



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA**  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona  
Departamento de Ingeniería Mecánica

Tesis Doctoral

**APORTE AL DISEÑO DE ENGRANAJES NO CIRCULARES  
CILÍNDRICOS RECTOS**

Presentada por

**HÉCTOR FABIO QUINTERO RIAZA**

Directores

**Dr. Salvador Cardona Foix**  
**Dra. Lluïsa Jordi Nebot**

Barcelona, 2006

## CAPÍTULO 5

### RECUBRIMIENTO Y LÍNEA DE ENGRANE

Se define el recubrimiento en un engranaje circular como el número promedio de dientes en contacto durante un periodo de rotación y es un factor muy importante en el diseño de un engranaje. Un recubrimiento mayor a la unidad garantiza una transmisión continua del movimiento entre las ruedas conductora y conducida; si se presenta un recubrimiento menor a la unidad se tendría pérdida de contacto entre los dientes del engranaje durante la transmisión de movimiento. Cuanto mayor es el recubrimiento en un engranaje menores son los esfuerzos en los dientes, se generan menores niveles de vibración y de ruido [65, 66, 67].

En un engranaje no circular se propone definir dos tipos de recubrimiento: el promedio y el local. El recubrimiento promedio se define como la relación entre la suma de las longitudes de los arcos de acción de cada diente y la longitud de la curva primitiva. El recubrimiento local se define, en función del ángulo de giro de referencia de generación  $\varphi_1 = \varphi_{10}$ , como la relación entre la longitud del arco de acción del diente que se genera en esta posición y el paso. En un engranaje no circular, contrario al engranaje circular, cada diente tiene un recubrimiento local diferente y esta relacionado con la ubicación del diente sobre la curva primitiva.

Bajo condiciones ideales, si en un engranaje circular con perfil de envolvente la rueda conductora gira a velocidad angular constante, con un par resistivo que actúa en el eje de la rueda conducida constante y ambas ruedas están balanceadas, la fuerza resultante de contacto entre los dientes de las ruedas, es constante en magnitud y dirección. En los engranajes no circulares, bajo las mismas condiciones de operación, esta fuerza es variable en magnitud y en dirección en cada posición angular. La dirección de la fuerza de contacto esta dada por la línea de presión.

Para el cálculo de la fuerza de contacto en cada uno de los dientes, que es el primer paso en un análisis de esfuerzos, se requiere acotar el intervalo de contacto, limitar los intervalos en que

existe más de un par de dientes en contacto y establecer el punto de contacto sobre el flanco del diente a medida que transcurre el contacto. Conocido el punto de contacto sobre el flanco del diente de la rueda conductora en función de su ángulo de giro, es posible determinar *la línea de engrane* entre cada par de dientes, siendo ésta el lugar geométrico definido por la sucesión de los puntos de contacto de un par de dientes. Conocido el punto de contacto, el radio de curvatura del flanco del diente y la magnitud de la fuerza debida al contacto entre cada par de dientes se pueden calcular los esfuerzos resultantes sobre el diente utilizando la teoría de contacto de Hertz.

### 5.1 INTERVALO DE CONTACTO Y ARCO DE ACCIÓN

Como se mencionó previamente, en un engranaje no circular el intervalo de contacto y la longitud del arco de acción en cada par de dientes son diferentes. En este apartado se determinan las condiciones en las que se inicia y finaliza el contacto entre un par de dientes que se generan con  $\varphi_{10}$  como posición inicial de referencia, con lo que se limita el intervalo de contacto y a la vez se calcula la longitud del arco de acción al remplazar los ángulos pertinentes en la integral de línea dada por la expresión (4.2).

El intervalo de contacto entre un par de dientes se inicia cuando el contacto ocurre sobre la curva de addendum de la rueda conducida y termina cuando ocurre sobre la curva de addendum de la rueda conductora. El punto A de la figura (5.1) es el inicio del contacto y el punto B el final. La trayectoria que se obtiene de los sucesivos puntos de contacto a lo largo de la línea AB de la figura (5.1), es conocida como línea de engrane [68]. El punto C es la intersección del flanco activo del diente de la rueda conductora con su curva primitiva al iniciar el contacto, el punto C' es, de manera similar, la intersección del flanco activo del diente con su curva primitiva al terminar el contacto. Los puntos D y D' son los puntos equivalentes para la rueda conducida. Los arcos CC' y DD' son llamados *arcos de acción* y sus longitudes deben ser iguales. Los ángulos del movimiento son divididos en dos tal como se muestra en la figura (5.1), siendo  $\gamma_a$  el ángulo de acercamiento y  $\gamma_r$  el ángulo de retroceso. Generalmente el ángulo de acercamiento y el ángulo de retroceso son diferentes. Para tener una transmisión de movimiento continua, la longitud del arco de acción de cada diente debe ser igual o mayor al paso; si esto ocurre, entonces el par de dientes siguiente entra en contacto antes que el actual termine el contacto.

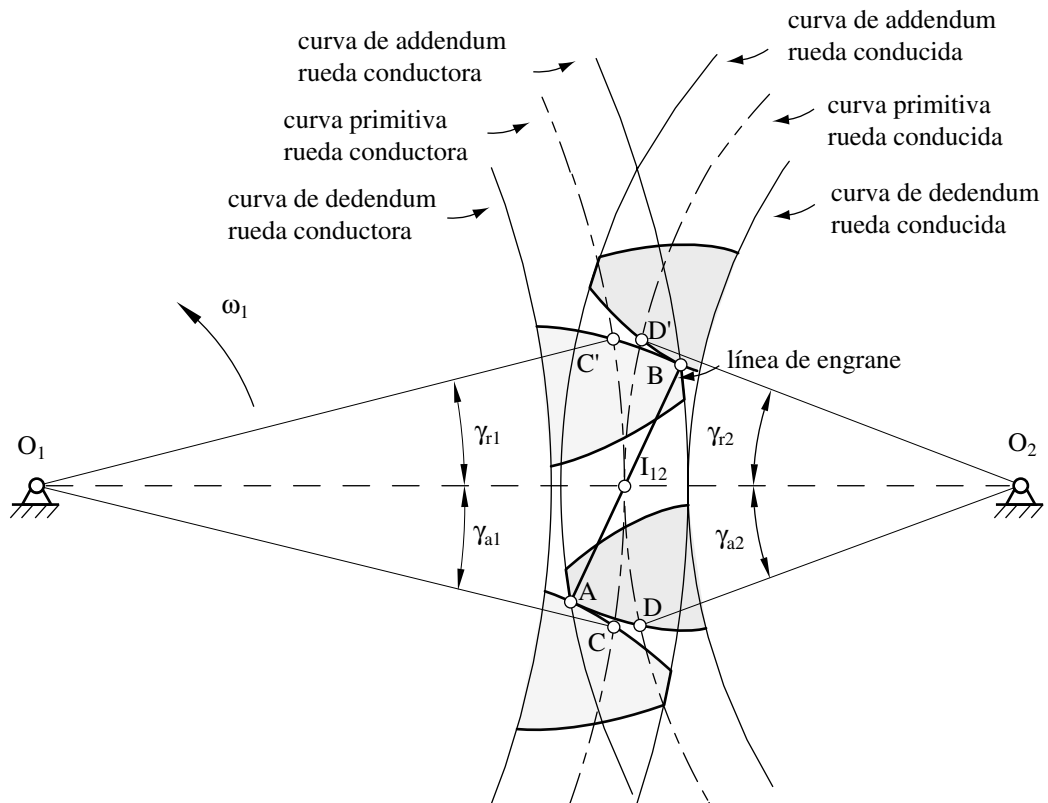


Figura 5.1 Determinación del intervalo de contacto

El arco de acción es la suma de las longitudes del arco de aproximación  $-CI_{12}$  ó  $DI_{12}$  y del arco de retroceso  $-C'I_{12}$  ó  $D'I_{12}$ . La longitud del arco de acción se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$s_a + s_r = \left| \int_{\varphi_{10} - \gamma_{a1}}^{\varphi_{10} + \gamma_{r1}} \left( r_2'^2 + (r_2 f'^{-1})^2 \right)^{1/2} d\varphi_1 \right| = \left| \int_{\varphi_{10} - \gamma_{a1}}^{\varphi_{10} + \gamma_{r1}} \left( r_1'^2 + (r_1')^2 \right)^{1/2} d\varphi_1 \right| \quad (5.1)$$

siendo  $\varphi_{10}$  el ángulo de generación de referencia que determina la ubicación del diente sobre las curvas primitivas en ambas ruedas.

Es conveniente expresar ambos ángulos  $-\gamma_{a1}$  y  $\gamma_{r1}$  ó  $\gamma_{a2}$  y  $\gamma_{r2}$  en función del ángulo de giro de la rueda conductora  $\varphi_1$ ; desde la posición inicial de referencia, un giro  $\gamma_{a2}$  en sentido antihorario de la rueda conducida coincide con un giro  $\gamma_{a1}$  en sentido horario de la rueda conductora. Para un par de dientes particular  $k$ , sea  $\varphi_{10,k}$  el ángulo de giro de la rueda conductora en el que el punto de contacto de este par de dientes se encuentra sobre la línea de centros, y  $\gamma_{a1,k}$  y  $\gamma_{r1,k}$  los ángulos de acercamiento y retroceso del par de dientes. El intervalo

del ángulo de giro de la rueda conductora durante el que transcurre el contacto entre este par de dientes es  $\varphi_{10,k} - \gamma_{a1,k} \leq \varphi_{10,k} \leq \varphi_{10,k} + \gamma_{r1,k}$ .

El ángulo de acercamiento  $-\gamma_{a2}$  de un diente de la rueda conducida que se genera en una posición de referencia  $\varphi_{10}$ , es el ángulo que gira esta rueda desde la posición inicial de referencia hasta que la cremallera asociada genera la cabeza del diente –en la figura (5.1) es el punto A. El ángulo de retroceso  $-\gamma_{r1}$  de un diente de la rueda conductora, que se genera con  $\varphi_{10}$  como posición de referencia, es el ángulo de giro de esta rueda desde la posición de referencia hasta que la cremallera asociada genera la cabeza del diente –en la figura (5.1) es el punto B. En el apartado (4.3) se estudian las condiciones en que se genera la cabeza del diente. De esta forma el intervalo de contacto, el arco de acción y las regiones de recubrimiento se obtienen mediante la extensión del proceso con el que se obtiene el dentado.

### 5.2 RECUBRIMIENTO DE LOS ENGRANAJES NO CIRCULARES

Si se conoce el intervalo de contacto de cada uno de los pares de dientes de las ruedas, se puede diferenciar los tramos de engrane en que existen uno o más pares de dientes en contacto; esta información es necesaria para determinar la fuerza de contacto entre cada par de dientes. En la figura (5.2) se muestra el intervalo de contacto de algunos dientes y los intervalos donde ocurre el recubrimiento para el engranaje que satisface como ley de desplazamiento la curva de Bézier que se estudió en el apartado (3.3).

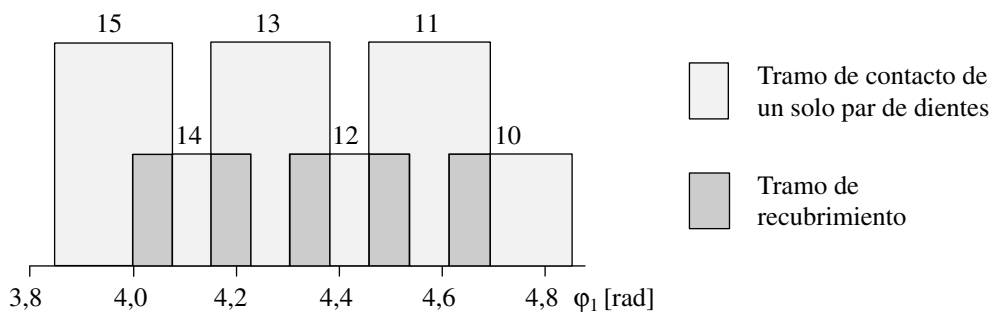


Figura 5.2 Intervalos de contacto de los dientes 10 al 15 del engranaje que cumple la ley de Bézier del apartado 3.3 como ley de desplazamiento

De acuerdo con las definiciones dadas en el apartado (5.1) del recubrimiento en un engranaje no circular, para un diente que se genera en la posición de referencia  $\varphi_{10}$ , el recubrimiento local  $-\varepsilon_{\alpha L}$  se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{\alpha L} = \frac{\left| \int_{\varphi_{10}-\gamma_{a1}}^{\varphi_{10}+\gamma_{r1}} \left( r_1^2 + (r_1')^2 \right)^{1/2} d\varphi_1 \right|}{p} \quad (5.2)$$

siendo  $\gamma_{a1}$  y  $\gamma_{r1}$ , respectivamente, los ángulos requerido para generar la cabeza del diente de la rueda conducida y conductora y  $p$  el paso.

El recubrimiento promedio  $-\varepsilon_{\alpha P}$  se obtiene mediante:

$$\varepsilon_{\alpha P} = \frac{\sum_{k=1}^z \left| \int_{\varphi_{10,k}-\gamma_{a1}}^{\varphi_{10,k}+\gamma_{r1}} \left( r_1^2 + (r_1')^2 \right)^{1/2} d\varphi_1 \right|}{L} \quad (5.3)$$

siendo  $\varphi_{10,k}$  el ángulo de referencia para la generación del par de dientes  $k$ ,  $L$  la longitud de la curva primitiva de la rueda dentada y  $z$  el número de dientes.

El ángulo de presión y el número de dientes de las ruedas dentadas influye en el recubrimiento de un engranaje circular o no circular. Se propone estudiar la influencia de estos parámetros en el recubrimiento de un engranaje circular y verificar si se conserva esta influencia en el caso de los engranajes no circulares. En la figura (5.3) se presenta la línea de acción, el ángulo de presión y los círculos base de dos ruedas circulares. El recubrimiento de un engranaje circular cilíndrico recto  $-\varepsilon_{\alpha}$  viene dado por [68, 69]:

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\sqrt{(r_1 + h_{ad})^2 - (r_{b1})^2} + \sqrt{(r_2 + h_{ad})^2 - (r_{b2})^2} - d \sin \alpha}{p_b} \quad (5.4)$$

siendo  $r_{b1}$  y  $r_{b2}$ , respectivamente, los radios de las circunferencias base de las ruedas conductora y conducida;  $r_1$  y  $r_2$  son, respectivamente, los radios de las circunferencias primitivas de las ruedas conductora y conducida;  $d$  es la distancia entre centros;  $p_b$  es el paso sobre la circunferencia base y  $\alpha$  es el ángulo de presión.

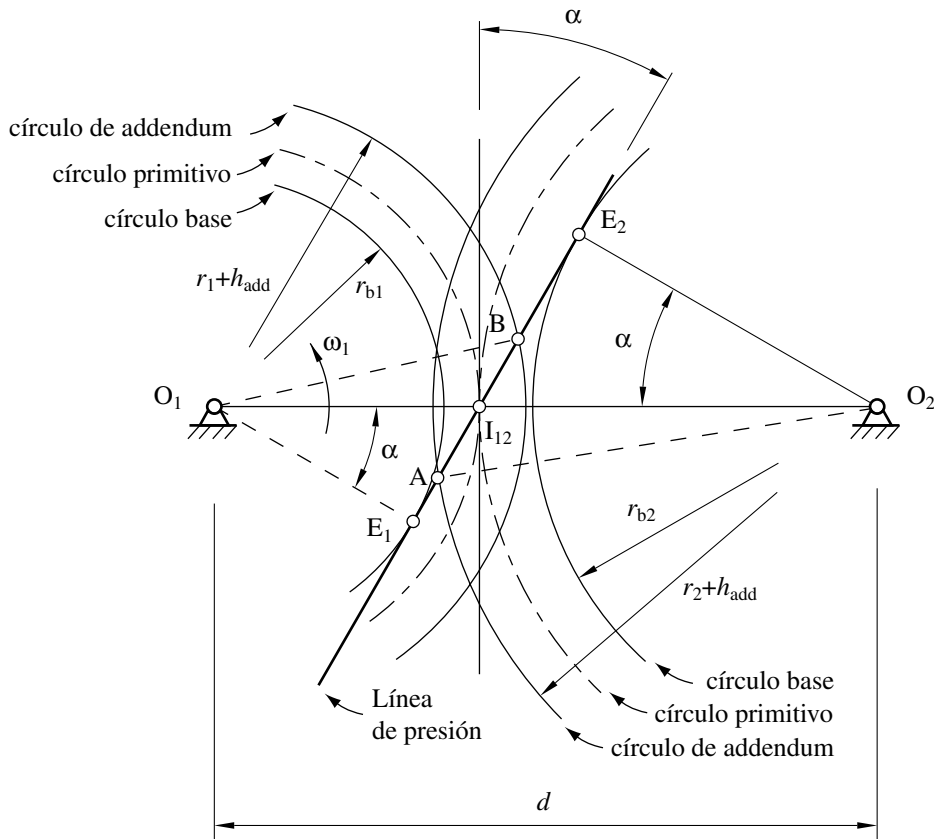


Figura 5.3 Línea de presión y círculo base en unas ruedas circulares

En una rueda circular de radio primitivo  $r$  se cumple que  $r_b = r \cos \alpha$ ,  $r = m z / 2$ ,  $h_{add} = m$  y  $p_b = \pi m \cos \alpha$  siendo  $m$  el módulo. Después de reemplazar estas relaciones en la expresión (5.4) se obtiene el recubrimiento en un engranaje circular en función del ángulo de presión  $\alpha$  y del número de dientes de las ruedas conductora y conducida  $z_1$  y  $z_2$ :

$$\epsilon_\alpha = \frac{\sqrt{\left(\frac{z_1}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{z_1}{2} \cos \alpha\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{z_2}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{z_2}{2} \cos \alpha\right)^2} - \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \alpha}{\pi \cos \alpha} \quad (5.5)$$

Para compararlo con un engranaje no circular, en el que las ruedas conductora y conducida tienen igual periodo de rotación, se supone ahora que las ruedas circulares tienen igual número de dientes. Con esta condición, el recubrimiento se simplifica en la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{2\sqrt{\left(\frac{z_1}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{z_1}{2} \cos \alpha\right)^2} - z_1 \sin \alpha}{\pi \cos \alpha} \quad (5.6)$$

En la figura (5.4) se presenta el recubrimiento como una función del ángulo de presión y del número de dientes que se obtiene utilizando la expresión (5.6). Se observa en la gráfica que con un aumento del ángulo de presión el recubrimiento disminuye y que con un aumento del número de dientes aumenta el recubrimiento.

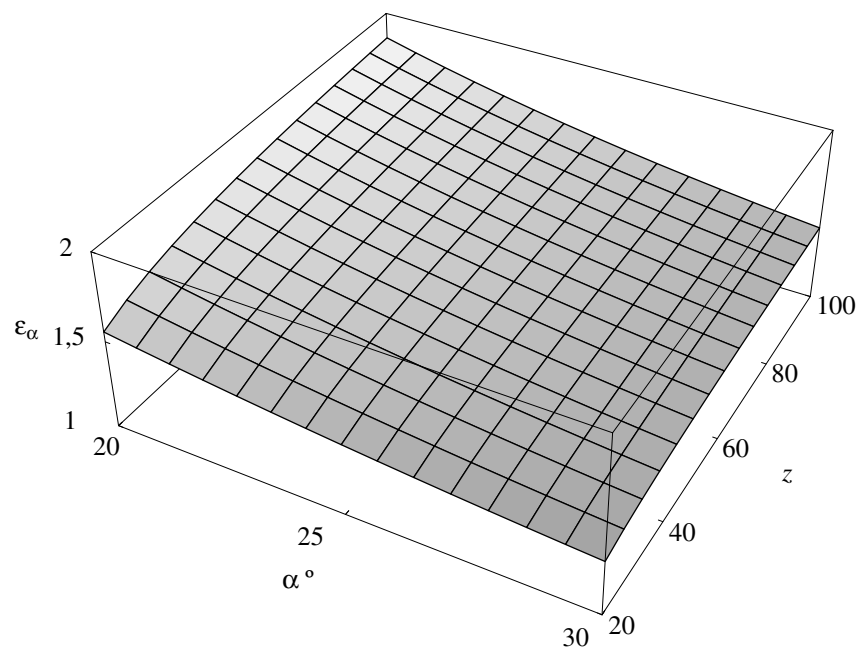


Figura 5.4 Recubrimiento en unas ruedas circulares en función del ángulo de presión y del número de dientes

En el caso de un engranaje no circular, aún no se tiene una expresión analítica para el recubrimiento, en función del número de dientes y del ángulo de presión, similar a la expresión (5.5). En el apartado (5.6.1) se estudiará el recubrimiento en las ruedas que satisfacen las leyes de desplazamiento estudiadas en el capítulo 3 en el que se variará el número de dientes y el ángulo de presión con el fin de comprobar si la influencia de estos parámetros sobre el recubrimiento en los engranajes no circulares es similar a la influencia en los engranajes circulares.



### 5.3 OBTENCIÓN DE LA LÍNEA DE ENGRANE

En el apartado (4.2) se describe el proceso de generación del perfil de un diente. Las coordenadas de los puntos del diente dadas por las expresiones (4.1) a (4.3) están referenciadas al sistema  $O_1X_1Y_1$  –sistema fijo a la rueda dentada. En la figura (5.5) se presentan las relaciones geométricas que permiten obtener las coordenadas del punto de contacto entre un par de dientes del engranaje respecto al sistema  $O_0X_0Y_0$  –sistema de referencia global.

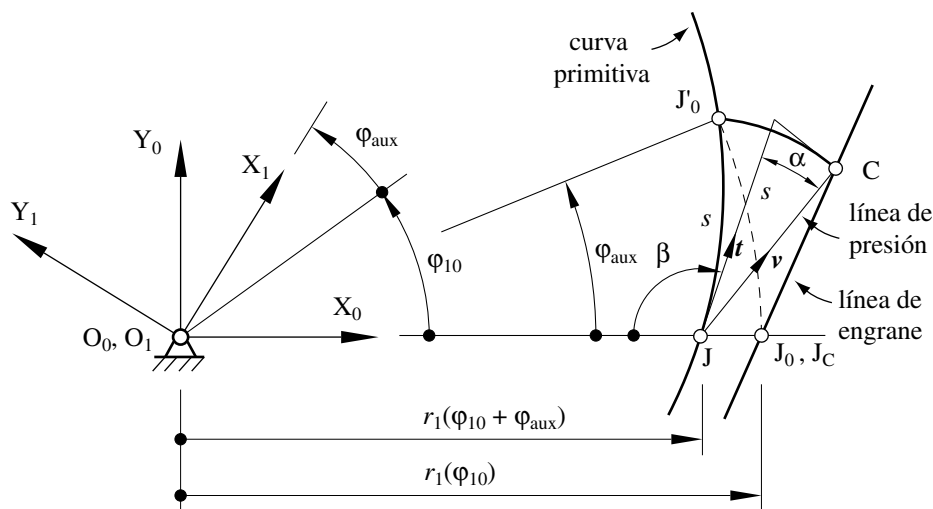


Figura 5.5 Línea de engrane

Para el modelo se considera la generación del flanco activo de un diente de la rueda conductora tomando como posición inicial del proceso la posición que se corresponde con  $\varphi_{10}$  como ángulo de giro de la rueda conductora; la coordenada angular del punto del flanco sobre la curva primitiva con respecto al sistema  $O_1X_1Y_1$  es  $-\varphi_{10}$ , punto  $J_0$  de la figura (5.5);  $J_0$  representa el punto inicial de contacto entre la rueda y la cremallera en el proceso de generación y coincide con el centro instantáneo de rotación relativo entre la cremallera y la rueda en esta configuración.

La posición en el proceso de generación de la figura (5.5) se corresponde con la posición cuando la rueda conductora gira un ángulo  $\varphi_{aux}$  en sentido antihorario alrededor de  $O$  desde la posición de referencia  $\varphi_{10}$ . El punto  $J$  es el centro instantáneo de rotación relativo entre la cremallera y la rueda cuando se genera el punto  $C$ ; el punto  $C$  es el punto de contacto actual

entre la cremallera y la rueda, el ángulo de giro de la rueda conductora para generar el punto C es  $(\varphi_{10} + \varphi_{aux})$ .

La representación como número complejo del vector **OC** en el sistema fijo global  $O_0X_0Y_0$ , se obtiene de la figura (5.5):

$$\mathbf{OC}_{O_0X_0Y_0} = r_1(\varphi_{10} + \varphi_{aux}) + s \cos \alpha e^{j(\pi - \alpha - \beta)} \quad (5.7)$$

Con la expresión (5.7) se obtiene la línea de engrane de un par de dientes que se generan con  $\varphi_{10}$  como posición de referencia al tomar valores del ángulo de giro  $(\varphi_{10} + \varphi_{aux})$  dentro del intervalo de contacto del par de dientes; esto se cumple si:  $-\gamma_{a1} \leq \varphi_{aux} \leq \gamma_{r1}$ , siendo  $\gamma_{a1}$  y  $\gamma_{r1}$  los ángulos de acercamiento y retroceso de la rueda conductora. Como se menciono previamente, los ángulos de acercamiento y de retroceso se corresponden con los ángulos de giro desde la posición inicial de referencia con las que se generan el punto de la cabeza del diente de la rueda conducida y conductora respectivamente.

Cuando el punto de contacto es el punto del flanco del diente ubicado sobre la curva primitiva  $-J_0-$  éste se localiza sobre la línea de centros y es a la vez el centro instantáneo de rotación relativo; en la posición inicial de referencia coincide con el punto  $J_C$  –figura (5.5)– que es un punto de la línea de contacto.

Después de que la rueda gire el ángulo  $\varphi_{aux}$  el centro instantáneo de rotación relativo se localiza en otra posición, representada por el punto J en la figura (5.5). El punto de contacto actual se localiza en la dirección del vector unitario  $\mathbf{v}$ . En la figura (5.5) se representa la línea de engrane por la línea  $J_C C$ .

En la figura (5.6) se presentan algunas configuraciones en las que ocurre el contacto para un par de dientes de las ruedas que cumplen la función de Bézier, descrita en el apartado (3.2), como ley de desplazamiento. En la figura se muestra la línea de engrane de este par de dientes y los ángulos de giro que se corresponden para la configuración mostrada.

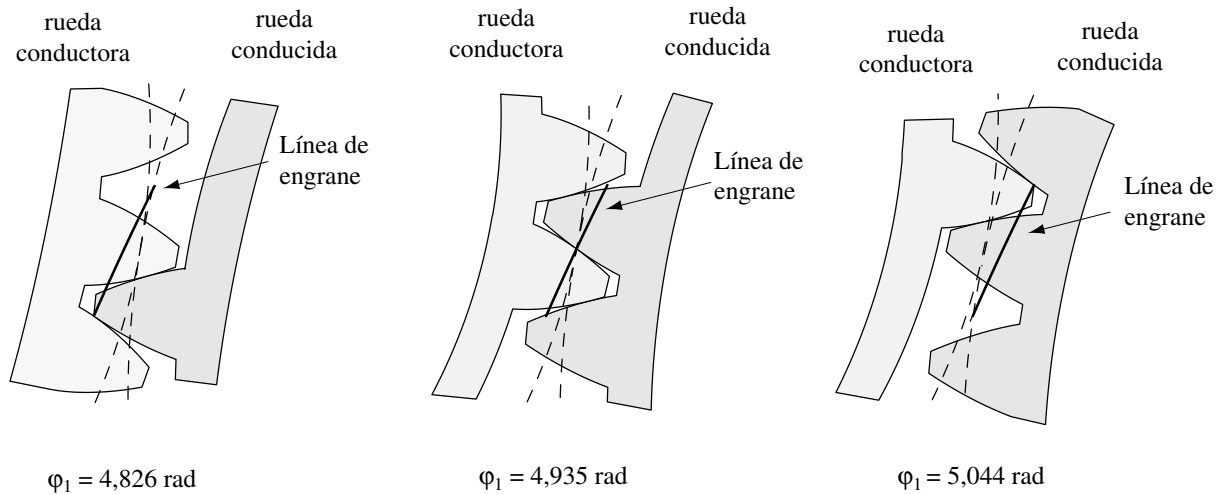


Figura 5.6 Trayectoria del punto de contacto para un par de dientes de las ruedas que cumplen la curva de Bézier del apartado (3.3) como ley de desplazamiento

### 5.4 CURVATURA RELATIVA ENTRE LOS PERFILES EN CONTACTO

En la teoría de esfuerzos por contacto de Hertz, se requiere del cálculo de los radios de curvatura de los dos flancos en el punto de contacto [70]; en este apartado se estudia la curvatura relativa que depende del radio de curvatura de los flancos de los dientes en contacto. En la figura (5.7) se presentan las condiciones geométricas de los perfiles conjugados para los que su centro instantáneo de rotación relativo  $-I_{12}$  se ubica sobre la línea de centros  $O_1O_2$ .

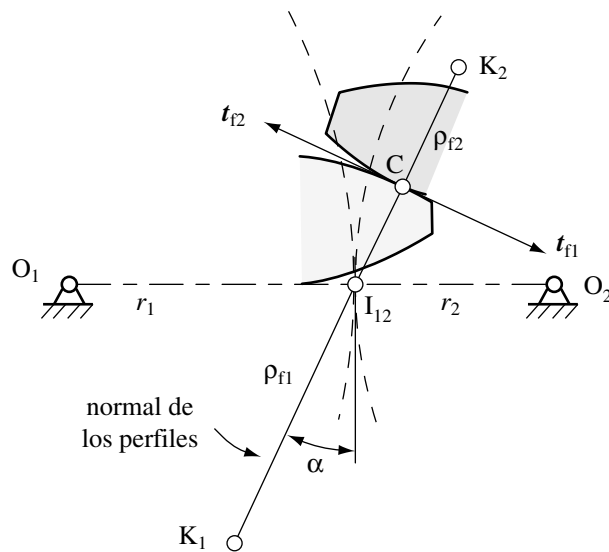


Figura 5.7 Condiciones geométricas del perfil

En el punto de contacto C, los dos flancos activos tienen una tangente común  $-t_{f1}$  y  $t_{f2}$  perpendicular a  $I_{12}C$  y colineal a la velocidad de deslizamiento, tema de estudio del apartado (5.5). En la normal de contacto se encuentran  $K_1$  y  $K_2$ , que son los centros de curvatura de los perfiles en el punto de contacto P. Los radios de curvatura de los perfiles en el punto P son  $\rho_{f1}$  y  $\rho_{f2}$ . La curvatura relativa entre los perfiles  $-1/\rho_0$  se calcula mediante [45]:

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_{f1}} + \frac{1}{\rho_{f2}} \tag{5.8}$$

En la figura (5.8) se presenta la variación de la curvatura relativa durante el contacto del par de dientes del engranaje que cumple la curva de Bézier del apartado (3.3) como ley de desplazamiento y que se genera tomando como posición angular de referencia  $\varphi_{10} = 1$  rad.

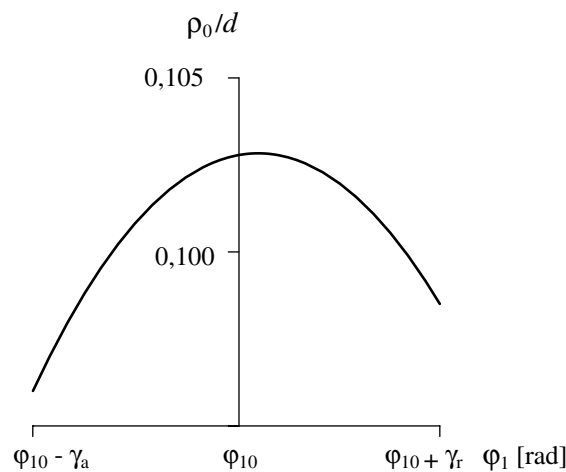


Figura 5.8 Variación del radio de curvatura relativo durante el intervalo de contacto

En este caso, el máximo radio de curvatura relativo ocurre cerca del punto del flanco del diente que se ubica sobre la curva primitiva; sin embargo, no se puede generalizar y es necesario determinar para cada par de dientes, en el intervalo de contacto, donde ocurre su máximo valor. En esta tesis, en cada posición angular de referencia, se evaluó la curvatura relativa en el intervalo de contacto del diente que se genera en esta posición y se tomó el máximo de ellos. Cuanto mayor es la curvatura relativa de los flancos activos de los diente en contacto, menor es el esfuerzo de contacto entre los dientes [45].

## 5.5 VELOCIDAD DE DESLIZAMIENTO

La velocidad de deslizamiento entre los perfiles en el punto de contacto C de un par de dientes es un parámetro que interesa minimizar dado que así se disminuye el rozamiento entre los dientes y las pérdidas de potencia son menores. Esta velocidad se calcula como la distancia del punto de contacto C al centro instantáneo de rotación relativo  $-I_{12}$  multiplicada por la velocidad angular relativa.

$$v_{\text{desl}} = |I_{12}C|(\omega_1 + \omega_2) \quad (5.9)$$

siendo  $\omega_1$  y  $\omega_2$  la magnitud de las velocidades angulares de la ruedas conductora y conducida. Al reemplazar la relación de transmisión se obtiene

$$\frac{v_{\text{desl}}}{\omega_1} = |I_{12}C|(1 + \tau(\varphi_1)) \quad (5.10)$$

Esta última expresión es conocida como velocidad de deslizamiento específico [67].

La velocidad de deslizamiento cambia de sentido al pasar del arco de acercamiento al arco de retroceso, este cambio de sentido produce el cambio de sentido de las fuerzas tangenciales en el contacto entre dientes.

El rendimiento del engranaje es función del deslizamiento y de la pérdida específica de potencia debido al deslizamiento, el rendimiento se determina mediante:

$$\frac{v_{\text{desl}} F_f}{\Gamma_2 \omega_2} = \frac{|I_{12}C| \omega_1 (1 + \tau) \mu F_{12}}{F_{12} r_2 \sin(\beta + \alpha) \omega_2} = \frac{|I_{12}C|(1 + \tau) \mu}{r_1 \sin(\beta + \alpha)} = \frac{|I_{12}C| \mu}{\sin(\beta + \alpha)} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (5.11)$$

siendo  $F_f$  la fuerza de fricción entre los dientes,  $\mu$  su coeficiente de rozamiento,  $\Gamma_2$  el par resistivo que actúa en la rueda conducida y  $\beta$  el ángulo de orientación del vector tangente de la curva primitiva con respecto al vector radio –figura (3.10).

En la figura (5.9) se presenta la velocidad de deslizamiento del par de dientes del engranaje que tiene como ley de desplazamiento la curva de Bézier que se estudió en el apartado (3.3) y que se genera en  $\varphi_{10} = 1$  rad como posición de referencia; se asume una velocidad angular de

la rueda conductora unitaria. La distancia entre el punto de contacto y el centro instantáneo de rotación relativo aumenta en la medida en que el contacto se aparta del centro instantáneo de rotación; de acuerdo con esta característica, la máxima velocidad de deslizamiento ocurre al inicio o al final del intervalo de contacto del par de dientes.

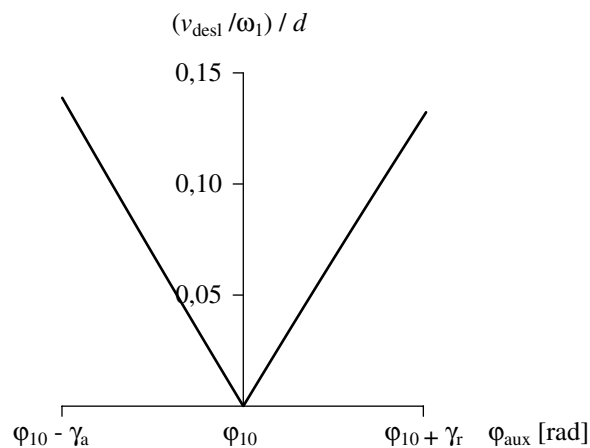
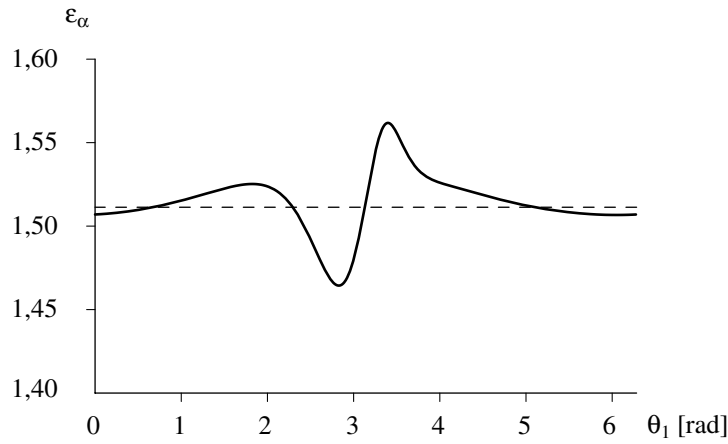


Figura 5.9 Variación de la velocidad de deslizamiento durante el intervalo de contacto

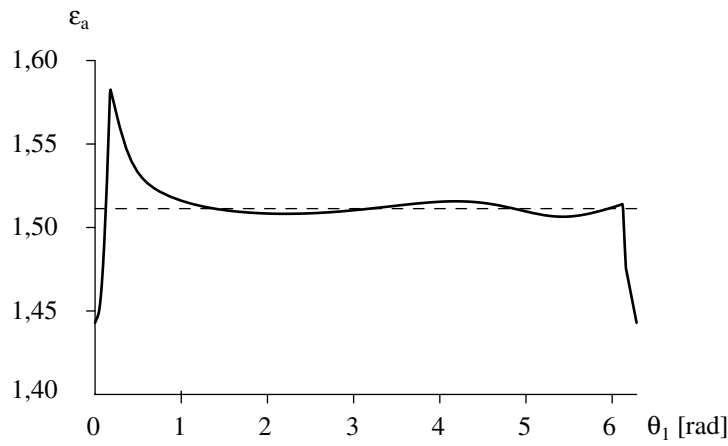
## 5.6 CASOS DE ESTUDIO

### 5.6.1 Recubrimiento

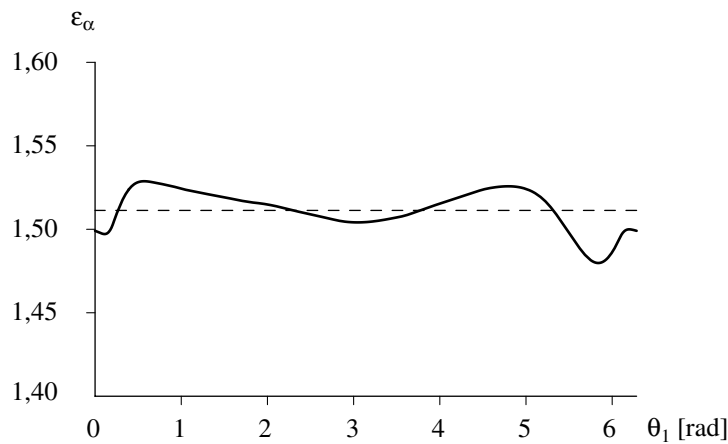
En las figura (5.10), se presenta el recubrimiento local de los engranajes que cumplen las leyes de desplazamiento que se estudiaron en el capítulo 3 y, en línea punteada, el recubrimiento de un engranaje circular con igual número de dientes y ángulo de presión. En el procedimiento para obtener estas gráficas, la abscisa  $\theta_1 = 2\pi - \varphi_{10}$  es la coordenada geométrica que se utiliza para ubicar el flanco de un diente sobre la curva primitiva de la rueda conductora referenciado en el sistema coordenado fijo a la rueda y siendo  $\varphi_{10}$  el ángulo de referencia en el proceso de generación; se utiliza la coordenada  $\theta_1$  para observar la analogía con el radio de curvatura de las curvas primitivas de las ruedas dentadas mostradas en el capítulo 3. El comportamiento del recubrimiento local, en todos los casos, presenta similitudes con los resultados de sus respectivos radios de curvatura de las ruedas conductora y conducida. El recubrimiento local se obtiene para un número de dientes de 40 en los engranajes con igual número de dientes; en el caso del engranaje con relación de periodos de rotación doble, la rueda conductora tiene 64 dientes y la conducida 32.



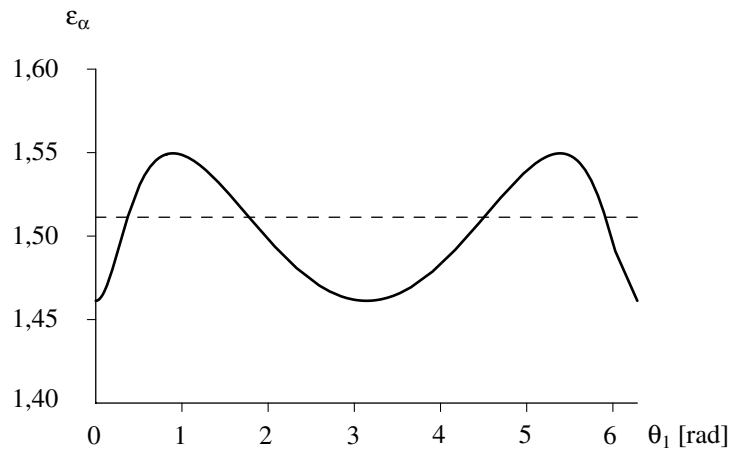
a) Recubrimiento en el engranaje que cumple la curva armónica del apartado 3.2



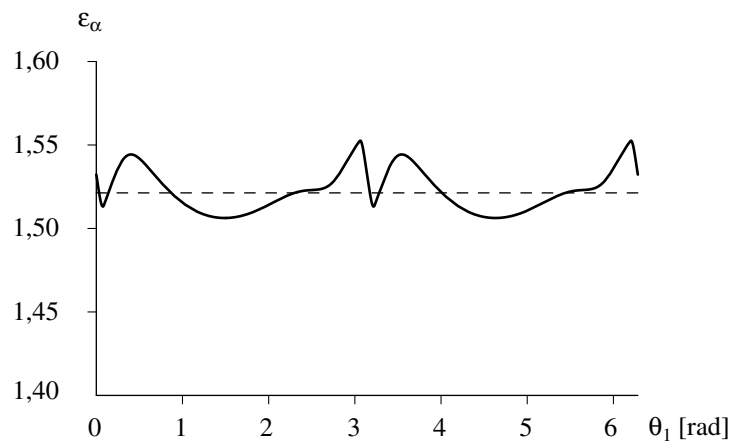
b) Recubrimiento en el engranaje que cumple la curva de Bézier del apartado 3.3



c) Recubrimiento de las ruedas que cumplen la curva B-spline del apartado 3.4



d) Recubrimiento de las ruedas elípticas del apartado 3.5



e) Recubrimiento del engranaje que cumple la ley de desplazamiento del apartado 3.6

Figura 5.10 Recubrimiento local de los engranajes que cumplen las leyes de desplazamiento estudiadas en el capítulo 3

Como se observa en la figura (5.10) en cada uno de los engranajes mencionados, el recubrimiento de un par de dientes depende del tramo de la curva primitiva en que se generen. En el análisis de esfuerzos, interesa los dientes con menor recubrimiento, un menor recubrimiento influye en un incremento de los esfuerzos debido al contacto entre los dientes; sin embargo, el esfuerzo también depende del radio de curvatura del perfil del diente en el punto de contacto y de la magnitud de la fuerza debido al contacto entre los dientes de las ruedas dentadas.

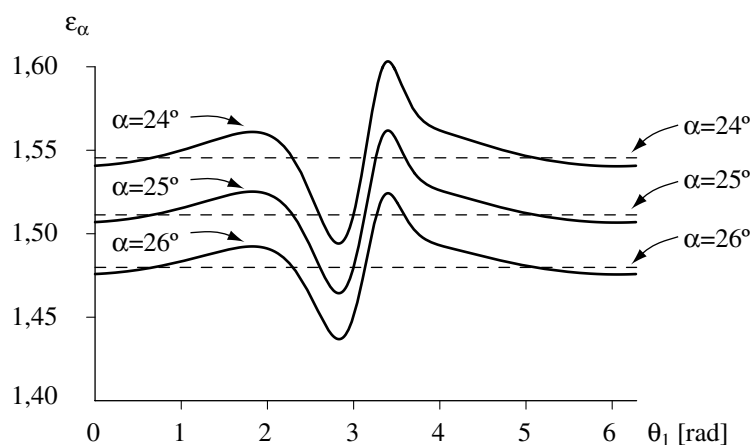


Aunque es difícil establecer un valor mínimo para el recubrimiento, es práctica común utilizar un recubrimiento de 1,4 con 1,2 como caso extremo [69]. Es necesario resaltar, sin embargo, que cuanto menor es el recubrimiento, mayor es el grado de exactitud requerido en el mecanizado de los perfiles para garantizar una operación silenciosa [69].

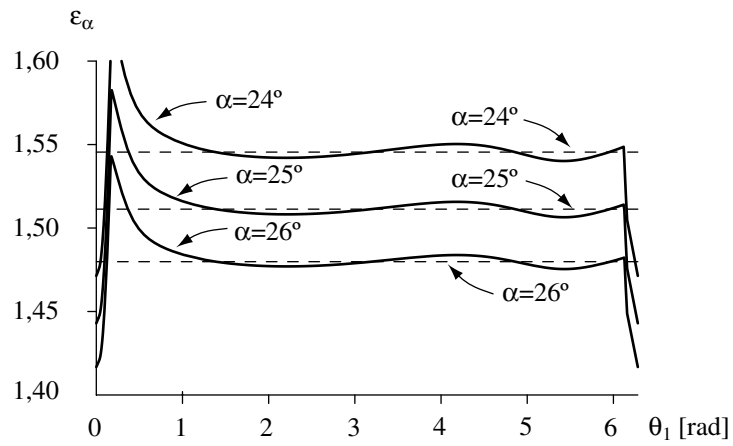
### 5.6.2 Influencia del ángulo de presión en el recubrimiento de un engranaje no circular

En este apartado se presentan la influencia del ángulo de presión en el recubrimiento de los engranajes no circulares que se estudiaron en el capítulo 3. El número de dientes empleado es de 40 a excepción del engranaje con relación de periodos de rotación doble; en este caso la rueda conductora tiene 64 dientes y la conducida 32.

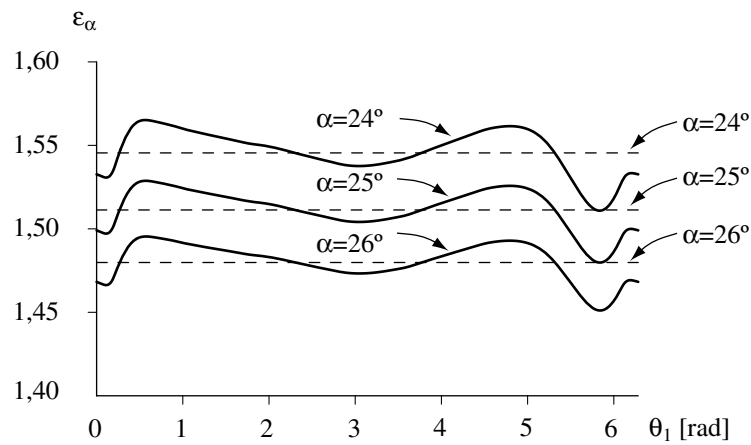
En la figura (5.11) se presenta el recubrimiento de los engranajes mencionados considerando tres ángulos de presión:  $24^\circ$ ,  $25^\circ$  y  $26^\circ$ . En todos los casos disminuye el recubrimiento cuando se incrementa el ángulo de presión de la cremallera de corte, de manera similar a la influencia del ángulo de presión sobre el recubrimiento en los engranajes circulares cilíndricos rectos mencionado en el apartado (5.2). En cada caso se presenta en línea punteada el recubrimiento de un engranaje circular con los mismos valores del ángulo de presión y número de dientes que se calcula mediante la expresión (5.4).



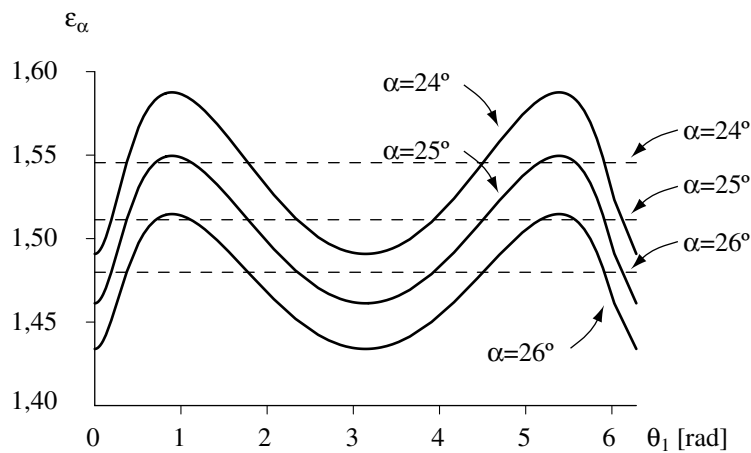
a) Engranaje que cumple como ley de desplazamiento la ley armónica del apartado 3.2



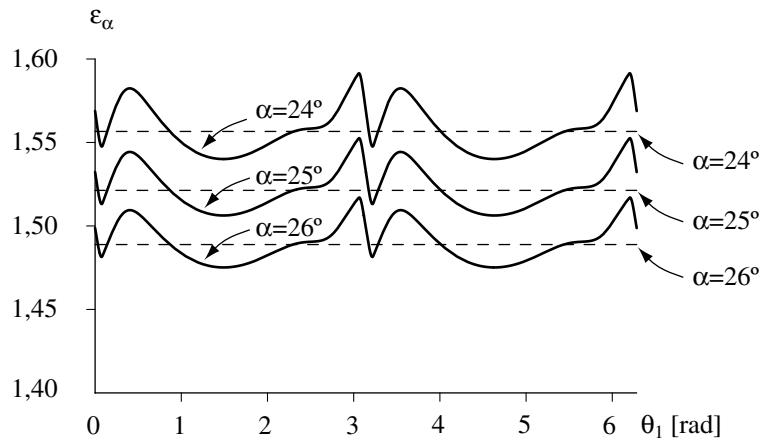
b) Engranaje que cumple como ley de desplazamiento la curva de Bézier del apartado 3.3



c) Engranaje que cumple como ley de desplazamiento la curva B-spline del apartado 3.4



d) Engranaje elíptico del apartado 3.5



e) Engranaje con relación de periodos de rotación doble del apartado 3.6

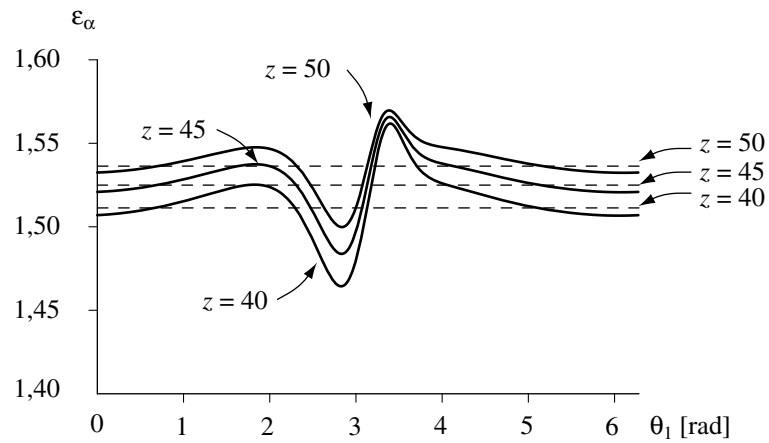
Figura 5.11 Influencia del ángulo de presión en el recubrimiento

### 5.6.3 Influencia del número de dientes en el recubrimiento de un engranaje no circular

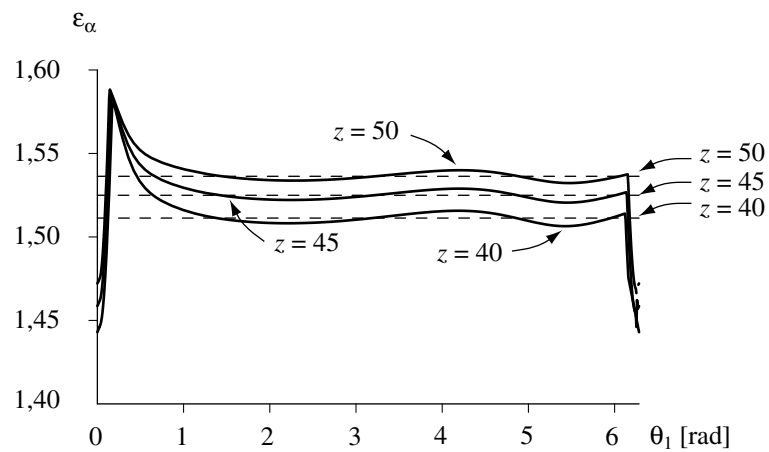
En este apartado se presentan los resultados obtenidos sobre la influencia del número de dientes con respecto al recubrimiento local en los engranajes no circulares que cumplen las leyes de desplazamiento del capítulo 3. El ángulo de presión en el proceso de generación en todos los casos es de  $25^\circ$ .

En la figura (5.12) se presentan la variación del recubrimiento de los engranajes estudiados para diferentes número de dientes de las ruedas dentadas, 40, 45 y 50 dientes. En el engranaje con relación de periodos de rotación doble, el número de dientes estudiados, 50, 64 y 70 dientes, se corresponden con el de la rueda conductora. En cada caso se representa en línea punteada el recubrimiento de un engranaje circular con igual número de dientes e igual ángulo de presión que se calcula mediante la expresión (5.4).

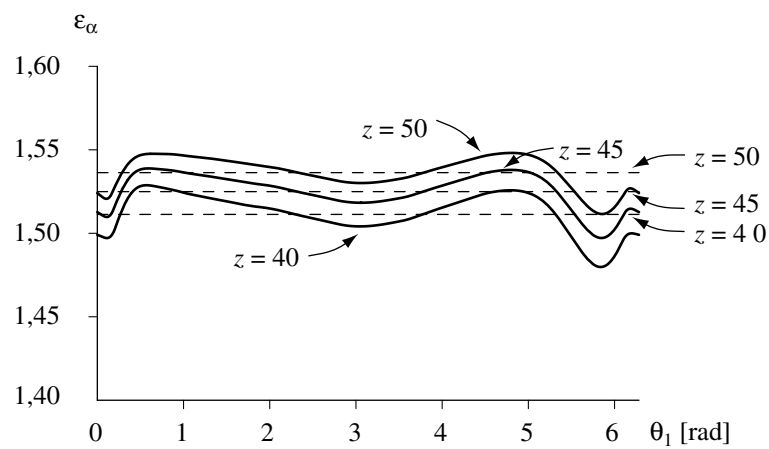
En cada caso se observa que la influencia del número de dientes sobre el recubrimiento local en un engranaje no circular es similar a la influencia del número de dientes en los engranajes circulares, un aumento del número de dientes incrementa el recubrimiento del engranaje no circular.



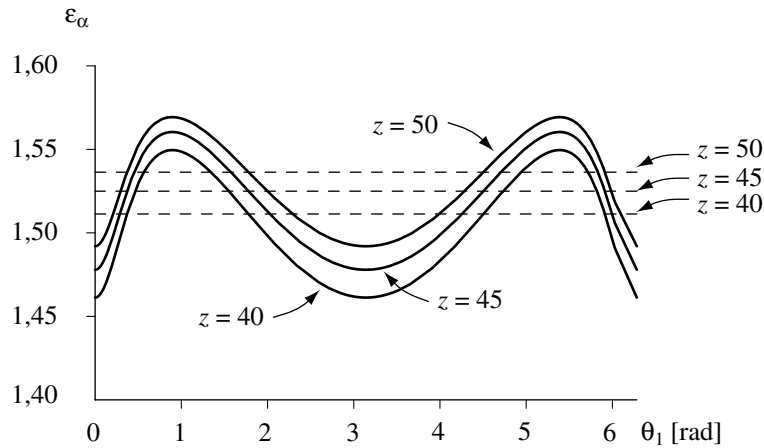
a) Engranaje que cumple como ley de desplazamiento la ley armónica del apartado 3.2



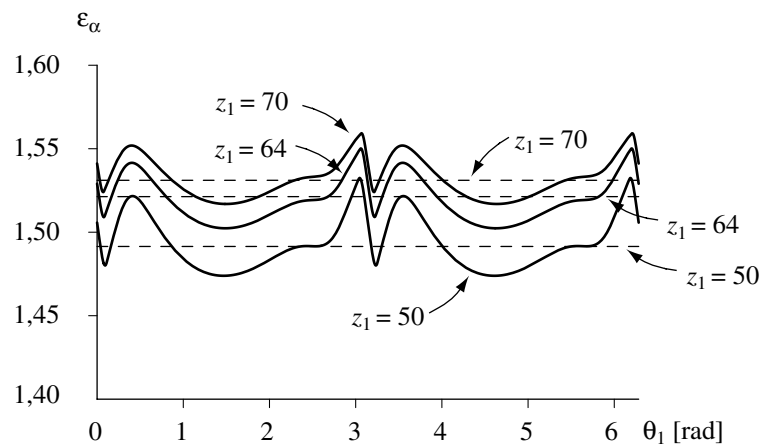
b) Engranaje que cumple como ley de desplazamiento la curva de Bézier del apartado 3.3



c) Engranaje que cumple como ley de desplazamiento la curva B-spline del apartado 3.4



d) Engranaje elíptico del apartado 3.5

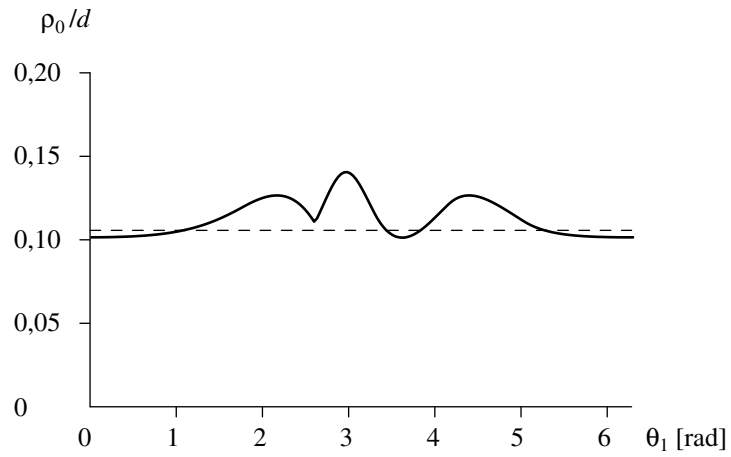


e) Engranaje con relación de periodos de rotación doble del apartado 3.6

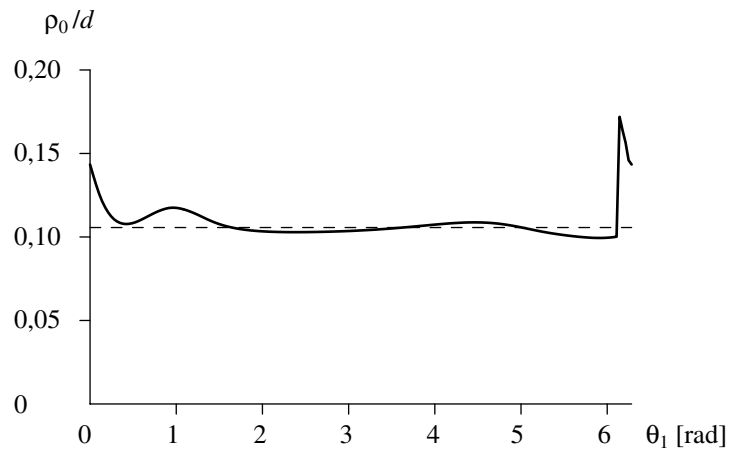
Figura 5.12 Influencia del número de dientes en el recubrimiento

### 5.6.4 Curvatura relativa

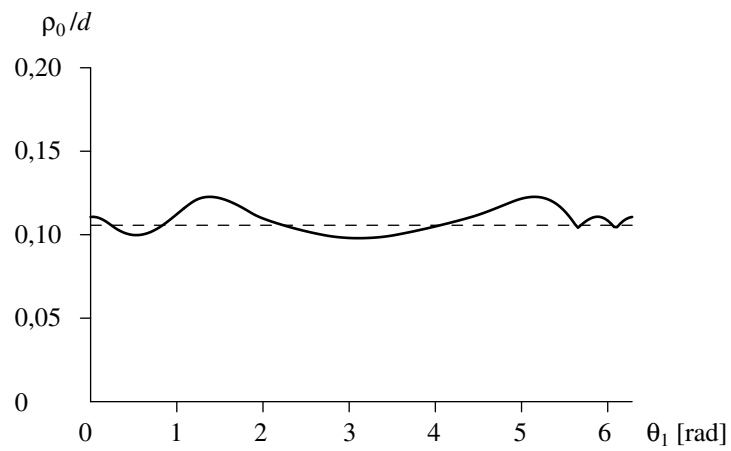
En la figura (5.13) se presenta la máxima curvatura relativa de los engranajes que cumplen las leyes de desplazamiento del capítulo 3. Para un diente de la rueda conductora que se genera en una posición inicial de referencia  $\theta_1$  con respecto a su sistema coordinado, se calcula la curvatura relativa en el intervalo de contacto del par de dientes correspondientes y se establece su valor máximo. En cada engranaje, el ángulo de presión es de  $25^\circ$ , el número de dientes es de 40. En el engranaje con relación de periodos de rotación doble el número de dientes de la rueda conductora es de 64. En cada figura se muestra, en línea punteada, la máxima curvatura de un engranaje circular con igual número de dientes e igual ángulo de presión.



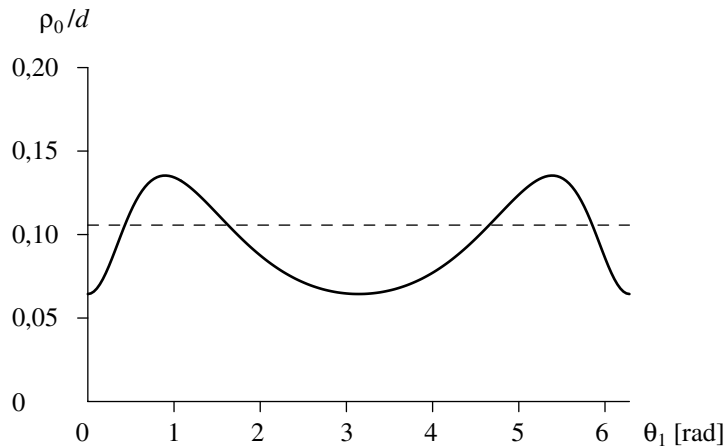
a) Engranaje que cumple como ley de desplazamiento la ley armónica del apartado 3.2



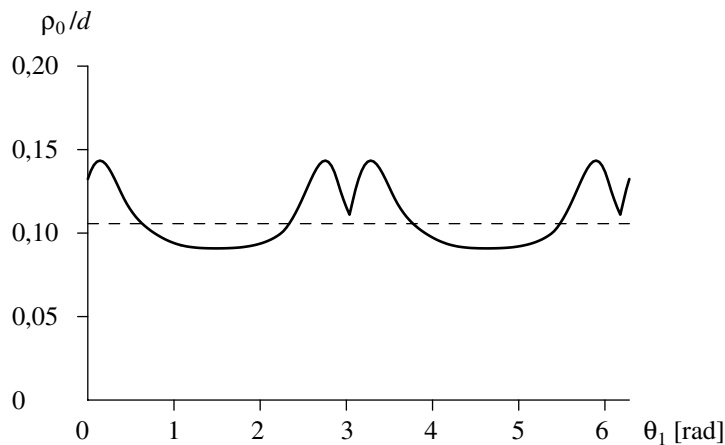
b) Engranaje que cumple como ley de desplazamiento la curva de Bézier del apartado 3.3



c) Engranaje que cumple como ley de desplazamiento la curva B-spline del apartado 3.4



e) Engranaje elíptico del apartado 3.5



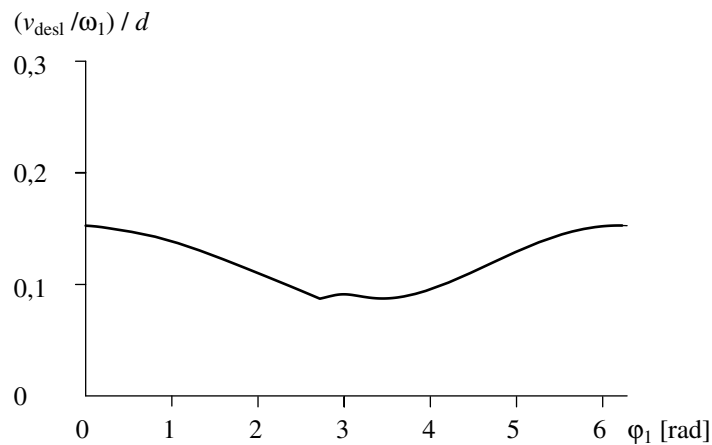
e) Engranaje con relación de periodos de rotación doble del apartado 3.6

Figura 5.13 Curvatura relativa de los engranajes estudiados

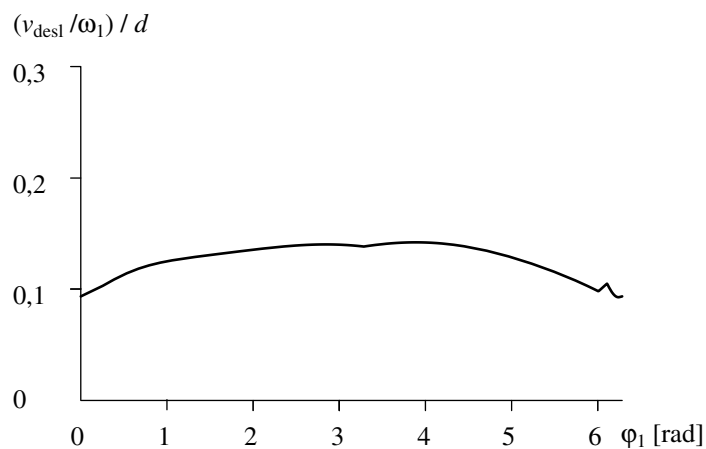
La forma de la máxima curvatura relativa de los flancos en cada engranaje presenta un comportamiento similar a su correspondiente radio de curvatura de la curva primitiva de las ruedas conductora y conducida. Esta similitud es más notable en los casos de los engranajes que satisfacen la curva de Bézier, los engranajes elípticos y el engranaje con relación de periodos de rotación doble. En el caso del engranaje con ley de desplazamiento dado por la curva de Bézier del apartado (3.3), se observa una discontinuidad en la curvatura relativa cerca de la coordenada en que se produce la discontinuidad en el radio de curvatura de la curva primitiva de la rueda conductora.

### 5.6.5 Velocidad de deslizamiento específica

En la figura (5.14) se presentan las máximas velocidades de deslizamiento específicos de los engranajes que cumplen las leyes de desplazamiento, que se estudiaron en el capítulo 3, durante el intervalo de contacto, en función del ángulo de giro que se utiliza como referencia para el proceso de generación. En cada abscisa, se utiliza el ángulo de giro de la rueda conductora  $-\varphi_{10}$  para observar la relación entre las velocidades de deslizamiento específicos y la relación de transmisión del engranaje. El ángulo de presión en todos los engranajes es de  $25^\circ$ ; el número de dientes de los engranajes es de 40, en el caso de las ruedas con relación de periodos de rotación doble la rueda conductora tiene 64 dientes.

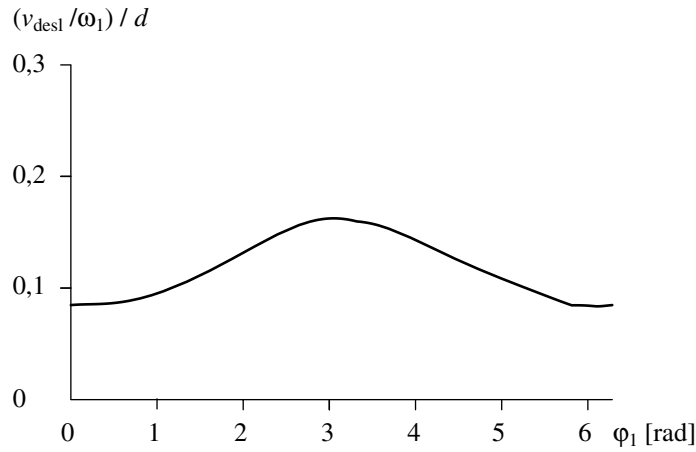


a) Engranaje que cumple como ley de desplazamiento la ley armónica del apartado 3.2

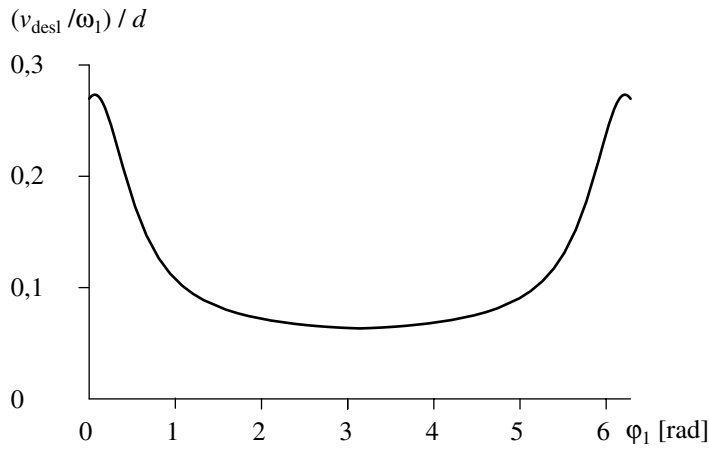


a) Engranaje que cumple como ley de desplazamiento la curva de Bézier del apartado 3.3

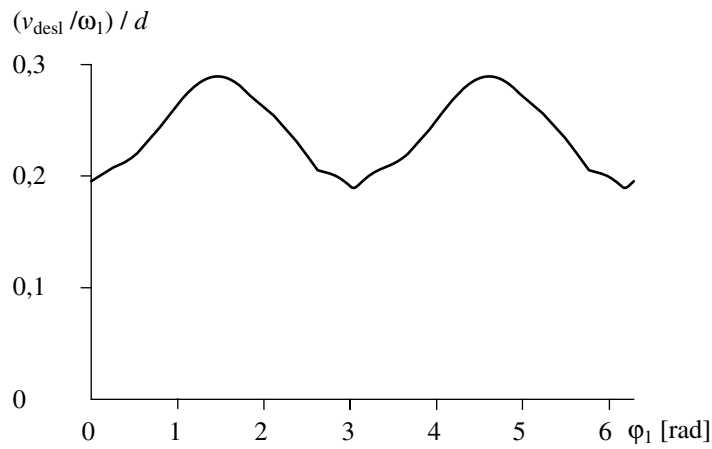




c) Engranaje que cumple como ley de desplazamiento la curva B-spline del apartado 3.4



d) Ruedas elípticas del apartado 3.5



a) Ruedas con relación de periodos de rotación doble del apartado 3.6

Figura 5.14 Velocidad de deslizamiento de los engranajes de estudio

La forma de la velocidad de deslizamiento específica es muy similar a la forma de la relación de transmisión del engranaje, lo que esta acorde con la expresión (5.10) que se estudió en el apartado (5.5). Las mayores velocidades de deslizamiento se obtienen en los tramos de la curva primitiva en que se presentan las máximas relaciones de transmisión del engranaje.

Las máximas velocidades de deslizamiento dependen del tamaño del diente, si se incrementa el número de dientes disminuye la máxima distancia de separación entre el punto de contacto y el centro instantáneo de rotación relativo entre las ruedas con lo que se disminuye la velocidad del deslizamiento del par de dientes. En la figura (5.15) se presenta la máxima velocidad de deslizamiento específica de las ruedas que cumplen la ley armónica como ley de desplazamiento considerando que las ruedas dentadas tienen 40 y 50 dientes; en línea punteada se presenta la velocidad de deslizamiento específica para un engranaje circular con igual número de dientes e igual ángulo de presión.

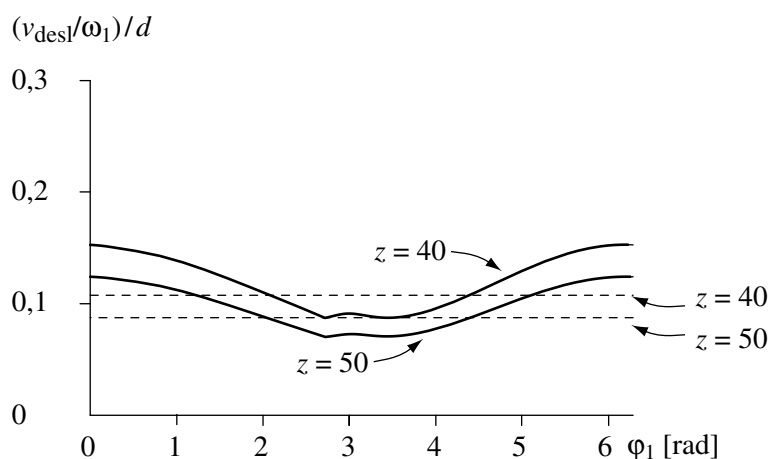


Figura 5.15 Influencia del número de dientes en la velocidad específica de deslizamiento en las ruedas que cumplen la ley armónica del apartado 3.2

El ángulo de presión influye en la máxima velocidad de deslizamiento, si se incrementa el ángulo de presión disminuye las velocidades de deslizamiento. En la figura (5.16) se muestra la máxima velocidad de deslizamiento específica de las ruedas que cumplen la ley armónica como ley de desplazamiento considerando que las ruedas dentadas se generan con un ángulo de presión de 25° y 30°; en línea punteada se presenta la velocidad de deslizamiento específica para un engranaje circular con igual número de dientes e igual ángulo de presión.

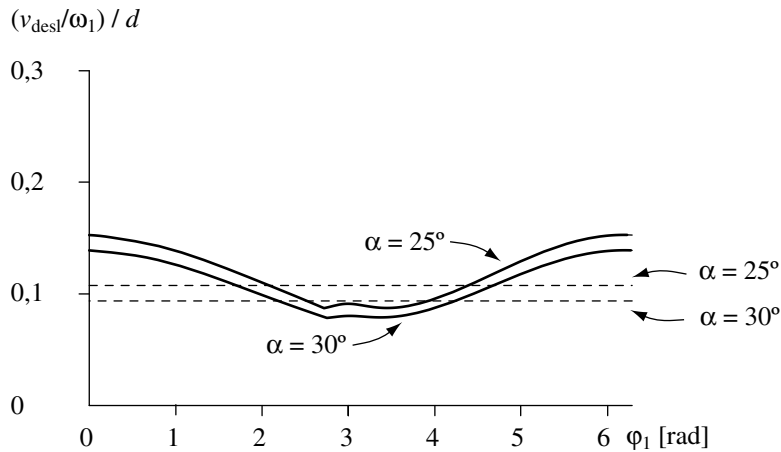


Figura 5.16 Influencia del número de dientes en la velocidad específica de deslizamiento en las ruedas que cumplen la ley armónica del apartado 3.2

En los apartados (4.6.1), (4.6.4) y (4.6.5) se presentan, respectivamente, los resultados del recubrimiento local, curvatura relativa y velocidad de deslizamiento de los engranajes que cumplen la ley de desplazamiento estudiadas en el capítulo 3; en los casos de la curvatura relativa y la velocidad de deslizamiento, se dan sus valores máximos. El cálculo de esfuerzos en los dientes no es un objetivo de esta tesis, por lo que solo se establecen los procedimientos para el cálculo de las variables geométricas necesarias para su determinación.