

2 TRACTAMENT NUMÈRIC DEL PAVELLÓ AMB UN MODEL UNIPARAMÈTRIC. EQUACIÓ CH

2.1 Introducció

L'obtenció d'una solució analítica exacta per a la propagació d'ones dins de tubs amb simetria de revolució i perfil qualsevol només és possible per als casos simples de tubs cilíndrics, cònics i hiperbòlics [Freehafer, 1940]. Per al cas general s'han proposat moltes formulacions aproximades. Així es pot triar entre l'equació de Webster, estudiada al capítol 1, la de Benade i Jansson [Benade, 1974], o la més recent d'Agulló, Barjau i Keefe [Agulló, 1999]. Malgrat que els resultats que s'obtenen quan s'apliquen al mateix pavelló són bastant diferents, aquestes tres equacions parteixen de la hipòtesi de l'existència de superfícies equipotencials de geometria constant (independent de la freqüència), a costa d'acceptar una solució unidimensional per a la propagació.

No obstant, el problema de la propagació dins dels pavellons és necessàriament bidimensional i només la geometria cilíndrica i la geometria cònica accepten solucions exactes on els modes transversals no hi són presents.

En aquest capítol s'estudien les hipòtesis que permetran establir un nou model aproximat, que serà estudiat en el capítol 3, basat en l'assumpció que, en la propagació d'ones dins dels pavellons, existeixen superfícies de geometria invariant al llarg del temps que són perpendiculars al perfil i a l'eix del pavelló.

La interpretació de les superfícies de geometria constant és diferent, en funció de les hipòtesis físiques que s'hi estableixin: hipòtesi equipotencial, hipòtesi cinemàtica, explicades a continuació, o bé hipòtesi "cònica diferencial", que s'explicarà en el proper capítol.

2.2 Hipòtesis prèvies

La proposta del nou model sembla raonable ja que per al casos coneguts de tubs cilíndrics i cònics aquestes superfícies existeixen i són equipotencials, perpendiculars al perfil i de geometria ben definida. Efectivament, si les parets dels tubs són rígides, el component de velocitat normal al perfil ha de ser nul: $v_n=0$. Però com que $v_n \propto \nabla p$, en règim freqüencial, i

∇p és perpendicular a les superfícies equipotencials aleshores aquestes ho seran al perfil. Així en el cas dels tubs cilíndrics aquestes superfícies equipotencials i de pressió uniforme són planes i en el cas dels tubs cònics són esfèriques, per això es parla d'ones planes i d'ones esfèriques respectivament. En aquests dos casos les superfícies equipotencials són, també, superfícies de mòdul de velocitat constant i per tant totes les partícules que es troben en un cert instant sobre una d'aquestes superfícies es trobaran al cap d'un interval de temps dt sobre una altra superfície, la mateixa per a totes les partícules. Així doncs, aquestes superfícies equipotencials es poden interpretar també com a superfícies cinemàtiques en les quals totes les partícules tenen el mateix mòdul de velocitat.

Sembla, doncs, raonable establir que per a la propagació dins dels pavellons també existiran unes superfícies de geometria constant perpendiculars al perfil tot i que, en principi, no seran ni equipotencials ni de mòdul de velocitat constant. És per aquest fet que, de moment, només es defineixen aquestes superfícies, $S(q_1)$, de manera geomètrica: axisimètriques i ortogonals al perfil i a l'eix del pavelló.

2.2.1 Hipòtesi equipotencial

En aquesta hipòtesi es suposa que sobre cada superfície $S(q_1)$, axisimètrica i perpendicular al perfil i a l'eix del pavelló, el potencial de velocitat és constant, la qual cosa implica que la pressió sobre ella és uniforme ja que la pressió és $\partial\Phi/\partial t$. En conseqüència, les línies de q_2 constant (on q_2 és la coordenada longitudinal i ortogonal a q_1) coincideixen amb les línies de corrent (Fig. 2.2.1).

Per altra banda, les superfícies $S(q_1)$ es poden triar de manera que siguin “off-set”, és a dir que el gruix entre dues sigui constant, com en el cas dels tubs cilíndrics i cònics, o que no siguin “off-set”, amb la qual cosa el gruix entre dues superfícies serà variable.

Si es té en compte l'equació de Newton:

$$\rho_o \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\nabla p \quad \text{i es considera que } |\nabla p| = \frac{p(q_1 + dq_1) - p(q_1)}{d\sigma(q_1, q_2)},$$

on $d\sigma(q_1, q_2)$ és la distància entre les superfícies $S(q_1)$ i $S(q_1 + dq_1)$ sobre la línia q_2 , la distribució de mòduls de velocitat resulta ser inversament proporcional a $d\sigma(q_1, q_2)$:

$$\bar{v}(q_1, q_2) \propto \frac{p(q_1 + dq_1) - p(q_1)}{d\sigma(q_1, q_2)} \bar{e}_v, \quad \Rightarrow \quad |\bar{v}(q_1, q_2)| \propto \frac{1}{d\sigma(q_1, q_2)}$$

i es procedeix a la seva integració dins del volum tancat per les superfícies $S(q_1)$ i $S(q_1+dq_1)$. Si es té en compte que $d\sigma(q_1, q_2) = f(q_1, q_2) dq_1$, on $f(q_1, q_2)$ és una funció del perfil i, en principi, de q_1 i q_2 s'obté l'equació d'ona [Apèndix 2.I]:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{A(q)f(q)} \frac{\partial}{\partial q} \left[I(q) \frac{\partial p}{\partial q} \right], \quad (2.2.1)$$

on $A(q)$ és l'àrea de $S(q)$ i $I(q)$ és funció del perfil i de q i ve donada per l'expressió:

$$I(q) = \int_{S(q)} \frac{dA_q(\varphi)}{d\sigma_q(\varphi)} dq.$$

Aquesta equació és unidimensional i si la hipòtesi que la geometria de $S(q)$ és constant és vàlida i la tria de la coordenada q és bona és una equació d'ona exacta. És l'equació CH.

A partir de l'equació 2.2.1 es recupera l'equació de propagació d'ones en tub cilíndric si es considera $S(q)$ plans i $f(q)$ la funció unitària. En aquest cas el valor de $I(q)$ és $A(q)$ i si es té en compte que $A(q)$ no depèn de la coordenada q l'equació que s'obté és:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial q^2}, \text{ equació que coincideix amb la de la propagació en tubs cilíndrics.}$$

Anàlogament, si es trien $S(q)$ esferes, $f(q)$ la funció unitària i com a coordenada q es pren la distància r al centre de l'esfera es recupera l'equació de la propagació dins de tubs cònics. En aquest cas el valor de la integral $I(r)$ és $A(r)$ i en conseqüència l'equació s'obté és:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2}, \text{ equació que coincideix amb la de la propagació en tubs cònics.}$$

En el cas de prendre $S(q)$ com plans i $f(q)$ com la funció unitària, essent $A(q)$ variable, es recupera l'equació de Webster, ja que el valor de $I(q)$ és ara $A(q)$. En aquest cas el volum d'integració de l'equació d'ona correspon a un cilindre de base $A(q)$ i alçada dq i s'obté:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{A(q)} \frac{\partial}{\partial q} \left[A(q) \frac{\partial p}{\partial q} \right], \text{ que és l'equació de Webster.}$$

Si es pren com a coordenada q la longitud s recorreguda sobre el perfil del pavelló i com a superfícies $S(q)$ es trien esferes, l'equació que s'obté és la que Keefe et al. anomenen SH (Spherical Horn equation):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{A(s)(1+\alpha)} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{A(s) \ln(1+2\alpha)}{2\alpha} \frac{\partial p}{\partial s} \right], \text{ on } \alpha \text{ ve donada per l'expressió:}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{yy''}{y'^2} \cos\theta(1 - \cos\theta), \text{ essent } y \text{ l'equació del perfil del pavelló.}$$

En aquest cas $I(s) = \frac{A(s)}{2\alpha} \ln(1+2\alpha)$.

Anàlogament si es trien $S(q)$ esferes i com a coordenada q la coordenada z horitzontal del punt de tall de $S(q)$ i l'eix horitzontal es recupera la segona versió de l'equació SH:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1+2\alpha}{A(z)(1+\alpha)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{A(z)(1+2\alpha) \ln(1+2\alpha)}{2\alpha} \frac{\partial p}{\partial z} \right], \text{ ja que en aquest cas}$$

$$I(z) = \frac{1+2\alpha}{2\alpha} A(z) \ln(1+2\alpha).$$

El problema de la hipòtesi d'equipotencialitat radica en què la majoria de vegades l'equació 2.2.1 no té una solució analítica i que la hipòtesi que la geometria de les superfícies $S(q)$ és constant és vàlida només en dos casos: el cilíndric i el cònic. En efecte, si es té en compte l'equació de Helmholtz:

$$\Delta p + k^2 p = 0.$$

Si s'escullen unes coordenades qualssevol q_1, q_2 i es fa la hipòtesi que la pressió només depèn de q_1 aquesta equació es reescriu:

$$\left(\frac{1}{f(q_1, q_2)} \right)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial q_1^2} + F(q_1, q_2) \frac{\partial p}{\partial q_1} + k^2 p = 0,$$

on $f(q_1, q_2)$ i $F(q_1, q_2)$ depenen de la tria de coordenades feta però si es pretén que la pressió sigui només funció de la coordenada q_1 per a qualsevol valor de k , aleshores $f(q_1, q_2)$ ha de ser també només funció de q_1 i en conseqüència $S(q_1)$ serà paral·lela a $S(q_1 + dq_1)$. Això només passa per als casos en què $S(q_1)$ són superfícies "off-set", com en el cas cilíndric i cònic.

. Integració numèrica de l'equació d'ona CH

L'equació CH particularitzada a un tipus concret de pavelló pot ser integrada numèricament. Per tal de poder comparar els resultats de la integració amb els experimentals cal passar l'equació al domini freqüencial ja que les mesures experimentals de les quals es disposa són en aquest domini.

Per altra banda, cal particularitzar l'equació a algun tipus concret de pavelló. Si es trien pavellons exponencials descrits per $y(z) = a e^{-d(z-L)}$ i es treballa amb la segona versió de l'equació SH descrita anteriorment, s'obté l'equació:

$$\frac{d^2 \hat{p}(z)}{dz^2} = A(z) \frac{d\hat{p}(z)}{dz} + B(z) \hat{p}(z), \text{ on}$$

$$A(z) = 2d + \left(\frac{2 \cos \theta - \cos^2 \theta - 1}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} + \frac{\sin \theta (1 - 2 \cos \theta)}{1 + \cos \theta - \cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta (2 \cos \theta - 1)}{\cos \theta - \cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta (1 - 2 \cos \theta)}{(1 + \cos \theta - \cos^2 \theta) \ln(1 + \cos \theta - \cos^2 \theta)} \right) \frac{d\theta}{dz}$$

$$B(z) = \frac{(\cos^2 \theta - \cos \theta) \left(1 + (1/2) \cos \theta - (1/2) \cos^2 \theta \right)}{(1 + \cos \theta - \cos^2 \theta) \ln(1 + \cos \theta - \cos^2 \theta)} \frac{\omega^2}{c^2}, \text{ amb}$$

$$\theta = \arctan(-a d e^{-b(z-L)}).$$

Aquesta equació s'ha aplicat als pavellons de tenora estudiats al capítol 1 (Fig.1.4.23 i Fig.1.4.24). La integració numèrica s'ha realitzat amb l'ajut del programa *Mathematica* que empra un algoritme adaptatiu que subdivideix l'interval d'integració si és necessari. Els resultats de la integració, $\hat{p}(z)$ i $\hat{u}(z)$, permeten obtenir la impedància a l'entrada del pavelló. Els resultats obtinguts són els mostrats a les Fig. 2.2.2 i Fig. 2.2.3. Les condicions de contorn emprades en la integració numèrica han estat de cabal unitari i pressió coincident amb la impedància d'extrem obert a l'extrem de sortida del pavelló. A partir dels pics de la corba d'impedància es poden obtenir les freqüències de ressonància per a ambdós pavellons i també la desviació respecte del valor experimental, en centèsimes de semitò. Aquests resultats es troben a les Taula 2.2.1 i Taula 2.2.2.

Pic	Calculada	Experimental	Desviació (cmes)
1r	382 Hz	459,39 Hz	319,38
2n	1080 Hz	987,03 Hz	155,84

Taula 2.2.1 Ressonàncies del pavelló 1 obtingudes amb l'equació SH.

Pic	Calculada	Experimental	Desviació (cmes)
1r	484 Hz	606,08 Hz	389,40
2n	1355 Hz	1134,44 Hz	307,56

Taula 2.2.2 Ressonàncies del pavelló 2 obtingudes amb l'equació SH.

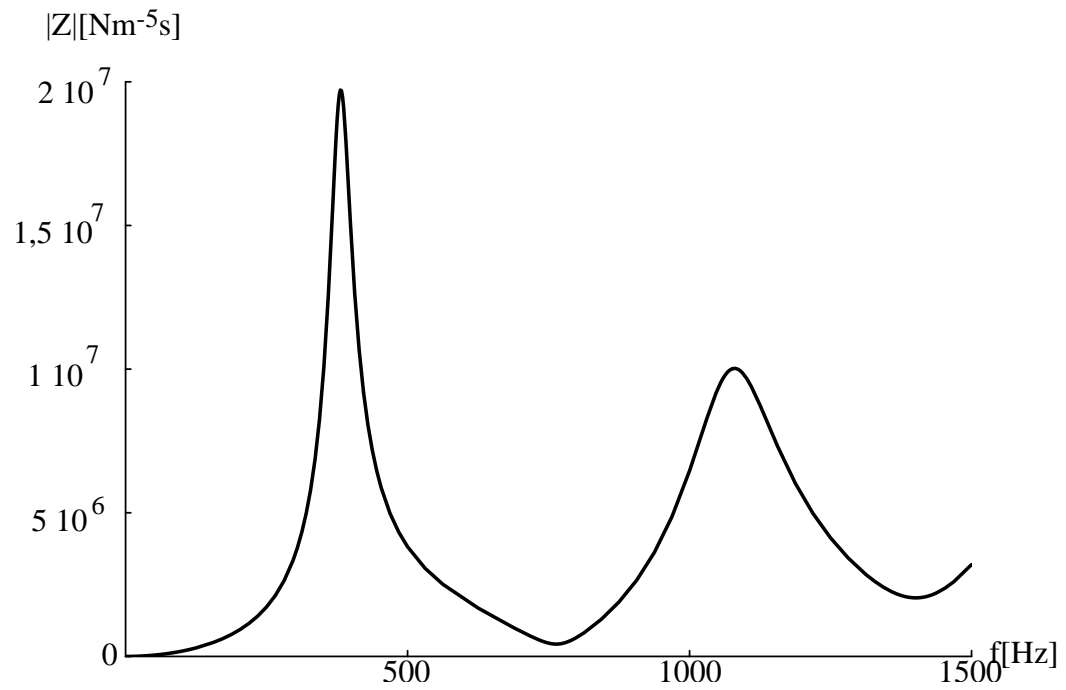


Fig. 2.2.2 Impedància del pavelló 1 calculada amb l'equació SH.

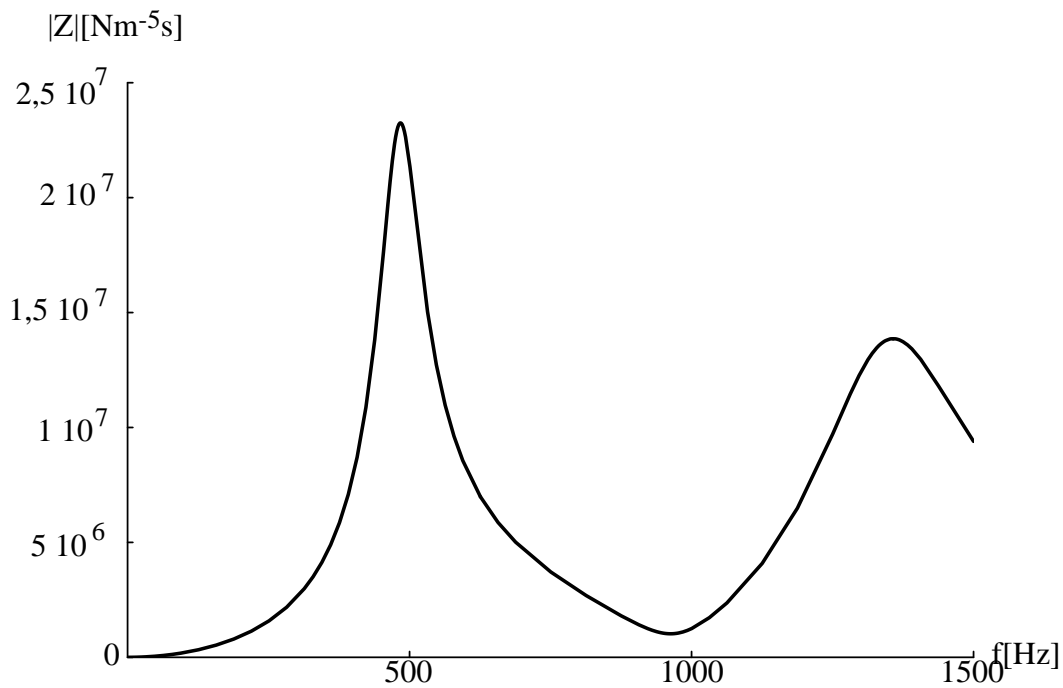


Fig. 2.2.3 Impedància del pavelló 2 calculada amb l'equació SH.

Les grans discrepàncies entre els valors calculats i els experimentals són conseqüència bàsicament de tres fets: els pavellons reals amb els que s'ha experimentat no són exponencials i en el càlcul realitzat s'han aproximat per un únic tram exponencial, s'ha realitzat una integració numèrica i l'equació emprada és una equació aproximada. Els resultats obtinguts en el capítol 1 eren molt més bons, dins del rang de freqüències adequat (Taula 1.4.12 i Taula 1.4.13), pel fet d'haver discretitzat els pavellons en més d'un tram exponencial. Tot això fa pensar que si els pavellons pels quals s'han fet els càlculs amb l'equació SH fossin amb els que s'experimentés els resultats numèrics que s'obtidrien serien molt millors.

Els resultats obtinguts posen de manifest que per a l'estudi dels pavellons reals és necessari discretitzar-los en més d'un tram per tal que les diferents aproximacions siguin vàlides. Això fa intuir que la discretització habitual en trams cilíndrics i cònics és prou correcta i que, malgrat el nombre elevat d'elements necessaris, els càlculs a realitzar són més simples que els d'aquest apartat.

2.2.2 Hipòtesi cinemàtica

La idea bàsica d'aquesta hipòtesi és suposar que totes les partícules que es troben sobre $S(q_1)$ en un cert instant de temps, es trobaran sobre $S(q_1+dq_1)$ al cap del mateix temps dt . Aquesta hipòtesi fa que el problema per a la pressió, que era unidimensional en el cas de la hipòtesi

equipotencial, sigui ara bidimensional a l'igual que per a $\bar{v}(q_1, q_2)$ ja que les partícules recorren gruixos diferents (si les $S(q)$ no són "off-set") en el mateix interval de temps dt (Fig. 2.2.4) i en conseqüència les línies de q_2 constant no es corresponen amb línies de corrent. Aquest vector $\bar{v}(q_1, q_2)$ es pot descompondre en un component tangencial a $S(q_1)$, $\bar{v}_1(q_1, q_2)$, i un component normal a $S(q_1)$, $\bar{v}_2(q_1, q_2)$:

$$\bar{v}(q_1, q_2) = \bar{v}_1(q_1, q_2) + \bar{v}_2(q_1, q_2)$$

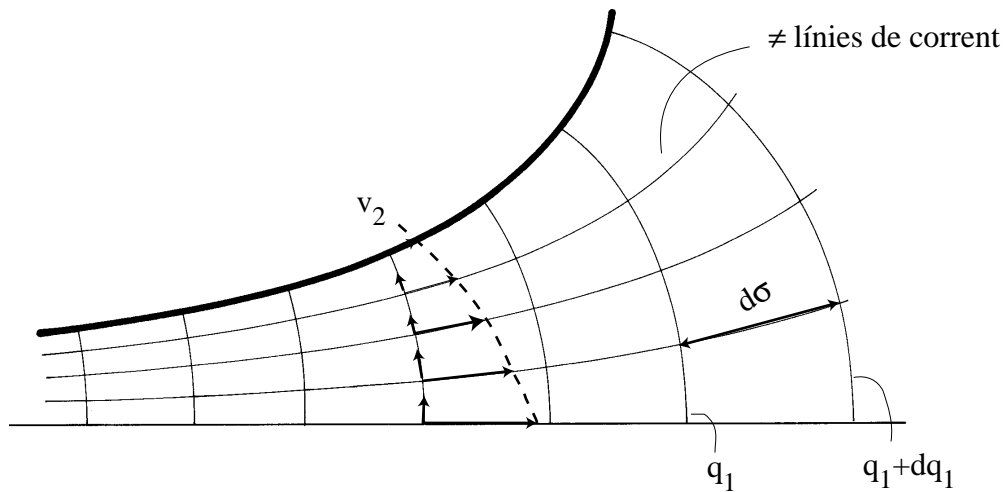


Fig. 2.2.4 Hipòtesi cinemàtica de les superfícies $S(q_1)$.

El component normal a $S(q_1)$ és proporcional al gruix $d\sigma(q_1, q_2)$ de manera que:

$$v_2(q_1, q_2) = v(q_2, t) d\sigma(q_1, q_2).$$

Aquest resultat mostra com la hipòtesi feta per Benade i Jansson [Benade, 1974], que és clarament una hipòtesi d'equipotencialitat, és contradictòria amb la distribució de velocitats proposada per aquests autors, que es correspon amb la de la hipòtesi cinemàtica.

A partir d'aquest resultat $\dot{v}_2(q_1, q_2) \propto d\sigma(q_1, q_2)$, i si es té en compte l'equació de Newton:

$$\nabla p = -\rho_o \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\rho_o \dot{v}_1(q_1, q_2) - \rho_o \dot{v}(q_2, t) d\sigma(q_1, q_2) \bar{e}_2,$$

la qual cosa implica que la distribució del gradient de pressions en direcció 2 és proporcional al gruix $d\sigma(q_1, q_2)$ i per tant el problema és també bidimensional per a la pressió i per al potencial de velocitat, tal com s'ha comentat. Si es vol tractar el problema com a

unidimensional cal prendre un únic valor de la pressió i de la velocitat sobre $S(q_1)$, que pot ser el valor en mitjana sobre la superfície, i buscar-ne l'equació d'ona unidimensional. Així:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p \Rightarrow \int_{V_e} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dV = \int_{V_e} \Delta p .$$

En aquesta equació apareixen derivades de dos tipus de valors mitjans, p_m^v valor mitjà en el volum i p_m^s valor mitjà sobre la superfície, que cal relacionar per poder-hi treballar.

Per a $\partial p_m^v / \partial q_1$ i $\partial p_m^s / \partial q_1$ es pot arribar a establir una relació, però per a $\partial p_m^v / \partial t$ i $\partial p_m^s / \partial t$ la relació és completament desconeguda. Si s'assumeix que $\partial p_m^v / \partial t = \partial p_m^s / \partial t$, com a equació d'ona s'obté:

$$\frac{\alpha(q_1)}{c^2} \frac{\partial^2 p_m^v}{\partial t^2} = \frac{1}{A(q_1)} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{A(q_1)}{\beta(q_1)\alpha(q_1)} \frac{\partial p_m^v}{\partial q_1} \right],$$

amb $\alpha(q)$ i $\beta(q)$ funcions de $(d\sigma)_m$, $(d\sigma^2)_m \dots$

El problema d'aquesta hipòtesi, a l'igual que en el cas anterior, radica en el fet que no hi ha un perfil que permeti una solució analítica encara que no és evident que la relació establerta sigui falsa.