

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departamento de Ingeniería Hidráulica, Marítima y Ambiental

**ESTABILIZACIÓN DE LA SUPERFICIE
LIBRE EN LA SOLUCIÓN DE
ECUACIONES SHALLOW-WATER POR
ELEMENTOS FINITOS.
APLICACIONES OCEANOGRÁFICAS.**

Autor: Manuel Espino Infantes

Directores: Marc A. García

Agustín Sánchez-Arcilla

Barcelona, mayo de 1994

CAPÍTULO 3.

EL ALGORITMO DE UZAWA GENERALIZADO

La solución de las ecuaciones de shallow-water, cuando se emplean elementos mixtos para la velocidad y la altura de la superficie libre, puede presentar algunos inconvenientes ligados a la condición de continuidad para el campo de velocidades (divergencia nula). Si usamos una formulación de Galerkin convencional, la matriz del sistema algebraico resultante de la discretización en elementos finitos tiene términos nulos en la diagonal. Así, sólo es posible resolver el sistema de ecuaciones de forma integrada haciendo uso de métodos iterativos que empleen algoritmos con un pivotamiento parcial, lo que incrementa el tiempo de cálculo y la memoria requeridas.

Las técnicas de penalización no presentan este problema, y además permiten despejar la presión (i.e. la altura de la superficie libre) en función de la velocidad -a nivel elemental si se emplea una interpolación discontinua para aquella variable-. La reducción consiguiente del número de incógnitas nodales y el hecho afirmado de que el método "trabaja bien" numéricamente han

popularizado el uso de estas aproximaciones (Zienkiewicz y Heinrich, 1979; Oden, 1982; Heinrich y Dyne, 1991).

Ahora bien, se conoce que el método sólo cumple la condición de incompresibilidad de una forma aproximada, tanto menos cuanto mayor sea el parámetro de penalización (λ' en nuestro caso). Por otro lado, se malcondiciona la matriz del sistema y favorece la acumulación de errores de redondeo si se emplean valores de λ' muy grandes, justamente el efecto contrario al buscado con la adimensionalización de las ecuaciones.

El algoritmo de Uzawa generalizado (Fortin y Fortin, 1985) es una variante del método de penalización que incluye correcciones iterativas para asegurar la satisfacción de la condición de la continuidad. A priori, su uso ofrece las siguientes ventajas:

- Permite usar parámetros de penalización (λ') pequeños y así aliviar el mal condicionamiento del sistema de ecuaciones que produce el método de "penalty" clásico, puesto que los órdenes de magnitud de los distintos términos pueden ser semejantes entre sí.
- Garantiza en principio la satisfacción de la ecuación de la continuidad con la exactitud que deseamos.

El algoritmo de Uzawa original, resuelve la forma dual del problema de Stokes (problema lineal) mediante un método de gradiente (ver e.g. Brezzi y

Fortin, 1991). El algoritmo se inicializa con valores arbitrarios de la altura de superficie libre ($\eta^{[0]}$), A continuación se resuelve:

$$\sum_e [(G'_{\alpha\beta}^{(e)} + \lambda' G''_{\alpha\beta}^{(e)}) u_{\beta}^{[r+1]}] = \sum_e [F_{\alpha}^{(e)} - D_{\alpha}^{t(e)} \eta^{[r]}]$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, 2N^{(e)} M^{(e)} \quad (3.1)$$

donde se ha suprimido los términos no lineales y $[r]$ es el número de iteración. Con las nuevas estimas de la velocidad, se corrige la aproximación a la presión:

$$\eta^{[r+1]} = \eta^{[r]} - \lambda' D_{\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[r+1]} \quad \forall e \quad (3.2)$$

tras lo cual se itera sobre (3.1) hasta que la divergencia del vector velocidad es suficientemente pequeña. Si se incluyen los términos no lineales en esta formulación, se presenta el inconveniente de que la actualización de las velocidades que se realiza en (3.1) requiere iteraciones intermedias. Pero, si las iteraciones propias del método de Uzawa se acoplan con las iteraciones necesarias para resolver la no linealidad de las ecuaciones, podemos salvar la restricción a un bajo costo computacional. Esto es lo que se consigue con el algoritmo generalizado de Uzawa. Este método, muy popular en la escuela francesa de análisis numérico, combina la eficiencia del método de Uzawa para satisfacer la condición de incompresibilidad y el poder del algoritmo de Newton-Raphson como esquema de solución de los sistemas de ecuaciones no lineales, y fue adaptado para las ecuaciones de Navier-Stokes por Fortin y Fortin (1985). El resultado es una de las más robustas combinaciones para

solucionar los problemas de flujo incompresible no lineal (Pelletier et al., 1989), proporcionando el mismo grado de aproximación que los métodos integrados y las ventajas computacionales del método de penalización.

3.1. Implementación del algoritmo

Definamos el residuo del sistema de ecuaciones planteado como:

$$R_{\alpha}(u_{\beta}, \eta) = \sum_e [A_{\alpha\beta\gamma}^{(e)} u_{\beta}^{(e)} u_{\gamma}^{(e)} + G'_{\alpha\beta}^{(e)} u_{\beta}^{(e)} + D_{\alpha}^{t(e)} \eta^{(e)} - F_{\alpha}^{(e)}] = 0$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, 2N^{(e)}M^{(e)} \quad (3.3)$$

Si conocemos $u_{\beta}^{[0]}$ y $\eta^{[0]}$; soluciones iniciales para la velocidad y para la altura de superficie libre elementales, respectivamente (se elimina el superíndice (e) por comodidad), podemos calcular las correcciones $\delta u_{\beta}^{(e)}$ y $\delta \eta^{(e)}$ tales que:

$$R_{\alpha}(u_{\beta}^{[0]} + \delta u_{\beta}^{(e)}, \eta^{[0]} + \delta \eta^{(e)}) = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, 2N^{(e)}M^{(e)} \quad (3.4)$$

Usando una expansión en serie de Taylor (o desarrollando (3.4) y despreciando los términos de segundo orden), es fácil demostrar que $\delta u_{\beta}^{(e)}$ y $\delta \eta^{(e)}$ se pueden aproximar con la solución de:

$$-\sum_e [(A_{\alpha\beta\gamma}^{(e)} + A_{\alpha\gamma\beta}^{(e)}) u_{\gamma}^{[0]} \delta u_{\beta}^{(e)} + G'_{\alpha\beta}^{(e)} \delta u_{\beta}^{(e)} + D_{\alpha}^{t(e)} \delta \eta^{(e)}] = R_{\alpha}(u_{\beta}^{[0]}, \eta^{[0]})$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, 2N^{(e)}M^{(e)} \quad (3.5a)$$

$$-D_{\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[0]} = D_{\beta}^{(e)} \delta u_{\beta}^{(e)} \quad \forall e \quad (3.5b)$$

De acuerdo con estas premisas, un algoritmo para solucionar el sistema (2.31), (2.34) puede tener la siguiente estructura:

0) Elegir unos vectores elementales de inicialización $u_{\beta}^{[0]}$ y $\eta^{[0]}$ adecuados

1) Para $r \geq 0$, siendo conocidos $u_{\beta}^{[r]}$ y $\eta^{[r]}$, resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_e [[(A_{\alpha\beta\gamma}^{(e)} + A_{\alpha\gamma\beta}^{(e)}) u_{\gamma}^{[r]} + G_{\alpha\beta}^{(e)}] \delta u_{\beta}^{[r]} + D_{\alpha}^{t(e)} \delta \eta^{[r]}] = -R_{\alpha} (u_{\beta}^{[r]}, \eta^{[r]})$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, 2N^{(e)} M^{(e)} \quad (3.6a)$$

$$D_{\beta}^{(e)} \delta u_{\beta}^{[r]} = -D_{\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[r]} \quad \forall e \quad (3.6b)$$

2) Actualizar los valores de la velocidad y de la altura de la superficie libre

$$u_{\beta}^{[r+1]} = u_{\beta}^{[r]} + \delta u_{\beta}^{[r]} \quad (3.7a)$$

$$\eta^{[x+1]} = \eta^{[x]} + \delta \eta^{[x]} \quad (3.7b)$$

3) Iterar sobre 1) hasta que se alcance la convergencia

Este es precisamente el método de Newton-Rapshon, del cual se conoce que es convergente si las soluciones iniciales $(u_\beta^{[0]}, \eta^{[0]})$ están suficientemente próximas a la solución exacta, y que su convergencia es cuadrática. Como criterio de convergencia puede adoptarse:

$$|u_\beta^{[x+1]} - u_\beta^{[x]}| < \epsilon \quad (3.8)$$

siendo ϵ una constante positiva pequeña, de valor elegido arbitrariamente.

Se puede lograr un algoritmo más eficiente que el anterior "penalizando" la ecuación (3.6b) de la forma:

$$\delta \eta^{[x]} = -\lambda' D_\beta^{(e)} u_\beta^{[x+1]} = -\lambda' D_\beta^{(e)} (u_\beta^{[x]} + \delta u_\beta^{[x]}) \quad (3.9)$$

Teniendo en cuenta la definición (2.49) de la matriz $G''_{\alpha\beta}^{(e)}$ como:

$$G''_{\alpha\beta}^{(e)} = -D_\alpha^t(e) D_\beta^{(e)} \quad (3.10)$$

se puede reestructurar el algoritmo de solución de este modo:

0) Elegir unos vectores elementales de inicialización $u_\beta^{[0]}$ y $\eta^{[0]}$ adecuados

1) Para $r \geq 0$, siendo conocidos $u_\beta^{[r]}$ y $\eta^{[r]}$, resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_e [(A_{\alpha\beta\gamma}^{(e)} + A_{\alpha\gamma\beta}^{(e)}) u_\gamma^{[r]} + G_{\alpha\beta}^{(e)} + \lambda' G_{\alpha\beta}^{(e)}] \delta u_\beta^{[r]} = -R_\alpha(u_\beta^{[r]}, \eta^{[r]}) - \sum_e [\lambda' G_{\alpha\beta}^{(e)} u_\beta^{[r]}]$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, 2N^{(e)} M^{(e)} \quad (3.11)$$

2) Actualizar los valores de la velocidad y de la altura de la superficie libre

$$u_\beta^{[r+1]} = u_\beta^{[r]} + \delta u_\beta^{[r]} \quad (3.12a)$$

$$\eta^{[r+1]} = \eta^{[r]} - \lambda' D_\beta^{(e)} u_\beta^{[r+1]} \quad (3.12b)$$

3) Iterar sobre 1) hasta que se verifique la condición de convergencia (3.8)

Como $\delta u_\beta^{[r]}$ debe tender a cero cuando "r" tienda a infinito, pueden aparecer errores de redondeo debido a operaciones entre valores demasiado pequeños. Un algoritmo equivalente a (3.11) en el que no se da este problema se obtiene introduciendo en (3.11) las igualdades:

$$A_{\alpha\beta\gamma}^{(e)} u_{\gamma}^{[r]} \delta u_{\beta}^{[r]} = A_{\alpha\beta\gamma}^{(e)} u_{\gamma}^{[r]} u_{\beta}^{[r+1]} - A_{\alpha\beta\gamma}^{(e)} u_{\gamma}^{[r]} u_{\beta}^{[r]} \quad (3.13a)$$

$$A_{\alpha\gamma\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[r]} \delta u_{\gamma}^{[r]} = A_{\alpha\gamma\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[r]} u_{\gamma}^{[r+1]} - A_{\alpha\gamma\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[r]} u_{\gamma}^{[r]} \quad (3.13b)$$

y la definición del residuo (3.3), con lo que obtenemos finalmente la expresión del algoritmo de Uzawa generalizado adaptada a nuestras ecuaciones:

0) Elegir unos vectores elementales de inicialización $u_{\beta}^{[0]}$ y $\eta^{[0]}$ adecuados

1) Para $r \geq 0$, siendo conocidos $u_{\beta}^{[r]}$ y $\eta^{[r]}$, resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{\alpha} [[(A_{\alpha\beta\gamma}^{(e)} + A_{\alpha\gamma\beta}^{(e)}) u_{\gamma}^{[r]} + G'_{\alpha\beta}^{(e)} + \lambda' G''_{\alpha\beta}^{(e)}] u_{\beta}^{[r+1]}] = \sum_{\alpha} [F_{\alpha}^{(e)} + A_{\alpha\gamma\beta}^{(e)} u_{\gamma}^{[r]} u_{\beta}^{[r]} - D_{\alpha}^{t(e)} \eta^{[r]}]$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, 2N^{(e)} M^{(e)} \quad (3.14)$$

2) Actualizar los valores de la altura de superficie libre

$$\eta^{[r+1]} = \eta^{[r]} - \lambda' D_{\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[r+1]} \quad \forall e \quad (3.15)$$

3) Iterar sobre 1) hasta que se verifique la condición de convergencia

Se observa que la primera iteración del algoritmo coincide con el método discreto de penalización (2.31), descrito en el apartado 2.3.1. Escogiendo $\eta^{[0]}=0 \forall e$ con $u_\gamma^{[r]}=0 \forall r$, el algoritmo se reducirá al método de Uzawa para el problema de Stokes.

Con el fin de lograr la máxima economía computacional conviene elegir una técnica numérica para resolver el sistema lineal asociado al paso 1) en cada iteración que no obligue a ensamblar e invertir la matriz de coeficientes por completo. La técnica frontal descrita, entre otros autores, por Hinton y Owen (1977), generalizada para matrices no simétricas y condiciones de contorno de cualquier tipo (Dirichlet, Neumann y Robbin), ha sido implementada en el modelo. Se trata de un proceso de eliminación gaussiana directa, que minimiza las necesidades de almacenamiento de datos en CPU así como el número de operaciones aritméticas con una eficacia comparable al de otros métodos alternativos cuando se trabaja, sobre todo, con ordenadores de tipo medio. En el capítulo 5, donde se expone la estructura del código, se describirá esta técnica.

3.2. Convergencia del algoritmo

Se puede demostrar que para unas soluciones iniciales $(u_\beta^{[0]}, \eta^{[0]})$ suficientemente próximas a la solución final y un parámetro de penalización (λ') suficientemente pequeño, el algoritmo definido por (3.14) y (3.15) converge, siendo esta convergencia cuadrática (Codina, 1991).

3.2.1 Solución inicial

Los requerimientos de convergencia del algoritmo de Uzawa generalizado son similares a los del esquema clásico de Newton-Raphson (3.6 y 3.7). Ahora bien, en general es difícil demostrar a priori que se cumplen estas dos condiciones, sobre todo la primera de ellas. Por esta razón, y por tratarse de un método que converge rápidamente, en problemas de solución única como son los de tipo elíptico, se sugiere adoptar un planteamiento totalmente empírico: tantear la convergencia con diversos $(u_\beta^{[0]}, \eta^{[0]})$ sugeridos por la realidad experimental y si tal convergencia se da, puede asegurarse que las condiciones de convergencia se cumplen y que la solución $(u_\beta^{[r+1]}, \eta^{[r+1]})$ alcanzada será la solución del problema.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede escoger la solución inicial $u_\beta^{[0]}$ como la solución del sistema lineal:

$$\sum_e [(G'_{\alpha\beta} + \lambda' G''_{\alpha\beta}) u_{\beta}^{[0]}] = \sum_e F_{\alpha}^{(e)} \quad (3.16)$$

y calcular $\eta^{[0]}$ mediante (3.15) de la forma:

$$\eta^{[0]} = -\lambda' D_{\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[0]} \quad \forall e \quad (3.17)$$

lo que resultará muy económico desde el punto de vista computacional. Dado el carácter débilmente no-lineal de nuestros problemas de flujo, ya argumentados, esta aproximación nos llevará casi siempre lo suficientemente cerca de la solución real del problema planteado

3.2.2. Problemas de convergencia con el elemento Q1/P0

La convergencia cuadrática del algoritmo generalizado de Uzawa sólo puede ser asegurada teóricamente hasta una cierta iteración. Sin embargo, la experimentación numérica indica que esta limitación es sólo aparente cuando el valor de λ' es pequeño comparado con los sugeridos para el método clásico de penalización (Fortin y Fortin, 1985; Codina, 1991). Esta será nuestra situación habitual, puesto que λ' debe ser pequeño si deseamos que el orden de magnitud de los diferentes términos de las ecuaciones sea parecido.

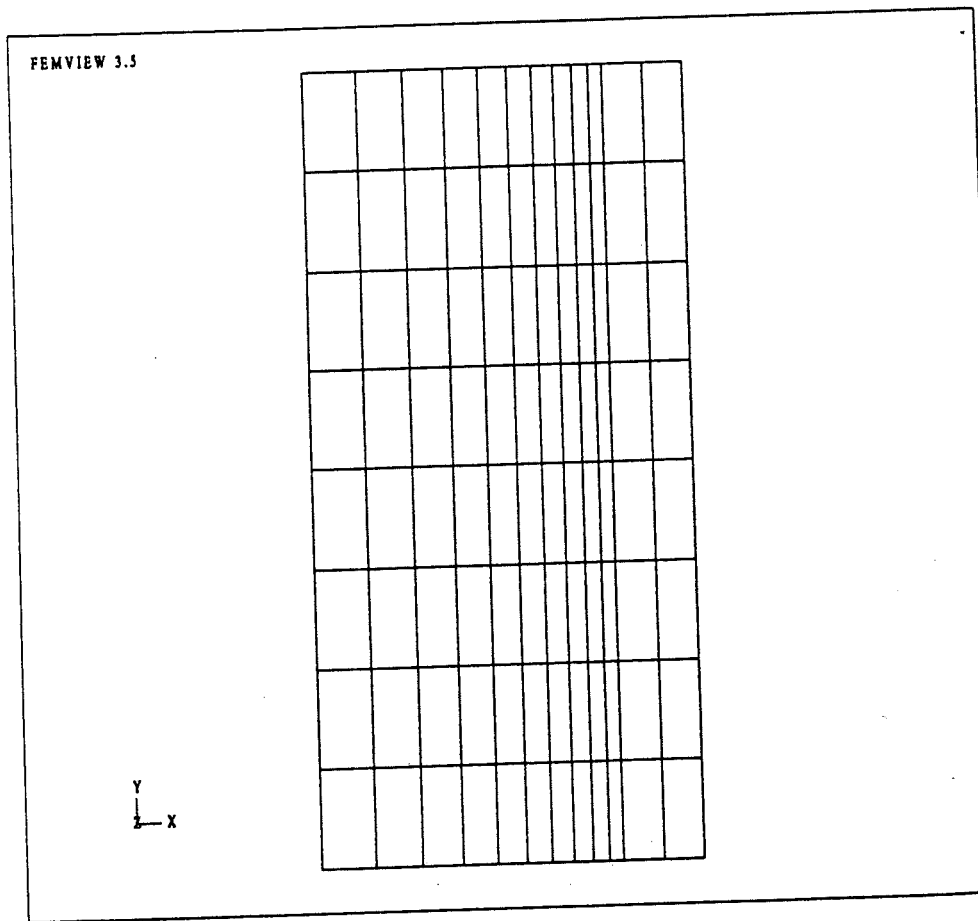
Para ilustrar lo anterior se puede retomar el caso sencillo de la corriente inducida por la rotura del oleaje en una playa longitudinalmente uniforme estudiado por García (1990). Se considera un tramo de costa rectilíneo de 240 m de longitud, con fondo plano inclinado de pendiente 0.03, que se discretiza mediante una malla de 96 elementos (figura 3.1). Y se supone que sobre él incide un oleaje regular de crestas largas cuyos parámetros en rompientes son:

- altura: $H_b = 1.1$ m
- periodo: $T = 4$ s
- dirección: $\theta_b = 29^\circ$
- calado en rotura: $h_b = 2.7$ m

El coeficiente adimensional de fricción con el fondo es $C_f = 0.03$, y la viscosidad turbulenta horizontal $K_H = 10$ m²/s. Las condiciones de contorno son de tipo Dirichlet homogéneas en los contornos de costa y mar abierto, mientras que en los contornos laterales se especifican condiciones Dirichlet homogéneas para la componente tangencial de la velocidad y Neumann homogéneas para la componente normal.

La solución analítica del problema proporciona una estima del orden de magnitud de la velocidad $U = 0.3$ m/s. La dimensión característica de la malla es $L = 30$ m, Escogiendo $A_H = 10$ m²/s, $A_z = 0.01$ m²/s, el análisis dimensional de los diferentes términos de (2.38) nos indica que el valor "óptimo" de λ' es 0.1 (pequeño comparado con los sugeridos en la bibliografía para el método clásico de penalización).

FIGURA 3.1. Caso: corriente inducida por la rotura del oleaje en una playa longitudinalmente uniforme. Malla computacional empleada.



En las figuras 3.2 y 3.3 se exhiben las soluciones numéricas obtenidas para el campo de velocidades y el campo de alturas de superficie libre, respectivamente, ambas muy próximas a las analíticas. La figura 3.4 muestra que la convergencia en velocidades del método es robusta.

Cuando discretizamos las ecuaciones (2.9) y (2.22a y b) en elementos finitos, el término $\nabla \cdot (h \bar{u})$ conduce a $D_\beta^{(e)} u_\beta^{(e)}$, donde $D_\beta^{(e)}$ es la matriz de la divergencia discreta. Así, para estudiar la convergencia de las iteraciones hacia la solución incompresible, se ha calculado la norma de $D_\beta^{(e)} u_\beta^{(e)}$. La figura 3.5 muestra los resultados obtenidos, comprobándose que el algoritmo generalizado de Uzawa converge cuadráticamente hacia una solución incompresible del campo de velocidades hasta una cierta iteración a partir de la cual, como anunciaba la teoría, la convergencia es lineal.

Ahora bien, otros experimentos numéricos realizados con mallas mayores indican que el comportamiento del algoritmo puede ser distinto. En el caso representado por la figura 3.6 y 3.7, se alcanza una solución en velocidades en torno a la cual oscilan los valores correspondientes a iteraciones sucesivas, sin que la condición de incompresibilidad llegue a satisfacerse. Al alcanzarse una solución en velocidades aproximadamente estable:

$$u_\beta^{[r]} \approx u_\beta^{[r+1]} \quad \forall r \quad (3.18)$$

FIGURA 3.2. Caso: corriente inducida por la rotura del oleaje en una playa longitudinalmente uniforme. Solución para el campo de velocidades.

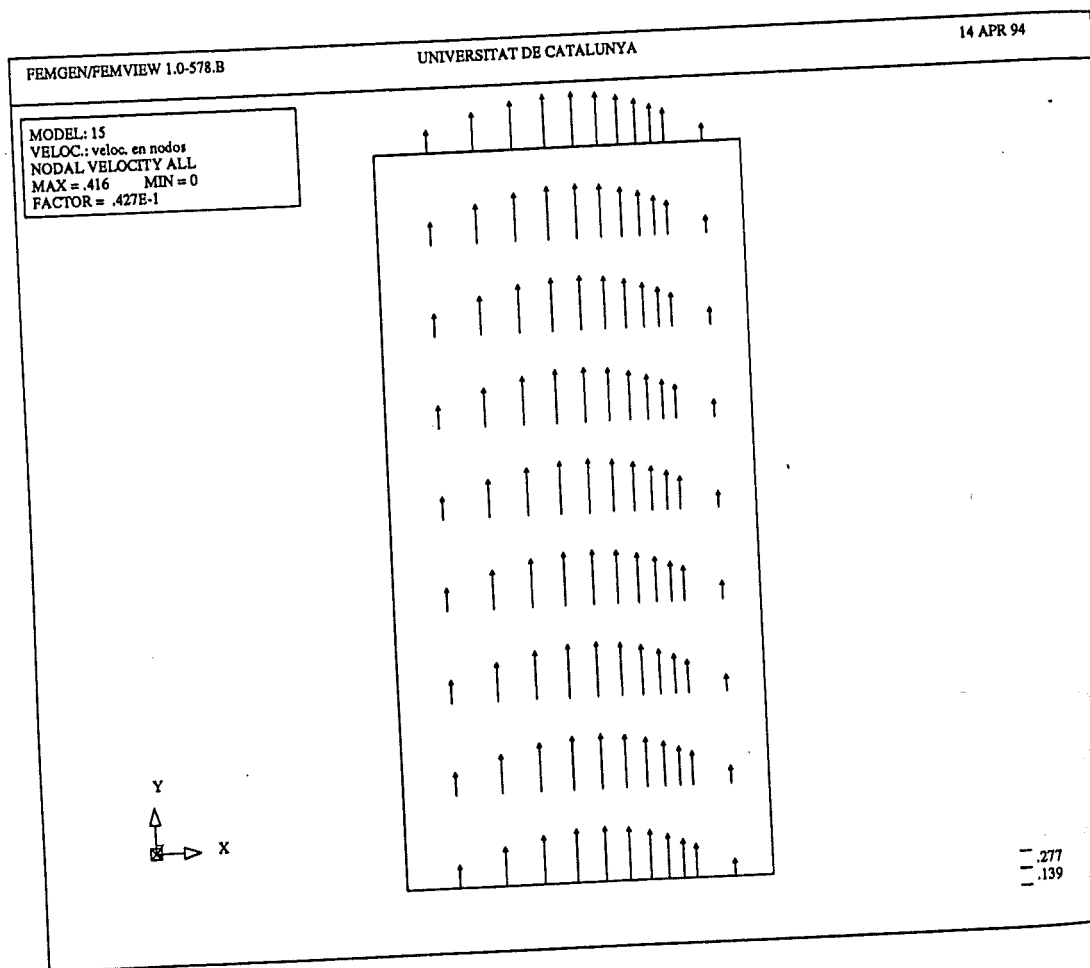


FIGURA 3.3. Caso: corriente inducida por la rotura del oleaje en una playa longitudinalmente uniforme. Solución para el campo de altura de la superficie libre.

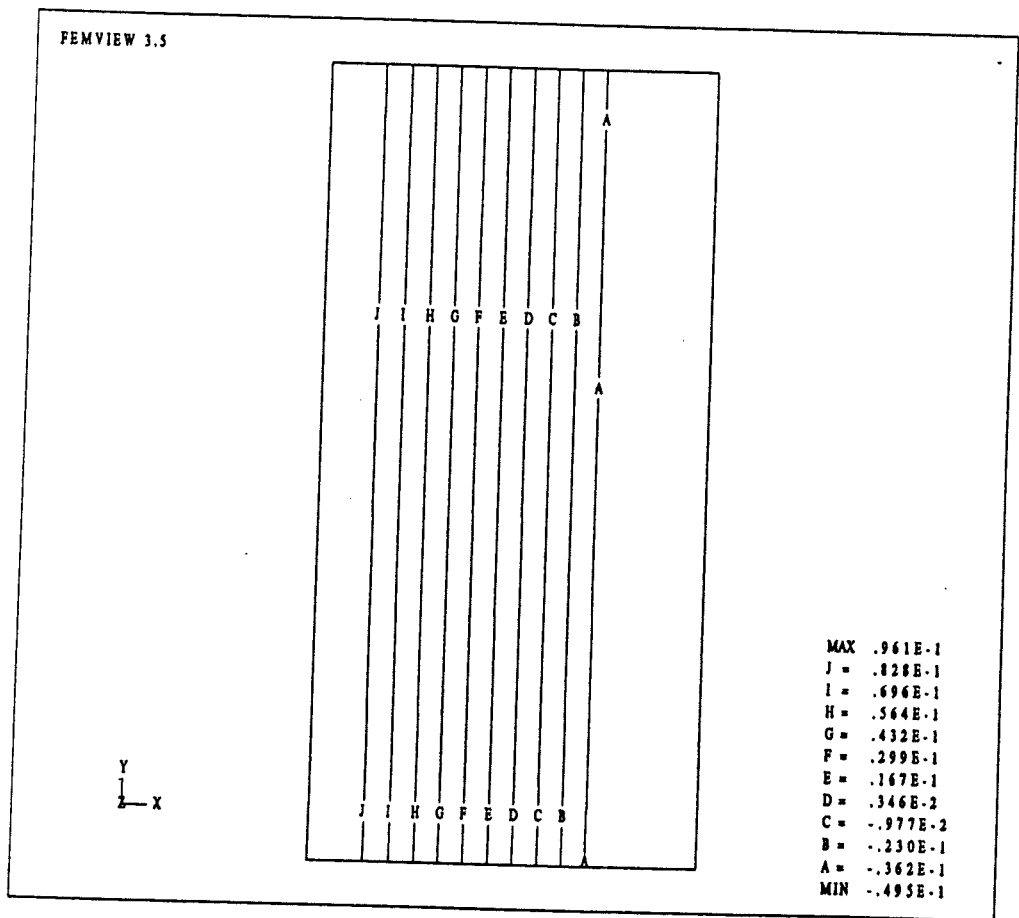


FIGURA 3.4. Caso: corriente inducida por la rotura del oleaje en una playa longitudinalmente uniforme. Esquema de convergencia del algoritmo de Uzawa generalizado.

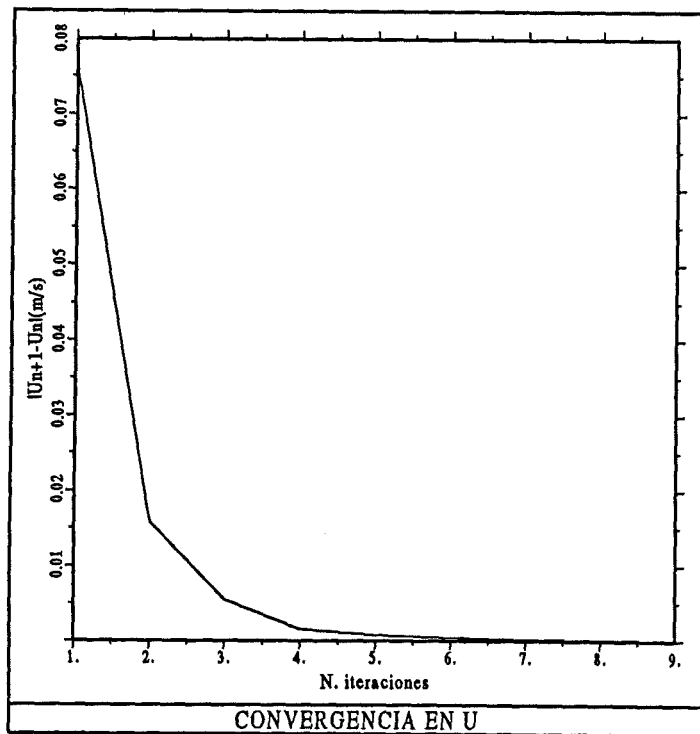


FIGURA 3.5. Caso: corriente inducida por la rotura del oleaje en una playa longitudinalmente uniforme. Evolución de la norma de la divergencia discreta para el algoritmo de Uzawa generalizado.

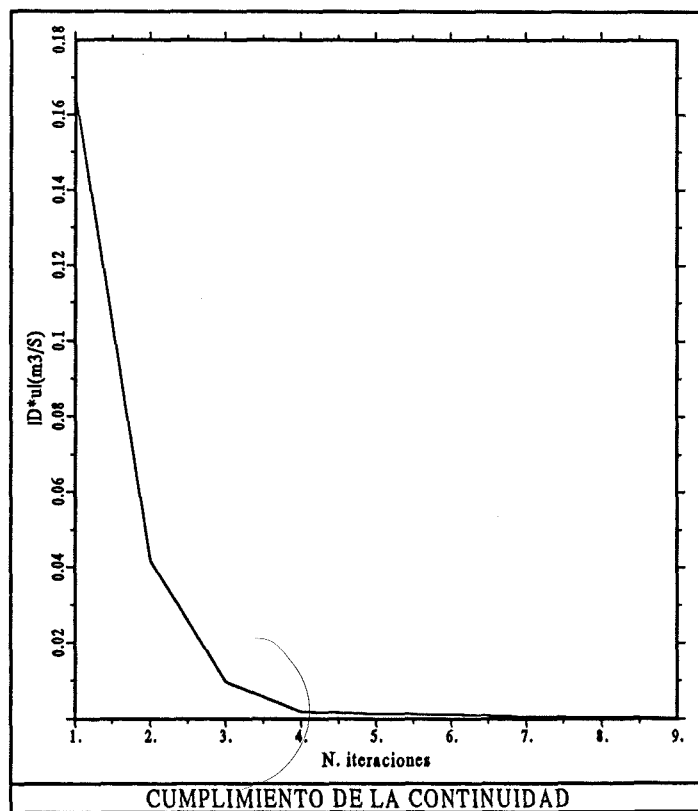


FIGURA 3.6. Caso: circulación en el Golfo de St. Jordi. Esquema de convergencia del algoritmo de Uzawa generalizado.

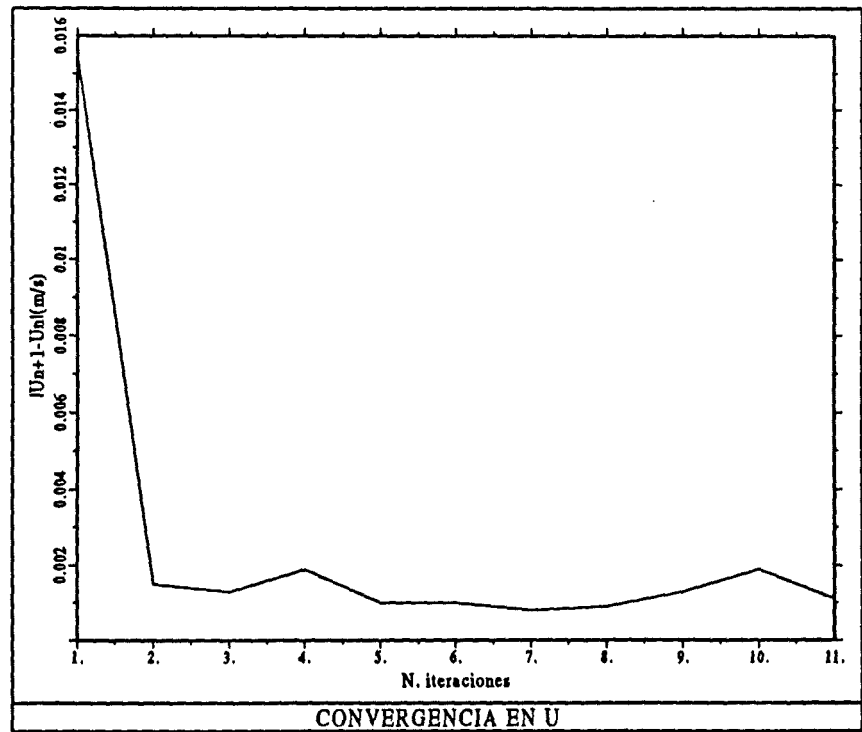
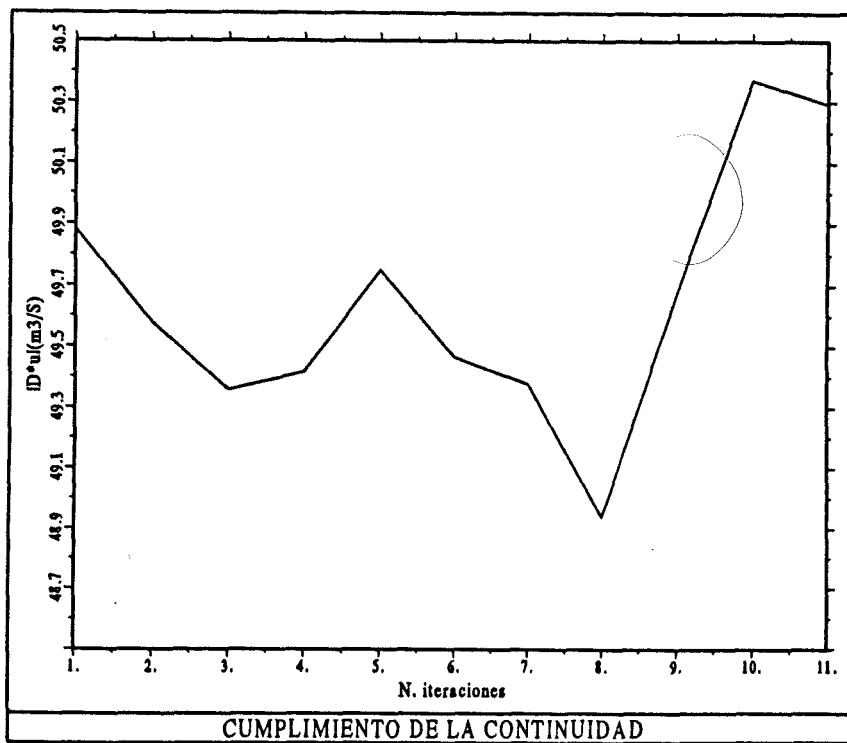


FIGURA 3.7. Caso: circulación en el golfo de St. Jordi. Evolución de la norma de la divergencia discreta para el algoritmo de Uzawa generalizado.



por lo que:

$$D_{\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[r]} = D_{\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[r+1]} \quad \forall e \quad (3.19)$$

de manera que si $D_{\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[r]} \neq 0$ el algoritmo es incapaz de mejorar la "incompresibilidad" de la solución de una iteración a la siguiente.

La razón de este funcionamiento un tanto inesperado del algoritmo generalizado de Uzawa se debe al tipo de discretización que estamos utilizando. El elemento Q1/P0 no satisface la condición Babuska-Brezzi, condición que asegura la existencia y unicidad de la solución. Se puede demostrar que al aumentar el tamaño medio de los lados de los elementos y el número de estos, aumentan el número de valores propios nulos asociados con la variable altura de la superficie libre, por lo que el problema dual se malcondiciona y se degrada la convergencia del algoritmo (Robichaud et al., 1990).

En conclusión, la utilización del algoritmo generalizado de Uzawa no es, por si sola, garantía para la robustez del modelo propuesto para las SWE. Con el elemento Q1/P0 en su forma simple (esto es, sin estabilizar el campo de alturas de la superficie libre) aparecen, al resolver el sistema de ecuaciones mediante una técnica de eliminación gaussiana, modos de presión espureos que se generan por la acumulación de errores de redondeo debido a la presencia de excesivos valores propios nulos, y se añaden en una proporción incontrolable a la solución correcta para la altura de superficie libre. Y ello, por la estructura del algoritmo (3.14) y (3.15), afecta a la solución del campo de velocidades.