Capítulo 2

Volatilidad.

En nuestros días el término volatilidad ha adquirido una gran importancia para cualquier persona relacionada con los mercados financieros, aunque sólo sea como espectador. Para la mayoría la volatilidad es sinónimo de riesgo, pero para los operadores financieros este término adquiere diferentes significados según sea el papel que desempeña en el mercado; es por tanto conveniente entender la volatilidad no como un único parámetro, sino como un conjunto de conceptos relacionados entre sí. Figlewski, en su artículo *"Forecasting Volatility" (*1997, pg 79-80) concreta esta idea en los siguientes términos:

"ON THE MEANING OF VOLATILITY.

"Volatility," as the term is used in practice, does not refer to a single parameter, but to a set of related concepts. In a option pricing model, volatility is the square root of the average variance of the return on the underlying asset over every instant of the option's remaining lifetime. An options market maker, on the other hand, may use the term to mean the variability of return over the inmediate short run. But much of the time, when the market maker uses the term volatility he actually means implied volatility. By contrast, a risk manager for a financial institution may calculate volatility in order to estimate the probability distribution for the value of a borrower's collateral at the maturity of a loan, and from that, her firm's exposure to the risk of default..."

Si la volatilidad puede ser entendida de diferentes maneras, es necesario que explicitemos el tipo de riesgo que estudiamos y de manera consecuente optemos por el estimador más adecuado. Una vez medida la volatilidad podemos observar en ella algunas características que la hacen predecible y, por tanto, susceptible de modelizar.

En la primera sección vamos a comentar qué entendemos por volatilidad y sobre qué tipo de activo la aplicamos. En la segunda sección vamos a presentar los datos reales a los que asociamos la volatilidad, realizando la descripción de sus características fundamentales. La elección del proceso de estimación que nos conducirá a obtener nuestra medida de volatilidad se aborda en la tercera sección, en la cuarta se hace una breve revisión de los modelos utilizados para estudiar la volatilidad de diferentes índices calculados sobre mercados bursátiles. Fiinalmente en la quinta sección, justificamos la adecuación del modelo "*self-exciting threshold autoregressive*" SETAR para explicar el comportamiento de la volatilidad.

2.1 Definición de Volatilidad.

Esta tesis se enmarca en el estudio de la volatilidad asociada a la rentabilidad de las acciones, por consiguiente entendemos la volatilidad como una medida del riesgo que se deriva de los cambios en la rentabilidad de las acciones. La causa de estos cambios se encuentra en las variaciones de los precios que, en último término, se deben a las informaciones que llegan constantemente al mercado.

La propia estructura del mercado nos presenta los precios de las acciones como un proceso que evoluciona a lo largo del tiempo, de igual manera, la rentabilidad derivada de estos cambios posee una estructura temporal íntimamente relacionada con la de los precios. Basándonos en ello nos parece adecuado considerar la volatilidad también como una serie temporal y no como un único parámetro que se mantiene fijo a lo largo del tiempo. Por tanto definimos la volatilidad como sigue:

Definición 1: "*La volatilidad es una medida de la intensidad de los cambios aleatorios o impredecibles en la rentabilidad o en el precio de un título; en la representación gráfica de una serie histórica de rendimientos se asocia la volatilidad con la amplitud de las fluctuaciones del rendimiento tanto es que se consideren en valor absoluto como en desviaciones alrededor de un valor medio* ".

Repasando la literatura financiera podemos ver que la volatilidad se caracteriza por:

1. Exceso de curtosis en la mayoría de series financieras (Mandebrolt 1963 y Fama 1963 y

1965 son los primeros en mencionar esta característica).

2. Existencia de períodos de alta y baja volatilidad denominados conglomerados de volatilidad "volatility clusters". Si la volatilidad es elevada en un período, tiende a seguir siéndolo; si es baja en un período tiende a seguir siendo baja en el período siguiente (Mandelbrot 1963, Engle 1982).

3. De manera ocasional se pueden producir valores altos de volatilidad en momentos concretos, este comportamiento se conoce como "discontinous price jump" y podemos traducirlo como discontinuidades de salto en los precios (Figlewski 1997).

4. Los períodos de alta o baja volatilidad acostumbran a venir seguidos de períodos en los que la volatilidad es más moderada a largo plazo (Hsieh 1995, Figlewski 1997).

5. El comportamiento de las series de volatilidades es diferente según lleguen al mercado buenas o malas noticias, ésta es una evidencia del comportamiento asimétrico de la serie (Campbell y Hentschel, 1992).

6. Movimientos conjuntos de la volatilidad: Cuando se estudian en diferentes mercados series distintas, pero del mismo concepto (tipos de interés, cotizaciones, etc.), se observa como los movimientos importantes en un mercado estan relacionados con movimientos importantes en otro mercado. Esto pone en evidencia la utilidad de los modelos multivariantes para series temporales, pues permiten analizar estas relaciones cruzadas (Aydemir, 1998).

Estas características muestran la existencia de regularidades en el comportamiento que posibilitan la modelización de la volatilidad y por tanto su predicción. Conocer la volatilidad actual y predecir la volatilidad futura es vital para la gestión del riesgo y consecuentemente para el éxito del inversor. Por tanto la elaboración de un modelo que explique el comportamiento histórico de la volatilidad y permita predecir la volatilidad en períodos futuros, es de gran interés.

2.2 El IBEX 35, evolución de la rentabilidad asociada a los precios de cierre.

La investigación que vamos a realizar se centra, como ya hemos dicho, en el estudio de la volatilidad de la rentabilidad de las acciones. Vamos a concretar más este objetivo eligiendo un mercado bursatil determinado, el Mercado Continuo español, y en él un índice representativo de la evolución del mercado, el IBEX 35.

El IBEX 35 es el índice oficial del mercado continuo de la Bolsa española. Es un índice ponderado por capitalización y está compuesto por las 35 empresas más líquidas entre las que cotizan en el Mercado Continuo español, actua como fiel reflejo del mercado y como tal, es utilizado por analistas para observar la evolución de la Bolsa española.

También este índice está diseñado para actuar como activo subyacente en la negociación, compensación y liquidación de contratos de opciones y futuros de Renta Variable (MEFF RV).

El IBEX 35 se calcula y se publica en tiempo real a lo largo del período en el que pueden realizarse operaciones en el Mercado Continuo de las Bolsas españolas. El "*valor oficial del IBEX 35*" es el calculado con los precios de cierre de los valores que lo componen.

Este índice se empezó a calcular en enero de 1987, pero el período que abarca desde esta fecha a diciembre de 1989 es experimental, el 29 de diciembre de 1989 se fija como valor base 3000. Durante este período y como consecuencia de la implantación de la "*Ley del Mercado de Valores 1988*", se realiza el proceso de modernización y reforma de la Bolsa española. Uno de los aspectos más destacados de la reforma es el nuevo sistema de contratación informática y la interconexión de las cuatro Bolsas españolas dando lugar al denominado "Mercado Continuo".

Los hechos que acabamos de mencionar y el trabajo realizado por Márquez y Villazón (1997) sobre la volatilidad en el período 1988-1989 nos llevan a pensar que en estos años el mercado no se encuentra "asentado" y que su inclusión en nuestro estudio podría distorsionar los resultados, por esto vamos a analizar la serie temporal formada por los precios de cierre diarios del IBEX 35 desde enero de 1990 hasta diciembre del 2000[1]. En el gráfico (Figura 2-1) se puede observar la evolución temporal del IBEX 35 en el período considerado.

[1] Los datos se han obtenido en la página web de la Sociedad General de Bolsas: http//:www.sbolsas.es .

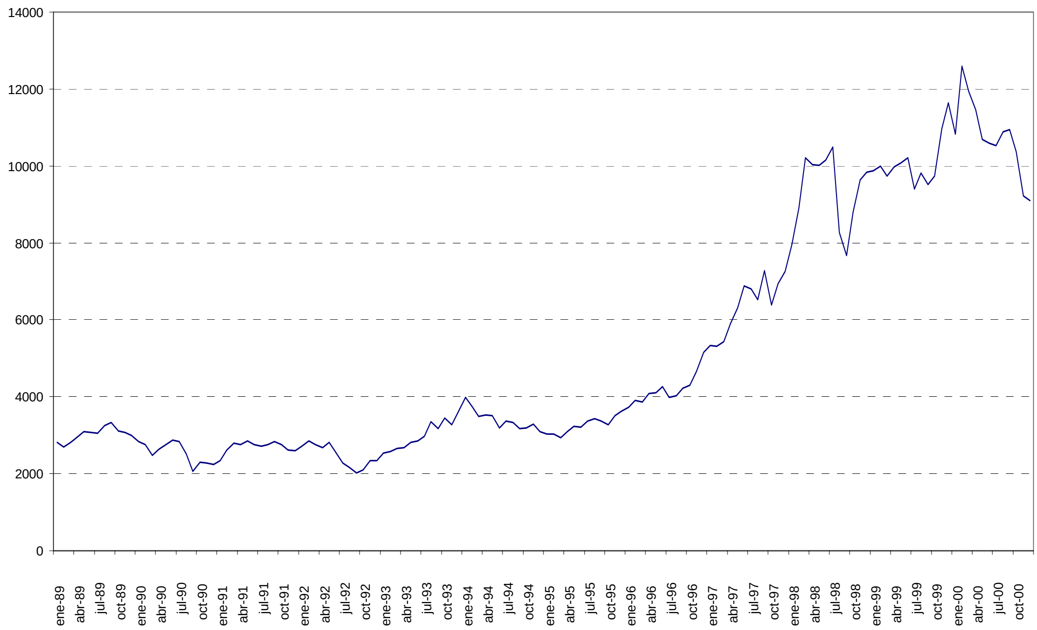

Figura 2-1: Precios de cierre mensual del IBEX 35 (01/90-12/00).

2.2.1 Definiciones de rentabilidad.

Las variaciones en el precio de cierre del índice son la causa de la rentabilidad que éste genera, su cálculo puede realizarse a partir de un proceso de capitalización bien compuesta, o bien continua. En el primero la rentabilidad se calcula de la siguiente manera:

Definición 2. Rentabilidad calculada a partir de un proceso de capitalización compuesta:

Sean P_{t-1} y P_t el precio de cierre del índice en los períodos $t-1$ y t respectivamente. Entonces la rentabilidad R_t obtenida en el período t se obtiene como

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \qquad \forall t = 1, \cdots, T$$

Con esta formulación el cálculo de la rentabilidad para k períodos es:

$$1 + R_t(k) = \frac{P_t}{P_{t-k}}$$

Si consideramos que el rendimiento experimentado por el índice se añade de manera continua a éste para producir nuevos intereses, estamos realizando un proceso de capitalización continua. En este caso podemos definir la rentabilidad de la siguiente manera:

Definición 3. Rentabilidad calculada a partir de un proceso de capitalización continua:

Sean P_{t-1} y P_t el precio de cierre del índice en los períodos $t-1$ y t respectivamente. Entonces la rentabilidad r_t obtenida en el período t se obtiene como

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \qquad \forall t,\ t = 1, \cdots, T \tag{2.1}$$

La rentabilidad para k períodos se calcula a partir de las rentabilidades de cada período como sigue:

$$r_t(k) = r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1}$$

Ambos tipos de rentabilidad pueden relacionarse a partir de la siguiente expresión:

$$r_t(k) = \ln\left(\prod_{i=0}^{k-1}(1 + R_{t-i})\right) \qquad \forall t,\ t = 1, \cdots, T \qquad y \qquad \forall k < t$$

En este trabajo la rentabilidad se ha calculado a partir de (2.1) al considerar su caracter acumulativo. El gráfico (Figura 2-2) muestra la evolución de la rentabilidad mensual para el IBEX 35, en ella podemos observar algunas de las características propias de la rentabilidad de las acciones como es la presencia de períodos de alta o baja rentabilidad.

Es habitual suponer que la serie temporal de rentabilidad de una acción o de un índice bursatil sigue estadísticamente una distribución de tipo normal, más en concreto si r_t se distribuye

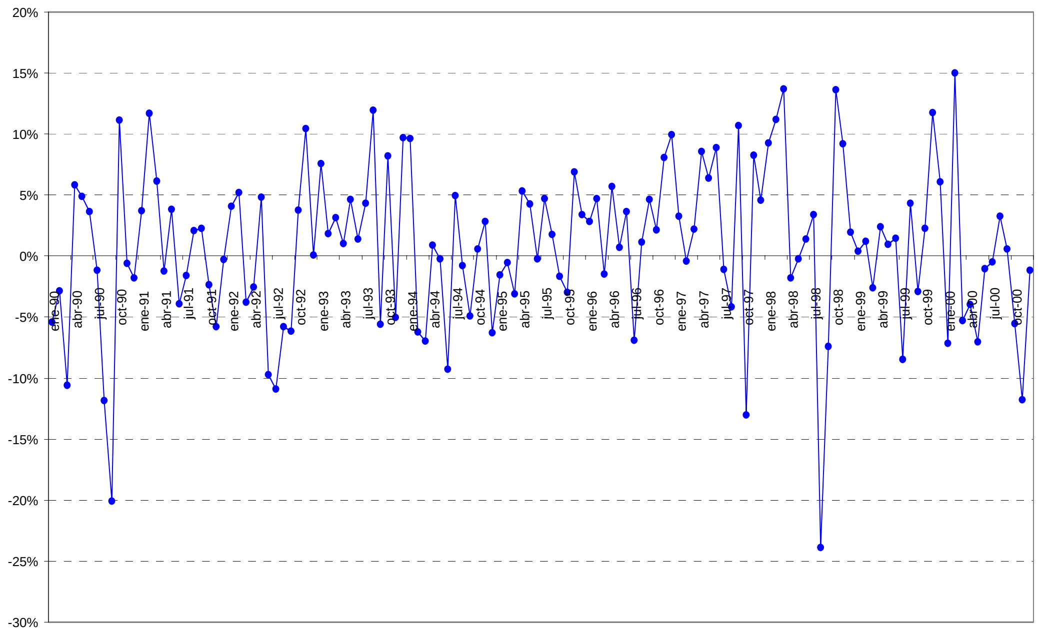

Figura 2-2: Rentabilidad mensual del IBEX 35 (01/90-12/00).

como una normal, R_t sigue una distribución lognormal. Sin embargo, esto no es siempre cierto, podemos observar en los índices bursátiles de renta variable que la estimación muestral de la asimetría suele tener signo negativo, mientras que la curtosis muestral toma valores elevados (superiores a 3) y de signo positivo. Ambos parámetros se alejan de los típicos de una distribución normal (asimetría igual a cero y curtosis igual a 3) indicando que la distribución de la rentabilidad tiene mucha más masa de probabilidad en las colas que la que cabría esperar en una distribución normal.

Los resultados generales que acabamos de comentar se confirman para la serie de rendimientos mensuales obtenidos a partir del IBEX 35 en el período 1990-2000. A la vista del histograma (Figura 2-3) parece poco adecuado considerar que la serie de rentabilidad sigue una distribución Normal, la presencia de antimodas en la zona central de la distribución no es característico de dicha distribución. También se observa que el valor del coeficiente de asimetría es negativo ($-0,562700$) y que el coeficiente de curtosis ($4,135886$) se aleja del valor de la distribución Normal (3).

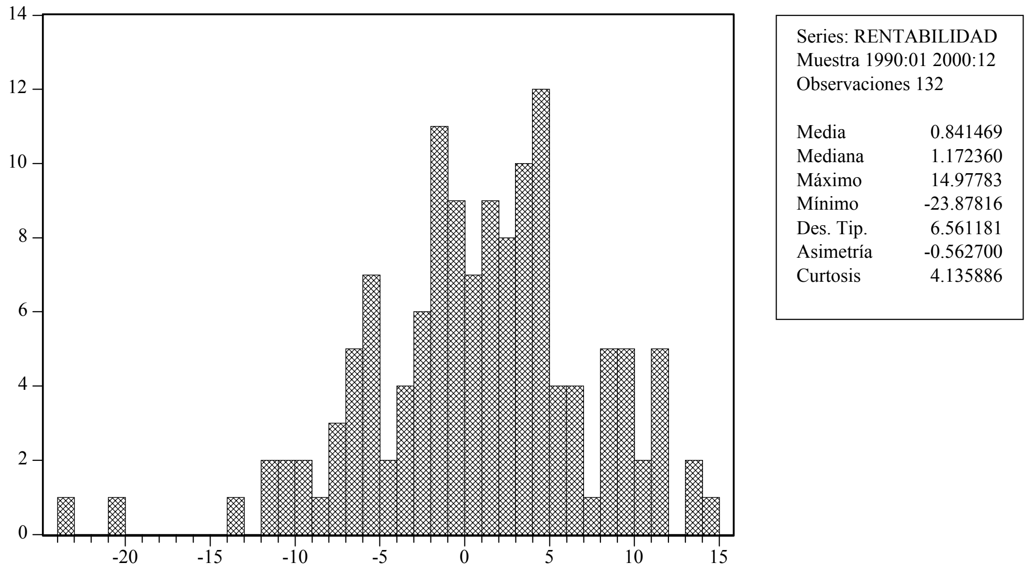

Figura 2-3: Histograma de la serie de rentabilidades mensuales asociadas al IBEX 35 (01/90-12/00).

2.2.2 Exceso de rentabilidad.

En esta investigación vamos a utilizar concretamente el exceso de rentabilidad "*excess return*", es decir, vamos a trabajar con la rentabilidad obtenida al restar a r_t la rentabilidad del activo libre de riesgo. De esta manera el exceso de rentabilidad recoge sólo aquella rentabilidad debida al riesgo del activo, o en otras palabras, la rentabilidad directamente relacionada con la volatilidad.

Para calcular el exceso de rentabilidad del IBEX 35 hemos utilizado como activo libre de riesgo el tipo LIBOR *"London Inter Bank Offered Rate"* sobre el euro a 1 mes[2] (Figura 2-4).

Una vez calculado el exceso de rentabilidad obtenemos la serie cuya evolución puede observarse en la Figura 2-5. Los valores de la serie corresponden al exceso de rentabilidad mensual del IBEX 35 en el período 1990-2000. Su distribución es muy similar a la de los rendimientos estudiada anteriormente, y las medidas descriptivas, a excepción de la media, tienen valores próximos. También en esta serie la presencia de antimodas y los valores obtenidos para los

[2] Los datos han sido obtenidos de la siguiente página web: http://www.bba.org.uk/

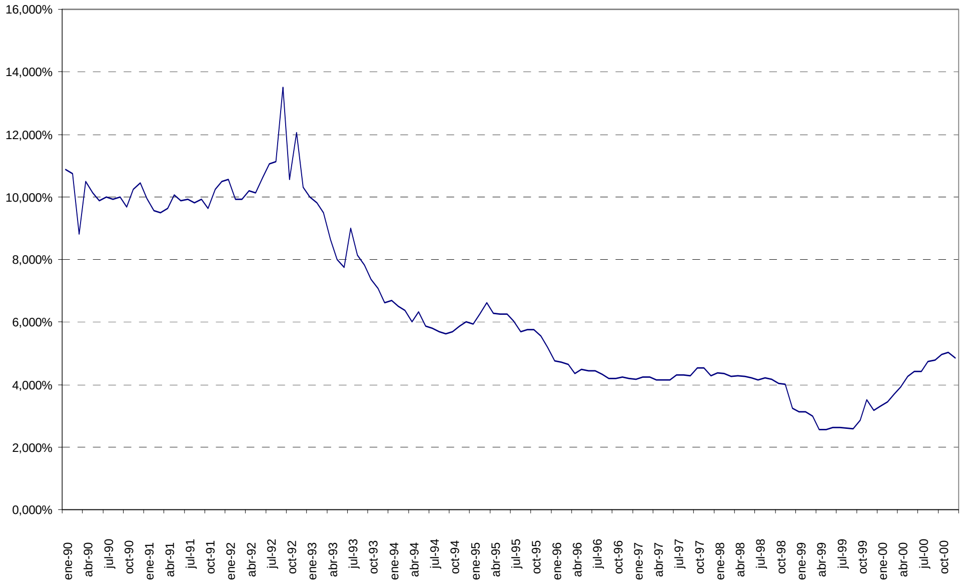

Figura 2-4: Tipo LIBOR sobre el Euro a 1 mes (01/90-12/00).

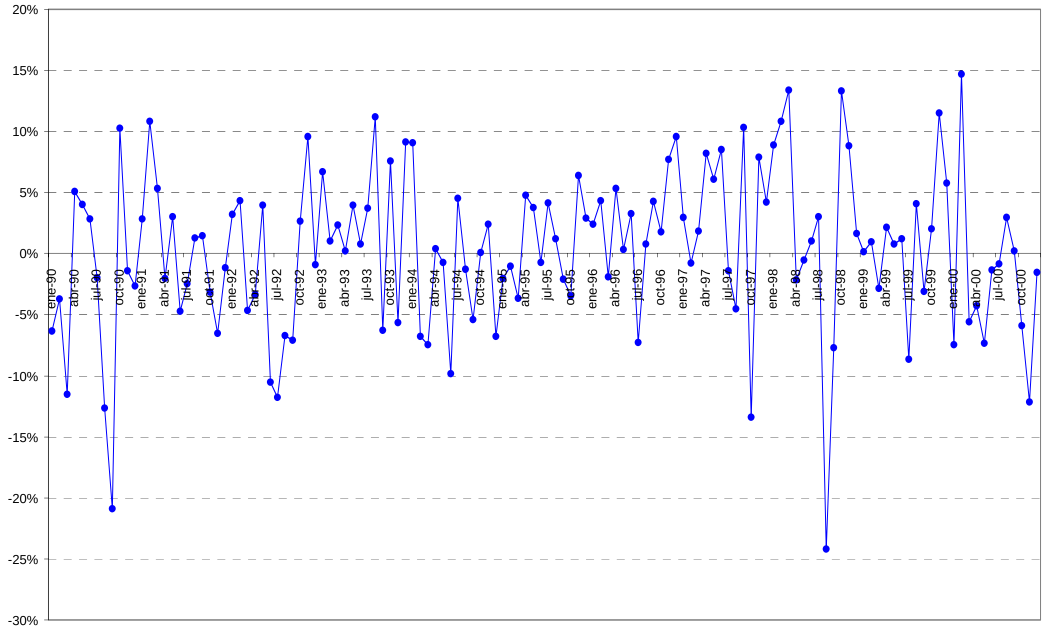

Figura 2-5: Exceso de rentabilidad mensual del IBEX 35 (01/90-12/00).

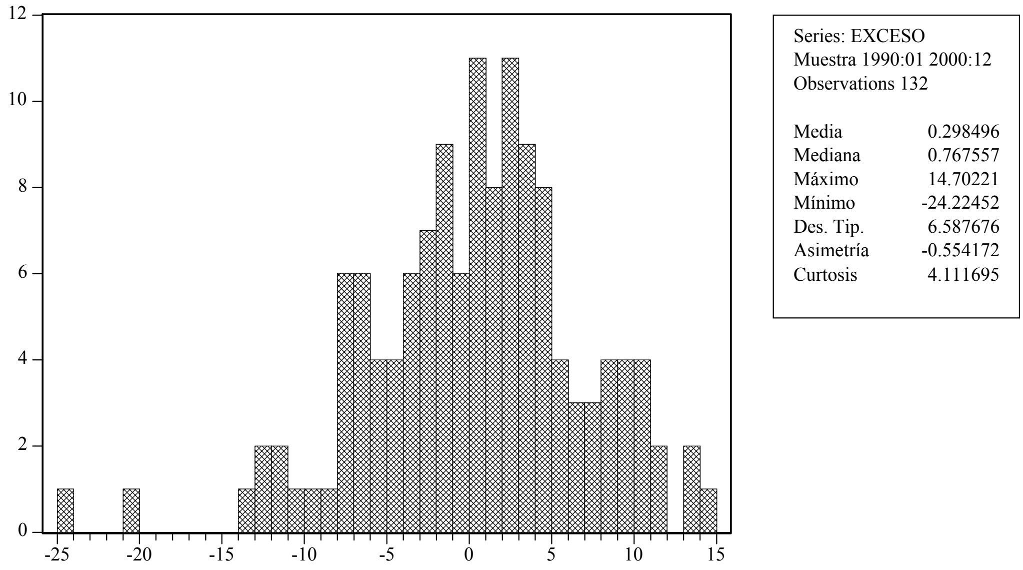

Figura 2-6: Histograma de la serie exceso de rentabilidad del IBEX 35 (01/90-12/00).

coeficientes de asimetría y curtosis (Figura 2-6) nos hacen dudar de que la distribución del exceso de rentabilidad se ajuste a una distribución Normal.

2.3 Medidas de volatilidad.

La volatilidad asociada a una serie temporal de rentabilidades no es observable; por tanto, definir como se debe construir la serie de volatilidades es un proceso previo a la modelización y en algunos casos ligado a la elección del modelo. La existencia de distintos estimadores de la volatilidad con características diferentes tanto a nivel de estructura, como a nivel de capacidad predictiva hace necesario un estudio comparado que nos permita elegir en cada caso el estimador que proporcione la mejor estimación y predicción de la volatilidad en un mercado determinado; en la Figura 2-7 se sintetiza la clasificación que proponemos.

2.3.1 Volatilidad puntual o serial.

La forma más simple de medir la volatilidad se basa en el cálculo de la desviación típica asociada a un conjunto de rentabilidades observadas. De esta manera se obtiene **un único valor** que

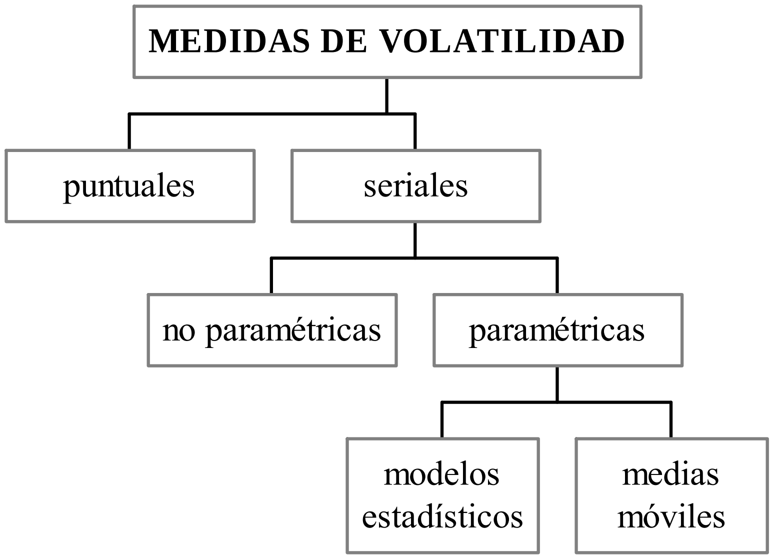

Figura 2-7: Clasificación de las medidas de volatilidad.

representa la dispersión global de los datos, pero no la evolución de esta dispersión a lo largo del tiempo.

Si queremos recoger la dinámica de la volatilidad es necesario elegir una **medida de la volatilidad que dote a ésta de una estructura temporal, es decir, una medida serial.**

2.3.2 Estimación no paramétrica o paramétrica.

Asumida la estructura temporal de la volatilidad, podemos realizar la estimación de la volatilidad desde un enfoque paramétrico o no paramétrico. La **estimación no paramétrica** tiene como principal ventaja que necesita muy pocas hipótesis para obtener las estimaciones de la volatilidad. En cambio, requiere una gran cantidad de datos para poder asegurar el funcionamiento correcto del modelo (este será un inconveniente considerable en nuestro caso pues, si consideramos datos mensuales, no disponemos de muchas observaciones). Un problema a considerar es la tendencia que tienen estos métodos a sobreajustar el modelo.

Los métodos no paramétricos realizan generalmente la estimación, a partir de un proceso de suavizado que va eliminando los errores observados a base de promediar los datos de diferentes maneras. Entre otras técnicas no paramétricas destacamos las redes neuronales, los "*splines*" y la regresión por *"kernels"*.

2.3.3 Modelos estadísticos o medidas basadas en medias móviles.

Dentro de los **métodos paramétricos de estimación** podemos distinguir entre los que se basan en el **cálculo de medias móviles** y los que asumen un **modelo** para estimar la volatilidad. En este trabajo, como es habitual, la rentabilidad es calculada sobre los precios de cierre, pero existen otras medidas basadas en otros precios. Por ejemplo, Garman y Klass (1980) y Parkinson (1980), estiman la volatilidad de un día a partir de la diferencia entre el precio más alto y el más bajo del día. La fórmula utilizada por Parkinson (1980) para la estimación es la siguiente:

Definición 4: *La volatilidad diaria $\widehat{\sigma}$ se puede calcular a partir de la siguiente fórmula:*

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{0,361}{n} \sum_{i=1}^{n} (H_i - L_i)^2$$

donde H_i y L_i son respectivamente los precios máximo y mínimo del día y n el número de días considerados.

Kunitomo (1992) propone también una medida de la volatilidad calculada a partir de precios intradía.

Modelos estadísticos. Los métodos de estimación que asumen un modelo estadístico no realizan una estimación directa de la volatilidad. Estos métodos modelizan tanto la serie de rentabilidades como la varianza de la rentabilidad y, a partir de esta última, definen la desviación típica como volatilidad; el ajuste del modelo para la varianza permitirá obtener la estimación de la volatilidad. Destacan entre estos métodos la familia de **modelos GARCH, modelos DTARCH,** y los **modelos de volatilidad estocástica**.

Modelos GARCH. Engle en 1982 propone el modelo *Autoregressive Conditional Heterokedasticity (ARCH)* que se caracteriza porque la varianza no se mantiene constante, si no que cambia en el tiempo. Posteriormente el modelo ARCH es generalizado por Bollerslev (1986), quien introduce el modelo ARCH generalizado o GARCH. Este modelo, que es muy utilizado para modelizar la volatilidad, es una generalización del modelo exponencial simple[3]. El modelo GARCH actua como un mecanismo adaptativo que tiene en cuenta la varianza condicionada en cada etapa. Así, es capaz de producir conglomerados de observaciones atípicas o "*outliers*" que, en el caso de una serie de volatilidades corresponden a conglomerados de alta volatilidad. Esta es una de las razones por las que el modelo GARCH tiene gran aplicación en el campo financiero

Los modelos GARCH especifican y estiman dos ecuaciones simultaneas. Cuando se quiere realizar mediante este modelo la estimación de la volatilidad la primera ecuación explica la evolución de la rentabilidad (variable subyacente) en función de rentabilidades pasadas y la segunda ecuación modeliza la evolución de la varianza de la rentabilidad; a partir de la varianza se realiza la estimación de la volatilidad. La expresión matemática de este modelo es la siguiente:

Definición 5: *Sea* $\{y_t\}$ *una serie de observaciones diarias, se define* y_t *en función de los valores pasados de la variable*

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \cdots + \beta_p y_{t-p} + u_t$$

donde

$$u_t = \sqrt{h_t} v_t$$

v_t *es un conjunto de variables IID (independientes e idénticamente distribuidas) con media cero y varianza unitaria y* $h_t = \widehat{E}_{t-1}(u_t^2)$ *lo que implica heterocedasticidad condicionada*
Un proceso GARCH se define como sigue:

$$u_t \quad \sim \quad GARCH(r,m) \quad si$$

$$h_t = a_0 + a_1 h_{t-1} + a_2 h_{t-2} + \cdots + a_r h_{t-r} + c_1 u_{t-1}^2 + c_2 u_{t-2}^2 + \cdots + c_m u_{t-m}^2$$

[3] Este modelo se definirá al tratar las medidas de volatilidad basadas en el cálculo de una media móvil.

El modelo más utilizado en el cálculo de la volatilidad es el $GARCH(1,1)$ donde

$$h_t = a_0 + a_1 h_{t-1} + c_1 u_{t-1}^2$$

La estimación obtenida a partir de esta ecuación se utiliza como predicción a un día. Si se desea predecir con un horizonte de un mes, es necesario generar la predicción diaria de la varianza desde el primer día del mes y para todo el mes. La predicción de la volatilidad para un mes se obtiene como la raíz cuadrada de la suma de las predicciones diarias de la volatilidad. Otra alternativa consiste en multiplicar la predicción obtenida a un día en el principio del mes por la raíz cuadrada del número de días de negociación en el mes.

Una limitación de los modelos GARCH es que la varianza condicionada responde de la misma manera a los residuos positivos que a los negativos, característica que contradice el comportamiento observado en las series temporales de datos financieros. Para superar este problema Nelson (1991) propone el modelo GARCH exponencial o EGARCH, que permite una respuesta asimétrica de la varianza condicionada en función del signo de los residuos. Estos modelos presentan problemas relacionados con la predicción (Figlewski, 1997) pues:

- Necesitan un gran número de datos para obtener una estimación robusta.
- El funcionamiento de estos modelos es muy bueno en muestra debido a que involucran un gran número de parámetros, pero tiende a fallar rápidamente fuera de muestra.
- Todos los modelos de la familia GARCH se basan en la varianza a un paso y no están diseñados para generar predicciones de la varianza a varios pasos.

Se puede mejorar el funcionamiento de los anteriores modelos utilizando datos diarios y horizontes de predicción cortos.

Modelos DTARCH. La modelización de la varianza condicionada se mantiene siempre fija para los modelos de la familia GARCH, esto no es adecuado en general (Rabemanjara y Zakoian, 1993). Para solucionar este problema Li y Li (1996) proponen el modelo DTARCH "*double threshold ARCH model*", este modelo combina las características de los modelos TAR "*threshold autoregressive models*" (Tong 1978, Tong y Lim 1980) y de los modelos ARCH. De esta manera el modelo DTARCH se caracteriza por que la esperanza condicionada posee una estructura lineal por partes (como en los modelos TAR) y la varianza condicionada cambia a partir de unos niveles previos de la serie. Podemos definir un modelo DTARCH como sigue:

Definición 6: DTARCH $(l_1,\ p_1, \cdots,\ p_{l_1},\ l_2,\ q_1 \cdots,\ q_{l_2})$
$\{X_t\}$sigue un modelo DTARCH $(l_1,\ p_1, \cdots,\ p_{l_1},\ l_2,\ q_1 \cdots,\ q_{l_2})$ si satisface:

$$X_t = \sum_{j=1}^{l_1} \left[\phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{p_j} \phi_i^{(j)} X_{t-1} \right] 1_{(X_{t-d} \in R_j)} + \varepsilon_t$$

$$Var\left(\varepsilon_t \mid F_{t-1}\right) = h_t = \left[\sum_{k=1}^{l_2} \sigma_0^{(k)} + \sum_{r=1}^{q_k} \sum_{s=1}^{q_k} \sigma_{rs}^{(k)} \varepsilon_{t-r} \varepsilon_{t-s} \right] 1_{\left(\varepsilon_{t-d'} \in R'_k\right)}$$

donde

$$E(\varepsilon_t \mid F_{t-1}) = 0$$

$$\sigma_0^{(k)} > 0, \qquad F_{t-1} = \sigma(X_{t-1,\dots,})$$

$R_j = (r_{j-1,} r_j]\,, \quad j = 1, \cdots, l_1, \qquad R'_k = \left(r'_{k-1,} r'_k\right]\,, \quad k = 1, \cdots, l_2, \quad \{R_j\}$ y $\{R'_k\}$ son dos particiones diferentes de la recta real, $\sum^{(k)} = \left[\sigma_{rs}^{(k)}\right]$ es definida no negativa y d y d' son dos enteros no negativos denominados parametros de retardo.

El modelo DTARCH no es un modelo sencillo, requiere la estimación de un gran número de parámetros y esto implica poder disponer de un gran número de observaciones.

Modelos de Volatilidad Estocástica. Los modelos de volatilidad estocástica, al igual que los modelos GARCH, son utilizados para modelizar series de volatilidad no constante, pero se diferencian de ellos porque consideran que la varianza condicionada es en sí misma un proceso aleatorio. Estos modelos han sido estudiados por numerosos investigadores, por ejemplo Taylor (1986), Harvey, Ruiz and Shephard (1994), entre otros. Uno de las principales ventajas de los modelos de volatilidad estocástica respecto a los modelos GARCH es que consiguen una especificación más sencilla (pues contienen menos parámetros) pero en cambio, el proceso de estimación es más dificultoso pues requiere métodos de estimación máximo verosímiles. La predicción a más de un paso presenta los problemas ya observados en los modelos GARCH.

Medidas basadas en medias móviles. Los métodos basados en las medias móviles calculan la volatilidad a partir de las observaciones de la rentabilidad en el período considerado, para este período la volatilidad se mantiene constante produciendose una discretización de la volatilidad. Este hecho, sin embargo, no se contrapone al tramiento de la volatilidad como proceso pues toda medición que hagamos de una proceso continuo acaba discretizándolo. Una vez obtenida la serie temporal de volatilidad, se va a realizar su análisis y modelización siguiendo las técnicas que habitualmente se utilizan en el tratamiento de las series temporales.

Las medidas basadas en medias móviles precisan de un método concreto para el cálculo de la volatilidad. Las más utilizadas se basan en el cálculo de la **desviación típica** de un conjunto de observaciones, pero todas ellas tienen características propias que las diferencian y que permiten dar respuestas distintas a cuestiones relacionadas con la medida. Las cuestiones planteadas se sintetizan en tres grandes líneas:

- obsolescencia de las observaciones pasadas
- frecuencia de los datos
- conveniencia de promediar las desviaciones respecto a la media.

Las medidas de volatilidad basadas en medias móviles tienen en cuenta las observaciones pasadas, para eliminar el efecto de su obsolescencia desarrollan dos tipos de estrategias. La primera consiste en utilizar una desviación típica ponderada en la que los pesos asignados dan lugar a diferentes medidas, así el **Modelo exponencial simple** da más peso a las observaciones recientes y menos a las más alejadas, en cambio el **Modelo exponencial fraccionario** calibra la ponderación en función del mercado.

Definición 7: Modelo exponencial simple. *La volatilidad se estima a partir de la desviación típica que viene dada por*

$$\widehat{\nu}_{t+1} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{j=0}^{n} \lambda^j (R_{t-j} - \overline{R})^2}{\sum\limits_{j=0}^{n} \lambda^j}} \qquad para \qquad 0 < \lambda < 1$$

donde R_t es el rendimiento obtenido en el período de tiempo t. Para observaciones diarias habitualmente se toma $\overline{R} = 0$.

Definición 8: Modelo exponencial fraccionario. *La volatilidad se estima a partir de la desviación típica que viene dada por*

$$\widehat{\nu}_{t+1} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{j=0}^{n} \lambda^{j^p} (R_{t-j} - \overline{R})^2}{\sum\limits_{j=0}^{n} \lambda^{j^p}}} \qquad para \qquad 0 < \lambda < 1, \quad p > 0$$

Si $p = 1$ entonces se obtiene el modelo Exponencial simple. También en este caso tomamos $\overline{R} = 0$ para observaciones diarias.

Otra estrategia utilizada para eliminar las observaciones obsoletas consiste en calcular la desviación típica para una submuestra que se desplaza hacia delante en el tiempo. El tamaño de esta submuestra dependerá tanto de la frecuencia de los datos como del horizonte de predicción. Esta medida se conoce con el nombre de desviación típica histórica o *"rolling historical volatilities"* y se calcula como sigue:

Definición 9: Desviación típica histórica o "Rolling historical volatilities" *Vamos a considerar la estimación de la volatilidad para los próximos T períodos de predicción a partir de k precios pasados, el modelo que permite estimar la volatilidad en un momento t es el siguiente:*

$$\widehat{\nu}_t = \left(\frac{\sum\limits_{s=1}^{k} \left(R_{t+1-s} - \overline{R} \right)^2}{k-1} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

Trabajos de Figlewski a este respecto muestran que para series financieras de datos mensuales podemos considerar $k = 5$ años $= 60$ meses para realizar previsiones a $T = 1$ año o a 2 años. Si necesitamos previsiones a 6 meses vista, deberíamos optar por datos diarios o semanales. La precisión de la predicción es medida a partir del RMSE, raíz del error cuadrático medio de la predicción. Este proceso de estimación produce una gran autocorrelación entre los errores de predicción que no afecta a la estimación del MSE, error cuadrático medio.

Como acabamos de ver la estructura temporal de los datos nos permite considerar diferentes frecuencias. Cuando utilizamos cualquiera de las anteriores medidas con datos de elevada frecuencia obtenemos las denominadas estimaciones "tick-by-tick" (Zhou, 1996). El problema que presenta este tipo de estimación es la elevada correlación serial negativa que puede ser corregida utilizando diferentes métodos.

Schwert (1989), en el artículo titulado: "*Why does stock market volatility change over time?*", propone una medida de la volatilidad específica para datos mensuales.

Definición 10: Estimador de la varianza de datos mensuales. *La volatilidad mensual se estima a partir de* $\widehat{\sigma}_t$, *donde* $\widehat{\sigma}_t^2$ *tiene la siguiente expresión:*

$$\widehat{\sigma}_t^2 = \sum_{i=1}^{N_t} R_{it}^2$$

R_{it} *son los rendimientos diarios centrados respecto a la media y hay exactamente* N_t.

Este estimador se calcula como la suma de desviaciones al cuadrado y, a diferencia de la expresión de la desviación típica no ha sido promediada. La definición garantiza que $\sigma_t > 0$ y si se utilizan en la estimación de σ_t muestras disjuntas, se obtiene[4] un estimador cuyo error de estimación no está correlacionado en el tiempo y cuya varianza, si suponemos que los rendimientos están normalmente distribuidos, es:

$$V(\widehat{\sigma}_t) = \frac{\sigma_t^2}{2N_t}$$

Esta medida solo está pensada para datos mensuales, por lo qué no nos parece adecuada, consideramos preferible una medida que sea aplicable para datos de cualquier frecuencia.

[4] Ver Kendall and Stuart 1969, pg.243.

No es éste el único estimador que elimina en su cálculo el promedio de las desviaciones. El estimador propuesto por Schwert (1990) y Schwert y Seguin (1990) calcula la volatilidad a partir de las desviaciones en valor absoluto entre la rentabilidad en el período t (más concretamente el exceso de rentabilidad) y su media.

Definición 11: Desviación absoluta respecto a la media: Schwert (1990), y Schwert y Seguin (1990), definen la volatilidad como sigue

$$\widehat{\sigma}_t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,|R_t - \mu_t| \tag{2.3}$$

donde R_t es el exceso de rentabilidad y μ_t es tratado como un parámetro y estimado a partir de la media muestral de R_t.

El factor $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ que aparece en la expresión (2.3) permite obtener un estimador insesgado.

Proposición 12: *Si suponemos que el exceso de rentabilidad R_t se distribuye normalmente, entonces la $E(\widehat{\sigma}_t)$ es igual a σ_t y $\widehat{\sigma}_t$ es un estimador insesgado de la volatilidad mensual.*

Demostración:

Supongamos que $R_t \sim N(\mu, \sigma)$ tal que $E(R_t) = \mu$ y $V(R_t) = \sigma^2$ entonces

$E(|R_t - \mu_t|) = \sigma_t\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

queremos demostrar que $\widehat{\sigma}_t$ es un estimador insesgado de la volatilidad mensual por tanto debemos calcular la $E(\widehat{\sigma}_t)$

$$E(\widehat{\sigma}_t) = E(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,|R_t - \mu_t|) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}E(|R_t - \mu_t|) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_t\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sigma_t$$

de esta manera la proposición queda demostrada.■

Esta medida al no promediar las desviaciones, a diferencia de la desviación típica o la desviación absoluta media respecto a la media, origina una serie cuyos valores reflejan la divergencia entre la rentabilidad observada en un momento del tiempo t y el valor de la rentabilidad media en ese mismo momento. Como se observa en la expresión (2.3) la volatilidad para el período t solo tiene en cuenta en su cálculo el exceso de rentabilidad en este período R_t, y la media (este parámetro sí que involucra otras observaciones pasadas, pero en muchos casos se considera igual a cero).

Llegados a este punto es necesario reflexionar sobre la conveniencia, o no, de promediar las desviaciones. Tanto la desviación típica, como la desviación absoluta media respecto a la media son dos parámetros de dispersión de una distribución y su objetivo es medir la representatividad de la media; en este contexto, es necesario que el cálculo de una medida de dispersión tenga en cuenta todas las observaciones a las que la media representa (suma) y que se elimine el efecto que pudiera tener meramente la aditividad dividiendo por el número de observaciones. Aparece así, de manera natural, el promedio en la expresión de estas medidas.

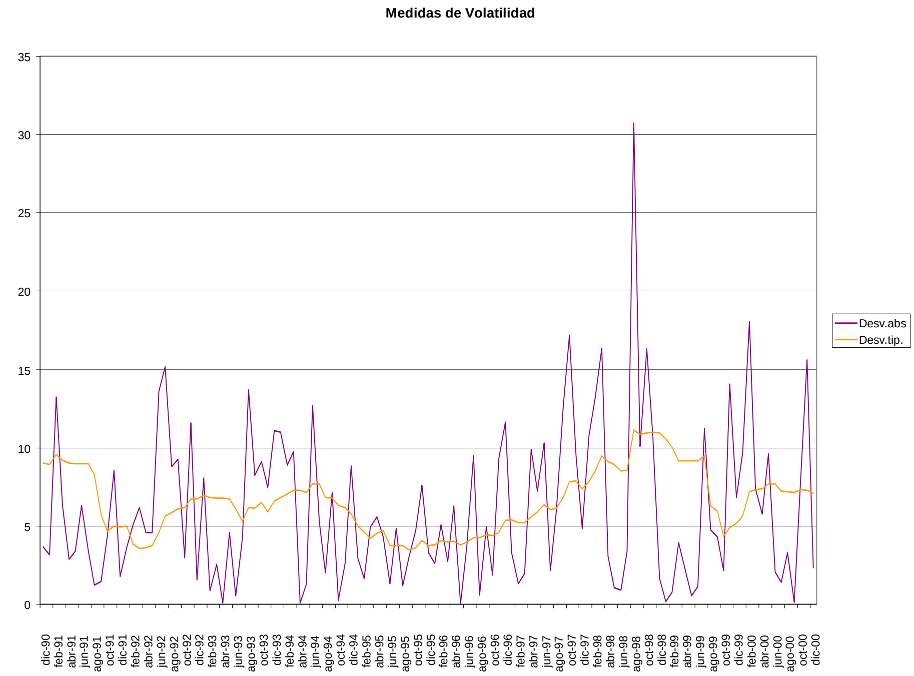

Figura 2-8: Comparativa de la evolución de la desviación absoluta respecto a la media y la desviación típica histórica.

La medida de la volatilidad es un concepto completamente diferente al de la medida de la representatividad de la media de una distribución. Nuestro objetivo es medir la divergencia entre el valor medio de la serie de rentabilidades y el valor observado en cada instante del tiempo t, o lo que es lo mismo, la diferencia entre la rentabilidad observada y la media, por tanto nos interesa cuantificar en términos absolutos la desviación entre estos valores; para ello nos basta con tomar el valor absoluto de las desviaciones o elevarlas al cuadrado. Realmente al medir la volatilidad, el promedio de las desviaciones no es necesario y solo supone una suavización del comportamiento de la serie de volatilidades como puede observarse en la figura 2-8.

2.3.4 Volatilidad implícita.

En la negociación de opciones se utiliza como estimador de la volatilidad la denominada **volatilidad implícita,** aunque vamos a definir esta medida y explicitar como se obtiene, su naturaleza no nos parece adecuada para considerarla un estimador de la volatilidad entendida como proceso temporal, por este motivo no la hemos incluido en nuestra clasificación (Figura 2-7).

El concepto de volatilidad implícita fué introducido por primera vez en Latané y Rendleman (1976); la estimación de la volatilidad implicita se obtiene como el valor de volatilidad que iguala el valor de mercado de la opción (valor observado), al valor teórico de dicha opción obtenido mediante un modelo de valoración como por ejemplo la fórmula de Black y Scholes (1973) o el método binomial de Cox, Ross y Rubinstein (1979)).

Utilizando la fórmula de Black y Scholes (1973) y bajo ciertas hipótesis, el precio o prima de una opción se calcula como sigue:

$$Precio\ opci\acute{o}n\ de\ compra = precio\ actual\ \times N(d_1) - precio\ ejercicio\ \times N(d_2) \times e^{-rt}$$

$$Precio\ opci\acute{o}n\ de\ venta = -precio\ actual\ \times N(-d_1) + precio\ ejercicio\ \times N(d_{-2}) \times e^{-rt} =$$
$$= Precio\ opci\acute{o}n\ de\ compra\ + precio\ ejercicio\ \times e^{-rt} - precio\ actual$$

donde:

$$d_1 = \frac{LN(\frac{precio\ actual\ \times e^{rt}}{precio\ de\ ejercicio}) + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{LN(\frac{precio\ actual\ \times e^{rt}}{precio\ de\ ejercicio}) - \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}}$$

t = tiempo hasta el vencimiento expresado como una proporción del año (365 días)

σ = volatilidad anualizada

r = tipo de interés libre de riesgo

$N(d)$= la probabilidad acumulada de la función de distribución $N(0,1)$.

Como el único parámetro no observable en la expresión es la volatilidad σ, podemos obtenerla, siempre que conozcamos el valor de los otros parámetros implicados a partir de métodos numéricos[5]. Este es el valor que se conoce como volatilidad implícita, o como denominan Cox y Rubinstein (1985) "estimación de mercado de la volatilidad".

Algunos autores utilizan la volatilidad implícita de hoy como predicción de la volatilidad del día siguiente pero, en nuestra opinión y dentro del contexto de la predicción de la volatilidad futura, la volatilidad implícita no es útil para predecir los comportamientos futuros del mercado (por esta razón no la hemos incluido en la clasificación). Realizar este tipo de predicción es poco fiable pues su cálculo se basa en las condiciones instantáneas del mercado y no permite la interpretación de la volatilidad como un proceso temporal; además debemos tener en cuenta que las hipótesis asumidas por esta fórmula de valoración son poco realistas. Figlewski en 1997 destacaba algunas características del modelo asumido por Black y Scholes, que no coinciden con el comportamiento de la rentabilidad de los activos en el mundo real:

a) El modelo no considera la variación temporal en la distribución de los rendimientos y por tanto, que la volatilidad cambia en el tiempo.

b) Las ecuaciones del modelo se basan en precios de equilibrio, pero los precios de las transacciones no son precios de equilibrio.

c) La formulación de Black y Scholes no tiene en cuenta la existencia de correlación serial, especialmente si consideramos pequeños intervalos de tiempo.

d) En el mundo real, la rentabilidad de los precios se desvía de una distribución lognormal. Se observa un número mayor de cambios grandes y pequeños que los que cabría esperar en una distribución normal. Este fenómeno se describe habitualmente con el término "*fat-tails*".

e) El modelo no recoge los *"jump"* o saltos ocasionales de los precios. Estos saltos se producen al pasar los precios de un nivel a otro, sin negociarse los precios intermedios (por ejemplo, en la devaluación de una moneda).

f) La volatilidad tiende a revertir hacia la media, después de períodos de volati-

[5] En la página web del departamento de Economia Financiera de la Universidad de la Laguna (http://www.econfin.ull.es/opciones) pueden obtenerse las volatilidades implicitas calculadas con los modelos de valoración de Black-Scholes para las opciones sobre futuros IBEX-35.

lidad extrema se siguen largos períodos de volatilidad moderada.

g) Reversión del nivel de precios hacia la media.

2.3.5 Elección de la medida de volatilidad.

Despúes de este breve repaso a las diferentes medidas de volatilidad, es necesario que nos posicionemos eligiendo aquella que nos parezca más adecuada para nuestro trabajo. Debemos escoger una **medida consistente con el marco teórico del problema y la metodología a aplicar, y que recoja de forma pertinente la información que encierran nuestros datos**. Concretamos ahora algunos de los aspectos ya comentados al presentar las diferentes medidas:

- Rechazamos la volatilidad implícita como medida de la volatilidad pues el contexto en el que ésta se define requiere la asunción de hipótesis muy restrictivas y poco realistas.
- Los métodos no paramétricos no pueden ser utilizados para estimar la volatilidad, ya que disponemos de una serie con pocas observaciones (el número total de observaciones mensuales está alrededor de las 130).
- Los modelos estadísticos presentan inconvenientes en la predicción a más de un paso, además no nos parecen lo suficiente robustos dado que el número de datos no es elevado.
- **Elegimos el estimador de la volatilidad dentro del grupo de los que se calculan a partir de medias móviles,** y más en concreto, optamos por aquellas medidas que se desplazan en el tiempo eliminando así las estimaciones obsoletas; descartamos los modelos exponenciales pues requieren una estimación previa de los pesos de ponderación.

De esta manera **la volatilidad se presenta como una serie temporal generada por la variación del parámetro en el tiempo, cuya modelización puede permitir una mejora en la predicción a largo plazo**. De entre las medidas revisadas, existen dos que cumplen los supuestos anteriores, estas medidas de volatilidad son la desviación típica histórica *"rolling historical volatilities"* (2.2) y la desviación absoluta respecto a la media (2.3).

La primera de estas medidas, la desviación típica histórica, es la más utilizada en el mercado español para el cálculo de la volatilidad. Su formulación permite suavizar las oscilaciones de la serie de rentabilidades alrededor de su media al promediar las variaciones observadas durante k períodos. En cambio, la desviación absoluta respecto a la media (2.3) al no promediar las desviaciones, origina una serie que evoluciona en el tiempo de manera natural y cuyos cambios reflejan de manera más fidedigna la evolución del mercado.

Entre estas dos medidas de volatilidad no es fácil tomar partido por una de ellas: Si la elección de la primera es justificada por motivos "empíricos", la segunda nos parece un reflejo más fiel de los cambios del mercado. Ante tan difícil elección hemos optado por utilizar ambas medidas y comparar los resultados obtenidos; de esta manera serán los logros conseguidos en el ajuste del modelo y en la predición lo que decante nuestra elección hacia una de ellas.

2.4 Modelos aplicados a la volatilidad.

La elección o construcción de un modelo que explique el comportamiento de una serie debe tener en cuenta la naturaleza de los datos a los que se aplica. En esta tesis la serie cuyo comportamiento queremos describir y predecir es la serie de volatilidades asociada a la rentabilidad del IBEX 35, por este motivo vamos a realizar una revisión, que no pretende ser exhaustiva, de los modelos utilizados para describir la volatilidad del IBEX 35 y de otros índices del mercado bursátil (S&P 500, CAC 40, DAX, MIB, Hang Seng index y FTSE 100).

Los estudios realizados sobre los diferentes índices se centran en la modelización de la rentabilidad debida a los cambios de precio, o en la modelización de la volatilidad asociada a la rentabilidad. Como la volatilidad no es observable, es necesario construir la serie de volatilidades para después modelizarla, o ajustar un modelo a la serie de rentabilidades y estimar implícitamente la volatilidad a partir de la varianza asociada.

Antes de presentar algunos de los trabajos realizados sobre la modelización de diferentes índices, queremos poner de manifiesto que nuestro principal interés reside en el estudio de la volatilidad a partir de un modelos no lineal concreto, el modelo SETAR *"Self-exciting Threshold Autoregressive model"*; por este motivo nos centraremos en las aplicaciones que con este modelo se han realizado, y comentaremos muy brevemente otros modelos que se han aplicado para describir el comportamiento de la serie de volatilidades o de rentabilidades.

- **Índice Standard & Poor's (S&P 500).**

Este índice es uno de los más estudiados en la literatura económico financiera. Su análisis se ha realizado tanto a partir de modelos lineales como no lineales y dentro de estos últimos queremos destacar el trabajo de Cao y Tsay (1993) en el que se utiliza el modelo SETAR. Estos autores estudian la volatilidad asociada al S&P 500 a partir de diferentes modelos: ARMA (1, 1), GARCH (1, 1), EGARCH (1, 0) y SETAR (2; 3, 3) y concluyen que los modelos SETAR son más utiles que los modelos GARCH y EGARCH cuando consideramos acciones con gran rentabilidad, en cambio el modelo EGARCH aparece como el que proporciona las mejores predicciones cuando los rendimientos son bajos. La comparación entre los modelos no puede hacerse de forma directa ya que, mientras los modelos GARCH y EGARCH se aplican a la serie de rentabilidades y obtienen la estimación de la volatilidad a partir de la varianza condicionada, el modelo ARMA (1, 1) y el modelo SETAR (2; 3, 3) se aplica sobre la serie de volatilidades obtenida como transformación de la serie de rentabilidades asociada al índice.

Otros modelos han sido aplicados al índice S&P 500, dentro del campo lineal podemos destacar los trabajos de Poterba y Summers (1986) que identifican un proceso AR (1), French, Schwert y Stambaugh (1987) usan un modelo ARIMA (0, 1, 3) no estacionario para describir el logaritmo de la volatilidad de los rendimientos mensuales del S&P. Schwert (1990) y Schwert y Seguin (1990) utilizan un AR (12) para modelizar la serie de volatilidades mensuales. Entre los modelos no lineales aplicados destaca el GARCH (1,1) (Engle y Mezrich (1995) y Engle, Mezrich y Bielinski (1997)).

- **IBEX 35**

El IBEX 35 es el índice oficial del mercado continuo de la Bolsa española y como ya hemos dicho está compuesto por las 35 empresas más líquidas entre las que cotizan en el Mercado Continuo español. El estudio de la volatilidad asociada a la rentabilidad del índice se ha realizado considerando diferentes modelos, pero entre ellos no se ha tenido en cuenta los modelos SETAR. Esta tesis pretende cubrir ese vacio proponiendo la aplicación de un modelo SETAR a la serie de volatilidades construida a partir de la estimación de la volatilidad; en la siguiente sección se justifica la elección de este modelo a partir de sus características.

Los modelos más utilizados para describir la volatilidad han sido los de la familia GARCH, así Sáez, M. y Pérez-Rodríguez, J. (1999) comenta que ésta es la aproximación paramétrica que mejor ha representado la conducta de la varianza condicional de los excesos de rendimiento del índice IBEX-35 en el periodo 1987-1994. Cabrales y Alarcón realizan en la publicación Sumulas (Meff) un análisis comparativo de la capacidad predictiva de las estimaciones de la volalatilidad que se obtienen con los modelos GARCH, EGARCH y AGARCH[6], y realizan una comparación. Otros modelos utilizados han sido los modelos TGARCH "Threshold Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity models" y AGARCH, León y Mora (1999) comprueban como con estos modelos se consigue un mejor ajuste que con los GARCH.

Otra alternativa es la modelización de la volatilidad utilizando Redes Neuronales, González Miranda y Burgess (1997) utilizan estos modelos para la predicción de la volatilidad implicita del IBEX 35.

- **Otros índices:**

  Índice de la Bolsa de Milán (MIB).

  Schoier (1998) estudia el comportamiento de la serie de rendimientos diarios del índice MIB y la volatilidad asociada a partir de los siguientes modelos no lineales: GARCH (1, 1), EGARCH (1, 1), TGARCH (1, 1) y TAR(3;1, 1, 1). Los modelos EGARCH (1, 1) y TGARCH (1, 1) son mejores cuando el comportamiento es asimétrico y leptocúrtico, pero el modelo que parece más adecuado para explicar la dinámica de la serie analizada es el modelo TAR. Schoier (1998) apunta que en presencia de elevada curtosis puede ser adecuado utilizar modelos de volatilidad estocástica.

  CAC 40.

  Es un índice global que se calcula a partir de las cotizaciones de las acciones de 40 empresas de la Bolsa de Paris. Crouhy y Rockinger (1993) realizan un completo estudio de la rentabilidad del índice, además desarrollan un modelo el ATGARCH

[6] Los modelos AGARCH "Non-Linear Assymmetric ARCH models" fueron desarrollados por Engle(1990) y Sentana en 1991.

"Non-Linear Assymmetric Threshold Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity models" que recoge los posibles efectos de histéresis[7], y obtiene unos resultados sorprendentes en cuanto a capacidad de explicación y de predicción. Engle y Mezrich (1995) modelizan la volatilidad a partir de un GARCH (1, 1) pero, trabajos de Campbell y Hentchell (1992) y Crouhy y Rockinger (1993) muestran, a partir de la inspección de los residuos, que un simple modelo GARCH asimétrico no es el más adecuado. Después de analizar las relaciones de la voltilidad del CAC40 y la volatilidad implicita de la opción sobre el bono Nocional, Crouhy y Rockinger (1996) sugieren utilizar modelos TAR para modelizar la serie de volatilidades asociada al CAC40.

Han Seng index.

Este es el índice representativo de la Bolsa de Hong Kong. Li y Lam (1995) han estudiado la serie de rentabilidades asociadas a partir de modelos TARCH *"Threshold Autoregressive Conditional Heteroscedasticity models"* y modelos ARCH *"Autoregressive Conditional Heteroscedasticity models"*. La capacidad de los primeros para capturar la asimetría de la serie de rentabilidades es debida a la introducción del concepto del umbral que permite considerar una formulación diferente según el régimen. Los modelos TARCH considerados en este trabajo son, por hipótesis, modelos con dos regímenes, valor umbral igual a cero y retardo de la variable umbral igual a uno, de manera que el primer régimen modeliza la rentabilidad cuando en el período anterior ésta fue negativa y el segundo modeliza la rentabilidad cuando en el período anterior fue positiva. El trabajo de estos autores no aborda el estudio de la volatilidad asociada a la rentabilidad del índice.

2.5 Modelo propuesto.

Una vez construida la serie de volatilidades debemos ajustar un modelo que permita describir el comportamiento de la serie y elaborar predicciones fiables. Este proceso de elección o construc-

[7]Se conoce como histéresis el hecho de que las noticias positivas tienen un efecto mucho menor sobre la volatilidad que las negativas que suelen llevar a fuertes "shocks" de volatilidad.

ción de un modelo para un conjunto de datos empíricos viene determinado por los siguientes factores:

- capacidad del modelo para capturar las características más importantes observadas en los datos
- contrastabilidad de las hipótesis implicadas
- simplicidad en su formulación (principio de la parsimonia)
- robustez en la predicción (característica esencial para la aplicación práctica).

Como ya se mencionó en la introducción, entre todos los modelos que se han utilizado en el estudio de la volatilidad elegimos el modelo SETAR *"Self-Exciting Threshold Autoregressive Model"*. Creemos sin embargo necesario justificar la elección de este modelo entre la gran variedad de modelos existentes en el campo de las series temporales, y comentar sus características más generales.

En primer lugar vamos a definir el modelo con una notación sencilla, la forma canónica del modelo se verá en el capítulo 3.

Definición 13:

El proceso $\{X_t\}$ sigue el modelo SETAR $(l; k_1, \cdots, k_l)$ si dado $(r_0, r_1, \cdots, r_l)$ un conjunto de números ordenados tal que $-\infty = r_0 < r_1 < \cdots < r_l = +\infty$ y $d \in N,\ d > 0$ se cumple:

$$\mathbf{X}_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} a_i^{(j)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(j)} \qquad si \qquad r_{j-1} \leq X_{t-d} < r_j, \qquad j = 1, \cdots, l \tag{2.4}$$

donde $a_i^{(j)} \quad i = 0, 1, \cdots, k$ son coeficientes constantes.
Para simplificar la notación consideramos $\varepsilon_t^{(j)} = h^{(j)}\varepsilon_t$, una serie (heterogénea) ruido blanco.

La anterior expresión muestra de una manera clara que el modelo SETAR se compone de un conjunto de procesos autoregresivos, que pueden ser de diferentes órdenes y que están definidos en distintas regiones del espacio generado por la variable X_{t-d}, es decir, se trata de un modelo donde el cambio de régimen está determinado por una variable que ya hemos observado. Esta estructura dota al modelo de unas características importantes como son su capacidad para capturar la irreversibilidad temporal del proceso, los saltos *"jump"* que se producen en su evolución y la presencia de ciclos límite asimétricos. Estas características del modelo SETAR son de gran utilidad en el análisis de la serie de volatilidades asociada a la rentabilidad de las acciones y coinciden con algunas de las comentadas para la volatilidad al principio del capítulo.

El estudio de las serie temporal de volatilidades muestra como algunas de sus características coinciden con las del modelo SETAR: la media, la varianza o la autocorrelación cambian en los diferentes regímenes, también este proceso presenta en muchas ocasiones saltos que se producen a intervalos irregulares en el tiempo, y que son debidos a cambios en la política financiera o a episodios de pánico financiero. Este tipo de conducta no puede ser modelizada por los modelos de la familia GARCH pues estos presuponen la "no existencia de cambios estructurales en el proceso subyacente que rige la volatilidad" (Aydemir, 1998), en cambio la estructura por partes *"piecewise"* del modelo SETAR permite modelizar este comportamiento y es la responsable de capturar el comportamiento asimétrico de la serie. La presencia de conglomerados de volatilidad sugiere que la volatilidad de las acciones evoluciona de acuerdo con los valores pasados, por tanto es adecuado considerar procesos autorregresivos; los cambios bruscos de tendencia son recogidos por los cambios de régimen; finalmente el hecho de que sea el propio proceso el que gobierna la dinámica del sistema está de acuerdo con la teoría financiera.

Por la simple observación del gráfico (Figura 2-8) de la serie de volatilidades parece claro que este proceso no es reversible, Ramsey y Rothman (1996) han testado la irreversibilidad de algunas series económicas.

En un mundo tan cambiante como el financiero es necesario que el modelo utilizado elimine las observaciones obsoletas a la vez que se va autoregulando; la estructura autoregresiva de orden fínito y la propia variable retardada, que controla la dinámica del sistema, nos aseguran el comportamiento deseado.

Es siempre conveniente que un modelo sea tan simple como sea posible y que involucre el menor número de parámetros (principio de la parsimonia). El modelo SETAR (2.4) tiene como característica más relevante la simplicidad pues, su estructura localmente lineal, permite que el ajuste de cada uno de los procesos autoregresivos se realice de manera recursiva utilizando mínimos cuadrados.

La robustez de la predicción es esencial para que el modelo sea verdaderamente útil. Si tenemos en cuenta que la estructura de los fenómenos financieros no permanece constante, es un gran logro para un modelo que sea robusto frente a pequeños cambios. Así comenta Figlewski (1997) es preferible un modelo simple, pero robusto en la predicción, que capture sólo las características principales del sistema y que permita realizar acuradas predicciones a largo plazo, a un modelo ambicioso que pretenda capturar aquellos detalles estructurales que cambian rápidamente en el tiempo. Al realizar la predicción de la volatilidad debemos tener presente que este proceso no tiene una estructura fija, por tanto es necesario evaluar la precisión de las predicciones fuera de muestra (*"out-of-sample"*). Figlewski (1997) afirma que muchos modelos elaborados para la predicción de la volatilidad muestran un buen comportamiento predictivo en muestra (*"in-sample"*), que no coincide con el observado fuera de muestra. Tong (1990) también es claro en este punto al diferenciar entre lo que él denomina predicción no genuina y predicción genuina, y que se corresponde con la predicción en muestra y fuera de muestra. El modelo SETAR permite realizar ambos tipos de predicción, siendo la predicción genuina la realmente útil cuando se trata de predecir la volatilidad de un activo financiero.

A partir de los comentarios anteriores creemos justificada la elección del modelo SETAR para estudiar el comportamiento de la serie de volatilidades asociada a la rentabilidad de las acciones. Solo nos resta añadir que, las características observadas para este modelo están en concordancia con la filosofía que según Figlewski (1997) debe seguirse en la modelización de la conducta de los mercados financieros; este autor recomienda:

- Considerar que la conducta de los mercados financieros es muy diferente en muestra que fuera de muestra, esto es debido a que la estructura subyacente es cambiante.

- Limitar la validez del modelo a su poder predictivo.

- Huir de la complejidad, son preferibles modelos simples pero robustos.

- Optar por modelos que se reajusten y eliminen estimaciones obsoletas.

Todas estas recomendaciones son asumidas por el modelo SETAR y lo hacen por tanto adecuado para modelizar la volatilidad.