# APÈNDIX 5.I CÀLCUL D'INTEGRALS DE CONVOLUCIÓ

## 5.I.1 Introducció

La pressió acústica interna a la secció d'entrada d'un tub en un cert instant de temps $t$ es pot obtenir mitjançant la integral de convolució entre el cabal que la travessa i la resposta impulsional del tub:

$$p(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau .$$

La manera usual de resoldre numèricament aquesta integral és discretitzar-la en intervals regulars de temps i fer hipòtesis respecte la resposta impulsional i el cabal.

## 5.I.2 Convolució amb una funció exponencial

Si es suposa que la resposta impulsional és del tipus exponencial, $h(t) = Ae^{bt}$, la pressió acústica a l'instant $t+\Delta t$ es pot obtenir a partir del seu valor a l'instant $t$ i del valor del cabal en instants recents de temps. En efecte, la integral de convolució es pot separar en dues: una entre $[0, t]$ i una altra entre $[t, t+\Delta t]$, de manera que:

$$p(t+\Delta t) = \int_0^t h(t+\Delta t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau + \int_t^{t+\Delta t} h(t+\Delta t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \quad . \qquad (\text{5.I.2.1})$$

La primera integral resulta ser proporcional al valor de $p(t)$:

$$\int_0^t h(t+\Delta t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau = \int_0^t Ae^{b(t+\Delta t-\tau)}\,u(\tau)\,d\tau = e^{b\Delta t}\int_0^t Ae^{b(t-\tau)}\,u(\tau)\,d\tau =$$

$$e^{b\Delta t}\int_0^t h(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau = e^{b\Delta t}\,p(t) \quad ,$$

mentre que per resoldre la segona cal fer hipòtesis sobre la variació del cabal $u(t)$ dins de l'interval d'integració. Les aproximacions més simples que es poden fer sobre la fluctuació del cabal en l'interval de temps $[t, t+\Delta t]$ són o bé suposar-lo constant o bé que varia linealment amb el temps. D'aquesta manera es discretitza la integral en intervals finits de temps, cosa que permet calcular-ne el valor.

### 5.I.2.1 Aproximació constant per al cabal

Si es suposa que el cabal es manté aproximadament constant dins l'interval d'integració la segona integral de l'equació 5.I.2.1 es reescriu:

$$\int_t^{t+\Delta t} h(t+\Delta t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau = u(t+\Delta t)\int_t^{t+\Delta t} A e^{b(t+\Delta t-\tau)}\,d\tau = u(t+\Delta t)\frac{A}{b}\left(e^{b\Delta t}-1\right) \ ,$$

amb la qual cosa la pressió a l'instant $t+\Delta t$ es pot calcular aproximadament com:

$$p(t+\Delta t) \approx k_1\, p(t) + k_2\, u(t+\Delta t) \ , \text{ amb } k_1 = e^{b\Delta t} \ \ i \ \ k_2 = \frac{A}{b}\left(e^{b\Delta t}-1\right) \ ,$$

expressió que posa de manifest que només cal fer tres operacions per cada pas temporal en què es discretitza la integral de convolució i que proporciona un algoritme recurrent per al càlcul de la pressió a l'interior d'un tub.

### 5.I.2.2 Aproximació lineal per al cabal

Es pot obtenir una aproximació millor per a la pressió si es considera que el cabal varia de forma lineal dins l'interval d'integració, de manera que:

$$u(\tau) = \frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}(\tau - t) + u(t) = m(\tau - t) + u(t).$$

En aquest cas la segona integral de l'equació 5.I.2.1 es reescriu:

$$\int_t^{t+\Delta t} h(t+\Delta t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau = \int_t^{t+\Delta t} h(t+\Delta t-\tau)\left[m(\tau-t)+u(t)\right]d\tau \ ,$$

que si s'introdueix el canvi el variable $t' = t+\Delta t-\tau$ presenta la forma:

$$\int_t^{t+\Delta t} h(t+\Delta t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau = m\int_0^{\Delta t} h(t')\,(\Delta t-t')\,dt' + u(t)\int_0^{\Delta t} h(t')\,dt' =$$

$$-\,m\int_0^{\Delta t} h(t')\,t'\,dt' + [m\Delta t+u(t)]\int_0^{\Delta t} h(t')\,dt' = u(t+\Delta t)C_1 - mC_2\ ,$$

on $C_1 = \int_0^{\Delta t} h(t)\,dt$ i $C_2 = \int_0^{\Delta t} h(t)\,t\,dt.$

Si es té en compte que $h(t) = Ae^{bt}$, s'obté:

$$C_1 = \frac{A}{b}\left(e^{b\Delta t}-1\right) \text{ i } C_2 = \frac{A}{b^2}\left[e^{b\Delta t}(b\Delta t-1)+1\right],$$ amb la qual cosa:

$$\int_t^{t+\Delta t} h(t+\Delta t-\tau)\left[m(\tau-t)+u(t)\right]d\tau = \left(C_1-\frac{C_2}{\Delta t}\right)u(t+\Delta t)+\frac{C_2}{\Delta t}u(t),$$ i en conseqüència:

$$p(t+\Delta t) \approx k_1 p(t) + k_2 u(t) + k_3 u(t+\Delta t)\ ,$$

amb $k_1 = e^{b\Delta t}$, $k_2 = \dfrac{A}{b^2\,\Delta t}\left[e^{b\Delta t}(b\Delta t-1)+1\right]$ i $k_3 = -\dfrac{A}{b} + \dfrac{A}{b^2\,\Delta t}\left(e^{b\Delta t}-1\right).$

Aquesta expressió posa de manifest que només cal realitzar cinc operacions per cada pas d'integració de la integral de convolució i proporciona l'algoritme recurrent corresponent.

### 5.I.3 Convolució amb una funció harmònica esmorteïda

Si es suposa que la resposta impulsional és del tipus harmònica esmorteïda, $h(t) = Ae^{bt}\cos(\omega t+\phi)$ amb $b<0$, es pot definir la funció complexa corresponent de manera que la seva convolució amb el cabal doni la pressió acústica desitjada. Així:

$$\hat{h}(t) = Ae^{bt+\mathrm{j}(\omega t+\phi)} = Ae^{(b+\mathrm{j}\omega)t+\mathrm{j}\phi}\ ,\ \ h(t) = \mathrm{Re}\left[\hat{h}(t)\right] \text{ i}$$

$$\hat{p}(t) = \hat{h}(t) * u(t) = \int_0^t \hat{h}(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau\ ,\ \ p(t) = \mathrm{Re}\left[\hat{p}(t)\right]\ .$$

Coneguda la pressió en un instant $t$, $p(t)$, es pot obtenir el seu valor a l'instant següent, $p(t+\Delta t)$, amb poques operacions. L'equació anàloga a la 5.I.2.1 és:

$$\hat{p}(t+\Delta t) = \int_0^t \hat{h}(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \hat{h}(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau \ ,$$

que es pot descompondre en una part real i una d'imaginària:

$$p(t+\Delta t) = \int_0^t h(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau + \int_t^{t+\Delta t} h(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau \qquad (\ 5.I.3.1\ )$$

$$\tilde{p}(t+\Delta t) = \int_0^t \tilde{h}(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \tilde{h}(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau \qquad (\ 5.I.3.2\ )$$

essent $\tilde{p}(t) = \mathrm{Im}[\hat{p}(t)]$ i $\tilde{h}(t) = \mathrm{Im}\left[\hat{h}(t)\right] = Ae^{bt}\sin(\omega t+\phi)$.

La funció nucli de la primera integral de 5.I.3.1 es pot reescriure com:

$$h(t+\Delta t-\tau) = Ae^{b(t+\Delta t-\tau)}\cos[\omega(t+\Delta t-\tau)+\phi] =$$

$$\left\{Ae^{b(t-\tau)}\cos[\omega(t-\tau)+\phi]\right\}e^{b\Delta t}\cos(\omega\Delta t) - \left\{Ae^{b(t-\tau)}\sin[\omega(t-\tau)+\phi]\right\}e^{b\Delta t}\sin(\omega\Delta t) =$$

$$h(t-\tau)e^{b\Delta t}\cos(\omega\Delta t) - \tilde{h}(t-\tau)e^{b\Delta t}\sin(\omega\Delta t).$$

Així doncs la primera integral de 5.I.3.1 val:

$$\int_0^t h(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau = e^{b\Delta t}\cos(\omega\Delta t)\,p(t) - e^{b\Delta t}\sin(\omega\Delta t)\,\tilde{p}(t).$$

Anàlogament per a la primera integral de 5.I.3.2:

$$\tilde{h}(t+\Delta t-\tau) = Ae^{b(t+\Delta t-\tau)}\sin[\omega(t+\Delta t-\tau)+\phi] =$$

$$\left\{Ae^{b(t-\tau)}\sin[\omega(t-\tau)+\phi]\right\}e^{b\Delta t}\cos(\omega\Delta t) + \left\{Ae^{b(t-\tau)}\cos[\omega(t-\tau)+\phi]\right\}e^{b\Delta t}\sin(\omega\Delta t) =$$

$\tilde{h}(t-\tau)e^{b\Delta t}\cos(\omega\Delta t) + h(t-\tau)e^{b\Delta t}\sin(\omega\Delta t)$, amb la qual cosa:

$$\int_0^t \tilde{h}(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau = e^{b\Delta t}\sin(\omega\Delta t)\,p(t) + e^{b\Delta t}\cos(\omega\Delta t)\,\tilde{p}(t).$$

Per calcular les segones integrals de les equacions 5.I.3.1 i 5.I.3.2 cal tornar a fer hipòtesis sobre la fluctuació del cabal en l'interval $[t, t+\Delta t]$.

### 5.I.3.1 Aproximació constant per al cabal

Si es suposa que el cabal es manté constant en l'interval d'integració i es té en compte que la resposta impulsional és del tipus harmònic esmorteït, aleshores:

$$\int_t^{t+\Delta t} h(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau = u(t+\Delta t)\int_t^{t+\Delta t} Ae^{b(t+\Delta t-\tau)}\cos[\omega(t+\Delta t-\tau)+\phi]\,d\tau =$$

$$u(t+\Delta t)\int_0^{\Delta t} Ae^{bt'}\cos(\omega t'+\phi)\,dt' \quad ,$$

on s'ha introduït el canvi de variable $t' = t+\Delta t-\tau$ i per tant:

$$\int_t^{t+\Delta t} h(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau = u(t+\Delta t)k_1, \text{ amb}$$

$$k_1 = \frac{A}{b^2+\omega^2}\left\{e^{b\Delta t}\left[b\cos(\omega\Delta t+\phi)+\omega\sin(\omega\Delta t+\phi)\right]-\left(b\cos\phi+\omega\sin\phi\right)\right\}.$$

Per altra banda:

$$\int_t^{t+\Delta t} \tilde{h}(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau = u(t+\Delta t)\int_t^{t+\Delta t} Ae^{b(t+\Delta t-\tau)}\sin[\omega(t+\Delta t-\tau)+\phi]\,d\tau =$$

$$u(t+\Delta t)\int_0^{\Delta t} Ae^{bt'}\sin(\omega t'+\phi)\,dt' \quad ,$$

i per tant:

$$\int_t^{t+\Delta t} \tilde{h}(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau = u(t+\Delta t)\tilde{k}_1, \text{ amb}$$

$$\tilde{k}_1 = \frac{A}{b^2+\omega^2}\left\{e^{b\Delta t}\left[b\sin(\omega\Delta t+\phi)-\omega\cos(\omega\Delta t+\phi)\right]-\left(b\sin\phi-\omega\cos\phi\right)\right\}.$$

Així doncs la pressió a l'instant $t+\Delta t$ es pot calcular com:

$$p(t+\Delta t) = \text{ecos}\; p(t) - \text{esin}\; \tilde{p}(t) + k_1 \;\; u(t+\Delta t) \;\; ,$$
$$\tilde{p}(t+\Delta t) = \text{esin}\; p(t) + \text{ecos}\; \tilde{p}(t) + \tilde{k}_1 \;\; u(t+\Delta t) \;\; ,$$

amb $\text{ecos} = e^{b\Delta t}\cos(\omega\Delta t)$ i $\text{esin} = e^{b\Delta t}\sin(\omega\Delta t)$. Aquestes expressions proporcionen l'algoritme recurrent per calcular la pressió i mostren que calen només sis operacions per pas temporal quan es calcula la integral de convolució.

#### 5.I.3.2 Aproximació lineal per al cabal

Si es considera que el cabal varia linealment dins l'interval $[t, t{+}\Delta t]$ aleshores, anàlogament al cas exposat a l'apartat 5.I.2.2 s'arriba a establir que:

$$\int_t^{t+\Delta t} h(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau = -m\int_0^{\Delta t} h(t)\,t\,dt + [m\Delta t + u(t)]\int_0^{\Delta t} h(t)\,dt = u(t+\Delta t)C_1 - mC_2 \;\; ,$$
$$\int_t^{t+\Delta t} \tilde{h}(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau = -m\int_0^{\Delta t} \tilde{h}(t)\,t\,dt + [m\Delta t + u(t)]\int_0^{\Delta t} \tilde{h}(t)\,dt = u(t+\Delta t)\tilde{C}_1 - m\tilde{C}_2 \;\; ,$$

amb la qual cosa:

$$\int_t^{t+\Delta t} h(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau = \left(C_1 - \frac{C_2}{\Delta t}\right)\; u(t+\Delta t) + \frac{C_2}{\Delta t}\;\; u(t) \quad \text{i}$$
$$\int_t^{t+\Delta t} \tilde{h}(t+\Delta t-\tau)u(\tau)\,d\tau = \left(\tilde{C}_1 - \frac{\tilde{C}_2}{\Delta t}\right)\; u(t+\Delta t) + \frac{\tilde{C}_2}{\Delta t}\;\; u(t) \;\; ,$$

amb $C_1 = \int_0^{\Delta t} h(t)\,dt$ , $C_2 = \int_0^{\Delta t} h(t)\,t\,dt$ , $\tilde{C}_1 = \int_0^{\Delta t} \tilde{h}(t)\,dt$ *i* $\tilde{C}_2 = \int_0^{\Delta t} \tilde{h}(t)\,t\,dt$ .

Si es substitueix el valor de $h(t)$ s'obtenen els valors de les integrals anteriors amb la qual cosa la pressió s'escriu com:

$$p(t+\Delta t) = \text{ecos}\; p(t) - \text{esin}\; \tilde{p}(t) + \left(C_1 - \frac{C_2}{\Delta t}\right)\; u(t+\Delta t) + \frac{C_2}{\Delta t}\;\; u(t)$$
$$\tilde{p}(t+\Delta t) = \text{esin}\; p(t) + \text{ecos}\; \tilde{p}(t) + \left(\tilde{C}_1 - \frac{\tilde{C}_2}{\Delta t}\right)\; u(t+\Delta t) + \frac{\tilde{C}_2}{\Delta t}\;\; u(t) \;\; ,$$

amb:

$$C_1 = \frac{A}{b^2+\omega^2}\left\{e^{b\Delta t}\left[b\cos(\omega\Delta t+\phi)+\omega\sin(\omega\Delta t+\phi)\right]-(b\cos\phi+\omega\sin\phi)\right\} ,$$

$$C_2 = \frac{A}{b^2+\omega^2}\left\{e^{b\Delta t}\left[\left(b\Delta t-\frac{b^2-\omega^2}{b^2+\omega^2}\right)\cos(\omega\Delta t+\phi)+\left(\omega\Delta t-\frac{2b\omega}{b^2+\omega^2}\right)\sin(\omega\Delta t+\phi)\right]+\right.$$
$$\left.\left(\frac{b^2-\omega^2}{b^2+\omega^2}\cos\phi+\frac{2b\omega}{b^2+\omega^2}\sin\phi\right)\right\} ,$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{A}{b^2+\omega^2}\left\{e^{b\Delta t}\left[b\sin(\omega\Delta t+\phi)-\omega\cos(\omega\Delta t+\phi)\right]-(b\sin\phi-\omega\cos\phi)\right\} \text{ i}$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{A}{b^2+\omega^2}\left\{e^{b\Delta t}\left[\left(b\Delta t-\frac{b^2-\omega^2}{b^2+\omega^2}\right)\sin(\omega\Delta t+\phi)-\left(\omega\Delta t-\frac{2b\omega}{b^2+\omega^2}\right)\cos(\omega\Delta t+\phi)\right]+\right.$$
$$\left.\left(\frac{b^2-\omega^2}{b^2+\omega^2}\sin\phi-\frac{2b\omega}{b^2+\omega^2}\cos\phi\right)\right\} .$$

Aquestes expressions mostren que són necessàries tan sols deu operacions a cada pas temporal de l’algoritme recurrent de convolució per determinar la pressió.

## 5.I.4 Resposta impulsional d’un sistema d’un grau de llibertat

En la descomposició modal de $h(t)$ es pren com a funció base la resposta impulsional d’un sistema d’un grau de llibertat representatiu d’un mode propi. Aquesta $h(t)$ es pot obtenir analíticament com a transformada de Fourier de la impedància $Z(\omega)$ corresponent definida com $Z(\omega) = p/\dot{y}$.

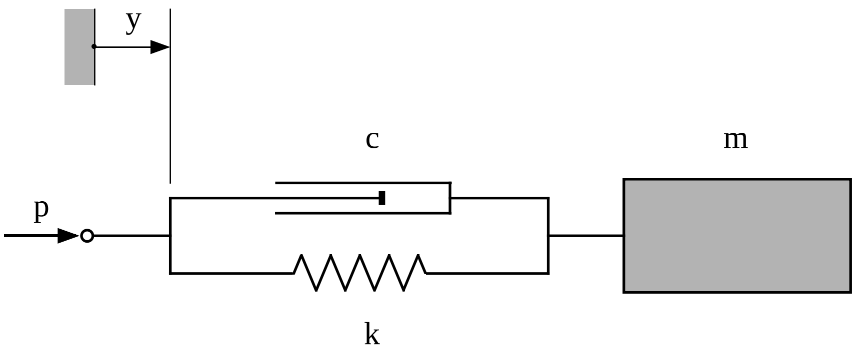


Fig. 5.I.4.1 Sistema d’un grau de llibertat representatiu d’un mode propi.

La impedància d’aquest sistema ve donada per l’expressió:

$$Z(\omega) = \frac{c}{2\zeta}\frac{j\rho - 2\zeta\rho^2}{\left(1-\rho^2+2j\zeta\rho\right)} = c + c\ \frac{\rho j\left(1-4\zeta^2\right)-2\zeta}{2\zeta\left(1-\rho^2+2j\zeta\rho\right)}\ ,$$

amb $2\zeta = \dfrac{c}{\sqrt{km}}$ , $\rho = \dfrac{\omega}{\omega_o}$ i $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ .

La resposta impulsional serà doncs:

$$h(t) = c\ \delta(t) + c\ \frac{\omega_o\ e^{-\zeta\omega_o t}}{2\zeta\ \sqrt{1-\zeta^2}}\left[\left(\frac{4\zeta^2-3}{2}\ \sin\left(\omega_o\sqrt{1-\zeta^2}\ t\right) + \frac{\left(1-4\zeta^2\right)\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta}\ \cos\left(\omega_o\sqrt{1-\zeta^2}\ t\right)\right)\right],\ \text{per tant}$$

$$h(t) = c\ \delta(t) + c\ \frac{\omega_o\ e^{-\zeta\omega_o t}}{2\zeta\ \sqrt{1-\zeta^2}}\ \cos\left(\omega_o\sqrt{1-\zeta^2}\ t+\phi\right),$$

amb $\tan\phi = \dfrac{\left(3-4\zeta^2\right)\zeta}{\left(1-4\zeta^2\right)\sqrt{1-\zeta^2}}$ .