

APÈNDIX 1.III RESULTATS PER A $Z(x, \omega)$, $Z_+(x, \omega)$ I PER A $h_-(t)$, $h_+(t)$

1.III.1 Obtenció de les expressions de les impedàncies $Z(x, \omega)$ i $Z_+(x, \omega)$

L'equació de Webster expressada en funció del potencial de velocitat $\Phi(x, t)$ s'escriu:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{S(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[S(x) \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} \right],$$

on $S(x)$ és la secció transversal del tub en la qual es suposa que la pressió és uniforme. Si en aquesta equació s'introdueix el canvi de variable $\Phi(x, t) = \Psi(x, t) / \sqrt{S(x)}$ s'obté:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{m^2} \Psi(x, t), \text{ on}$$

$$-\frac{1}{m^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{S^2(x)} \left(\frac{\partial S(x)}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{S(x)} \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2}.$$

Si es suposa una solució harmònica per a $\Psi(x, t)$ tal que $\Psi(x, t) = \hat{\Psi}(x) e^{j\omega t}$, l'equació anterior es reescriu:

$$\frac{\partial^2 \hat{\Psi}(x)}{\partial x^2} + \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \frac{1}{m^2} \right] \hat{\Psi}(x) = 0.$$

Aquesta equació correspon a un moviment harmònic simple, sempre i quan m^2 no depengui de x i el factor que multiplica a $\hat{\Psi}(x)$ sigui positiu, i té per solució:

$$\hat{\Psi}(x) = \hat{A}_- e^{-jk'x} + \hat{A}_+ e^{jk'x}, \text{ amb } k'^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \frac{1}{m^2} = \frac{\omega^2}{\tilde{c}(\omega)^2},$$

essent $\tilde{c}(\omega) \equiv c \left(1 - \frac{c^2}{m^2 \omega^2} \right)^{-1/2}$, que és la velocitat de propagació i depèn de la freqüència.

Si es desfà el canvi de variable i es té en compte que:

$$\hat{p}(x) = -\rho \frac{\partial \hat{\Phi}(x)}{\partial x} \quad \text{i} \quad \hat{u}(x) = \frac{\partial \hat{\Phi}(x)}{\partial x},$$

les expressions que s'obtenen per a la pressió i la velocitat són:

$$\begin{aligned} \hat{p}(x) &= -j\omega\rho \frac{1}{\sqrt{S(x)}} \left[\hat{A}_- e^{-jk'x} + \hat{A}_+ e^{jk'x} \right] \equiv \hat{p}_-(x) + \hat{p}_+(x), \\ \hat{u}(x) &= \frac{1}{\sqrt{S(x)}} \left[-\hat{A}_- \left(jk' + \frac{1}{2} \sigma(x) \right) e^{-jk'x} + \hat{A}_+ \left(jk' - \frac{1}{2} \sigma(x) \right) e^{jk'x} \right] \equiv \hat{u}_-(x) + \hat{u}_+(x), \\ \text{on } \sigma(x) &= \frac{1}{S(x)} \frac{\partial S(x)}{\partial x}. \end{aligned}$$

A partir d'aquestes expressions es poden obtenir les de les impedàncies $Z_-(x, \omega)$ i $Z_+(x, \omega)$, que s'interpreten com la impedància a la secció d'entrada d'una ona que es propaga en el sentit de les x creixents quan es suposa una terminació anecoica a la sortida, $Z_-(x, \omega)$, i la impedància a la secció de sortida d'una ona que es propaga en el sentit de les x decreixents quan es suposa una terminació anecoica a l'entrada, $Z_+(x, \omega)$. Així doncs s'obté:

$$Z_-(x, \omega) = \frac{\hat{p}_-(x)}{\hat{u}_-(x)} = \frac{-j\omega\rho \frac{1}{\sqrt{S(x)}} \hat{A}_- e^{-jk'x}}{-\frac{1}{\sqrt{S(x)}} \hat{A}_- \left(jk' + \frac{1}{2} \sigma(x) \right) e^{-jk'x}}, \text{ per tant}$$

$$Z_-(x, \omega) = \frac{j\omega\rho}{jk' + \frac{1}{2} \sigma(x)} = \frac{\rho c}{\frac{k'}{k} - j \frac{\sigma(x)}{2k}}, \quad (1.111.1.1)$$

$$Z_+(x, \omega) = \frac{\hat{p}_+(x)}{\hat{u}_+(x)} = \frac{-j\omega\rho \frac{1}{\sqrt{S(x)}} \hat{A}_+ e^{jk'x}}{\frac{1}{\sqrt{S(x)}} \hat{A}_+ \left(jk' - \frac{1}{2} \sigma(x) \right) e^{jk'x}}, \text{ per tant}$$

$$Z_+(x, \omega) = -\frac{j\omega\rho}{jk' - \frac{1}{2} \sigma(x)} = -\frac{\rho c}{\frac{k'}{k} + j \frac{\sigma(x)}{2k}} \quad (1.111.1.2)$$

1.III.2 Obtenció de les expressions de les respostes $h_-(t)$ i $h_+(t)$

Les transformades de Fourier de les expressions 1.III.1.1 i 1.III.1.2 proporcionaran les respostes impulsional elementals $h_-(t)$ i $h_+(t)$. Així:

$$h_-(x,t) = \text{TF}^{-1}[Z_-(x,\omega)] \quad \text{i} \quad h_+(x,t) = \text{TF}^{-1}[Z_+(x,\omega)].$$

Aquestes respostes impulsional s'interpreten com la resposta a un impuls de pressió generat a la secció d'entrada i que es propaga en el sentit de les x creixents, $h_-(t)$, i la resposta a un impuls de pressió generat a la secció de sortida i que es propaga en el sentit de les x decreixents, $h_+(t)$.

El càlcul analític d'aquestes transformades de Fourier cal fer-lo en el camp complex i per tant primer cal realitzar una divisió de nombres complexos. Per poder aplicar el teorema de Cauchy i realitzar la integral mitjançant el càlcul de residus cal que el grau del denominador sigui més petit que el del numerador.

Si es considera que $|c^2\omega^{-2}m^{-2}| \ll 1$, l'expressió de k' es pot desenvolupar en sèrie de Taylor, els termes lineals de la qual proporcionen:

$$k' = \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{m^2} \right]^{1/2} = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{c^2}{\omega^2 m^2} \right]^{1/2} \approx \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{c^2}{\omega^2 m^2} \right].$$

Segons quin sigui el valor de m aquesta aproximació serà vàlida a partir d'un valor de ω o d'un altre, però cal recordar que aquest valor mínim de ω coincideix amb la freqüència de tall a partir de la qual els modes són propagatius, tal com s'ha vist a les seccions 1.2 i 1.5. Per altra banda, aquesta aproximació serà més vàlida com més elevada sigui la freqüència, per tant es podria dir que és una aproximació per a altes freqüències.

Amb aquest desenvolupament les expressions 1.III.1.1 i 1.III.1.2 es reescriuen:

$$Z_-(x,\omega) = \frac{j\omega\rho}{\frac{1}{2}\sigma(x) + j\left(\frac{\omega}{c} - \frac{1}{2}\frac{c}{\omega m^2}\right)} = \frac{2j\rho c\omega^2 m^2}{\sigma(x)c\omega m^2 + j(2\omega^2 m^2 - c^2)} =$$

$$\rho c \left[1 + \frac{-\sigma(x)\omega c m^2 + j c^2}{\sigma(x)\omega c m^2 + j(2\omega^2 m^2 - c^2)} \right] = \rho c \left[1 + \frac{N_-(\omega)}{D_-(\omega)} \right] \quad (1.III.2.1)$$

$$Z_+(x, \omega) = \frac{j\omega\rho}{-\frac{1}{2}\sigma(x) + j\left(\frac{\omega}{c} - \frac{1}{2}\frac{c}{\omega m^2}\right)} = \frac{2j\rho c\omega^2 m^2}{\sigma(x)c\omega m^2 - j(2\omega^2 m^2 - c^2)} =$$

$$-\rho c \left[1 - \frac{\sigma(x)\omega c m^2 + jc^2}{\sigma(x)\omega c m^2 - j(2\omega^2 m^2 - c^2)} \right] = -\rho c \left[1 - \frac{N_+(\omega)}{D_+(\omega)} \right] \quad (1.III.2.2).$$

Per tant:

$$h_-(x, t) = \text{TF}^{-1}[Z_-(x, \omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho c \left[1 + \frac{N_-(\omega)}{D_-(\omega)} \right] e^{j\omega t} d\omega \quad i$$

$$h_+(x, t) = \text{TF}^{-1}[Z_+(x, \omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} -\rho c \left[1 - \frac{N_+(\omega)}{D_+(\omega)} \right] e^{j\omega t} d\omega.$$

La realització d'aquests càlculs condueix a:

$$h_-(x, t) = \rho c \left[\delta(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_-(\omega)}{D_-(\omega)} e^{j\omega t} d\omega \right] \quad i$$

$$h_+(x, t) = \rho c \left[-\delta(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_+(\omega)}{D_+(\omega)} e^{j\omega t} d\omega \right].$$

El càlcul de la segona integral de les expressions de $h_-(t)$ i $h_+(t)$ es fa emprant el teorema de Cauchy mitjançant el càlcul de residus:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi j \sum \text{Residus}.$$

Segons la teoria de càlcul de residus, si a és un pol d'ordre k de la funció $f(z)$, el residu corresponent es calcula amb l'expressió:

$$a_k = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-a)^k f(z) \right].$$

Primerament cal conèixer on es situen els pols de $D_{\mp}(\omega)$, és a dir per a quins nombres complexos s'anul·len $D_{\mp}(\omega)$. Els pols seran de la forma $\alpha + j\beta$; per tant per a $D_-(\omega)$:

$$D_-(\omega) = \sigma\omega cm^2 + j(2\omega^2 m^2 - c^2) = (\alpha + j\beta)\sigma cm^2 + 2jm^2(\alpha + j\beta)^2 - jc^2 = 0, \text{ on } \sigma = \sigma(x).$$

La part real i la part imaginària han d'anul·lar-se per separat:

$$\operatorname{Re}[D_-(\omega)] = 0 \Rightarrow \alpha m^2(\sigma c - 4\beta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m^2 = 0 & \leftarrow \text{No és possible} \\ \alpha = 0 \\ \beta = \frac{\sigma c}{4} \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}[D_-(\omega)] = 0 \Rightarrow m^2(\beta\sigma c + 2\alpha^2 - 2\beta^2) - c^2 = 0$$

$$\text{Si } \alpha = 0 \Rightarrow 2m^2\beta^2 - \sigma cm^2\beta + c^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \frac{c}{4}\left(\sigma - \frac{v}{m}\right) \\ \beta_2 = \frac{c}{4}\left(\sigma + \frac{v}{m}\right) \end{cases}$$

$$\text{Si } \beta = \frac{\sigma c}{4} \Rightarrow 2m^2\alpha^2 + \frac{\sigma^2 c^2 m^2}{8} - c^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = j\frac{c v}{4m} \\ \alpha_2 = -j\frac{c v}{4m} \end{cases}$$

$$\text{amb } v = \sqrt{\sigma^2 m^2 - 8}.$$

Per tant els pols de $D_-(\omega)$ es troben a les freqüències:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= j\frac{c}{4}\left(\sigma - \frac{v}{m}\right); & \omega_3 &= j\frac{c v}{4m} + j\frac{\sigma c}{4} = j\frac{c}{4}\left(\sigma + \frac{v}{m}\right) = \omega_2 \\ \omega_2 &= j\frac{c}{4}\left(\sigma + \frac{v}{m}\right); & \omega_4 &= -j\frac{c v}{4m} + j\frac{\sigma c}{4} = j\frac{c}{4}\left(\sigma - \frac{v}{m}\right) = \omega_1. \end{aligned}$$

De fet, doncs, només hi ha dos pols d'ordre 1 per a $D_-(\omega)$: un a la freqüència ω_1 i un altre a ω_2 . Així doncs, el càlcul de residus per a $D_-(\omega)$ es redueix a:

$$\sum \text{Residus} = \operatorname{Res}(\omega_1) + \operatorname{Res}(\omega_2).$$

Com que $D_-(\omega) = 2jm^2(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)$, els residus seran:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\omega_1) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} (\omega - \omega_1) \frac{N_-(\omega)e^{j\omega t}}{2jm^2(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} = \frac{(jc^2 - \sigma\omega_1 cm^2)e^{j\omega_1 t}}{2jm^2(\omega_1 - \omega_2)} = \\ &= \frac{j c}{vm} \left[1 - \frac{\sigma m^2}{4} \left(\sigma - \frac{v}{m} \right) \right] e^{-\frac{c}{4} \left(\sigma - \frac{v}{m} \right) t}, \\ \text{Res}(\omega_2) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_2} (\omega - \omega_2) \frac{N_-(\omega)e^{j\omega t}}{2jm^2(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} = \frac{(jc^2 - \sigma\omega_2 cm^2)e^{j\omega_2 t}}{2jm^2(\omega_2 - \omega_1)} = \\ &= -\frac{j c}{vm} \left[1 - \frac{\sigma m^2}{4} \left(\sigma + \frac{v}{m} \right) \right] e^{-\frac{c}{4} \left(\sigma + \frac{v}{m} \right) t}. \end{aligned}$$

Per tant:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_-(\omega)}{D_-(\omega)} e^{j\omega t} d\omega &= 2\pi j \sum \text{Residus} = \\ &= 2\pi j \left\{ \frac{j c}{vm} \left[1 - \frac{\sigma m^2}{4} \left(\sigma - \frac{v}{m} \right) \right] e^{-\frac{c}{4} \left(\sigma - \frac{v}{m} \right) t} - \frac{j c}{vm} \left[1 - \frac{\sigma m^2}{4} \left(\sigma + \frac{v}{m} \right) \right] e^{-\frac{c}{4} \left(\sigma + \frac{v}{m} \right) t} \right\} = \\ &= -\frac{2\pi c}{vm} e^{-\frac{c}{4} \sigma t} \left[\left(2 - \frac{\sigma^2 m^2}{2} \right) \sinh\left(\frac{cv}{4m} t\right) + \frac{\sigma m v}{2} \cosh\left(\frac{cv}{4m} t\right) \right], \end{aligned}$$

amb la qual cosa:

$$h_-(t) = \rho c \left\{ \delta(t) - \frac{2\pi c}{vm} \left[\left(2 - \frac{\sigma^2 m^2}{2} \right) \sinh\left(\frac{cv}{4m} t\right) + \frac{\sigma m v}{2} \cosh\left(\frac{cv}{4m} t\right) \right] e^{-\frac{c}{4} \sigma t} \right\}.$$

Els pols de $D_+(\omega)$ es troben de manera anàloga:

$$D_+(\omega) = \sigma\omega cm^2 - j(2\omega^2 m^2 - c^2) = (\alpha + j\beta)\sigma cm^2 - 2jm^2(\alpha + j\beta)^2 + jc^2 = 0.$$

Cal anul·lar la part real i la part imaginària per separat:

$$\text{Re}[D_+(\omega)] = 0 \Rightarrow \alpha m^2(\sigma c + 4\beta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m^2 = 0 & \leftarrow \text{No és possible} \\ \alpha = 0 \\ \beta = -\frac{\sigma c}{4} \end{cases}$$

$$\text{Im}[D_+(\omega)] = 0 \Rightarrow m^2(\beta\sigma c - 2\alpha^2 + 2\beta^2) + c^2 = 0$$

$$\text{Si } \alpha = 0 \Rightarrow 2m^2\beta^2 + \sigma cm^2\beta + c^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \frac{c}{4}\left(-\sigma + \frac{v}{m}\right) \\ \beta_2 = \frac{c}{4}\left(-\sigma - \frac{v}{m}\right) \end{cases}$$

$$\text{Si } \beta = -\frac{\sigma c}{4} \Rightarrow 2m^2\alpha^2 + \frac{\sigma^2 c^2 m^2}{8} - c^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = j\frac{cv}{4m} \\ \alpha_2 = -j\frac{cv}{4m} \end{cases}$$

Per tant els pols de $D_+(\omega)$ es troben a les freqüències:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -j\frac{c}{4}\left(\sigma - \frac{v}{m}\right); & \omega_3 &= j\frac{cv}{4m} - j\frac{\sigma c}{4} = -j\frac{c}{4}\left(\sigma - \frac{v}{m}\right) = \omega_1 \\ \omega_2 &= -j\frac{c}{4}\left(\sigma + \frac{v}{m}\right); & \omega_4 &= -j\frac{cv}{4m} - j\frac{\sigma c}{4} = -j\frac{c}{4}\left(\sigma + \frac{v}{m}\right) = \omega_2. \end{aligned}$$

Com que $D_+(\omega) = -2jm^2(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)$ els residus seran:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\omega_1) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} (\omega - \omega_1) \frac{N_+(\omega)e^{j\omega t}}{-2jm^2(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} = \frac{(jc^2 + \sigma\omega_1 cm^2)e^{j\omega_1 t}}{-2jm^2(\omega_1 - \omega_2)} = \\ &= \frac{jc}{vm} \left[1 - \frac{\sigma m^2}{4} \left(\sigma - \frac{v}{m} \right) \right] e^{\frac{c}{4} \left(\sigma - \frac{v}{m} \right) t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(\omega_2) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_2} (\omega - \omega_2) \frac{N_+(\omega)e^{j\omega t}}{-2jm^2(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} = \frac{(jc^2 + \sigma\omega_2 cm^2)e^{j\omega_2 t}}{-2jm^2(\omega_2 - \omega_1)} = \\ &= -\frac{jc}{vm} \left[1 - \frac{\sigma m^2}{4} \left(\sigma + \frac{v}{m} \right) \right] e^{\frac{c}{4} \left(\sigma + \frac{v}{m} \right) t}. \end{aligned}$$

Per tant:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_+(\omega)}{D_+(\omega)} e^{j\omega t} d\omega &= 2\pi j \sum \text{Residus} = \\ &= 2\pi j \left\{ \frac{jc}{vm} \left[1 - \frac{\sigma m^2}{4} \left(\sigma - \frac{v}{m} \right) \right] e^{\frac{c}{4} \left(\sigma - \frac{v}{m} \right) t} - \frac{jc}{vm} \left[1 - \frac{\sigma m^2}{4} \left(\sigma + \frac{v}{m} \right) \right] e^{\frac{c}{4} \left(\sigma + \frac{v}{m} \right) t} \right\} = \end{aligned}$$

$$-\frac{2\pi c}{vm} e^{\frac{c}{4}\sigma t} \left[\left(\frac{\sigma^2 m^2}{2} - 2 \right) \sinh\left(\frac{cv}{4m}t\right) + \frac{\sigma m v}{2} \cosh\left(\frac{cv}{4m}t\right) \right],$$

amb la qual cosa:

$$h_+(t) = \rho c \left\{ -\delta(t) + \frac{2\pi c}{vm} \left[\left(2 - \frac{\sigma^2 m^2}{2} \right) \sinh\left(\frac{cv}{4m}t\right) - \frac{\sigma m v}{2} \cosh\left(\frac{cv}{4m}t\right) \right] e^{\frac{c}{4}\sigma t} \right\}.$$

Tant en el càlcul de residus per a $h_-(t)$ com per a $h_+(t)$ s'ha suposat que $v = \sqrt{\sigma^2 m^2 - 8}$ és real amb la qual cosa els residus són imaginaris purs i les respostes impulsionalis són reals. Evidentment, però, aquesta expressió pot ser imaginària amb la qual cosa els residus tindran part real i part imaginària i les expressions de $h_-(t)$ i $h_+(t)$ seran diferents.

Sigui $v = j\sqrt{8 - \sigma^2 m^2} = jv'$, aleshores:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_-(\omega)}{D_-(\omega)} e^{j\omega t} d\omega &= 2\pi j \sum \text{Residus} = \\ &-\frac{2\pi c}{vm} e^{-\frac{c}{4}\sigma t} \left[\left(2 - \frac{\sigma^2 m^2}{2} \right) \sinh\left(\frac{cv}{4m}t\right) + \frac{\sigma m v}{2} \cosh\left(\frac{cv}{4m}t\right) \right] = \\ &-\frac{2\pi c}{v'm} e^{-\frac{c}{4}\sigma t} \left[\left(2 - \frac{\sigma^2 m^2}{2} \right) \sin\left(\frac{cv'}{4m}t\right) + \frac{\sigma m v'}{2} \cos\left(\frac{cv'}{4m}t\right) \right], \end{aligned}$$

amb la qual cosa:

$$h_-(t) = \rho c \left\{ \delta(t) - \frac{2\pi c}{v'm} \left[\left(2 - \frac{\sigma^2 m^2}{2} \right) \sin\left(\frac{cv'}{4m}t\right) + \frac{\sigma m v'}{2} \cos\left(\frac{cv'}{4m}t\right) \right] e^{-\frac{c}{4}\sigma t} \right\}.$$

Anàlogament:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_+(\omega)}{D_+(\omega)} e^{j\omega t} d\omega &= 2\pi j \sum \text{Residus} = \\ &-\frac{2\pi c}{vm} e^{\frac{c}{4}\sigma t} \left[\left(2 - \frac{\sigma^2 m^2}{2} \right) \sinh\left(\frac{cv}{4m}t\right) - \frac{\sigma m v}{2} \cosh\left(\frac{cv}{4m}t\right) \right] = \end{aligned}$$

$$\frac{2\pi c}{v' m} e^{\frac{c}{4}\sigma t} \left[\left(2 - \frac{\sigma^2 m^2}{2} \right) \sin\left(\frac{cv'}{4m} t\right) - \frac{\sigma m v'}{2} \cos\left(\frac{cv'}{4m} t\right) \right],$$

amb la qual cosa:

$$h_+(t) = \rho c \left\{ -\delta(t) + \frac{2\pi c}{v' m} \left[\left(2 - \frac{\sigma^2 m^2}{2} \right) \sin\left(\frac{cv'}{4m} t\right) - \frac{\sigma m v'}{2} \cos\left(\frac{cv'}{4m} t\right) \right] e^{\frac{c}{4}\sigma t} \right\}.$$

1.III.3 Resultats per a $Z_-(x,\omega)$, $Z_+(x,\omega)$, $h_-(t)$ i $h_+(t)$

En aquest apartat s'exposen els resultats de $Z_-(x,\omega)$, $Z_+(x,\omega)$, $h_-(t)$ i $h_+(t)$ per al cas d'un tub cilíndric, d'un tub cònic i d'un tub exponencial.

1.III.3.1 Tub cilíndric

En el cas d'un tub cilíndric ($m \rightarrow \infty$, $\sigma=0$) i per tant les expressions 1.III.1.1 i 1.III.1.2 condueixen a:

$$\begin{aligned} Z_-(x,\omega) = \rho c &\Rightarrow h_-(t) = \rho c \delta(t) \\ Z_+(x,\omega) = -\rho c &\Rightarrow h_+(t) = -\rho c \delta(t), \end{aligned}$$

resultats que coincideixen plenament amb els ja prèviament coneguts.

1.III.3.2 Tub cònic

En el cas d'un tub cònic de radi $r=r_o+bx$ ($m \rightarrow \infty$, $\sigma = 2b/(r_o + bx)$) les expressions 1.III.1.1 i 1.III.1.2 donen com a resultat:

$$Z_-(x,\omega) = \rho c \left[1 - \frac{bc}{j\omega(r_o + bx) + bc} \right] \Rightarrow h_-(t) = \rho c \left[\delta(t) - \frac{bc}{(r_o + bx)} e^{-\frac{bc}{(r_o + bx)} t} \right]$$

$$Z_+(x,\omega) = -\rho c \left[1 + \frac{bc}{j\omega(r_o + bx) - bc} \right] \Rightarrow h_+(t) = -\rho c \left[\delta(t) + \frac{bc}{(r_o + bx)} e^{\frac{bc}{(r_o + bx)} t} \right].$$

Aquests resultats coincideixen amb els coneguts i es troben representats de la Fig. 1.III.3.1 a la Fig. 1.III.3.4.

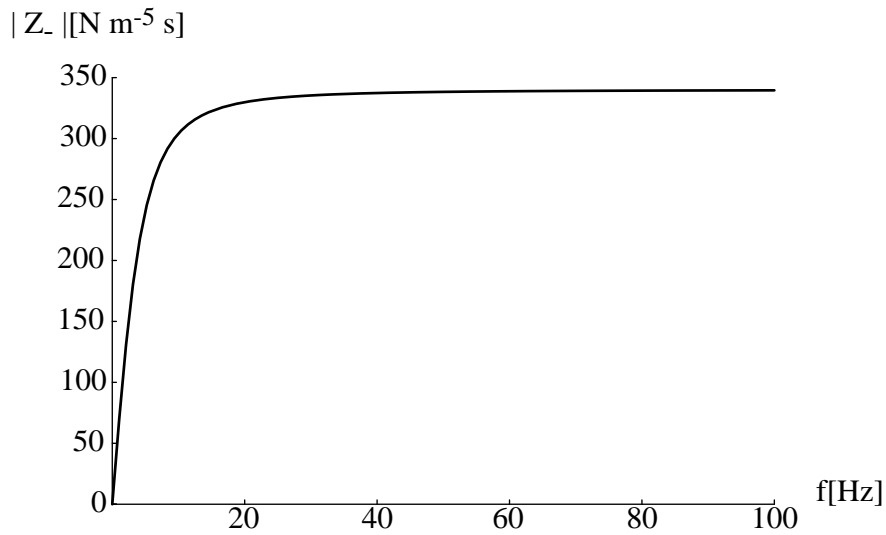


Fig. 1.III.3.1 Representació de $Z_-(\omega)$ per a un tub cònic.

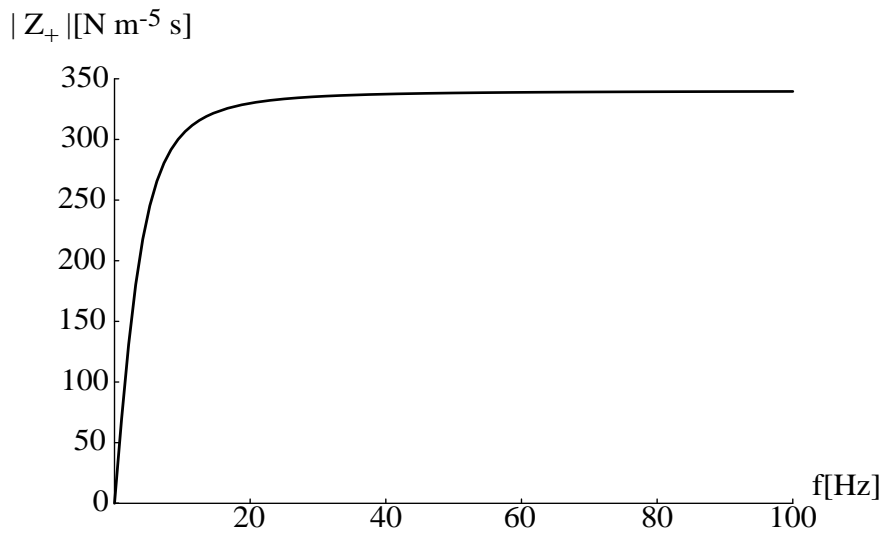


Fig. 1.III.3.2 Representació de $Z_+(\omega)$ per a un tub cònic.

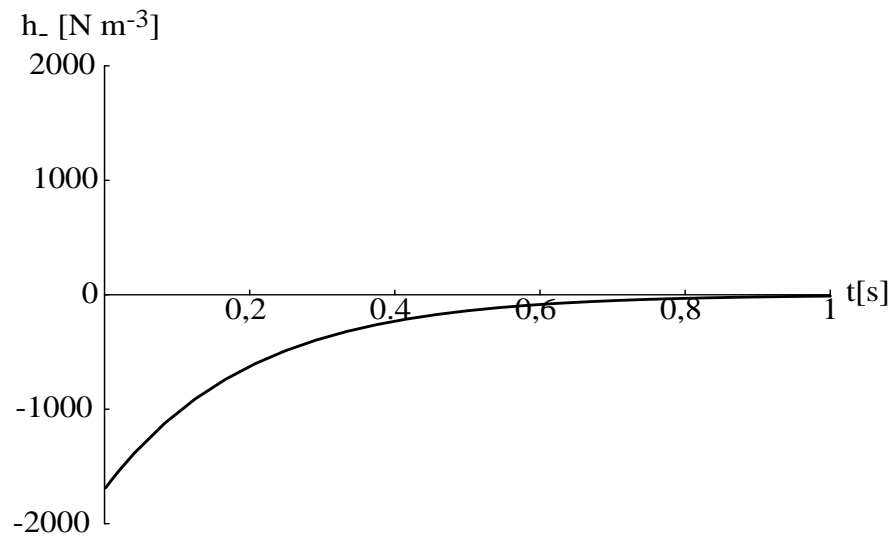


Fig. 1.III.3.3 Representació de $h_-(t)$ per a un tub cònic.

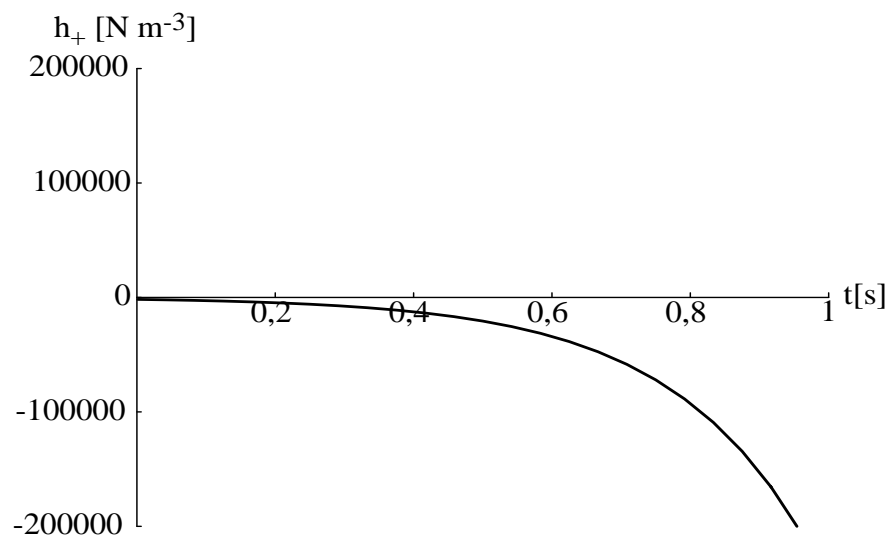


Fig. 1.III.3.4 Representació de $h_+(t)$ per a un tub cònic.

1.III.3.3 Tub exponencial

En el cas d'un tub exponencial de radi $r=r_0 e^{bx}$ ($m=1/b$, $\sigma=2b$) les expressions 1.III.1.1 i 1.III.1.2 condueixen al resultat:

$$Z_-(x, \omega) = \frac{j\omega\rho}{b + j\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - b^2}} \quad \text{i} \quad Z_+(x, \omega) = \frac{-j\omega\rho}{-b + j\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - b^2}}.$$

En aquest cas és necessari treballar amb les expressions aproximades 1.III.2.1 i 1.III.2.2 que condueixen a unes respostes impulsional:

$$h_-(t) = \rho c \left[\delta(t) - 2\pi cb \cos\left(\frac{cb}{2}t\right) e^{-\frac{cb}{2}t} \right] \quad \text{i}$$

$$h_+(t) = -\rho c \left[\delta(t) + 2\pi cb \cos\left(\frac{cb}{2}t\right) e^{\frac{cb}{2}t} \right].$$

Aquests resultats es troben representats de la Fig. 1.III.3.5 a la Fig. 1.III.3.8. Els gràfics corresponents a les impedàncies mostren com fins al valor $\omega_{mín}$ per al qual comença a ser vàlida l'aproximació, 350 Hz, no s'assoleix el valor de la impedància característica, cosa que en els tubs cònics passa a partir de freqüències molt més baixes. Per altra banda, les respostes impulsional es corresponen amb una oscil·lació d'amplitud decreixent i una d'amplitud creixent respectivament, mentre que en el cas dels tubs cònics es tenen funcions exponencials, també decreixents i creixents.

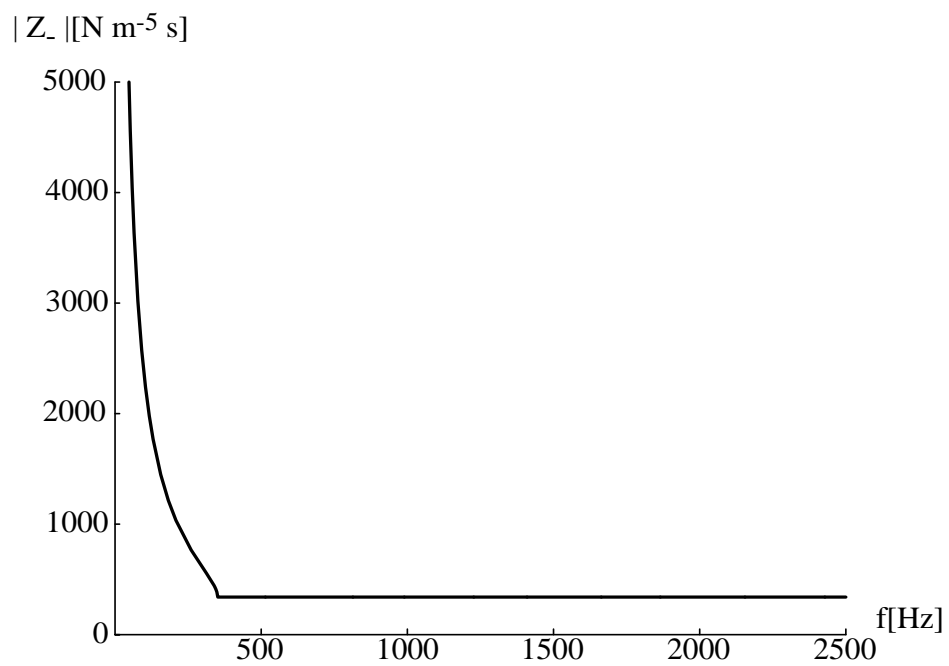


Fig. 1.III.3.5 Representació de $Z_-(\omega)$ per a un tub exponencial.

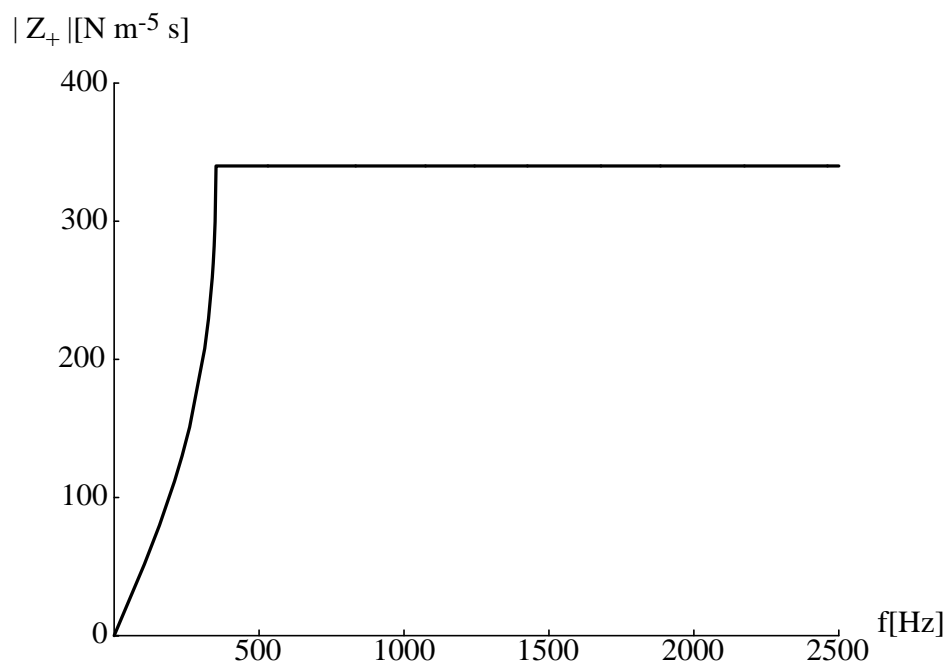


Fig. 1.III.3.6 Representació de $Z_+(\omega)$ per a un tub exponencial.

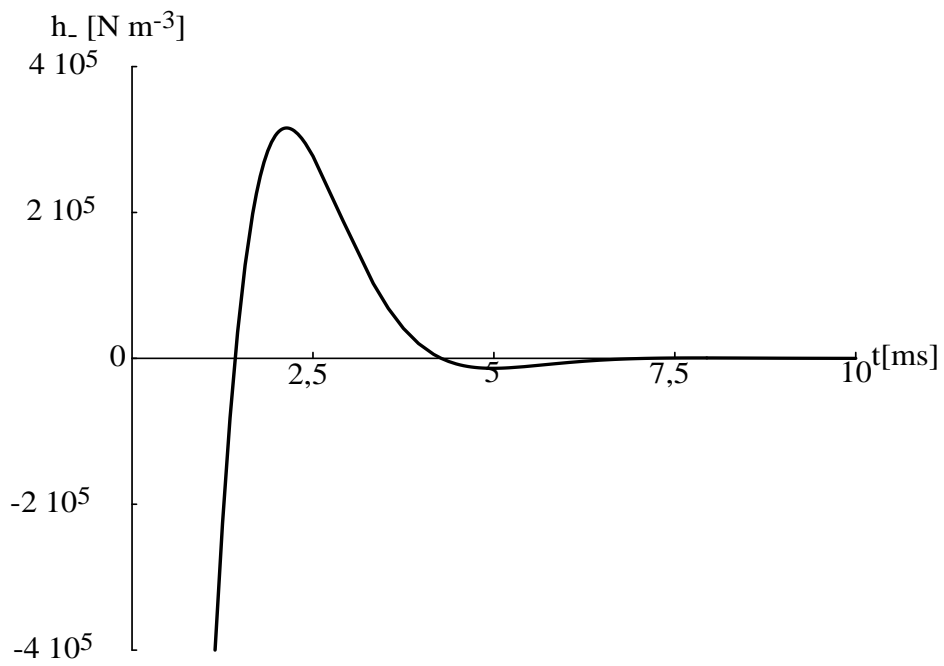


Fig. 1.III.3.7 Representació de $h_-(t)$ per a un tub exponencial.

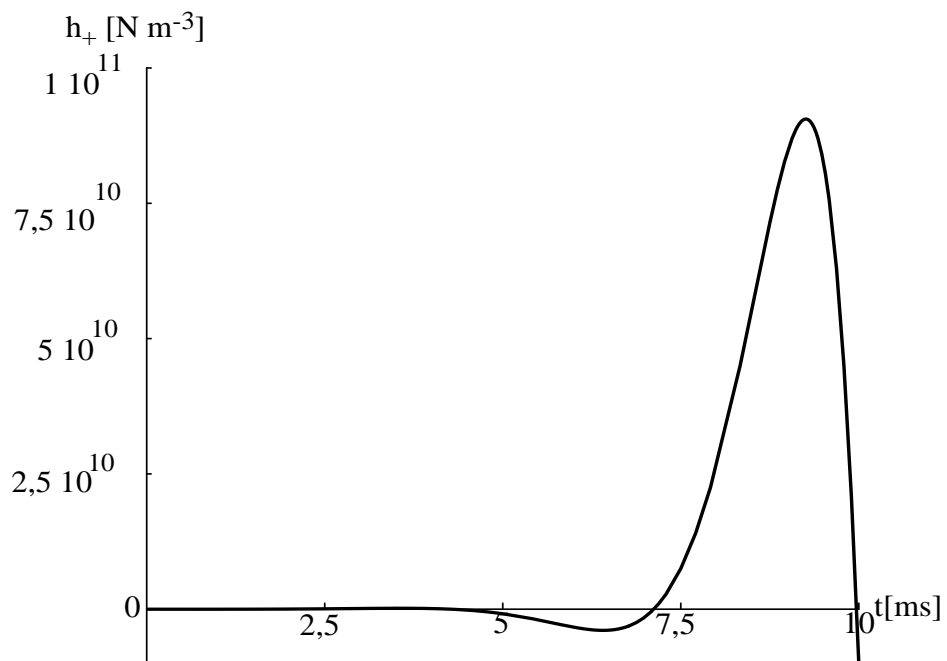


Fig. 1.III.3.8 Representació de $h_+(t)$ per a un tub exponencial.