elección del parámetro de penalización es un aspecto clave desde el punto de vista numérico. En el ámbito de las ecuaciones de Navier-Stokes, se recomienda el uso de λ de orden 10^6 a 10^9 veces la viscosidad (Hughes et al., 1979). Para las SWE y una discretización del tipo Q1/P0, al aplicar residuos ponderados de Galerkin a la ecuación de la continuidad sin adimensionalizar (2.29) obtenemos:

$$\int_{\Omega} P^e\, \eta\, d\Omega = -\lambda \int_{\Omega} P^e\, \nabla_H \cdot (h\bar{u})\, d\Omega \qquad (2.35)$$

donde por se P^e funciones de tipo escalón para las η, se reduce a:

$$\eta^{(e)} \int_{\Omega^e} d\Omega = -\lambda \int_{\Omega^e} \nabla_H \cdot (h\bar{u}^{(e)})\, d\Omega \qquad (2.36)$$

pudiendose despejar $\eta^{(e)}$:

$$\eta^{(e)} = -\frac{\lambda}{\Omega^e} \int_{\Omega^e} \nabla_H \cdot (h\bar{u}^{(e)})\, d\Omega \qquad (2.37)$$

Comparando (2.37) y (2.31) se infiere que los valores del parámetro λ' recomendables serían 10^6 a 10^9 veces K_H dividido por el área media de los elementos de la malla computacional.

Podría ser, sin embargo, que con este rango de valores para λ', no consiguiéramos que todos los miembros de las SWE adimensionales discretas (2.34) tuvieran el mismo orden de magnitud, lo que es el objetivo de la técnica de adimensionalización propuesta con que se pretende evitar la acumulación de excesivos errores de redondeo y el mal condicionamiento de la matriz del sistema. Será necesario, por tanto, un detallado análisis dimensional de las ecuaciones matriciales para guiar la elección de los parámetros libres del código (incluido el de penalización) en cada caso particular. Para ello, podemos expresar cada una de las matrices elementales que aparecen en (2.34) en función de unos números adimensionales conocidos y otras matrices, derivadas de las anteriores. Según (II.1), (II.2) y (II.5) los órdenes de magnitud de $G_{\alpha\beta}'$, $G_{\alpha\beta}''$, $A_{\alpha\beta\gamma}$ y F_α son:

$$G'_{\alpha\beta} = O(E_h\, h'\, \overline{G'}^1_{\alpha\beta} + E_z\, \gamma\, \overline{G'}^2_{\alpha\beta} + \delta\, h'\, \overline{G'}^3_{\alpha\beta} + \frac{E_z}{h'}\, \overline{G'}^4_{\alpha\beta})$$

$$G''_{\alpha\beta} = O(h'^2\, \overline{G''}_{\alpha\beta})$$

$$A_{\alpha\beta\gamma} = O(\varepsilon\, h'\, \overline{A}_{\alpha\beta\gamma})$$

$$F_\alpha = O(\, h'^2\, \overline{F}^1_\alpha + E_z\, \tau'\, \overline{F}^2_\alpha)$$

(2.38)

donde se han suprimido los superíndices (e) por comodidad, δ es un valor constante que vale cero para β impar y uno para β par, h' es la profundidad media adimensional:

$$h = Dh' \qquad (2.39)$$

τ' es el campo de tensiones superficiales debidas al viento, adimensionalizadas al considerar $O(\tau_x{}^S) \approx O(\tau_y{}^S) \approx \tau$ y definir:

$$\tau = \frac{RUA_z}{D}\,\tau' \qquad (2.40)$$

y γ' es el coeficiente de fricción con el fondo, también adimensionalizado, de la forma:

$$\gamma = \frac{RA_z}{D}\,\gamma' \qquad (2.41)$$

con $\gamma \approx O(\gamma_{xx}{}^B) \approx O(\gamma_{xy}{}^B) \approx O(\gamma_{yx}{}^B) \approx O(\gamma_{yy}{}^B)$.

A título de ejemplo, podemos considerar un dominio dado en la plataforma continental catalana. El parámetro de Coriolis es $f=10^{-4}s^{-1}$ y la aceleración de la gravedad $g=9{,}8\ m/s^2$. Un valor característico para la densidad es $R=1025\ kg/cm^3$. Y, para los parámetros A_H y A_z pueden elegirse valores de $50\ m^2/s$ y $10^{-2}\ m^2/s$, respectivamente. Para la elección del parámetro (U), escala característica de las velocidades, es razonable un valor de 0.1 m/s.

Hemos definido L como la longitud que caracteriza las variaciones horizontales de los campos dinámicos. Dichas variaciones están relacionadas con el tamaño medio de los elementos de la malla con la que se haya discretizado el dominio. Podemos suponer L=1000 m.

El parámetro D, que adimensionaliza las profundidades y η, se calcula en función de los anteriores de acuerdo con (2.20), y en este caso será D=0.001 m, por lo que la profundidad media adimensional (h'), si consideramos $h=O(10)$, es $h'=O(10^4)$. El campo de tensión tangencial en la superficie (τ'), suponiendo vientos característicos en la costa catalana puede ser tal que $\tau \approx O(10^{-1})$, por lo que $\tau'=O(10^{-4})$. Y los coeficientes de fricción con el fondo, siendo $\gamma \approx O(1)$, tendrán un valor de $\gamma'=O(10^{-4})$.

El cálculo del número de Rossby (ϵ) y de los números de Ekman (E_H y E_z), una vez definidos el conjunto de parámetros anteriores, es inmediato: $\epsilon=1$, $E_H=1$ y $E_z=10^8$. Introduciéndolos, junto con los demás parámetros, en (2.38) y considerando que las matrices de coeficientes de las ecuaciones adimensionalizadas son de orden O(1), obtenemos: $G_{\alpha\beta}'=O(10^7)$, $G_{\alpha\beta}''=O(10^8)$, $A_{\alpha\beta\gamma}=O(10^4)$ y $F_\alpha=O(10^8)$.

Como cabría esperar, los términos no lineales ($A_{\alpha\beta\gamma}$) tienen órdenes de magnitud menores que los términos lineales ($G_{\alpha\beta}'$ y $G_{\alpha\beta}''$) lo que es congruente con el empleo del método de Galerkin como técnica de discretización de las ecuaciones diferenciales.

Por último, el parámetro de penalización (λ'), al tratarse de las SWE adimensionales, se escogería de forma adecuada para que $O(G_{\alpha\beta}') \approx \lambda' O(G_{\alpha\beta}'')$, lo que en este caso significaria que $\lambda' = 1$ ($\lambda = 10^{-2}$). Procediendo así, se consigue que todos los miembros de la ecuación (2.34) tengan el mismo orden de magnitud.