

Parte III

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

6. LA SIMULACIÓN CINEMÁTICA FRENTE A LA SIMULACIÓN NUMÉRICA DIRECTA

El test más importante realizado sobre el modelo de KS ha sido comparar los resultados con los obtenidos mediante una Simulación Numérica Directa (DNS). Estos resultados conciernen básicamente a la estadística Lagrangiana de un grupo de partículas puntuales y pasivas, aunque también se han realizado cálculos estadísticos Eulerianos.

En general, los tiempos han sido adimensionalizados con el tiempo medio de rotación de los remolinos, definido como

$$T_c = Z^{-1/2}, \quad (6.1)$$

donde Z es la enstrofía media del campo, constante en el tiempo,

$$Z = \langle |\nabla \times \vec{v}|^2 \rangle, \quad (6.2)$$

y las distancias con el valor de $\eta \sim k_d^{-1}$, la escala más pequeña definida en el espectro de energía, que esta relacionada con la disipación de enstrofía mediante (2.88), y que denominamos, simplemente, escala de disipación.

En todos los experimentos, $Z \approx 2500$, de forma que $T_c \approx 0,02$, y la escala de disipación es $\eta \approx 2,3\Delta = 0,018$, donde Δ es el tamaño de la malla.

En los capítulos 4 y 5 se describen los modelos de Simulación Numérica Directa y Simulación Cinemática, respectivamente, utilizados en el presente capítulo.

6.1. Estadística Euleriana

En el capítulo 5 se describe cómo el modelo KS permite escoger la forma del espectro de energía que queremos obtener en el campo de velocidades. Este espectro determina el valor de los modos de Fourier, generalmente mediante números aleatorios obtenidos de una distribución gaussiana (Fung et al., 1992). Sin embargo, para comparar la simulación cinemática con la directa se ha optado por generar el campo con el espectro exacto cal-

culado de la DNS. La figura 6.1 muestra ambos espectros, el obtenido mediante la DNS (representado también en la figura 4.1) y el de la KS, calculados ambos a partir del campo de vorticidad.

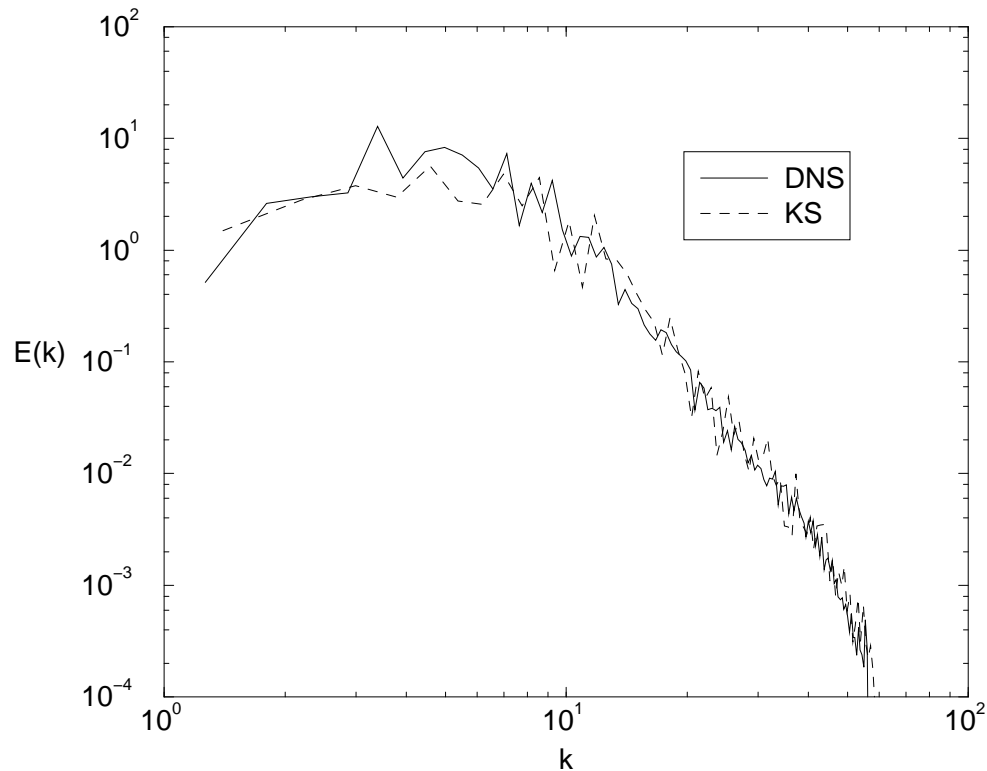


Fig. 6.1: Espectros Eulerianos de los campos obtenidos mediante ambas simulaciones.

Aun así, no es de esperar que la topología del campo sea la misma, ya que el espectro de energía da información global sobre la distribución de energía en el espacio de Fourier, pero no en el físico.

Las figuras 6.2 y 6.3 muestran los campos de velocidad y la distribución de vorticidad para ambas simulaciones. En la figura 6.3a se ha añadido un segmento con el tamaño de la escala de Taylor, lo cual permite comprobar que las estructuras coherentes generadas con la DNS son de tamaño comparable a la misma. La escala de Taylor se calcula a partir de la autocorrelación espacial longitudinal de velocidades (ver definición en (2.69)).

Como se puede apreciar, la simulación cinemática es incapaz de proporcionar estructuras coherentes de esta escala. Por el contrario, los vórtices son menos acusados y se distribuyen más uniformemente en el dominio. Esto es debido, con toda seguridad, a la ausencia de dinámica de transferencia de energía/enstrofia en el modelo cinemático.

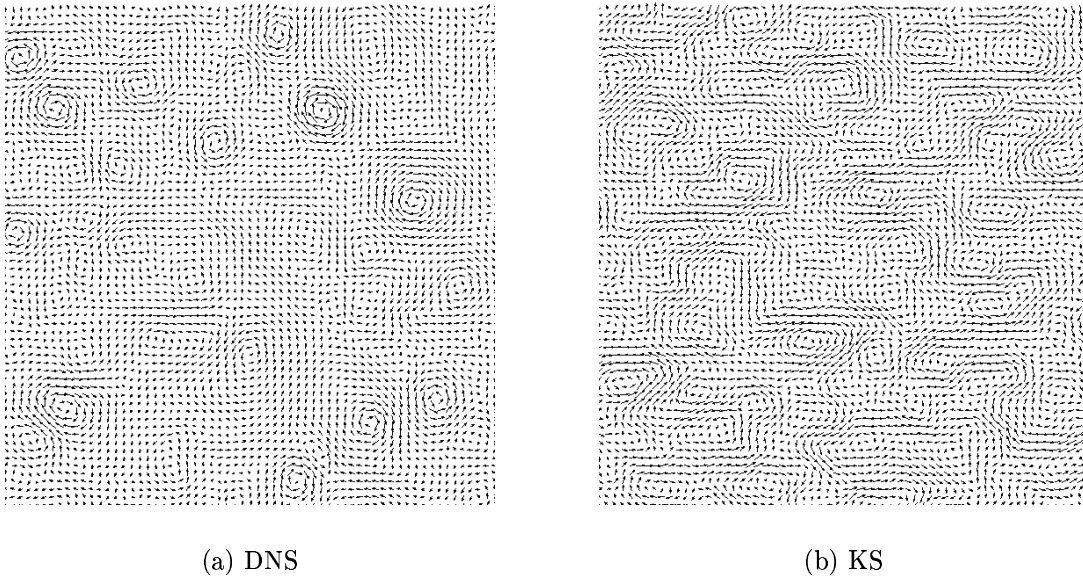


Fig. 6.2: Campos de velocidades simulados numéricamente mediante Simulación Numérica Directa (a) y mediante KS (b). Se pueden apreciar claramente las estructuras coherentes generadas por la DNS. En la KS el campo de velocidad es más uniforme.

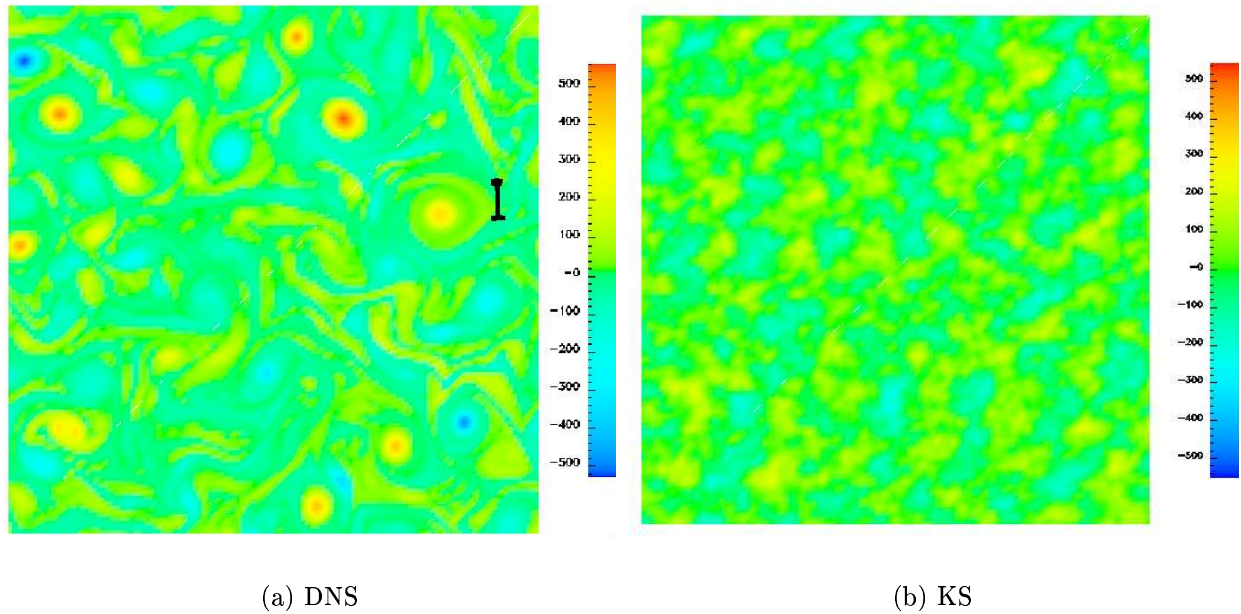


Fig. 6.3: Distribuciones de vorticidad de los campos de la figura 6.2. En la figura (a) se ha incluido un segmento del tamaño de la escala de Taylor, a efectos de estimación de la escala de las estructuras coherentes.

Veremos en este capítulo algunas de las consecuencias, sobre la cinemática de partículas, de la falta de estructuras coherentes importantes en el flujo.

6.1.1. Autocorrelación espacial de velocidades

En el capítulo 2, se clasifica la autocorrelación Euleriana de velocidades como longitudinal o transversal, dependiendo de la relación entre las componentes de las velocidades que intervienen en el cálculo y el vector que une los dos puntos en los que se mide la velocidad.

En nuestro caso, tan solo calculamos la autocorrelación longitudinal debido a que es un factor importante a tener en cuenta en el estudio de la dispersión relativa de dos partículas¹.

A partir de la autocorrelación Euleriana de velocidades, calculamos la escala integral (longitudinal) Euleriana de longitud, según la expresión (2.67). En la figura 6.4 están representados la autocorrelación longitudinal en función de la distancia entre puntos y la integral acumulativa de la autocorrelación, de forma que la escala integral Euleriana espacial es el valor al que converge esta gráfica para $r \rightarrow \infty$. La diferencia entre ambas

¹ Resulta evidente que de las dos componentes de la velocidad relativa entre dos partículas, la que contribuye a la separación (o acercamiento) entre las mismas, es la longitudinal

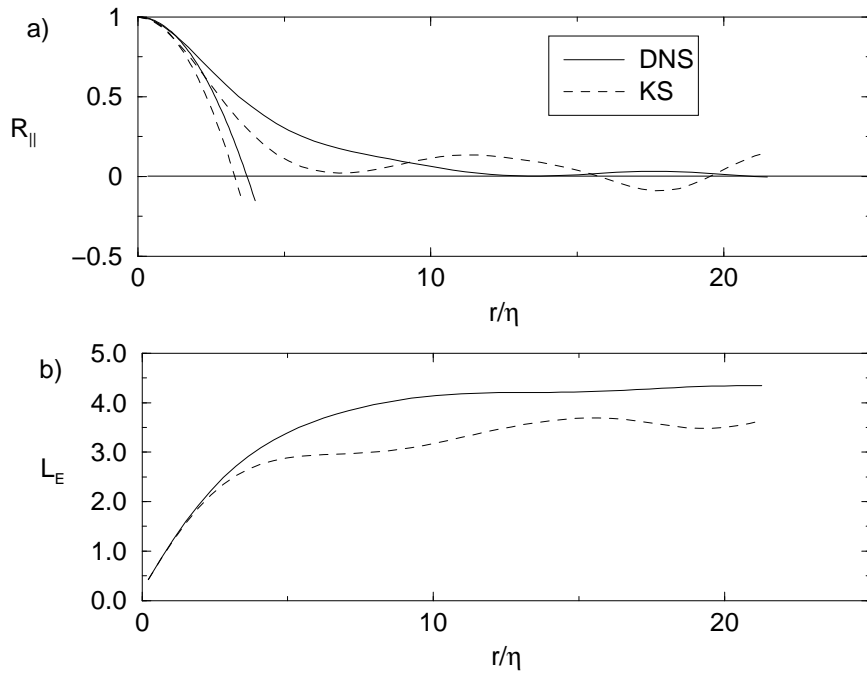


Fig. 6.4: a) Autocorrelación espacial longitudinal de velocidades y estimación de la microescala de Taylor como el valor de corte de las parábolas con el eje x; b) Valor acumulativo de la escala integral Euleriana de longitud

correlaciones es grande. La KS ofrece oscilaciones alrededor del cero que no son observables en los resultados de la DNS.

En la primera gráfica se muestra el valor de las escalas de Taylor, según la definición (2.69).

Para la simulación cinemática obtenemos un valor para la escala integral de $L^{(KS)} = 3,7\eta$ y $L^{(DNS)} = 4,3\eta$ para la simulación directa. El valor de η viene dada por

$$\eta = \frac{2\pi}{k_d}, \quad (6.3)$$

donde k_d es la escala mínima definida en el espectro de energía.

Para el espectro utilizado en estas experiencias numéricas (ver figura 4.1), $k_d = 55,0$, de forma que $\eta = 0,114$. Los valores de la escala integral Euleriana de longitud son entonces $L^{(KS)} = 0,42$ y $L^{(DNS)} = 0,49$.

El valor de la microescala de Taylor es $L_\lambda^{(KS)} = 3,3\eta$ y $L_\lambda^{(DNS)} = 3,7\eta$, que en las unidades arbitrarias utilizadas en las simulaciones, es $L_\lambda^{(KS)} = 0,38$ y $L_\lambda^{(DNS)} = 0,42$.

Las primeras observaciones que se pueden hacer a la luz de estos resultados son

- Se comprueba que, si bien la estructura del campo Euleriano de velocidades es muy diferente, la escala integral Euleriana de espacio y la microescala de Taylor son muy parecidas para el modelo dinámico y el cinemático
- La microescala de Taylor es menor que la escala integral en ambos casos, como era de esperar. Sin embargo, los valores son muy próximos debido al bajo número de Reynolds de las simulaciones.
- La DNS ofrece valores un 15 % mayores tanto de escala integral como de microescala de Taylor. Esto podría ser un indicativo de la presencia de estructuras coherentes.

6.1.2. Autocorrelación espacial de vorticidad

Es interesante notar cómo la autocorrelación espacial de vorticidades es incluso más parecida en ambas simulaciones, como se comprueba en la figura 6.5.

La escala integral de espacio relacionada con la vorticidad se calcula de la misma forma que la relacionada con la velocidad (expresión (2.67)), pero utilizando la correlación de vorticidades. Dado que la vorticidad está peor correlacionada que la velocidad (en el espacio), la escala integral de vorticidad es menor. En nuestros experimentos hemos obtenido una escala integral de espacio relacionada con la vorticidad del orden de η . Es decir, unas 4 veces menor que la obtenida con la velocidad.

6.1.3. Autocorrelación temporal de velocidades

Las autocorrelaciones temporales de velocidad no ofrecen tan buen resultado como las espaciales (figura 6.6). Intentaremos explicar la razón.

El carácter aleatorio de la turbulencia queda establecido en el espacio físico mediante la dirección aleatoria de los vectores de número de onda \vec{k}_i . Sin embargo, la evolución temporal es demasiado determinista. No hay una dirección “aleatoria” en el tiempo. La consecuencia inmediata de ello es que la autocorrelación Euleriana temporal no converge a cero, si no que oscila alrededor de este valor. Es posible hacer un sencillo desarrollo matemático para observar esto con más claridad. La velocidad en un punto \vec{r} y un instante t viene dada por

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \sum_i \left\{ \vec{A}_i \sin(\phi_i(\vec{r}, t)) + \vec{B}_i \cos(\phi_i(\vec{r}, t)) \right\}, \quad (6.4)$$

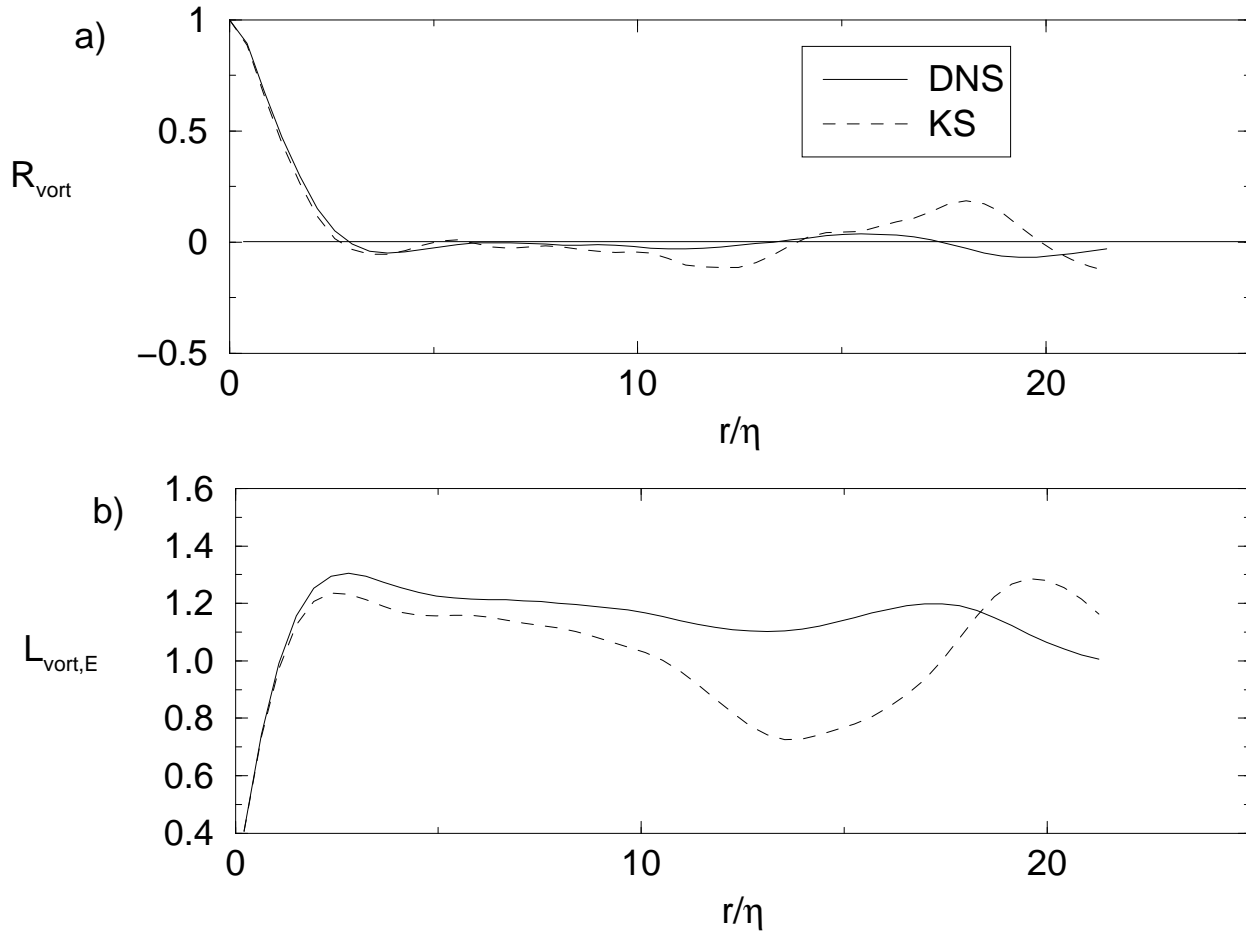


Fig. 6.5: a) Autocorrelación espacial de vorticidades. b) Tendencias de las escalas integrales de espacio definidas a partir de la autocorrelación de vorticidades. Las anomalías observadas para grandes valores de r/η son debidas a la disminución de muestreo estadístico; los cálculos son realizados sobre 128^2 puntos. Cuando $\Delta r = 1$, existen 127^2 muestras. Al final de la gráfica, para $r/\eta \sim 20$, el número de muestras se ha dividido por 4.

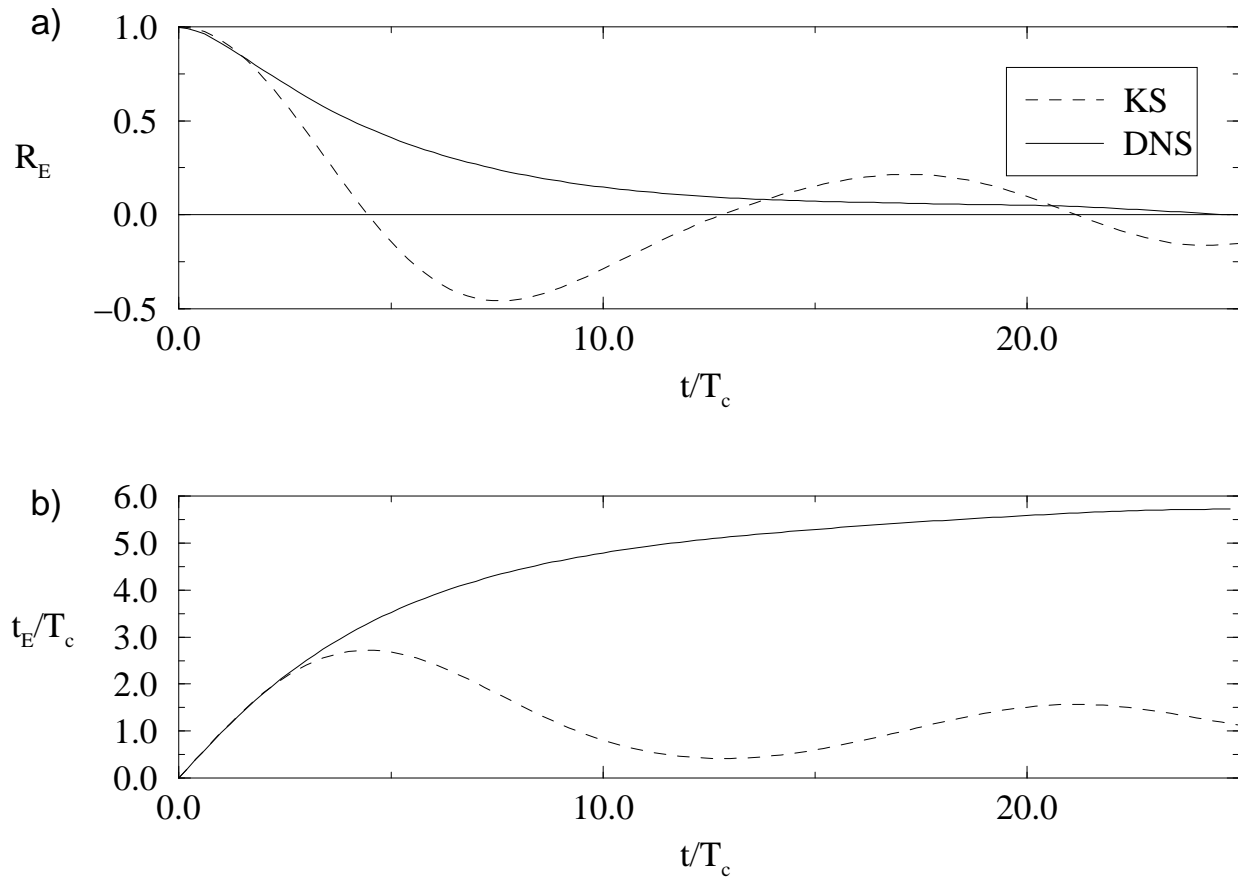


Fig. 6.6: a) Autocorrelación Euleriana temporal ; b) Escala de tiempo Euleriana. Este experimento fue realizado con $\lambda = 0,6$

donde $\phi_i(\vec{r}, t) \equiv \vec{k}_i \cdot \vec{r} + \omega_i t$. Por lo tanto, en un instante $t + \tau$, la velocidad es

$$\vec{u}(\vec{r}, t + \tau) = \sum_i \left\{ \vec{A}_i \sin(\phi_i(\vec{r}, t) + \omega_i \tau) + \vec{B}_i \cos(\phi_i(\vec{r}, t) + \omega_i \tau) \right\}, \quad (6.5)$$

y, utilizando $(\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$ y $(\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b)$, el producto de ambas velocidades es

$$\vec{u}(\vec{r}, t) \cdot \vec{u}(\vec{r}, t + \tau) = \sum_{i,j} \{ \alpha_{ij}(\vec{r}, t) \sin(\omega_j \tau) + \beta_{ij}(\vec{r}, t) \cos(\omega_j \tau) \}, \quad (6.6)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(\vec{r}, t) = & \vec{A}_i \cdot \vec{A}_j \sin \phi_i \cos \phi_j - \vec{A}_i \cdot \vec{B}_j \sin \phi_i \sin \phi_j \\ & + \vec{B}_i \cdot \vec{A}_j \cos \phi_i \cos \phi_j - \vec{B}_i \cdot \vec{B}_j \cos \phi_i \sin \phi_j \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \beta_{ij}(\vec{r}, t) = & \vec{A}_i \cdot \vec{A}_j \sin \phi_i \sin \phi_j + \vec{A}_i \cdot \vec{B}_j \sin \phi_i \cos \phi_j \\ & + \vec{B}_i \cdot \vec{A}_j \cos \phi_i \sin \phi_j + \vec{B}_i \cdot \vec{B}_j \cos \phi_i \cos \phi_j. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Al hacer el promedio espacial (y, si la turbulencia es estadísticamente estacionaria, también en el tiempo), los coeficientes α_{ij} y β_{ij} , que en (6.6) son función del espacio y el tiempo, se convierten en coeficientes constantes,

$$\langle \vec{u}(\vec{r}, t) \cdot \vec{u}(\vec{r}, t + \tau) \rangle = \sum_{i,j} \{ \langle \alpha_{ij} \rangle \sin(\omega_j \tau) + \langle \beta_{ij} \rangle \cos(\omega_j \tau) \}. \quad (6.9)$$

Ahora bien, el valor de ω_j decrece con j de la forma $\omega_j \sim k_i^{-1/2}$, ya que $E(k) \sim k^{-4}$ (ver página 80), de forma que la correlación temporal de velocidades está dominada por las grandes escalas y, en consecuencia, por una estrecha banda de frecuencias. Esto indica claramente que el modelo cinemático utilizado no es válido para un análisis Euleriano-temporal de la turbulencia.

Sin embargo, como veremos en el apartado 6.2, esto no afecta en exceso a la estadística Lagrangiana, debido a que el camino seguido por las partículas es influenciado tanto por la distribución espacial de las velocidades como por la temporal. De hecho, hace tiempo que se ha constatado que es posible obtener un comportamiento Lagrangiano aceptable a partir de un campo Euleriano “congelado”, es decir, sin evolución temporal (ver capítulo

5 y, en concreto el artículo de Kraichnan (1970) referenciado).

El experimento mostrado en la figura 6.6 fue realizado con $\lambda = 0,6$. Se han calculado las correlaciones espaciales Eulerianas con otros valores de λ , obteniéndose, como se muestra en la figura 6.7, un comportamiento oscilatorio en todos los caso, pero con tiempos característicos diferentes. Evidentemente, para $\lambda = 0,0$, es decir, un campo “congelado”, la correlación es siempre 1 y, por lo tanto, el tiempo integral es infinito. Para $\lambda = 0,1$ el tiempo integral es todavía muy grande, pero alcanzara un máximo para luego descender hasta valores muy bajos en tiempos infinitos.

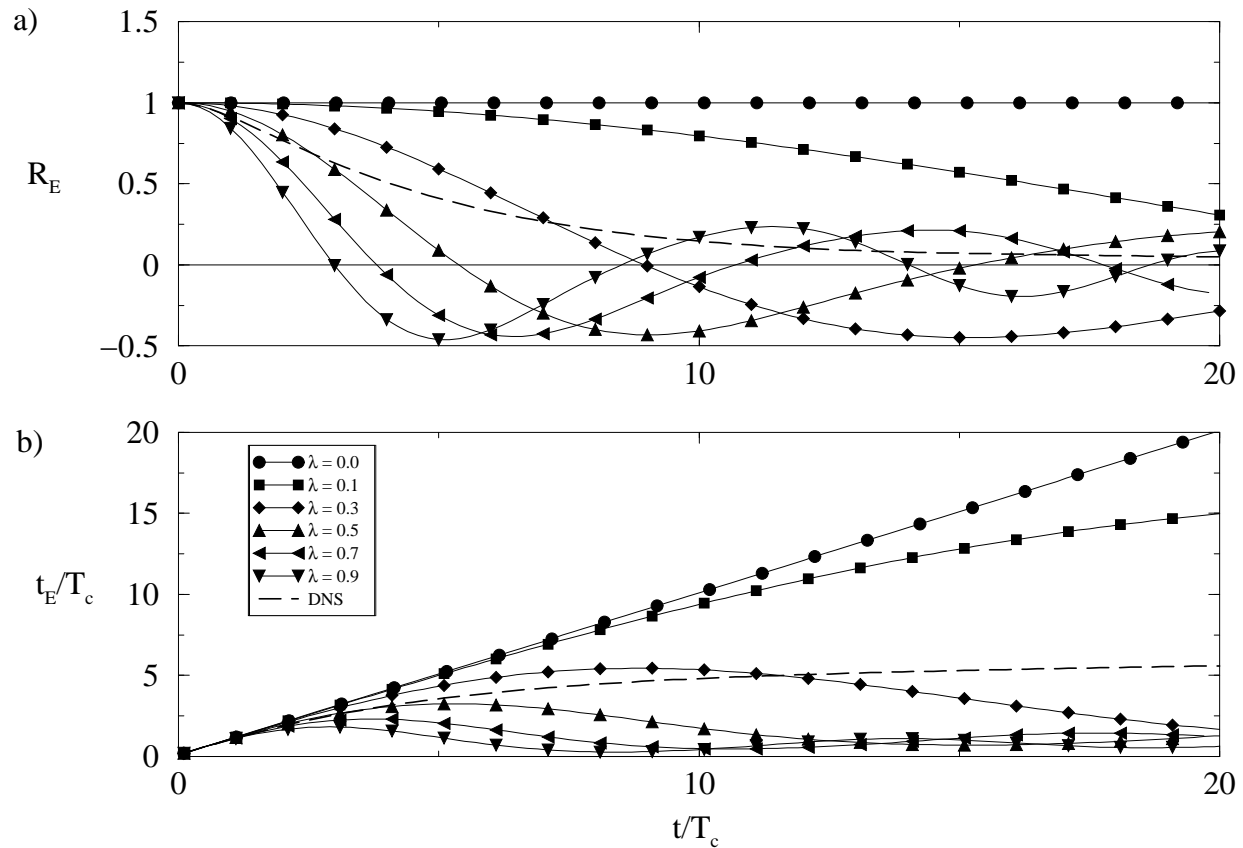


Fig. 6.7: a) Autocorrelación Euleriana temporal ; b) Escala de tiempo Euleriana. Experimentos llevados a cabo con diferentes valores de λ .

6.1.4. Funciones de estructura

De la misma forma que la autocorrelación de velocidades, las funciones de estructura, definidas en el primer capítulo, pueden ser longitudinales o transversales, en función de la

relación entre la componente de la velocidad considerada y el vector que une los puntos.

En la sección 2.3.6 se introduce el concepto de intermitencia de la turbulencia y se relaciona con el exponente de las funciones de estructura. Sin embargo, el contexto en dicha sección era la turbulencia tridimensional. En el capítulo 4 se extiende el concepto de intermitencia a la turbulencia bidimensional.

El cálculo de las funciones de estructura longitudinales y de sus exponentes ha sido realizado para la DNS y para la KS obteniéndose los resultados expuestos en la figuras 6.8 a 6.21. En las primeras, las funciones de estructura para ambos modelos son representadas para cada orden, de forma que se pueden comparar fácilmente. Lo primero que cabe comentar de la comparación de las funciones de estructura longitudinales es el extraordinario parecido entre las dos simulaciones, a pesar de la diferencia evidente de topología observada en las figuras 6.2 y 6.3.

Según la teoría clásica de la turbulencia bidimensional (que no contempla la intermitencia), la función de estructura de orden p sigue una ley de escala del tipo

$$S_p(r) \sim r^p \quad (6.10)$$

en la cascada de enstrofia. Ésta relación, sin embargo, es únicamente válida para escalas mucho menores que la escala de disipación (o la escala mínima del espectro para KS, ya que en este caso no tiene sentido hablar de disipación), y, de hecho, no es más que un reflejo de la regularidad del campo de velocidad. Consideremos, para simplificar, un campo de velocidades unidimensional $u(r)$. Calculamos la serie de Taylor a partir de una cierta posición r_0 ,

$$u(r_0 + r) \approx u(r_0) + \frac{\partial u}{\partial r} r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} r^2 + \dots, \quad (6.11)$$

de forma que

$$u(r_0 + r) - u(r_0) \sim r \quad (6.12)$$

y, por lo tanto,

$$\langle (u(r_0 + r) - u(r_0))^p \rangle \sim r^p, \quad (6.13)$$

únicamente si los términos de mayor orden que 1 en la serie de Taylor son mucho menores que el término de primer orden. Es decir, si el campo es muy regular.

En las figuras 6.8 a 6.17 se puede apreciar cómo el valor del exponente es ligeramente inferior a n para ambas simulaciones. Esto es debido a que la resolución del campo no es lo suficientemente buena como para observar el comportamiento asintótico para $r \rightarrow 0$ de

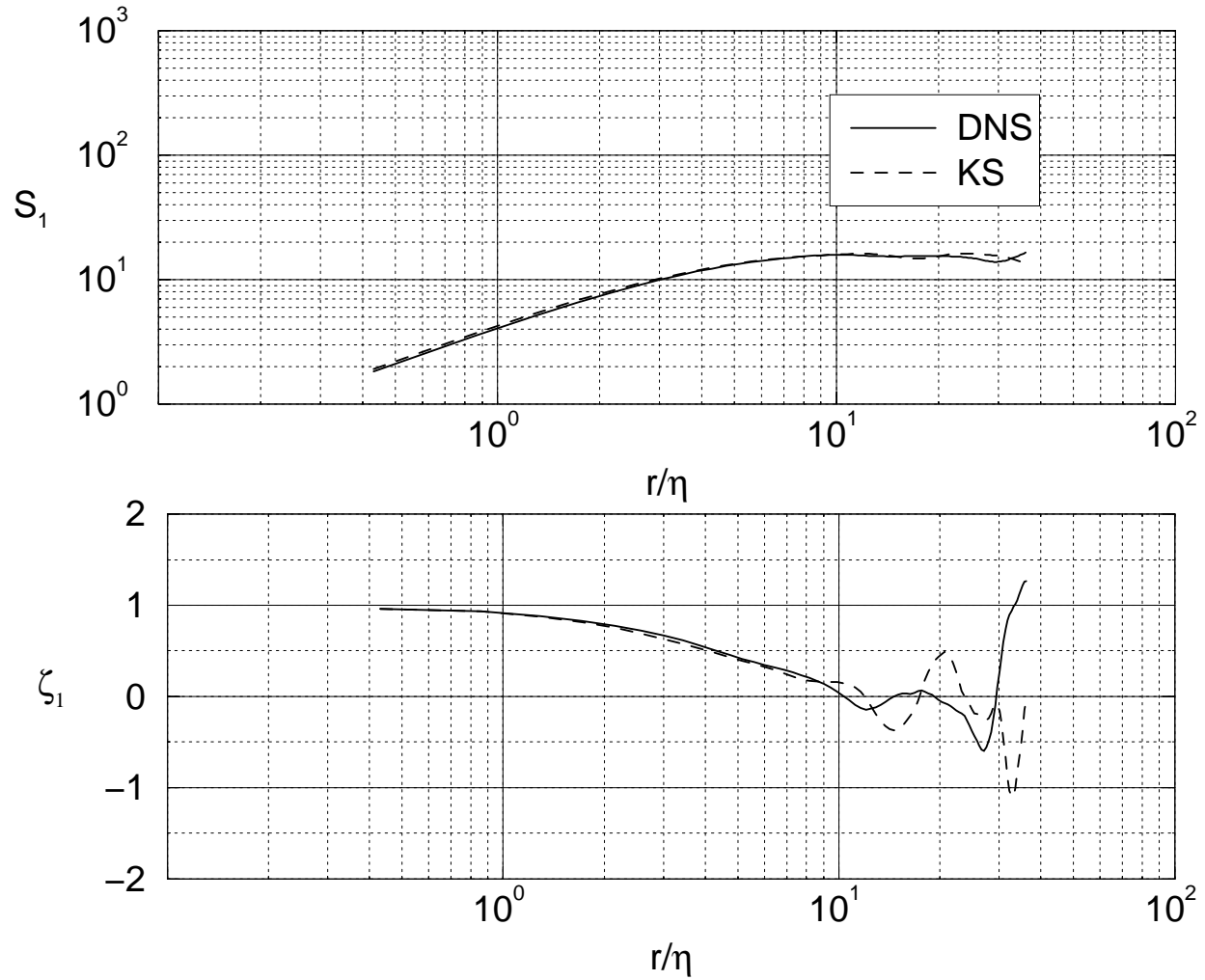


Fig. 6.8: a) Función de estructura de orden 1 ; b) Exponente de la función de estructura de orden 1

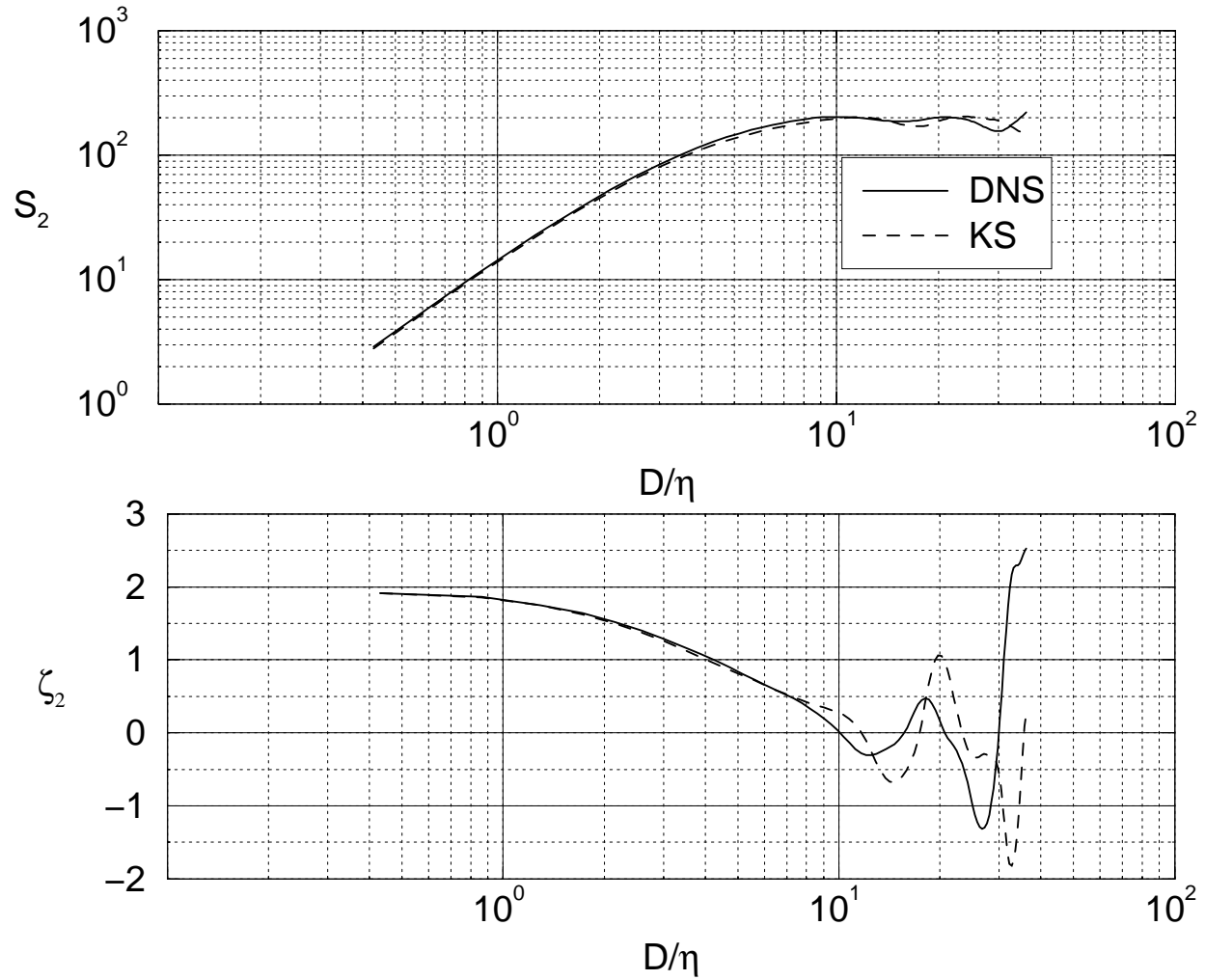


Fig. 6.9: a) Función de estructura de orden 2 ; b) Exponente de la función de estructura de orden 2

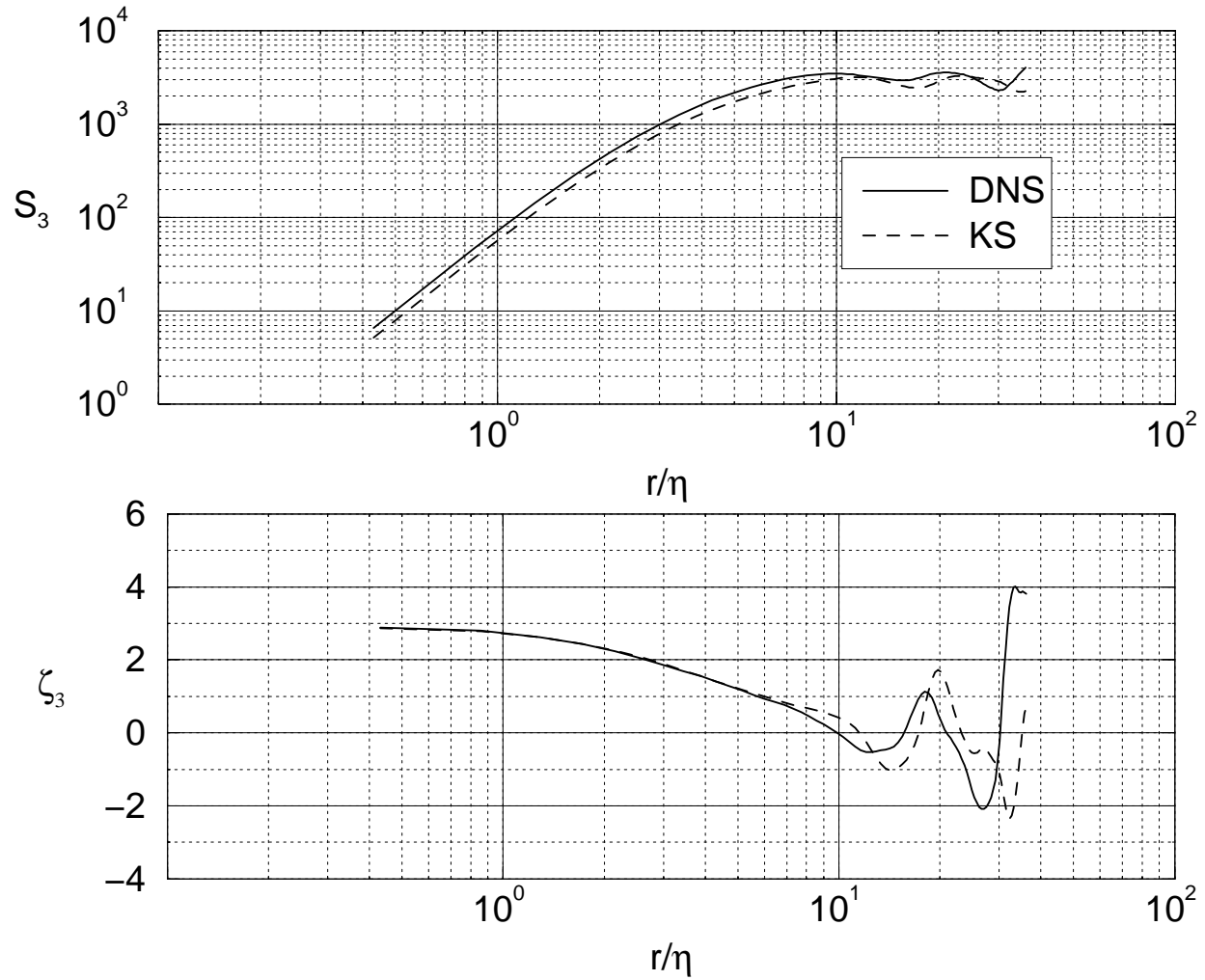


Fig. 6.10: a) Función de estructura de orden 3 ; b) Exponente de la función de estructura de orden 3

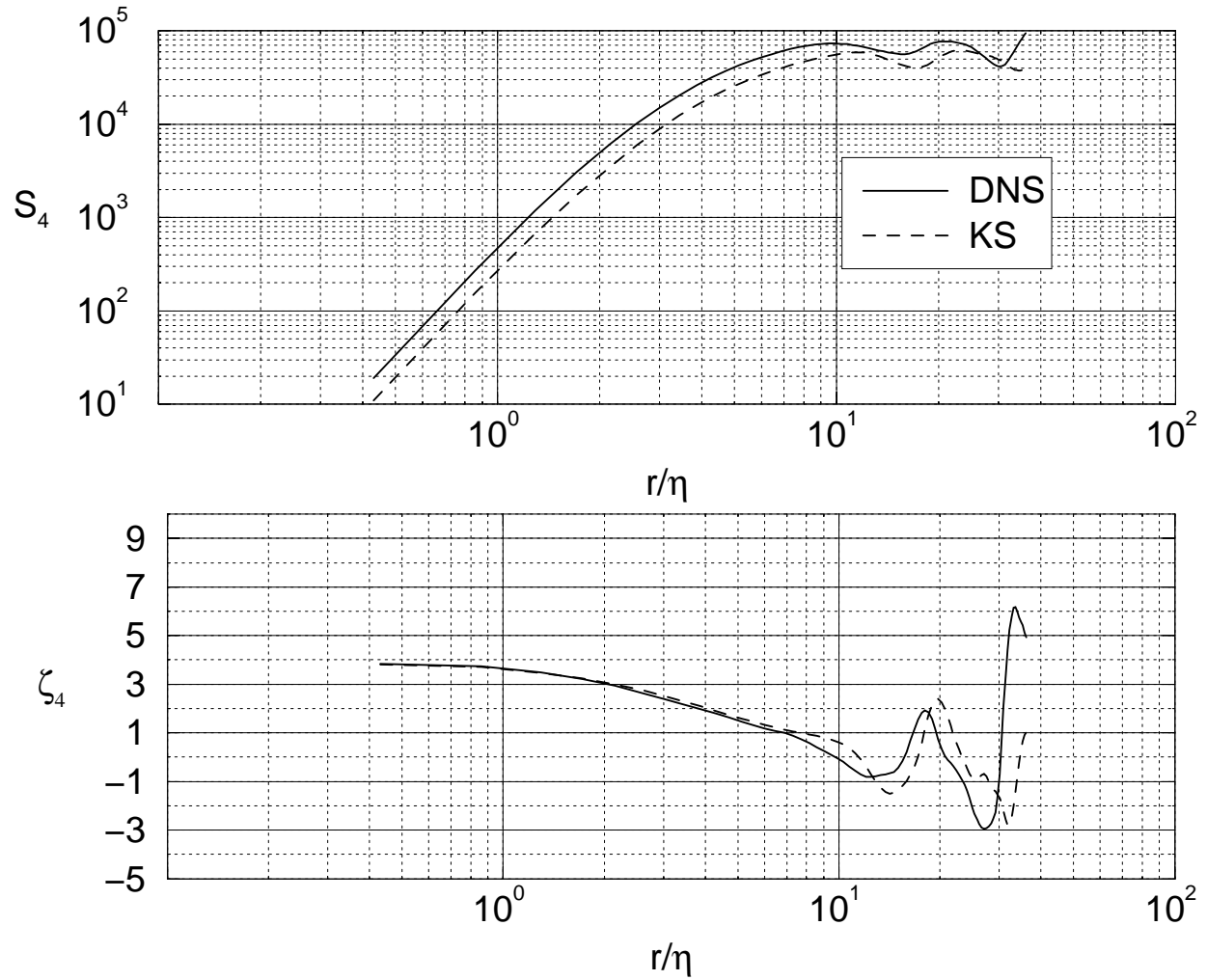


Fig. 6.11: a) Función de estructura de orden 4 ; b) Exponente de la función de estructura de orden 4

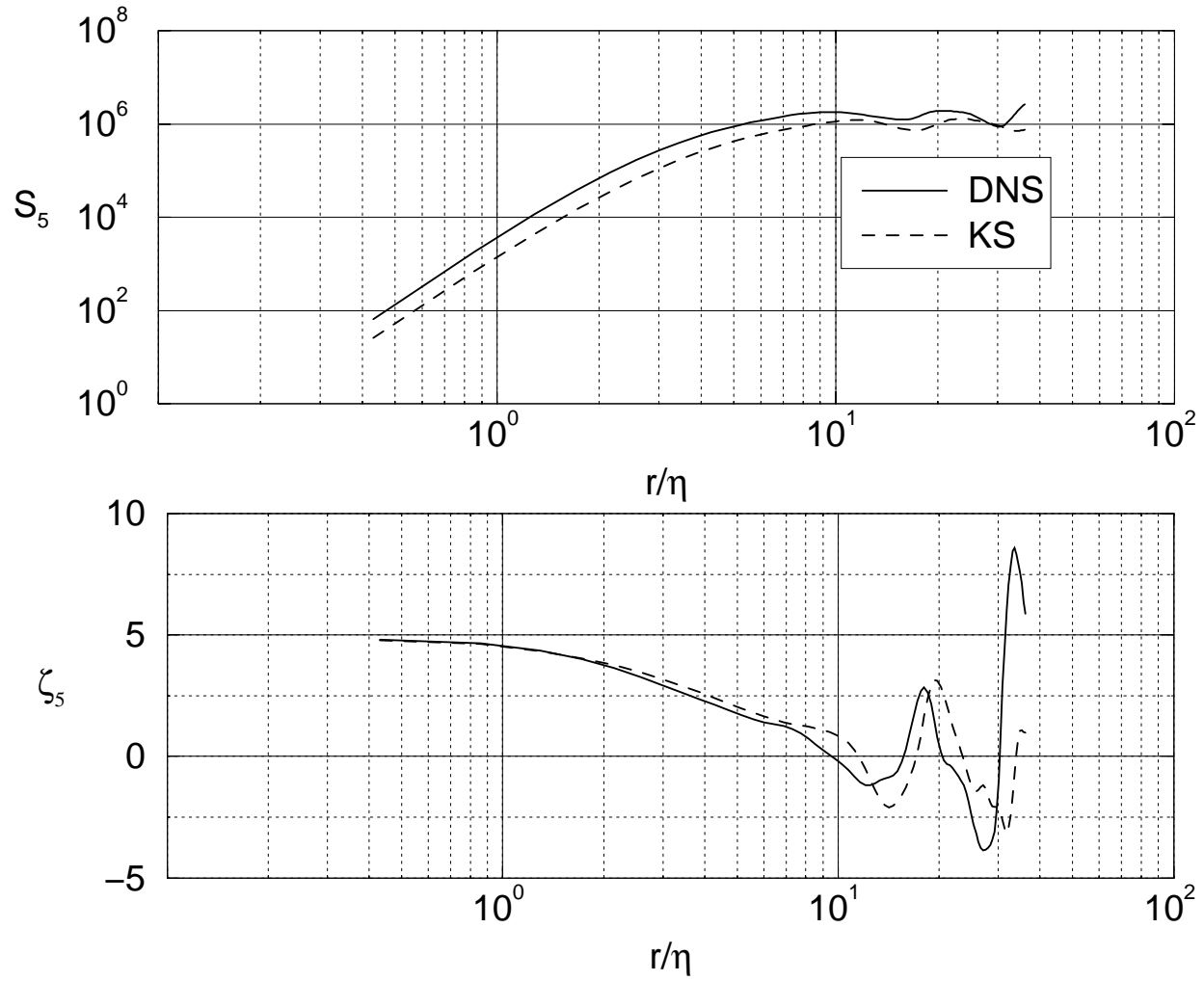


Fig. 6.12: a) Función de estructura de orden 5 ; b) Exponente de la función de estructura de orden 5

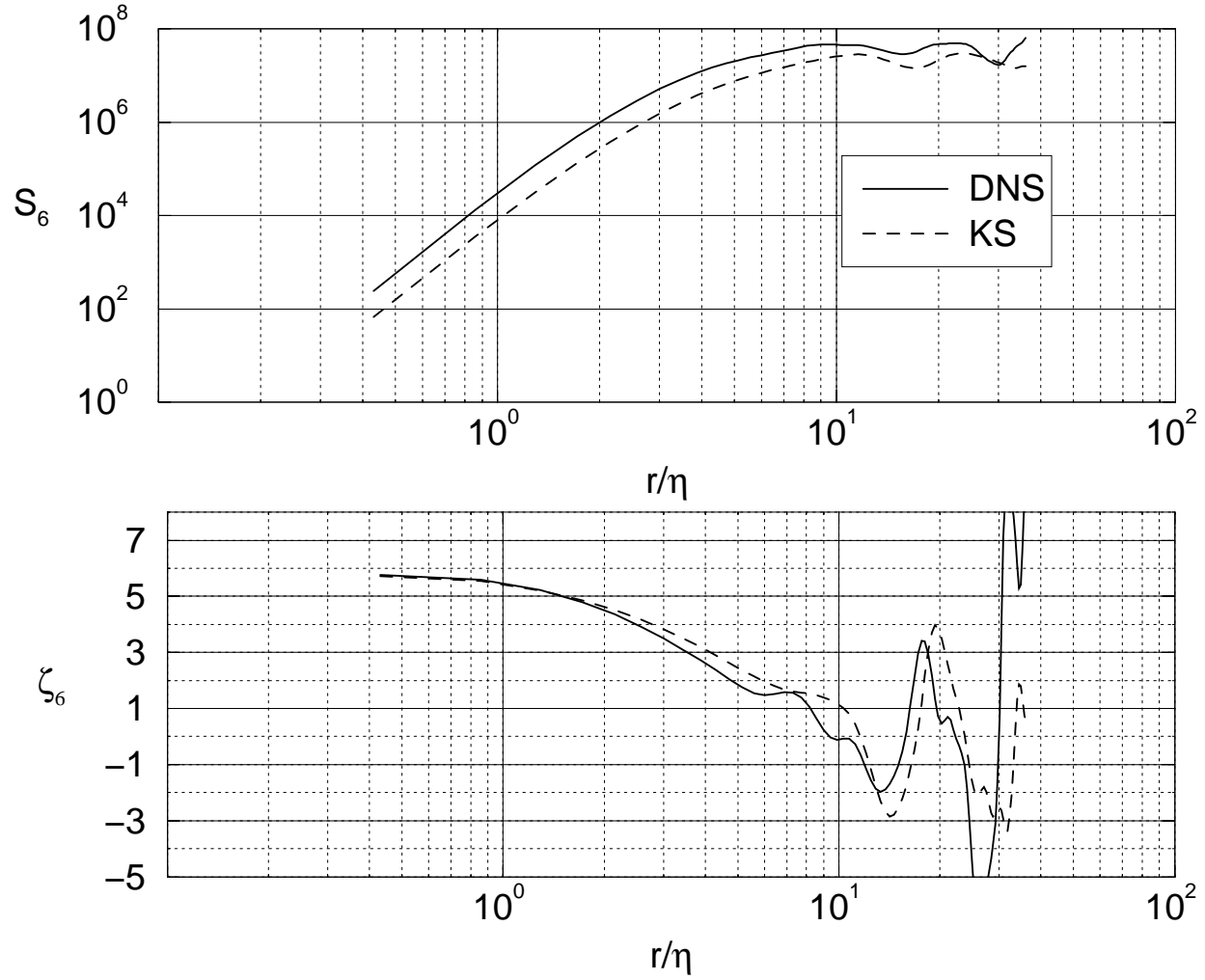


Fig. 6.13: a) Función de estructura de orden 6 ; b) Exponente de la función de estructura de orden 6

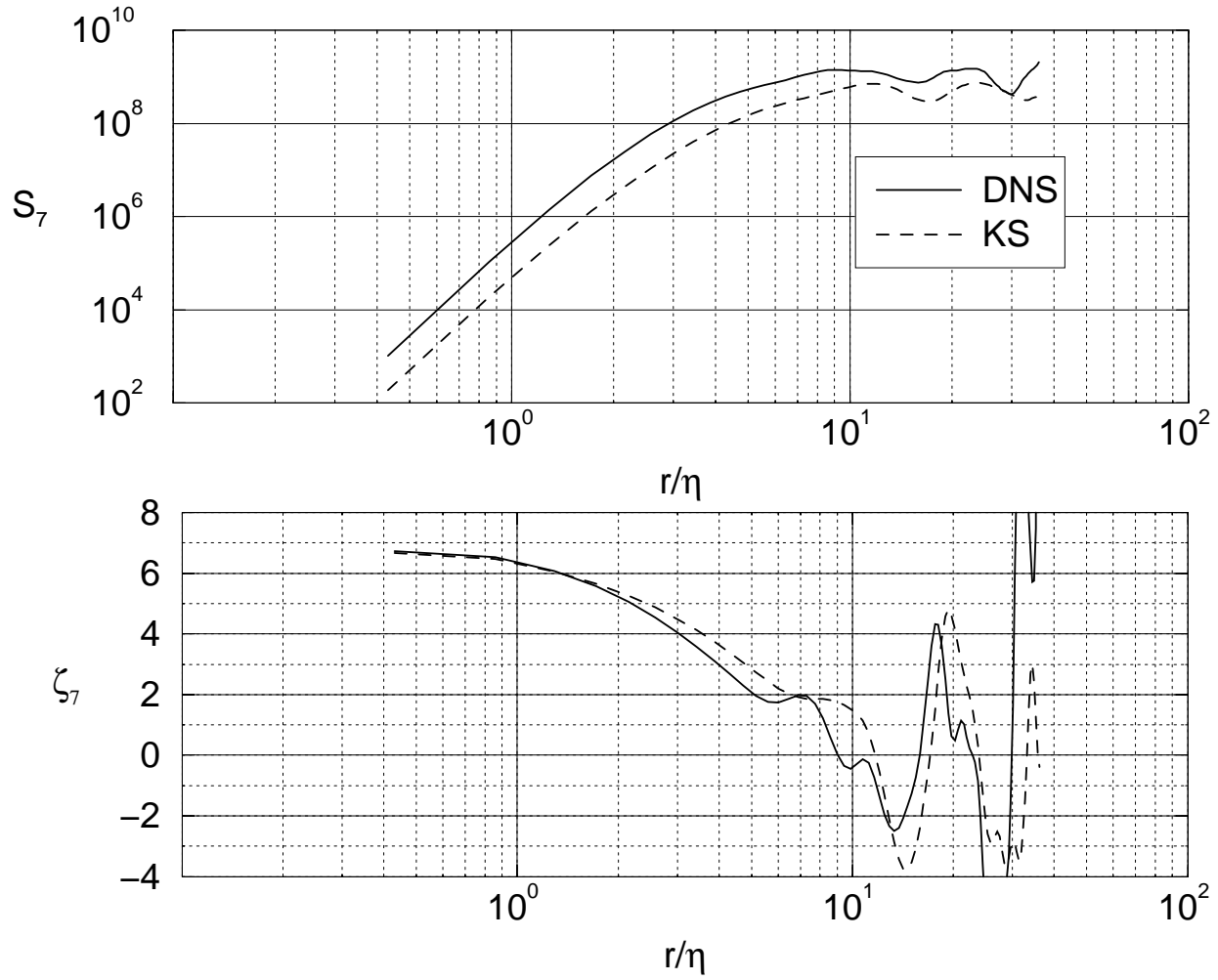


Fig. 6.14: a) Función de estructura de orden 7 ; b) Exponente de la función de estructura de orden 7

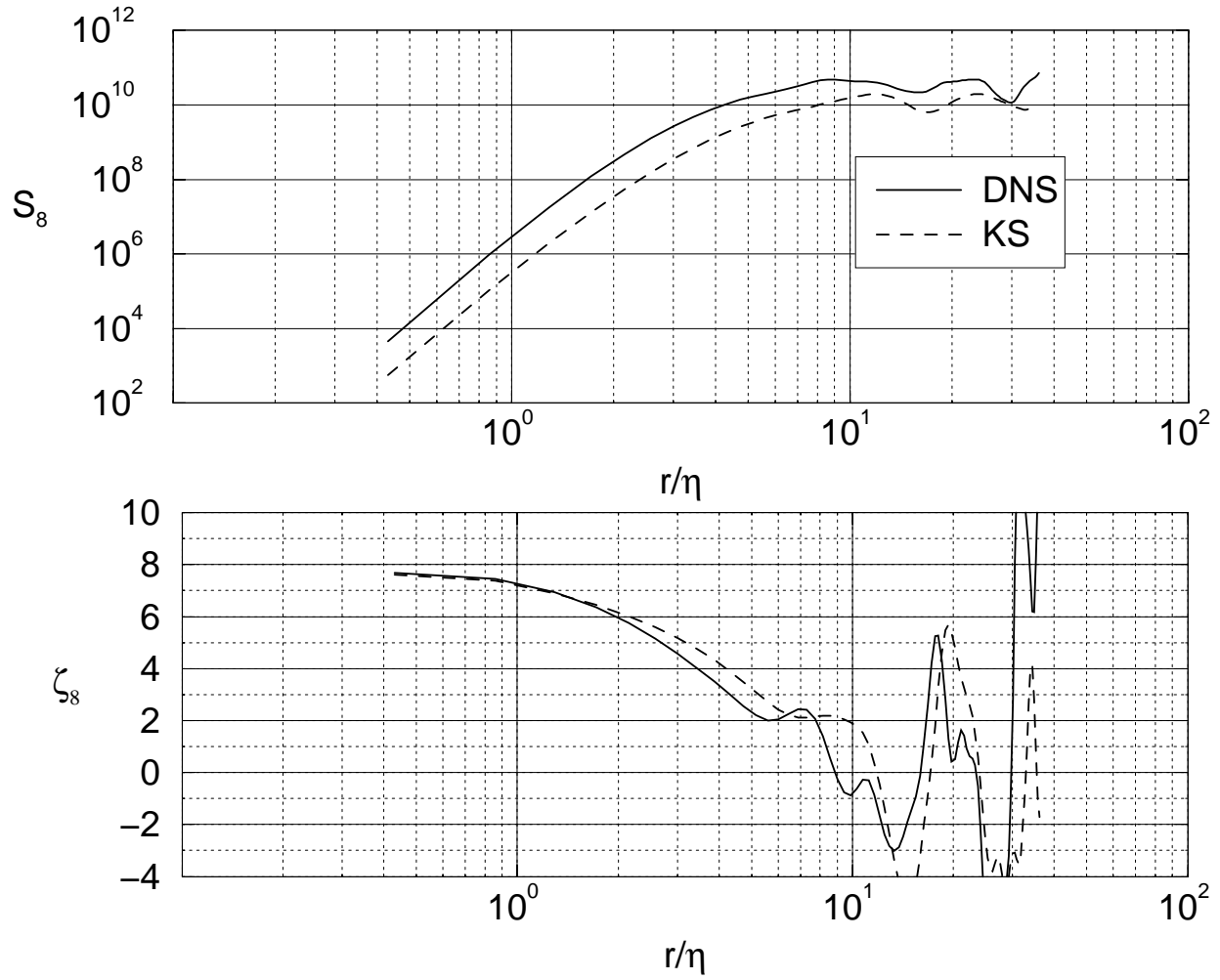


Fig. 6.15: a) Función de estructura de orden 8 ; b) Exponente de la función de estructura de orden 8

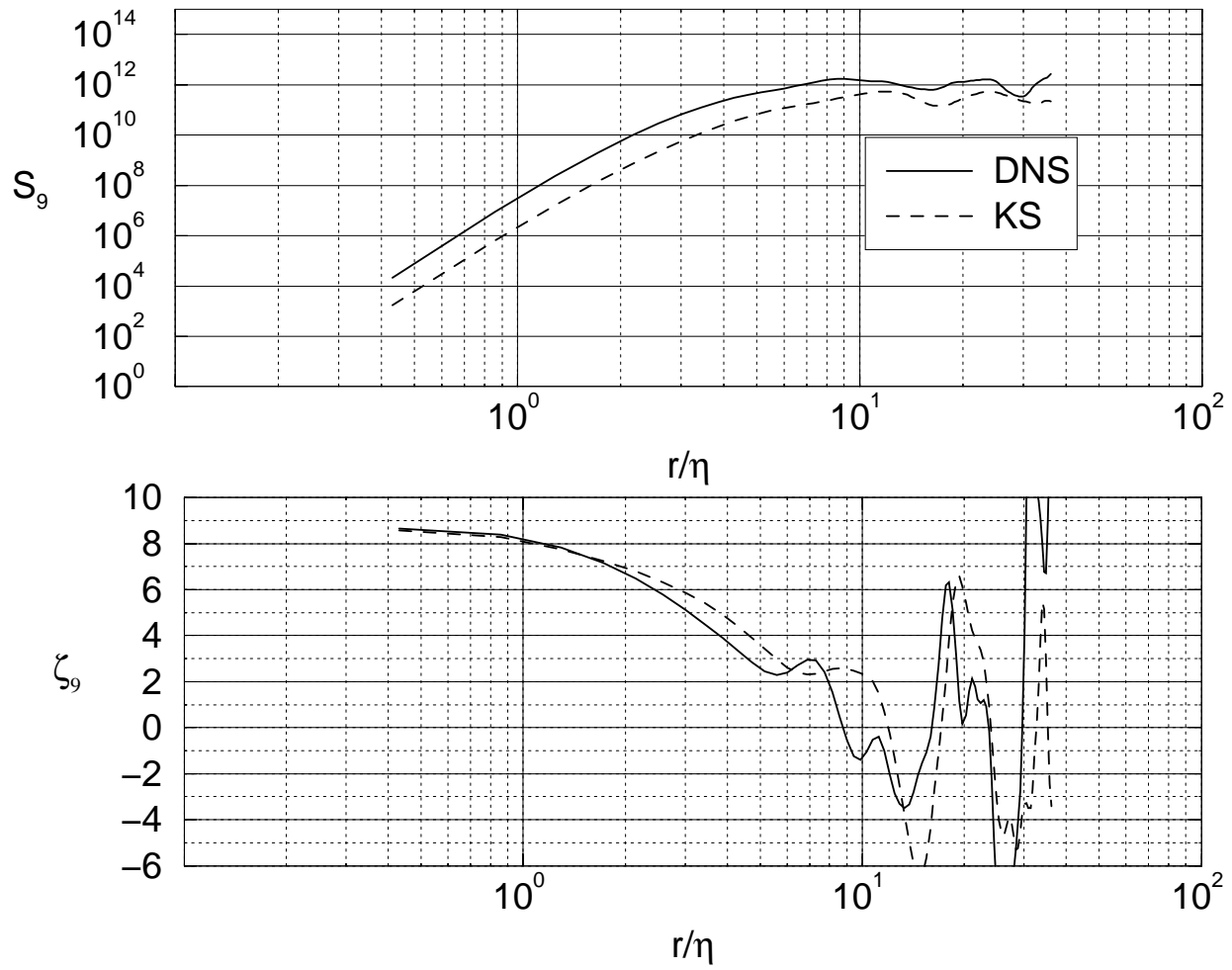


Fig. 6.16: a) Función de estructura de orden 9 ; b) Exponente de la función de estructura de orden 9

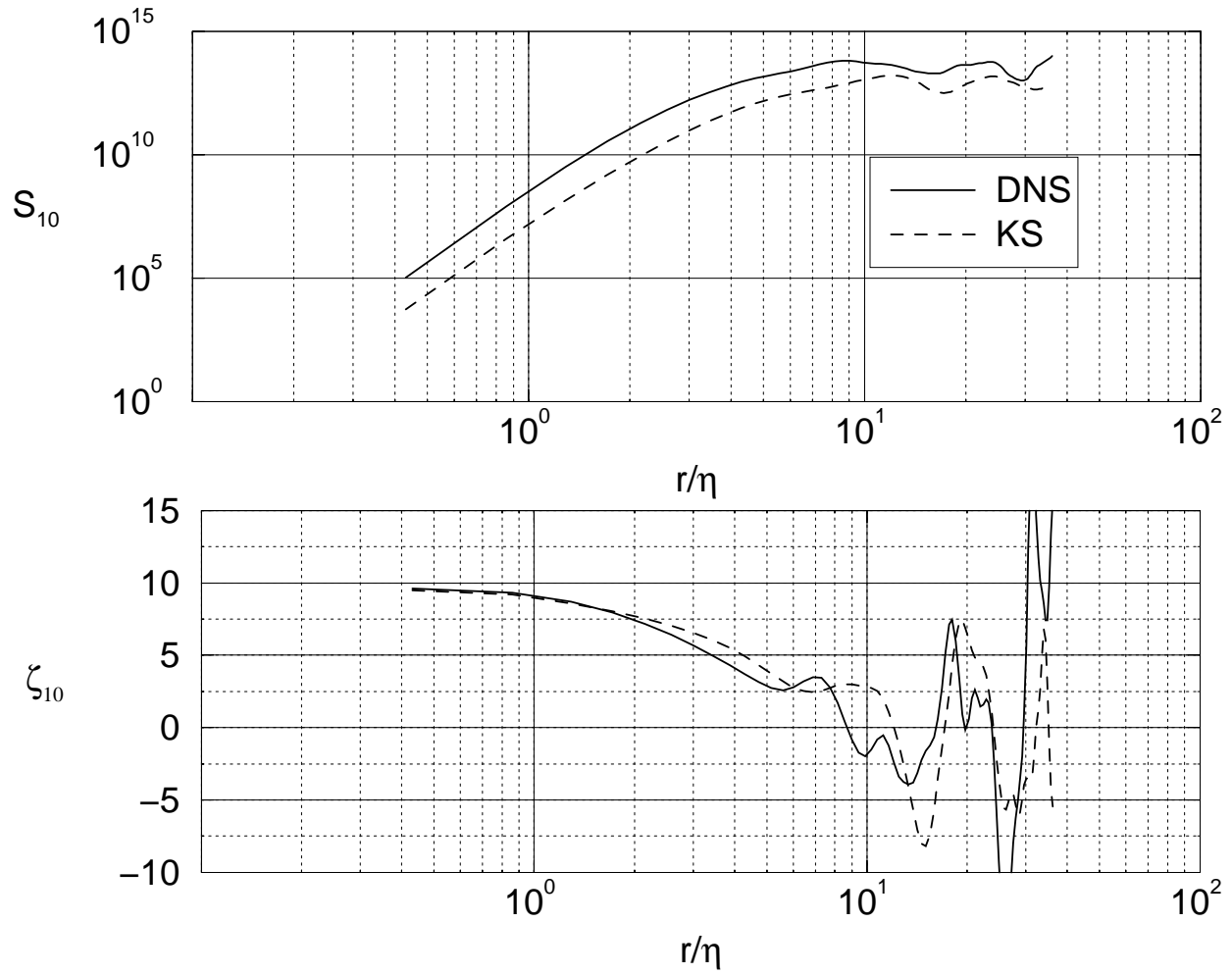


Fig. 6.17: a) Función de estructura de orden 10 ; b) Exponente de la función de estructura de orden 10

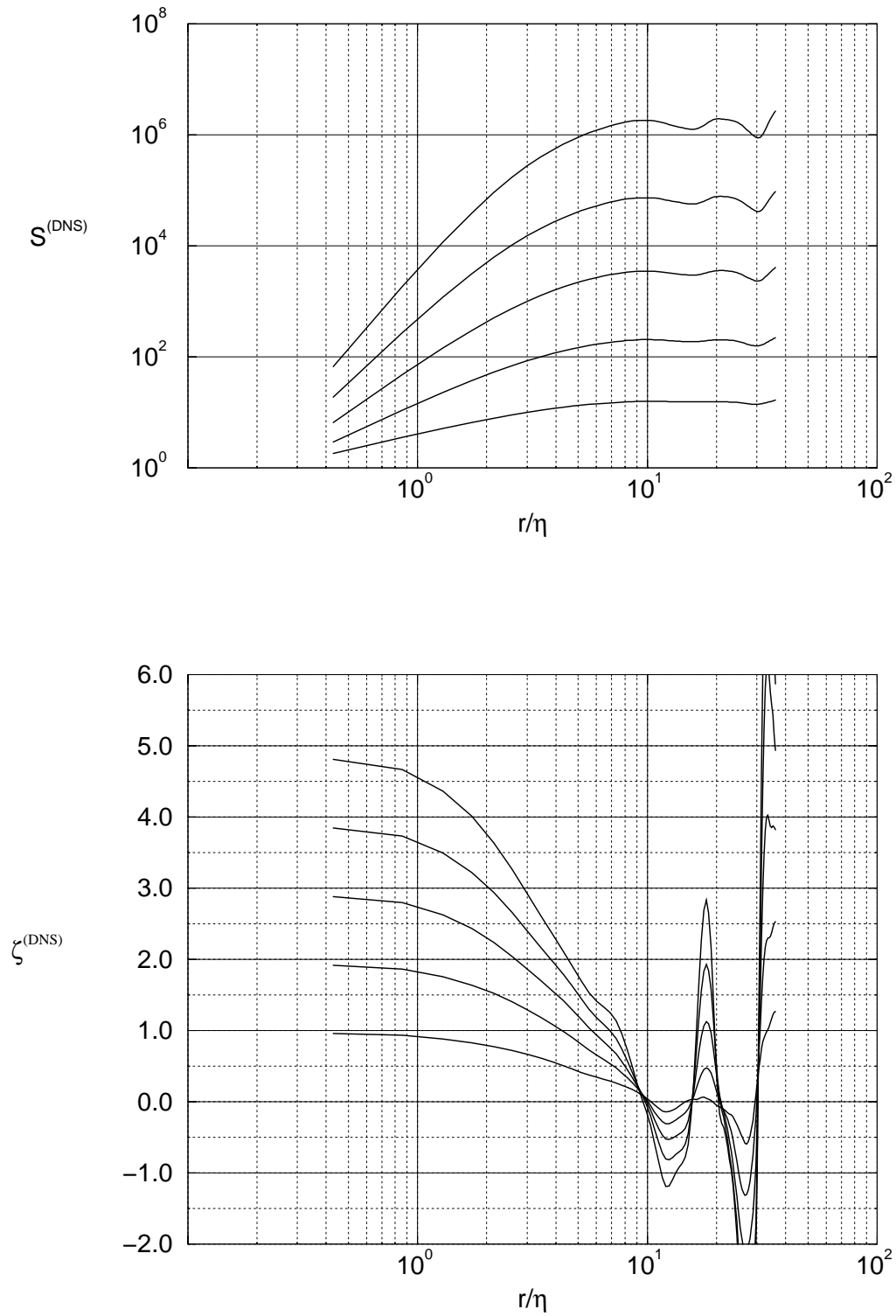


Fig. 6.18: a) Funciones de estructura hasta orden 5 para la DNS ; b) Exponentes de la funciones de estructura hasta orden 5 para la DNS

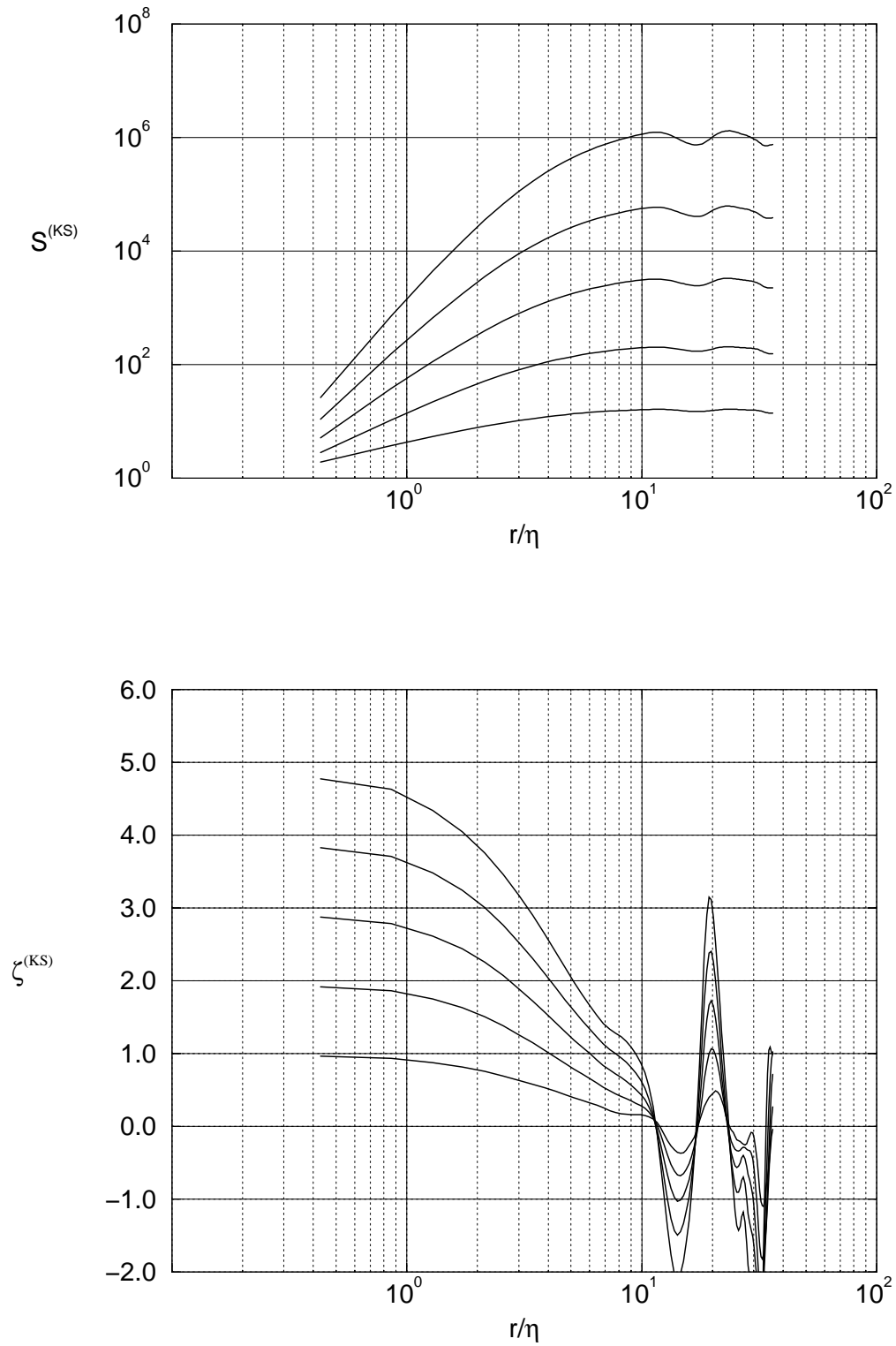


Fig. 6.19: a) Funciones de estructura hasta orden 5 para la KS ; b) Exponentes de la funciones de estructura hasta orden 5 para la KS

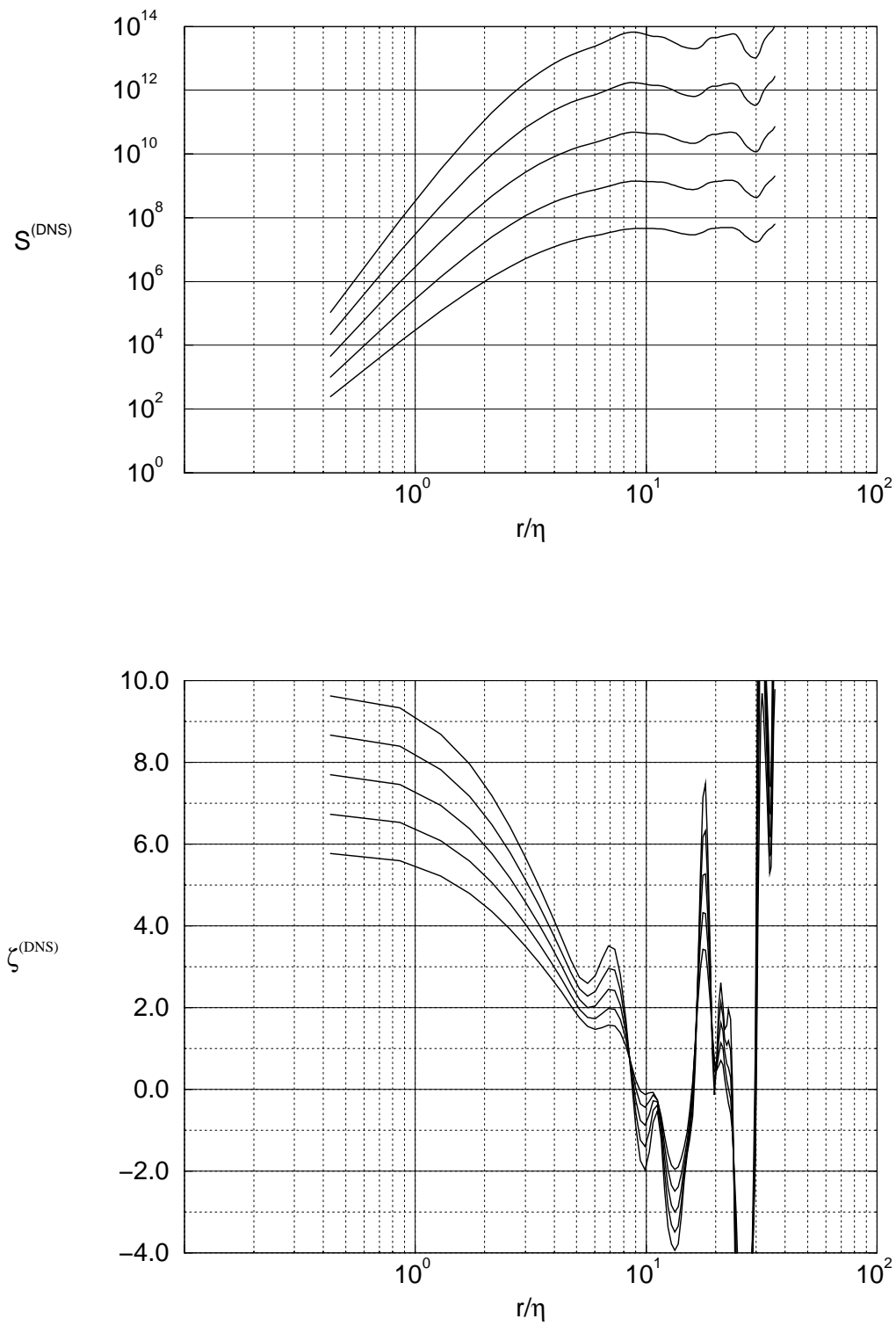


Fig. 6.20: a) Funciones de estructura de orden 6 a 10 para la DNS ; b) Exponentes de la funciones de estructura de orden 6 a 10 para la DNS

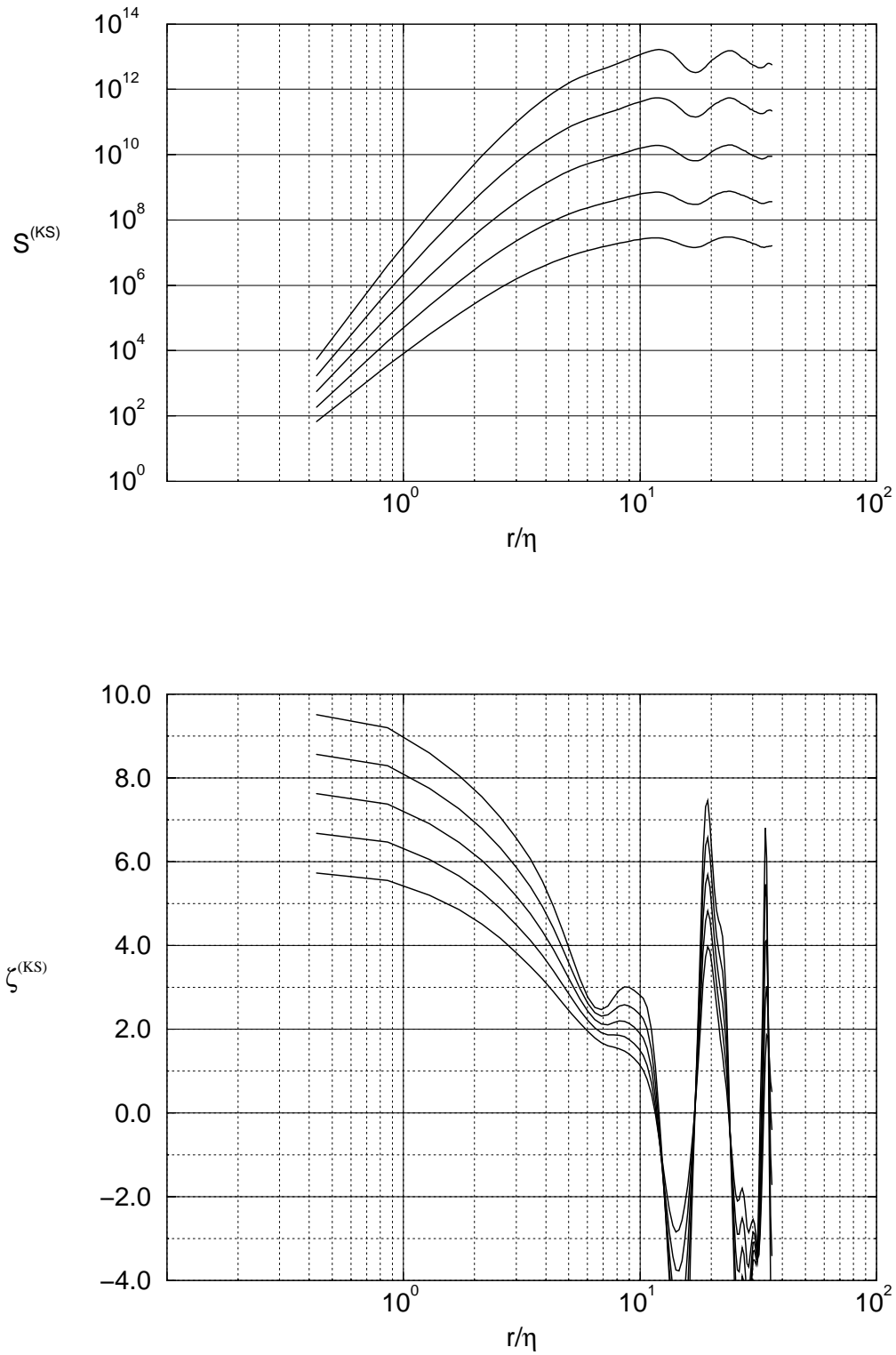


Fig. 6.21: a) Funciones de estructura de orden 6 a 10 para la KS ; b) Exponentes de la funciones de estructura de orden 6 a 10 para la KS

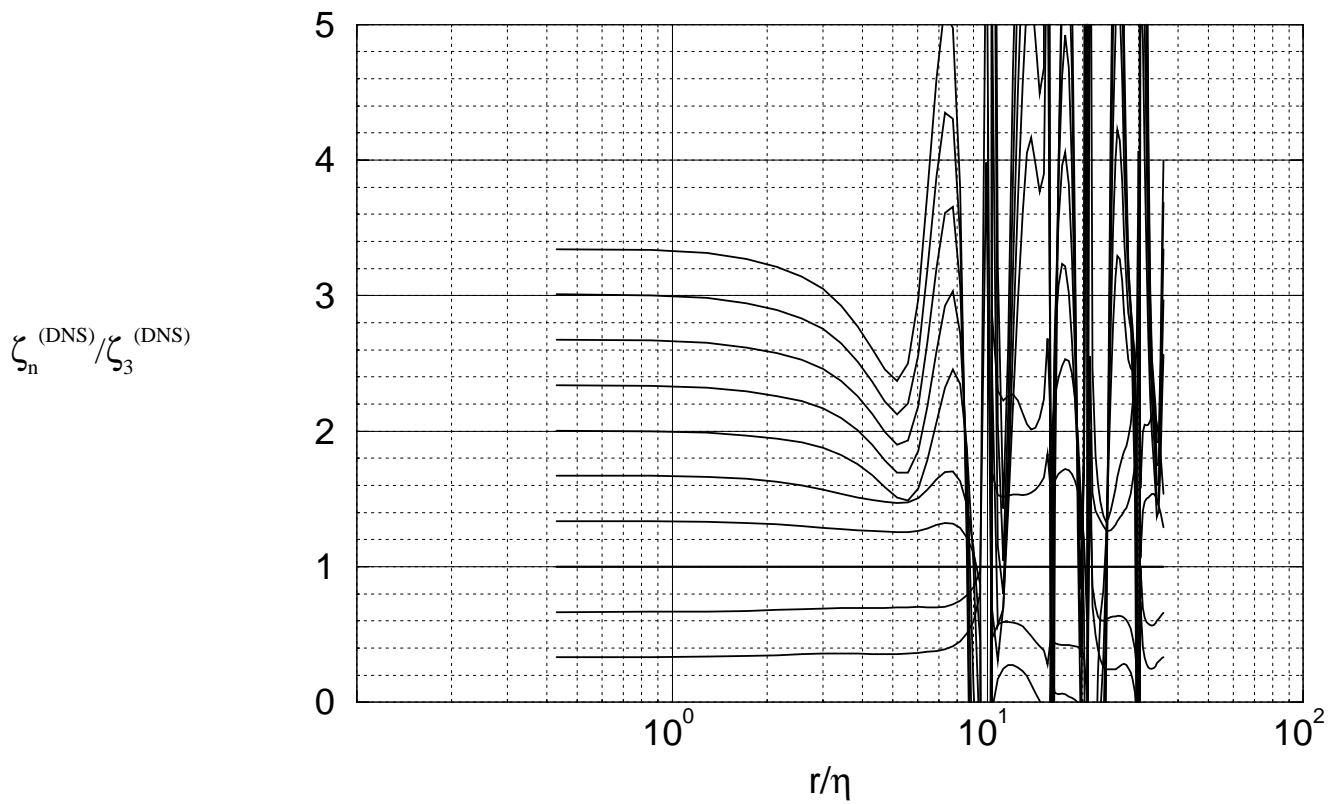


Fig. 6.22: Exponentes relativos de las funciones de estructura longitudinales hasta orden 10 para el campo simulado mediante DNS.

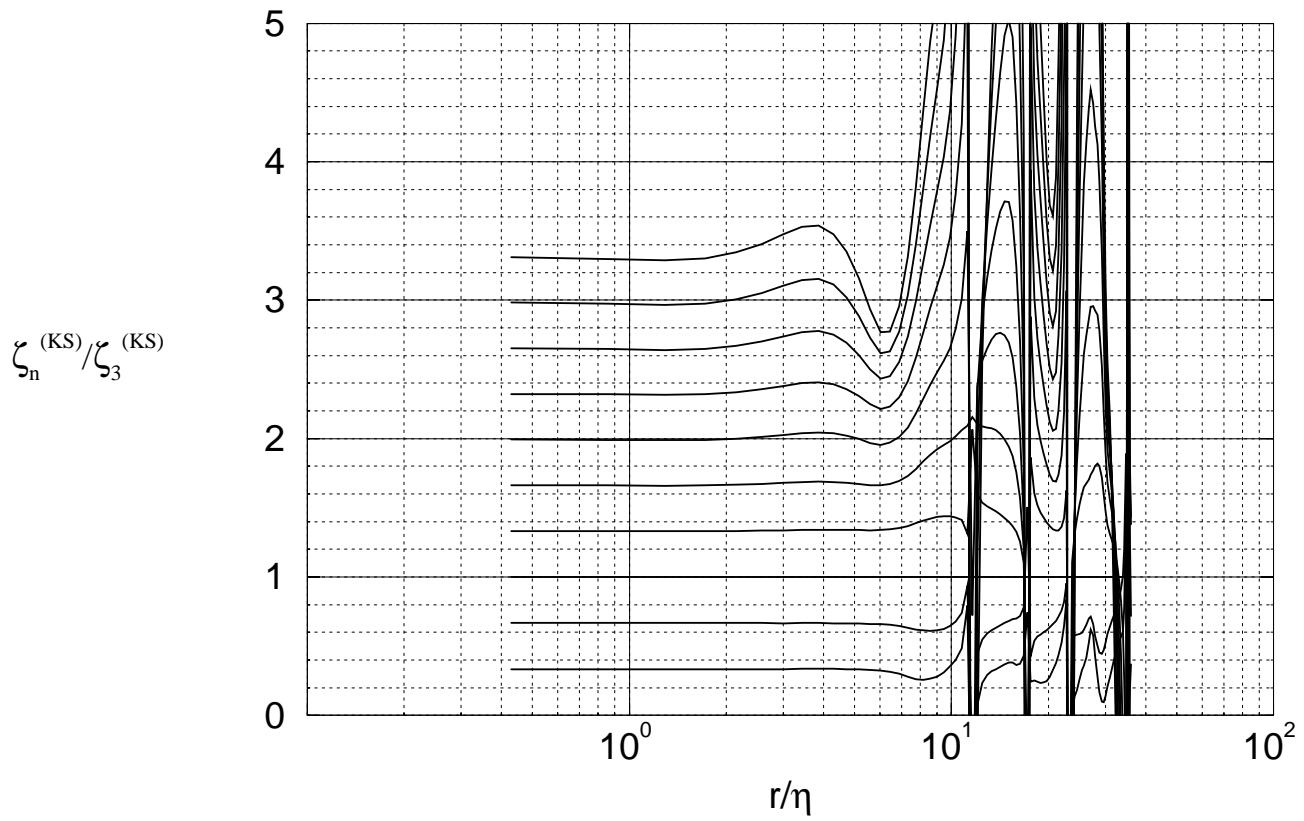


Fig. 6.23: Exponentes relativos de las funciones de estructura longitudinales hasta orden 10 para el campo simulado mediante KS.

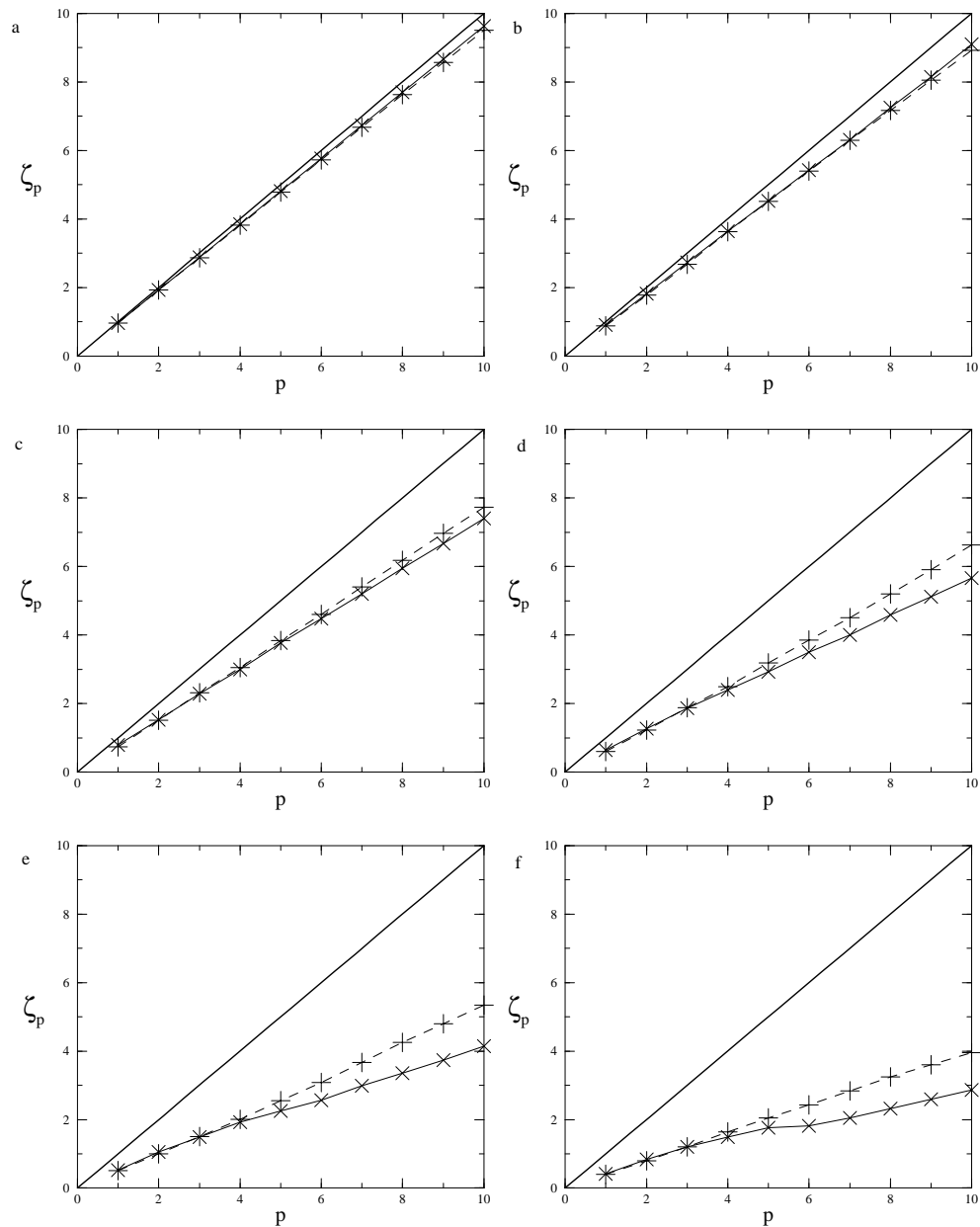


Fig. 6.24: Exponentes de las funciones de estructura de orden p versus p , para diferentes escalas. (a) En el límite viscoso ($r \rightarrow 0$), (b) para $r = \eta$, (c) para $r = 2\eta$, (d) para $r = 3\eta$, (e) para $r = 4\eta$ y (f) para $r = 5\eta$. (\times) y línea continua corresponde a la DNS. ($+$) y línea discontinua corresponde a la KS. Se puede apreciar cómo el comportamiento a pequeña escala es muy similar en ambas simulaciones hasta valores altos del orden de las funciones de estructura. Sin embargo, a partir de $r \sim 3\eta$ la DNS refleja un descenso en los valores de los exponentes absolutos mucho mayor que la KS. Estas escalas son del orden de la escala de Taylor, que es la escala típica de las estructuras coherentes observadas en la DNS.

las funciones de estructura.

En las figuras 6.22 y 6.23 se han representado los exponentes relativos de las funciones de estructura observándose el comportamiento

$$S_n(r) \sim S_3(r)^{\zeta_n/\zeta_3} \quad (6.14)$$

con ζ_n/ζ_3 constante en un rango de escalas mucho mayor, llegando a casi 10η para orden bajo, y 2η para orden 10. Recordamos que la escala integral del campo calculada daba un valor de, aproximadamente, 4η .

Es interesante observar un fenómeno que es aquí mucho más claro que en los exponentes absolutos. Se trata de la diferencia de comportamiento entre las dos simulaciones a partir de $r \sim 2\eta$, que llega a su expresión máxima para $r \sim 4\eta$, y es más apreciable para valores altos del orden de la función de estructura. A esta escala, mientras que los exponentes relativos calculados con el campo de la DNS inician un claro descenso antes de penetrar en la zona de ruido (a partir de $r \sim 7 - 8\eta$), los calculados con la KS se permiten un pequeño aumento de su valor antes de caer en la misma zona. Esto también es apreciable, aunque no de forma tan clara, en las gráficas de los exponentes absolutos (figuras 6.8 a 6.17) como una mayor resistencia al descenso por parte de los calculados con la KS (líneas discontinuas) respecto de los calculados con la DNS (líneas continuas).

Este comportamiento puede ser observado desde otra perspectiva: en la figura 6.24 se muestran los exponentes absolutos de las funciones de estructura en función del orden de la misma. Las gráficas muestran estos exponentes para 6 escalas espaciales diferentes, desde $r \rightarrow 0$ hasta $r = 5\eta$. Se aprecia claramente la diferencia de comportamiento para orden mayor que 4 a partir de $r = 3\eta$, siendo los exponentes de las funciones de estructura de la DNS visiblemente menores que los de la KS.

El hecho de que esta diferencia de comportamientos produzca en una escala espacial del orden de la escala de Taylor parece indicar que es una firma de las estructuras coherentes generadas por la DNS. La KS, por su propia naturaleza cinemática, tiende a mantener su regularidad espacial durante un rango más amplio.

6.2. Estadística Lagrangiana

Como se ha comentado en el apartado anterior, el modelo KS no ofrece sólidas garantías en el análisis Euleriano de la turbulencia, al menos en lo que se refiere a la evolución temporal de la misma. Los resultados obtenidos en el cálculo de la escala integral Euleriana

de tiempo son demasiado diferentes de los observados con la simulación directa de las ecuaciones de Navier-Stokes.

En el presente apartado vamos a analizar el comportamiento de partículas pasivas en campos creados por ambos modelos.

6.2.1. Autocorrelación temporal de velocidades

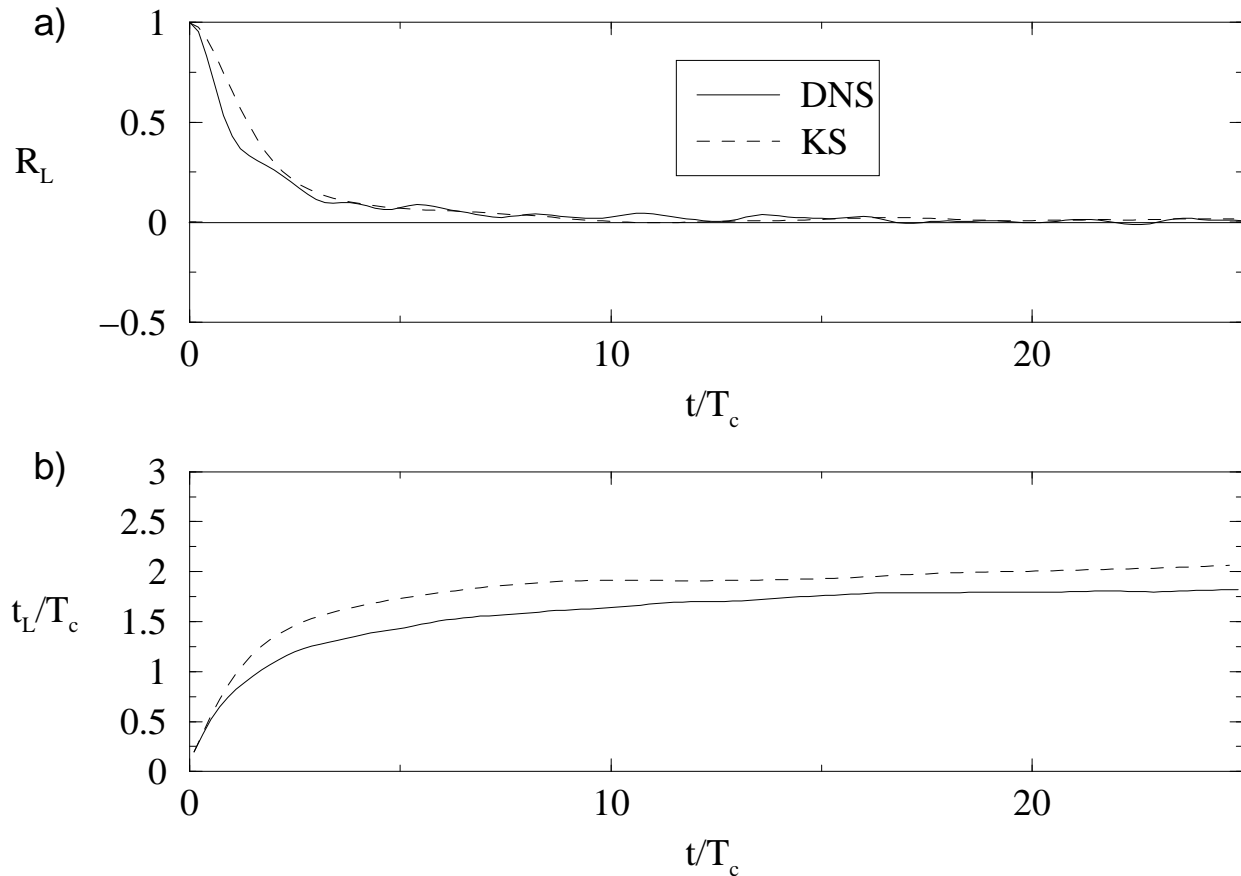


Fig. 6.25: a) Autocorrelación temporal Lagrangiana; b) Escala integral Lagrangiana de tiempo. Este experimento ha sido realizado con $\lambda = 0,6$.

La autocorrelación temporal Lagrangiana ofrece resultados muy similares para los dos modelos numéricos, como puede apreciarse en la figura 6.25.

No obstante, el tiempo característico Lagrangiano es algo menor en la simulación cinemática.

Dado que la evolución temporal de la turbulencia simulada cinemáticamente está controlada por el parámetro λ (ver ecuación (5.11)), parece evidente que la escala de tiempo Lagrangiana va a depender también de este parámetro. En las primeras simulaciones se estableció un valor de $\lambda = 0,6$, que ha resultado ser excesivamente grande. Se han realizado entonces diferentes simulaciones con valores de λ entre 0,0 y 1,0. Se pueden observar los resultados en la figura 6.26. En la tabla 6.1 y en la figura 6.28 se muestran los valores concretos de los tiempos integrales. Se observa que, excepto para los valores $\lambda = 0,0$ y $\lambda = 0,1$, el resto da un resultado aceptable.

En el caso concreto de $\lambda = 0,0$, se ha repetido el experimento con un tiempo de ejecución más largo para comprobar si se mantenía la tendencia descendente observada en la figura 6.26. El experimento muestra, como indica la figura 6.27, que el tiempo integral para este valor de λ es todavía más pequeño, convergiendo la curva en un valor aproximado de 0.15. La explicación es sencilla. En la figura 6.29 se han dibujado las trayectorias de 5 partículas escogidas al azar para dos valores diferentes de λ : $\lambda = 0,0$ y $\lambda = 0,5$. En el primer caso, de las 5 partículas, 3 describen una órbita cerrada y 2 de ellas coinciden en la órbita. Estas partículas se mantendrán dentro de su propia órbita de forma indefinida. En el segundo caso, las trayectorias de las partículas son mucho más erráticas y es prácticamente imposible que se den trayectorias cerradas. La fracción de las partículas que en el primer caso describen órbitas cerradas generan los pequeños picos que se observan en la autocorrelación de velocidades de la figura 6.27 y los cuales son responsables, de forma global, de la disminución del tiempo integral Lagrangiano.

Simulación	T_L/T_z
DNS	1.96
KS ($\lambda = 0,0$)	0.61
KS ($\lambda = 0,1$)	1.21
KS ($\lambda = 0,2$)	1.54
KS ($\lambda = 0,3$)	1.55
KS ($\lambda = 0,4$)	1.73
KS ($\lambda = 0,5$)	1.78
KS ($\lambda = 0,6$)	2.15
KS ($\lambda = 0,7$)	1.69
KS ($\lambda = 0,8$)	1.78
KS ($\lambda = 0,9$)	1.61

Tab. 6.1: Tiempos característicos Lagrangianos.

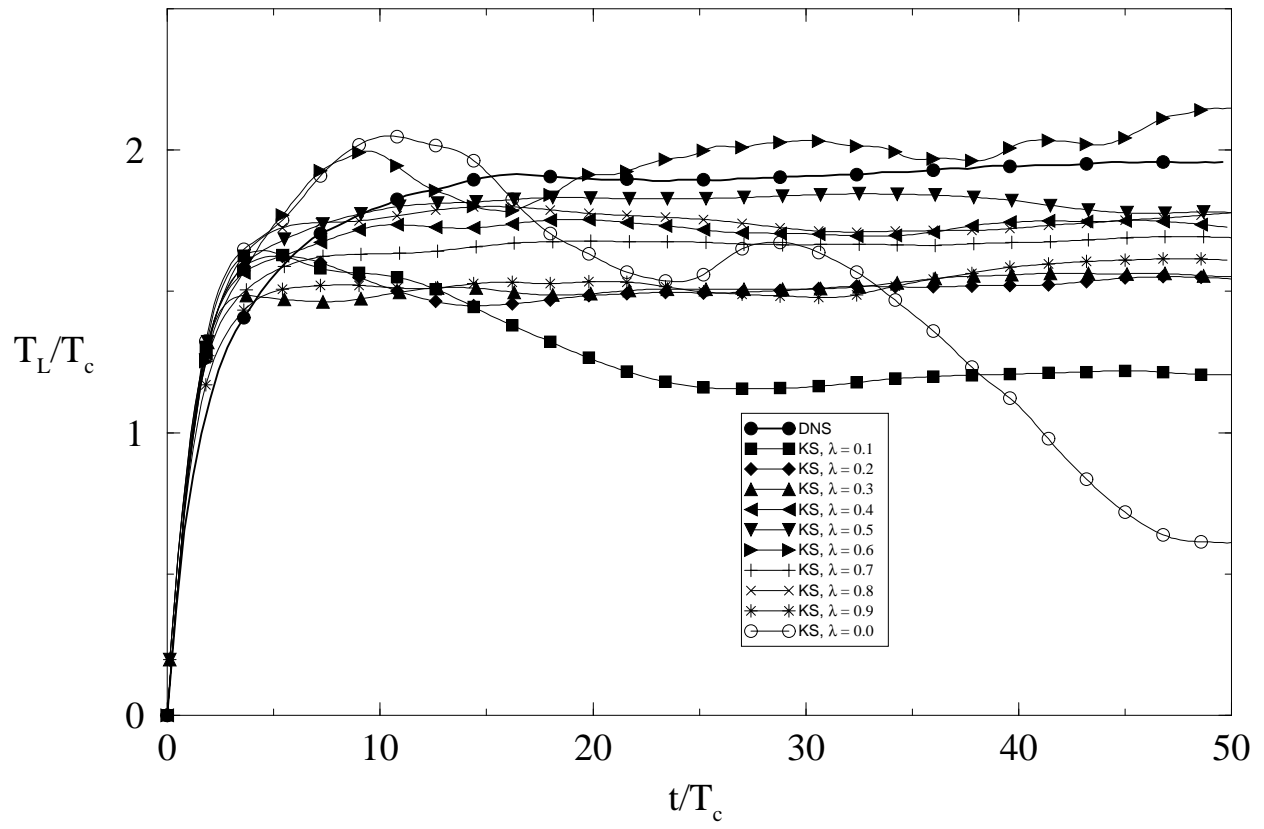


Fig. 6.26: Tiempos característicos Lagrangianos para diferentes valores del parámetro λ .

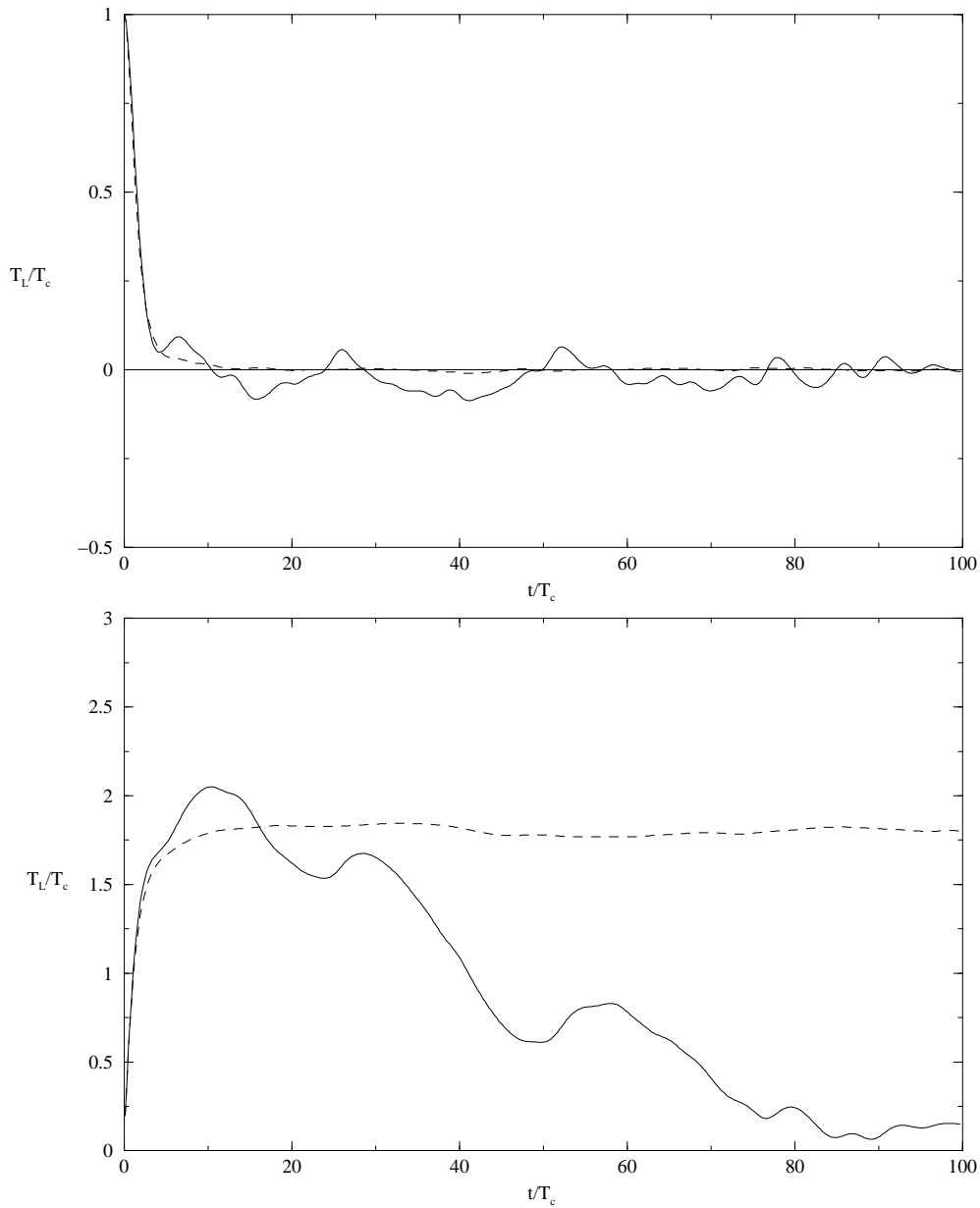


Fig. 6.27: Correlación de velocidades Euleriana y tiempo característico Lagrangiano para $\lambda = 0,0$ con un tiempo de ejecución mayor que en la figura 6.26. El valor de T_L disminuye hasta 0.15. La línea discontinua muestra el comportamiento para $\lambda = 0,5$, a efectos de comparación.

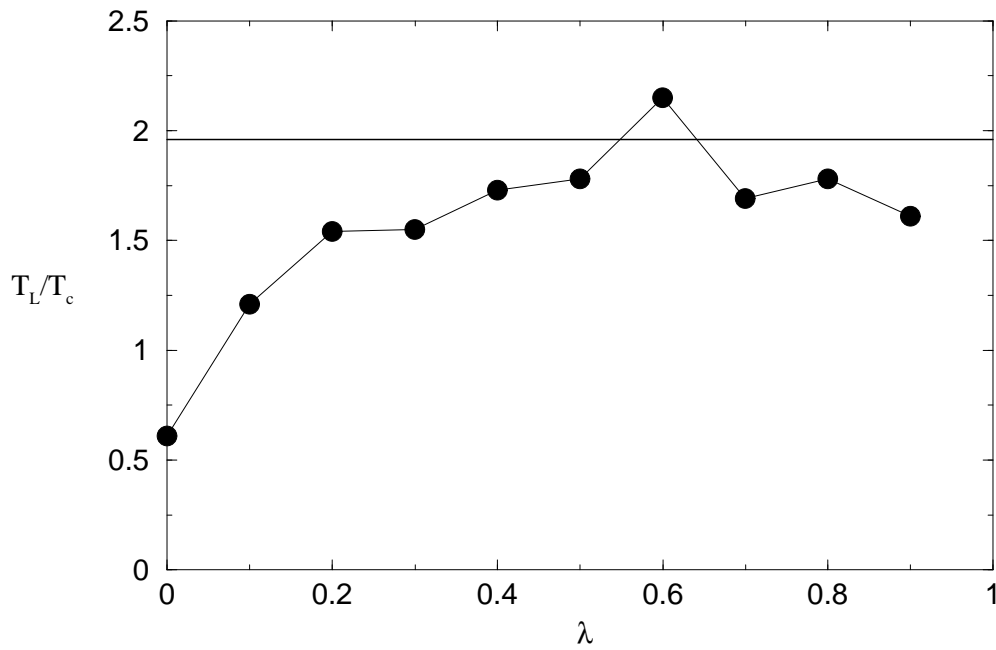


Fig. 6.28: Tiempos característicos Lagrangianos para diferentes valores del parámetro λ . La línea horizontal corresponde al tiempo integral calculado con la DNS.

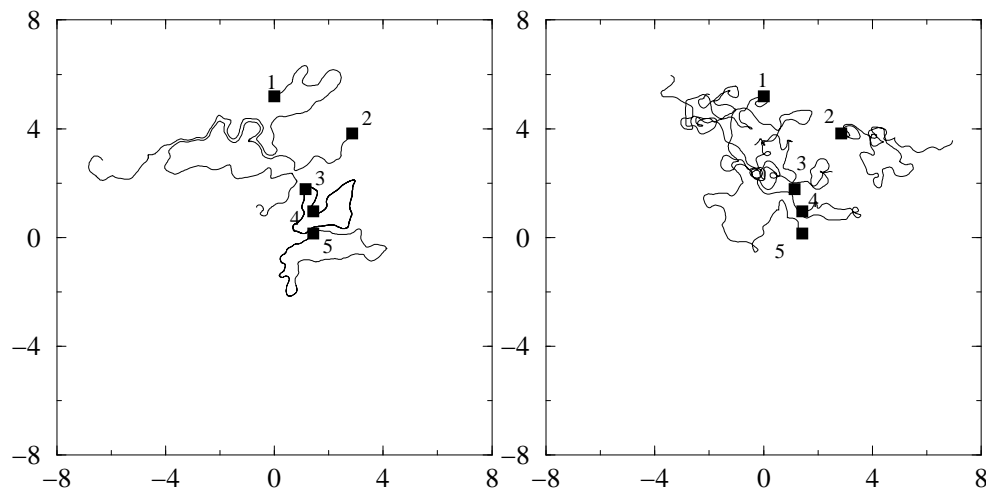


Fig. 6.29: Trayectorias de 5 partículas escogidas al azar. En la figura de la izquierda, el campo Euleriano de advección fue calculado con $\lambda = 0,0$, en la de la derecha, $\lambda = 0,5$. Puede observarse la tendencia de las partículas en el primer caso a realizar órbitas cerradas. Las partículas 3 y 4 están encerradas en la misma trayectoria. Es prácticamente imposible que esto se observe con $\lambda > 0$. Este comportamiento afecta al cálculo del tiempo integral Lagrangiano, como se puede observar en las figuras 6.26 y 6.28.

6.2.2. Dispersión absoluta

Se ha usado una configuración idéntica de posicionamiento inicial de partículas para comparar la dispersión absoluta y la relativa en un flujo simulado mediante DNS y mediante KS. Un número de 1000 partículas son distribuidas en el dominio $2\pi \times 2\pi$ y se dejan evolucionar con el campo de velocidades. Ambos campos de velocidades tienen espectro de energía prácticamente idénticos (véase la figura 6.1).

En esta sección se analiza la dispersión absoluta, dejando para la siguiente los resultados obtenidos con la dispersión relativa.

La dispersión absoluta y el coeficiente de dispersión absoluta vienen definidos por (3.3) y (3.4). Para el campo Euleriano representado en la figura 6.2, la dispersión absoluta evoluciona en el tiempo según la gráfica de la figura 6.30. El coeficiente de dispersión absoluta es mostrado en la figura 6.31, donde se aprecia el comportamiento asintótico para tiempos grandes como una horizontal, $K_a = 2ET_L$, como se deduce de (3.13ab).

El comportamiento de la dispersión absoluta es muy similar en ambos casos, si bien se advierte cierta discrepancia en los tiempos intermedios. La evolución “anómala” observada en tiempos intermedios ha sido comentada brevemente en la sección 4.2, donde se describe el modelo de DNS utilizado en nuestros experimentos numéricos. Este modelo presenta una evolución de la dispersión absoluta como $A^2 \sim t^{5/4}$, y Babiano et al. (1990), Babiano (2000) y Elhmaïdi et al. (1993) justifican este comportamiento con la topología del campo y el efecto de las estructuras coherentes. El hecho de que este comportamiento “anómalo” en $t^{5/4}$ no sea observado en los experimentos con KS no hace más que apoyar este argumento. Para observar con más claridad esta diferencia de comportamientos de la dispersión absoluta a tiempos intermedios se han realizado tres gráficas más: En la figura 6.32 la dispersión absoluta ha sido dividida por $t^{5/4}$, de forma que la región temporal en la que la dispersión absoluta se comporta según esta ley aparece como una horizontal (se observa claramente en el caso de la DNS en $4 \lesssim t/T_c \lesssim 70$, pero no en el de la KS); en la figura 6.33 la dispersión absoluta ha sido dividida por t , para poder resaltar la región en la que el comportamiento es lineal en el tiempo (movimiento Browniano), observándose únicamente en la KS a partir de $t \sim 30T_c$, pero no en la DNS; en la figura 6.34 se muestran los exponentes de t en la ley de evolución temporal de la dispersión absoluta y se observa la estabilización del correspondiente a la DNS alrededor de $5/4 = 1,25$, mientras que el correspondiente a la KS sigue disminuyendo hasta alcanzar el valor de 1 y estabilizarse.

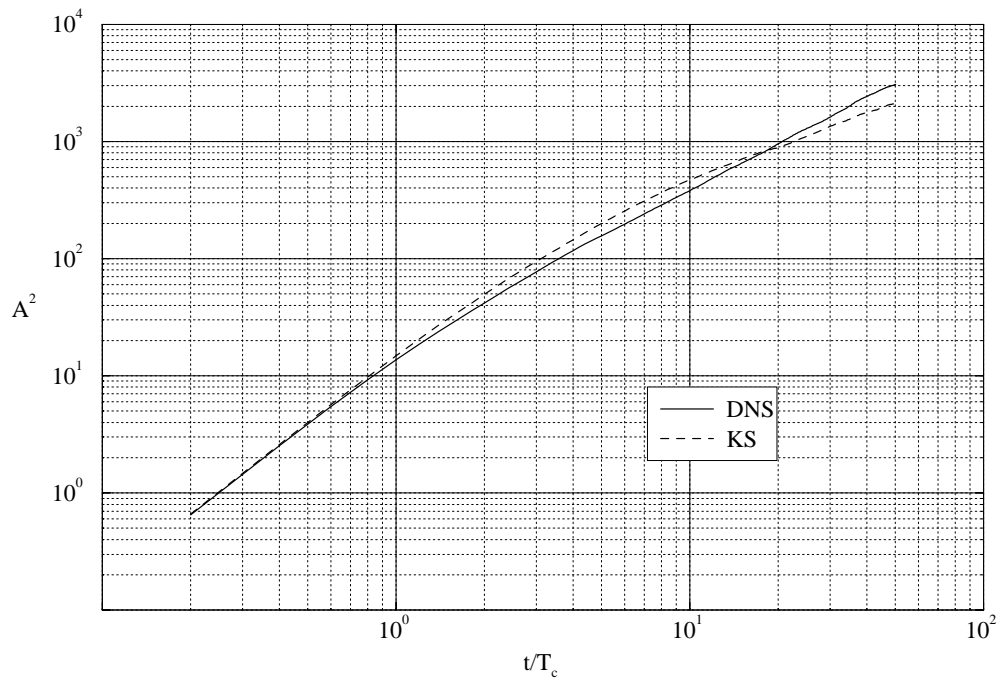


Fig. 6.30: Evolución temporal de la dispersión absoluta en los dos experimentos numéricos.

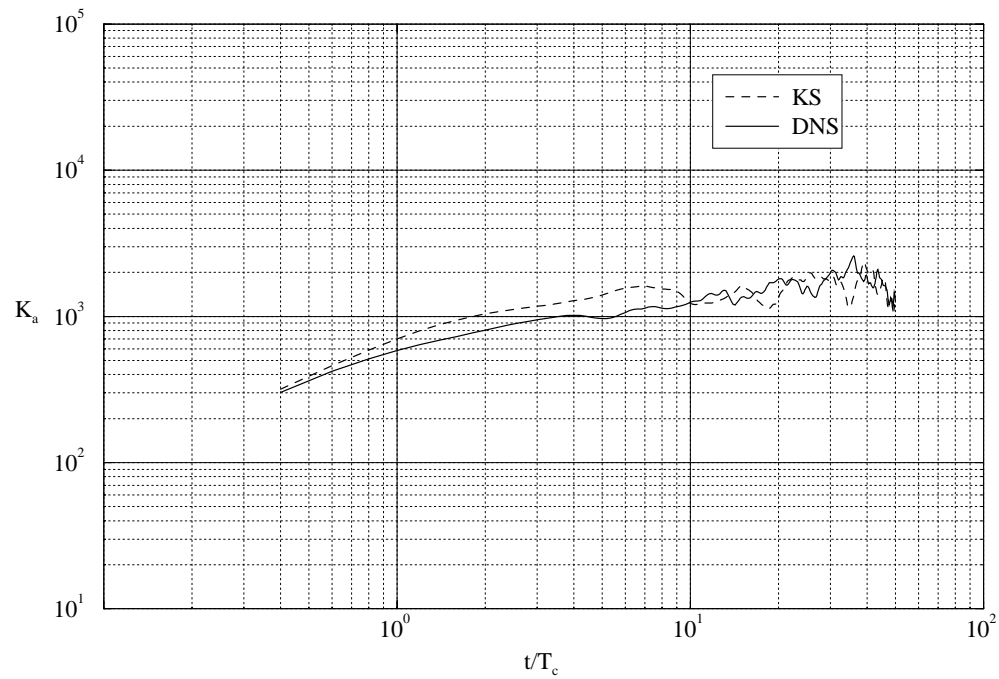


Fig. 6.31: Evolución temporal del coeficiente de dispersión absoluta en los dos experimentos numéricos.

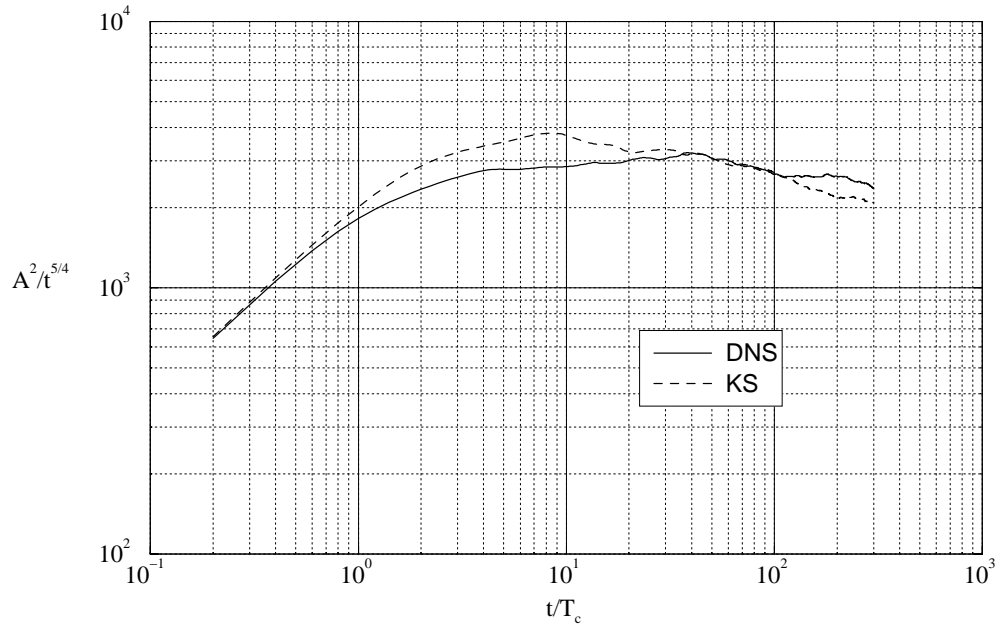


Fig. 6.32: Evolución temporal de la dispersión absoluta normalizada por $t^{5/4}$.

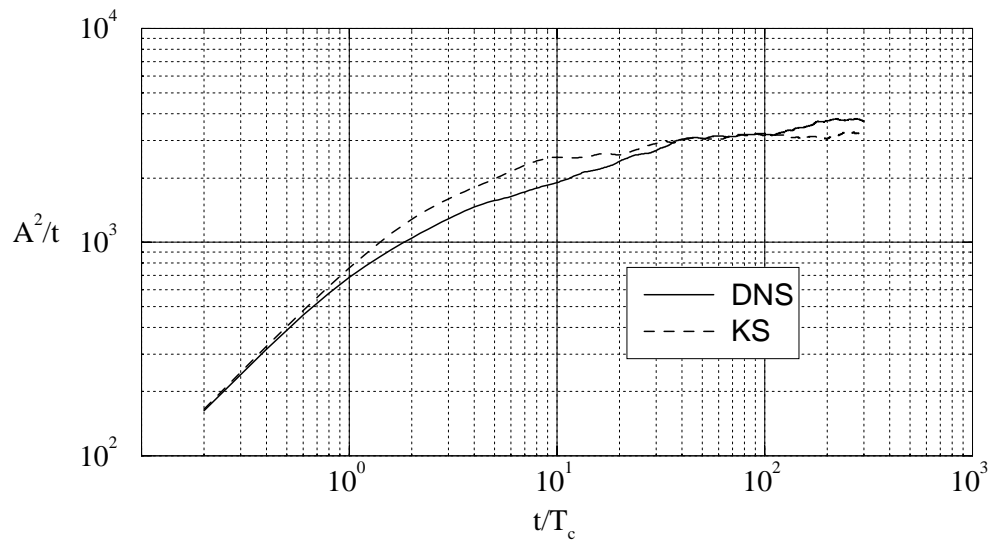


Fig. 6.33: Evolución temporal de la dispersión absoluta normalizada por t .

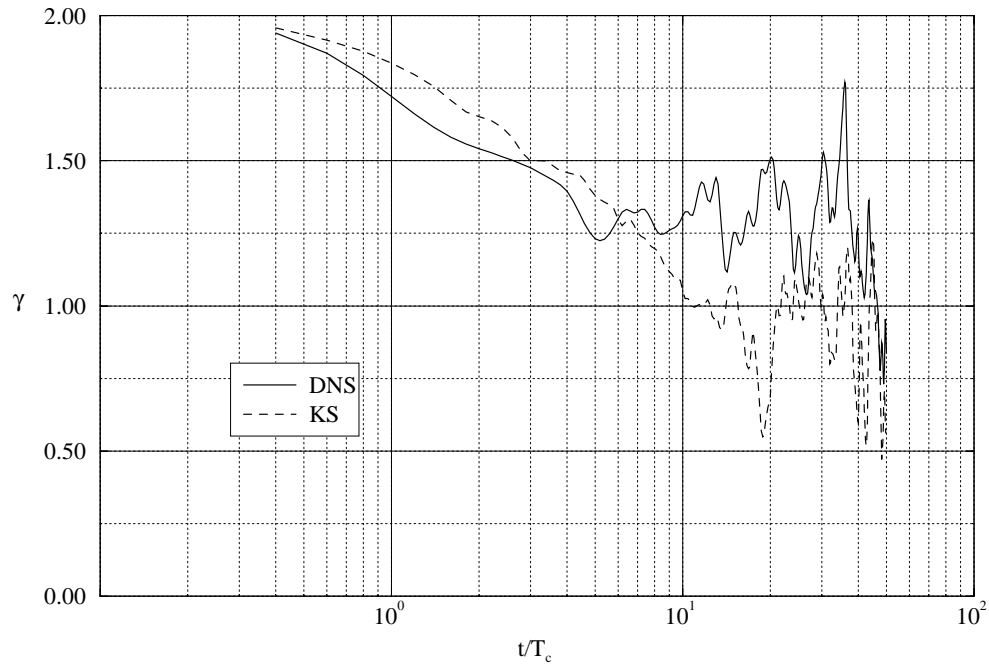


Fig. 6.34: Evolución temporal del exponente γ de la ley de dispersión absoluta, $A^2 \sim t^\gamma$.

6.2.3. Dispersión relativa

La dispersión relativa entre pares de partículas ha sido estudiada con diferentes separaciones iniciales entre las partículas en relación a la escala η de disipación de enstrofia. Los resultados directos de estas simulaciones están representados en la figura 6.35. Las separaciones iniciales de las partículas son, de abajo a arriba: $6 \cdot 10^{-3}\eta$, $0,6\eta$, $1,1\eta$, $1,7\eta$, $2,2\eta$ y $2,8\eta$.

Puede observarse claramente la gran similitud de comportamiento entre los dos modelos. La única diferencia apreciable se encuentra para una separación inicial muy pequeña. En $t \sim 7-8T_c$, se produce un gran salto en la DNS. La explicación es sencilla: Para este tiempo la separación relativa entre partículas aumenta de forma muy brusca hasta alcanzar el valor de $\sim 0,2\eta$, ($D^2 \sim 0,4\eta$) que es, precisamente, el valor de la discretización del dominio. Por debajo de este valor, las partículas no son separadas por la turbulencia, sino por la interpolación “spline” cúbica realizada entre nodos. Dicho de otra forma, lo que ocurre por debajo de esta escala, no resuelta por la DNS, no tiene nada que ver con la turbulencia. Esto no lo encontramos en la KS, dado que, por su propia naturaleza, resuelve todas las escalas, y no depende del tamaño de una malla.

A parte de esta discrepancia poco importante, el comportamiento de la dispersión

relativa es sorprendentemente parecido, incluso a la escala de Taylor, donde encontrábamos diferencias en la dispersión absoluta debido a la acción de las estructuras coherentes. En el caso de la dispersión relativa, las estructuras coherentes vorticales no parecen tener una repercusión apreciable.

Por otro lado, se observa que la ley de Richardson no es alcanzada si la separación inicial es lo suficientemente grande. La interpretación física de este hecho también es sencilla. Se necesita un cierto tiempo de tránsito en el flujo para que la dispersión relativa entre partículas alcance la ley de crecimiento de Richardson. Si la separación inicial es mayor que un cierto valor crítico, cuando las partículas han transitado durante el tiempo necesario, su separación ya es del orden de la escala integral, o incluso más, del orden de la escala D_E máxima del espectro. En este momento, la separación relativa pasa a crecer según la ley de Einstein, sin haber conocido la de Richardson. Es el caso de las 5 simulaciones de la parte superior de la gráfica 6.35, que es mostrada de nuevo en la figura 6.36 normalizada por t^3 para descubrir la ley de Richardson en forma de horizontal. Ésta no es alcanzada por ninguna de las simulaciones con una separación inicial del orden de η , pero sí por la simulación con $D_0 = 6 \cdot 10^{-3} \eta$, aunque por un espacio de tiempo bastante pequeño (de 20 a $70T_c$, aproximadamente) debido, sin duda, al bajo número de Reynolds de las simulaciones, que conlleva un subrango inercial muy corto.

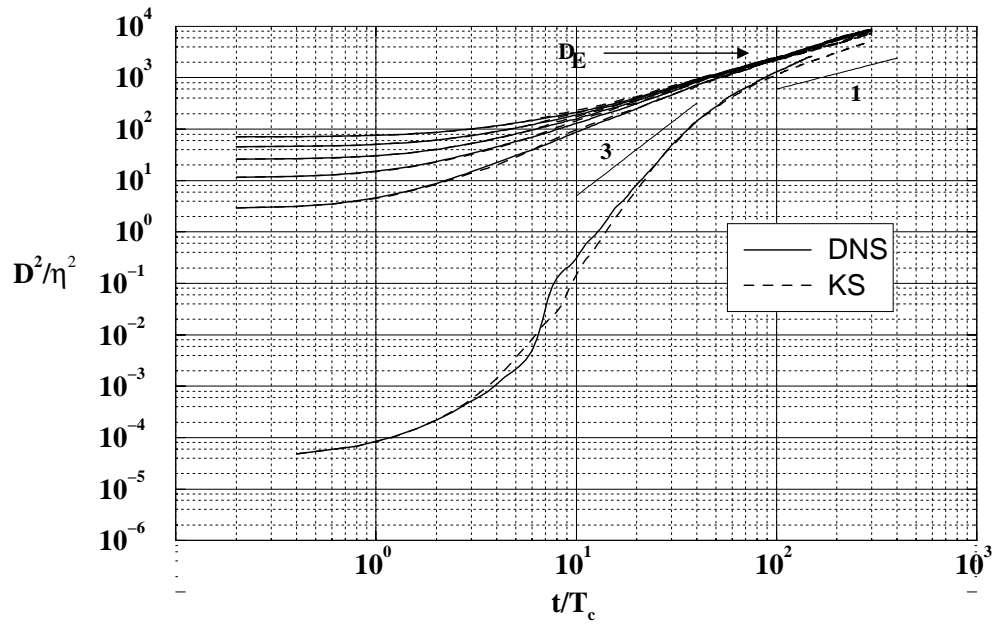


Fig. 6.35: Dispersión relativa para los dos modelos, con diferentes separaciones iniciales. Desde la mas pequeña a la mas grande, las separaciones iniciales son $6 \cdot 10^{-3}\eta$, $1,1\eta$, $1,7\eta$, $2,2\eta$ y $2,8\eta$. El salto que se aprecia en la simulación DNS es debido a la entrada en la escala de resolución del dominio.

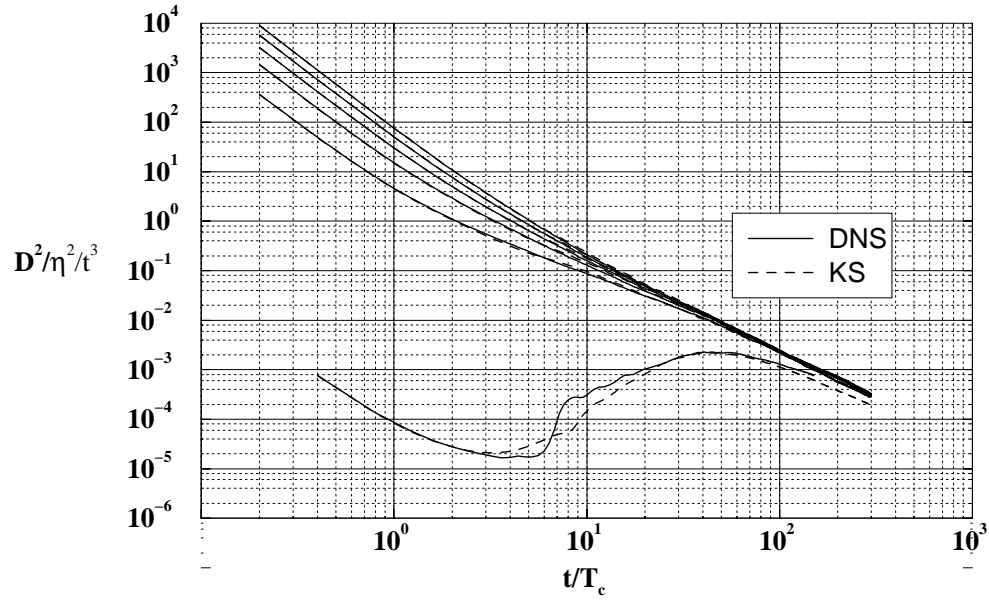


Fig. 6.36: Los mismos datos que en la gráfica 6.35, pero normalizada por t^3 , de forma que se puede apreciar la ley de Richardson únicamente para una separación inicial pequeña, en el rango de tiempos de $30T_c$ a $70T_c$, que corresponden a separaciones con una escala dentro del subrango inercial.

