3. DISPERSIÓN DE PARTíCULAS NEUTRAS

3.1. Difusión turbulenta

Una de las características más importantes de los flujos turbulentos es su carácter altamente difusivo. Pero el estudio de la difusión turbulenta tiene la dificultad de que, mientras que el flujo turbulento es estudiado normalmente desde un punto de vista Euleriano, la difusión ha de ser tratada desde el Lagrangiano, ya que involucra transporte de partículas de fluido[1].

El artículo de Richardson (1926) es considerado como el trabajo pionero en este campo. Richardson encuentra mediante medidas experimentales en la atmósfera y el océano que la separación relativa entre partículas fluidas crece en el tiempo mediante una ley cúbica. Esta ley puede ser deducida de forma sencilla a partir de la teoría de Kolmogorov, aunque es anterior a la misma.

En el presente capítulo se van a presentar definiciones y resultados en referencia a la dispersión de partículas, tanto absoluta como relativa. Se deducirán expresiones analíticas para ambas dispersiones tanto para el comportamiento asintótico, para tiempos límite muy grandes y muy pequeños, como para tiempos intermedios.

3.2. Dispersión absoluta de partículas

3.2.1. Definiciones

Dada una partícula de fluido α, su velocidad, $\vec{v}_\alpha$, es la velocidad euleriana del campo en cada instante en la posición en la que se encuentra la partícula,

$$\vec{v}_\alpha(t) = \vec{v}(\vec{x} = \vec{X}_\alpha, t), \tag{3.1}$$

[1] En general, esto no es cierto. La difusión no tiene por qué estar relacionada con el movimiento de partículas de fluido, y puede producirse también a nivel molecular; pero en este capítulo vamos a considerar únicamente el caso de difusión asociada al movimiento de partículas.

y su posición en cada instante viene determinada por

$$\vec{X}_\alpha(t) = \vec{X}_\alpha(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(\vec{X}_\alpha(t'), t')\mathrm{d}t'. \tag{3.2}$$

Se define la *dispersión absoluta* de un grupo de partículas como el promedio sobre todas ellas de la distancia recorrida,

$$A^2(t; t_0) = \left\langle \left(\vec{X}_\alpha(t) - \vec{X}_\alpha(t_0)\right)^2 \right\rangle = \left\langle \left\{ \int_{t_0}^{t} \vec{v}(\vec{X}_\alpha(t'), t')\mathrm{d}t' \right\} \cdot \left\{ \int_{t_0}^{t} \vec{v}(\vec{X}_\alpha(t''), t'')\mathrm{d}t'' \right\} \right\rangle. \tag{3.3}$$

El *coeficiente de dispersión absoluta* se define como

$$K_a(t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^2(t) \tag{3.4}$$

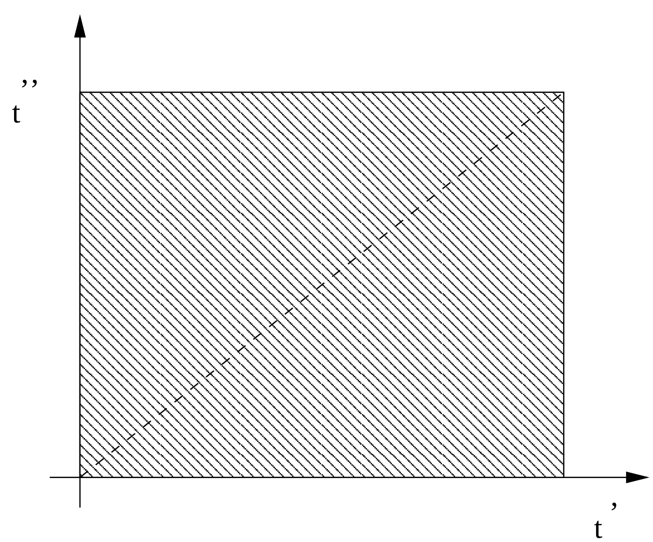

Fig. 3.1: Dominio de integración de la integral de (3.5).

3.2.2. Expresiones analíticas para la dispersión absoluta

Si la turbulencia es estadísticamente estacionaria, la dispersión absoluta no dependerá del tiempo inicial t_0, sino del intervalo $t - t_0$, y se puede considerar, sin pérdida de

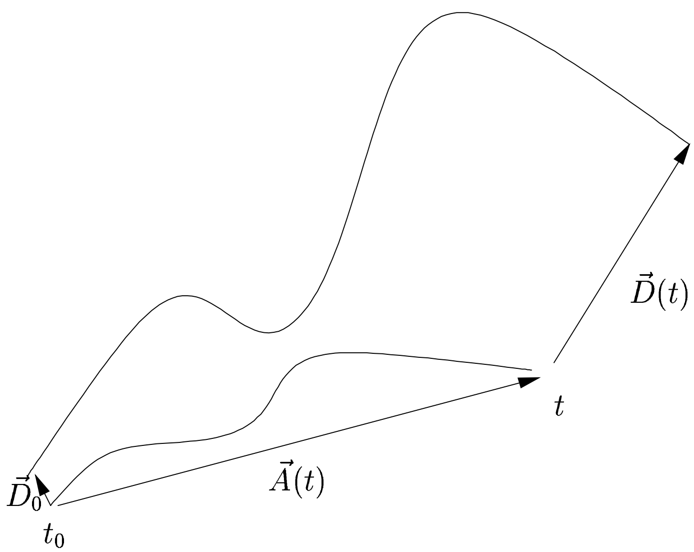

Fig. 3.2: Dispersión absoluta de un partícula, $\vec{A}(t)$ y dispersión relativa de un par de partículas, $\vec{D}(t)$.

generalidad, que $t_0 = 0$, de forma que (3.3) se reescribe, agrupando términos, como

$$A^2(t) = \left\langle \int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^t \mathrm{d}t'' \vec{v}_\alpha(t') \cdot \vec{v}_\alpha(t'') \right\rangle = \int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^t \mathrm{d}t'' \left\langle \vec{v}_\alpha(t') \cdot \vec{v}_\alpha(t'') \right\rangle, \tag{3.5}$$

donde, para simplificar la notación, se escribe $v_\alpha(t) = v(\vec{x} = \vec{X}_\alpha, t)$. Esta expresión se puede simplificar un poco con ayuda de la figura 3.1, donde se esquematiza el dominio de la doble integral de (3.5). Esta integral se puede escribir como el doble de la integral sobre el dominio que hay por encima de la diagonal $t' = t''$,

$$A^2(t) = 2 \int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^{t'} \mathrm{d}\tau \left\langle \vec{v}_\alpha(t') \cdot \vec{v}_\alpha(t' - \tau) \right\rangle, \tag{3.6}$$

donde se ha hecho el cambio de variable $t'' = t' - \tau$.

El integrando de (3.6) puede relacionarse con la *correlación Lagrangiana temporal de velocidades*, en la linea de la definida en (2.65) desde un punto de vista Euleriano,

$$R_L(\tau) = \frac{\left\langle \vec{v}_\alpha(t) \cdot \vec{v}_\alpha(t + \tau) \right\rangle}{\left\langle \vec{v}_\alpha(t)^2 \right\rangle}, \tag{3.7}$$

donde los promedios se realizan sobre los tiempos t asumiendo estacionariedad estadística, de forma que

$$A^2(t) = 2\left\langle v_\alpha^2\right\rangle \int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^{t'} \mathrm{d}\tau R_L(\tau). \tag{3.8}$$

Esta integral doble puede ser expresada como una integral simple en τ integrando por partes la integral respecto de t',

$$\int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^{t'} \mathrm{d}\tau R_L(\tau) = \left[t' \int_0^{t'} \mathrm{d}\tau R_L(\tau)\right]_0^t - \int_0^t t' R_L(t')\mathrm{d}t' =$$
$$t\int_0^t \mathrm{d}\tau R_L(\tau) - \int_0^t \mathrm{d}\tau R_L(\tau) = \int_0^t \mathrm{d}\tau (t-\tau) R_L(\tau), \tag{3.9}$$

quedando la dispersión absoluta finalmente como

$$A^2(t) = 4E\int_0^t (t-\tau)R_L(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{3.10}$$

donde

$$E = \frac{1}{2}\left\langle v_\alpha^2\right\rangle \tag{3.11}$$

es la energía turbulenta Lagrangiana.

La ecuación (3.10) es exacta, pero desconocida, ya que no existe una expresión analítica para la correlación Lagrangiana de velocidades. Sin embargo, sí es conocido su comportamiento asintótico, que es análogo al de la correlación Euleriana,

$$R_L(\tau) \to 1 \qquad \text{cuando} \quad \tau \to 0 \tag{3.12a}$$
$$R_L(\tau) \to 0 \qquad \text{cuando} \quad \tau \to \infty. \tag{3.12b}$$

y que determina el comportamiento asintótico para la dispersión absoluta,

$$A^2(t) \quad = 2Et^2 \quad \text{para tiempos muy pequeños, y} \tag{3.13a}$$
$$A^2(t) \quad = 2ET_L t \quad \text{para tiempos muy largos,} \tag{3.13b}$$

donde

$$T_L = \int_0^\infty R_L(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.14}$$

es el *tiempo integral Lagrangiano.*

Se puede obtener una expresión mas precisa a partir del coeficiente de dispersión absoluta, definido en (3.4), y que se puede escribir como

$$K_a(t) = \left\langle \vec{X}_\alpha(t) \cdot \vec{v}_\alpha(t) \right\rangle = \int_0^\infty \langle \vec{v}_\alpha(\tau) \cdot \vec{v}_\alpha(t) \rangle \, \mathrm{d}\tau. \tag{3.15}$$

El integrando vuelve a ser la correlación temporal de velocidad Lagrangiana (3.7), salvando el factor de la energía E, que puede expresarse como[2]

$$\langle \vec{v}_\alpha(\tau) \cdot \vec{v}_\alpha(t) \rangle = 2E \left(1 - \frac{S_L(\tau)}{4E} \right), \tag{3.16}$$

donde $S_L(\tau)$ es la función de estructura temporal Lagrangiana de segundo orden,

$$S_L(\tau) = \left\langle \| \vec{v}_\alpha(t) - \vec{v}_\alpha(\tau) \|^2 \right\rangle. \tag{3.17}$$

En función de la función de estructura temporal Lagrangiana, el coeficiente de dispersión absoluta es

$$K_a(t) = 2E \int_0^t \left(1 - \frac{S_L(\tau)}{4E} \right) \mathrm{d}\tau. \tag{3.18}$$

Para turbulencia bidimensional, la función de estructura Lagrangiana sigue la ley

$$S_L(\tau) \sim Ct^2 \tag{3.19}$$

para tiempos pequeños (Babiano, 2000; Babiano et˜al., 1987a). La constante C puede ser aproximada para turbulencia estadísticamente estacionaria, como el promedio del gradiente de presiones,

$$C \approx \left\langle \| \nabla P \|^2 \right\rangle. \tag{3.20}$$

Por tanto, el comportamiento asintótico para tiempos cortos se obtiene substituyendo (3.19) en (3.18), e integrando,

$$K_a(t) \sim 2Et \left(1 - \frac{Ct^2}{12E} \right) \tag{3.21}$$

y la dispersión absoluta, de (3.4), es

$$A^2(t) \sim 2Et^2 \left(1 - \frac{Ct^2}{24E} \right) \tag{3.22}$$

[2] Nótese que no depende del tiempo de referencia t.

3.3. Dispersión relativa de pares de partículas

3.3.1. Definiciones

Consideramos un grupo de pares de partículas, todas separadas por una distancia D_0 en el instante $t = 0$. La velocidad relativa entre las dos componentes de un par cualquiera será

$$\vec{v}_r(t) = \vec{v}_\beta(t) - \vec{v}_\alpha(t) \tag{3.23}$$

y, por lo tanto, la separación entre partículas en un instante t vendrá dado por

$$\vec{D}_{\alpha\beta}(t) = \vec{x}_\beta(t) - \vec{x}_\alpha(t) = \vec{D}_0 + \int_0^t \vec{v}_r(t')\mathrm{d}t'. \tag{3.24}$$

Definimos entonces la *dispersión relativa* como

$$D^2(t) = \left\langle \vec{D}_{\alpha\beta}(t) \cdot \vec{D}_{\alpha\beta}(t) \right\rangle_{\alpha\beta}, \tag{3.25}$$

donde el promedio se realiza sobre todos los pares de partículas $\alpha\beta$; el *coeficiente de dispersión relativa* como

$$K(D_0, t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}D^2(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{3.26}$$

y la velocidad de separación como

$$v_s(t) = \frac{\mathrm{d}\sqrt{D^2(t) - D_0^2}}{\mathrm{d}t}. \tag{3.27}$$

3.3.2. La ley de Richardson y el movimiento Browniano

Desarrollamos la definición del coeficiente de dispersión, excluyendo los subíndices para mayor claridad,

$$\begin{aligned} K(D_0, t) &= \left\langle \vec{D}(D_0, t) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{D}(D_0, t)}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \left\langle \vec{D}(D_0, t) \cdot \vec{v}_r(D_0, t) \right\rangle \\ &= \left\langle \left[\vec{D}_0 + \int_0^t \vec{v}_r(t')\mathrm{d}t' \right] \cdot \vec{v}_r(D_0, t) \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{D}_0 \cdot \vec{v}_r(D_0, t) \right\rangle + \left\langle \left[\int_0^t \vec{v}_r(t')\mathrm{d}t' \right] \cdot \vec{v}_r(D_0, t) \right\rangle \end{aligned} \tag{3.28}$$

El primer término es nulo, ya que $\langle \vec{v}_r(D_0, t) \rangle = 0$ si la turbulencia es isótropa. Por lo tanto,

$$K(D_0,t)=\int_0^t \langle \vec{v}_r(D_0,t)\cdot\vec{v}_r(D_0,t-t')\rangle\,\mathrm{d}t' \tag{3.29}$$

A partir de esta expresión, podemos calcular la dispersión relativa integrando el coeficiente de dispersión,

$$\begin{aligned}\int_0^t K(D_0,t'')\mathrm{d}t'' = \frac{1}{2}\left[D^2(D_0,t)-D_0^2\right]\\ \Rightarrow D^2(D_0,t) &= D_0^2+2\int_0^t K(D_0,t'')\mathrm{d}t''\\ &= D_0^2+2\int_0^t dt''\int_0^{t''}\langle \vec{v}_r(D_0,t'')\cdot\vec{v}_r(D_0,t''-t')\rangle\,\mathrm{d}t' \end{aligned}\tag{3.30}$$

Para tiempos de dispersión muy pequeños, comparados con los tiempos característicos de la turbulencia, podemos suponer que la velocidad relativa entre partículas no ha variado,

$$\vec{v}_r(D_0,t)\approx\vec{v}_r(D_0,0) \tag{3.31}$$

y, entonces, las expresiones 3.30 y 3.29 se aproximan como

$$D^2(D_0,t)\approx D_0^2+\left\langle\vec{v}_r(D_0,0)^2\right\rangle t^2 \tag{3.32}$$

$$K(D_0,t)\approx\left\langle\vec{v}_r(D_0,0)^2\right\rangle^{\frac{1}{2}} t \tag{3.33}$$

Conviene notar que el factor $\langle\vec{v}_r(D_0,0)^2\rangle$ es la *función de estructura Euleriana de segundo orden.*

Podemos considerar ahora dos casos separados, cuando la separación inicial muy pequeña y cuando es muy grande.

En primer lugar, supongamos que $D_0<\eta$, donde η es la escala de disipación,

$$\eta=\left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{3.34}$$

en turbulencia tridimensional homogénea e isótropa (ver ecuación (2.81)), y

$$\eta=\left(\frac{\nu^3}{\beta}\right)^{\frac{1}{6}} \tag{3.35}$$

para turbulencia bidimensional (ver ecuación (2.88))

En este caso, y centrándonos únicamente en turbulencia tridimensional, la función de estructura de segundo orden solo puede depender de D_0, η, ν y ε. Mediante análisis dimensional obtenemos

$$\left\langle \vec{v}_r(D_0,0)^2 \right\rangle = f(D_0,\eta,\nu,\varepsilon) = (\nu\varepsilon)^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{D_0}{\eta}\right) \tag{3.36}$$

Si asumimos turbulencia isótropa, y recordando que nos encontramos en tiempos de dispersión muy pequeños, tenemos que

$$\vec{v}_r(D_0,0) \approx \left(\vec{D}_0 \cdot \nabla\right) \vec{v} \tag{3.37}$$

y, por lo tanto,

$$\left\langle \vec{v}_r(D_0,0)^2 \right\rangle \approx \left\langle \left[\left(\vec{D}_0 \cdot \nabla\right) \vec{v}\right]^2 \right\rangle = D_{0j} D_{0k} \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle \tag{3.38}$$

Dado que, de (2.59),

$$\left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{\nu}\delta_{jk} \tag{3.39}$$

para turbulencia isótropa, obtenemos

$$\left\langle \vec{v}_r(D_0,0)^2 \right\rangle = \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{\nu} D_0^2 \tag{3.40}$$

y, por lo tanto,

$$D^2(D_0,t) = D_0^2\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{\nu}t^2\right) \tag{3.41}$$

$$K(D_0,t) = \frac{1}{3} D_0^2 \frac{\varepsilon}{\nu} t \tag{3.42}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sqrt{D^2 - D_0^2}}{\mathrm{d}t} = \frac{D_0}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\nu}} \tag{3.43}$$

Si $D_0 \gg \eta$, en el subrango inercial de la turbulencia, ésta está definida únicamente por ε, de forma que, por análisis dimensional,

$$\langle \vec{v}_r(D_0,0) \rangle = C(D_0\varepsilon)^{\frac{2}{3}} \tag{3.44}$$

quedando

$$D^2 = D_0^2 + C(D_0\varepsilon)^{\frac{2}{3}}t^2 \quad \text{y} \tag{3.45}$$

$$K = C(D_0\varepsilon)^{\frac{2}{3}}t \tag{3.46}$$

El valor de la constante C ha sido calculado por Kraichnan (1966) obteniendo el valor de 2,32. Hinze (1975) obtiene teóricamente $C = 8{,}25$.

Supongamos ahora un tiempo de difusión muy grande, de forma que $D^2 \gg D_0^2$ y el efecto de la separación inicial D_0 puede ser menospreciado. Si la dispersión relativa sigue estando determinada por el subrango inercial, mediante análisis dimensional se obtiene

$$\langle \vec{v}_r(D_0, 0)\rangle = C\varepsilon t \tag{3.47}$$

y, por lo tanto,

$$D^2 = \frac{2}{3}C\varepsilon t^3 \tag{3.48}$$

$$K = C\varepsilon t^2 \tag{3.49}$$

Si eliminamos el tiempo de la expresiones (3.48) y (3.49) nos encontramos con

$$K(D) = \left(\frac{9}{4}C\varepsilon\right)^{\frac{1}{3}} D^{\frac{4}{3}} \tag{3.50}$$

que es la *ley de Richardson* para la dispersión relativa, establecida por Richardson (1926), a partir de observaciones en la atmósfera y el océano, mucho antes de la teoría estadística de la turbulencia de Kolmogorov y Obukhov.

Siguiendo a Fung and Vassilicos (1998), es posible deducir una expresión más generalizada para el caso de dispersión a escalas del orden del subrango inercial. Sea el espectro de energía de la forma

$$E(k) \sim k^{-n} \tag{3.51}$$

en el subrango inercial. Asumiendo que el valor de D^2 dependerá del tiempo t y del valor del espectro de energía para la escala $k \sim (D^2)^{-1/2}$,

$$D^2(t) = f(E(D), t) \sim E(D)^{\alpha}t^{\beta} \sim D^{\alpha n}t^{\beta}, \tag{3.52}$$

el análisis dimensional muestra que $\alpha = 2/3$ y $\beta = 4/3$, de forma que

$$D^2(t) \sim D^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{4}{3}}, \tag{3.53}$$

y operando los términos de potencias de D,

$$D^{\frac{6-2n}{3}} \sim t^{\frac{4}{3}}, \tag{3.54}$$

quedando finalmente, al aislar D^2,

$$D^2(t) \sim t^{\frac{4}{3-n}} \tag{3.55}$$

y, al derivar,

$$K(t) \sim t^{\frac{1+n}{3-n}}. \tag{3.56}$$

Esta ley es sólo válida para $n < 3$, dado que para valores mayores da una dispersión relativa decreciente en el tiempo. Para el caso del espectro de Kolmogorov, $n = 5/3$, recuperamos la ley de Richardson, $D^2 \sim t^3$.

Es importante remarcar que en la deducción de (3.55) tan sólo se ha usado la hipótesis de localidad de las interacciones en el proceso de dispersión. Es decir, se ha supuesto únicamente que la dispersión a una cierta escala depende del tiempo y del nivel de energía de la turbulencia *a esa escala.*

Para tiempos de difusión mucho más grandes, de forma que la escala de dispersión es mayor que las mayores escalas de la turbulencia, la dinámica de las partículas no esta controlada por el subrango inercial, y las velocidades están completamente decorrelacionadas. Entonces se puede demostrar que la dispersión relativa es el doble de la absoluta,

$$D^2(t) = \left\langle \vec{D}_{\alpha\beta}(t) \cdot \vec{D}_{\alpha\beta}(t) \right\rangle = \langle (\vec{x}_\beta - \vec{x}_\alpha) \cdot (\vec{x}_\beta - \vec{x}_\alpha) \rangle = 2 \left\langle \vec{x}(t)^2 \right\rangle \tag{3.57}$$

ya que $\langle \vec{x}_\alpha^2 \rangle \approx \left\langle \vec{x}_\beta^2 \right\rangle \approx \langle \vec{x}(t)^2 \rangle$ y $\langle \vec{x}_\alpha \cdot \vec{x}_\beta \rangle \approx 0$, y el coeficiente de dispersión relativa da

$$K(t) = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}D^2(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d} \langle \vec{x}(t)^2 \rangle}{\mathrm{d}t} = 2 \langle \vec{x} \cdot \vec{v} \rangle = 2 \int_0^t \left\langle u^2 \right\rangle R_L(\tau) \mathrm{d}\tau, \tag{3.58}$$

y, dado que t es muy grande, la integral de la correlación temporal es constante e igual al tiempo característico lagrangiano

$$K = 2\left\langle u^2\right\rangle T_L, \tag{3.59}$$

$$D^2 = 2Kt \tag{3.60}$$

y

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{K}{2}}t^{-\frac{1}{2}} \tag{3.61}$$

para $t \to \infty$.

3.3.3. Análisis cinemático de la dispersión relativa

Presentamos a continuación una linea diferente de razonamiento propuesta por Babiano et~al. (1990). A partir de la expresión (3.24), excluyendo los subíndices referentes a las partículas para mayor simplicidad, escribimos

$$\left(\vec{D}(t) - \vec{D}_0\right)^2 = \left(\int_0^t \vec{v}_r(t')\mathrm{d}t'\right)^2. \tag{3.62}$$

Derivando y multiplicando por el tiempo obtenemos

$$t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{D}(t) - \vec{D}_0\right)^2 = 2t\vec{v}_r(t)\int_0^t \vec{v}_r(t')\mathrm{d}t'. \tag{3.63}$$

Por otro lado, integramos por partes la integral del miembro de la derecha,

$$\int_0^t \vec{v}_r(t')\mathrm{d}t' = t\vec{v}_r(t) - \int_0^t t'\vec{a}_r(t')\mathrm{d}t'$$
$$\Rightarrow t\vec{v}_r(t) = \int_0^t \vec{v}_r(t')\mathrm{d}t' + \int_0^t t'\vec{a}_r(t')\mathrm{d}t', \tag{3.64}$$

donde $\vec{a}_r(t)$ es la aceleración relativa de separación entre pares de partículas, y substituimos en (3.63), quedando

$$t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{D}(t)-\vec{D}_0\right)^2-\left(\vec{D}(t)-\vec{D}_0\right)^2=t^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\left(\vec{D}(t)-\vec{D}_0\right)^2}{t}=(t\vec{v}_r(t))^2-\left(\int_0^t t'\vec{a}_r(t')\mathrm{d}t'\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\left(\vec{D}(t)-\vec{D}_0\right)^2}{t}=(\vec{v}_r(t))^2-\left(\frac{1}{t}\int_0^t t'\vec{a}_r(t')\mathrm{d}t'\right)^2 \qquad (3.65)$$

Si ahora integramos en el tiempo y promediamos para todos los pares de partículas, obtenemos

$$\left\langle\left(\vec{D}(t)-\vec{D}_0\right)^2\right\rangle=t\int_0^t F(t')\mathrm{d}t' \qquad (3.66)$$

con

$$F(t)=\langle(\vec{v}_r(t))^2\rangle-\left\langle\left(\frac{1}{t}\int_0^t t'\vec{a}_r(t')\mathrm{d}t'\right)^2\right\rangle \qquad (3.67)$$

Considerando turbulencia homogénea, de forma que

$$\left\langle\left(\vec{D}(t)-\vec{D}_0\right)^2\right\rangle=\left\langle\vec{D}(t)^2\right\rangle-\left\langle\vec{D}_0^2\right\rangle$$

nos queda, eliminando el símbolo de promedio, según la definición (3.25),

$$D(t)^2=D_0^2+t\int_0^t F(t')\mathrm{d}t' \qquad (3.68)$$

Esta ecuación es equivalente a (3.30) con la diferencia de que ahora tenemos una referencia explicita al papel que juega la aceleración relativa y que no hay términos de correlación, de forma que permite desarrollos sin necesidad de recurrir a hipótesis de autosimilitud.

Relaciones asintóticas en turbulencia bidimensional

Para un tiempo de dispersión muy pequeño, la expresión (3.68) es equivalente a (3.32),

$$D(t)^2=D_0^2+S_2(D_0)t^2, \qquad (3.69)$$

donde $S_2(r)=\langle v_r(r)^2\rangle$ es la función de estructura de segundo orden. Utilizando (3.38), las relaciones cinemáticas deducidas de la isotropía de la turbulencia (2.60a), y la condición de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.70}$$

obtenemos la relación

$$S_2(D_0) = D_0^2 Z, \tag{3.71}$$

donde $Z = 1/2 \left\langle (\nabla \times \vec{v})^2 \right\rangle$ es la enstrofía del campo, invariante sobre la trayectoria de las partículas en turbulencia bidimensional inviscida, de forma que (3.68) se puede reescribir como

$$D(t)^2 = D_0^2 \left(1 + Zt^2\right). \tag{3.72}$$

Para tiempos de dispersión muy grandes, recuperamos la expresión (3.60), ya que en su deducción no se asumió turbulencia bidimensional.

Dispersión relativa en el subrango inercial

Se ha deducido una ley en t^3 para la dispersión relativa en el rango inercial basada en argumentos fenomenológicos (ver (3.48)). Es posible recuperar esta ley mediante relaciones puramente cinemáticas (Lin and Reid, 1963; Babiano et˜al., 1990) considerando las hipótesis:

$$\text{Hipótesis 1:} \qquad \langle \vec{v}_r(0) \cdot \vec{v}_r(t) \rangle = 0 \tag{3.73}$$

$$\text{Hipótesis 2:} \quad \langle \vec{a}_r(t) \cdot \vec{a}_r(t+\tau) \rangle = R(\tau) \tag{3.74}$$

La primera hipótesis indica que el rango de escala de dispersión ha de ser lo suficientemente grande como para que las velocidades no estén correlacionadas. Esto se cumplirá para tiempos de dispersión mayores que la escala integral Lagrangiana de tiempo. La segunda hipótesis postula la estacionariedad estadística de la correlación de aceleraciones relativas, propuesta por Lin and Reid (1963) para turbulencia tridimensional.

Introduciendo estas hipótesis en (3.66) se obtiene

$$\left\langle \vec{v}_r(t)^2 \right\rangle = \left\langle \vec{v}_r(0)^2 \right\rangle + 2tI_0(t) - 2I_1(t) \tag{3.75}$$

$$\left\langle \left(\frac{1}{t} \int_0^t t' \vec{a}_r(t') \mathrm{d}t' \right)^2 \right\rangle = \frac{2}{3} t I_0(t) - I_1(t) + \frac{1}{3} \frac{1}{t^2} I_3(t) \tag{3.76}$$

donde

$$I_n(t) = \int_0^t \tau^n R(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

De esta forma, el último término de (3.68) se escribe como

$$t\int_0^t F(\tau)\mathrm{d}\tau = \left\langle \vec{v}_r(0)^2 \right\rangle t^2 + \frac{4}{3}t\int_0^t \tau I_0(\tau)\mathrm{d}\tau - t\int_0^t I_1(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{3}t\int_0^t \frac{1}{\tau^2}I_3(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (3.77)$$

Según Lin y Reid, para tiempos de dispersión grandes, aunque menores que el tiempo característico Euleriano, podemos esperar que $I_0(t)$ converja a un valor constante, y, por lo tanto, $I_1(t) \sim t$ y $I_3(t) \sim t^3$, de donde se obtiene, finalmente, que

$$D(t)^2 \sim t^3 \qquad (3.78)$$

Babiano et˜al. (1990) utilizan estas expresiones para definir una magnitud, que llaman *factor de estacionariedad*, como

$$\Phi(t) = \frac{K(t)}{K_{est}(t)} \qquad (3.79)$$

con

$$K(t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}D(t)^2}{\mathrm{d}t} \qquad (3.80)$$

$$K_{est}(t) = \frac{1}{2}\left(\left\langle \vec{v}_r(0)^2 \right\rangle + \left\langle \vec{v}_r(t)^2 \right\rangle\right) t \qquad (3.81)$$

El denominador en $\Phi(t)$ se deduce a partir de las hipótesis de estacionariedad (3.73) y (3.74), de forma que sirve como indicador de la validez de estas hipótesis. Cuando las hipótesis de estacionariedad se cumplen, $\Phi(t)$ mantiene un valor constante (Babiano et˜al., 1990).

Este análisis implica que, si bien ley de Richardson de la dispersión relativa en escalas del orden de subrango inercial puede ser deducida a partir de la teoría de Kolmogorov-Obukov (véase (3.50)), ésta no es exclusiva de una ley -5/3 en el espectro de energía. Las hipótesis de Lin y Reid (3.73), establecidas para turbulencia tridimensional, son igualmente aplicables a la turbulencia bidimensional, por lo que es de esperar encontrar la ley de Richardson independientemente de la ley espectral de energía en el subrango inercial.

Este punto es importante, ya que desconecta la ley de Richardson de la dinámica de la turbulencia, y la deduce únicamente a partir de hipótesis cinemáticas. Por lo tanto, ni tan siquiera va a ser necesario disponer de un subrango inercial (en el sentido de equilibrio local de transferencia de energía/enstrofía entre escalas) para poder observar la ley de dispersión de Richardson para una escala de tiempo adecuada.

3.3.4. Dispersión e intermitencia

Paladin y Vulpiani (1987) exponen, sin embargo, que la ley de dispersión en t^3 está influenciada por la ley de escala de la función de estructura de primer orden ζ_1 (ver la expresión (2.91)).

Se puede deducir la expresión de Paladin y Vulpiani de forma cualitativa (Jou, 1997). La variación de la dispersión relativa en el tiempo viene dada por

$$\frac{\mathrm{d}\left\langle D^2\right\rangle}{\mathrm{d}t} \sim \left\langle D\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}\right\rangle \sim \left\langle D\delta u\right\rangle \sim \left\langle D^{1+\zeta_1}\right\rangle \tag{3.82}$$

e, integrando en el tiempo, considerando $\zeta_1 \neq 1$, se obtiene

$$\left\langle D^2\right\rangle \sim t^{\frac{2}{1-\zeta_1}}, \tag{3.83}$$

aunque ellos ofrecen una expresión más general, para el momento de cualquier orden de la dispersión relativa,

$$\left\langle D^{2n}\right\rangle \sim t^{\frac{2n}{1-\zeta_1}}. \tag{3.84}$$

En turbulencia tridimensional, el modelo K41 implica $\zeta_1 = 1/3$, de forma que la expresión (3.83) da lugar a la ley de Richardson,

$$\left\langle D^2\right\rangle \sim t^3. \tag{3.85}$$

Pero para un modelo que considere la intermitencia, de forma que el espectro de energía quede modificado según (2.97),

$$E(k) \sim \langle\varepsilon\rangle^{2/3} k^{-5/3-\mu/9}, \tag{2.97}$$

utilizando (2.99),

$$\zeta_p = \frac{p}{3} + \frac{\mu}{18}p(3-p), \tag{2.99}$$

tenemos que $\zeta_1 = 1/3 + \mu/9$ y, substituyendo en (3.83), el comportamiento de la dispersión será

$$\left\langle D^2\right\rangle \sim t^{\frac{18}{6-\mu}}. \tag{3.86}$$

Pero esto es únicamente aplicable a turbulencia tridimensional. En turbulencia bidimensional, la expresión (3.83) (y la (3.84)) no es aplicable, ya que, como vimos en la sección 2.3.6, $\zeta_p = p$ en el rango inercial, y esto lleva a una singularidad en la ley de dispersión relativa, dado que $\zeta_1 = 1$.

Según Paladin and Vulpiani (1987), en turbulencia bidimensional, la intermitencia interna no produce efecto alguno sobre la ley de espectro ni las funciones de estructura y, por lo tanto, tampoco sobre la ley de dispersión.

En todo caso, el argumento (3.82) aplicado a la turbulencia bidimensional, en que $\zeta_1 = 1$, lleva a una dispersión exponencial en el tiempo,

$$D^2(t) \sim \exp(C_d t) \tag{3.87}$$

en el rango de escalas en el que se cumple la ley de autosimilitud. Ésta es la conocida como ley de Kraichnan-Lin (Kraichnan, 1966; Lin, 1972).

Podemos expresar la relación (3.86) en función de la potencia n del espectro de energía en lugar del parámetro de intermitencia. La relación entre ambos, usando (2.97) y (3.51), es

$$\mu = 9n - 15, \tag{3.88}$$

de forma que (3.86) se reescribe como

$$D^2(t) \sim t^{\frac{6}{7-3n}}. \tag{3.89}$$

Esta expresión únicamente es válida para $n \approx 5/3$, ya que la expresión (2.99) implica $\mu \ll 1$.

3.4. Sumario

En este capítulo se han descrito las expresiones teóricas más importantes relacionadas con la dispersión de partículas en flujo turbulento.

Para la dispersión absoluta se ha deducido el comportamiento asintótico,

$$A^2(t) = 2Et^2 \quad \text{para}\, t \to 0 \tag{3.90}$$

$$A^2(t) = 2ET_L t \quad \text{para}\, t \to \infty. \tag{3.91}$$

Para la dispersión relativa, el comportamiento asintótico para tiempos muy grandes es análogo al de la dispersión relativa,

$$D^2(t) = 2A^2(t) = 4ET_L t \quad \text{para}\, t \to \infty. \tag{3.92}$$

Para $t \to 0$, el comportamiento es también similar al de la dispersión absoluta,

$$D^2(t) \sim t^2, \tag{3.93}$$

pero la constante de proporcionalidad dependerá del valor de la separación inicial D_0 respecto a la escala de disipación η.

Para tiempos intermedios, $t \lesssim T_L$, si D_0 es lo suficientemente pequeño, encontramos la ley de Richardson,

$$D^2(t) \sim t^3, \tag{3.94}$$

bien mediante argumentos fenomenológicos , bien mediante el análisis cinemático de Babiano et˜al. (1990). Según éste último, la ley de Richardson va a ser independiente de la ley espectral siempre que el tiempo transcurrido haya sido lo suficientemente largo como para que las velocidades estén decorrelacionadas con la inicial, y las correlaciones de las aceleraciones relativas sean estadísticamente estacionarias.

En otra linea de razonamiento, se han presentado dos argumentos que relacionan la ley de dispersión relativa con la ley espectral $E \sim k^{-n}$.

Por un lado, la ley de Richardson generalizada, presentada por Fung and Vassilicos (1998),

$$D^2(t) \sim t^{\frac{4}{3-n}}, \tag{3.95}$$

válida únicamente para $n < 3$.

Por otro lado, la expresión

$$D^2(t) \sim t^{\frac{6}{7-3n}}, \tag{3.96}$$

deducida a partir de la argumentación de Paladin and Vulpiani (1987). Ésta última expresión es únicamente válida para $n \approx 5/3$. Para $n > 3$, el argumento de Paladin and Vulpiani (1987) da un comportamiento exponencial de la dispersión relativa.

El aspecto más importante de este capítulo es la presentación de las diferentes corrientes argumentales que establecen relaciones de la dispersión relativa con la ley del espectro de energía del flujo turbulento. Algunas de estos modelos son complementarios, ya que la expresión de la ley de Richardson generalizada de Fung and Vassilicos (1998) sólo es válida para $n < 3$, y la argumentación cinemática de Babiano et˜al. (1990) ha sido deducida para turbulencia bidimensional, en la que n adopta valores significativamente mayores.

El argumento de Paladin and Vulpiani (1987), sin embargo, contradice la ley de Richardson generalizada, si bien es cierto que la hipótesis de autosimilitud de la velocidad relativa lo limita a muy pequeña escala y, por tanto, a un tiempo de dispersión mucho menor que la escala integral de tiempo.