

3 TRACTAMENT ANALÍTIC DEL PAVELLÓ AMB UN MODEL BIPARAMÈTRIC. PROPAGADORS DE LÍNIA

3.1 Introducció

Tal com s'ha comentat al capítol anterior en aquest es proposa un model "bidimensional" aproximat que condueix a una solució analítica per als pavellons de geometria més general i basat en l'assumpció que, en la propagació d'ones dins dels pavellons, existeixen superfícies de geometria invariant al llarg del temps que són perpendiculars al perfil i a l'eix del pavelló.

La idea general de la hipòtesi proposada, hipòtesi cònica diferencial, és que les superfícies $S(q)$ són esfèriques (no concèntriques) i que la propagació al llarg de la línia ABC és cònica (Fig. 3.1.1). Això fa que les superfícies $S(q)$ no siguin equipotencials ja que el temps que triguen les partícules en anar de $S(q)$ a $S(q+dq)$ és diferent perquè recorren espais diferents, $d\sigma(\varphi)$, a la mateixa velocitat.

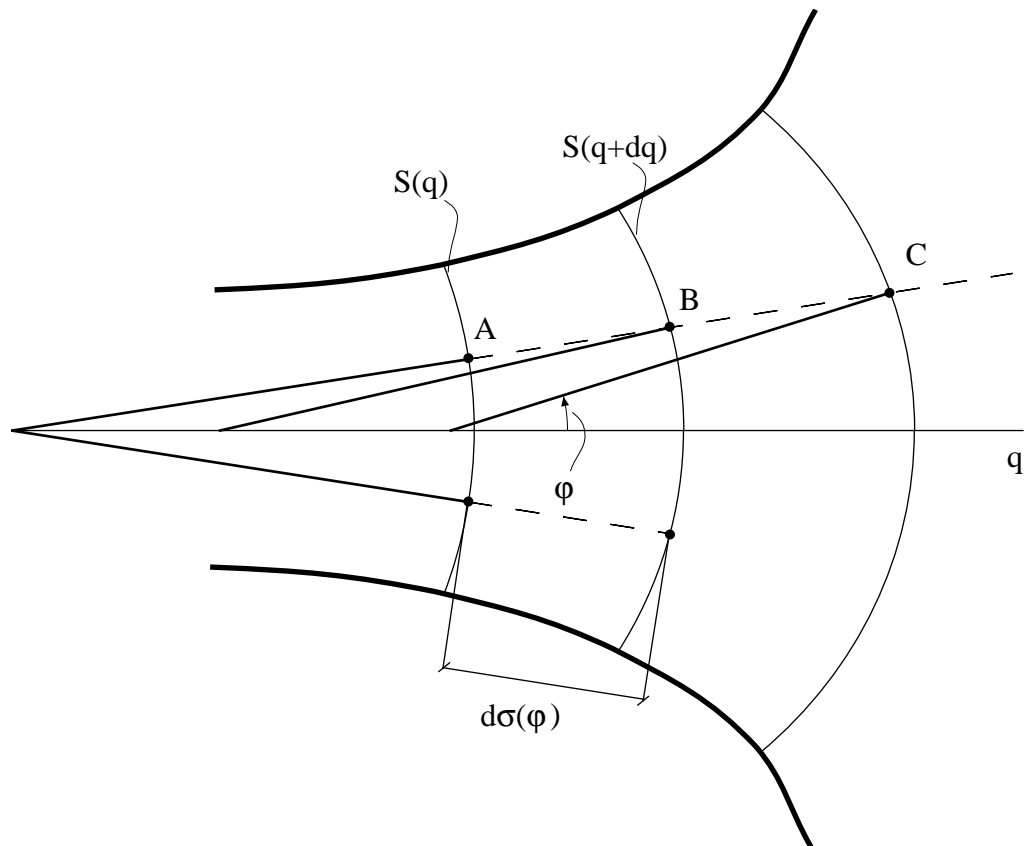


Fig. 3.1.1 Esquema de la hipòtesi cònica diferencial.

3.2 Hipòtesi cònica diferencial

La hipòtesi bàsica s'inspira en el tractament usual dels pavellons: la discretització en elements cilíndrics i cònics (Fig. 3.2.1) i la utilització de descripcions temporals i freqüencials corresponents a aquestes dues geometries per al càlcul de les respostes del tub dins dels dos dominis. Quan els elements discrets són de longitud finita, els petits volums, llenties, tancats entre les superfícies perpendiculars al perfil a les discontinuïtats entre els elements són negligibles, la qual cosa permet tractar el problema com uniparamètric i no complicar el càlcul.

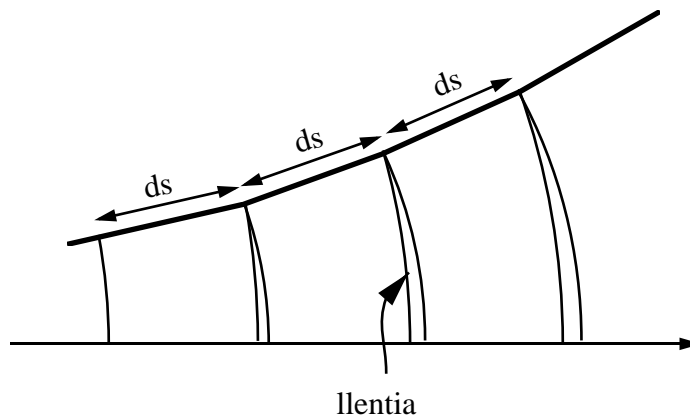


Fig. 3.2.1 Tub de conicitat variable discretitzat en cons infinitesimals.

La utilització de solucions corresponents a la propagació en tubs cilíndrics i cònics implica assumir velocitats de propagació constants, és a dir independents de la freqüència. Amb aquest fet l'efecte de la dispersió queda eliminat si es treballa a nivell finit, però com es veurà més endavant aquest efecte es recupera quan es treballa a nivell diferencial.

La idea bàsica de la hipòtesi cònica diferencial és utilitzar el mateix tipus de càlcul que s'empra amb elements discrets de longitud finita, però a nivell diferencial. En aquest cas els elements cònics són de longitud infinitesimal, és a dir del mateix ordre que les llenties a les discontinuïtats. És necessari, doncs, formular una hipòtesi de propagació dins d'aquests petits volums, i és precisament la inclusió d'aquestes llenties en el càlcul el que porta al model bidimensional.

L'estudi del comportament d'aquestes llenties es fa en el domini temporal. Si es considera que sobre la superfície esfèrica S_{1e} d'entrada del con infinitesimal precedent (Fig. 3.2.2) la distribució de pressió a l'instant t_0 és uniforme, aleshores la superfície de sortida S_{1s} del mateix con tindrà també una distribució uniforme de pressió a l'instant $t=t_0+dr_1/c$. La forma correcta de justificar aquesta distribució és pensar en el principi de Huygens: cada punt sobre S_{1e} es comporta com una font esfèrica independent; per tant en construir sobre S_{1s} la resultant de tots els fronts d'ona esfèrics s'obté una distribució uniforme de pressió sobre

aquesta superfície. Però es pot considerar un procés més simple que condueix al mateix resultat: una propagació independent a velocitat c de les pressions sobre les línies perpendiculars a la superfície S_{1e} . Això permet definir els “propagadors de línia” $g(\varphi, r_1, r_1 + dr_1, t)$:

$$p(\varphi, S_{1s}, t) = g(\varphi, r_1, r_1 + dr_1, t) * p(\varphi, S_{1e}, t) \quad , \quad (3.2.1)$$

$$g(\varphi, r_1, r_1 + dr_1, t) = \frac{r_1}{r_1 + dr_1} \delta\left(t - \frac{dr_1}{c}\right) \quad .$$

Per passar a la distribució sobre la superfície S_{2e} d'entrada del segon con, s'ha de pensar en la propagació dins de la lletia. A partir del procés individual que s'ha definit, es descriu la propagació dins de la lletia com una propagació sobre les línies perpendiculars a S_{1s} segons els propagadors de línia de l'equació 3.2.1 amb $d\sigma(\varphi)$ enlloc de dr_1 . Les conseqüències d'aquesta hipòtesi són:

- Arribada no simultània de la pertorbació de pressió a S_{2e} . Els retards per a cada punt són proporcionals al gruix $d\sigma(\varphi)$ de la lletia mesurat segons la línia perpendicular a S_{1s} .
- Distribució no uniforme de pressió sobre S_{2e} , la qual cosa permet simular la participació dels modes transversals en aquesta posició.
- Valor mitjà de la pressió sobre S_{2e} està sobre l'eix temporal (el mateix que en el cas que la distribució de pressió sobre S_{1e} fos impulsional), la qual cosa pot representar un efecte dispersiu.

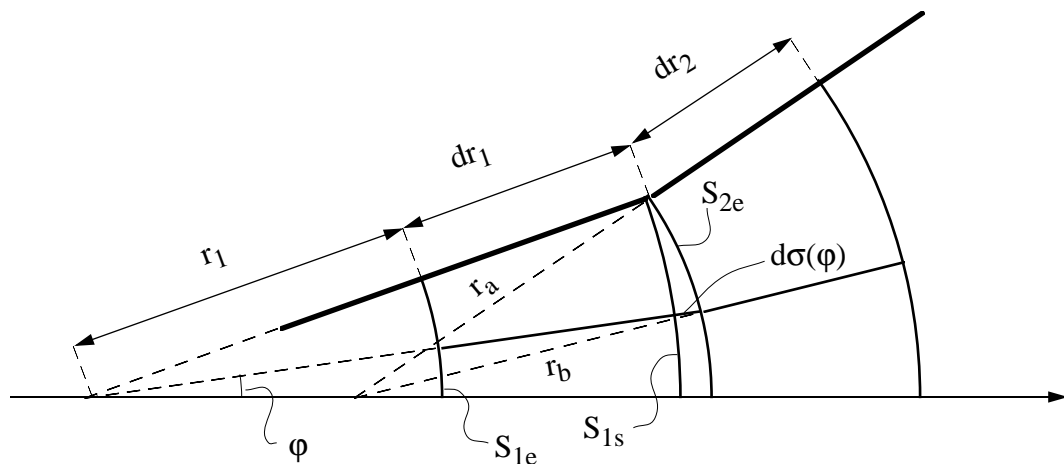


Fig. 3.2.2 Geometria cònica diferencial d'un pavelló.

Un cop s'ha realitzat la propagació dins de la lentia, cal tenir en compte el canvi de conicitat del perfil. Tenint en compte els resultats coneguts per a la geometria cònica [Martínez, 1987] s'incorpora la reflexió i la transmissió a cada punt de S_{2e} amb l'ajuda d'una convolució amb les funcions de reflexió i transmissió associades a un canvi de conicitat:

$$R(t) = \nu e^{\nu t} \quad i \quad T(t) = \delta(t) + R(t), \quad \text{amb } \nu = \frac{(r_b - r_a)c}{2r_a r_b}, \quad \text{de manera que:}$$

$$p(\varphi, S_{2e}, t) = g(\varphi, r_1, r_1 + d\sigma(\varphi), t) * T(t) * p(\varphi, S_{1s}, t).$$

A partir d'aquí, es produeix la propagació sobre les línies perpendiculars a S_{2e} i així successivament.

Un cop el tractament diferencial ha estat definit es pot passar al nivell finit repetint les convolucions amb els propagadors i les funcions de reflexió i transmissió diferencials. La funció $\Gamma(\varphi, A, B, t)$, que inclogui la propagació, la reflexió i la transmissió, serà el resultat d'una multiconvolució infinita (Fig. 3.2.3):

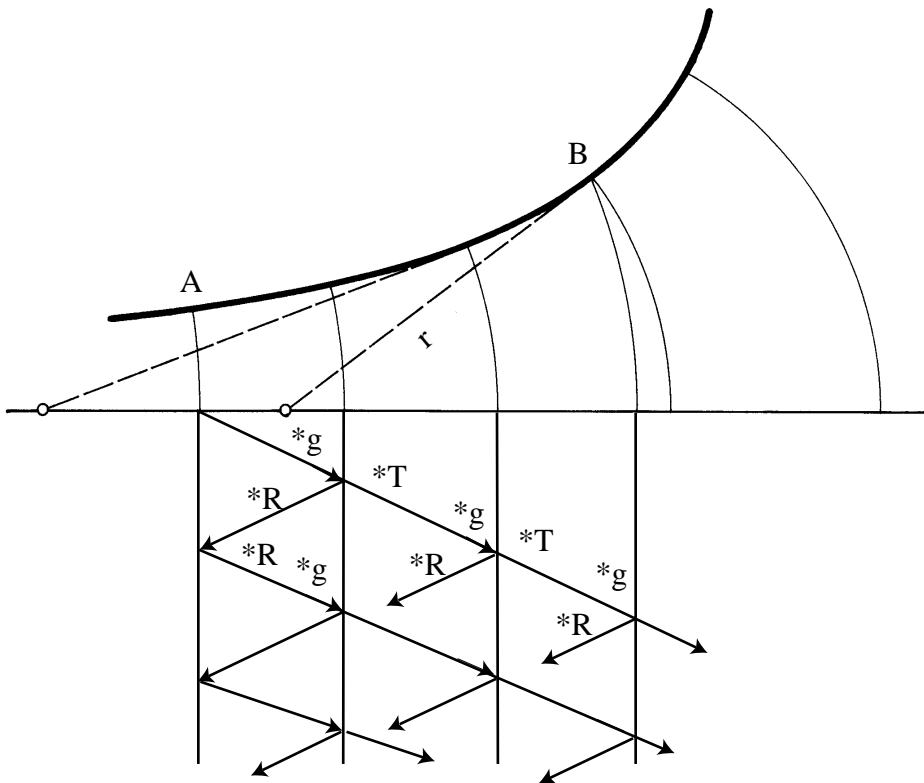


Fig. 3.2.3 Esquema de reflexions i transmissions en un pavelló discretitzat.

$$\begin{aligned}
p(B,t) &= \Gamma(\varphi, A, B, t) * p(A, t) \\
g * T * g * T * \dots &= (*g)^\infty (*T)^\infty = G(\varphi, A, B, t) (*T)^\infty \\
g * R * g * T * \dots & \\
g * R * g * R * \dots & \\
\dots\dots & \\
\sum \dots\dots &= \Gamma(\varphi, A, B, t).
\end{aligned}$$

El càlcul de la convolució infinita per a la funció $\Gamma(\varphi, A, B, t)$ en el cas d'un perfil de pavelló qualsevol no és abordable. És per aquesta raó que s'opta per fer-ne una aproximació que inclogui només els termes propagatius i es defineix el propagador de línia $G(\varphi, A, B, t)$ [Apèndix 3.I]:

$$G(\varphi, A, B, t) = e^{-I(A, B)} \delta\left(t - \frac{l_{AB}}{c}\right), \text{ amb } I(A, B) = \int_A^B \frac{d\sigma(\varphi)}{r}.$$

És evident que aquest propagador tindrà una expressió diferent per a cada línia ja que el valor de l'angle φ és diferent per a cada una [Apèndix 3.I]:

$$\begin{aligned}
G(\varphi, A, B, t) &= \frac{y(x_A) \sin \theta(x_A)}{y(x_B) \sin \theta(x_B)} e^{I(A, B)} \delta(t - t_{AB}), \\
\text{amb } I(A, B) &= \int_A^B \frac{y'(x)}{y(x)} \cos \theta(x) \cos \varphi(x) dx.
\end{aligned}$$

L'aproximació de $\Gamma(\varphi, A, B, t)$ per $G(\varphi, A, B, t)$ reproduïx correctament els casos cilíndric i cònic ja que:

- En el cas cilíndric $r \rightarrow \infty$, amb la qual cosa $I(A, B)=0$ i per tant:

$$G(A, B, t) = \delta\left(t - \frac{l_{AB}}{c}\right).$$

- En el cas cònic $d\sigma(\varphi)=dr$, amb la qual cosa $I(A, B)=\ln(r_B/r_A)$ i per tant:

$$G(A, B, t) = \frac{r_A}{r_B} \delta\left(t - \frac{l_{AB}}{c}\right).$$

3.3 Discontinuitat cilíndrico-cònica

Tal com s'ha comentat a l'apartat 3.2 el càlcul analític de la multiconvolució infinita per a $\Gamma(\varphi, A, B, t)$ no és evident. Existeix, però, un cas per al qual les expressions analítiques poden ser trobades bastant fàcilment: és el cas d'un tub amb una única discontinuïtat de conicitat, és a dir amb una sola llentia (Fig. 3.3.1). En la resolució tradicional d'aquest cas, que negligeix l'efecte de la llentia, a partir de condicions inicials de repòs excepte sobre la superfície plana S_o on s'assumeix un impuls de pressió uniforme p_o , el pas del front d'ona pla per la discontinuïtat genera un front d'ona esfèric de pressió uniforme $p_-(r_b, t)$ que es propaga cap a la dreta i un altre de pla de pressió uniforme $p_+(r_a, t)$ que es propaga cap a l'esquerra, amb:

$$p_+(r_a, t) = R\left(t - \frac{r_a}{c}\right) * p_o \delta(t) , \quad R(t) = -\frac{c}{2r_o} e^{-\frac{c}{2r_o}t}$$

$$p_-(r_b, t) = T\left(t - \frac{r_b - r_o}{c}\right) * p_o \delta(t) , \quad T(t) = \delta(t) + R(t)$$

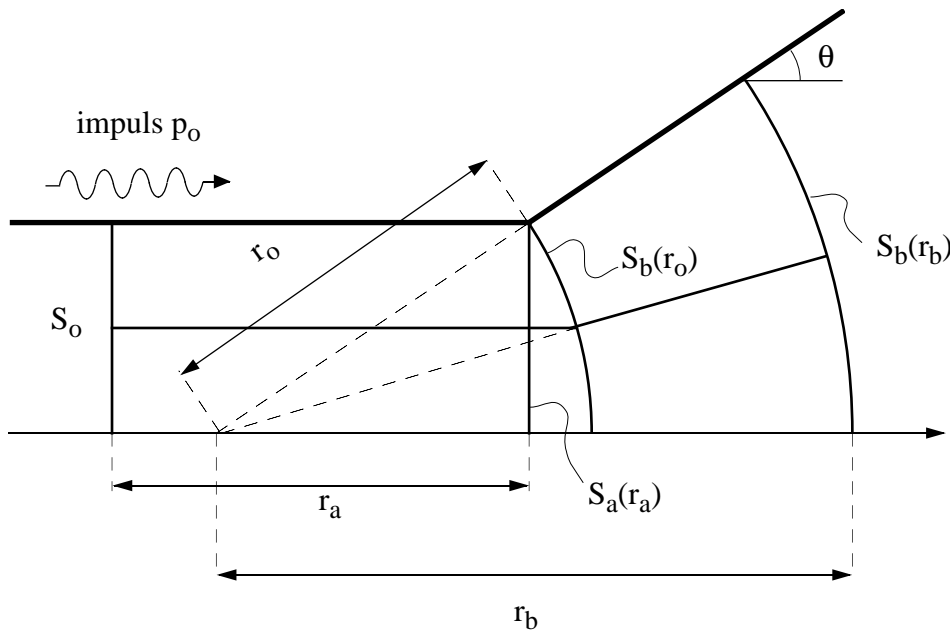


Fig. 3.3.1 Discontinuitat cilíndrico-cònica.

El tractament diferencial de la llentia seguint el model presentat a la secció 3.2 condueix a unes distribucions no uniformes de pressió sobre $S_a(r_a)$ i $S_b(r_o)$ (Fig. 3.3.2):

$$p_+(\varphi, r_a, t) = R\left(t - \frac{r_a + 2d\sigma(\varphi)}{c}\right) * p_o \delta(t) ,$$

$$p_-(\varphi, r_o, t) = T\left(t - \frac{r_a + d\sigma(\varphi)}{c}\right) * p_o \delta(t) .$$

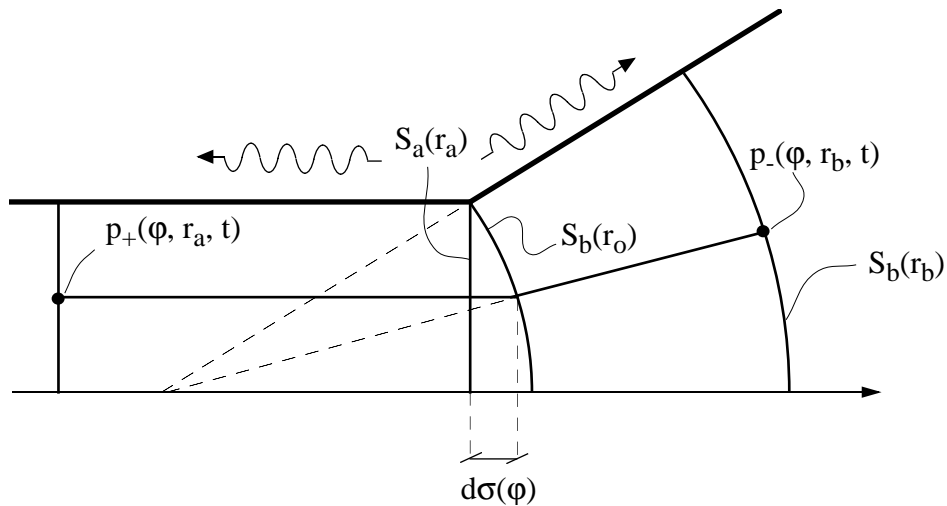


Fig. 3.3.2 Model bidimensional de reflexió i transmissió en una discontinuïtat cilíndrico-cònica.

L'inconvenient de treballar amb distribucions de pressió no uniformes, que depenen de la coordenada φ , porta a treballar amb pressions mitjanes com a representatives del valor de la pressió sobre cada superfície $S_a(r_a)$ i $S_b(r_b)$:

$$p_+^m(S_a(r_a), t) = \frac{1}{S_a} \int_{\theta}^0 p_+(\varphi, r_a, t) dS_a(\varphi),$$

$$p_-^m(S_b(r_b), t) = \frac{1}{S_b} \int_{\theta}^0 p_-(\varphi, r_b, t) dS_b(\varphi).$$

A partir d'aquest punt es pot continuar amb la propagació d'aquest valor mitjà fins a arribar a una altra secció i en conseqüència es podrà definir el propagador de valors mitjans per tal de relacionar la pressió mitjana en una secció amb la pressió mitjana en una altra:

$$p^m(S_b(r_b), t) = G_m(A, B, t) * p^m(S_a(r_a), t), \text{ amb}$$

$$G_m(A, B, t) = \frac{1}{S(x)} \int_{S(x)} G(\varphi, A, B, t) dA(\varphi(x)).$$

Aquesta formulació presenta però un problema que és que un mateix valor mitjà es pot aconseguir amb diferents distribucions de pressions sobre la superfície. En particular, pot provenir una distribució de pressió uniforme sobre la superfície d'entrada, $p(\varphi, S_{1e}, t) = p_o(t)$,

o de qualsevol altra distribució que doni el mateix valor mitjà. Per tant no hi ha un únic propagador mitjà $G_m(A, B, t)$ sinó que n'hi ha tants com distribucions de pressions. Si malgrat tot es vol continuar treballant amb valors mitjans el més senzill és suposar una distribució uniforme de pressions. En aquest cas i per a la discontinuïtat cilíndric-cònica les expressions que s'obtenen per a les pressions mitjanes sobre les superfícies $S_a(r_a)$ i $S_b(r_o)$ són [Apèndix 3.I]:

$$p_+^m(S_A, t) = -\frac{2p_o v}{\sin^2 \theta} \left[\varepsilon(2t(0) - t) \left[(1 - \cos \theta)(1 - e^{vt}) + vt \right] - \varepsilon(t - 2t(0))(1 - \cos \theta)e^{vt} \right],$$

$$p_-^m(S_B, t) = -\frac{2p_o v}{1 - \cos \theta} \left[\varepsilon(t(0) - t) - \varepsilon(t - t(0)) \left(e^{\frac{1 - \cos \theta}{2} vt} - 1 \right) \right] e^{vt},$$

$$\text{amb } v = -\frac{c}{2r_o} \text{ i } t(0) = \frac{r_o}{c}(1 - \cos \theta).$$

3.4 Funcions de reflexió i transmissió mitjanes

El fet de treballar amb valors mitjans fa atractiva la idea de definir les funcions de reflexió i transmissió mitjanes R_m i T_m que permetran obtenir les pressions mitjanes amb una única convolució:

$$p_+^m(S_A(r_a), t) = R_m(t) * p_-^m(S_A(0), t), \quad (3.4.1)$$

$$p_-^m(S_B(r_o), t) = T_m(t) * p_-^m(S_A(0), t), \quad (3.4.2)$$

on $p_-^m(S_A(0), t)$ és la pressió mitjana inicial. Malgrat aquest resultat, una simple exploració de les equacions 3.4.1 i 3.4.2 mostra que la forma d'aquestes funcions no és única; depenen de la distribució particular de les pressions inicials, a l'igual que en el cas del propagador de valors mitjans. En el cas que aquesta distribució sigui uniforme i impulsional les funcions R_m i T_m , en el cas que hi hagi un canvi de conicitat del tipus cilíndric-cònic, són [Apèndix 3.I]:

$$R_m(t) = -\frac{2v}{\sin^2 \theta} \left\{ \varepsilon \left(\frac{2d\sigma(0)}{c} - t \right) \left[(1 - \cos \theta)(1 - e^{vt}) + vt \right] - \varepsilon \left(t - \frac{2d\sigma(0)}{c} \right) (1 - \cos \theta) e^{vt} \right\},$$

$$T_m(t) = -\frac{2v}{1 - \cos\theta} e^{vt} \left\{ \varepsilon\left(\frac{d\sigma(0)}{c} - t\right) - \varepsilon\left(t - \frac{d\sigma(0)}{c}\right) \left(e^{\frac{1 - \cos\theta}{2} t} - 1 \right) \right\}.$$

3.5 Resultats

Les funcions de reflexió i transmissió mitjanes s'han utilitzat per a calcular la pressió mitjana en el cas de tenir una discontinuïtat cilíndrico-cònica. S'han estudiat tres geometries diferents i els resultats obtinguts comparats amb els que s'obtenen amb les funcions de reflexió i transmissió tradicionals, és a dir sense tenir en compte l'efecte de la llentia, es mostren a les Fig. 3.5.2, Fig. 3.5.3, Fig. 3.5.4 i Fig. 3.5.4. En elles s'hi observa la geometria del tub estudiat, la pressió mitjana a la superfície $S_b(r_o)$ corresponent a l'ona que es propaga tub avall i que es veu afectada per la discontinuïtat de conicitat, p_-^m i p_- , i la pressió mitjana a la superfície $S_a(r_a)$, p_+^m i p_+ , corresponent a l'ona que es propaga tub amunt després de patir la reflexió deguda al canvi de conicitat. En elles s'hi observa un cert efecte dispersiu sobre els valors mitjans de pressió la qual cosa és típica en els pavellons.

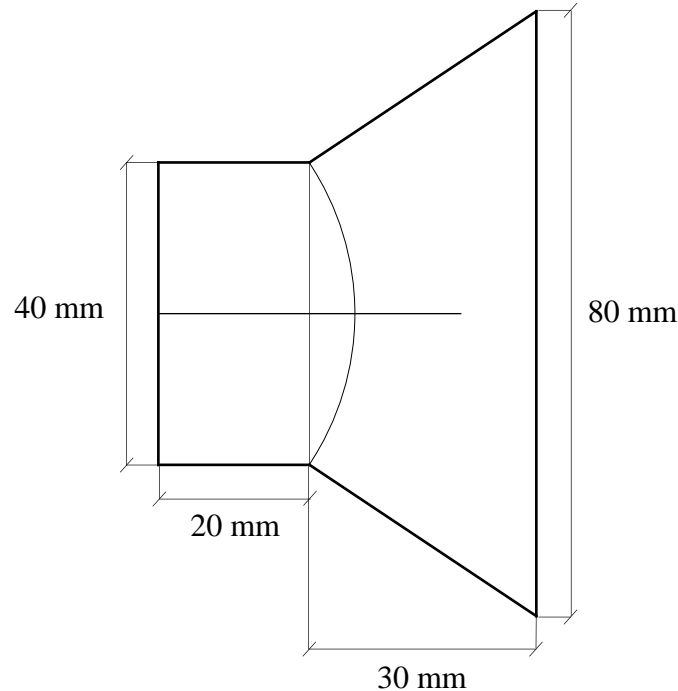


Fig. 3.5.1 Discontinuitat cilíndrico-cònica.

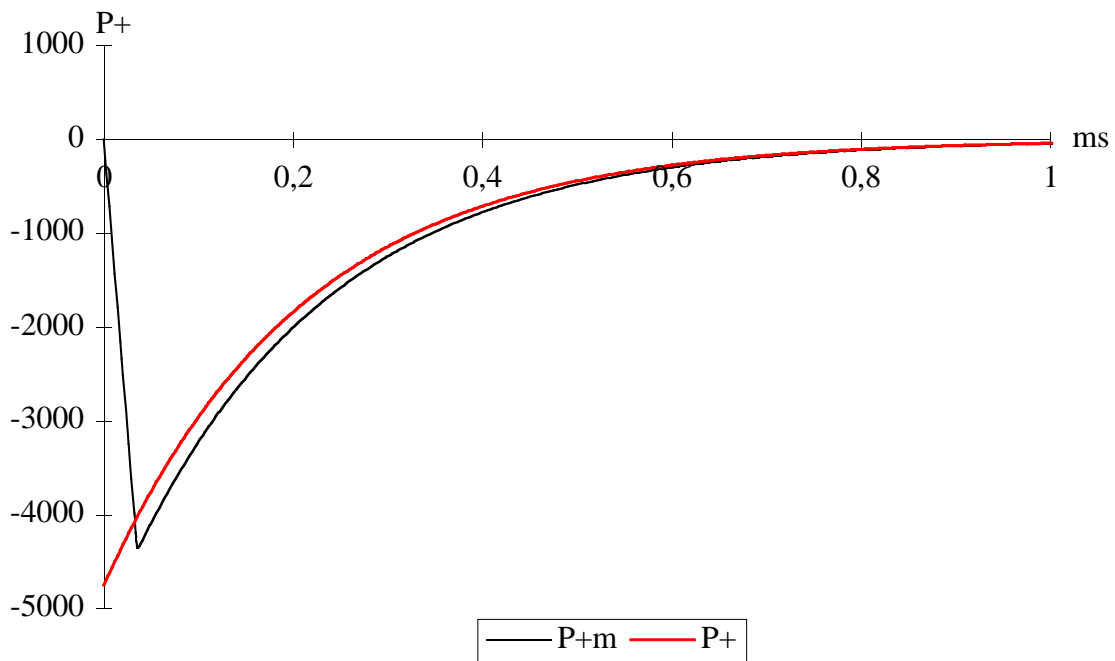
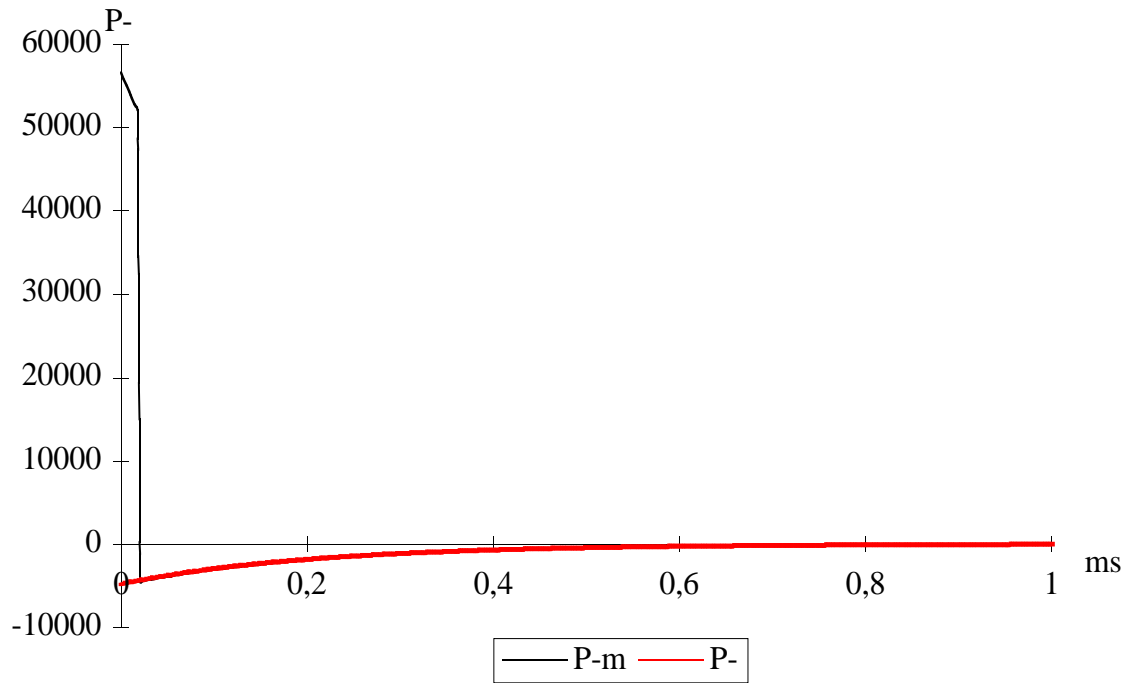


Fig. 3.5.2 Pressions mitjanes corresponents a la discontinuïtat de la Fig. 3.5.1.

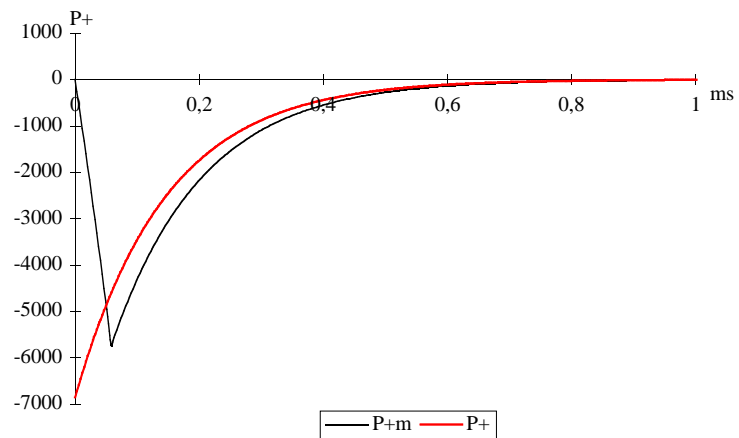
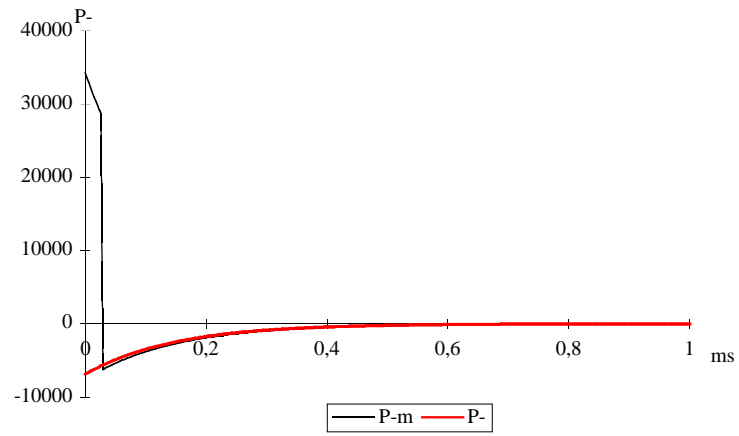
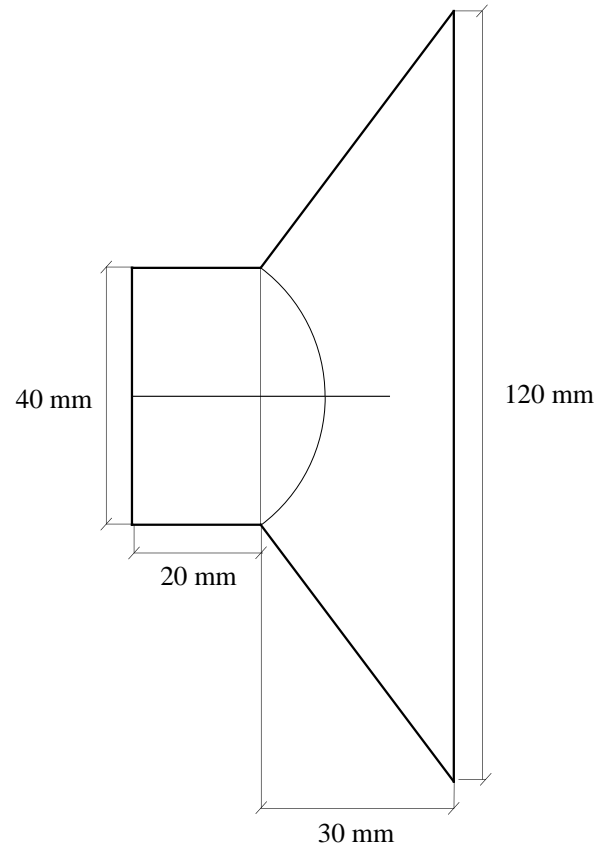


Fig. 3.5.3 Discontinuitat cilíndrico-cònica i pressions mitjanes corresponents.

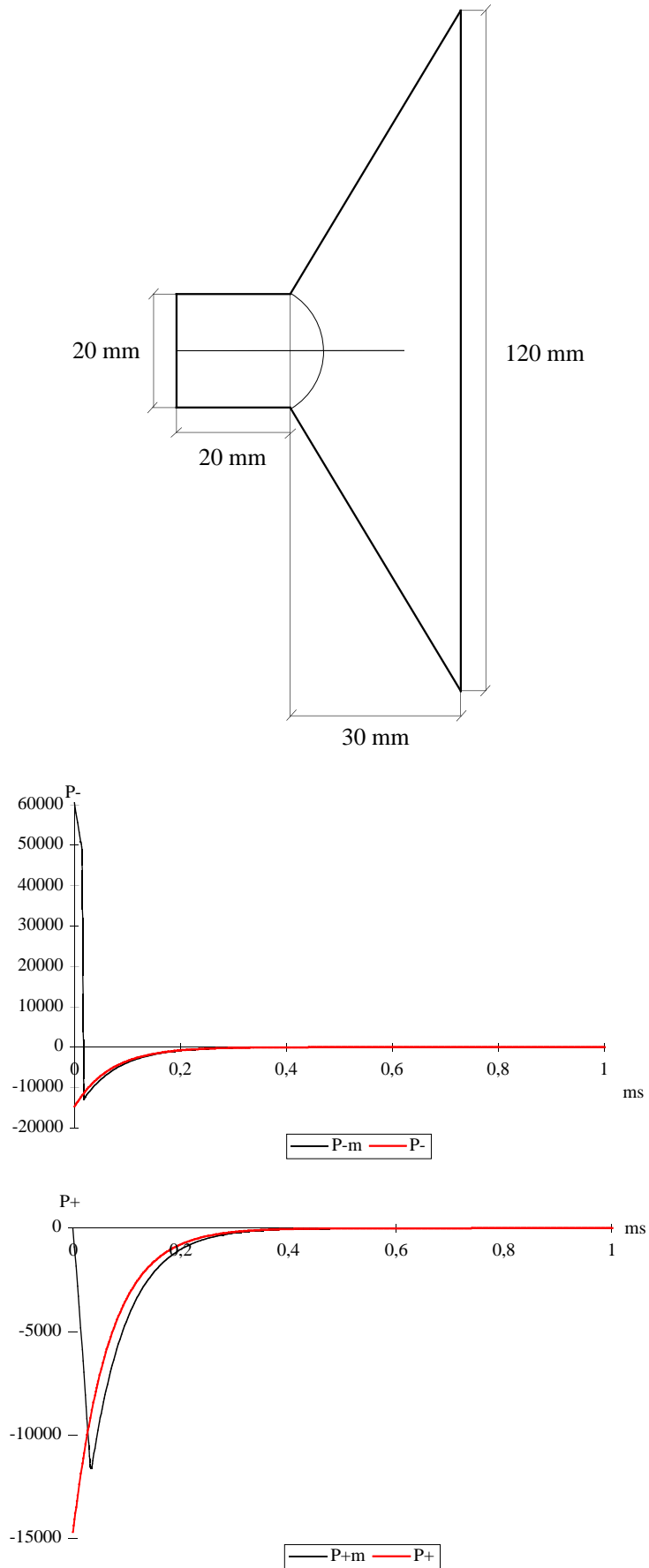


Fig. 3.5.4 Discontinuitat cilíndrico-cònica i pressions mitjanes corresponents.

A les Fig. 3.5.5, Fig. 3.5.6 i Fig. 3.5.7 es mostren les partícules d'aire que són afectades simultàniament, és a dir en el mateix instant de temps, per la pertorbació que es propaga tub avall. En aquestes figures s'observa com el canvi de conicitat en el perfil no afecta de manera instantània tots els punts de la superfície esfèrica $S(q)$, sinó que el front d'ona que era pla, en arribar a la discontinuïtat, tendeix a transformar-se en esfèric a mesura que s'avança al llarg del tub. En funció de la geometria de la discontinuïtat, aquest efecte és més o menys acusat tal com reflecteixen les figures. Per a les partícules que es mouen per la superfície tangent al perfil el valor de $d\sigma(\varphi)$ és nul i en conseqüència en un temps zero passa de moure's segons una llei cilíndrica a moure's segons una llei cònica. Els diferents valors de $d\sigma(\varphi)$ fan que aquest canvi en el tipus de moviment es produeixi en un instant o un altre i en conseqüència els fronts d'ona es van corbant de mica en mica. Aquests fronts d'ona, tot i no ser del tot perpendiculars al perfil, sí que ho són a l'eix. Cal recordar que en l'aproximació feta a l'equació de Webster els fronts d'ona eren plans perpendiculars a l'eix, per tant es pot concloure que l'aproximació feta en la hipòtesi cònica diferencial és més bona que la feta en l'equació de Webster des del punt de vista geomètric.

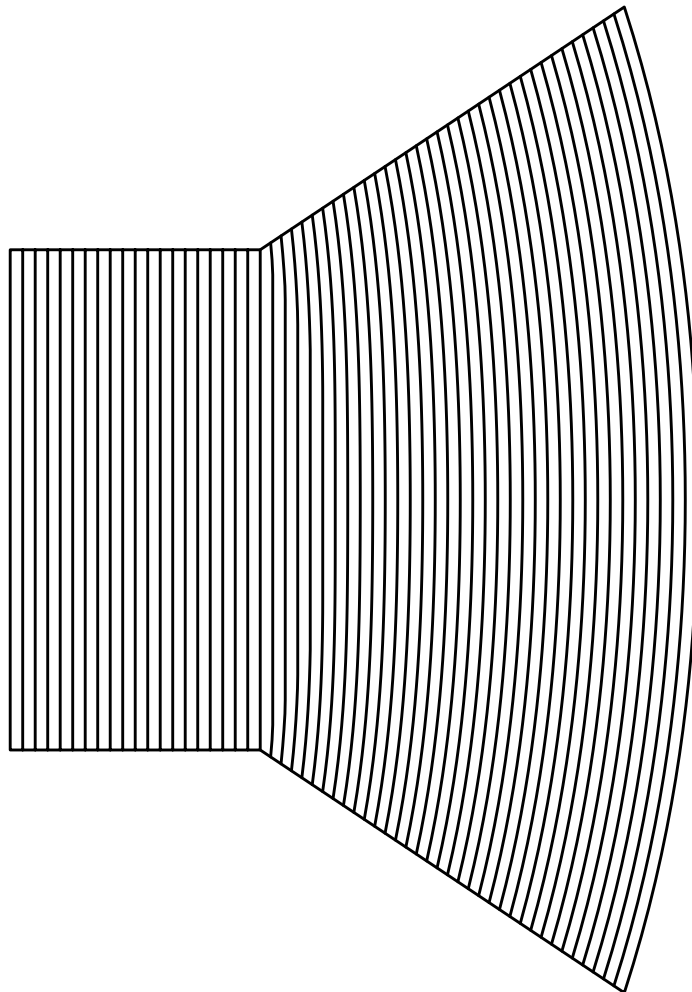


Fig. 3.5.5 Posicions de les partícules afectades simultàniament per la pertorbació. Geometria de la Fig. 3.5.1.

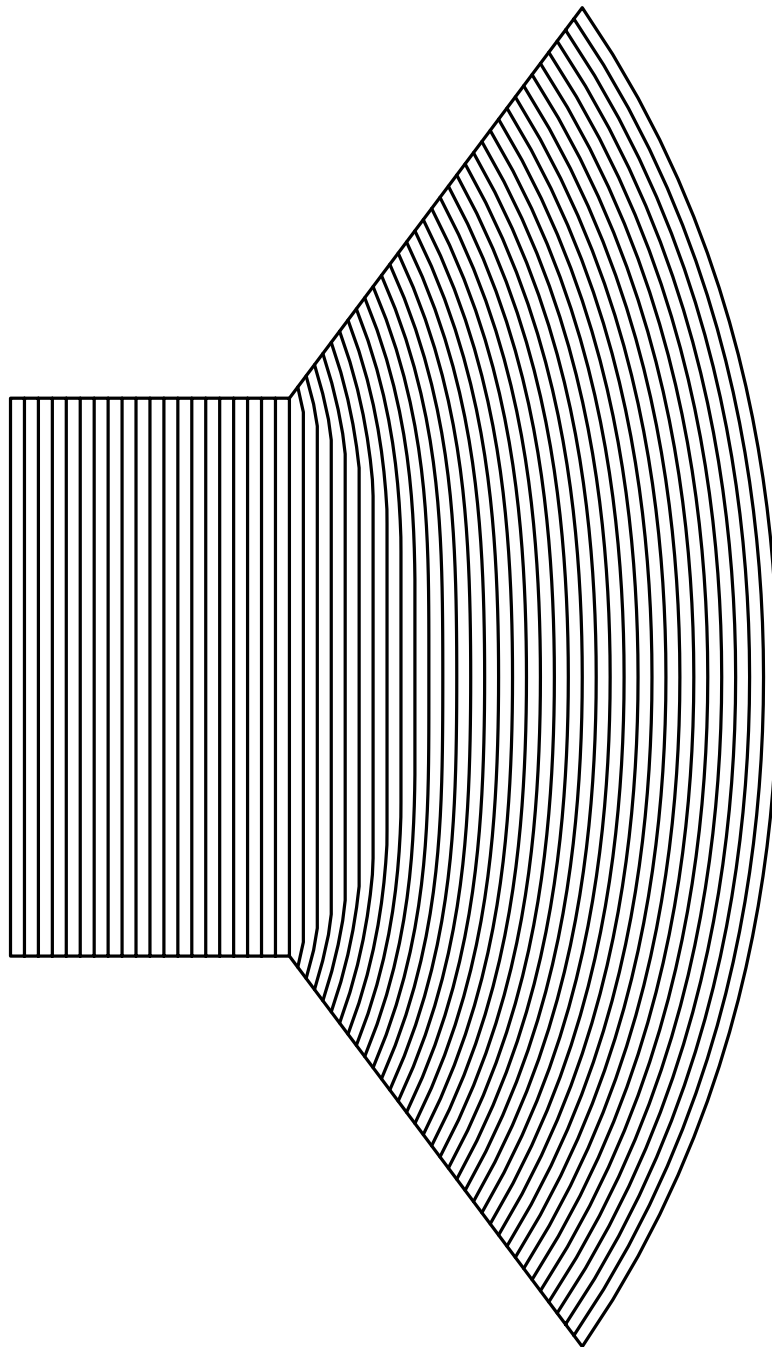


Fig. 3.5.6 Posicions de les partícules afectades simultàniament per la pertorbació. Geometria de la Fig. 3.5.3.

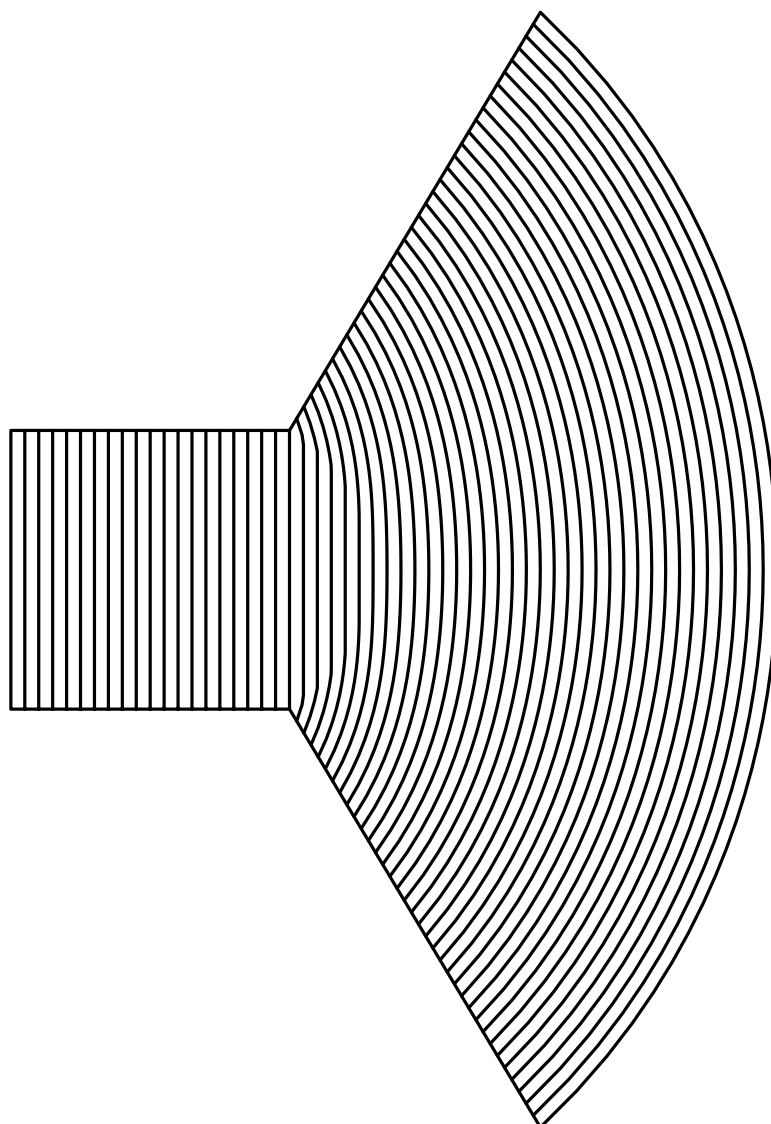


Fig. 3.5.7 Posicions de les partícules afectades simultàniament per la pertorbació. Geometria de la Fig. 3.5.4.