PARTE 1

Órdenes de experimentación en diseños factoriales con 8 o 16 experimentos

CAPÍTULO 1

Órdenes de experimentación en diseños factoriales con 8 o 16 experimentos

1.1 Introducción

La palabra **aleatorio** y sus derivadas (aleatorización, aleatorizar, ...) aparecen siempre con protagonismo destacado en los textos de estadística. Aleatorizar es un ingrediente imprescindible en muchos de los métodos estadísticos, para que la teoría que avala las conclusiones sea correcta y coherente.

Las palabras que se derivan de aleatorio no siempre se utilizan con el mismo significado. Un caso puede ser el de seleccionar una muestra aleatoria para estimar los parámetros de interés de la población. Aquí la aleatoriedad es clave para garantizar la validez de los resultados obtenidos, de forma que una selección inadecuada comprometería seriamente la validez el estudio.

Otra situación es la que se refiere a la aleatorización del orden de experimentación en un diseño factorial. Esta aleatorización también está considerada como una de las piezas clave del proceso y siempre se insiste en la importancia de diferenciar el orden estándar de la matriz de diseño del orden de experimentación, que debe ser, por supuesto, aleatorio. Con esta aleatorización se pretende que, habiendo eliminado las fuentes “conocidas” de perturbación, ya sea manteniéndolas constantes durante el experimento o bien mediante la formación de bloques, las discrepancias desconocidas sean forzadas a contribuir homogéneamente entre las variables de estudio. De esta forma se pretende evitar sesgos en la estimación de los efectos por asociaciones con el orden de experimentación; no obstante esto frecuentemente no sucede cuando la fuente de variación desconocida varia sistemáticamente en el tiempo, resultando conveniente restringir la aleatorización en el orden de experimentación.

En esta primera parte se proponen un conjunto de ordenaciones para diseños del tipo 2^{k-p} con 8 ó 16 experimentos, combinando las ventajas de un mínimo valor del sesgo máximo, producido en la estimación de los efectos en presencia de una tendencia lineal, con un mínimo número de cambios en los niveles de los factores. En esta propuesta, el sesgo máximo se ha tomado teniendo en cuenta el que se produce no sólo en los efectos principales, sino también en las interacciones. Se ha realizado así porque la estimación correcta de las interacciones también es de gran importancia para interpretar correctamente los resultados de la experimentación, y porque en los diseños fraccionados los efectos principales están confundidos con estas interacciones.

1.2 Antecedentes

Cox (1952) inició el estudio de diseños sistemáticos para estimar eficientemente el efecto de los tratamientos en presencia de tendencia polinomial. Daniel y Wilcoxon (1966) estudiaron el efecto adverso que producen las tendencias lineales y cuadráticas en la estimación de los efectos en los diseños factoriales a dos niveles. Draper y Stonman (1968) analizaron exhaustivamente los 40,320 (=8!) arreglos posibles de los 8 órdenes de experimentación del diseño factorial completo 2^3. Analizan el efecto que ocasiona una tendencia lineal en el tiempo sobre los efectos principales, a través de una medida que denominan **time count**, y al mismo tiempo identifican el número de cambios en los niveles de los factores. Encuentran que los 8! arreglos se pueden agrupar en 840 conjuntos de 48 órdenes de experimentación equivalentes, de ellos señalan a 12 como los mejores, al tener valores bajos al mismo tiempo en el número de cambios de nivel y en el máximo *time count*. De manera también exhaustiva, analizan los factoriales fraccionados 2^{4-1}, 2^{5-2}, 2^{6-3} y 2^{7-4}; para cada uno de ellos encuentran conjuntos de órdenes de experimentación con las mejores características. Este estudio adolece del análisis de las interacciones de los factores, pero es pionero en la búsqueda de órdenes de experimentación que eliminen el sesgo en la estimación de los efectos, que producen los factores incontrolables en formas de tendencias lineales, y que la aleatorización no siempre suprime o reduce.

Dickinson (1974) extendió el trabajo de Draper y Stonman para los factoriales 2^4 y 2^5, concentrándose fundamentalmente en los cambios de nivel; debido a que no es factible para el factorial 2^4 encontrar todos los órdenes de experimentación (16! = 20,922,789,888,000), se elaboró un algoritmo computacional de búsqueda para encontrar los 238 distintos órdenes de experimentación que tienen el mínimo número de cambios de nivel en los factores (15). De estos, 50 cuentan con el menor valor del máximo *time count*.

Joiner y Campbell (1976) proponen encontrar de manera aleatoria un subconjunto de 50 órdenes de experimentación, y usar el mejor de ellos. Para determinar el mejor orden proponen una medida de eficiencia, que está dada por el cociente de una medida de calidad y un coste ($|X'X|^{1/p} \div$ coste, donde p es el número de vectores en X y el coste agrupa los costes de cambiar de nivel para cada factor y el coste de hacer las mediciones). Con esta medida se intenta equilibrar entre un diseño con buenas propiedades estadísticas pero muy costosos y un diseño barato pero ineficiente. Para el proceso de selección del mejor orden de experimentación se grafican en un diagrama bivariante la calidad contra el coste de cada secuencia; en este gráfico, de ser posible, se dibuja cotas para la calidad y el coste para restringir la región de búsqueda.

Coster y Cheng (1988) desarrollaron una técnica para construir órdenes de experimentación óptimos de diseños factoriales fraccionados, en el sentido que minimiza una función de coste, basada en el número de cambios en los niveles, con los efectos principales ortogonales a una tendencia polinomial, con lo cual se consigue estimaciones eficientes de los efectos principales. Tanto la tendencia polinomial como los valores que toman los efectos principales de los factores en la matriz de diseño, se definen en términos de sistemas de polinomios ortogonales. Si no se necesita minimizar los costes, eliminar la tendencia consiste en un problema de optimización escalar. Si se tienen costes distintos para cada cambio de nivel de los factores, el problema de minimización es del tipo del problema del “agente viajero”, para el cual se desconoce un algoritmo polinomial en el tiempo.

Cheng y Jacroux (1988) amplían la técnica de Coster y Cheng para que también sean ortogonales los efectos de las interacciones de dos factores; sin embargo, se centran en la búsqueda de órdenes resistentes a tendencias lineales y cuadráticas y no consideran el problema simultáneo de minimizar una función de coste.

Atkinson y Donev (1996) consideran que los desarrollos para encontrar órdenes de experimentación que tengan la propiedad de ser ortogonales a la tendencia no es siempre adecuada. Indican diversas situaciones en donde la ortogonalidad no es posible o razonable, en cuyo caso es preferible elegir las combinaciones de los tratamientos de manera óptima, incluyendo en el modelo de la respuesta la tendencia temporal. Proponen un diseño Ds-óptimo para centrar el interés en los parámetros del modelo asociados a los factores y comparan este diseño con el que se obtiene en ausencia de tendencia, lo que permite determinar si el diseño óptimo encontrado está totalmente libre de tendencia. Ejemplifican su algoritmo para obtener el orden de los tratamientos en diseños con 6 y 9 pruebas en presencia de tendencia lineal y geométrica y con tres factores cuantitativos o cualitativos. Tratan también los diseños de primer orden para tres tratamientos, con y sin interacciones, y con 15 pruebas, considerando diversas posibilidades con respecto a la asignación de las pruebas a los momentos de ejecución: uniformemente espaciadas en el tiempo, varias pruebas en cada momento en el tiempo, y con más puntos en el tiempo que experimentos.

A pesar del amplio periodo de tiempo que ha discurrido desde los estudios iniciales y los diversos enfoques propuestos, los resultados no han logrado incorporarse, como mínimo de una manera formal, a los textos y a las reglas de actuación habitualmente consideradas correctas en la planificación de un diseño experimental. Se propone recuperar este tema intentado poner de manifiesto su importancia y planteando unas hipótesis y consideraciones, bajo las cuales se han construido las tablas que se presentan al final y que pueden resultar de utilidad para seleccionar órdenes de fácil ejecución (mínimo número de cambios en los niveles de los factores), sin renunciar a los objetivos que se pretenden con la aleatorización.

1.3 Hipótesis sobre un modelo para la respuesta

Supondremos para la respuesta el modelo: $y = \mathrm{f}(\mathbf{x}) + \mathrm{g}(\mathbf{z}) + \varepsilon$, donde $\mathrm{f}(\mathbf{x})$ es la función que expresa la relación entre los factores en estudio y la respuesta; $\mathrm{g}(\mathbf{z})$ corresponde a la influencia de los factores desconocidos que no se mantienen constantes a lo largo del plan de experimentación y, por último, ε es el error experimental.

Si los valores de las variables representadas por **z** se mantuvieran constantes, su presencia no afectaría a la estimación de los efectos, sino que simplemente añadirían un valor a la media de las respuestas, independientemente de cual fuera la forma de $\mathrm{g}(\mathbf{z})$. El problema estriba en que los valores de **z** van variando durante el plan de experimentación de acuerdo con algún patrón desconocido. En principio, este patrón puede ser de cualquier tipo, pero si esas variables están relacionadas con las condiciones ambientales, con el deterioro o transformación de las materias primas, con cambios en la maquinaria, o con el proceso de medida, parece razonable suponer que la magnitud de la influencia irá aumentando a medida que se realizan los experimentos.

De acuerdo con estas consideraciones, y suponiendo que en el rango de variación de las **z**, la expresión $\mathrm{g}(\mathbf{z})$ se puede considerar lineal, podemos asumir que $\mathrm{g}(\mathbf{z}) = r \cdot i$, donde i representa el orden en que se ha realizado el experimento y r es una constante de proporcionalidad. En lo que sigue, para simplificar las expresiones, se supone que $r = 1$, que todos los factores son inertes y que no existe error experimental. De esta forma, el valor de la respuesta coincide con el orden de experimentación y el sesgo que se produce en la estimación de los efectos coincide con el valor de los efectos calculados.

Para analizar el efecto de la aleatorización en el marco considerado, se tratará en primer lugar un diseño 2^{k-p} con $k-p = 3$ (8 experimentos) y a continuación con k-p = 4 (16 experimentos). Sólo se hace mención a los efectos que corresponden a los diseños completos, teniendo en cuenta que cuando nos referimos, por ejemplo, a la interacción de 3 factores, nos estamos refiriendo no sólo a este efecto, sino al conjunto de los que puedan estar confundidos con él en un diseño fraccionado.

1.4 Diseños 2^{k-p} con k-p = 3 (8 experimentos)

Tomemos un diseño 2^3 en orden estándar, de acuerdo con la suposición de que los 3 factores son inertes, de que no existe error experimental y de que *r* = 1, las respuestas serán las que se indican en la Tabla 1.1

Tabla 1.1 Diseño 2^3 en orden estándar con las respuestas de acuerdo con las hipótesis planteadas.

Exp.	A	B	C	Respuesta
1	-	-	-	1
2	+	-	-	2
3	-	+	-	3
4	+	+	-	4
5	-	-	+	5
6	+	-	+	6
7	-	+	+	7
8	+	+	+	8

Si se efectúa la experimentación en este orden, se perjudica de forma especial la estimación del efecto del factor C, debido a que los cuatro valores mayores de la respuesta están asociados a su nivel alto (+) y los cuatro valores menores al nivel bajo (–). En cambio, los factores A y B así como todas las interacciones tienen dos signos positivos y dos negativos, asociados tanto a los cuatro valores mayores como a los cuatro valores menores de la respuesta, lo que hace que resulten menos afectadas las estimaciones correspondientes. Los efectos que se obtienen, que también serán los sesgos, son los que figuran en la Tabla 1.2.

Tabla 1.2 Efectos (sesgos) calculados para el diseño de la Tabla 1.1.

Término	Efecto
A	1
B	2
C	4
AB	0
AC	0
BC	0
ABC	0

Pero el estándar no es el único orden que introduce este sesgo. La estimación del efecto del factor C se vería igualmente afectado en cualquier aleatorización que dejara los cuatro primeros experimentos asociados a su nivel alto o a su nivel bajo. Así, por ejemplo, en la secuencia de experimentación 2 1 3 4 8 6 5 7, los cuatro primeros experimentos están asociados al nivel bajo de C, y en la secuencia 8 6 5 7 2 1 3 4, lo están al nivel alto. En ambas situaciones, el efecto de C será, en valor absoluto, igual al obtenido realizando los experimentos en orden estándar. En el primer caso su valor será 4, y en el segundo –4. Asimismo, existen ordenaciones que perjudican la estimación de los otros efectos, en los que el nivel bajo del factor corresponde a los 4 primeros experimentos (o a los 4 últimos) y el nivel alto a los otros 4, tal como se indica en la Tabla 1.3.

Tabla 1.3 Ejemplos de ordenaciones que introducen el sesgo máximo en la estimación del efecto indicado. Los signos son los que corresponden a la columna asociada en la matriz de diseño ampliada (con las columnas correspondientes a las interacciones).

A		B		C		AB		AC		BC		ABC	
Orden	Signo	Orden	Signo	Orden	Signo	Orden	Signo	Orden	Signo	Orden	Signo	Orden	Signo
3	-	1	-	6	+	6	-	3	+	7	+	1	-
7	-	2	-	7	+	7	-	6	+	2	+	7	-
1	-	6	-	8	+	2	-	8	+	1	+	4	-
5	-	5	-	5	+	3	-	1	+	8	+	6	-
4	+	8	+	3	-	5	+	7	-	6	-	2	+
2	+	7	+	4	-	4	+	5	-	5	-	3	+
6	+	4	+	1	-	1	+	2	-	3	-	5	+
8	+	3	+	2	-	8	+	4	-	4	-	8	+

Además, cualquier permutación de las cifras asignadas a los niveles bajos, seguida por cualquier secuencia de las restantes 4 cifras afectará de la misma manera al sesgo del efecto. Igualmente, cualquier permutación de las 4 últimas cifras seguida por cualquier ordenación de las 4 primeras tiene el mismo impacto. Por tanto, del total de aleatorizaciones posibles (8! = 40.320), 4!·4!·2 = 1.152 casos afectan de forma semejante a la explicada a cada uno de los efectos. Tendremos 3.456 ordenaciones que afectarán a algún efecto principal de la misma forma que el orden estándar afecta a la estimación del efecto C. Otras 3.456 afectarán a las interacciones dobles y 1.152 afectan a la interacción triple, lo que en suma representa el 20 % del total de ordenaciones posibles. Es decir, una quinta parte de las aleatorizaciones producen un sesgo, en valor absoluto, tan grande como el que se obtiene experimentando en el orden estándar de la matriz de diseño.

Los valores que puede tomar el **sesgo máximo en valor absoluto** (SMA) van de 2 a 4 con incrementos de 0.5. El máximo valor se da cuando algún efecto tiene asociada, en la matriz de diseño, una columna con cuatro signos negativos seguida de cuatro signos positivos, o viceversa. En este primer caso el valor del efecto es:

$$\frac{1}{4}(y_5 + y_6 + y_7 + y_8) - \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = \frac{1}{4}(5 + 6 + 7 + 8) - \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = 4$$

Si se invierte el orden de los signos positivos y negativos, el valor de SMA también es 4, ya que el efecto del término es –4. Si ahora se tiene una columna con tres signos positivos y uno negativo en correspondencia con los valores mayores de la respuesta, el máximo sesgo se presenta cuando el signo menos pertenece al valor de 5 y el valor de 4 tiene signo más. El efecto es:

$$\frac{1}{4}(y_4 + y_6 + y_7 + y_8) - \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_5) = \frac{1}{4}(4+6+7+8) - \frac{1}{4}(1+2+3+5) = 3.5$$

Al invertir los signos de los cuatro valores mayores de Y por los cuatro valores menores, se tiene un efecto de –3.5. Siguiendo el mismo razonamiento empleado para obtener la probabilidad de SMA = 4 se concluye que un sesgo máximo, en valor absoluto, de 3.50 también se presenta el 20% de las veces. En la Tabla 1.4 se muestran los restantes valores de SMA y la frecuencia con que aparecen al analizar exhaustivamente todas las posibles aleatorizaciones.

Tabla 1.4 Valores de SMA.

SM	Frecuencia	%
2,0	1.344	3,33
2,5	9.408	23,33
3,0	13.440	33,33
3,5	8.064	20,00
4,0	8.064	20,00
Total	40.320	100

Puede observarse que la probabilidad de obtener, al aleatorizar el orden de ejecución, una secuencia que de el mínimo valor del SMA es bastante baja, aproximadamente 3%.

1.5 Diseños 2^{k-p} con k-p = 4 (16 experimentos)

En este tipo de diseño, el valor de SMA varía de 3 a 8 con incrementos de 0.25 y, al igual que en el caso de 8 experimentos, se obtiene su valor máximo cuando la experimentación se realiza en el orden estándar de la matriz de diseño, obteniéndose los efectos que se indican en la Tabla 1.5.

Tabla 1.5 Efectos para el orden estándar.

Término	Efecto	Término	Efecto
A	1.0	B*C	0.0
B	2.0	B*D	0.0
C	4.0	C*D	0.0
D	**8.0**	A*B*C	0.0
A*B	0.0	A*B*D	0.0
A*C	0.0	A*C*D	0.0
A*D	0.0	B*C*D	0.0
		A*B*C*D	0.0

También al igual que en el caso anterior, no es éste el único orden que produce un valor máximo de SMA. La Tabla 1.6 muestra 5 ordenaciones que producen un valor de SMA igual al obtenido con la matriz en orden estándar.

Tabla 1.6 Órdenes y valores de los efectos con SMA = 8.

Órdenes				
a	b	c	d	e
8	15	10	11	7
2	4	14	4	1
10	1	2	9	5
16	2	15	2	12
6	14	11	1	10
4	13	6	12	14
12	3	7	10	16
14	16	3	3	3
11	12	4	16	9
15	11	12	6	15
9	10	8	14	2
7	9	13	8	8
3	5	9	15	11
1	6	16	7	6
13	7	5	5	4
5	8	1	13	13

Valores de los efectos para cada ordenación					Efectos
a	b	c	d	e	
-8.00	0.25	-3.00	-1.75	1.50	A
-1.50	0.00	0.00	-0.75	0.50	B
0.75	2.50	0.75	**8.00**	0.25	C
-0.25	-1.50	-1.75	-0.50	0.50	D
1.50	0.25	**8.00**	0.00	0.00	AB
-0.75	1.75	1.75	-2.25	0.75	AC
2.25	0.75	1.25	1.75	**-8.00**	AD
-2.75	0.50	0.25	-0.25	-2.75	BC
-0.25	-1.50	1.25	-1.25	-1.00	BD
1.00	**-8.00**	0.00	0.00	1.75	CD
-1.25	1.75	0.25	1.00	1.75	ABC
0.25	1.75	1.25	0.50	0.50	ABD
0.00	0.25	0.00	-2.25	-0.75	ACD
0.00	0.00	0.50	-0.25	0.75	BCD
0.00	0.25	0.50	-1.00	1.25	ABCD

Suma de cuadrados de los sesgos				
85	85	85	85	85

La Tabla 1.7, de forma similar a la anterior, presenta los valores de los efectos obtenidos con 5 ordenaciones que producen el valor mínimo de SMA.

Tabla 1.7 Órdenes y valores de los efectos con SMA = 3.

Órdenes				
a	b	c	d	e
5	9	13	3	15
3	15	6	1	14
6	16	3	6	1
1	4	4	14	11
14	7	16	4	3
11	13	8	10	16
8	3	1	13	12
10	14	10	12	6
15	8	5	9	13
13	5	14	16	7
2	2	2	7	5
7	12	9	2	10
12	6	12	11	8
9	11	7	8	4
16	1	11	15	9
4	10	15	5	2

	Valores de los efectos para cada ordenación					Efectos
	a	b	c	d	e	
	2,5	2,0	-2,25	-1,50	2,5	A
	3,0	**-3,0**	2,00	2,25	-2,0	B
	-1,5	**-3,0**	-1,25	**3,00**	-2,0	C
	3,0	-1,5	**3,00**	1,00	**-3,0**	D
	3,0	-2,0	-2,75	0,75	2,5	AB
	-3,0	0,5	-2,00	**-3,00**	**-3,0**	AC
	-2,0	2,0	0,25	-2,50	**-3,0**	AD
	3,0	-1,5	2,75	2,75	2,0	BC
	-1,5	**3,0**	2,50	2,75	**-3,0**	BD
	1,0	**-3,0**	-2,75	**-3,00**	**-3,0**	CD
	-2,0	2,0	-2,50	2,75	2,0	ABC
	3,0	-2,5	-1,75	-1,75	2,0	ABD
	3,0	**-3,0**	**3,00**	**3,00**	2,5	ACD
	0,0	**-3,0**	-2,25	-0,75	1,0	BCD
	1,5	2,0	**-3,00**	-2,75	-0,5	ABCD
Suma de cuadrados de los sesgos	85	85	85	85	85	

En la Figura 1.1 se han representado gráficamente ambos grupos de valores. Puede observarse que en el primer caso, cuando el SMA es máximo, su valor destaca sobre el resto de efectos calculados y, por tanto, la influencia de los factores desconocidos sobre la respuesta se concentra de forma especial en un solo efecto, lo cual puede inducir a confusión en la interpretación de los resultados obtenidos. Sin embargo, si la ordenación que se utiliza produce el sesgo mínimo, el valor de los efectos (sesgos) se encuentra repartido con mayor uniformidad.

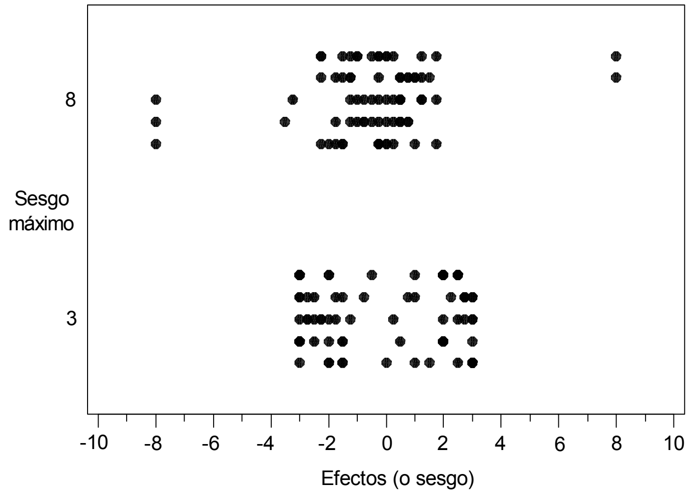

Figura 1.1 Sesgos producidos en los órdenes presentados en la Tabla 1.6 y Tabla 1.7.

La Tabla 1.8 contiene los porcentajes de aparición para cada uno de los valores de SMA. En el Anexo 1 se indica cómo se han obtenido estos porcentajes

Tabla 1.8 Porcentaje de aparición de cada uno de los valores posibles de SMA.

SMA	Porcentaje	SMA	Porcentaje
3.00	0,0016	5.75	6,48
3.25	0,063	6.00	5,13
3.50	0,669	6.25	3,49
3.75	2,70	6.50	2,56
4.00	6,37	6.75	1,63
4.25	10,16	7.00	1,16
4.50	12,94	7.25	0,704
4.75	13,27	7.50	0,470
5.00	12,62	7.75	0,235
5.25	10,47	8.00	0,235
5.50	8,64		

Si consideramos los valores de SMA comprendidos entre 6.00 y 8.00 como susceptibles de producir un sesgo considerable, se tiene que el porcentaje de veces que aparecen esos valores al aleatorizar el orden de los experimentos es de 15.62 %. Al incluir en esos valores el sesgo de 5.75 el porcentaje sube al 22.10%. En cambio, solo aparecen en promedio 16 ordenes que tienen un valor de SMA igual a 3 en cada millón de aleatorizaciones del orden de experimentación.

1.6 Suma de cuadrados de los sesgos

La Figura 1.1 también evidencia una relación que se da entre los valores de los sesgos, consistente en que la suma de los cuadrados de estos es constante (ver la última fila de las Tablas 1.6 y 1.7) y función de los valores de la tendencia, por lo cual al crecer el valor de uno de estos sesgos se debe reducir el valor de al menos uno de los restantes. Si consideramos a $\hat{\beta}$ como el vector que contiene las estimaciones de la media y los efectos, esto es

$$\hat{\beta}' = \left(\bar{Y}, {}^{A}\!/_{2}, {}^{B}\!/_{2}, {}^{AB}\!/_{2}, \ldots, {}^{ABC}\!/_{2}\right)$$

entonces la suma de cuadrados de los efectos (sesgos) estará dada por la expresión:

$$\sum_{i=1}^{n} sesgo^2 = 4\left(\hat{\beta}'\hat{\beta} - \bar{Y}^2\right); \qquad (1.1)$$

como

$$\hat{\beta} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'Y} \qquad \Rightarrow$$

$$\hat{\beta}'\hat{\beta} = \boldsymbol{Y'X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'Y},$$

y al ser la matriz de diseño $\boldsymbol{X}$ ortogonal se cumple que

$$(\boldsymbol{X'X})^{-1} = \frac{1}{n}\boldsymbol{I} \qquad y \qquad \boldsymbol{XX'} = n\boldsymbol{I}\,, \tag{1.2}$$

por lo tanto

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}'\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{Y'X}(\frac{1}{n^2}\boldsymbol{I})\boldsymbol{X'Y} = \frac{1}{n^2}\boldsymbol{Y'XX'Y} = \frac{1}{n}\boldsymbol{Y'Y}\cdot$$

De aquí se puede concluir que:

$$\sum_{i=1}^{n} sesgo^2 = 4\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \overline{Y}^2\right) = 4\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Y'Y} - \overline{Y}^2\right) = 4\left(\frac{\sum y_i^2}{n} - \overline{Y}^2\right)\cdot$$

Una forma alternativa es:

$$\sum_{i=1}^{n} sesgo^2 = 4\frac{(n-1)}{n}S_Y^2\cdot \tag{1.3}$$

La propiedad (1.3) es válida para todas las matrices de diseño (cualquier orden de experimentación), por tal razón la suma de cuadrados de los sesgos es función únicamente de los valores de la tendencia. Por ejemplo si Y toma los valores que hemos asumido: 1, 2, . . . , 16,

$$\sum_{i=1}^{n} sesgo^2 = \frac{4\cdot 15}{16}22.6667 = 84.9999\cdot$$

1.7 Número de cambios de nivel en los factores

Uno de los aspectos que dificultan y encarecen la ejecución de un diseño factorial es el número de cambios que es necesario realizar en los valores de los factores, especialmente para aquellos que entrañan una dificultad especial, ya sea por exigir un gran esfuerzo (cambio de molde, ...), por ser necesario esperar un cierto tiempo (temperatura del horno, ...), o por otras razones (limpieza del reactor, ...).

Evidentemente, el número de cambios depende del resultado de la aleatorización. En la Tabla 1.9 se tienen 2 órdenes de ejecución posibles al aleatorizar un diseño 2^4. El primer resultado exige realizar 42 cambios de nivel, mientras que el segundo sólo precisa 15.

Tabla 1.9 Orden de ejecución con (a) 42 cambios de nivel y (b) 15 cambios de nivel.

a)

Orden	A	B	C	D
8	+	+	+	-
2	+	-	-	-
15	-	+	+	+
1	-	-	-	-
4	+	+	-	-
14	+	-	+	+
3	-	+	-	-
12	+	+	-	+
6	+	-	+	-
11	-	+	-	+
10	+	-	-	+
7	-	+	+	-
9	-	-	-	+
13	-	-	+	+
16	+	+	+	+
5	-	-	+	-
Número de cambios	9	13	10	10

b)

Orden	A	B	C	D
4	+	+	-	-
2	+	-	-	-
1	-	-	-	-
5	-	-	+	-
13	-	-	+	+
9	-	-	-	+
11	-	+	-	+
3	-	+	-	-
7	-	+	+	-
15	-	+	+	+
16	+	+	+	+
8	+	+	+	-
6	+	-	+	-
14	+	-	+	+
10	+	-	-	+
12	+	+	-	+
Número de cambios	2	4	4	5

Parece, por tanto, razonable elegir órdenes que cumpliendo con los requisitos anteriormente establecidos en cuanto al sesgo, impongan también el mínimo número de cambios.

1.7.1 Número de cambios en un diseño completo

El mínimo número de cambios en un diseño 2^k es 2^k-1, y ésto sucede cuando en la matriz de diseño sólo se produce un cambio al pasar de una fila a la siguiente, como ocurre en el ejemplo de la Tabla 1.9b. Evidentemente, no puede haber menos de 2^k-1 cambios, ya que en este caso habría al menos 2 filas idénticas. Se puede demostrar que el número esperado de cambios de nivel para un diseño factorial 2^k efectuado en un orden completamente aleatorizado es $k2^{k-1}$. Para un diseño 2^4 el número de cambios de nivel esperado es de 32 y el mínimo de 15.

1.7.2 Número de cambios en diseños saturados

Consideremos el caso de un diseño 2^{7-4}. Si al pasar de una fila a la siguiente en la matriz completa formada por los 3 primeros factores, se tiene solamente un cambio de signo al pasar de una fila a la siguiente, en el resto de columnas se producirán otros 3 cambios de signo, en aquellas columnas generadas con una interacción en la que aparece el factor que ha cambiado de signo en la matriz completa. Por ejemplo, en la Tabla 1.10 al pasar de la fila 1 a la 2, hay un solo cambio en la matriz completa que corresponde al factor A, lo cual implica cambios en las columnas D (=AB), E (=AC) y G (=ABC).

Si en la matriz completa se tienen 2 cambios de signo al pasar de una fila a la siguiente, en el resto de columnas se tendrán cambios en aquellos factores generados con interacciones en que aparezca alguno de los que han cambiado en la matriz completa, pero no los 2 a la vez. Por ejemplo, al pasar de las filas 6 a 7 en la Tabla 1.10, como los cambios en la matriz completa se han producido en A y B, se tendrán cambios también en las columnas E (=AC) y F (=BC), es decir, aparecerán 2 cambios más, pero no habrá cambios en las columnas D (=AB) y G (=ABC). Si se tienen 3 cambios de signo en la matriz completa, sólo se tendrá cambio en el factor confundido con la interacción ABC.

Tabla 1.10 Diseño saturado 2^{7-4}.

Orden	A	B	C	D = AB	E = AC	F = BC	G = ABC	Total cambios
1	-	-	-	+	+	+	-	
2	+	-	-	-	-	+	+	4
3	-	+	-	-	+	-	+	4
4	+	+	-	+	-	-	-	4
5	-	-	+	+	-	-	+	4
6	+	-	+	-	+	-	-	4
7	-	+	+	-	-	+	-	4
8	+	+	+	+	+	+	+	4

Por tanto, en el diseño 2^{7-4} se producen siempre 4 cambios de signo al pasar de una fila a la siguiente. Es fácil comprobar que si se trata de un diseño saturado 2^{15-11} el número de cambios por fila siempre es 8. En general, el número de cambios de signo al cambiar de fila en un diseño saturado 2^{k-p} es 2^{k-p-1}, no importando el orden de experimentación escogido y, por tanto, el número total de cambios es siempre $2^{k-p-1}(2^{k-p}-1)$.

1.7.3 Número de cambios en diseños intermedios

Para plantear la matriz de un diseño intermedio (ni completo ni saturado) empezaremos escribiendo la matriz completa con el mínimo número de cambios, tal como se indica en la Tabla 1.11 para un diseño con 8 experimentos. Sean NC(X) y NC(Y) el número de cambios correspondientes a los factores X e Y acomodados en la matriz completa. Si XY es la interacción formada por estos 2 factores, el número de cambios en la columna de esta interacción será: NC(XY) = NC(X) + NC(Y).

Efectivamente, los cambios de signo al pasar de una fila a la siguiente en la columna X producen también un cambio en la columna XY, que no puede ser compensado por un cambio en la columna Y, ya que en la matriz completa se tiene un solo cambio al pasar de una fila a la siguiente. Esta propiedad es válida para cualquier matriz completa con mínimo número de cambios. Un aspecto práctico adicional, que se puede extraer de esta propiedad, es el denotar como factores que constituyen la matriz completa a aquellos para los cuales tenemos problemas para cambiar sus niveles durante la fase de experimentación, ya que los otros factores asociados a las interacciones siempre tendrán un número de cambios mayor.

Tabla 1.11 Tabla con 8 experimentos a partir de la matriz completa con el mínimo número de cambios.

Fila	Orden	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	NC
1	8	+	+	+	+	+	+	+	
2	4	+	+	-	+	-	-	-	4
3	2	+	-	-	-	-	+	+	4
4	1	-	-	-	+	+	+	-	4
5	3	-	+	-	-	+	-	+	4
6	7	-	+	+	-	-	+	-	4
7	5	-	-	+	+	-	-	+	4
8	6	+	-	+	-	+	-	-	4
NC		2	3	2	5	4	5	7	28
		7			14			7	

Asimismo, la Tabla 1.12 contiene la matriz completa de un diseño 2^4 con mínimo número de cambios y con las columnas de las interacciones correspondientes, lo cual permite identificar el número de cambios que se tendrá en cualquier diseño fraccionado con 16 experimentos, siguiendo la metodología comentada y el orden presentado.

Tabla 1.12 Matriz de un diseño completo 2^4 con mínimo número de cambios junto con todas las columnas correspondientes a sus interacciones.

Fila	Or	A	B	C	D	AB	AC	AD	BC	BD	CD	ABC	ABD	ACD	BCD	ABCD	NC
1	1	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+	
2	2	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	8
3	10	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+	8
4	14	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-	8
5	16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	8
6	15	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	-	8
7	11	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	8
8	12	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	-	-	-	8
9	4	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	+	8
10	3	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	8
11	7	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+	8
12	8	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-	8
13	6	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	+	+	8
14	5	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	8
15	13	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	8
16	9	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-	8
NC		6	2	4	3	8	10	9	6	5	7	12	11	13	9	15	120
		15				45						45				15	

1.8 Propuesta de ordenaciones

Es bien conocido (ver, por ejemplo, Anderson and McLean (1974) and Box and Jones (1992)) que el uso de la aleatorización restringida para minimizar el número de cambios de nivel puede provocar diferencias en la varianza de los efectos. Cuando la dificultad de cambio afecta solamente a uno de los factores, y la protección contra la tendencia producida por factores desconocidos no parece necesaria, la mejor opción es efectuar un diseño en parcelas divididas (split-plot). Es de notar que de existir una tendencia lineal por factores desconocidos el sesgo máximo afectará al factor que define la parcela total.

Cuando hay dos o más factores sujetos a restricción en la aleatorización se puede usar un *split-split-plot* o un *split-split… plot*, de nuevo haciendo caso omiso de la posible influencia de factores desconocidos y pagando el precio de un análisis más complejo. Recientemente se ha demostrado, ver Ju y Lucas (2002), que cuando no se reajustan todos los factores después de cada ejecución (un supuesto básico inherente a los diseños completamente aleatorizados, que raramente se cumple), estos diseños *split-split-plot* no presentan ventajas a la alternativa simple de conducir el experimento con un orden de aleatorización restringido y analizarlo como si proviniera de un orden completamente aleatorizado.

Parece razonable plantearse cuáles son las ordenaciones que presentan un valor mínimo del sesgo máximo en la estimación de los efectos, y que a la vez precisen un reducido número de cambios de nivel en todos o en un grupo selecto de factores. En las secciones siguientes se proponen órdenes que satisfacen estos requisitos para diseños factoriales completos o fraccionados con 8 o 16 experimentos.

1.8.1 Diseños con 8 experimentos

Analizando exhaustivamente todas las ordenaciones posibles se han encontrado las únicas 48 que presentan un valor mínimo del sesgo máximo (SMA=2) y el mínimo número de cambios en los factores A, B y C. Estas ordenaciones son las que figuran en la Tabla 1.15. Por tanto, para plantear un diseño 2^3 completo, bastará con elegir una ordenación dada por cualquiera de las columnas que aparecen en la tabla para tener el valor mínimo de SMA y, a la vez, el mínimo número de cambios en los factores. Igual ocurre con los diseños fraccionados en cuanto al SMA, pero el número de cambios dependerá de los generadores elegidos. Así, para plantear un diseño 2^{6-3} si se eligen los generadores que aparecen en el texto de Box, Hunter y Hunter (1978): D=AB, E=AC y F=BC, el número de cambios será el que se indica en la Tabla 1.13.

Tabla 1.13 Número de cambios en un diseño 2^{6-3} tomando la ordenación de la primera columna de la Tabla 1.15 y los generadores que se indican.

Factor	Núm. de cambios
A	2
B	2
C	3
D (=AB)	4 (=2+2)
E (=AC)	5 (=2+3)
F (=BC)	5 (=2+3)

1.8.2 Diseños con 16 experimentos

Utilizando el algoritmo que plantea Dikinson (1974) se han obtenido las 238 ordenaciones semilla que generan todas las ordenaciones posibles que contienen sólo 15 cambios. De estas ordenaciones ninguna produce el mínimo valor de SMA. El mínimo valor que se obtiene es SMA=4, y en la Tabla 1.16 se presentan las únicas 16 ordenaciones semilla con estas características. Para generar con estas mismas propiedades otros órdenes de experimentación, distintos a los presentados, a partir de una columna de las que aparece en la tabla, basta con escribir la matriz de diseño completo que tiene asociada y realizar cualquier permutación en el orden de las columnas y/o multiplicar cualquiera de ellas por –1. Por ejemplo, la segunda columna de la tabla tiene el orden 1, 2, 4, 3, 11, 12, 16, 15, 7, 8, 6, 5, 13, 14, 10, 9 del cual se muestra la matriz de diseño asociada en la primera parte de la Tabla 1.14; en la segunda parte se permutaron las columnas 1 y 3 y se cambió los signos de la columna 4, al identificar cada fila resultante se obtiene el orden 9, 13, 15, 11, 3, 7, 8, 11, 12, 16, 14, 10, 2, 6, 5, 1, que cuenta con las mismas propiedades.

Tabla 1.14 Matriz de diseño para el orden 1,2,4,3,11,12,16,15,7,8,6,5,13,14,10,9 y matriz resultante al permutar la columna 1 y 3 y cambiar los signos de la columna 4.

Fila	Orden	A	B	C	D
1	1	-	-	-	-
2	2	+	-	-	-
3	4	+	+	-	-
4	3	-	+	-	-
5	11	-	+	-	+
6	12	+	+	-	+
7	16	+	+	+	+
8	15	-	+	+	+
9	7	-	+	+	-
10	8	+	+	+	-
11	6	+	-	+	-
12	5	-	-	+	-
13	13	-	-	+	+
14	14	+	-	+	+
15	10	+	-	-	+
16	9	-	-	-	+
NC		8	2	2	3
		15			

Fila	Orden	A	B	C	D
1	9	-	-	-	+
2	13	-	-	+	+
3	15	-	+	+	+
4	11	-	+	-	+
5	3	-	+	-	-
6	7	-	+	+	-
7	8	+	+	+	-
8	4	+	+	-	-
9	12	+	+	-	+
10	16	+	+	+	+
11	14	+	-	+	+
12	10	+	-	-	+
13	2	+	-	-	-
14	6	+	-	+	-
15	5	-	-	+	-
16	1	-	-	-	-
NC		2	2	8	3
		15			

Al igual que en el caso con 8 experimentos, las ordenaciones propuestas en la Tabla 1.16 incluyen el número de cambios que corresponde a cada factor para poder determinar el número de cambios en los diseños fraccionados. Estas ordenaciones se pueden adecuar al nivel de complejidad que se tiene para cambiar de nivel los diferentes factores; así por ejemplo, si sólo un factor presenta dificultades para cambiarlo de nivel se puede escoger la tercera ordenación, que tiene los números de cambio 4, 2, 4 y 5 para los factores A, B, C y D respectivamente, de esta manera denotaríamos como B al factor problema, y si para tres de los factores queremos un mínimo de cambios, podemos optar por la segunda ordenación, la cual produce 8, 2, 2 y 3 cambios.

Se puede aprovechar también estas características al determinar el número de cambios en los diseños fraccionados; por ejemplo, para el diseño 2_{IV}^{6-2} y con E = ABC y F = BCD resulta preferible escoger la segunda ordenación que la tercera. Con la tercera ordenación tenemos NC(E) = NC(ABC) = NC(A) + NC(B) + NC(C) = 10 y, análogamente, NC(F) = NC(BCD) = 11, dando un total de cambios de 36 (15 + 10 + 11), en tanto que en con la segunda ordenación los valores son NC(ABC) = 12 y NC(BCD) = 7 y un total de 34 cambios.

Tabla 1.15 Únicos 48 órdenes para diseños 2^{k-p}, con 8 experimentos, que presentan el valor mínimo para el sesgo máximo (SMA=2) y mínimo número de cambios en los niveles de los factores en la matriz completa. Las filas A, B y C indican el número de cambios para cada factor.

	1	5	1	1	6	6	1	7	8	4	4	8	1	5	1	7	7	8	4	3	5	3	4	6
	2	7	2	5	2	8	5	8	7	2	8	7	3	6	3	8	3	6	3	7	7	7	2	2
	6	3	4	7	4	4	6	6	3	6	6	5	7	2	4	4	4	2	7	5	8	8	1	1
	8	4	8	8	3	3	8	2	1	5	5	1	8	4	8	2	2	1	5	6	4	6	5	3
	4	8	6	6	1	7	7	4	5	1	7	3	4	8	7	6	1	5	1	8	3	5	6	4
	3	6	5	2	5	5	3	3	6	3	3	4	2	7	5	5	5	7	2	4	1	1	8	8
	7	2	7	4	7	1	4	1	2	7	1	2	6	3	6	1	6	3	6	2	2	2	7	7
	5	1	3	3	8	2	2	5	4	8	2	6	5	1	2	3	8	4	8	1	6	4	3	5
A	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	2	3	3	3	3
B	2	2	3	3	3	2	2	3	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
C	3	3	2	2	2	3	2	2	3	3	2	2	3	3	2	3	2	3	3	2	2	2	2	2
Total	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

	2	2	5	5	2	6	2	8	7	2	2	6	6	4	4	7	7	3	3	5	3	3	8	8
	1	1	1	6	6	5	4	4	5	4	6	5	8	3	8	5	3	1	1	1	4	4	6	4
	3	5	3	8	8	7	3	3	6	8	5	1	7	1	7	1	1	2	5	2	2	8	5	2
	7	7	4	4	7	3	7	1	2	7	7	3	3	5	5	2	2	6	6	4	6	6	1	1
	5	3	2	2	5	1	8	2	1	3	8	7	4	7	6	6	4	5	2	3	8	2	2	3
	6	4	6	1	1	2	6	6	3	1	4	8	2	8	2	8	8	7	4	7	7	1	4	7
	8	8	8	3	3	4	5	5	4	5	3	4	1	6	1	4	6	8	8	8	5	5	3	5
	4	6	7	7	4	8	1	7	8	6	1	2	5	2	3	3	5	4	7	6	1	7	7	6
A	2	2	2	2	2	2	3	3	3	2	3	2	3	2	3	2	2	3	2	3	2	2	3	2
B	3	2	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	3	2	2	3
C	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	2	3	2	2	3	2	2	3	2	2
Total	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

Tabla 1.16 Únicos órdenes semilla para diseños 2^{k-p}, con 16 experimentos, que producen el mínimo número de cambios en los niveles de los factores en la matriz completa y un valor de SMA=4 (el mínimo posible con el mínimo número de cambios). Las filas A, B, C y D indican el número de cambios para cada factor.

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	10	10	10	10	10	10
	3	3	3	8	8	12	12	12	12	12	12	12	14	14	14	14
	11	11	11	16	16	11	11	11	11	16	4	4	16	16	16	16
	12	12	15	12	15	3	3	3	3	8	3	3	12	12	15	15
	16	16	7	11	7	7	7	7	7	7	7	7	4	11	7	11
	8	15	8	3	3	5	8	15	15	3	5	8	3	15	3	12
	7	7	16	7	11	13	16	13	16	11	13	16	11	7	11	4
	15	8	12	15	12	15	15	5	8	15	14	14	15	3	12	3
	13	6	10	13	10	16	13	6	6	13	6	6	7	4	4	7
	5	5	14	5	14	8	5	8	5	5	8	5	8	8	8	8
	6	13	6	6	6	6	6	16	13	6	16	13	6	6	6	6
	14	14	5	14	5	14	14	14	14	14	15	15	5	5	5	5
	10	10	13	10	13	10	10	10	10	10	11	11	13	13	13	13
	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
A	6	8	4	4	4	4	6	4	6	4	4	4	4	4	4	6
B	2	2	2	2	2	4	2	4	2	2	4	4	2	2	2	2
C	2	2	4	4	4	2	2	2	2	4	2	2	4	6	4	4
D	5	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	3	5	3
Total	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15

1.8.3 Uso de las tablas 1.15 y 1.16

Para ejemplificar el uso de la Tabla 1.15 en un diseño 2^{4-1} con D = ABC, se selecciona inicialmente al azar un número del 1 al 48; sea este el 8, en la columna correspondiente de la tabla tenemos el orden 7, 8, 6, 2, 4, 3, 1, 5, que nos indica que los niveles de los factores de nuestro primer experimento a realizar están dados por la fila 7 de la matriz de diseño en orden estándar, el segundo por la fila 8, el tercero por la 6 y así sucesivamente hasta la fila 5. Si se ordena con la secuencia anterior las filas de la matriz de diseño en orden estándar se obtiene la matriz de diseño de la Tabla 1.17 en donde se comprueba los números de cambios que presenta la Tabla 1.15 para este orden, así como la propiedad NC(ABC) = NC(A) + NC(B) +NC(C).

Tabla 1.17 Matriz de diseño construida a partir del orden 7, 8, 6, 2, 4, 3, 1, 5.

Orden de experimentación	A	B	C	D = ABC
1	-1	1	1	-1
2	1	1	1	1
3	1	-1	1	-1
4	1	-1	-1	1
5	1	1	-1	-1
6	-1	1	-1	1
7	-1	-1	-1	-1
8	-1	-1	1	1
Número de cambios	2	3	2	7

Con la Tabla 1.16 se puede proceder de dos maneras en la selección del orden, ya sea determinándolo al azar o escogiendo uno que tenga un número de cambios de nivel adecuado a nuestras condiciones experimentales. En el primer caso se procede de forma análoga a lo realizado en el ejemplo anterior, en el segundo se escoge el mejor orden y a partir de él se construye la matriz de diseño.

Como los órdenes de la Tabla 1.16 son órdenes semilla, a partir de ellos se puede generar un gran número de matrices de diseño que preservan el mínimo número de cambios de nivel y un SMA de 4. Esto se logra permutando y cambiando de signo subconjuntos de columnas de la matriz de diseño.

Como ejemplo, supongamos que se va a llevar a cabo un factorial fraccionado 2^{5-1} y que el cambiar del nivel bajo al nivel alto (o del alto al bajo) es muy laborioso para dos de los factores (T,U), relativamente simple para otro (V) y muy simple para los dos restantes (W,Z); con estas características conviene seleccionar el segundo orden de la tabla (1, 2, 4, 3, 11, 12, 16, 15, 7, 8, 6, 5, 13, 14, 10, 9) debido a que tiene asociado dos cambios de nivel con valor 2 (para B y C) y uno con valor 3 (para D). De esta manera renombramos los factores, T y U como B y C, a V como D, y a W y Z como A y E, posteriormente procedemos a construir la matriz de diseño (Tabla 1.18).

Tabla 1.18 Matriz de diseño construida a partir del orden 1, 2, 4, 3, 11, 12, 16, 15, 7, 8, 6, 5, 13, 14, 10, 9.

Orden de experimentación	A(W)	B(T)	C(U)	D(V)
1	-1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1	-1
3	1	1	-1	-1
4	-1	1	-1	-1
5	-1	1	-1	1
6	1	1	-1	1
7	1	1	1	1
8	-1	1	1	1
9	-1	1	1	-1
10	1	1	1	-1
11	1	-1	1	-1
12	-1	-1	1	-1
13	-1	-1	1	1
14	1	-1	1	1
15	1	-1	-1	1
16	-1	-1	-1	1
No. de cambios	8	2	2	3

Para seleccionar las columnas que serán permutadas se escoge al azar la permutación 5 de la Tabla 1.19 y se procede a cambiar las columnas, como se muestra en la Tabla 1.20.

Tabla 1.19 Permutaciones.

Número	Permutación	Número	Permutación	Número	Permutación	Número	Permutación
1	ABCD	7	BACD	13	CBAD	19	DBCA
2	ABDC	8	BADC	14	CBDA	20	DBAC
3	ACBD	9	BCAD	15	CABD	21	DCBA
4	ACDB	10	BCDA	16	CADB	22	DCAB
5	ADBC	11	BDAC	17	CDBA	23	DABC
6	ADCB	12	BDCA	18	CDAB	24	DACB

Tabla 1.20 Matriz de diseño con las columnas permutadas.

Orden de experimentación	A(W)	D(V)	B(T)	C(U)
1	-1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1	-1
3	1	-1	1	-1
4	-1	-1	1	-1
5	-1	1	1	-1
6	1	1	1	-1
7	1	1	1	1
8	-1	1	1	1
9	-1	-1	1	1
10	1	-1	1	1
11	1	-1	-1	1
12	-1	-1	-1	1
13	-1	1	-1	1
14	1	1	-1	1
15	1	1	-1	-1
16	-1	1	-1	-1
No. de cambios	8	3	2	2

De la Tabla 1.21 se selecciona también al azar la fila 11 y se multiplica por –1 la primera y tercera columna de la matriz anterior. Por último se construye la columna asociada al factor E con base en la relación de confusión E = ABCD. Note que la matriz de diseño así obtenida, Tabla 1.22, corresponde a usar el orden 6, 5, 1, 2, 4, 3, 11, 12, 10, 9, 13, 14, 16, 15, 7, 8, de la matriz estándar, el cual no aparece en la Tabla 1.16 por ser uno de los que se generan a partir del orden semilla seleccionado.

Tabla 1.21 Tabla de signos.

	Columnas				
Número	I	II	III	IV	V
1	-1	-1	-1	-1	1
2	1	-1	-1	-1	-1
3	-1	1	-1	-1	-1
4	1	1	-1	-1	1
5	-1	-1	1	-1	-1
6	1	-1	1	-1	1
7	-1	1	1	-1	1
8	1	1	1	-1	-1
9	-1	-1	-1	1	-1
10	1	-1	-1	1	1
11	-1	1	-1	1	1
12	1	1	-1	1	-1
13	-1	-1	1	1	1
14	1	-1	1	1	-1
15	-1	1	1	1	-1
16	1	1	1	1	1

Tabla 1.22 Matriz de diseño resultante al permutar columnas y cambiar signos.

Orden de experimentación	A(W)	D(V)	B(T)	C(U)	E(Z)
1	1	-1	1	-1	1
2	-1	-1	1	-1	-1
3	-1	-1	-1	-1	1
4	1	-1	-1	-1	-1
5	1	1	-1	-1	1
6	-1	1	-1	-1	-1
7	-1	1	-1	1	1
8	1	1	-1	1	-1
9	1	-1	-1	1	1
10	-1	-1	-1	1	-1
11	-1	-1	1	1	1
12	1	-1	1	1	-1
13	1	1	1	1	1
14	-1	1	1	1	-1
15	-1	1	1	-1	1
16	1	1	1	-1	-1
No. de cambios	8	3	2	2	15

1.9 Conclusiones

Con la consideración de que los factores desconocidos afectan la respuesta en forma lineal (de hecho las conclusiones son válidas para el caso más general de una influencia monótona), se demostró que no todos los órdenes aleatorios de ejecución dan una protección adecuada del sesgo en los efectos estimados. Estos sesgos tienen un comportamiento específico, siendo muy poco probable el tener un orden de ejecución seleccionado al azar que disperse homogéneamente esta influencia entre todos los efectos, razón de ser de la aleatorización del orden de ejecución.

Existen órdenes aleatorios de ejecución que demandan un gran número de cambios de nivel en los factores. Uno de los aspectos que dificultan y encarecen la ejecución de un diseño factorial es precisamente el número de cambios que es necesario realizar en los valores de los factores.

De los 40320 órdenes aleatorios de ejecución de un diseños 2^{k-p}, con 8 experimentos, solamente existen 48 que ostentan al mismo tiempo el valor mínimo para el sesgo máximo (SMA=2) y el mínimo número de cambios en los niveles de los factores en la matriz completa.

Hay 16 órdenes semilla para diseños 2^{k-p}, con 16 experimentos, que producen el mínimo número de cambios en los niveles de los factores en la matriz completa y un valor de SMA=4 (el mínimo posible con el mínimo número de cambios). Cada orden semilla engendra 384 órdenes distintos, así que de los 20 922 789 888 000 (16!) órdenes aleatorios unicamente una ínfima parte tiene ambas propiedades.

Los órdenes de experimentación aquí sugeridos pueden incorporarse fácilmente en paquetes estadísticos ordinarios como opción a la aleatorización completa, y dar así al usuario una protección máxima contra el sesgo de efectos lineales desconocidos y con el mínimo número de cambios de nivel en los factores seleccionados.

1.10 Aportaciones

- Se han construido dos tablas que contienen órdenes de ejecución para los diseños 2^{k-p} con 8 y 16 experimentos respectivamente. Estos órdenes ofrecen al mismo tiempo el mínimo número de cambios de nivel de los factores y un mínimo valor del sesgo máximo inducido en la estimación de los efectos en presencia de una tendencia lineal. Cada orden tiene el número de cambios de nivel por factor, lo cual permite, entre otros, asignar las variables con problemas de cambio de nivel a los factores con menos cambios.

- Se ha deducido una relación simple para evaluar el número de cambios de nivel en cualquier diseño factorial fraccionado a partir de los cambios de nivel por factor proporcionados en las tablas.

- Se ha encontrado una expresión para el número de cambios de nivel en un diseño factorial fraccionado saturado.