APÈNDIX 3.I CÀLCUL DEL PROPAGADOR DE LÍNIA

3.I.1 Obtenció del propagador de línia *G*(φ, *A*, *B*, *t*)

La idea general de la hipòtesi cònica diferencial és que les superfícies $S(q)$ són esfèriques i que la propagació al llarg de la línia *ABC* és cònica (Fig. 3.I.1.1). Això fa que les superfícies $S(q)$ no siguin equipotencials ja que el temps que triguen les partícules en anar de $S(q)$ a $S(q+\mathrm{d}q)$ és diferent perquè recorren espais diferents, $\mathrm{d}\sigma(\varphi)$, a la mateixa velocitat. Com que la propagació al llarg de la línia *ABC* és cònica la pressió que hi ha a *A* arribarà a *B* en un temps $\mathrm{d}t=\mathrm{d}\sigma(\varphi_A)/c$, la que hi ha a *B* arribarà a *C* en un temps $\mathrm{d}t'=\mathrm{d}\sigma(\varphi_B)/c$, etc.

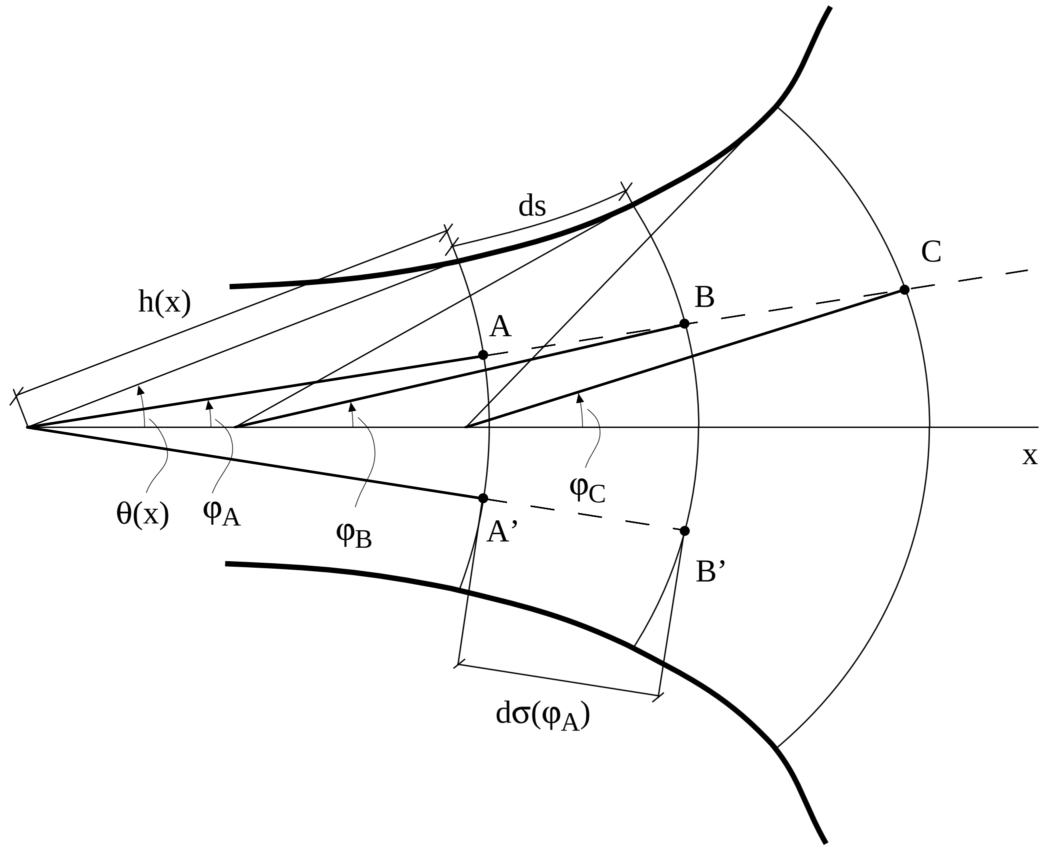

Fig. 3.I.1.1 Esquema del propagador de línia.

Aquest fet permet escriure la pressió a *B* en funció de la pressió a *A*, etc.:

$$p(B,t) = p\left(A, t - \frac{\mathrm{d}\sigma(\varphi_A)}{c}\right)\frac{h(x_A)}{h(x_A)+\mathrm{d}\sigma(\varphi_A)} = p(A,t) * g_{AB}$$

$$p(C,t)=p(B,t)*g_{BC}$$

$$g_{AB}=\frac{h(x_A)}{h(x_A)+\mathrm{d}\sigma(\varphi_A)}\delta\left(t-\frac{\mathrm{d}\sigma(\varphi_A)}{c}\right);\ g_{BC}=\frac{h(x_B)}{h(x_B)+\mathrm{d}\sigma(\varphi_B)}\delta\left(t-\frac{\mathrm{d}\sigma(\varphi_B)}{c}\right);\ \ldots$$

Per tant al llarg de tota la línia i des d'un punt Q_1 fins a un punt Q_n es pot definir un propagador ja que:

$$p(Q_n,t)=p(Q_1,t)*g_{1n},\ \text{ on }\ g_{1n}=f(Q_1,Q_n)\delta\left(t-\frac{\sigma_{1n}}{c}\right),$$

i on la funció $f(Q_1,Q_n)$ vindrà donada per l'expressió:

$$f(Q_1,Q_n)=\frac{h(x_1)h(x_2)\ldots h(x_{n-1})}{\left(h(x_1)+\mathrm{d}\sigma(\varphi_1)\right)\left(h(x_2)+\mathrm{d}\sigma(\varphi_2)\right)\ldots\left(h(x_{n-1})+\mathrm{d}\sigma(\varphi_{n-1})\right)}.$$

En el seu pas al límit, per tal de fer el tractament continu, aquesta funció $f(Q_1,Q_\infty)$ s'escriu com:

$$f(Q_1,Q_\infty)=\left(\prod_{i=0}^{\infty}\frac{h(x_i)}{h(x_i)+\mathrm{d}\sigma(\varphi_i)}\right)\equiv X.$$

Cal determinar el valor de X:

$$\ln X=\sum_{i=0}^{\infty}\ln\left(\frac{h(x_i)}{h(x_i)+\mathrm{d}\sigma(\varphi_i)}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\mathrm{d}\sigma(\varphi_i)}{h(x_i)}\right)^{-1}=-\sum_{i=0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\mathrm{d}\sigma(\varphi_i)}{h(x_i)}\right).$$

Com que $(\mathrm{d}\sigma(\varphi_i)/h(x_i))<<1$, es pot desenvolupar en sèrie de Taylor cada un dels sumands i prendre per al seu valor l'aproximació lineal corresponent. Així:

$$\ln X\approx\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\sigma(\varphi_i)}{h(x_i)}.$$

En el seu pas al continu:

$$\ln X=-\int_{Q_1}^{Q_n}\frac{\mathrm{d}\sigma(\varphi)}{h(x)}\quad\Rightarrow\quad X=e^{-\int_{Q_1}^{Q_n}\frac{\mathrm{d}\sigma(\varphi)}{h(x)}}.$$

Amb aquesta expressió el propagador de línia es pot escriure com:

$$G(\varphi, A, B, t) = e^{-I(A,B)} \delta(t - t_{AB}), \text{ amb } I(A,B) = \int_A^B \frac{\mathrm{d}\sigma(\varphi)}{h(x)}.$$

El propagador tindrà una expressió diferent per a cada línia ja que tant h com $\mathrm{d}\sigma$ depenen de l'angle φ (Fig. 3.I.1.1):

$$h(x) = \frac{y(x)}{\sin\theta(x)}, \qquad \mathrm{d}\sigma(\varphi) = \left(1 + 2\beta(\varphi)\right)\frac{\mathrm{d}x}{\cos\theta(x)},$$

essent $y(x)$ l'equació del perfil del pavelló i on $\beta(\varphi)$ ve donada per:

$$\beta(\varphi) = \frac{1}{2}\frac{y(x)y''(x)}{\left(y'(x)\right)^2}\cos\theta(x)\left(\cos\varphi(x) - \cos\theta(x)\right).$$

Així doncs, la integral que apareix en l'expressió del propagador serà:

$$I(A,B) = \int_A^B \frac{\mathrm{d}\sigma(\varphi)}{h} = \int_A^B \left[1 + \frac{y(x)y''(x)}{\left(y'(x)\right)^2}\cos\theta(x)\left(\cos\varphi(x) - \cos\theta(x)\right)\right]\frac{\tan\theta(x)}{y(x)}\mathrm{d}x,$$

però com que $\tan\theta(x) = y'(x)$, aleshores:

$$\begin{aligned} I(A,B) &= \int_A^B \frac{y'(x)}{y(x)}\mathrm{d}x + \int_A^B \frac{y''(x)}{y'(x)}\cos\theta(x)\left(\cos\varphi(x) - \cos\theta(x)\right)\mathrm{d}x = \\ &\ln\frac{y(x_B)}{y(x_A)} + \int_A^B \frac{y''(x)}{y'(x)}\cos\theta(x)\left(\cos\varphi(x) - \cos\theta(x)\right)\mathrm{d}x = \\ &\ln\frac{y(x_B)}{y(x_A)} + I'(A,B). \end{aligned}$$

El càlcul de $I'(A,B)$ es pot realitzar fàcilment per a la línia del perfil, $\varphi(x)=\theta(x)$, i per a la línia central, $\varphi(x)=0$.

Per a la línia del perfil $I'(A,B)=0$ i per tant el propagador serà:

$$G(\theta, A, B, t) = \frac{y(x_A)}{y(x_B)} \delta(t - t_{AB}).$$

Per a la línia central:

$$I'(A,B) = \int_A^B \frac{y''(x)}{y'(x)} \cos\theta(x) \mathrm{d}x - \int_A^B \frac{y''(x)}{y'(x)} \cos^2\theta(x) \mathrm{d}x = \cos\theta(x)(1 - \cos\theta(x)) \ln y'(x)\Big]_A^B +$$

$$\int_A^B \sin\theta(x) \ln(\tan\theta(x)) \mathrm{d}\theta - 2\int_A^B \sin\theta(x)\cos\theta(x) \ln(\tan\theta(x)) \mathrm{d}\theta =$$

$$\ln\left[\frac{\tan\frac{\theta(x_B)}{2}}{\tan\frac{\theta(x_A)}{2}}\right] - \ln\left[\frac{\sin\theta(x_B)}{\sin\theta(x_A)}\right],$$ en conseqüència el propagador serà:

$$G(0, A, B, t) = \frac{y(x_A)}{y(x_B)} \frac{\tan\frac{\theta(x_A)}{2}}{\tan\frac{\theta(x_B)}{2}} \frac{\sin\theta(x_B)}{\sin\theta(x_A)} \delta(t - t_{AB}) = \frac{y(x_A)}{y(x_B)} \frac{\cos^2\frac{\theta(x_B)}{2}}{\cos^2\frac{\theta(x_A)}{2}} \delta(t - t_{AB}).$$

Per a una línia qualsevol el càlcul de $I'(A,B)$ es pot separar en dues parts, una que depèn de $\varphi(x)$ i una altra que no en depèn:

$$I'(A,B) = \int_A^B \frac{y''(x)}{y'(x)} \cos\theta(x)\cos\varphi(x) \mathrm{d}x - \int_A^B \frac{y''(x)}{y'(x)} \cos^2\theta(x) \mathrm{d}x =$$

$$-\ln\left[\frac{\sin\theta(x_B)}{\sin\theta(x_A)}\right] + \int_A^B \frac{y''(x)}{y'(x)} \cos\theta(x)\cos\varphi(x) \mathrm{d}x,$$ i per tant el propagador serà:

$$G(\varphi, A, B, t) = \frac{y(x_A)}{y(x_B)} \frac{\sin\theta(x_A)}{\sin\theta(x_B)} e^{I''(A,B)} \delta(t - t_{AB}), \quad \text{on} \quad I''(A,B) = \int_A^B \frac{y''(x)}{y'(x)} \cos\theta(x)\cos\varphi(x) \mathrm{d}x.$$

3.I.2 Funcions de reflexió i transmissió mitjanes en un canvi de conicitat tipus cilíndrico-cònic

En una discontinuïtat del tipus cilíndrico-cònic part de les ones que es propagaven dins del tub cilíndric pateixen una reflexió endarrera a causa del canvi de conicitat i part d'aquestes ones es continuaran transmetent endavant. A partir de les expressions de les ones de pressió mitjanes que es trameten endavant i que arriben a la superfície S_b i de les que es reflecteixen endarrera i que arriben a la superfície S_a es poden determinar les funcions de transmissió i de reflexió mitjanes per a un canvi de conicitat d'aquest tipus.

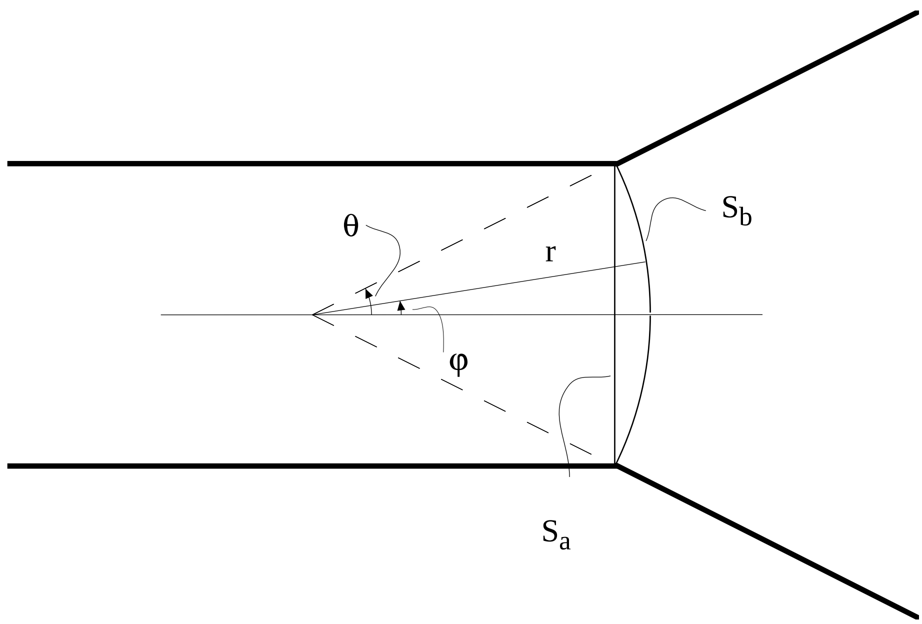

Fig. 3.I.2.1 Discontinuïtat cilíndrico-cònica.

Si es suposa que la pressió a la superfície S_a que es propaga tub avall és uniforme i de tipus impulsional, $p_-^m(S_a,t) = p_o\delta(t)$, aleshores la pressió en mitjana a la superfície S_a per causa de la reflexió, $p_+^m(S_a,t)$, serà:

$$p_+^m(S_a,t) = \frac{p_o}{S_a}\int_{S_a} \delta\big(t - 2t(\varphi)\big) * R(t)\,\mathrm{d}S_a\,,$$

on $t(\varphi)$ varia entre 0 i $2t_{màx}$ que és el temps que correspon a φ=0, és a dir la línia de l'eix del tub cònic i que val $(r/c)(1-\cos\theta)$, i φ varia entre 0 i θ, que és l'obertura del tram cònic.

Entre t=0 i t=2t(0) la col·laboració, a la superfície S_a, de les ones de pressió reflectides no és la mateixa. A partir de t=2t(0), però, totes les línies col·laboren de la mateixa manera a la pressió mitjana. Per tant:

$$p_+^m(S_a,t(\varphi)) = \frac{p_o}{S_a}\int_\theta^\varphi R\big(t-2t(\psi)\big)\mathrm{d}S_a(\psi)\,,\ \text{amb } t(\varphi)\in[0,2t(0)],\ \text{i}$$

$$p_+^m(S_a,t) = \frac{p_o}{S_a}\int_\theta^0 R\big(t-2t(\psi)\big)\mathrm{d}S_a(\psi)\,,\ \text{amb } t>2t(0).$$

Per poder calcular aquestes integrals cal conèixer el valor de S_a, que és $\pi r^2\sin^2\theta$; amb això:

$$p_+^m(S_a,t(\varphi)) = -\frac{p_o}{\pi r^2\sin^2\theta}\int_\theta^{\varphi(t)} R\big(t-2t(\psi)\big)2\pi r^2\sin\psi\cos\psi\,\mathrm{d}\psi\,,\ \text{amb } t(\varphi)\in[0,2t(0)].$$

Si es té en compte que $R(t)=\upsilon e^{\upsilon t}$ amb $\upsilon=-c/2r$ aleshores:

$$p_+^m(S_a,t(\varphi)) = -\frac{2p_o\upsilon}{\sin^2\theta}\int_\theta^{\varphi(t)} e^{\upsilon(t-2t(\psi))}\sin\psi\cos\psi\,\mathrm{d}\psi\,,$$

on $t(\psi)=\dfrac{\mathrm{d}\sigma(\psi)}{c}=\dfrac{r}{c}(\cos\psi-\cos\theta)$ i per tant:

$$p_+^m(S_a,t(\varphi)) = -\frac{2p_o\upsilon}{\sin^2\theta}e^{\upsilon\left(t+\frac{2r}{c}\cos\theta\right)}\int_\theta^{\varphi(t)} e^{\cos\psi}\sin\psi\cos\psi\,\mathrm{d}\psi =$$

$$-\frac{2p_o\upsilon}{\sin^2\theta}e^{\upsilon\left(t+\frac{2r}{c}\cos\theta\right)}\Big[(1-\cos\psi)e^{\cos\psi}\Big]_\theta^{\varphi(t)}.$$

Com que $\cos\big(\varphi(t)\big)=\dfrac{c}{2r}t+\cos\theta$, el resultat anterior es reescriu com:

$$p_+^m(S_a,t(\varphi)) = -\frac{2p_o\upsilon}{\sin^2\theta}\Big[(1-\cos\theta)\Big(1-e^{\upsilon t}\Big)+\upsilon t\Big],\ \text{amb } t(\varphi)\in[0,2t(0)].$$

El càlcul de la segona integral que es necessita condueix a:

$$p_+^m(S_a,t) = -\frac{p_o}{\pi r^2 \sin^2\theta}\int_\theta^0 R\big(t-2t(\psi)\big)2\pi r^2 \sin\psi\cos\psi\,\mathrm{d}\psi =$$

$$-\frac{2p_o\upsilon}{\sin^2\theta}\int_\theta^0 e^{\upsilon(t-2t(\psi))}\sin\psi\cos\psi\,\mathrm{d}\psi = -\frac{2p_o\upsilon}{\sin^2\theta}e^{\upsilon\left(t+\frac{2r}{c}\cos\theta\right)}\Big[(1-\cos\psi)e^{\cos\psi}\Big]_\theta^0,$$

i en conseqüència:

$$p_+^m(S_a,t) = -\frac{2p_o\upsilon}{\sin^2\theta}(\cos\theta-1)e^{\upsilon t},\ amb\ t > 2t(0).$$

Aquestes dues expressions corresponents a $p_+^m(S_a,t)$ es poden escriure com una de sola utilitzant la funció graó:

$$p_+^m(S_a,t) = -\frac{2p_o\upsilon}{\sin^2\theta}\Big[\varepsilon(2t(0)-t)\Big[(1-\cos\theta)\Big(1-e^{\upsilon t}\Big)+\upsilon t\Big]-\varepsilon(t-2t(0))(1-\cos\theta)e^{\upsilon t}\Big].$$

De fet la primera funció graó de l'expressió anterior hauria de ser $\big(\varepsilon(t)-\varepsilon(2t(0)-t)\big)$ però com que el que interessa són funcions causals, és a dir per a temps positius, es pot obviar la part negativa d'aquesta funció.

A partir d'aquest resultat es pot trobar l'expressió de la funció de reflexió mitjana, que ve donada per:

$$R_m(t) = -\frac{2\upsilon}{\sin^2\theta}\Big[\varepsilon(2t(0)-t)\Big[(1-\cos\theta)\Big(1-e^{\upsilon t}\Big)+\upsilon t\Big]-\varepsilon(t-2t(0))(1-\cos\theta)e^{\upsilon t}\Big],\ \text{amb}$$

$$\upsilon = -\frac{c}{2r}\ \ i\ \ t(0) = \frac{r}{c}(1-\cos\theta).$$

Si es suposa que la pressió a la superfície S_a que es propaga tub avall és uniforme i de tipus impulsional, $p_-^m(S_a,t) = p_o\delta(t)$, aleshores la pressió en mitjana a la superfície S_b per causa de la transmissió, $p_-^m(S_b,t)$, serà:

$$p_-^m(S_b,t) = \frac{p_o}{S_b}\int_{S_b}\delta\big(t-t(\varphi)\big) * T(t)\,\mathrm{d}S_b,$$

on $t(\varphi)$ varia entre 0 i ∞ i φ varia entre 0 i θ, que és l'obertura del tram cònic.

Entre $t=0$ i $t=t(0)$ la col·laboració, a la superfície S_b, de les ones de pressió transmeses no és la mateixa. Si es té en compte que $T(t)=\delta(t)+R(t)$, la col·laboració a $p_-^m(S_b,t)$ mentre $t<t(0)$ és deguda a tota la funció de transmissió, però a partir de $t=t(0)$ només hi col·labora $R(t)$. Per tant:

$$p_-^m(S_b,t(\varphi)) = \frac{p_o}{S_b}\int_\varphi^\theta T\big(t-t(\psi)\big)\mathrm{d}S_b(\psi)\,,\ \ amb\ t(\varphi)\in[0,t(0)],\ \text{i}$$

$$p_-^m(S_b,t) = \frac{p_o}{S_b}\int_0^\theta R\big(t-t(\psi)\big)\mathrm{d}S_b(\psi)\,,\ \text{amb}\ t>t(0).$$

Per poder calcular aquestes integrals cal conèixer el valor de S_b, que és $2\pi r^2(1-\cos\theta)$; amb això:

$$p_-^m(S_b,t(\varphi)) = \frac{p_o}{2\pi r^2(1-\cos\theta)}\int_{\varphi(t)}^\theta \delta\big(t-t(\psi)\big)2\pi r^2\sin\psi\,\mathrm{d}\psi +$$

$$\frac{p_o}{2\pi r^2(1-\cos\theta)}\int_{\varphi(t)}^\theta R\big(t-t(\psi)\big)2\pi r^2\sin\psi\,\mathrm{d}\psi = \frac{p_o}{1-\cos\theta}\big[I_1+I_2\big],$$

$$\text{amb}\ t(\varphi)\in[0,t(0)].$$

El càlcul de I_1 implica fer un canvi de variable per a la funció delta de Dirac que ve donat per [Arfken, 1985]:

$$\delta\big(f(x)\big) = \left|\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right]^{-1}\right|\delta(x-x_o),\ \text{amb}\ x_o\ \text{tal que}\ f(x_o)=0.$$

Així, en aquest cas: $\delta\big(t-t(\varphi)\big) = \dfrac{c}{r\sin\varphi}\delta\big(\varphi-\varphi(t)\big)$, amb $\varphi(t) = \arccos\left(\dfrac{c}{r}t+\cos\theta\right)$, i

per tant:

$$I_1 = \int_{\varphi(t)}^{\theta} \delta\big(t - t(\psi)\big)\sin\psi\,\mathrm{d}\psi = \frac{c}{r}\int_{\varphi(t)}^{\theta} \delta\big(\psi - \psi(t)\big)\mathrm{d}\psi = \frac{c}{r}.$$

Per altra banda si es té en compte que $R(t)=\upsilon e^{\upsilon t}$ amb $\upsilon=-c/2r$ aleshores:

$$I_2 = \upsilon\int_{\varphi(t)}^{\theta} e^{\upsilon(t-t(\psi))}\sin\psi\,\mathrm{d}\psi\text{, on } t(\psi) = \frac{\mathrm{d}\sigma(\psi)}{c} = \frac{r}{c}\big(\cos\psi - \cos\theta\big) \text{ i per tant:}$$

$$I_2 = \upsilon e^{\upsilon\left(t+\frac{r}{c}\cos\theta\right)}\int_{\varphi(t)}^{\theta} e^{\frac{\cos\psi}{2}}\sin\psi\,\mathrm{d}\psi = \upsilon e^{\upsilon\left(t+\frac{r}{c}\cos\theta\right)}\left[-2e^{\frac{\cos\psi}{2}}\right]_{\varphi(t)}^{\theta}.$$

Com que $\cos\big(\varphi(t)\big) = \frac{c}{r}t + \cos\theta$, el resultat anterior es reescriu com:

$$I_2 = \upsilon\left(1 - e^{\upsilon t}\right)\text{, i per tant:}$$

$$p_-^m(S_b, t(\varphi)) = -\frac{2p_o\upsilon}{1-\cos\theta}e^{\upsilon t}\text{, amb } t(\varphi) \in [0, t(0)].$$

El càlcul per a temps superiors a $t(0)$ condueix a:

$$p_-^m(S_b, t) = \frac{p_o}{2\pi r^2(1-\cos\theta)}\int_0^{\theta} R\big(t - t(\psi)\big)2\pi r^2\sin\psi\,\mathrm{d}\psi =$$

$$\frac{p_o\upsilon}{1-\cos\theta}\int_0^{\theta} e^{\upsilon(t-t(\psi))}\sin\psi\,\mathrm{d}\psi = \frac{p_o\upsilon}{1-\cos\theta}e^{\upsilon\left(t+\frac{r}{c}\cos\theta\right)}\left[-2e^{\frac{\cos\psi}{2}}\right]_0^{\theta},$$

i en conseqüència:

$$p_-^m(S_b, t) = \frac{2p_o\upsilon}{1-\cos\theta}\left(e^{\frac{1-\cos\theta}{2}} - 1\right)e^{\upsilon t}\text{, amb } t > t(0).$$

Les dues expressions corresponents a $p_-^m(S_b,t(\varphi))$ i a $p_-^m(S_b,t)$ es poden escriure com una de sola utilitzant la funció graó:

$$p_-^m(S_b,t) = -\frac{2p_o\upsilon}{1-\cos\theta}\left[\varepsilon(t(0)-t)-\varepsilon(t-t(0))\left(e^{\frac{1-\cos\theta}{2}}-1\right)\right]e^{\upsilon t}.$$

De fet la primera funció graó de l'expressió anterior hauria de ser $(\varepsilon(t)-\varepsilon(t(0)-t))$ però, a l'igual que en el cas anterior, el que interessa són funcions causals i per tant es pot obviar la part negativa d'aquesta funció.

A partir d'aquest resultat es pot trobar l'expressió de la funció de transmissió mitjana, que ve donada per:

$$T_m(t) = -\frac{2\upsilon e^{\upsilon t}}{1-\cos\theta}\left[\varepsilon(t(0)-t)-\varepsilon(t-t(0))\left(e^{\frac{1-\cos\theta}{2}}-1\right)\right], \text{ amb}$$

$$\upsilon = -\frac{c}{2r} \quad i \quad t(0) = \frac{r}{c}(1-\cos\theta).$$

Per tal de comprovar que les expressions de les funcions de reflexió i transmissió mitjanes són correctes cal calcular quin és el valor de $p_+^m(S_a,t)$ i de $p_-^m(S_b,t)$ al llarg del temps. En el primer cas el resultat ha de ser $-p_o$ i en el segon cas el resultat ha de ser nul. El càlcul de la integral de $p_+^m(S_a,t)$ al llarg del temps condueix a:

$$\int_0^\infty p_+^m(S_a,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2t(0)} p_+^m(S_a,t(\varphi))\,\mathrm{d}t + \int_{2t(0)}^\infty p_+^m(S_a,t)\,\mathrm{d}t = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = -\frac{2p_o\upsilon}{\sin^2\theta}\int_0^{2t(0)}\left[(1-\cos\theta)\left(1-e^{\upsilon t}\right)+\upsilon t\right]\mathrm{d}t = -\frac{2p_o\upsilon}{\sin^2\theta}\left[(1-\cos\theta)\left(t-\frac{1}{\upsilon}e^{\upsilon t}\right)+\frac{\upsilon t^2}{2}\right]_0^{2t(0)}.$$

Si es té en compte el valor de $t(0)$:

$$I_1 = \frac{2p_o}{\sin^2\theta}(1-\cos\theta)\left[\frac{1-\cos\theta}{2}+e^{-(1-\cos\theta)}-1\right].$$

Per altra banda:

$$I_2 = -\frac{2p_o\upsilon}{\sin^2\theta}\int_{2t(0)}^{\infty}(\cos\theta-1)e^{\upsilon t}\,\mathrm{d}t = -\frac{2p_o\upsilon}{\sin^2\theta}\left[(\cos\theta-1)\frac{1}{\upsilon}e^{\upsilon t}\right]_{2t(0)}^{\infty} =$$

$$-\frac{2p_o}{\sin^2\theta}(1-\cos\theta)e^{-(1-\cos\theta)}.$$

Aleshores:

$$\int_0^{\infty} p_+^m(S_a,t)\,\mathrm{d}t = \frac{2p_o}{\sin^2\theta}(1-\cos\theta)\left[\frac{1-\cos\theta}{2}+e^{-(1-\cos\theta)}-1-e^{-(1-\cos\theta)}\right] = -p_o.$$

El càlcul de la integral de $p_-^m(S_b,t)$ al llarg del temps condueix a:

$$\int_0^{\infty} p_-^m(S_b,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t(0)} p_-^m(S_b,t(\varphi))\,\mathrm{d}t + \int_{t(0)}^{\infty} p_-^m(S_b,t)\,\mathrm{d}t = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = -\frac{2p_o\upsilon}{1-\cos\theta}\int_0^{t(0)} e^{\upsilon t}\mathrm{d}t = -\frac{2p_o}{1-\cos\theta}\left[e^{\upsilon t}\right]_0^{t(0)} = -\frac{2p_o}{1-\cos\theta}\left(e^{-\frac{1-\cos\theta}{2}}-1\right),$$

$$I_2 = \frac{2p_o\upsilon}{1-\cos\theta}\left(e^{\frac{1-\cos\theta}{2}}-1\right)\int_{t(0)}^{\infty} e^{\upsilon t}\mathrm{d}t = \frac{2p_o}{1-\cos\theta}\left(e^{\frac{1-\cos\theta}{2}}-1\right)\left[e^{\upsilon t}\right]_{t(0)}^{\infty} =$$

$$-\frac{2p_o}{1-\cos\theta}\left(1-e^{-\frac{1-\cos\theta}{2}}\right).$$

Aleshores:

$$\int_0^{\infty} p_-^m(S_b,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2p_o}{1-\cos\theta}\left(e^{-\frac{1-\cos\theta}{2}}-1+1-e^{-\frac{1-\cos\theta}{2}}\right) = 0.$$