

1 TRACTAMENT ANALÍTIC DEL PAVELLÓ AMB UN MODEL UNIPARAMÈTRIC. ESTUDI DE L'EQUACIÓ DE WEBSTER

1.1 Introducció

L'interès en estudiar el comportament acústic del pavelló dels instruments musicals de vent sense necessitat d'haver-lo de discretitzar en trams de geometria cilíndrica i cònica per tal de poder aplicar la propagació d'ones uniparamètriques en el seu interior, condueix a l'estudi analític en profunditat d'altres tipus de perfils en els quals es pugui considerar, encara que sigui de manera aproximada, la propagació d'ones uniparamètriques. La diferència principal entre la propagació en tubs cilíndrics i cònics i la propagació en pavellons és que en els primers les ones es propaguen amb velocitat independent de la freqüència, c , mentre que en els pavellons la velocitat de propagació depèn de la freqüència, $\tilde{c}(\omega)$. En conseqüència en els pavellons es produeix un efecte dispersiu de les ones que no es dona en els altres tubs.

Una de les equacions d'ona que permet fer un estudi uniparamètric dels pavellons és l'equació de Webster [Morse, 1948]. En aquest capítol es pretén estudiar a fons aquesta equació per tal de saber les condicions sota les quals és aplicable i quins són els seus límits en l'estudi del comportament acústic dels pavellons, tant en el domini freqüencial com en el temporal.

L'equació de Webster és una equació d'ona uniparamètrica aproximada que, per a certs tipus de perfils, accepta una solució "exacta" però en tant que solució d'una equació aproximada, evidentment, és una solució aproximada. La idea bàsica per a la deducció d'aquesta equació és suposar que si per a perfils cilíndrics existeix una solució uniparamètrica de l'equació d'ona (ones planes) aleshores els perfils que se n'allunyin lleugerament, és a dir amb $dy(x)/dx$ i $d^2y(x)/dx^2$ petites, on $y(x)$ és l'equació del perfil, també acceptaran ones planes com a solució uniparamètrica. La deducció d'aquesta equació, amb la hipòtesi de fricció nul·la, [Munjál, 1987] condueix a [Apèndix 1.I]:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{S(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(S(x) \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right), \quad (1.1.1)$$

on c és la velocitat del so a l'aire, $p(x,t)$ és la pressió i $S(x)$ és la secció transversal del tub en la qual es suposa que la pressió és uniforme. Si es suposa que aquesta equació és vàlida per a un determinat tipus de perfil aleshores, dins de la mateixa aproximació, és d'esperar que les

ones que es propaguen pel seu interior siguin ones uniparamètriques. Tenint en compte que $S(x) = \pi[y(x)]^2$, on $y(x)$ és el radi de la secció transversal del pavelló a una distància x del coll (Fig. 1.1.1), s'obté que aquest radi ha de satisfer l'equació següent, [Apèndix 1.I]:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (1 - \tau^2) y(x) = 0. \quad (1.1.2)$$

Una solució d'aquesta equació és:

$$y(x) = y_0 \left[\cosh\left(\frac{x}{m}\right) + T \sinh\left(\frac{x}{m}\right) \right], \quad \tau^2 = 1 - \left(\frac{c}{\omega m}\right)^2 \quad (1.1.3)$$

on y_0 és el radi del coll del pavelló, m és un factor d'escala que determina la rapidesa del canvi de conicitat, com més petit és més gran és la curvatura de la gràfica de y enfront d' x . La constant T és un factor de forma que determina les propietats generals del pavelló prop del coll. Si $T = (m/x_0)$ i $m \rightarrow \infty$ aleshores el pavelló és cònic amb una conicitat que val $\tan^{-1}(y_0/x_0)$. Si $T=1$ el pavelló és exponencial i si $T=0$ el pavelló és catenoïdal. Els perfils de pavellons que compleixen l'equació 1.1.3 es coneixen amb el nom de pavellons de Salmon i en són exemples els que es mostren de la Fig. 1.1.2 a la Fig. 1.1.5.

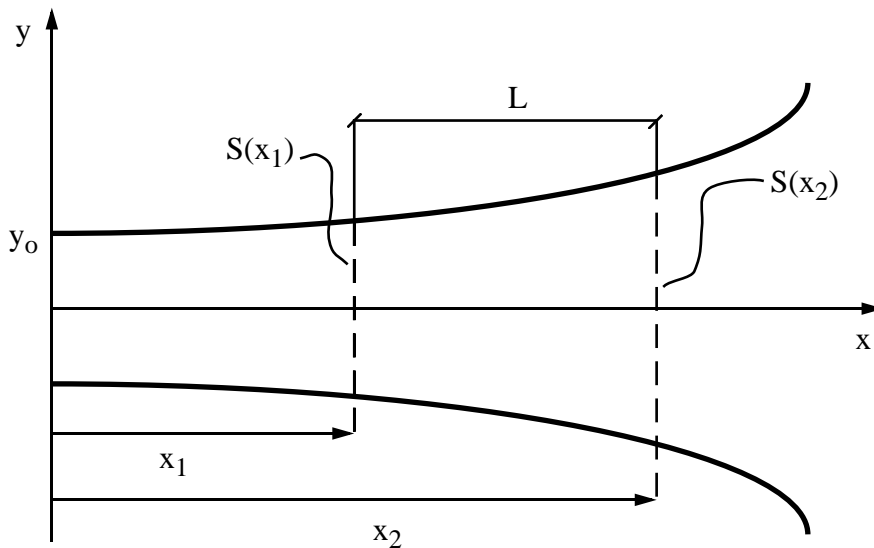


Fig. 1.1.1 Definició de les coordenades d'un perfil tipus Salmon.

La tria del valor de y_0 , de la longitud del pavelló i del radi a la sortida determinen el valor de m així com el límit superior del rang de freqüències dins del qual és aplicable l'equació de Webster. Cal tenir en compte que una de les exigències d'aplicabilitat d'aquesta equació és que

$dy(x)/dx$ i $d^2y(x)/dx^2$ siguin petites comparades amb la longitud d'ona cosa que limita el valor del diàmetre a la sortida. Si es pretén que el radi de sortida sigui gran caldrà que el pavelló sigui molt llarg per tal que es verifiquin les condicions esmentades. Aquest fet pot tenir com a conseqüència l'obtenció d'uns perfils de pavelló que no s'ajustin als dels instruments reals.

Tot i això, l'equació de Webster permet l'estudi del comportament acústic dels pavellons, dins de les seves condicions d'aplicabilitat, sense necessitat de passar per la seva discretització en trams cònics i cilíndrics, en els quals la propagació d'ones uniparamètriques està garantida.

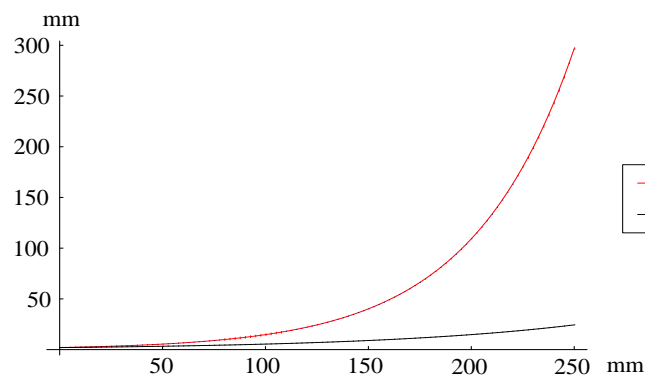


Fig. 1.1.2 Perfils de pavellons exponencials.

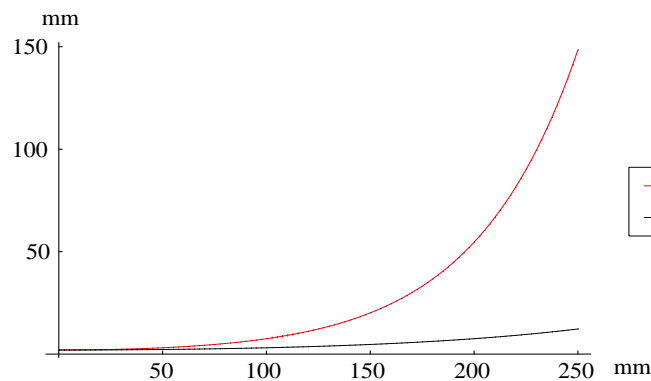


Fig. 1.1.3 Perfils de pavellons catenoidals.

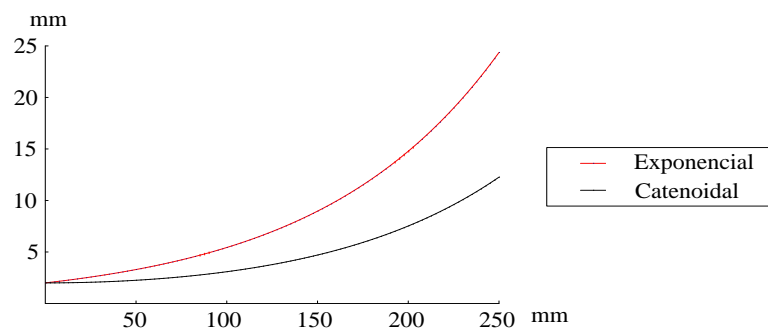
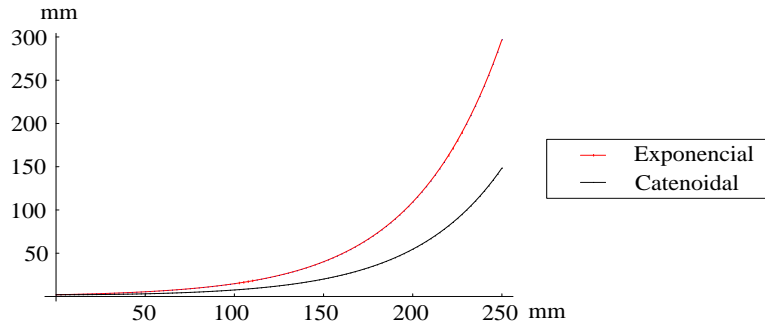


Fig. 1.1.4 Pavellons amb $m=100$.

Fig. 1.1.5 Pavellons amb $m=50$.

1.2 Càlcul de la impedància

Per als pavellons de Salmon, la pressió i el cabal en dues seccions diferents S_1 i S_2 es relacionen mitjançant una matriu de transferència que, amb la hipòtesi de pèrdues viscotèrmiques nul·les, és la següent [Apèndix 1.II]:

$$\begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{u} \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p} \\ \hat{u} \end{Bmatrix}_1, \quad (1.2.1)$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{y(x_1)}{y(x_2)} \left[\cos(k' L) + \frac{1}{k'} \frac{y'(x_1)}{y(x_1)} \sin(k' L) \right], \\ T_{12} &= \frac{y(x_1)}{y(x_2)} \left[-j \frac{\omega \rho}{k'} \sin(k' L) \right], \\ T_{21} &= \frac{y(x_1)}{y(x_2)} \left\{ \frac{j}{\omega \rho} \left[\left(\frac{y'(x_1)}{y(x_1)} - \frac{y'(x_2)}{y(x_2)} \right) \cos(k' L) - \left(k' + \frac{1}{k'} \frac{y'(x_1)y'(x_2)}{y(x_1)y(x_2)} \right) \sin(k' L) \right] \right\}, \\ T_{22} &= \frac{y(x_1)}{y(x_2)} \left[\cos(k' L) - \frac{1}{k'} \frac{y'(x_2)}{y(x_2)} \sin(k' L) \right], \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

on \hat{p}_i i \hat{u}_i són les amplituds complexes, per al cas harmònic, de la pressió i el cabal respectivament, a la secció i , la coordenada L està definida a la Fig. 1.1.1, $y(x_i)$ és el radi del pavelló a la posició x_i ,

$$k' = \left[k^2 - \left(\frac{1}{m} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{\omega}{\tilde{c}(\omega)}, \quad \text{on } \tilde{c}(\omega) = c \left(1 - \frac{c^2}{m^2 \omega^2} \right)^{-1/2} \quad i \quad (1.2.3)$$

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}.$$

L'expressió de $\tilde{c}(\omega)$ posa de manifest la dependència de la velocitat de fase de les ones amb la freqüència la qual cosa mostra com els pavellons actuen com a medis dispersius. Per altra banda com que $\tilde{c}(\omega)$ ha de ser real de la seva expressió s'obté un valor per a la freqüència, $\omega_{mín} = c/m$ coneguda com freqüència de tall, que separa les ones propagatives de les no propagatives, és a dir les evanescents. Aquest valor es correspon amb el límit inferior del rang de freqüències dels modes propagatius.

En el cas que el perfil del pavelló no estigui definit per una única equació i calgui recórrer a una discretització en N elements (Fig. 1.2.1), la seva matriu de transferència correspon al producte de les N matrius elementals:

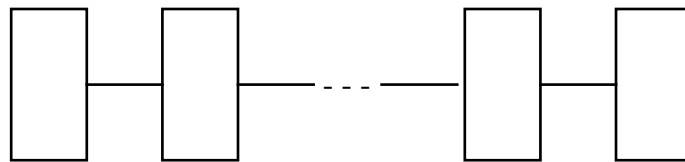


Fig. 1.2.1 Conjunt de N elements discrets.

$$[T_{global}] = \prod_{i=1}^N [T_i]$$

El coneixement de \hat{p} i \hat{u} en una secció permet el de la impedància acústica $\hat{Z}(\omega) = \hat{p}/\hat{u}$, els pics i les valls del mòdul de la qual donen informació sobre les freqüències de ressonància del pavelló. Els pics es corresponen amb les freqüències de ressonància del pavelló quan l'extrem d'entrada és tancat, ja que coincideixen amb les màximes fluctuacions de pressió en aquest extrem si es suposa una excitació de velocitat (o cabal) d'amplitud constant i a la freqüència del pic. Les valls es corresponen amb les freqüències d'antiresonància, és a dir d'amplitud de pressió mínima i per tant són les que corresponen a tenir l'extrem d'entrada obert.

1.3 Modelització de les pèrdues viscotèrmiques

A partir de les ones propagatives de pressió i cabal cap a la dreta i cap a l'esquerra (\hat{p}_- , \hat{u}_- i \hat{p}_+ , \hat{u}_+ respectivament) es poden incorporar els efectes de les pèrdues viscotèrmiques, de manera aproximada [Cardona, 1980], d'una manera molt simple [Apèndix 1.II]:

$$\begin{aligned} \hat{p}_-^{\zeta}(x) &= e^{-\zeta L} \hat{p}_-(x) & ; & & \hat{u}_-^{\zeta}(x) &= e^{-\zeta L} \hat{u}_-(x) \\ \hat{p}_+^{\zeta}(x) &= e^{\zeta L} \hat{p}_+(x) & ; & & \hat{u}_+^{\zeta}(x) &= e^{\zeta L} \hat{u}_+(x) \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

on x és la coordenada axial del tub. El coeficient ζ es defineix a través de l'expressió [Nederveen, 1967]:

$$\zeta = (1 + j)\zeta_o \frac{\sqrt{k}}{cD_m},$$

on c és la velocitat del so, D_m és el diàmetre mitjà entre les dues seccions, i el valor ζ_o depèn de la viscositat de l'aire, de la conductivitat de les parets, etc. Aquest valor es pot estimar, per a cada geometria simple (cilíndrica, cònica, Salmon), a partir de mesures experimentals.

Si es tenen en compte les equacions 1.3.1, la matriu de transferència que incorpora la fricció es relaciona amb la de fricció nul·la segons la següent expressió [Apèndix 1.II]:

$$[T_{\zeta}] = [\sigma_2] [T_{\zeta=0}] [\sigma_1]^{-1},$$

on $[\sigma_i]$ és la matriu d'esmoreïment a la secció S_i i ve donada, en el cas de tub cilíndric, per:

$$[\sigma_i] = \begin{bmatrix} \cosh(\zeta x_i) & -\rho c \sinh(\zeta x_i) \\ -\frac{1}{\rho c} \frac{k - j\zeta}{k} \sinh(\zeta x_i) & \frac{k - j\zeta}{k} \cosh(\zeta x_i) \end{bmatrix}. \quad (1.3.2)$$

1.4 Resultats

1.4.1 Resultats per a dissenys teòrics de pavellons

. Pavelló exponencial

Per al tub exponencial de la Fig. 1.4.1 s'han calculat la pressió i el cabal a partir de les equacions 1.2.1 i 1.2.2 considerant que l'extrem de diàmetre més gran (secció de sortida) és obert i s'ha obtingut la impedància a la secció de diàmetre més petit (secció d'entrada) com a fracció dels dos resultats anteriors. El tub s'ha tractat com un sol element exponencial i com a successió de sis elements cònics les dimensions dels quals es mostren a la Taula 1.4.1. Els resultats obtinguts en el primer càlcul, amb una resolució d'1 Hz, es mostren a les Fig. 1.4.2, Fig. 1.4.3, Fig. 1.4.4 i Fig. 1.4.5, i els obtinguts en el segon càlcul, amb la mateixa resolució, a les Fig. 1.4.6, Fig. 1.4.7, Fig. 1.4.8 i Fig. 1.4.9. Com a resultats representatius d'aquests càlculs s'exposen a la Taula 1.4.2 les freqüències corresponents als pics d'impedància, ja que es corresponen amb les freqüències de ressonància del pavelló quan l'extrem d'entrada és tancat i és en aquest extrem on es solen fer les mesures experimentals amb caps d'impedància per determinar les ressonàncies del pavelló. Les diferències en centèsimes de semitò entre les freqüències dels pics es calculen a partir de:

$$1200 \log_2 \frac{f_i}{f_i'}, \quad (1.4.1)$$

on f_i és la freqüència segons el càlcul del pavelló com a tram exponencial i f_i' la corresponent al càlcul com a quatre trams cònics. Aquestes diferències són, per als primer, segon i tercer pics, 20, 9 i 4 centèsimes de semitò que són acceptables dins del marge de tolerància en el disseny d'un instrument.

Per al pavelló estudiat en el qual m és de l'ordre de 155 mm els modes es poden considerar propagatius a partir d'una freqüència de tall de 350 Hz aproximadament. La hipòtesi d'unidimensionalitat, és a dir la no consideració de modes transversals propagatius, és correcta sempre que la freqüència sigui prou petita ja que el primer mode transversal es converteix en propagatiu si $f > (1,84 c) / (\pi D)$ [Munjál, 1987], on D és el diàmetre a l'extrem de sortida del pavelló. Aquest fet implica que els resultats obtinguts en aquest apartat es puguin considerar com a correctes fins a una freqüència aproximada de 1500 Hz.

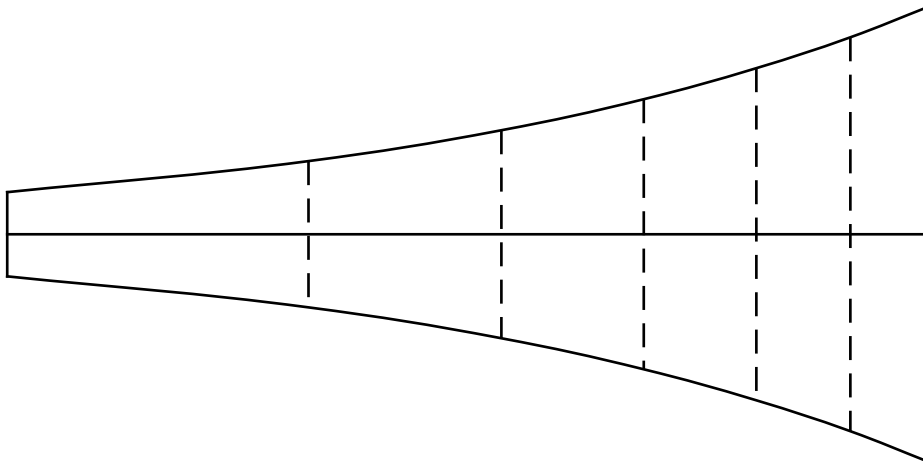


Fig. 1.4.1 Pavelló exponencial calculat.

Tram	Diàmetre 1 (mm)	Diàmetre 2 (mm)	Llargada (mm)
1	130,0	112,3	22,7
2	112,3	94,7	26,7
3	94,7	77,0	32,1
4	77,0	59,3	40,6
5	59,3	41,7	55,0
6	41,7	24,0	85,9

Taula 1.4.1 Discretització del pavelló de la Fig. 1.4.1 en trams cònics.

Pic	1 tram exponencial	6 trams cònics
1r	528 Hz	522 Hz
2n	962 Hz	957 Hz
3r	1482 Hz	1479 Hz
4t	2021 Hz	2028 Hz
5è	2608 Hz	2614 Hz

Taula 1.4.2 Freqüències de ressonància del pavelló de la Fig. 1.4.1.



Fig. 1.4.2 Pressió del pavelló de la Fig. 1.4.1 calculat com un element exponencial.

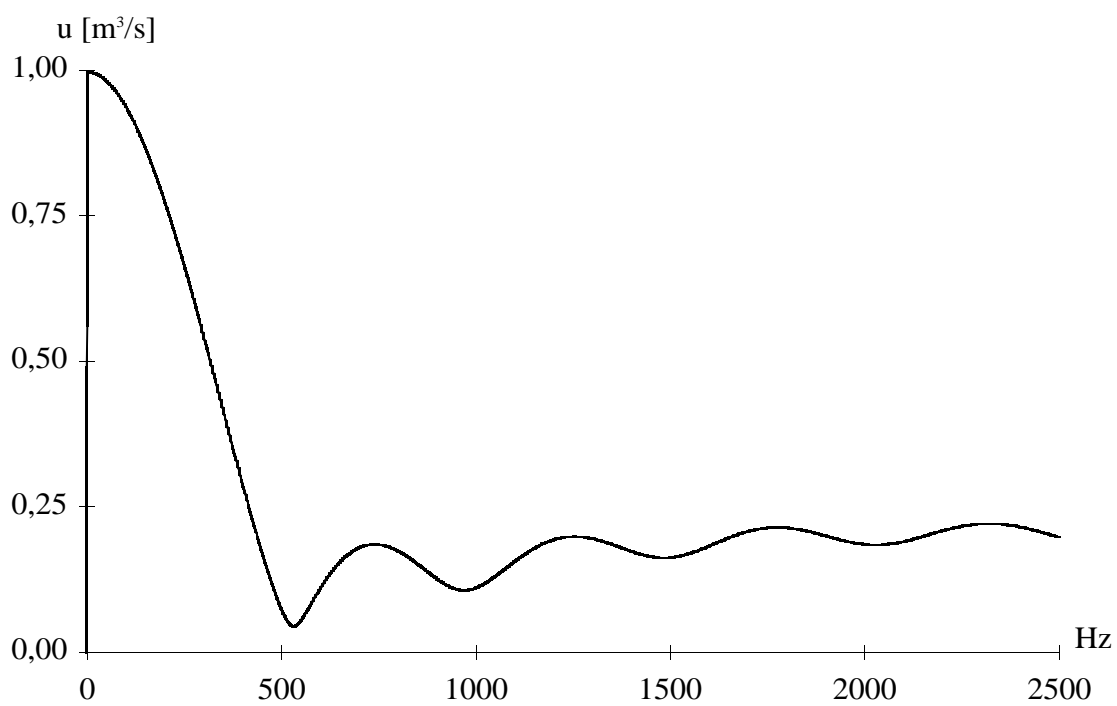


Fig. 1.4.3 Cabal del pavelló de la Fig. 1.4.1 calculat com un element exponencial.

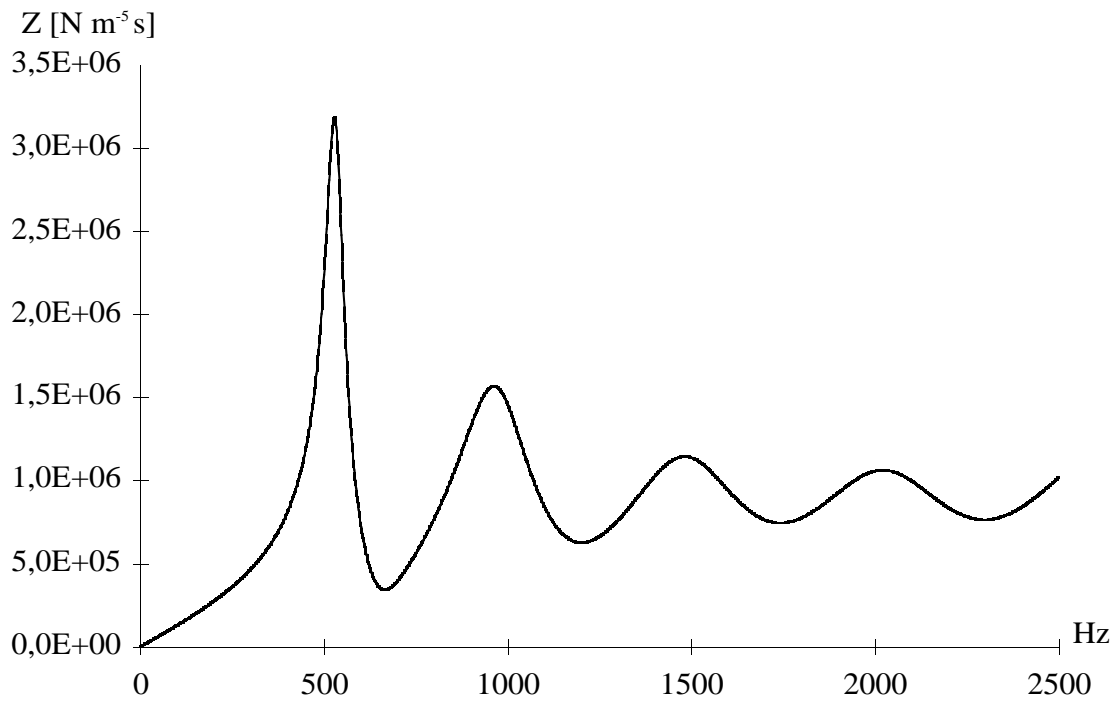


Fig. 1.4.4 Impedància del pavelló de la Fig. 1.4.1 calculat com un element exponencial.

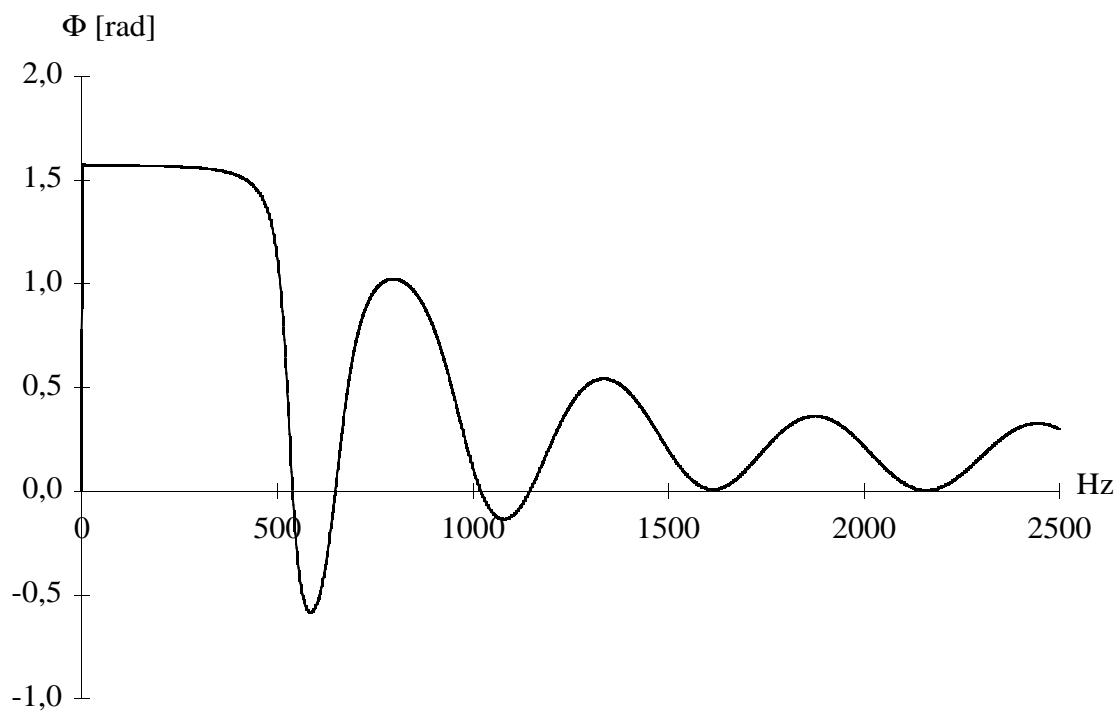


Fig. 1.4.5 Fase de la impedància del pavelló de la Fig. 1.4.1 calculat com un element exponencial.

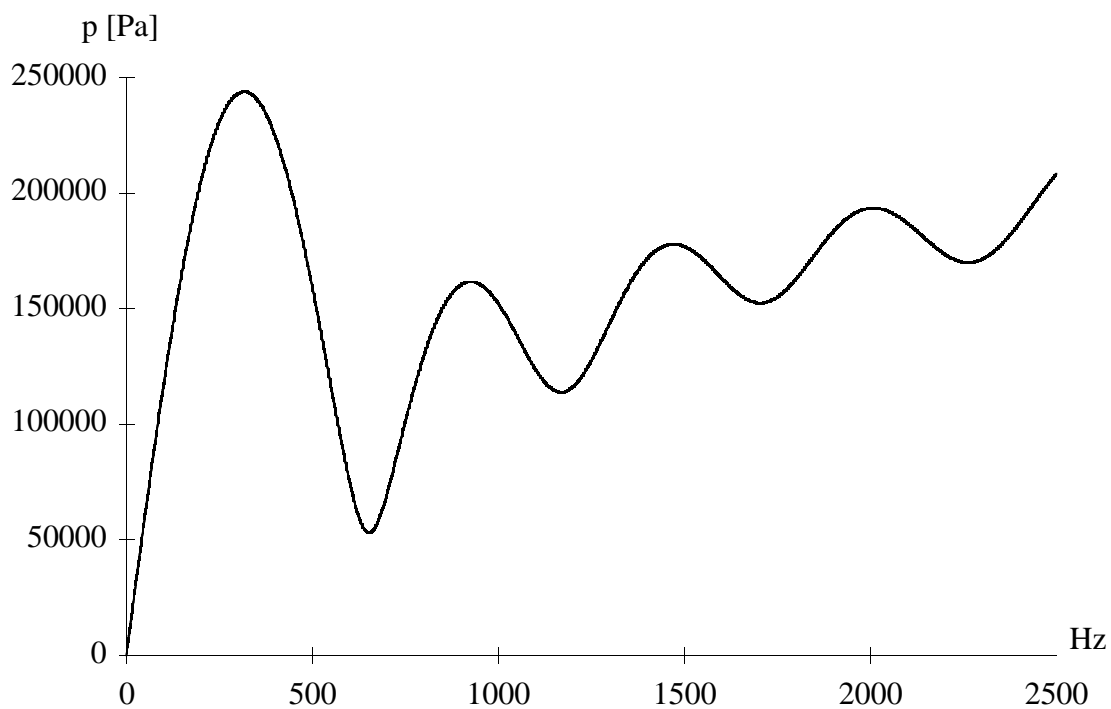


Fig. 1.4.6 Pressió del pavelló de la Fig. 1.4.1 discretitzat en sis trams cònics.

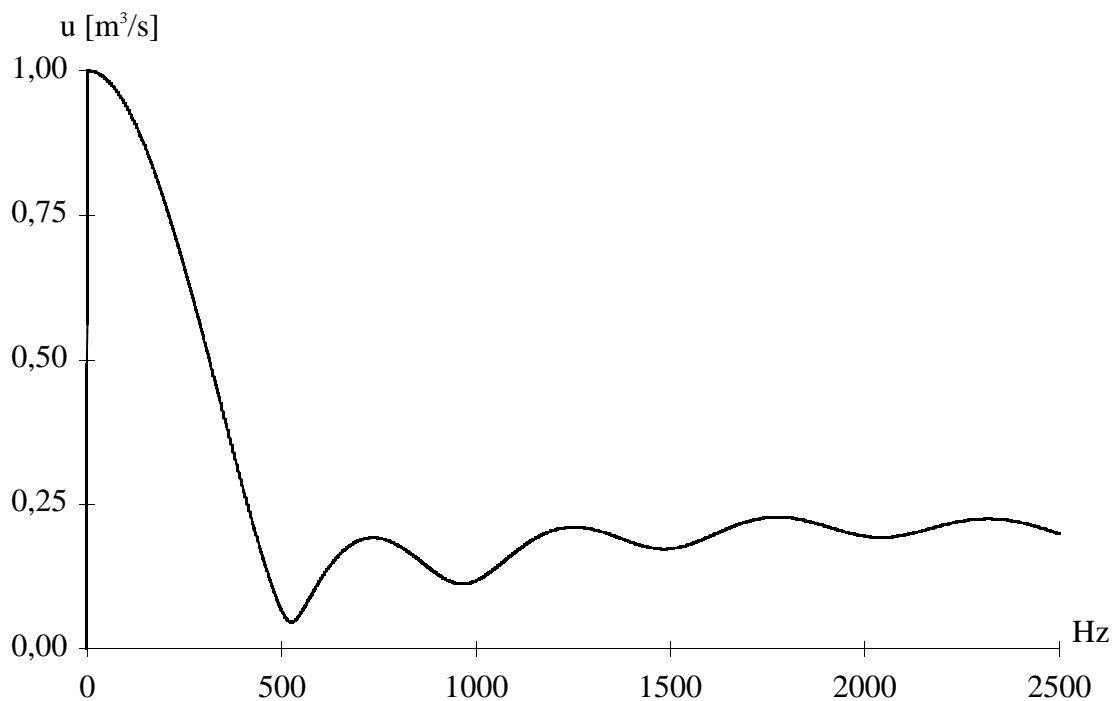


Fig. 1.4.7 Cabal del pavelló de la Fig. 1.4.1 discretitzat en sis trams cònics.

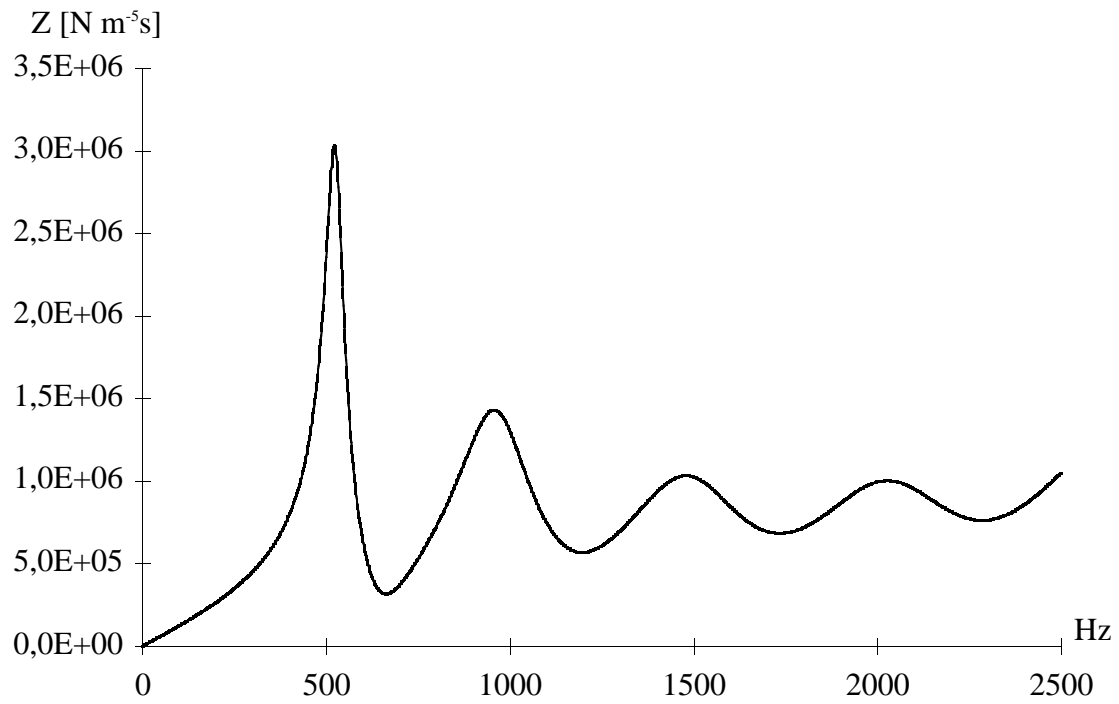


Fig. 1.4.8 Impedància del pavelló de la Fig. 1.4.1 discretitzat en sis trams cònics.

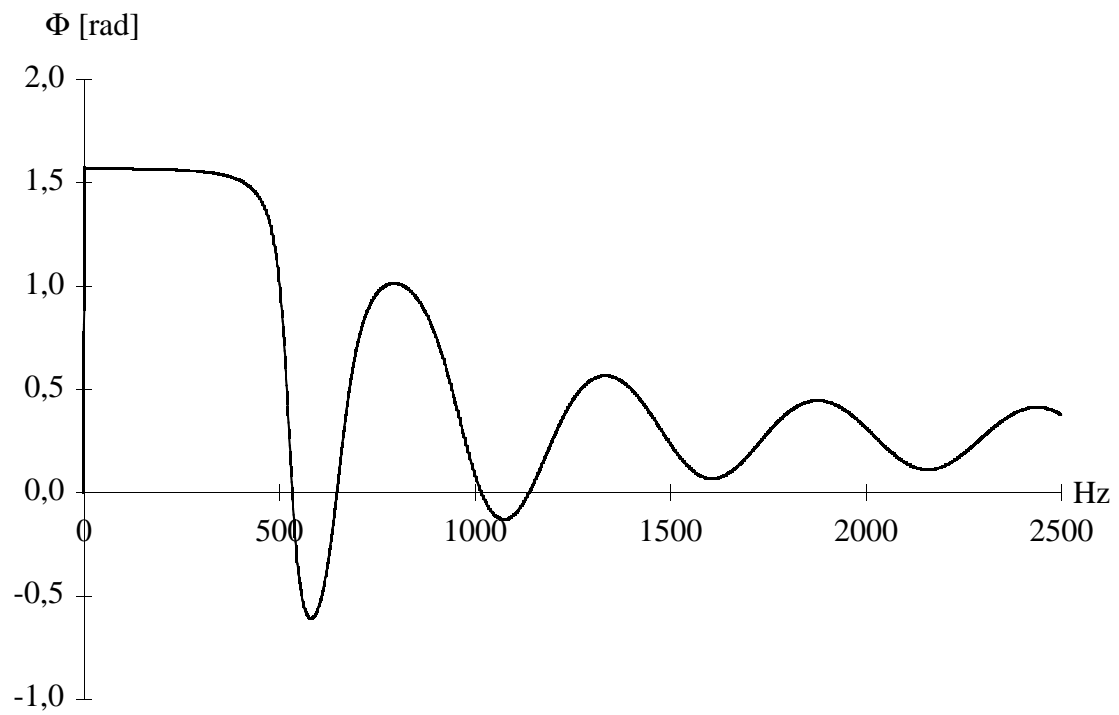


Fig. 1.4.9 Fase de la impedància del pavelló de la Fig. 1.4.1 discretitzat en sis trams cònics.

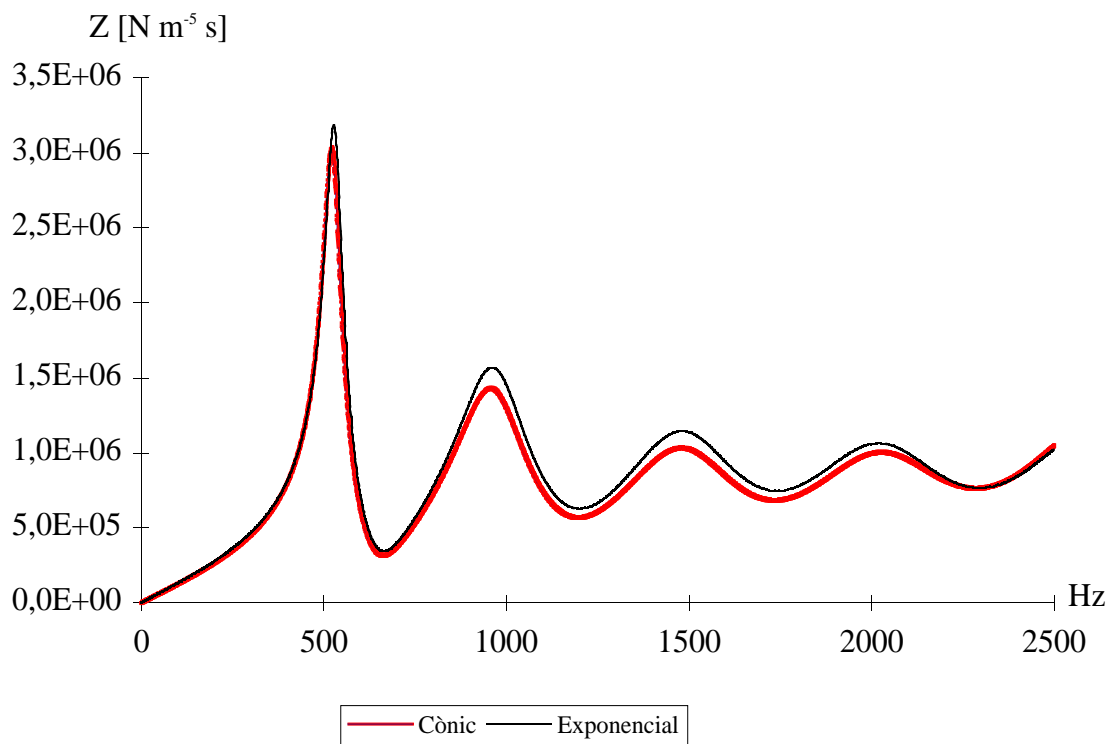
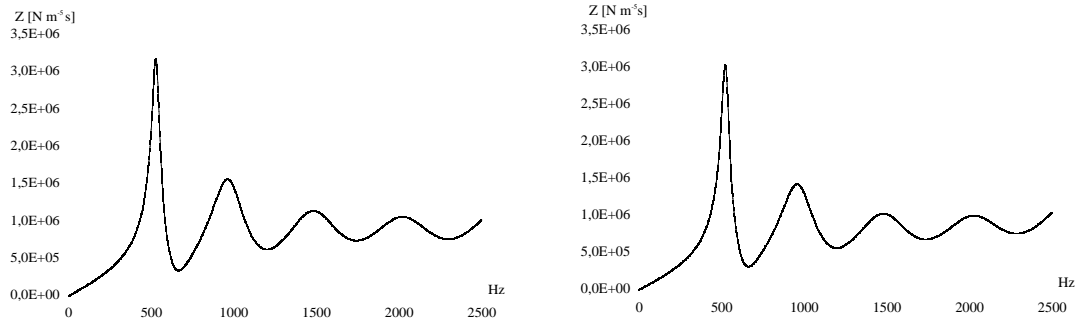


Fig. 1.4.10 Comparació dels valors de la impedància del pavelló de la Fig. 1.4.1.

. Pavelló no exponencial

Per a un pavelló de perfil no exponencial, com el representat a la Fig. 1.4.11, s'han fet també dos tipus de càlculs: com una successió de quatre trams exponencials les mides dels quals es mostren a la Taula 1.4.3 i com una successió de sis trams cònics (Taula 1.4.4).

Els resultats obtinguts en el primer càlcul, amb una resolució d'1 Hz, es mostren a les Fig. 1.4.14, Fig. 1.4.15, Fig. 1.4.16 i Fig. 1.4.17, i els obtinguts en el segon càlcul, amb la mateixa resolució, a les Fig. 1.4.18, Fig. 1.4.19, Fig. 1.4.20 i Fig. 1.4.21. Les freqüències dels pics de la impedància es mostren a la Taula 1.4.5. Les diferències entre les freqüències dels pics de ressonància, obtingudes amb l'equació 1.4.1, són, respectivament, 0 i 5 centèsimes de semitò. Aquestes diferències són menors que el marge de tolerància acceptat en el disseny d'un instrument.

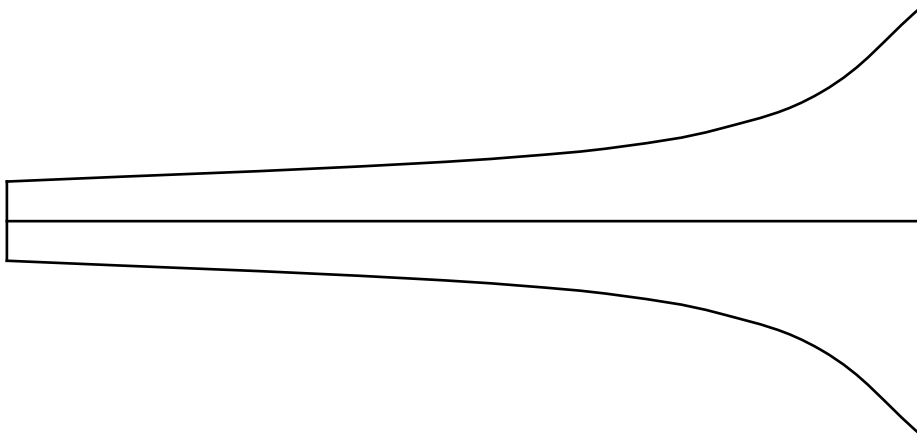


Fig. 1.4.11 Pavelló de perfil no exponencial.

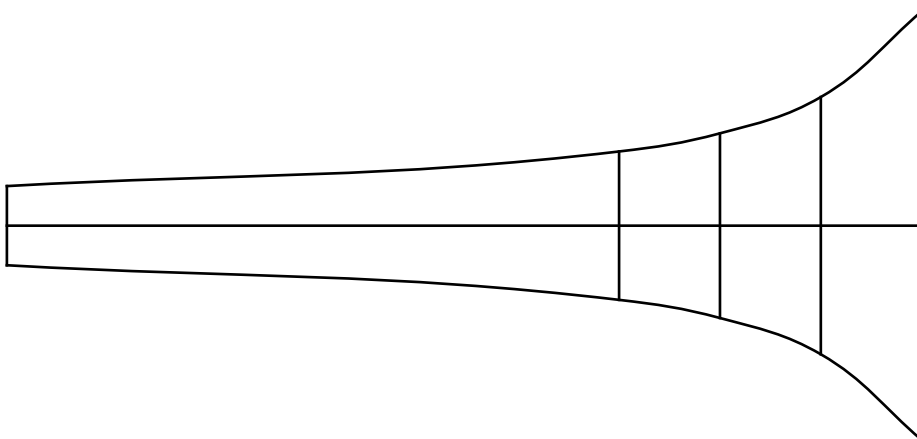


Fig. 1.4.12 Discretització en trams exponencials del pavelló de la Fig. 1.4.11.

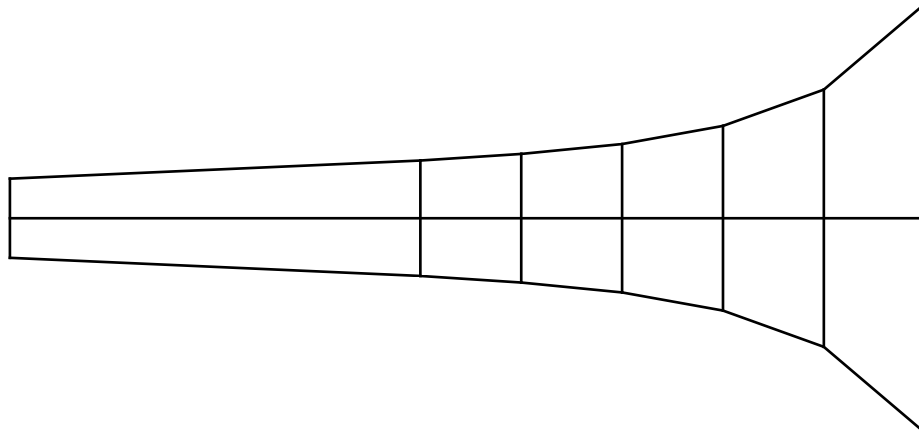


Fig. 1.4.13 Discretització en trams cònics del pavelló de la Fig. 1.4.11.

Tram	Diàmetre 1 (mm)	Diàmetre 2 (mm)	Llargada (mm)
1	130	78	29
2	78	56	29
3	56	45	29
4	45	24	176

Taula 1.4.3 Discretització del pavelló de la Fig. 1.4.11 en trams exponencials.

Tram	Diàmetre 1 (mm)	Diàmetre 2 (mm)	Llargada (mm)
1	130	78	29
2	78	56	29
3	56	45	29
4	45	39	29
5	39	35	29
6	35	24	118

Taula 1.4.4 Discretització del pavelló de la Fig. 1.4.11 en trams cònics.

Pic	4 trams exponencials	6 trams cònics
1r	491 Hz	491 Hz
2n	1101 Hz	1098 Hz
3r	1865 Hz	1860 Hz
4t	2536 Hz	2513 Hz

Taula 1.4.5 Freqüències de ressonància del pavelló de la Fig. 1.4.11.



Fig. 1.4.14 Pressió del pavelló de la Fig. 1.4.11 discretitzat en quatre trams exponencials.



Fig. 1.4.15 Cabal del pavelló de la Fig. 1.4.11 discretitzat en quatre trams exponencials.

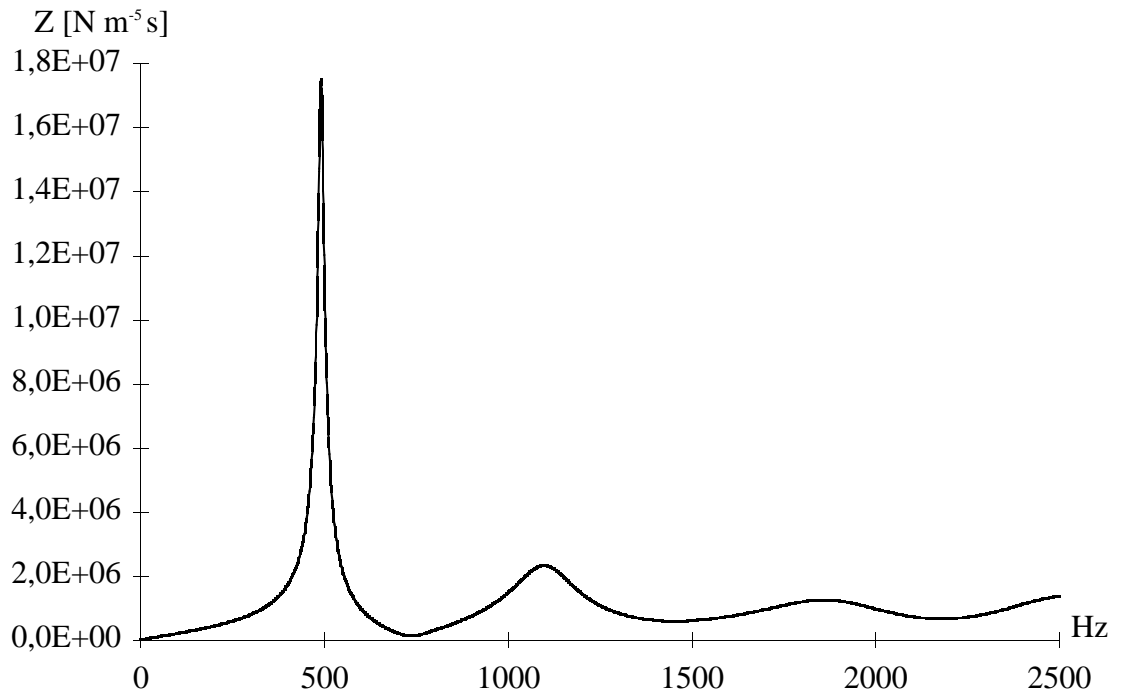


Fig. 1.4.16 Impedància del pavelló de la Fig. 1.4.11 discretitzat en quatre trams exponencials.

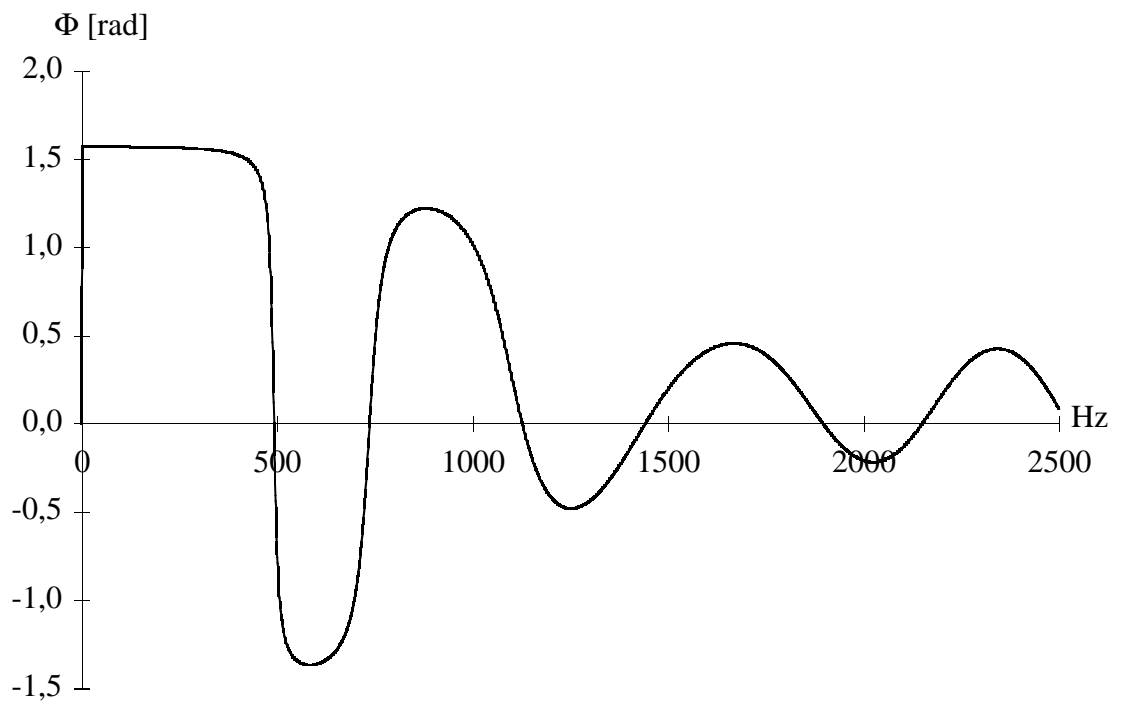


Fig. 1.4.17 Fase de la impedància del pavelló de la Fig. 1.4.11 discretitzat en quatre trams exponencials.

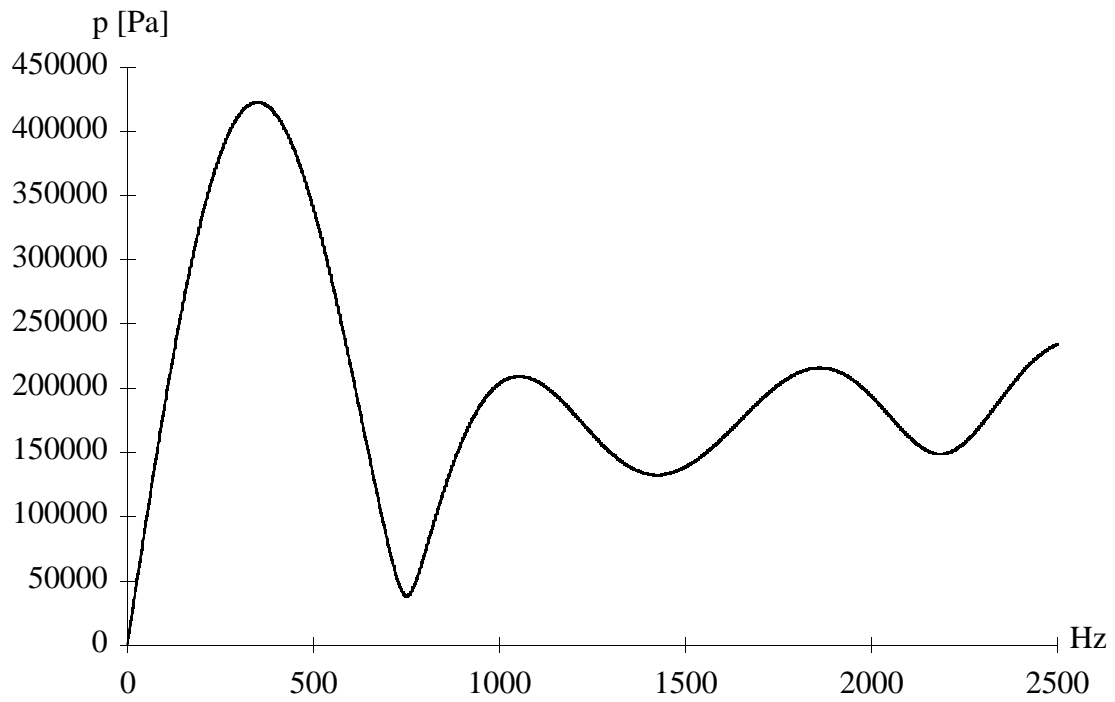


Fig. 1.4.18 Pressió del pavelló de la Fig. 1.4.11 discretitzat en sis trams cònics.



Fig. 1.4.19 Cabal del pavelló de la Fig. 1.4.11 discretitzat en sis trams cònics.

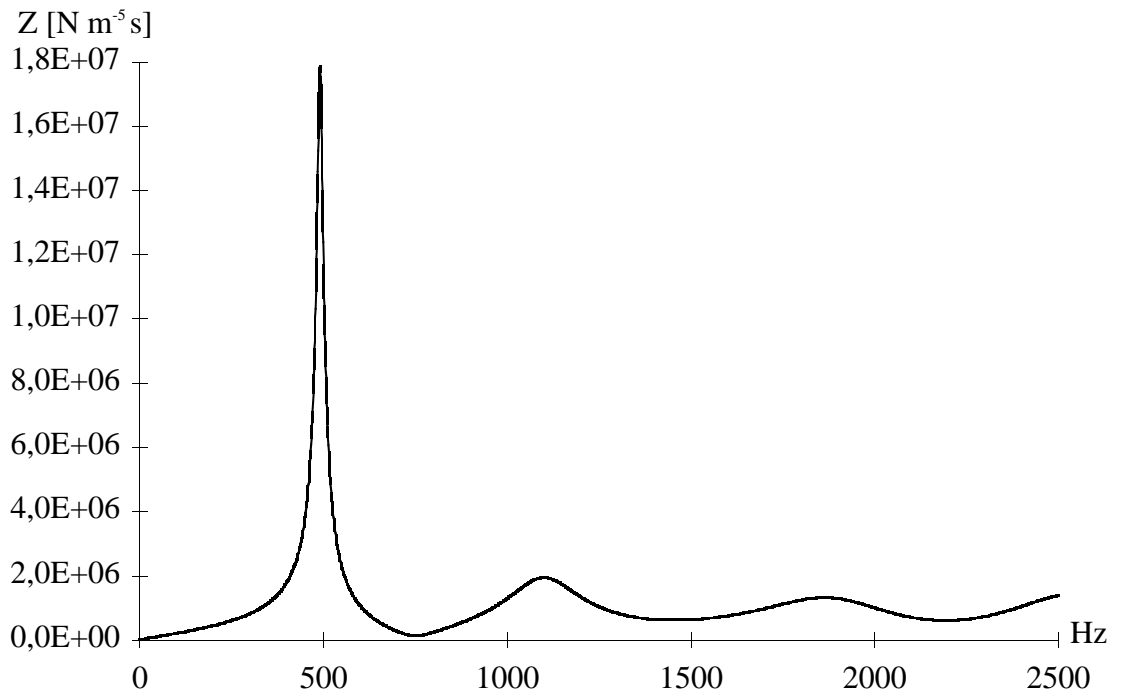


Fig. 1.4.20 Impedància del pavelló de la Fig. 1.4.11 discretitzat en sis trams cònics.

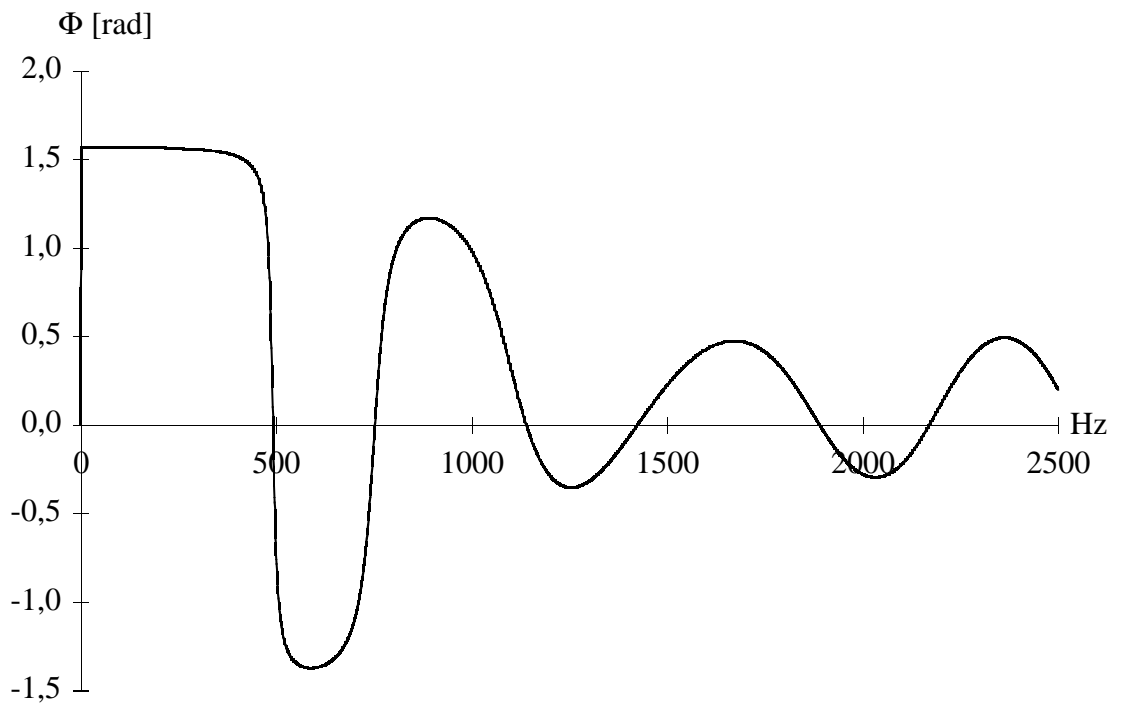


Fig. 1.4.21 Fase de la impedància del pavelló de la Fig. 1.4.11 discretitzat en sis trams cònics.

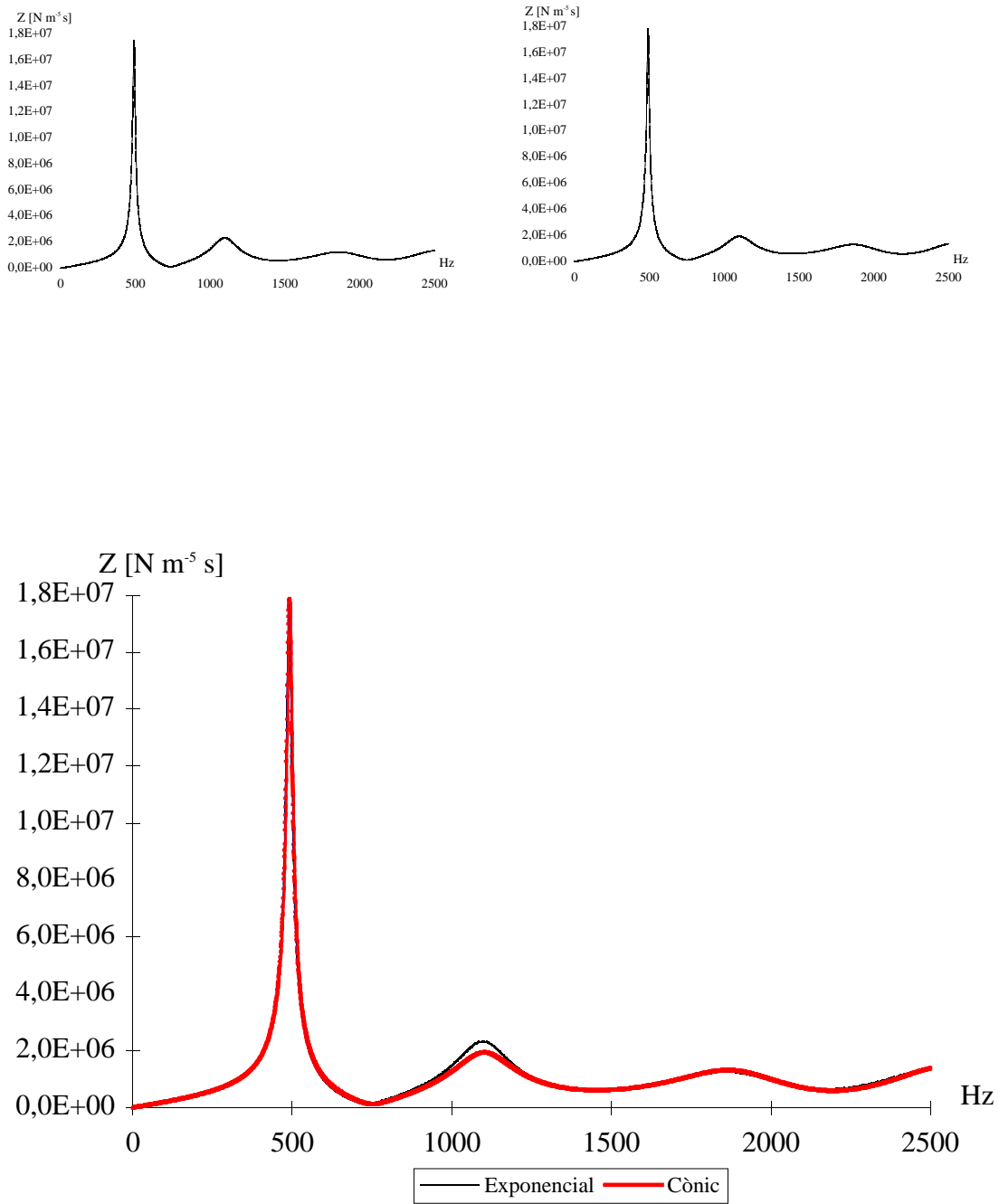


Fig. 1.4.22 Comparació dels valors de la impedància del pavelló de la Fig. 1.4.11.

1.4.2 Resultats per a pavellons de tenora reals

Els mateixos càlculs realitzats en l'apartat anterior s'han efectuat per a dos pavellons reals de tenora. Aquests pavellons s'han discretitzat de dues maneres diferents: com una successió de quatre trams exponencials i com una successió de sis trams cònics. Les mides corresponents a aquestes discretitzacions es troben de la Taula 1.4.6 a la Taula 1.4.9 i els seus perfils estan representats a les Fig. 1.4.23 i Fig. 1.4.24. Es disposa de mesures experimentals d'impedància, tant de mòdul com de fase, dels dos pavellons i també quan al davant se'ls acobla un tub cilíndric d'un metre de llargada. Aquestes mesures, realitzades al Laboratoire d'Ondes et Acoustique de la Universitat de París VII pel Dr. Vincent Gibiat seguint el mètode exposat a la seva tesi doctoral [Gibiat, 1990], permeten efectuar les corresponents comprovacions del model.

El fet de repetir les mesures amb un tram cilíndric al davant té a veure amb l'aproximació feta en l'equació de Webster. Aquesta aproximació consisteix a suposar que els fronts d'ona són plans dins del pavelló. La pertorbació produïda a l'instant inicial al cap d'impedàncies no és perfectament plana i per tant, si el pavelló es troba just al davant del cap i s'obre ràpidament, els resultats obtinguts en les mesures experimentals i en els càlculs poden ser força discrepants. Així doncs, si entre el cap d'impedàncies i el pavelló es col·loca un tub cilíndric suficientment llarg es facilita que la pertorbació produïda sigui plana quan arriba al pavelló.

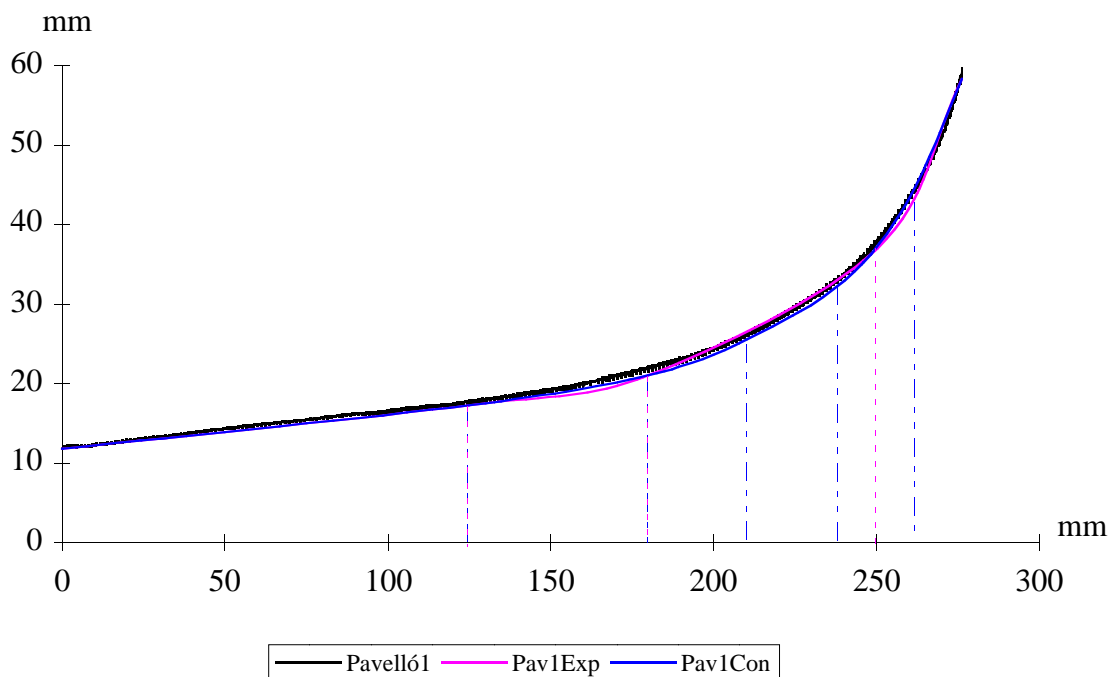


Fig. 1.4.23 Pavelló 1 i discretitzacions en trams exponencials i cònics.

Tram	Diàmetre 1 (mm)	Diàmetre 2 (mm)	Llargada (mm)
1	116,590	73,994	25,990
2	73,994	42,062	70,320
3	42,062	34,522	55,080
4	34,522	23,442	125,013

Taula 1.4.6 Discretització del pavelló 1 en quatre trams exponencials.

Tram	Diàmetre 1 (mm)	Diàmetre 2 (mm)	Llargada (mm)
1	116,590	86,270	16,300
2	86,270	65,908	19,690
3	65,908	51,114	30,020
4	51,114	42,062	30,300
5	42,062	34,522	55,080
6	34,522	23,442	125,013

Taula 1.4.7 Discretització del pavelló 1 en sis trams cònics.

Tram	Diàmetre 1 (mm)	Diàmetre 2 (mm)	Llargada (mm)
1	118,858	81,286	24,850
2	81,286	44,124	49,960
3	44,124	28,018	69,560
4	28,018	21,966	80,493

Taula 1.4.8 Discretització del pavelló 2 en quatre trams exponencials.

Tram	Diàmetre 1 (mm)	Diàmetre 2 (mm)	Llargada (mm)
1	118,858	92,678	14,760
2	92,678	62,556	29,910
3	62,556	44,124	30,140
4	44,124	33,722	35,010
5	33,722	28,018	34,550
6	28,018	21,966	80,493

Taula 1.4.9 Discretització del pavelló 2 en sis trams cònics.

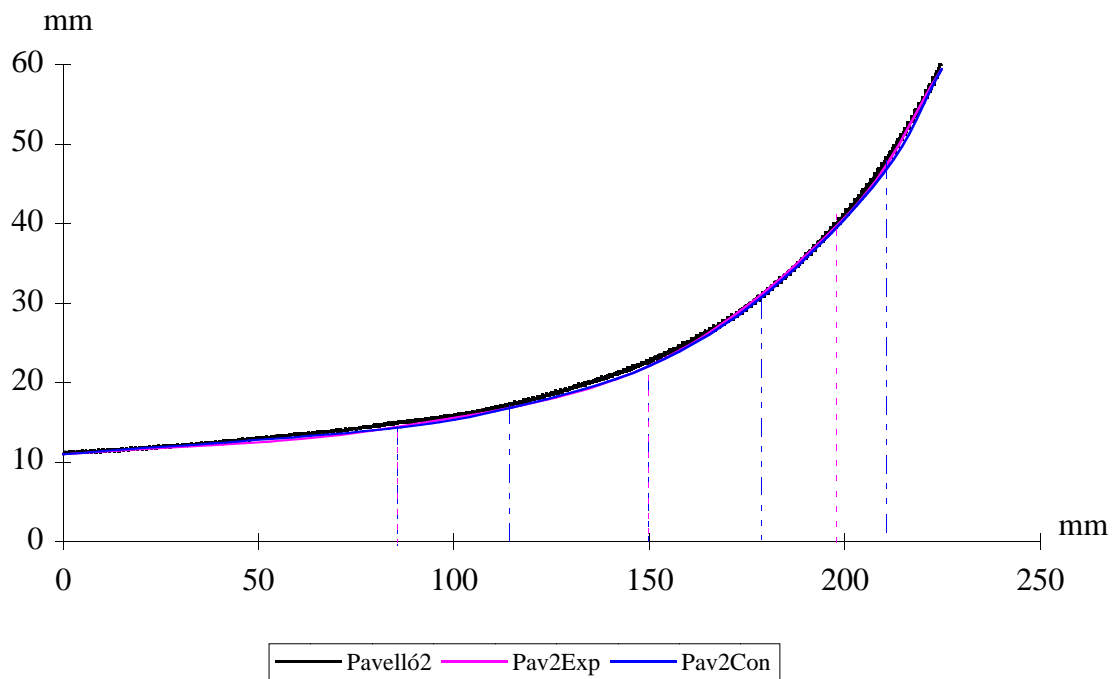


Fig. 1.4.24 Pavelló 2 i discretitzacions en trams exponencials i cònics.

Els càlculs que s'han realitzat per a aquests pavellons han estat els de pressió, cabal, impedància i fase de la impedància amb una resolució 1 Hz i els resultats obtinguts es mostren de la Fig. 1.4.25 a la Fig. 1.4.40 en el cas de pavelló sol i de la Fig. 1.4.41 a la Fig. 1.4.56 en el cas de pavelló amb un tub cilíndric d'un metre de llargada al davant. De la Fig. 1.4.57 a la Fig. 1.4.64 es mostren els resultats obtinguts experimentalment.

De les Fig. 1.4.27, Fig. 1.4.31, Fig. 1.4.35 i Fig. 1.4.39 es poden obtenir les freqüències de ressonància de la impedància per als dos pavellons. Aquestes freqüències es mostren a les Taula 1.4.10, Taula 1.4.11 i a les Fig. 1.4.65 i Fig. 1.4.66 i es comparen amb els valors obtinguts experimentalment. Les diferències entre les freqüències dels pics de ressonància, obtingudes amb l'equació 1.4.1, es troben a les Taula 1.4.12 i Taula 1.4.13 i es representen a les Fig. 1.4.67 i Fig. 1.4.68.

En aquest cas la freqüència de tall es situa al voltant dels 350 Hz i a l'igual que en el cas anterior, el fet de negligir la propagació de modes transversals fa que els resultats obtinguts es puguin considerar com a correctes fins a una freqüència aproximada de 1500 Hz, ja que s'ha de continuar complint que $f < (1,84 c) / (\pi D)$ [Munjaj, 1987], essent D el diàmetre de l'extrem de sortida del pavelló.

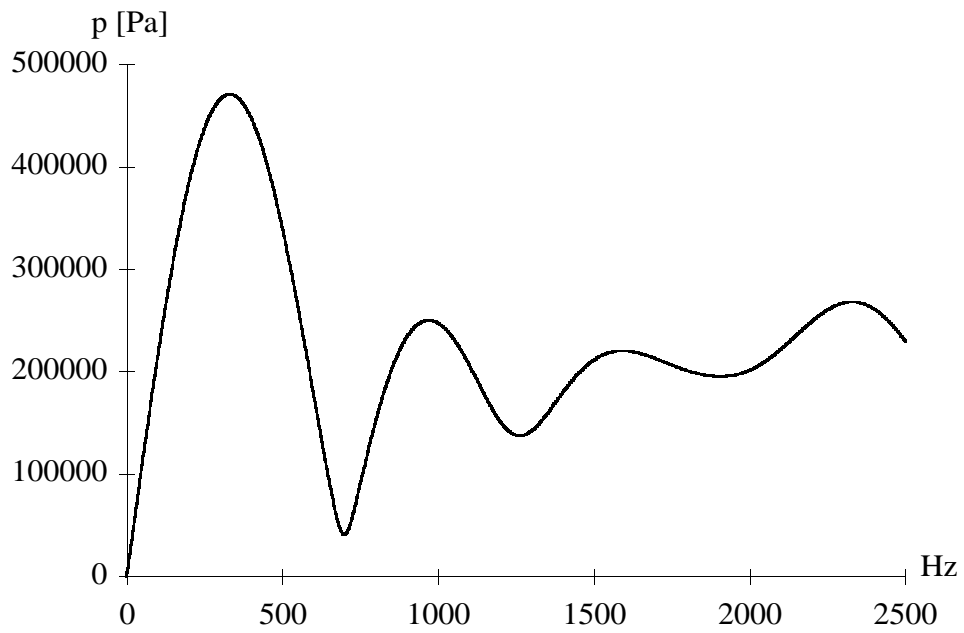


Fig. 1.4.25 Pressió del pavelló 1 discretitzat en quatre trams exponencials.

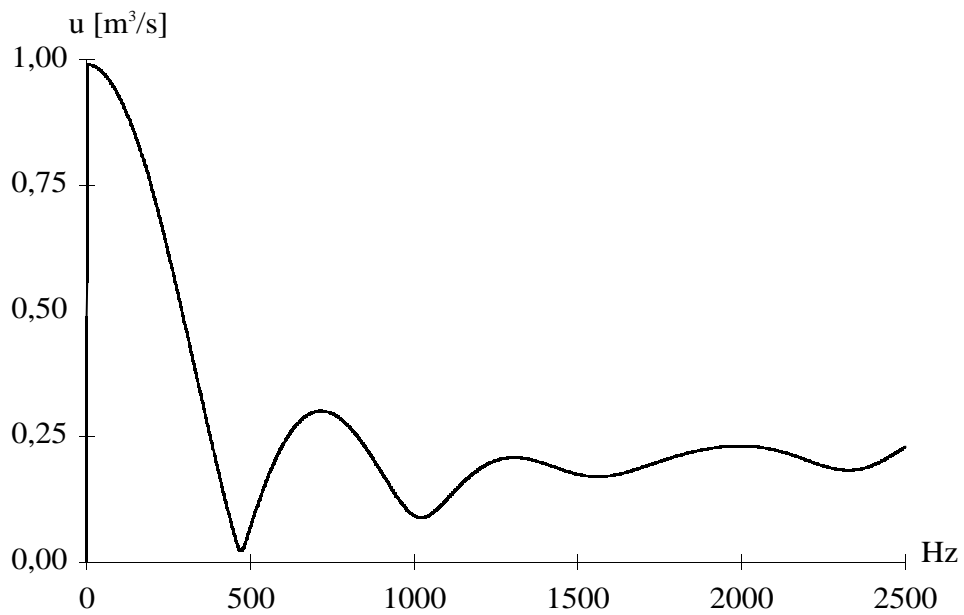


Fig. 1.4.26 Cabal del pavelló 1 discretitzat en quatre trams exponencials.

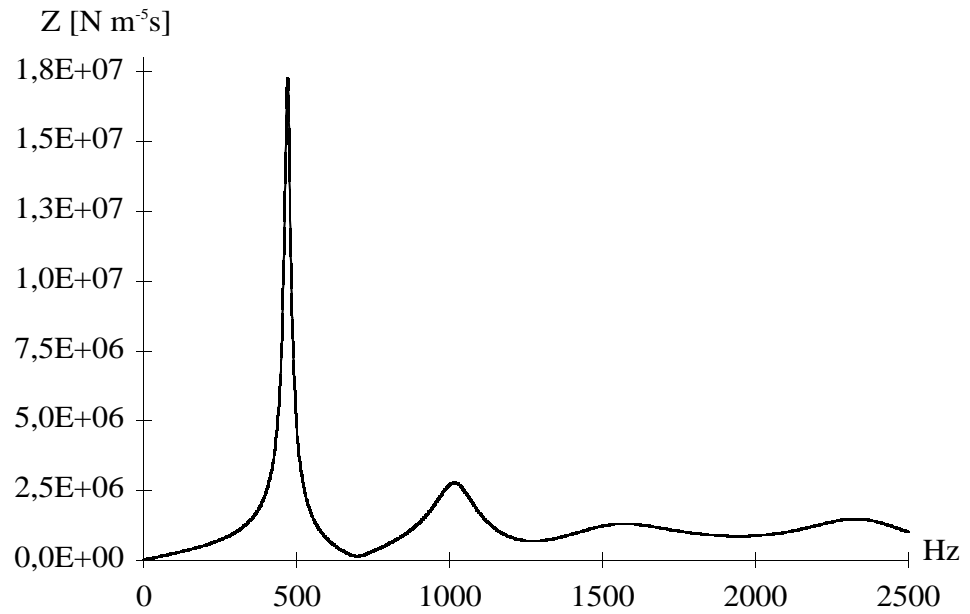


Fig. 1.4.27 Impedància del pavelló 1 discretitzat en quatre trams exponencials.

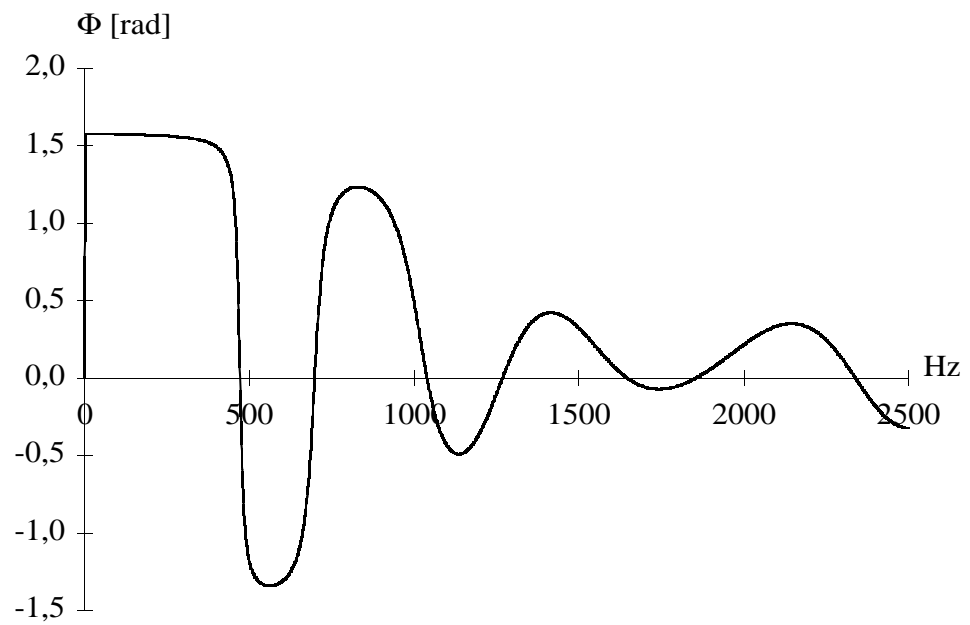


Fig. 1.4.28 Fase de la impedància del pavelló 1 discretitzat en quatre trams exponencials.

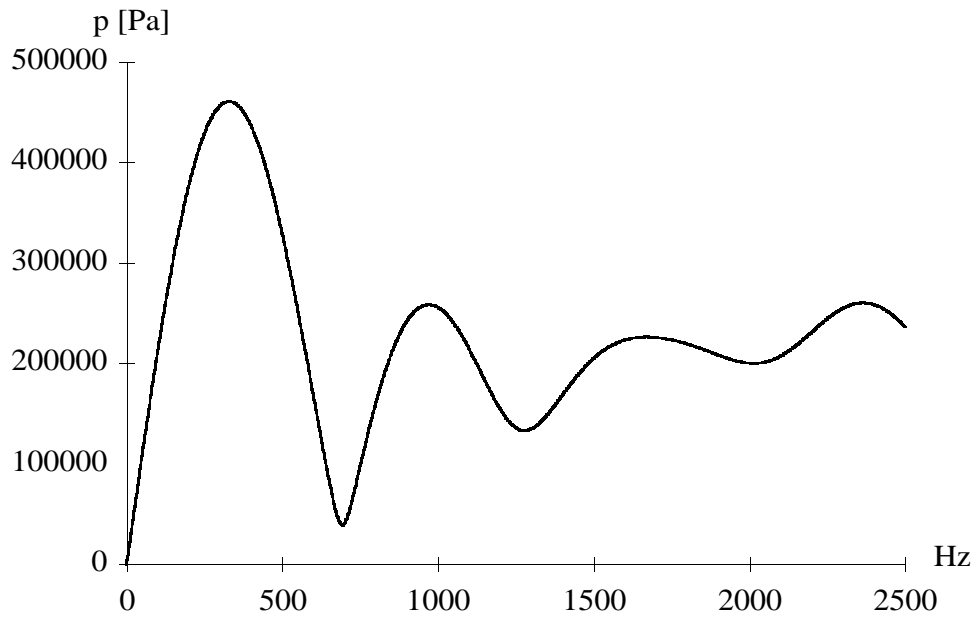


Fig. 1.4.29 Pressió del pavelló 1 discretitzat en sis trams cònics.

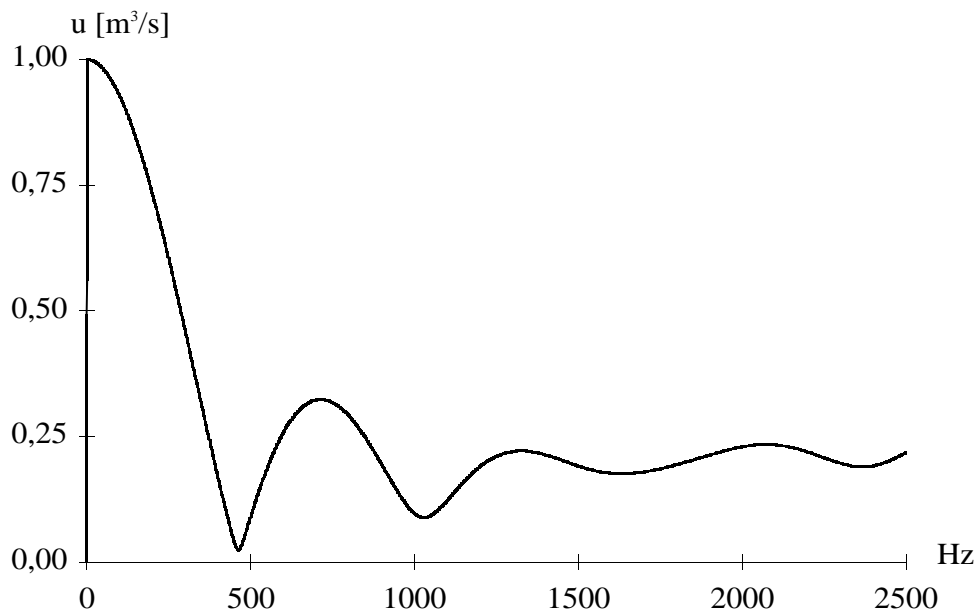


Fig. 1.4.30 Cabal del pavelló 1 discretitzat en sis trams cònics.

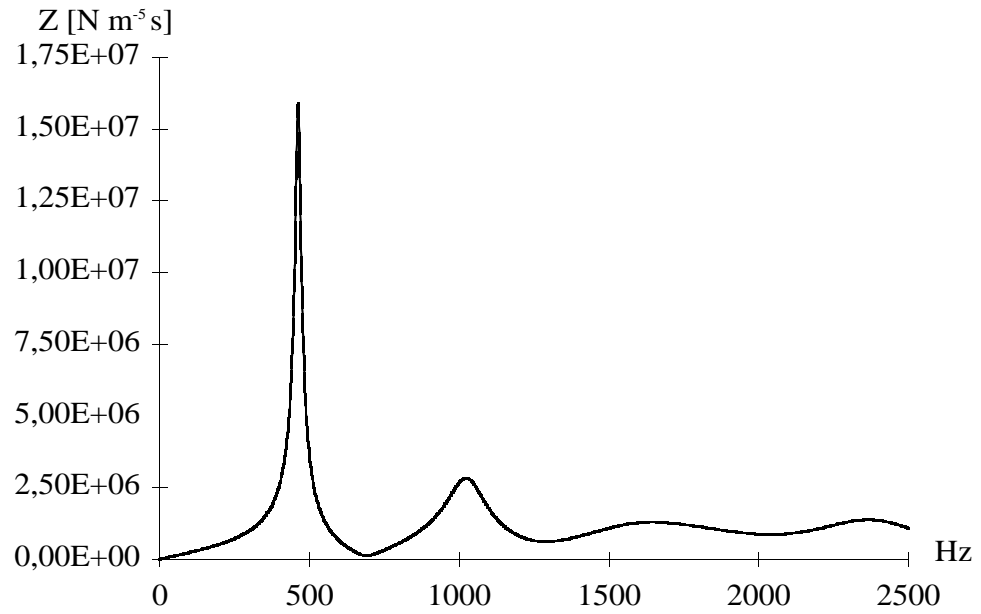


Fig. 1.4.31 Impedància del pavelló 1 discretitzat en sis trams cònics.

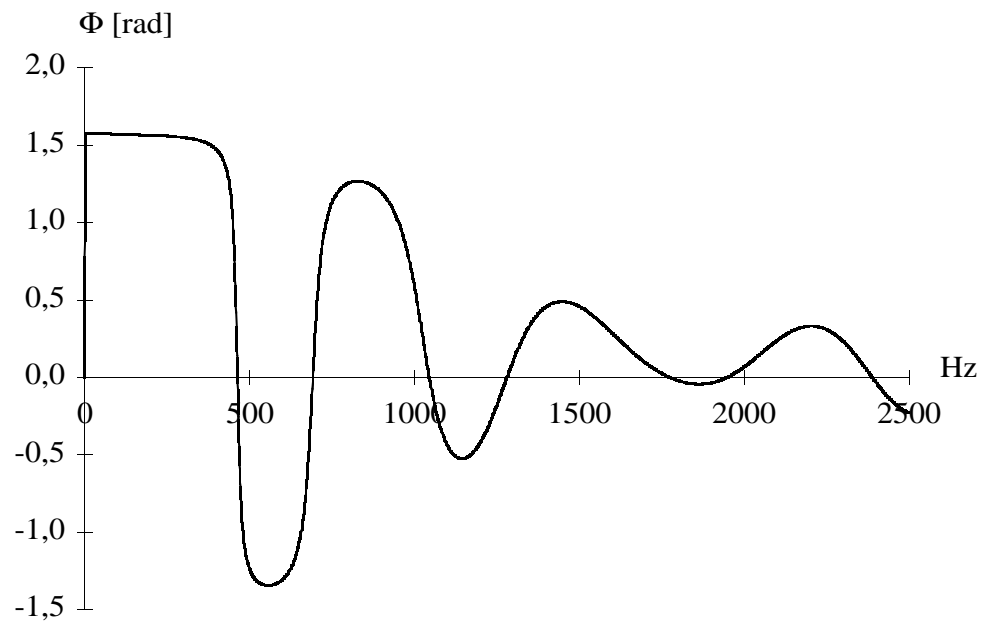


Fig. 1.4.32 Fase de la impedància del pavelló 1 discretitzat en sis trams cònics.

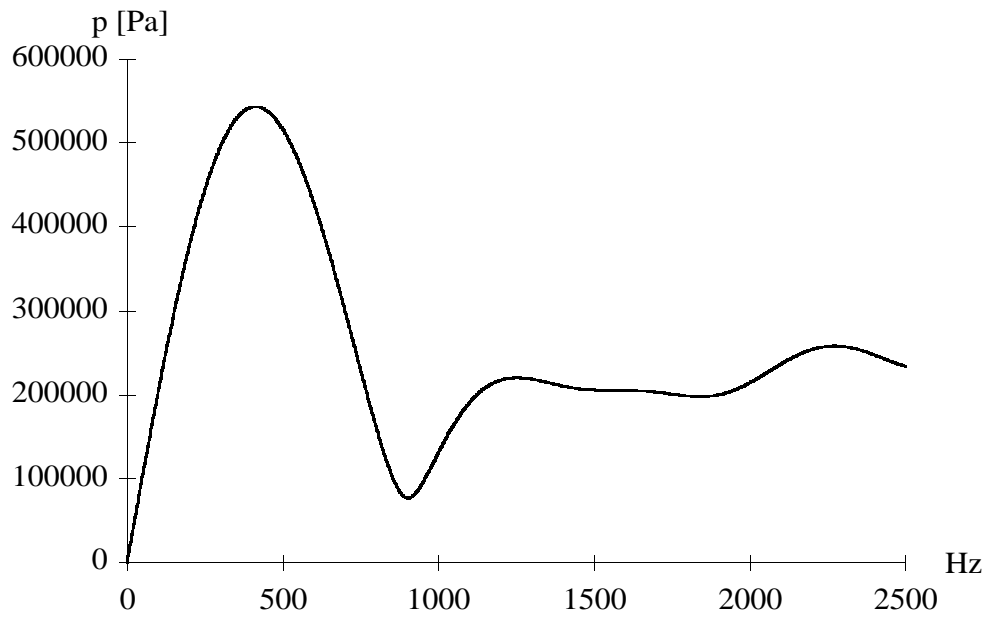


Fig. 1.4.33 Pressió del pavelló 2 discretitzat en quatre trams exponencials.



Fig. 1.4.34 Cabal del pavelló 2 discretitzat en quatre trams exponencials.

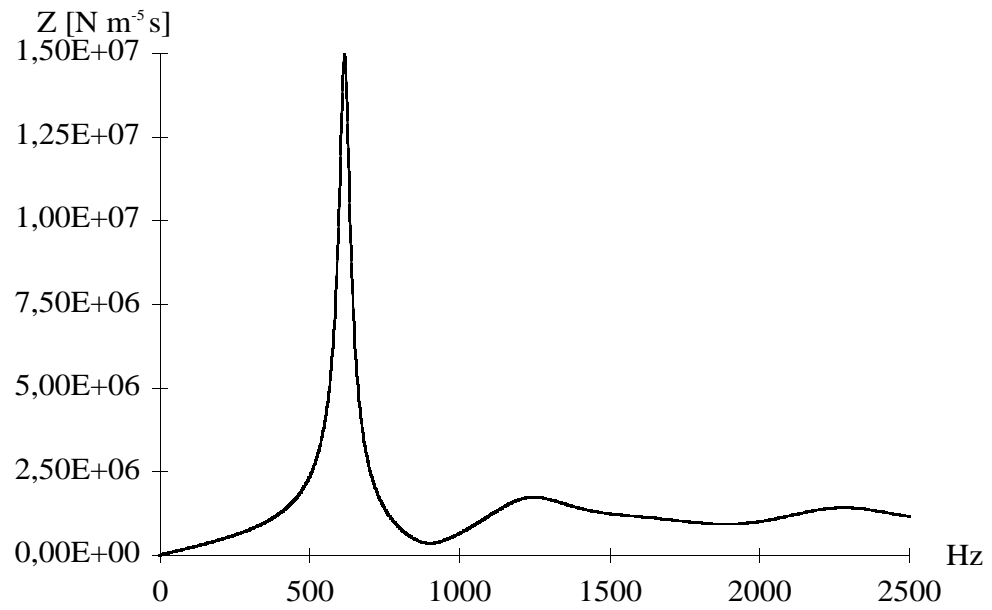


Fig. 1.4.35 Impedància del pavelló 2 discretitzat en quatre trams exponencials.

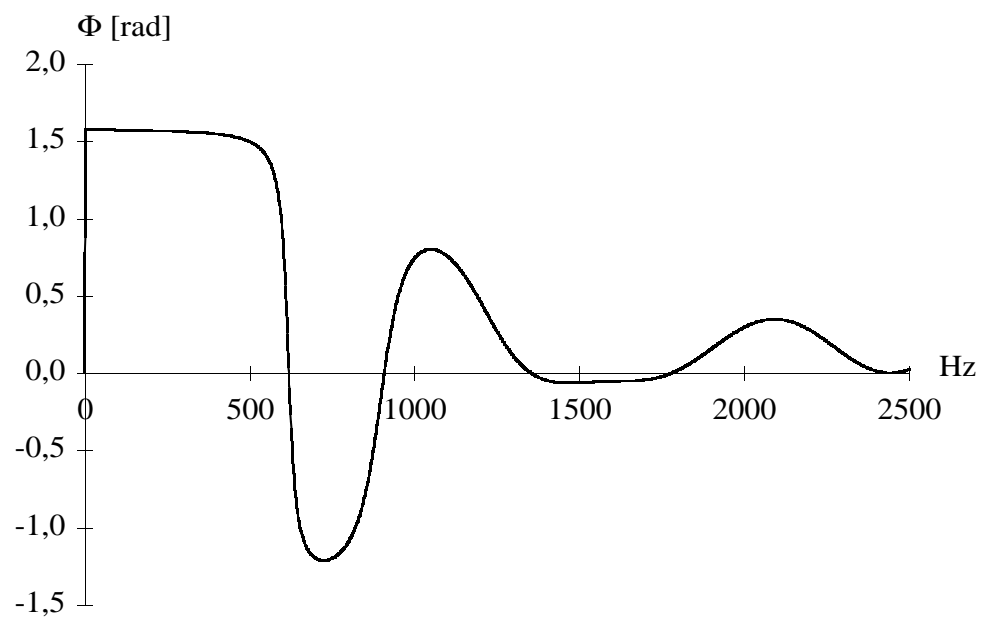


Fig. 1.4.36 Fase de la impedància del pavelló 2 discretitzat en quatre trams exponencials.

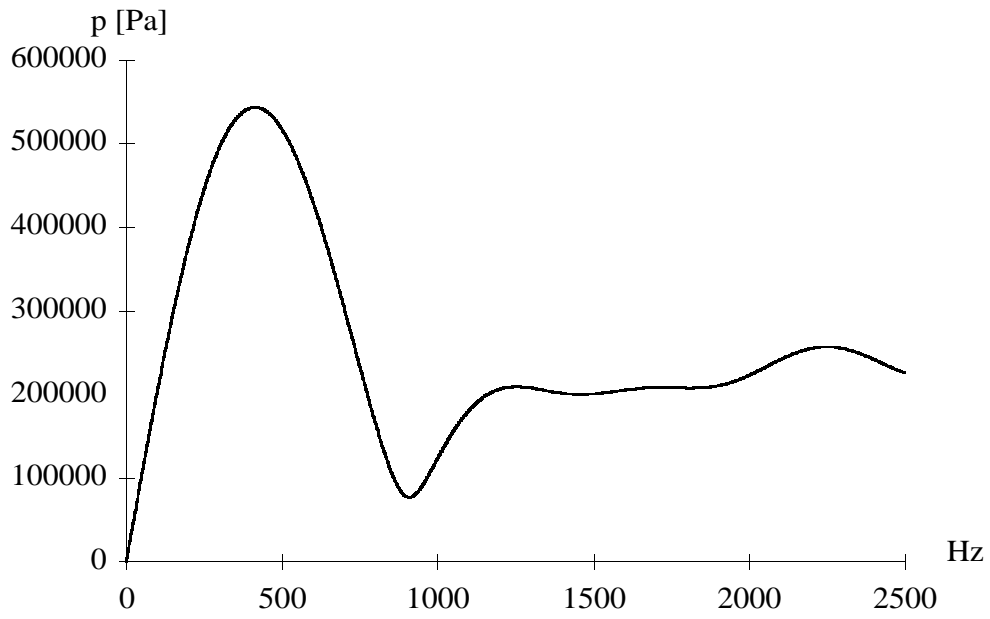


Fig. 1.4.37 Pressió del pavelló 2 discretitzat en sis trams cònics.

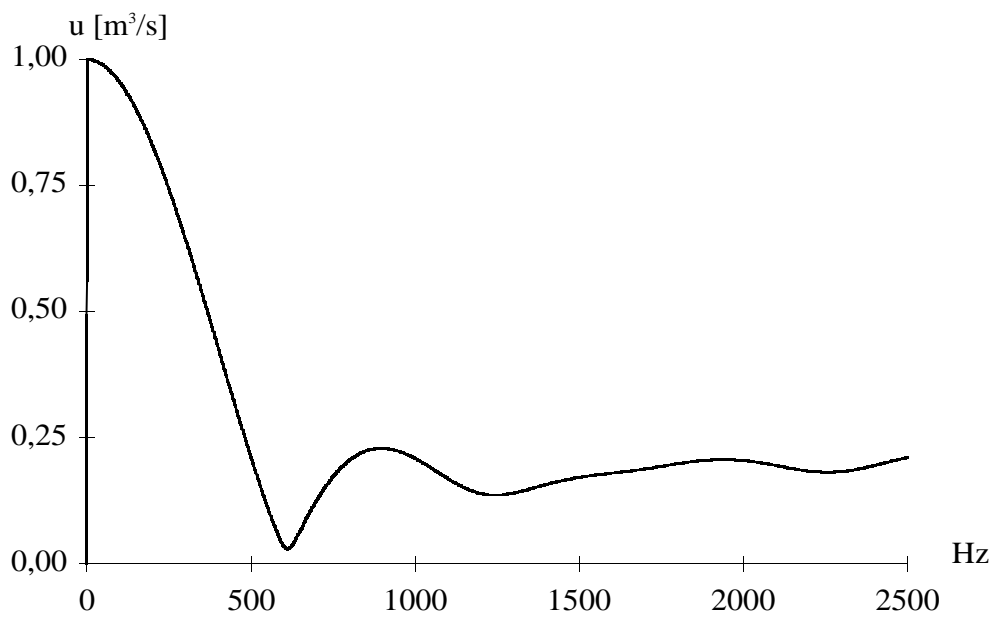


Fig. 1.4.38 Cabal del pavelló 2 discretitzat en sis trams cònics.

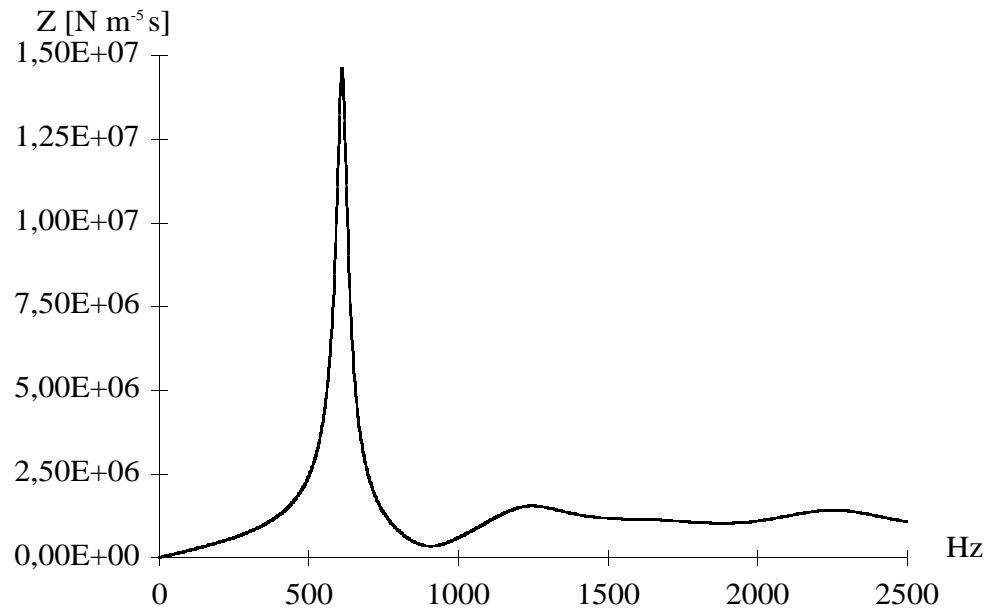


Fig. 1.4.39 Impedància del pavelló 2 discretitzat en sis trams cònics.

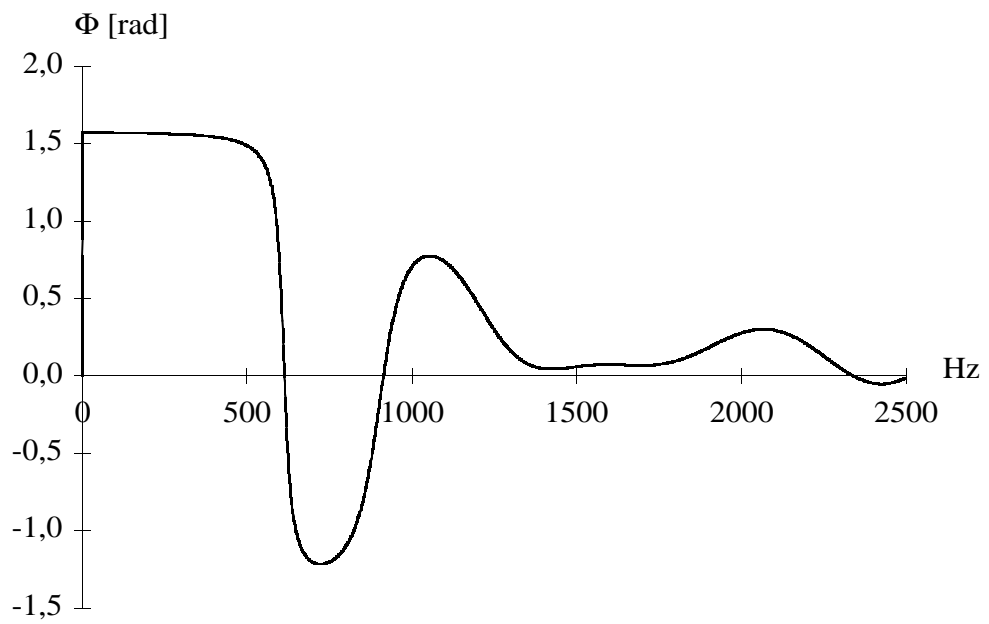


Fig. 1.4.40 Fase de la impedància del pavelló 2 discretitzat en sis trams cònics.

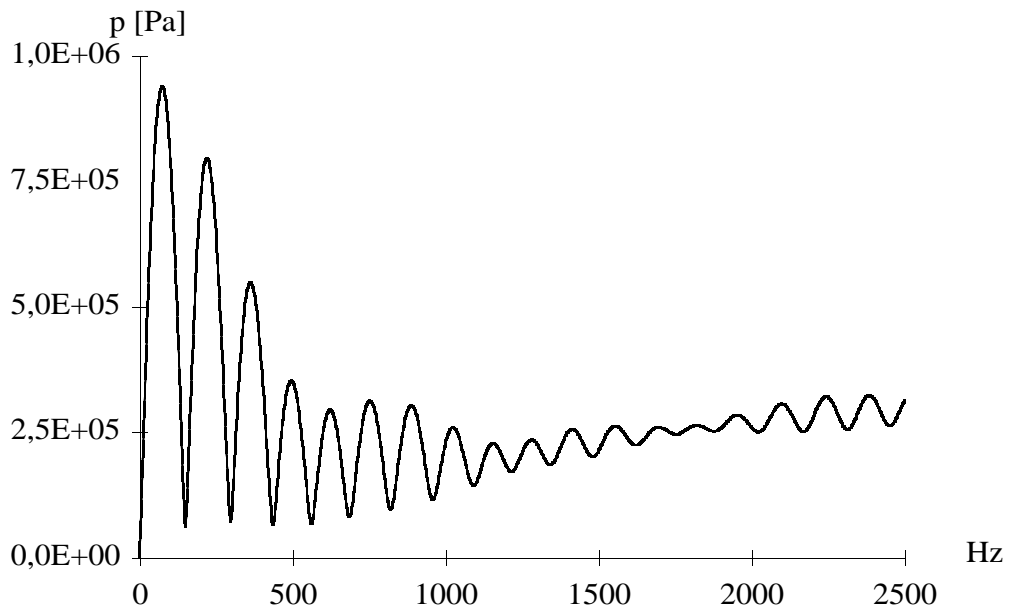


Fig. 1.4.41 Pressió del pavelló 1 discretitzat en quatre trams exponencials amb tub al davant.

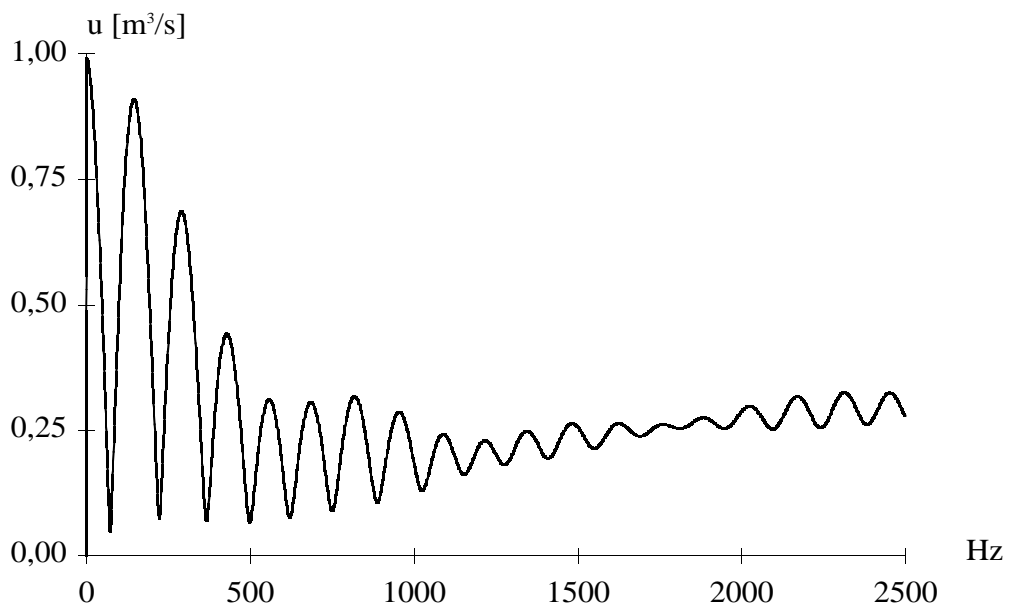


Fig. 1.4.42 Cabal del pavelló 1 discretitzat en quatre trams exponencials amb tub al davant.

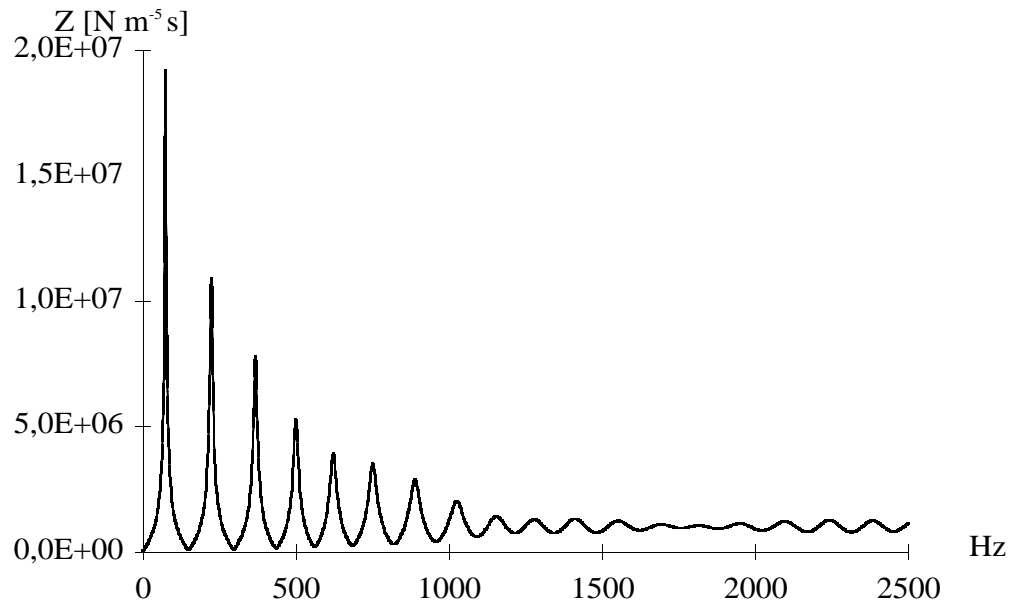


Fig. 1.4.43 Impedància del pavelló 1 discretitzat en quatre trams exponencials amb tub al davant.

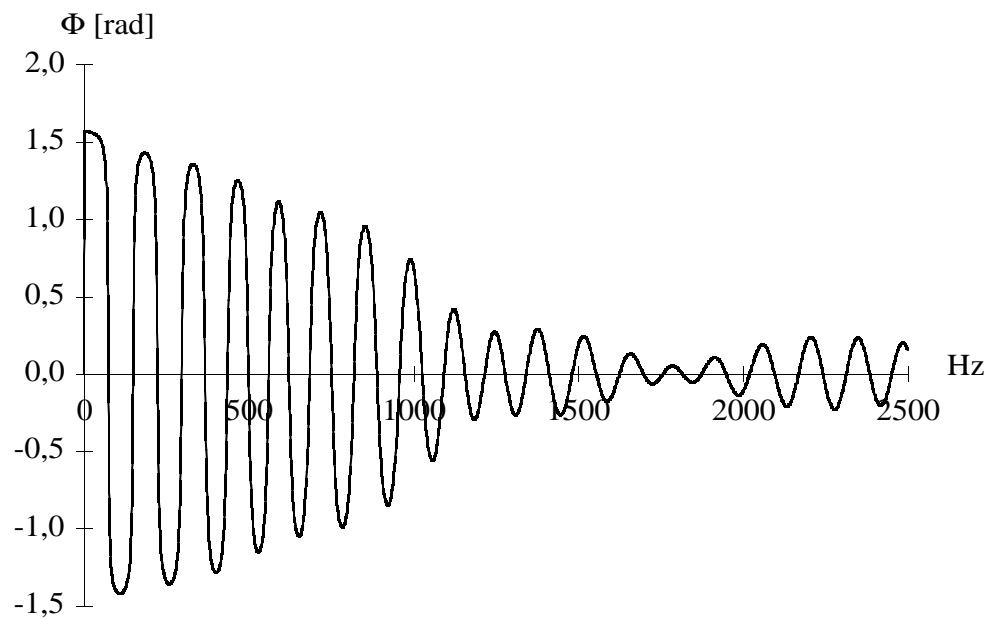


Fig. 1.4.44 Fase de la impedància del pavelló 1 discretitzat en quatre trams exponencials amb tub al davant.

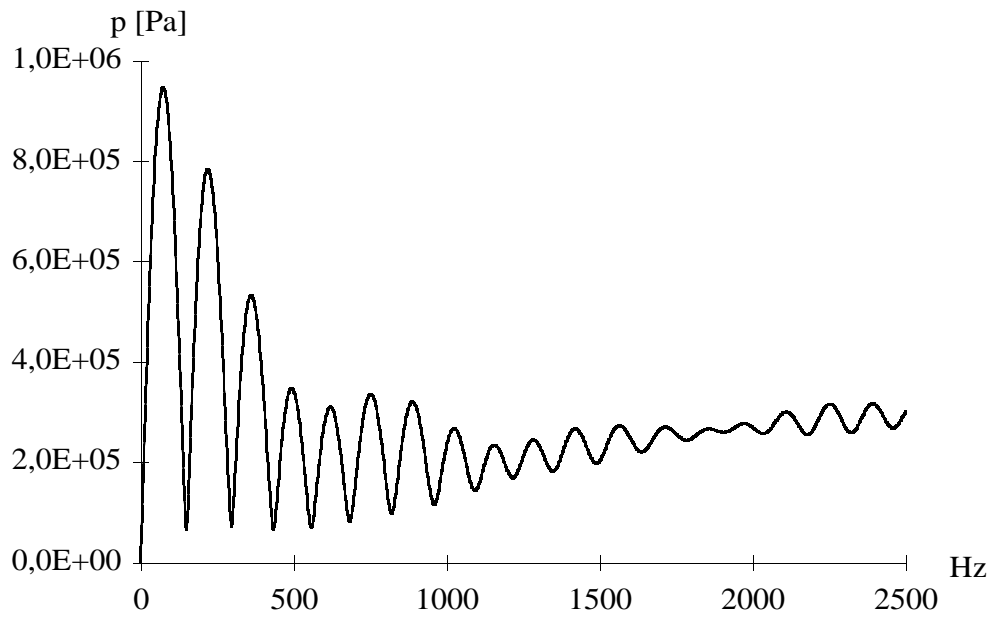


Fig. 1.4.45 Pressió del pavelló 1 discretitzat en sis trams cònics amb tub al davant.

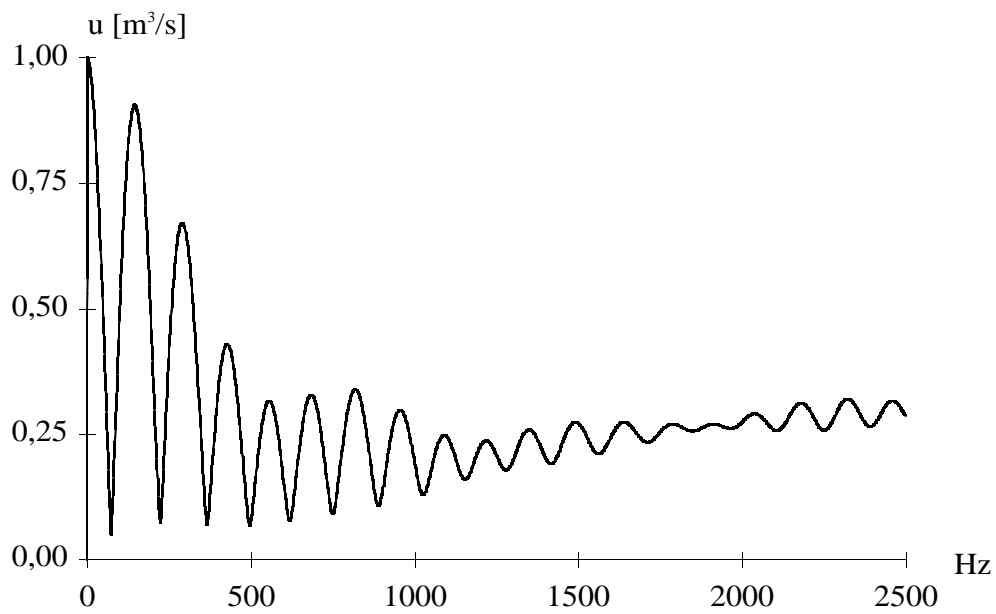


Fig. 1.4.46 Cabal del pavelló 1 discretitzat en sis trams cònics amb tub al davant.

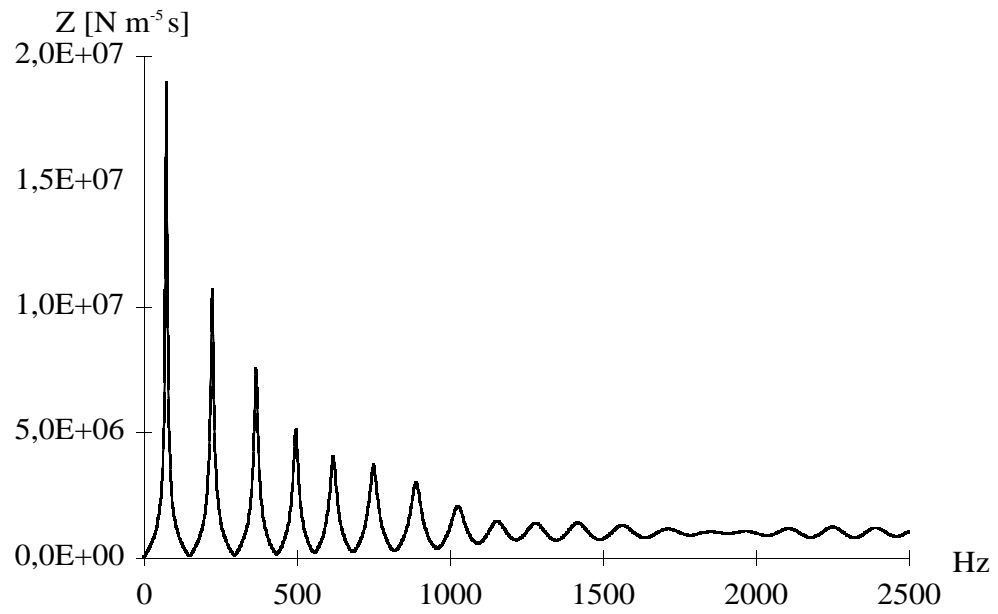


Fig. 1.4.47 Impedància del pavelló 1 discretitzat en sis trams cònics amb tub al davant.

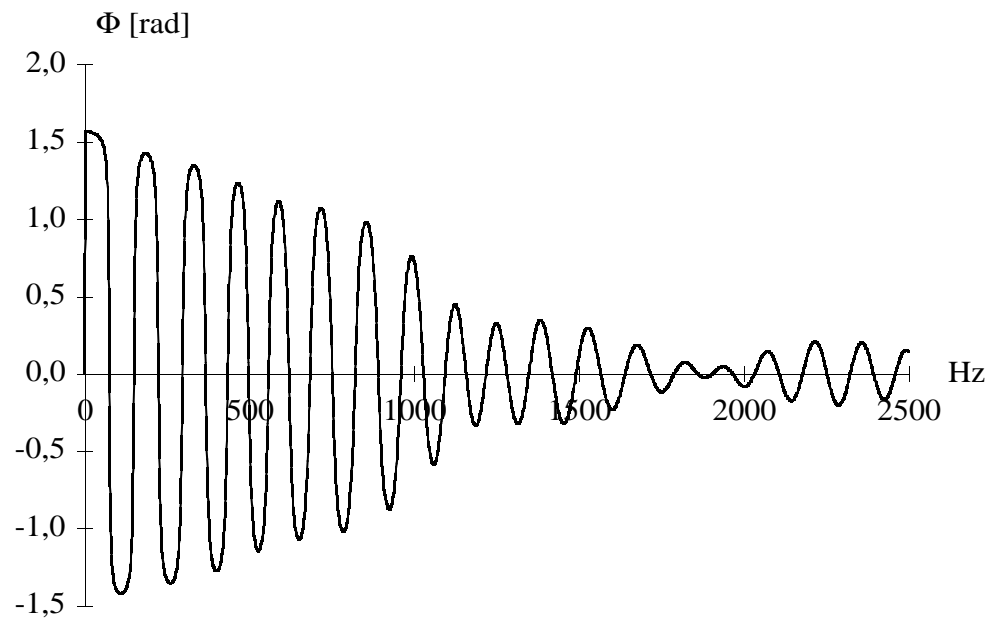


Fig. 1.4.48 Fase de la impedància del pavelló 1 discretitzat en sis trams cònics amb tub al davant.

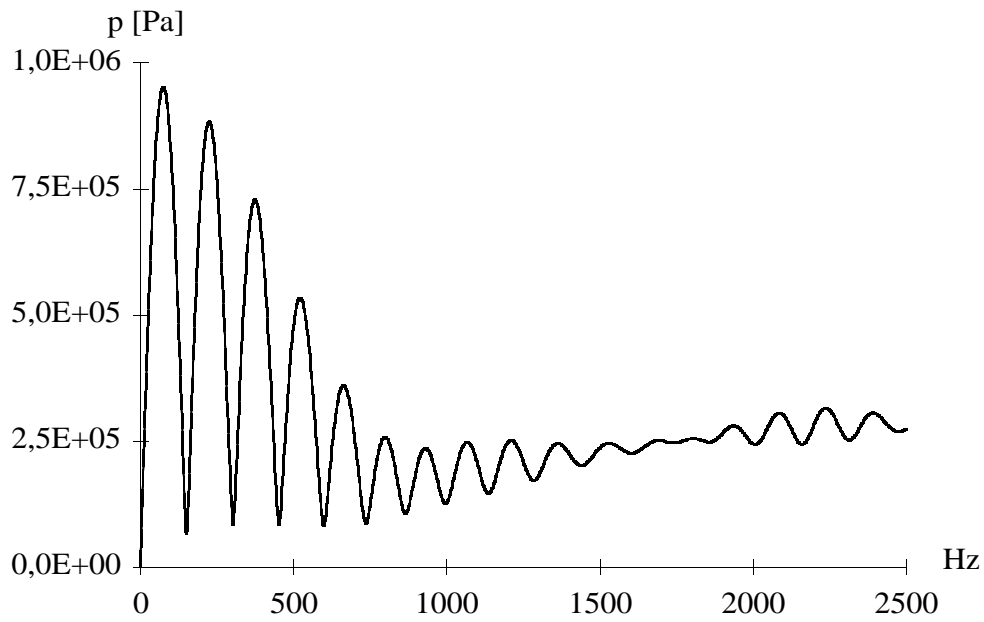


Fig. 1.4.49 Pressió del pavelló 2 discretitzat en quatre trams exponencials amb tub al davant.

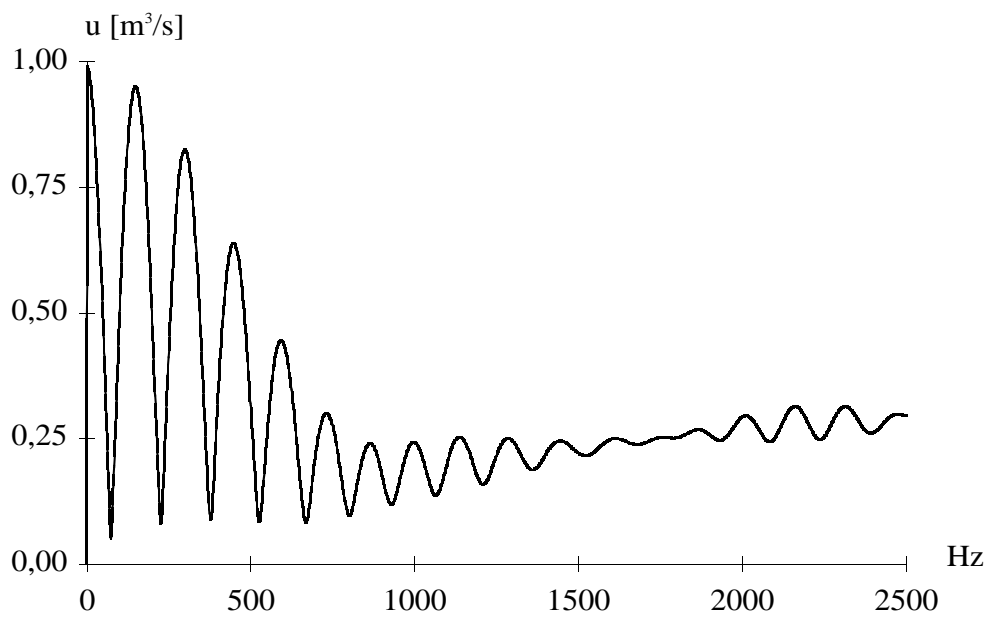


Fig. 1.4.50 Cabal del pavelló 2 discretitzat en quatre trams exponencials amb tub al davant.

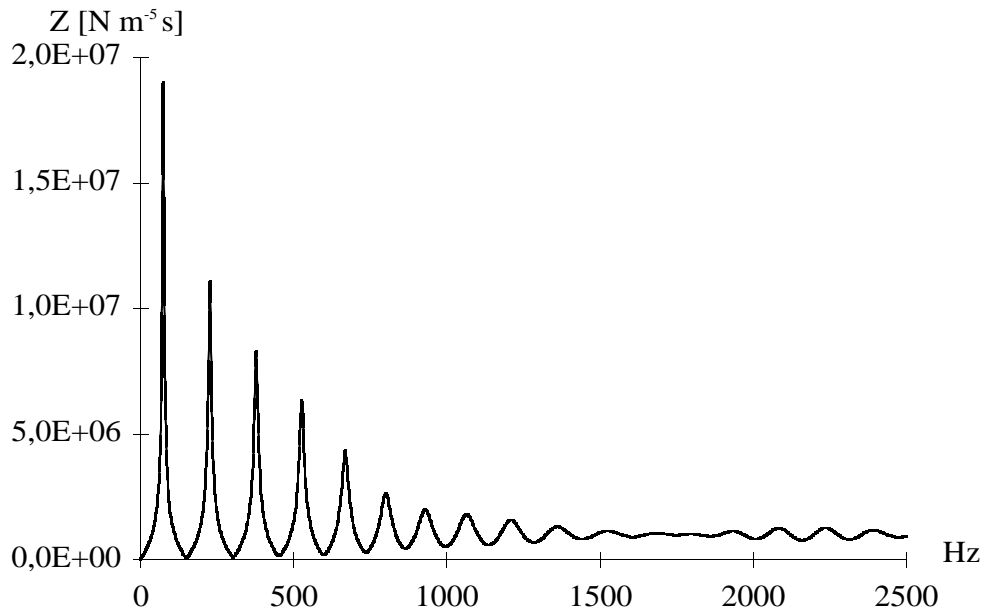


Fig. 1.4.51 Impedància del pavelló 2 discretitzat en quatre trams exponencials amb tub al davant.

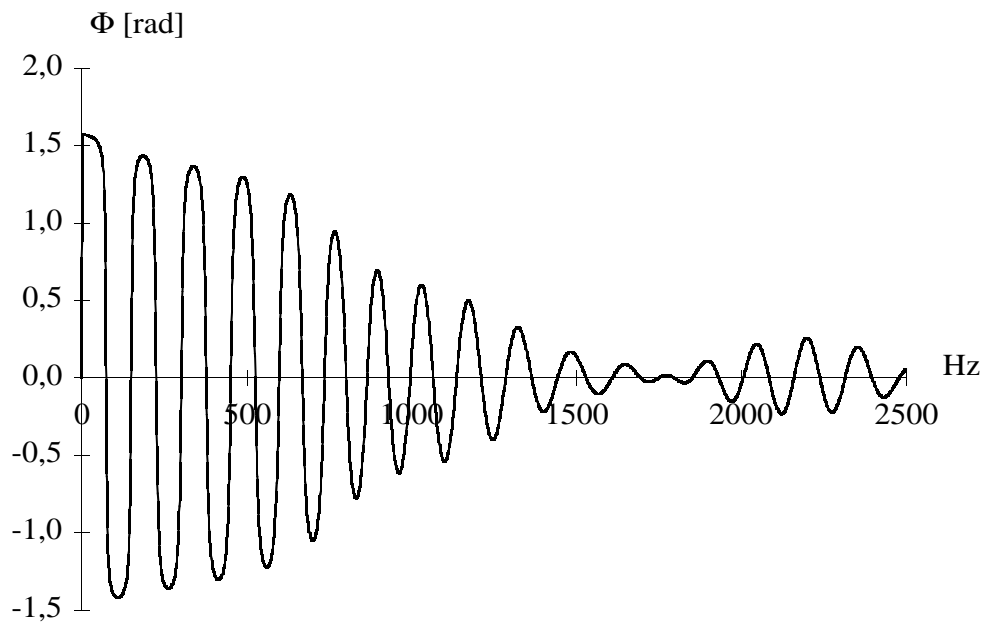


Fig. 1.4.52 Fase de la impedància del pavelló 2 discretitzat en quatre trams exponencials amb tub al davant.

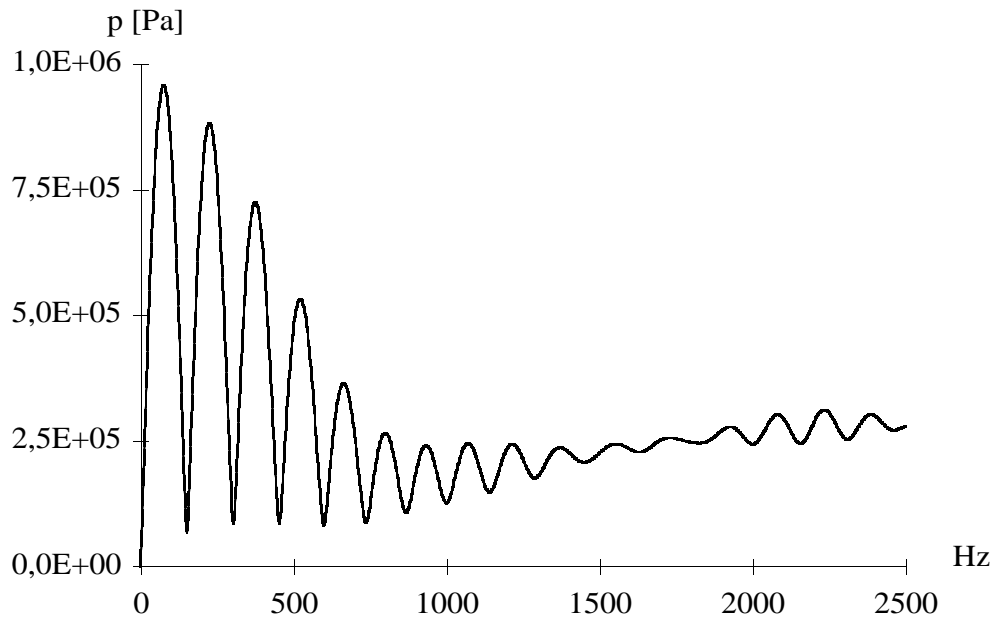


Fig. 1.4.53 Pressió del pavelló 2 discretitzat en sis trams cònics amb tub al davant.

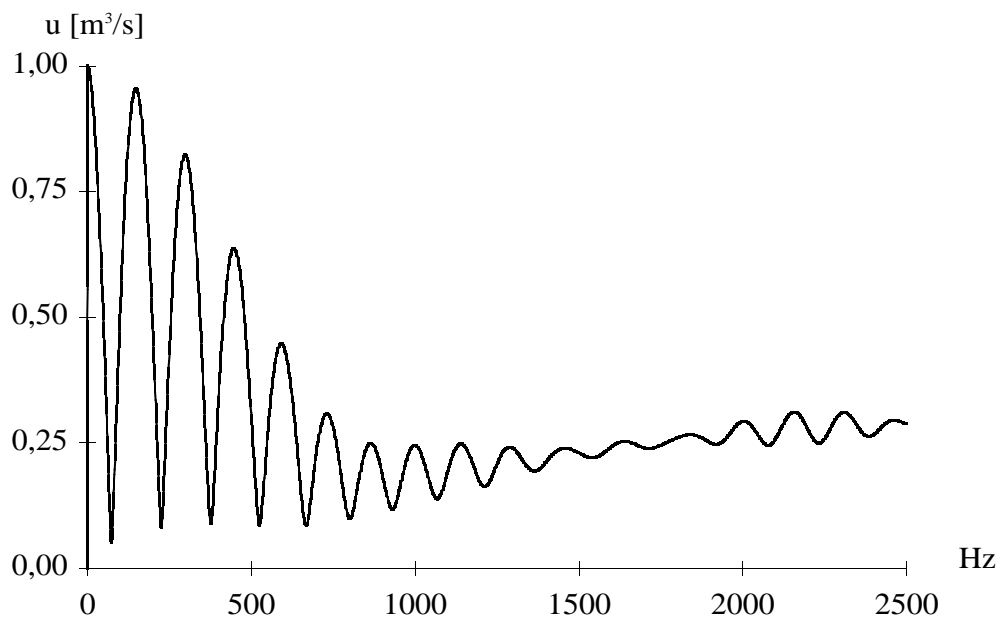


Fig. 1.4.54 Cabal del pavelló 2 discretitzat en sis trams cònics un tub al davant.

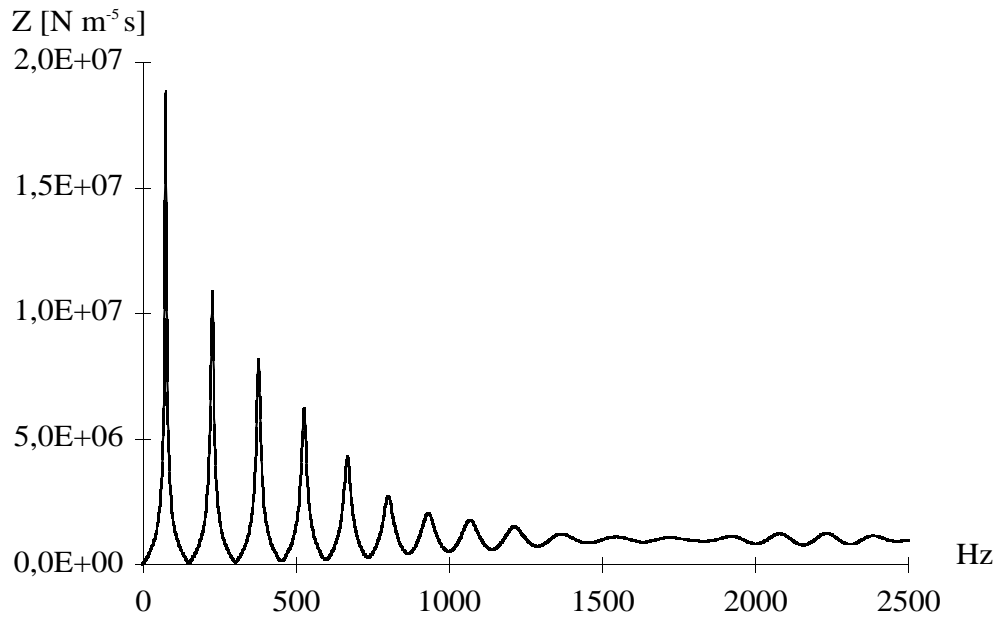


Fig. 1.4.55 Impedància del pavelló 2 discretitzat en sis trams cònics amb tub al davant.

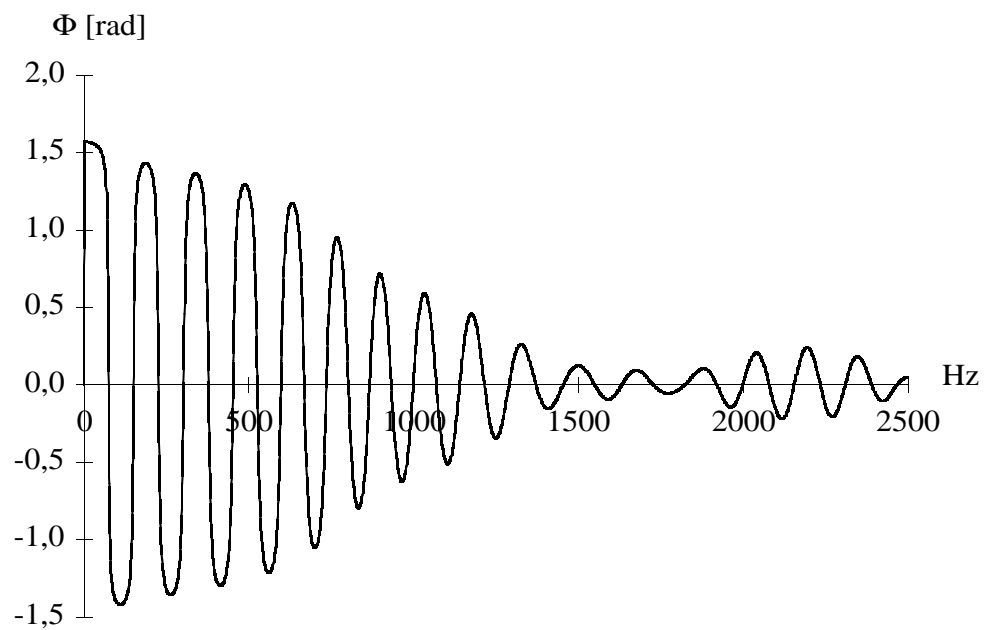


Fig. 1.4.56 Fase de la impedància del pavelló 2 discretitzat en sis trams cònics amb tub al davant.

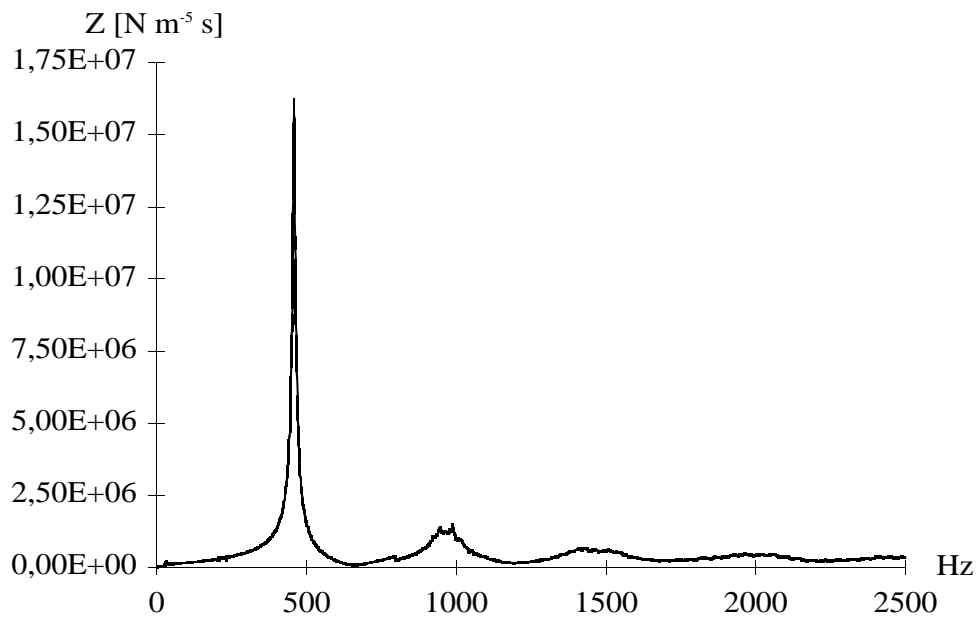


Fig. 1.4.57 Impedància experimental del pavelló 1.

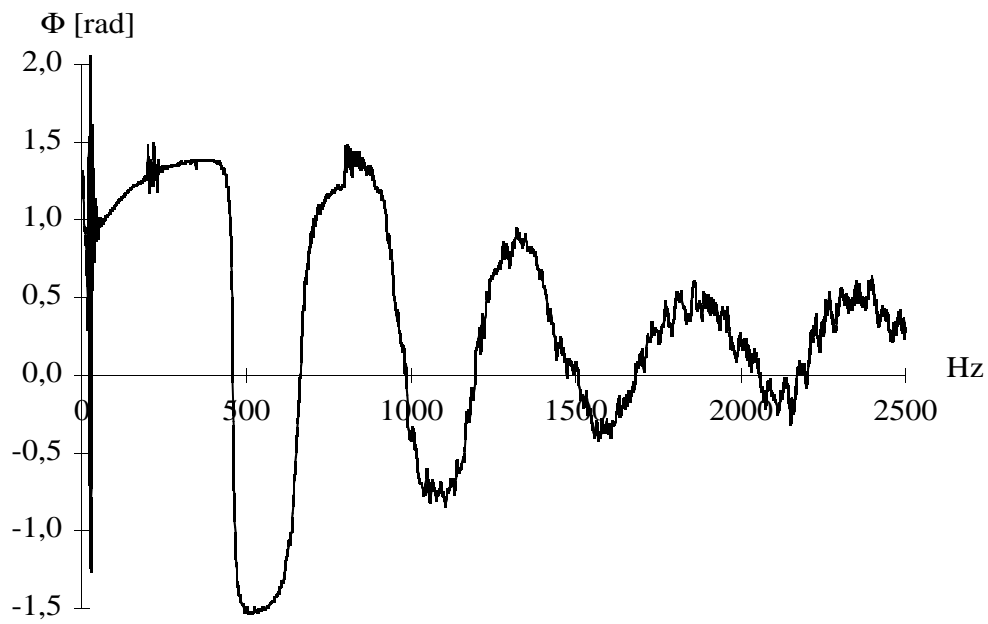


Fig. 1.4.58 Fase de la impedància experimental del pavelló 1.

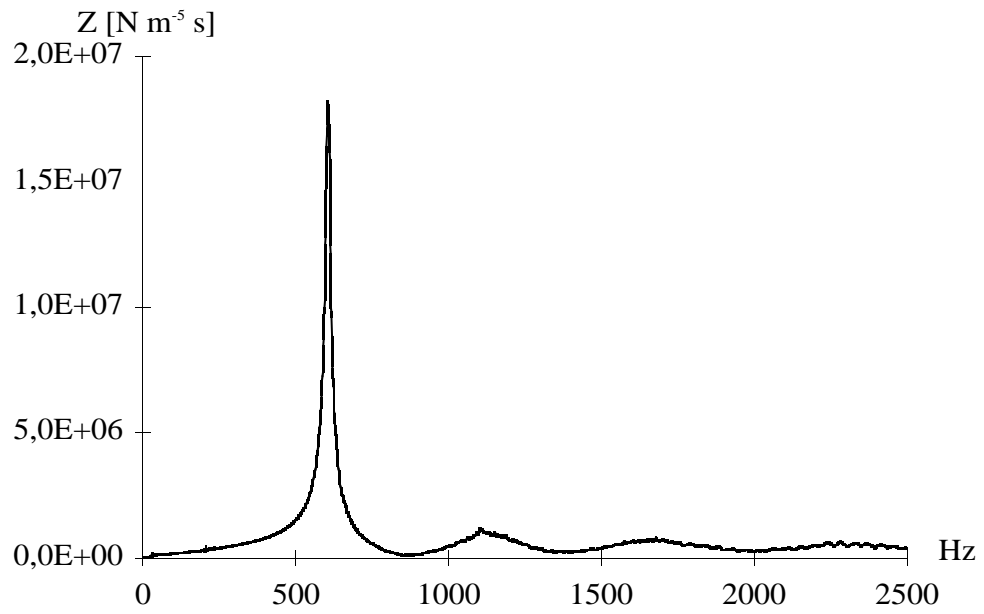


Fig. 1.4.59 Impedància experimental del pavelló 2.

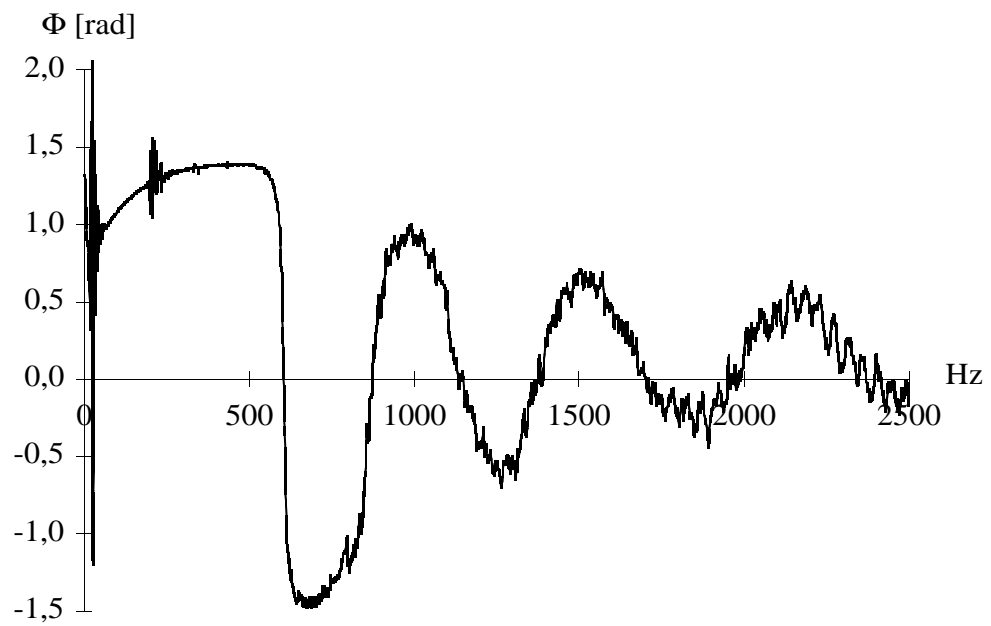


Fig. 1.4.60 Fase de la impedància experimental del pavelló 2.

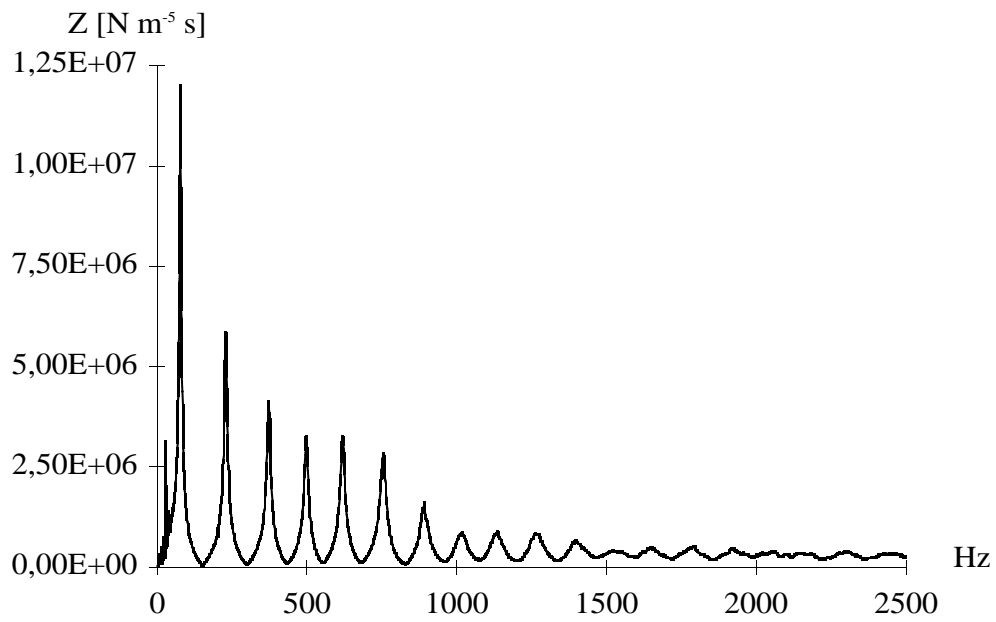


Fig. 1.4.61 Impedància experimental del pavelló 1 amb tub al davant.

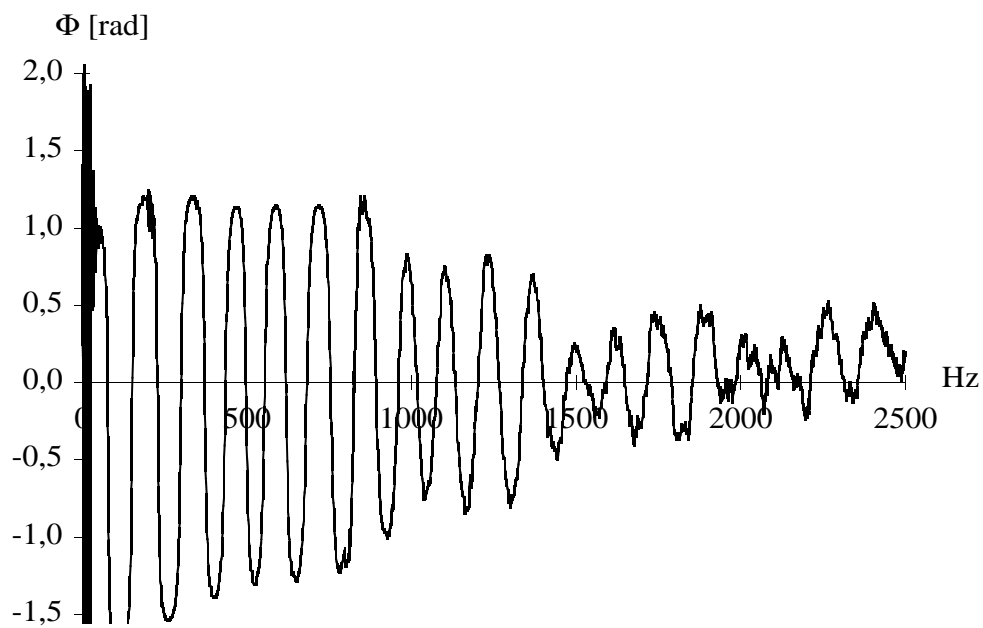


Fig. 1.4.62 Fase de la impedància experimental del pavelló 1 amb tub al davant.

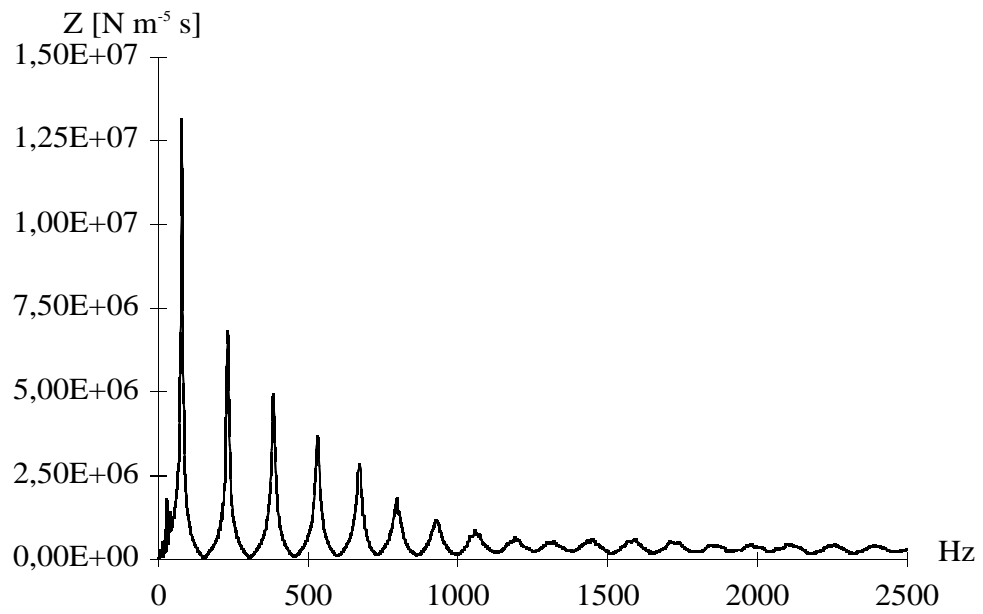


Fig. 1.4.63 Impedància experimental del pavelló 2 amb tub al davant.

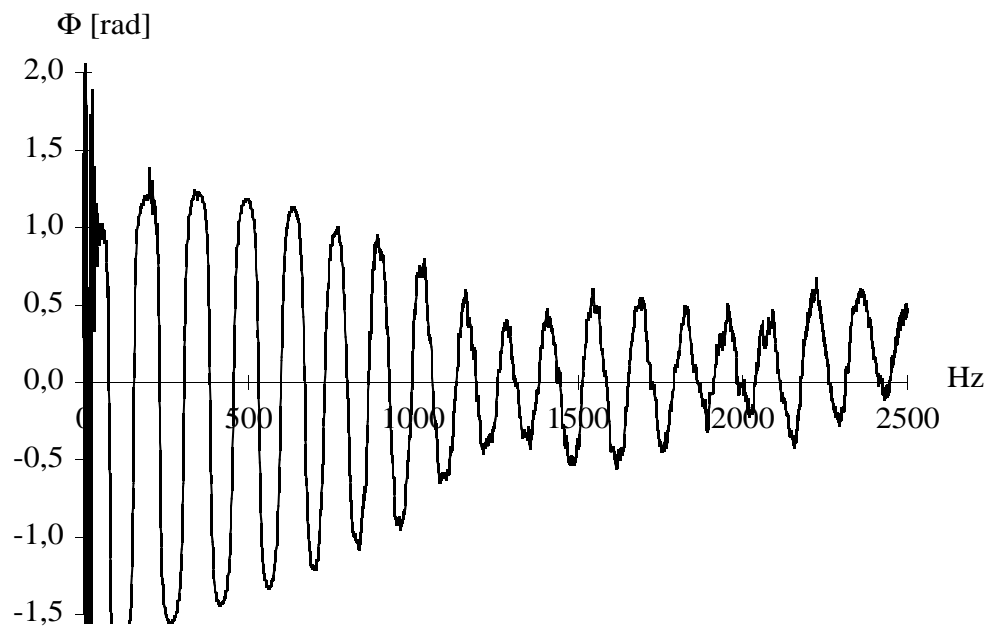


Fig. 1.4.64 Fase de la impedància experimental del pavelló 2 amb tub al davant.

Pic	4 trams exponencials	6 trams cònics	Experimental
1r	471 Hz	463 Hz	459,39 Hz
2n	1017 Hz	1024 Hz	987,03 Hz
3r	1572 Hz	1645 Hz	1508,48 Hz

Taula 1.4.10 Freqüències de ressonància del pavelló 1.

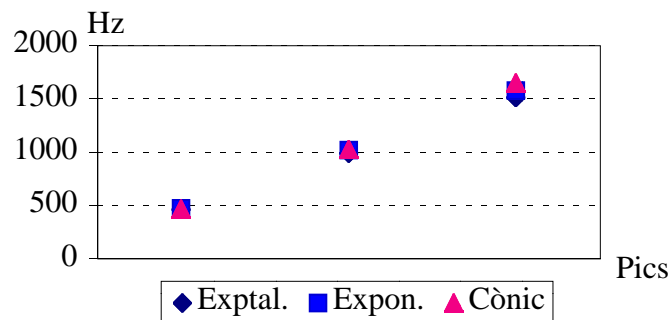


Fig. 1.4.65 Freqüències de ressonància del pavelló 1.

Pic	4 trams exponencials	6 trams cònics	Experimental
1r	617 Hz	612 Hz	606,08 Hz
2n	1248 Hz	1247 Hz	1134,44 Hz
3r	2282 Hz	2254 Hz	1704,10 Hz

Taula 1.4.11 Freqüències de ressonància del pavelló 2.

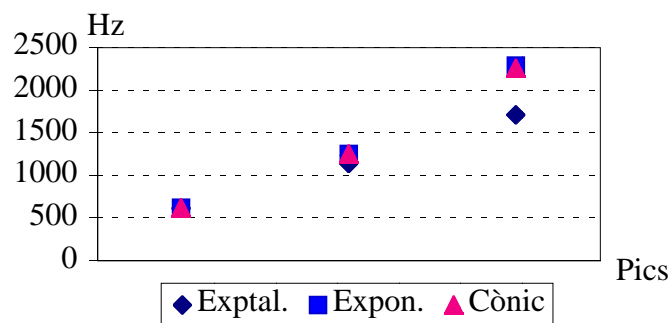


Fig. 1.4.66 Freqüències de ressonància del pavelló 2.

Pic	4 trams exponencials	6 trams cònics
1r	43,2	13,6
2n	51,7	63,7
3r	71,4	150,0

Taula 1.4.12 Diferències entre els pics de ressonància del pavelló 1 en centèsimes de semitò.

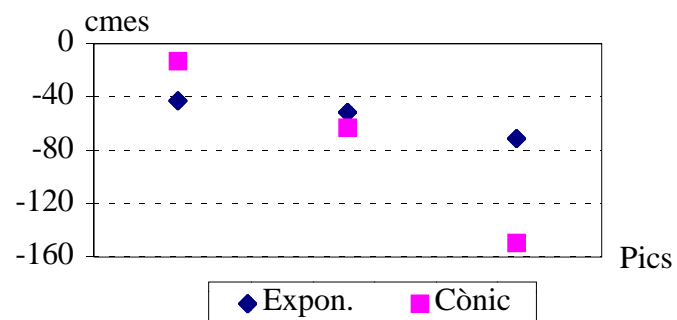


Fig. 1.4.67 Diferències entre els pics de ressonància del pavelló 1 en centèsimes de semitò.

Pic	4 trams exponencials	6 trams cònics
1r	30,9	16,8
2n	165,1	163,7
3r	505,5	484,1

Taula 1.4.13 Diferències entre els pics de ressonància del pavelló 2 en centèsimes de semitò.

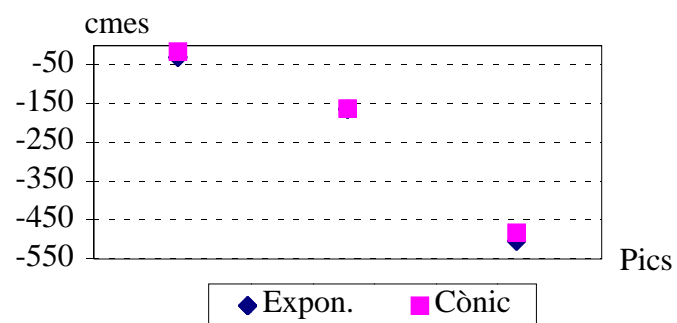


Fig. 1.4.68 Diferències entre els pics de ressonància del pavelló 2 en centèsimes de semitò.

Les discrepàncies entre els valors experimentals i els càlculs es fan evidents a partir de la freqüència de 1500 Hz, considerada com a límit, en aquest cas, per a la nul·la consideració de modes transversals. Les diferències en centèsimes de semitò per als pics d'impedància que es troben per sota de 1500 Hz són prou importants com per poder pensar que la pertorbació produïda a l'instant inicial en el cap d'impedàncies no és plana i en conseqüència els fronts d'ona tampoc no són plans dins del pavelló.

De les Fig. 1.4.43, Fig. 1.4.47, Fig. 1.4.51 i Fig. 1.4.55 es poden obtenir les freqüències de ressonància de la impedància per als dos pavellons amb el tub cilíndric acoblat. Aquestes freqüències es mostren a les Taula 1.4.14 i Taula 1.4.15 i es comparen amb els valors obtinguts experimentalment. Les diferències entre les freqüències dels pics de ressonància, obtingudes amb l'equació 1.4.1, es troben a les Taula 1.4.16 i Taula 1.4.17.

Pic	4 trams exponencials	6 trams cònics	Experimental
1r	74 Hz	74 Hz	78,2 Hz
2n	224 Hz	224 Hz	229,7 Hz
3r	368 Hz	367 Hz	373,0 Hz
4t	500 Hz	497 Hz	498,6 Hz
5è	622 Hz	619 Hz	620,0 Hz
6è	751 Hz	751 Hz	755,8 Hz
7è	889 Hz	890 Hz	893,0 Hz
8è	1025 Hz	1027 Hz	1018,4 Hz
9è	1154 Hz	1155 Hz	1134,2 Hz
10è	1278 Hz	1281 Hz	1267,1 Hz

Taula 1.4.14 Freqüències de ressonància del pavelló 1 amb un tub cilíndric al davant.

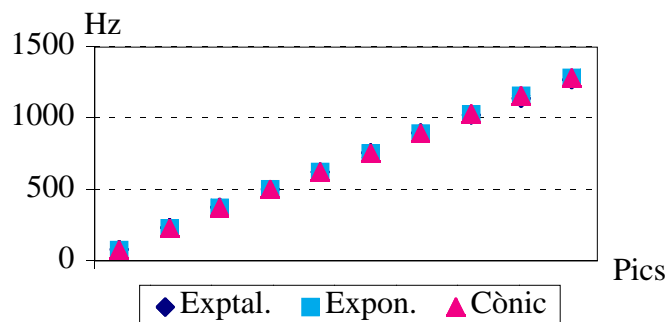


Fig. 1.4.69 Freqüències de ressonància del pavelló 1 amb un tub cilíndric al davant.

Pic	4 trams exponencials	6 trams cònics	Experimental
1r	75 Hz	75 Hz	78,7 Hz
2n	227 Hz	227 Hz	232,2 Hz
3r	378 Hz	378 Hz	384,5 Hz
4t	527 Hz	526 Hz	532,2 Hz
5è	669 Hz	668 Hz	671,8 Hz
6è	802 Hz	802 Hz	800,2 Hz
7è	930 Hz	932 Hz	928,8 Hz
8è	1066 Hz	1068 Hz	1059,3 Hz
9è	1210 Hz	1213 Hz	1191,4 Hz
10è	1362 Hz	1367 Hz	1311,0 Hz

Taula 1.4.15 Freqüències de ressonància del pavelló 2 amb un tub cilíndric al davant.

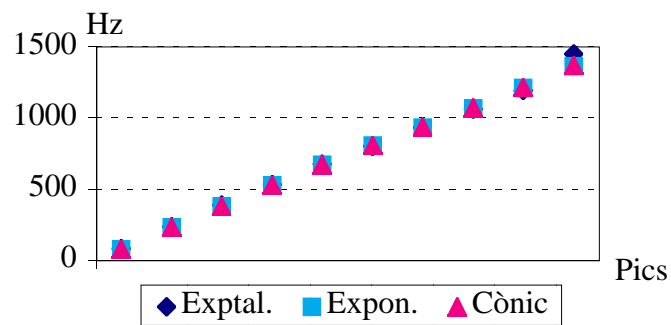


Fig. 1.4.70 Freqüències de ressonància del pavelló 2 amb un tub cilíndric al davant.

Pic	4 trams exponencials	6 trams cònics
1r	94,5	94,5
2n	43,3	43,3
3r	23,6	28,4
4t	4,8	5,7
5è	5,6	2,7
6è	10,9	10,9
7è	7,8	5,9
8è	11,2	14,6
9è	29,9	31,4
10è	14,8	18,9

Taula 1.4.16 Diferències entre els pics de ressonància del pavelló 1 més tub en centèsimes de semitò.

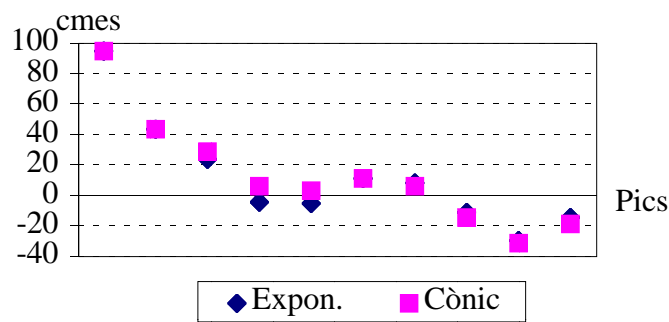


Fig. 1.4.71 Diferències entre els pics de ressonància del pavelló 1 més tub en cmes. de semitò.

Pic	4 trams exponencials	6 trams cònics
1r	82,3	82,3
2n	38,9	38,9
3r	29,4	29,4
4t	16,8	20,1
5è	7,3	9,9
6è	10,9	3,8
7è	3,8	6,0
8è	2,3	14,1
9è	10,9	31,1
10è	26,8	72,4

Taula 1.4.17 Diferències entre els pics de ressonància del pavelló 2 més tub en centèsimes de semitò.

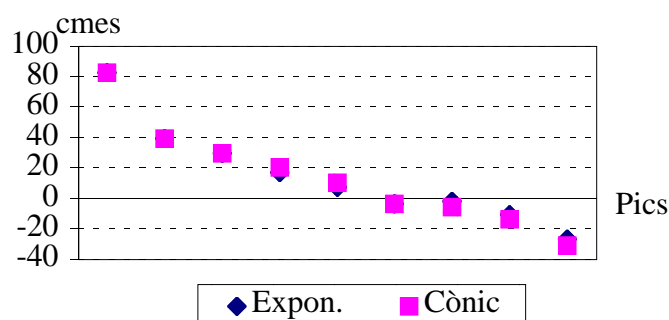


Fig. 1.4.72 Diferències entre els pics de ressonància del pavelló 2 més tub en cmes. de semitò.

Tot i que les discrepàncies són importants s'han reduït molt respecte al cas sense tub cilíndric la qual cosa reforça la idea que en aquest cas el front d'ona quan arriba al pavelló és quasi pla i que per tant l'aproximació de l'equació de Webster és més vàlida que en el cas anterior.

1.5 Càlcul de la resposta impulsional

La resposta impulsional d'un element discret de tub, és a dir de perfil definit per una única equació, pot obtenir-se a partir de la corresponent impedància mitjançant una Transformada de Fourier. El fet d'obtenir-la permetrà observar l'efecte dispersiu típic dels pavellons ja que és en el domini temporal on s'aprecia la dispersió causada per la dependència en freqüència de la velocitat de propagació.

Per poder analitzar el comportament tant en el domini freqüencial com en el temporal d'un element, cal conèixer també les seves condicions d'extrem. Per tal de conèixer la resposta temporal de l'element sense influència d'unes condicions d'extrem determinades, sovint s'assumeixen terminacions anecoiques i es treballa, per tant, amb ones propagatives en un sol sentit. Així poden definir-se una impedància Z_- associada a l'ona que es propaga en el sentit de les x creixents, i una impedància Z_+ , associada a l'ona que ho fa en sentit contrari.

Per a un perfil de tipus Salmon, les impedàncies Z_- i Z_+ que s'obtenen són [Apèndix 1.III]:

$$Z_-(x, \omega) = \frac{j\omega\rho}{jk' + (1/2)\sigma(x)} = \frac{\rho c}{\frac{k'}{k} - j\frac{\sigma(x)}{2k}} \quad i$$

$$Z_+(x, \omega) = -\frac{j\omega\rho}{jk' - (1/2)\sigma(x)} = -\frac{\rho c}{\frac{k'}{k} + j\frac{\sigma(x)}{2k}}$$

on k' ve definida per l'expressió (1.2.3) i $\sigma(x)$ ve definida per l'expressió:

$$\sigma(x) = \frac{1}{S(x)} \left(\frac{dS(x)}{dx} \right), \quad \text{on } S(x) = \text{secció transversal.}$$

Si es considera que $|c^2\omega^{-2}m^{-2}| < 1$, aleshores:

$$k' = \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{m^2} \right]^{1/2} = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{c^2}{\omega^2 m^2} \right]^{1/2} \approx \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\omega m} \right)^2 \right].$$

Aquesta aproximació serà vàlida a partir d'un cert valor mínim de ω i ho serà encara més com més elevada sigui la freqüència. L'efecte dispersiu que es pretén estudiar obtenint la resposta impulsional serà petit, ja que com més elevada és ω més semblant és el valor de $\tilde{c}(\omega)$, definida per l'expressió 1.2.3, al valor de c i per tant més petit serà l'efecte dispersiu. Per

obtenir l'expressió analítica de la resposta impulsional cal fer una transformada de Fourier de la impedància i per realitzar-la és necessari fer una integració en el camp complex. Per poder aplicar el teorema de Cauchy i obtenir el valor de la integral com a suma de residus cal que el grau del numerador sigui inferior al del denominador i per tant cal realitzar l'aproximació malgrat que l'efecte dispersiu quedi minvat. Cal tenir en compte, però, que el valor mínim d'aquesta aproximació coincideix amb el valor de $\omega_{mín}$ corresponent a la freqüència de tall.

Per altra banda, fixat un valor de freqüència com més gran sigui el valor del factor d'escala m més certa serà l'aproximació, però aleshores la curvatura del pavelló augmentarà ràpidament i per tant més fals serà que la pressió es pugui considerar uniforme en una secció transversal. Cal doncs arribar a un compromís per acceptar la validesa d'aquesta aproximació.

Amb aquesta consideració les impedàncies $Z_-(x,\omega)$ i $Z_+(x,\omega)$ vénen donades per:

$$Z_-(x,\omega) = Z_o \left[1 + \frac{-\omega c m^2 \sigma(x) + j c^2}{\omega c m^2 \sigma(x) + j(2\omega^2 m^2 - c^2)} \right] \equiv Z_o \left[1 + \frac{N_-(\omega)}{D_-(\omega)} \right], \quad i$$

$$Z_+(x,\omega) = -Z_o \left[1 - \frac{\omega c m^2 \sigma(x) + j c^2}{\omega c m^2 \sigma(x) - j(2\omega^2 m^2 - c^2)} \right] \equiv -Z_o \left[1 - \frac{N_+(\omega)}{D_+(\omega)} \right].$$

on m és la constant que apareix a l'equació del perfil (1.1.3).

Tant m com $\sigma(x)$ són positives perquè el radi del perfil del pavelló augmenta amb la coordenada x .

Les Transformades de Fourier inverses d'aquestes impedàncies proporcionen les respostes elementals $h_-(t)$ i $h_+(t)$ respectivament [Apèndix 1.III]:

$$h_-(x,t) = Z_o \delta(t) + 2\pi j Z_o \sum \left(\text{Residus en els pols de } \frac{N_-(\omega)}{D_-(\omega)} \right), \quad i$$

$$h_+(x,t) = -Z_o \delta(t) + 2\pi j Z_o \sum \left(\text{Residus en els pols de } \frac{N_+(\omega)}{D_+(\omega)} \right).$$

Els pols de $N_{\mp}(\omega)/D_{\mp}(\omega)$ es troben a les freqüències:

$$N_-(\omega)/D_-(\omega): \quad \omega_1 = j \frac{c}{4} \left(\sigma - \frac{v}{m} \right) \quad i \quad \omega_2 = j \frac{c}{4} \left(\sigma + \frac{v}{m} \right) \quad i$$

$$N_+(\omega)/D_+(\omega): \quad \omega_1 = -j \frac{c}{4} \left(\sigma - \frac{v}{m} \right) \quad i \quad \omega_2 = -j \frac{c}{4} \left(\sigma + \frac{v}{m} \right), \quad \text{amb } v = \sqrt{m^2 \sigma^2 - 8}.$$

Els residus que s'obtenen per a cada una de les funcions són:

$$N_-(\omega) / D_-(\omega): \text{Res}(\omega_2^1) = \pm j \frac{c}{vm} \left\{ 1 - \frac{\sigma m^2}{4} \left(\sigma \mp \frac{v}{m} \right) \right\} e^{\frac{c}{4} \left(\sigma \mp \frac{v}{m} \right) t} \quad i$$

$$N_+(\omega) / D_+(\omega): \text{Res}(\omega_2^1) = \pm j \frac{c}{vm} \left\{ 1 - \frac{\sigma m^2}{4} \left(\sigma \mp \frac{v}{m} \right) \right\} e^{-\frac{c}{4} \left(\sigma \mp \frac{v}{m} \right) t}.$$

És evident que v pot ser real o imaginària i per tant s'obtidran diferents resultats per a les respostes elementals $h_-(t)$ i $h_+(t)$ en funció del valor de v :

v real:

$$h_-(t) = Z_o \left\{ \delta(t) - \frac{2\pi c}{vm} \left[\left(2 - \frac{\sigma^2 m^2}{2} \right) \sinh\left(\frac{cv}{4m}t\right) + \frac{\sigma m v}{2} \cosh\left(\frac{cv}{4m}t\right) \right] e^{-\frac{c\sigma}{4}t} \right\},$$

$$h_+(t) = Z_o \left\{ -\delta(t) + \frac{2\pi c}{vm} \left[\left(2 - \frac{\sigma^2 m^2}{2} \right) \sinh\left(\frac{cv}{4m}t\right) - \frac{\sigma m v}{2} \cosh\left(\frac{cv}{4m}t\right) \right] e^{\frac{c\sigma}{4}t} \right\}.$$

v imaginària: $v = j\sqrt{8 - \lambda^2 m^2} = jv'$

$$h_-(t) = Z_o \left\{ \delta(t) - \frac{2\pi c}{v' m} \left[\left(2 - \frac{\sigma^2 m^2}{2} \right) \sin\left(\frac{cv'}{4m}t\right) + \frac{\sigma m v'}{2} \cos\left(\frac{cv'}{4m}t\right) \right] e^{-\frac{c\sigma}{4}t} \right\},$$

$$h_+(t) = Z_o \left\{ -\delta(t) + \frac{2\pi c}{v' m} \left[\left(2 - \frac{\sigma^2 m^2}{2} \right) \sin\left(\frac{cv'}{4m}t\right) - \frac{\sigma m v'}{2} \cos\left(\frac{cv'}{4m}t\right) \right] e^{\frac{c\sigma}{4}t} \right\}.$$

A l'Apèndix 1.III es mostren els resultats obtinguts per a tubs cilíndrics, cònics i exponencials. Per a l'obtenció dels resultats dels dos primers tipus de tubs no és necessari recórrer a les expressions aproximades, però sí que cal fer-ho en el cas de tubs exponencials. Els resultats obtinguts per a aquests tubs es mostren de la Fig. 1.5.1 a la Fig. 1.5.4. Els gràfics corresponents a $Z_-(\omega)$ i a $Z_+(\omega)$ mostren com fins al valor $\omega_{mín}$ per al qual comença a ser vàlida l'aproximació, 350 Hz, no s'assoleix el valor de la impedància característica, cosa que en els tubs cònics passa a partir de freqüències molt més baixes. Per altra banda, les respostes impulsionalns $h_-(t)$ i $h_+(t)$ es corresponen amb una oscil·lació d'amplitud decreixent i una

d'amplitud creixent respectivament, cosa que les diferencia dels tubs cònics en els quals només es tenen les funcions exponencials, també decreixents i creixents.

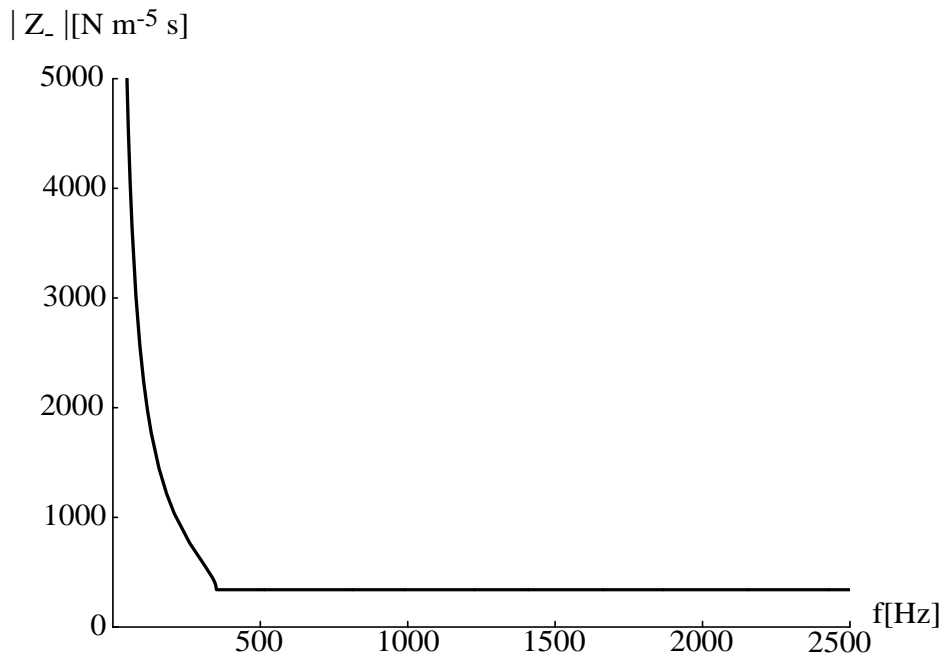


Fig. 1.5.1 Representació de $Z_-(\omega)$ per a un tub exponencial.

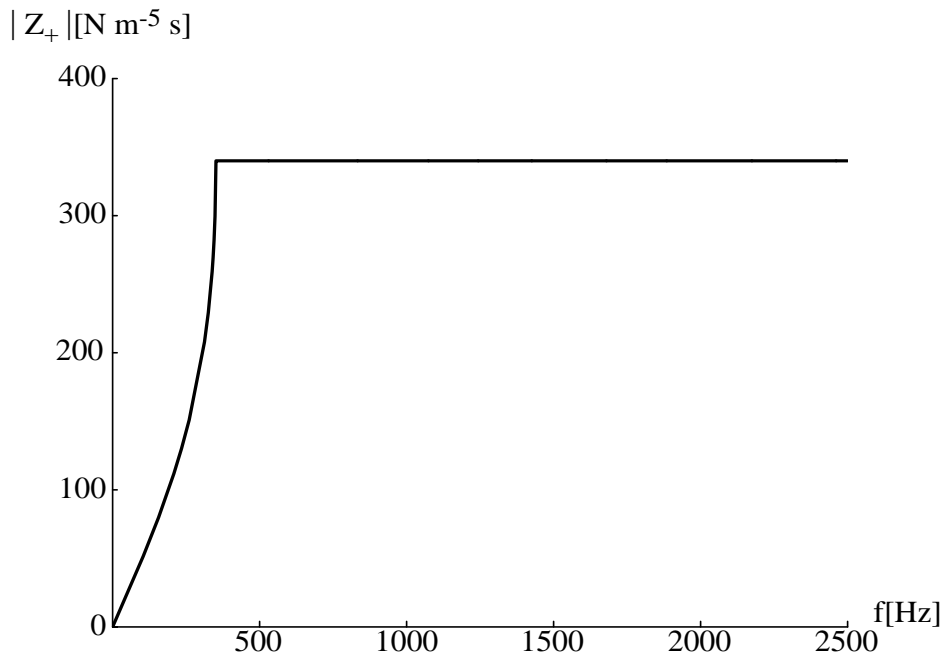


Fig. 1.5.2 Representació de $Z_+(\omega)$ per a un tub exponencial.

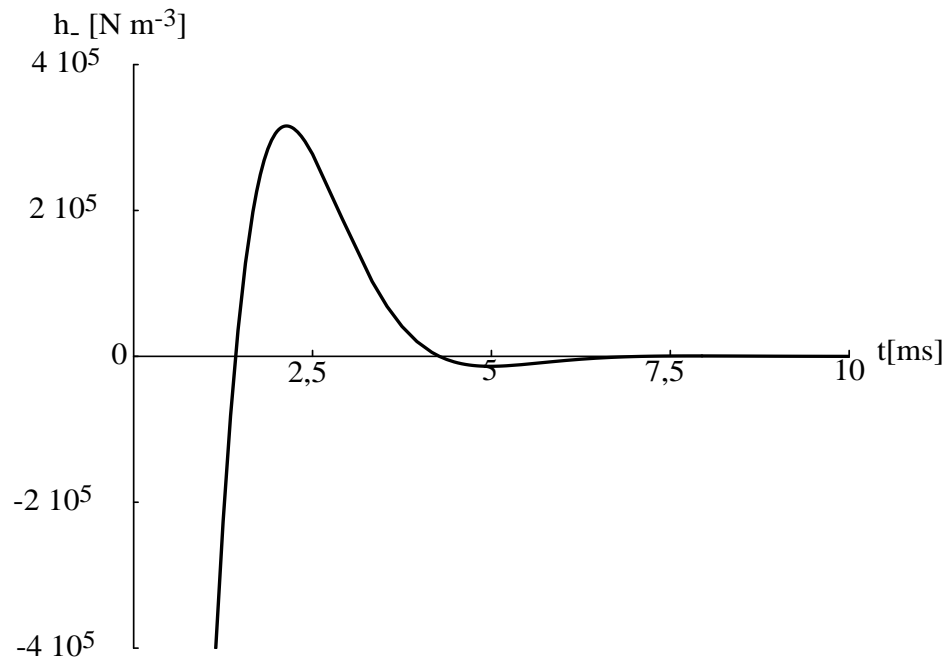


Fig. 1.5.3 Representació de $h_-(t)$ per a un tub exponencial.

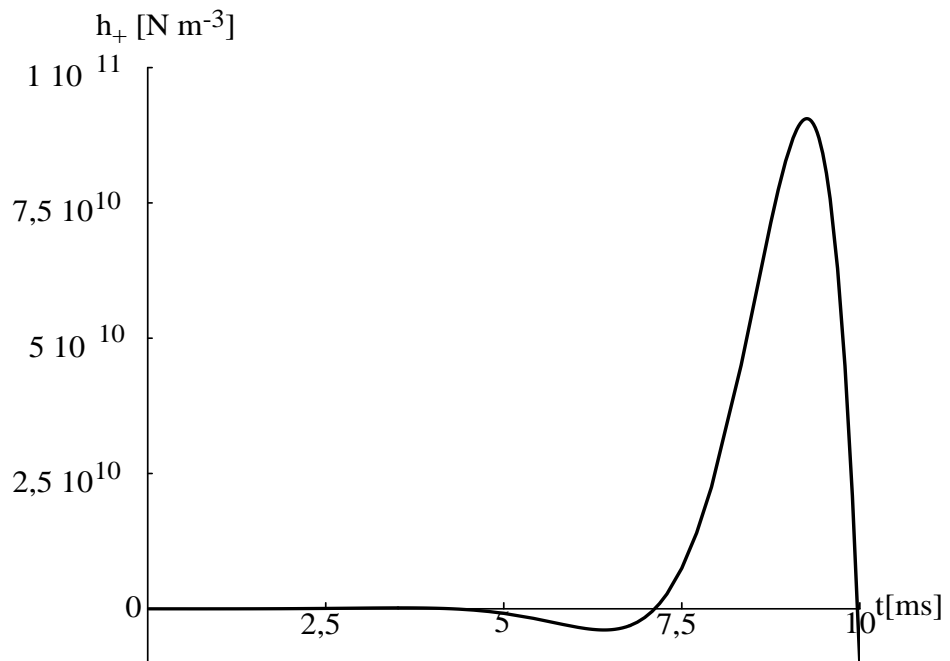


Fig. 1.5.4 Representació de $h_+(t)$ per a un tub exponencial.

1.6 Validesa dels resultats

En ser l'equació de Webster una equació aproximada, és evident que la impedància i la resposta impulsional que s'obtenen només són vàlides sota un conjunt de restriccions. En primer lloc, existeixen les condicions de tipus físic que limiten la utilització d'una solució uniparamètrica a l'interior d'un perfil de curvatura variable [Pierce, 1991], ja que el canvi fraccional de pressió sobre la secció transversal del pavelló ha de ser petit per poder considerar nul·la la propagació de modes transversals. Aquestes condicions limiten la rapidesa del canvi de conicitat del perfil en funció de la longitud del pavelló que es considera, és a dir limiten el valor de m , la qual cosa pot donar lloc a pavellons de perfil estrany no compatible amb el dels instruments musicals de vent.

Per altra banda, com que el radi de sortida màxim queda limitat a ser de l'ordre d'una tercera part de la longitud d'ona per tal de poder considerar els modes transversals com evanescents [Munjál, 1987], els resultats que s'obtinguin només seran vàlids fins a una certa freqüència, aproximadament 1500 Hz.

A més, els resultats obtinguts són vàlids a partir d'un cert valor de la freqüència, cosa que també limita les dimensions del pavelló, és a dir el radi d'entrada, la llargada i el radi de sortida. Aquest fet és conseqüència tant de la condició d'exigir que hi hagi propagació d'ones, $\tilde{c}(\omega)$ ha de ser real, com de l'aproximació feta en el càlcul de les respostes impulsional $h_-(t)$ i $h_+(t)$, $|c^2\omega^{-2}m^{-2}| < 1$. Tant en un cas com en l'altre la freqüència ha de complir que $f > c/2\pi m$. Per als pavellons considerats la freqüència de tall mínima es situa, aproximadament, en els 350 Hz ja que m és de l'ordre de 155 mm.

Així doncs, les aproximacions fetes en l'equació de Webster condicionen el rang de freqüències dins del qual es pot considerar que la propagació d'ones és uniparamètrica. Aquest rang variarà d'un pavelló a un altre en funció de les seves dimensions geomètriques.