APÈNDIX 2.I EQUACIÓ CH

2.I.1 Equació d'ona uniparamètrica per a perfils de conicitat variable

El punt de partida per a l'obtenció d'aquesta equació d'ona és emprar l'equació d'ona general:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p \ , \ \text{amb} \ \ p = p(x,y,z,t)$$

i integrar-la emprant el teorema de Gauss dins d'un volum V limitat per dues superfícies equipotencials de pressió constant caracteritzades per la coordenada q, $S(q)$ d'àrea $A(q)$ (Fig. 2.I.1.1). El volum d'integració és constant al llarg del temps. En el cas més general la geometria de les superfícies equipotencials no serà esfèrica i l'angle φ, definit a la Fig. 2.I.1.1, variarà entre 0 i $\theta(q)$.

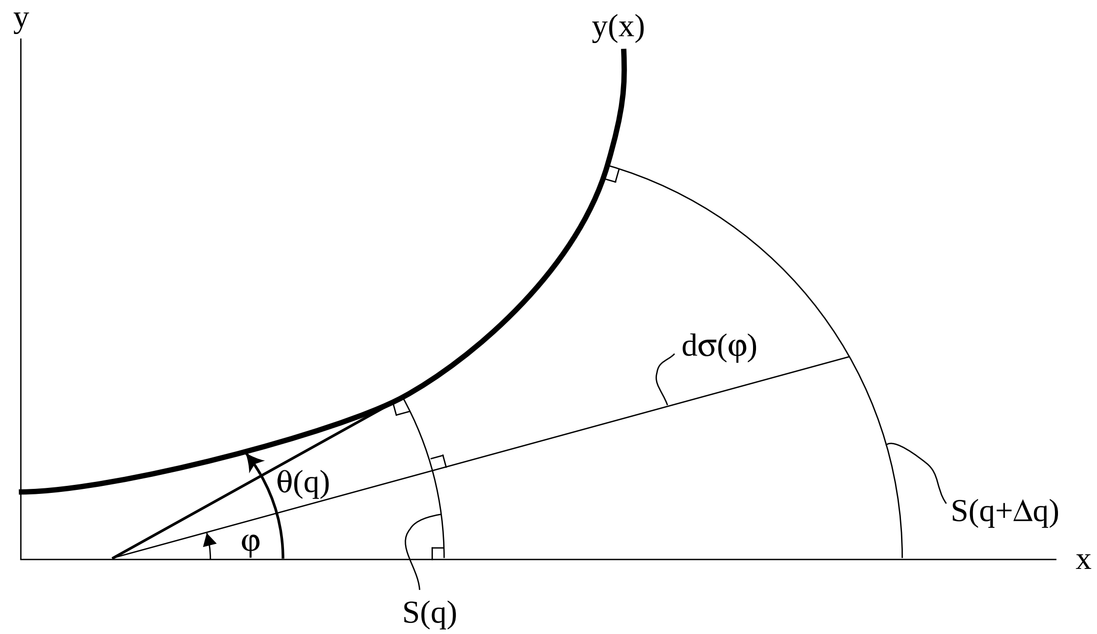

Fig. 2.I.1.1 Coordenades emprades per determinar l'equació d'ones uniparamètrica.

La realització de la integral condueix a:

$$\frac{1}{c^2}\int_V \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,\mathrm{d}V = \int_V \overline{\nabla}\cdot(\overline{\nabla}p)\,\mathrm{d}V,$$ que amb l'aplicació del teorema de Gauss es transforma en:

$$\frac{1}{c^2}\int_V \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,\mathrm{d}V = \int_{S(q)} (\overline{\nabla}p)_q\cdot \mathrm{d}\overline{S}_q + \int_{S(q+\Delta q)} (\overline{\nabla}p)_{q+\Delta q}\cdot \mathrm{d}\overline{S}_{q+\Delta q}\,. \qquad (\ 2.\mathrm{I}.1.1\ )$$

Per poder fer el càlcul cal saber quant val cada un dels integrants:

$$(\overline{\nabla}p)_q\cdot \mathrm{d}\overline{S}_q = -\left|\overline{\nabla}p\right|_q \mathrm{d}A_q(\varphi)$$
$$(\overline{\nabla}p)_{q+\Delta q}\cdot \mathrm{d}\overline{S}_{q+\Delta q} = \left|\overline{\nabla}p\right|_{q+\Delta q} \mathrm{d}A_{q+\Delta q}(\varphi).$$

Ara cal conèixer quant val el gradient de pressió:

$$\left|\overline{\nabla}p\right|_q = \frac{p(q+\mathrm{d}q)-p(q)}{\mathrm{d}\sigma_q(\varphi)}\ ,$$

on $\mathrm{d}\sigma_q(\varphi)$ és el gruix del $\mathrm{d}V$ entre $S(q)$ i $S(q+\mathrm{d}q)$ per a l'angle φ. Aquest diferencial és només perpendicular a $S(q)$. Aleshores:

$$(\overline{\nabla}p)_q\cdot \mathrm{d}\overline{S}_q = -\frac{p(q+\mathrm{d}q)-p(q)}{\mathrm{d}\sigma_q(\varphi)}\mathrm{d}A_q(\varphi) = -\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_q \mathrm{d}q\,\frac{\mathrm{d}A_q(\varphi)}{\mathrm{d}\sigma_q(\varphi)},$$

$$(\overline{\nabla}p)_{q+\Delta q}\cdot \mathrm{d}\overline{S}_{q+\Delta q} = \frac{p(q+\Delta q+\mathrm{d}q)-p(q+\Delta q)}{\mathrm{d}\sigma_{q+\Delta q}(\varphi)}\mathrm{d}A_{q+\Delta q}(\varphi) = \left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_{q+\Delta q} \mathrm{d}q\,\frac{\mathrm{d}A_{q+\Delta q}(\varphi)}{\mathrm{d}\sigma_{q+\Delta q}(\varphi)},$$

on $\mathrm{d}A_q$ és l'àrea diferencial de la porció de superfície $S(q)$ compresa entre $\varphi=\varphi$ i $\varphi=\varphi+\mathrm{d}\varphi$. Aquestes porcions de superfície són uns anells més o menys corbs segons la geometria que es triï per a les superfícies equipotencials.

Si es coneix $A(q)$ com a funció exclusivament de $\theta(q)$, i la resta són paràmetres constants per a qualsevol valor de φ mentre no ens moguem de $S(q)$, aleshores coneguda $A_q(\theta)$ es podrà obtenir $\mathrm{d}A_q(\varphi)$ i com que sempre es pot escriure:

$$\mathrm{d}A_q(\varphi) = \frac{\mathrm{d}A_q(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\mathrm{d}\varphi \qquad \text{i} \qquad \mathrm{d}\sigma_q(\varphi) = f(\varphi)\mathrm{d}q,$$

el costat dret de l'equació 2.I.1.1 es transforma en:

$$\int_{S(q)} (\overline{\nabla} p)_q \cdot \mathrm{d}\overline{S}_q + \int_{S(q+\Delta q)} (\overline{\nabla} p)_{q+\Delta q} \cdot \mathrm{d}\overline{S}_{q+\Delta q} =$$

$$\int_{S(q+\Delta q)} \left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_{q+\Delta q} \mathrm{d}q \frac{\mathrm{d}A_{q+\Delta q}(\varphi)}{\mathrm{d}\sigma_{q+\Delta q}(\varphi)} - \int_{S(q)} \left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_q \mathrm{d}q \frac{\mathrm{d}A_q(\varphi)}{\mathrm{d}\sigma_q(\varphi)} =$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_{q+\Delta q} \int_{S(q+\Delta q)} \frac{\mathrm{d}A_{q+\Delta q}(\varphi)}{f_{q+\Delta q}(\varphi)} - \left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_q \int_{S(q)} \frac{\mathrm{d}A_q(\varphi)}{f_q(\varphi)} =$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_{q+\Delta q} I(q+\Delta q) - \left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_q I(q) = \left.\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_q I(q)\right]_q^{q+\Delta q} = \int_q^{q+\Delta q} \frac{\partial}{\partial q}\left[I(q)\frac{\partial p}{\partial q}\right]\mathrm{d}q.$$

El costat esquerre de l'equació 2.I.1.1 es pot reescriure com:

$$\frac{1}{c^2}\int_V \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\, dV = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_V p \;\mathrm{d}V_q,$$

on $\mathrm{d}V_q$ és el volum entre $S(q)$ i $S(q+\mathrm{d}q)$. Aquest valor sempre es podrà expressar com:

$\mathrm{d}V_q = A(q)g(q)\mathrm{d}q$, on $g(q)$ és una funció que depèn de la geometria triada i de q.

Per tant:

$$\frac{1}{c^2}\int_V \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_q^{q+\Delta q} p(q,t)A(q)g(q)\mathrm{d}q. \text{ Finalment:}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_q^{q+\Delta q} p(q,t)A(q)g(q)\mathrm{d}q = \int_q^{q+\Delta q} \frac{\partial}{\partial q}\left[I(q)\frac{\partial p}{\partial q}\right]\mathrm{d}q.$$

Per tant:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}p(q,t)=\frac{1}{A(q)g(q)}\frac{\partial}{\partial q}\left[I(q)\frac{\partial p(q,t)}{\partial q}\right].$$

Aquesta equació és una equació d’ones uniparamètrica exacta si es té la sort de triar la geometria que la compleixi i és la que es coneix amb el nom de CH (Curvilinear Horn with Flare Equation) [Agulló, 1999].