APÈNDIX 1.I EQUACIÓ DE WEBSTER

1.I.1 Introducció

L'equació de Webster és una equació d'ona uniparamètrica aproximada que per a certs tipus de perfil de pavelló accepta una solució exacta. La seva obtenció es basa en la utilització de l'equació de continuïtat, de l'equació del moviment de l'aire que es troba dins del pavelló i de propietats termodinàmiques de l'aire.

1.I.2 Equació de continuïtat

Considerem una llesca prima d'aire contingut entre dues superfícies planes molt properes, dins del pavelló, (Fig. 1.I.2.1) que en l'equilibri es troben situades a x i x+dx.

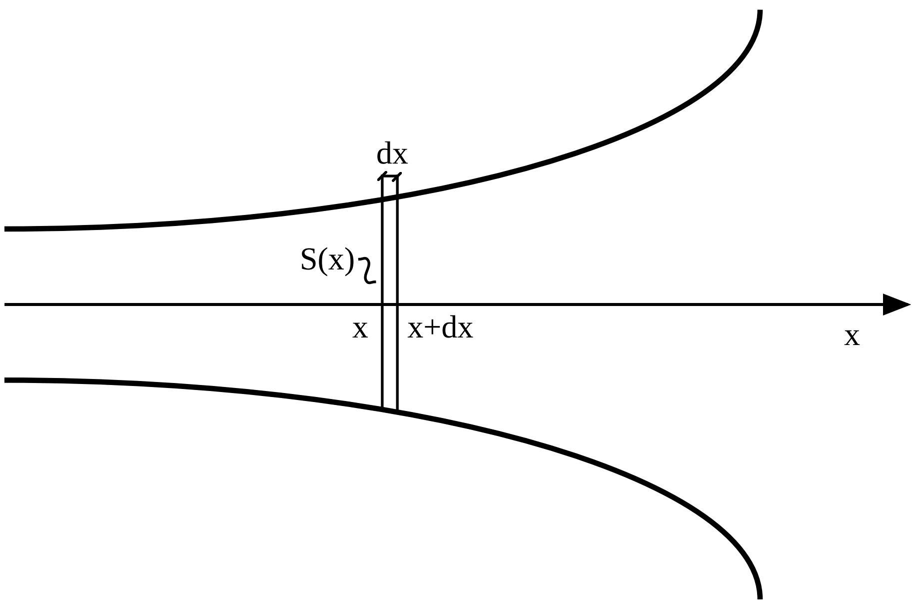

Fig. 1.I.2.1 Llesca prima d'aire dins d'un pavelló.

Quan una ona passa al llarg del pavelló les partícules d'aire que, en mitjana, es troben sobre aquestes superfícies es desplacen fins a una nova posició mitjana $x+\xi(x)$ i $x+\mathrm{d}x+\xi(x+\mathrm{d}x)$

respectivament. La quantitat $\xi(x)$ correspon, per tant, al desplaçament mitjà de les partícules que inicialment es trobaven a x.

Si el pas de l'ona no provoca turbulències en l'aire, les dues superfícies desplaçades continuen essent paral·leles (Fig. 1.I.2.2) i per tant la quantitat d'aire que hi havia entre les dues superfícies en l'equilibri és la mateixa que fora de l'equilibri. El què ha variat, doncs, és el volum de la llesca d'aire, que passa de ser $S(x)dx$ a ser $S(x)dx + (\partial[S(x)\xi(x)]/\partial x)dx$, i la densitat de l'aire contingut dins d'aquest volum, que passa de ρ_o a $\rho_o(1+\delta)$, on δ és el canvi relatiu de densitat.

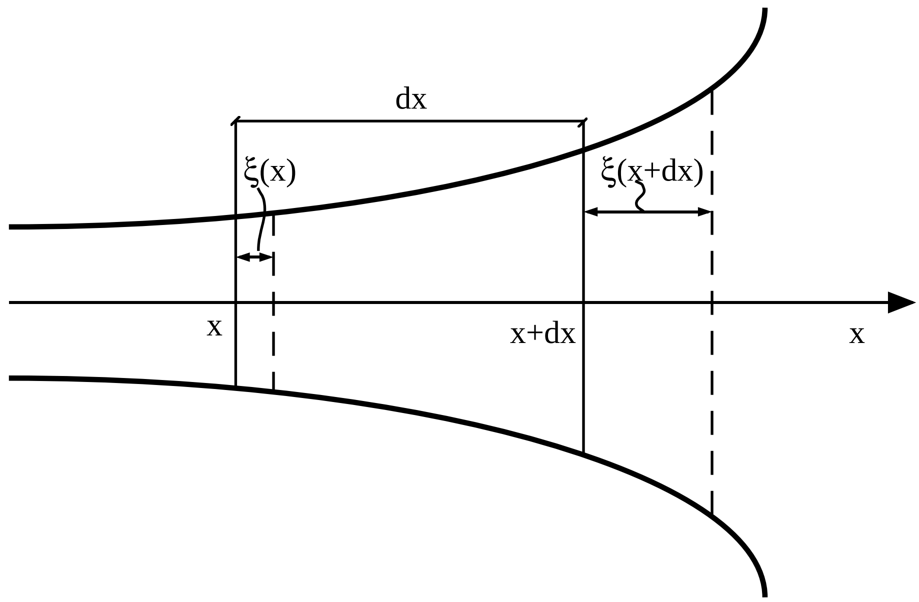

Fig. 1.I.2.2 Desplaçament de les partícules d'aire dins del pavelló.

Si es planteja l'equació de continuïtat, s'obté:

$$\rho_o S(x)dx = \rho_o(1+\delta)\left[S(x) + \frac{\partial}{\partial x}\left[S(x)\xi(x)\right]\right]dx$$

$$0 = \delta S(x) + \frac{\partial}{\partial x}\left[S(x)\xi(x)\right] + \delta\frac{\partial}{\partial x}\left[S(x)\xi(x)\right]$$

Si el canvi de densitat i els desplaçaments són petits es pot negligir l'últim sumand de l'expressió anterior i per tant s'obté que el canvi relatiu de densitat és:

$$\delta = -\frac{1}{S(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left[S(x)\xi(x)\right]. \qquad (1.I.2.1)$$

1.I.3 Compressibilitat de l'aire

Si s'empra la relació termodinàmica que correspon a un procés adiabàtic:

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\gamma \frac{\mathrm{d}V}{V}, \qquad \text{on } \gamma \text{ és la constant adiabàtica de l'aire,}$$

per a l'aire que es troba contingut entre les superfícies que originàriament estaven situades a x i x+dx, s'obté la següent expressió:

$$\frac{p}{P_o} = -\gamma \frac{1}{S(x)} \frac{\partial \left[S(x)\xi(x)\right]}{\partial x},$$

on P_o és la pressió a l'equilibri i p és la pressió acústica, és a dir la diferència entre la pressió fora de l'equilibri i la que hi ha a l'equilibri. Per tant la pressió acústica ve donada per l'expressió:

$$p(x,t) = -\gamma P_o \delta = -\frac{\rho_o c^2}{S(x)} \frac{\partial}{\partial x}\left[S(x)\xi(x)\right], \qquad (1.I.3.1)$$

on c és la velocitat del so.

1.I.4 Equació d'ona de Webster

L'equació de continuïtat ha permès obtenir l'equació 1.I.2.1 que relaciona el canvi de densitat amb el canvi de desplaçament i les lleis termodinàmiques han permès obtenir l'equació 1.I.3.1 que relaciona la pressió acústica amb el canvi de densitat. Aquestes tres magnituds p, ξ i δ, són tant funció de x com del temps t i si es troba una altra equació el sistema es podrà resoldre. Aquesta última equació ve donada per la segona llei de Newton aplicada a l'aire que es troba contingut entre les dues superfícies.

La força que actua sobre l'aire contingut entre les dues superfícies és deguda a l'aire que hi ha a l'esquerra, $[P_o+p(x)]S(x)$, i a l'aire que hi ha a la dreta, $[P_o+p(x+\mathrm{d}x)]S(x)$. La diferència entre les dues forces és la força resultant que actua sobre l'aire: $-(\partial p/\partial x)S(x)\mathrm{d}x$. La segona llei de Newton estableix:

$$\rho_o S(x)\mathrm{d}x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\frac{\partial p}{\partial x}S(x)\mathrm{d}x.$$

Per tant:

$$\rho_o\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Si es deriva dues vegades respecte del temps l'equació 1.I.3.1:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=-\frac{\rho_o c^2}{S(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left[S(x)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right],$$

i es té en compte la segona llei de Newton, s'obté:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{1}{S(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left[S(x)\frac{\partial p}{\partial x}\right].$$

Aquesta equació és l'equació d'ona aproximada de Webster.

1.I.5 Perfils de pavelló possibles

Si es suposa que l'equació d'ona de Webster és vàlida per a un determinat tipus de perfil, aleshores, dins de la mateixa aproximació, serà vàlid que en el seu interior es propaguen ones uniparamètriques.

Si a l'equació d'ona de Webster s'introdueix $S(x)=\pi[y(x)]^2$, on $y(x)$ és el radi de la secció transversal del pavelló a una distància x del coll, (Fig. 1.I.2.1), i es té en compte que la pressió acústica és de la forma:

$$\hat{p}(x,t)=\frac{A_+}{y(x)}e^{\mathrm{j}(\varphi(x)-\omega t)}+\frac{A_-}{y(x)}e^{-\mathrm{j}(\varphi(x)+\omega t)},$$

s'obté la següent expressió:

$$-\frac{1}{y(x)}\left[\frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2}+y(x)\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right)^2-y(x)\frac{\omega^2}{c^2}\right]\left[A_+e^{\mathrm{j}(\varphi(x)-\omega t)}+A\_e^{-\mathrm{j}(\varphi(x)+\omega t)}\right]+$$

$$\mathrm{j}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2}\left[A_+e^{\mathrm{j}(\varphi(x)-\omega t)}-A\_e^{-\mathrm{j}(\varphi(x)+\omega t)}\right]=0.$$

La part real i la part imaginària d'aquesta expressió han de ser nul·les per separat per a qualsevol valor de $y(x)$ i $\varphi(x)$ reals. Aquest fet porta a:

$$\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2}=0,\ \text{la qual cosa implica que}\ \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}=\text{ctant.}$$

Per altra banda s'obté que el radi de la secció transversal del pavelló ha de satisfer la següent equació:

$$\frac{1}{y(x)}\frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right)^2-\frac{\omega^2}{c^2}=0.$$

Si $\partial\varphi(x)/\partial x$ pren el valor $\tau\omega/c$ l'equació anterior es reescriu com:

$$\frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2}-\frac{\omega^2}{c^2}(1-\tau^2)y(x)=0,$$

que és l'equació que, finalment, descriu de manera aproximada el radi de la secció transversal del pavelló.