

7. EFECTOS DE LAS VARIACIONES EN LA LEY ESPECTRAL

En el capítulo anterior se han descrito los resultados obtenidos comparando la cinemática Lagrangiana con el modelo KS y una DNS de probada confianza. Dado el comportamiento excelente de la KS en el estudio de la dispersión relativa de partículas, se ha realizado el estudio de ésta para diferentes casos de leyes de espectro de energía, suponiendo que ésta es una ley potencial,

$$E(k) = Ck^{-n}, \quad (7.1)$$

y variando el valor del exponente n .

Este estudio ha sido llevado a cabo en la línea del artículo de Fung y Vassilicos (1998), si bien ellos se centraban en espectros con potencia menor que 3, y nosotros veremos también el caso de espectros con pendientes más pronunciadas.

Se han realizado dos series de experimentos: Los primeros con espectros en los que se mantiene constante la energía total del campo y la escala de disipación, variando en consecuencia la escala máxima del espectro, y otra serie donde se mantienen constantes la escala máxima y la escala de disipación, variando por lo tanto la energía del campo a medida que se modifica la ley espectral. El objetivo es verificar la ley de Richardson generalizada (3.55) (véase Fung and Vassilicos (1998)) y estudiar el comportamiento de la dispersión relativa cuando la pendiente del espectro es mayor que 3, caso en el que la ley de Richardson generalizada no es aplicable. Se realizan las dos series de experimentos descritos para observar la influencia de variaciones en la energía total del campo y en la escala externa.

Desde una perspectiva Euleriana, se ha estudiado el efecto de la variación de la ley espectral, manteniendo constante la energía total del flujo, sobre las funciones de estructura longitudinales Eulerianas.

A la luz de los resultados descritos en el capítulo anterior, se optó por realizar todos los experimentos con $\lambda = 0,5$.

7.1. Campos a energía constante

7.1.1. Los espectros de energía

En las figuras 7.1 a 7.8 se presentan las distribuciones de vorticidad y los espectros de los campos Eulerianos para las simulaciones a energía constante, $E_T \approx 1,5$. En las gráficas de los espectros, la línea recta corresponde al espectro introducido en la simulación. Todos los espectros tienen en común la escala de disipación, $k_\eta = 4000$, la energía total, $E_T = 1,5$, y la densidad de energía para $k_i = 10$, que ha sido fijada en $E(k_i) = E_i = 2,3 \cdot 10^{-2}$. La línea quebrada es el espectro calculado a partir del campo creado¹. Ésta última sólo llega hasta $k \sim 80$ debido a que la resolución del dominio no permite calcular escalas más pequeñas. En estas gráficas puede apreciarse la influencia que produce la forma del espectro de energía. Cuanto menor es la pendiente del espectro, más uniforme es la distribución de vorticidad en el dominio. Un espectro con gran pendiente acumula casi toda la energía en las grandes escalas, provocando la aparición de estructuras coherentes.

Éstas estructuras coherentes son de naturaleza diferente a las observadas en capítulo anterior, relacionadas con las simulaciones dinámicas. Evidentemente, éstas últimas no pueden ser simuladas mediante KS. Lo que observamos en la KS para espectros de energía de pendiente muy fuerte es algo que podríamos denominar “estructuración cinemática” y que no es más que una acumulación de energía en las grandes escalas, y que no tiene nada que ver con los procesos dinámicos de transferencia de energía/enstrofia entre escalas.

7.1.2. La escala integral y la microescala de Taylor

A partir de las correlaciones longitudinales de velocidad podemos calcular la escala integral y la de Taylor. Las correlaciones de velocidades se muestran en la figura 7.9. La escala integral sólo puede ser estimada, ya que, en general, el dominio es demasiado pequeño como para que las velocidades estén completamente decorrelacionadas y la correlación haya convergido a un valor concreto. Prueba de ello es que para valores altos de n , la escala integral calculada es menor que la microescala de Taylor.

La microescala de Taylor se calcula a partir de la segunda derivada de la autocorrelación en $r/\eta = 0$ (ver ecuación (2.69)). Los valores de la microescala de Taylor y de la estimación de la escala integral para cada espectro de energía se reflejan en la tabla 7.1.

¹ En el apéndice B se comenta el cálculo del espectro de un campo bidimensional y las discrepancias observadas en este capítulo sobre el espectro introducido en la simulación y el calculado.

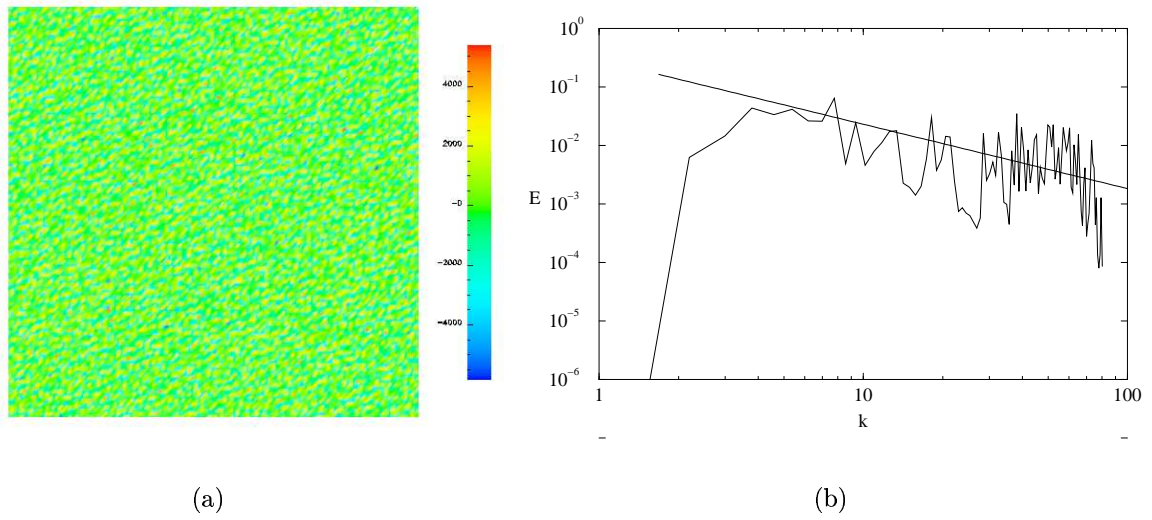


Fig. 7.1: Distribución de vorticidad y espectro de energía para $n = 1,1$

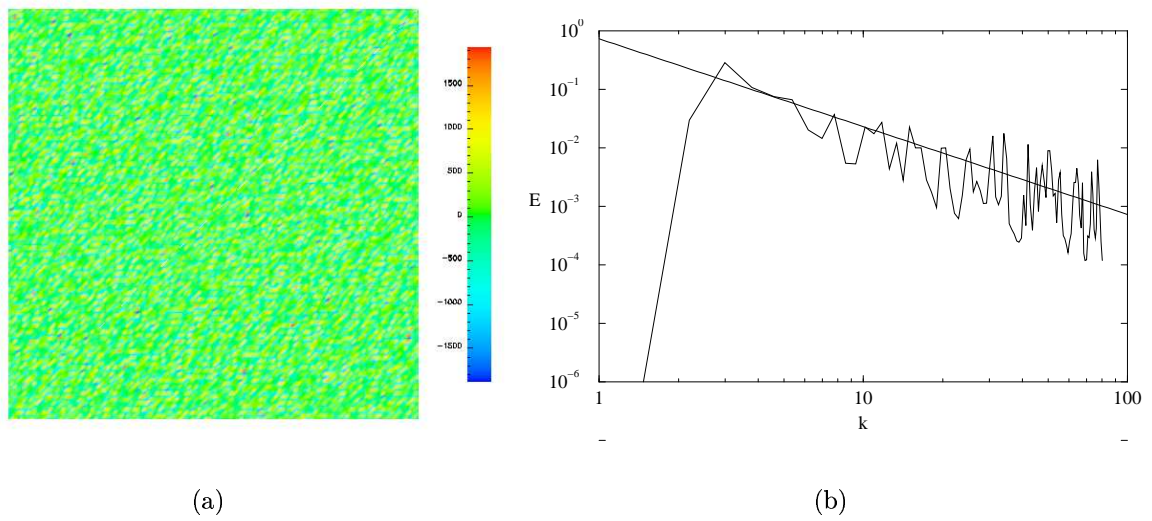


Fig. 7.2: Distribución de vorticidad y espectro de energía para $n = 1,5$

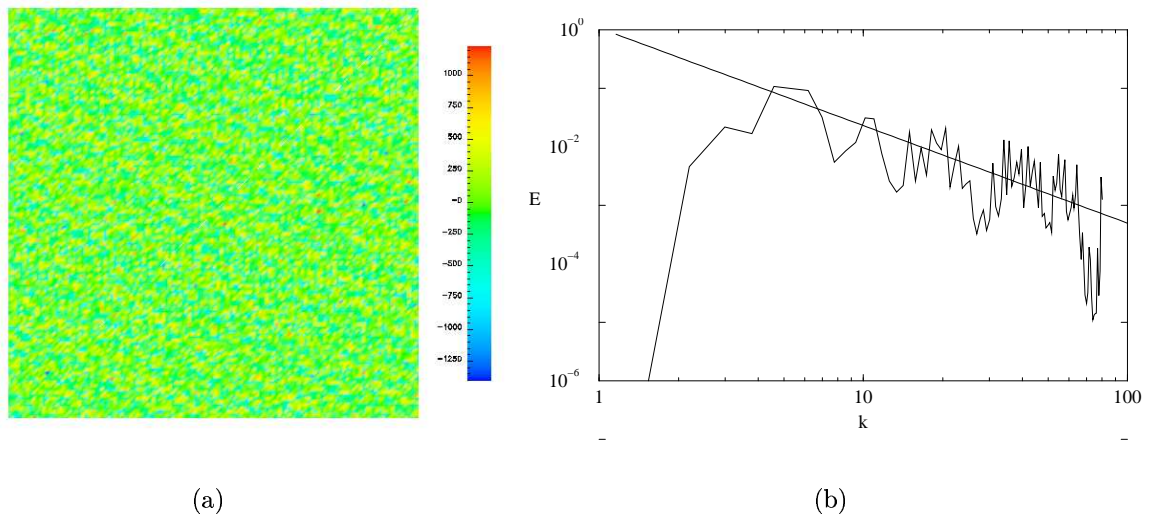


Fig. 7.3: Distribución de vorticidad y espectro de energía para $n = 5/3$

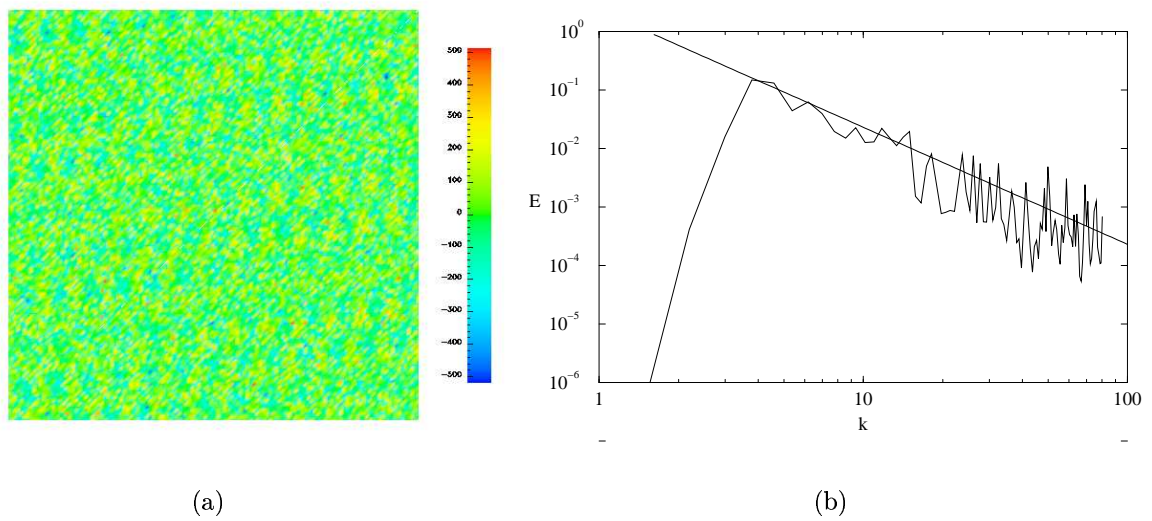


Fig. 7.4: Distribución de vorticidad y espectro de energía para $n = 2,0$

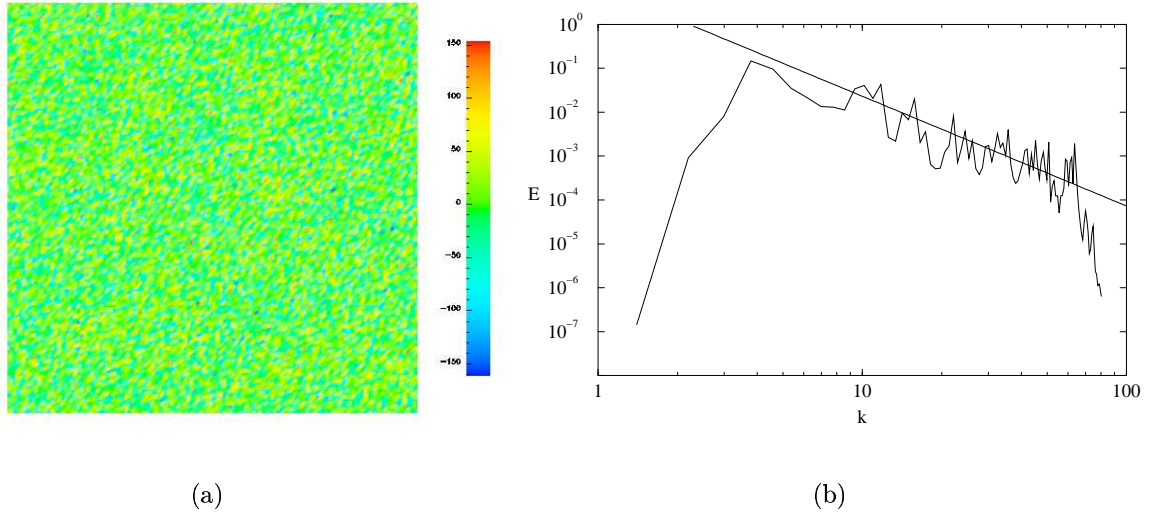


Fig. 7.5: Distribución de vorticidad y espectro de energía para $n = 2,5$

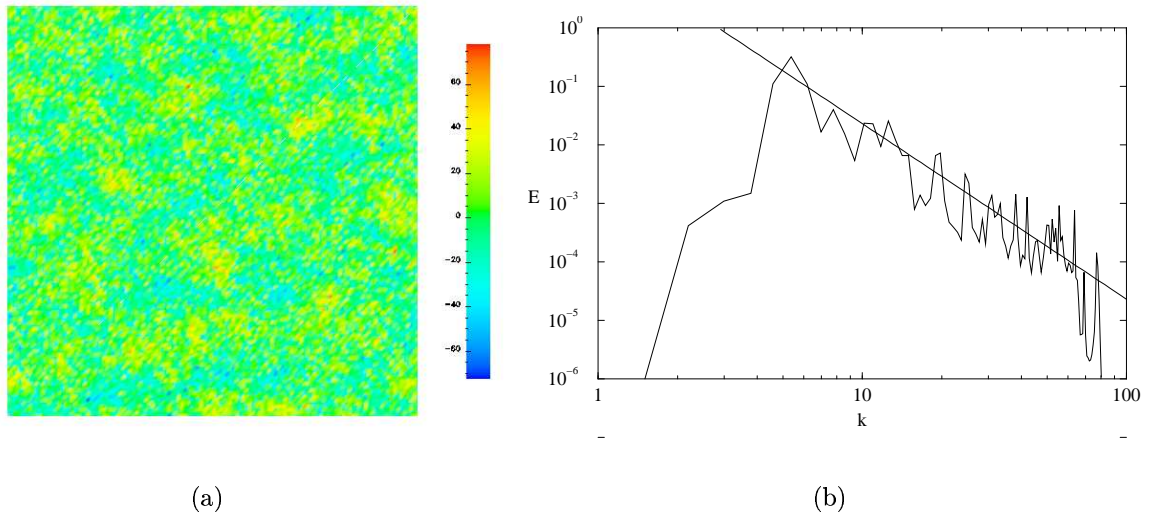


Fig. 7.6: Distribución de vorticidad y espectro de energía para $n = 3,0$

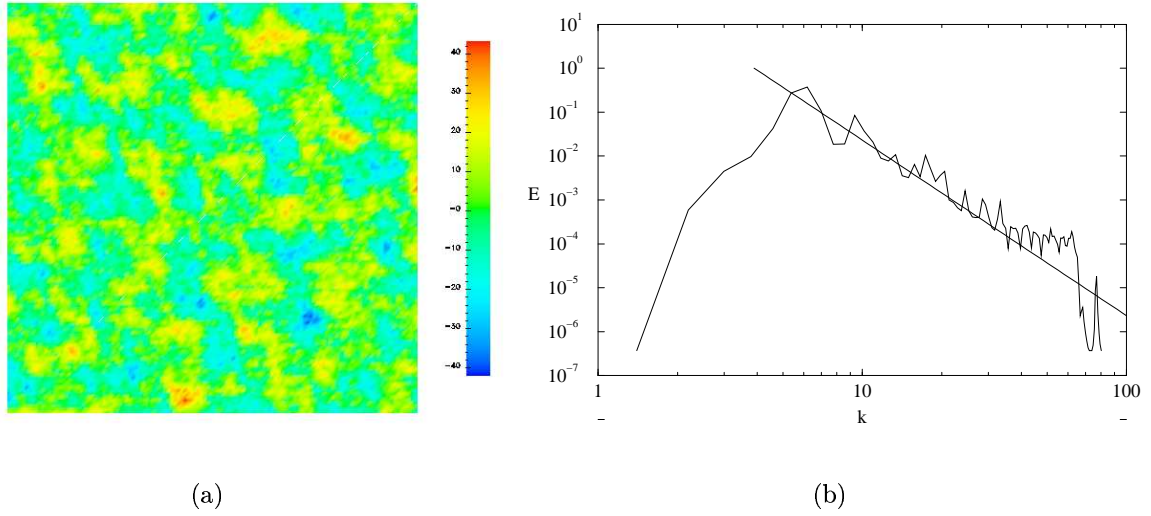


Fig. 7.7: Distribución de vorticidad y espectro de energía para $n = 4,0$

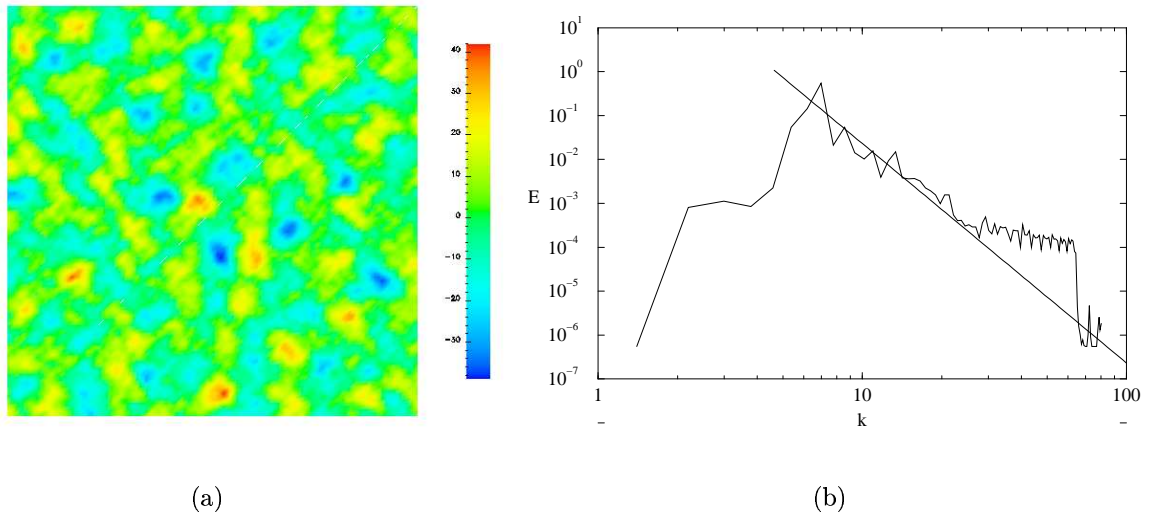


Fig. 7.8: Distribución de vorticidad y espectro de energía para $n = 5,0$

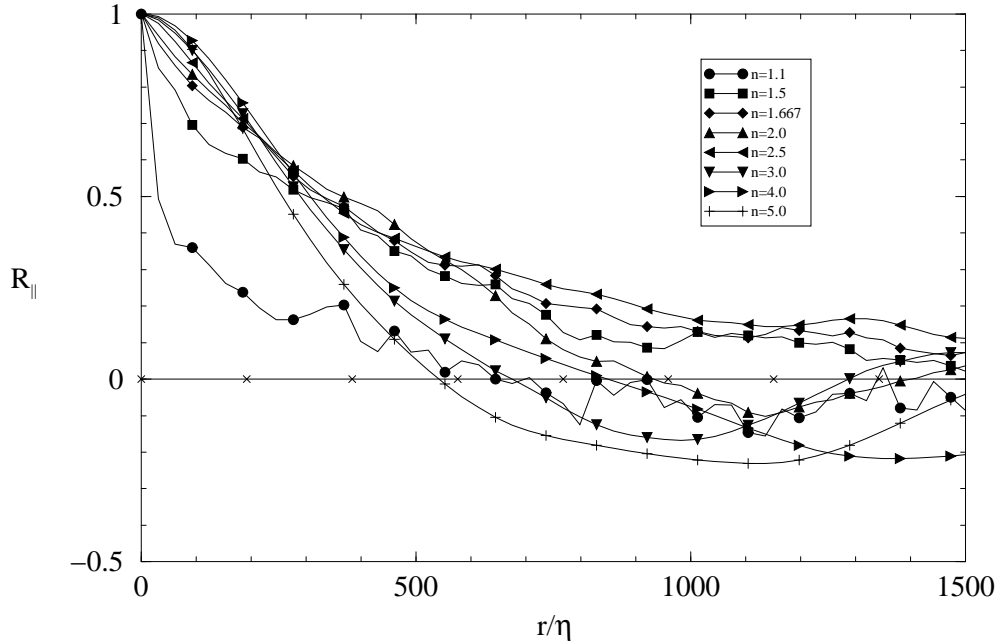


Fig. 7.9: Autocorrelaciones longitudinales de velocidad para los experimentos a energía constante. El dominio no es lo bastante grande como para que las correlaciones se anulen completamente, y se pueda calcular de forma precisa la escala integral. Las escalas de Taylor para cada espectro se muestran en la tabla 7.1.

n	L_λ/η	L/η
1.1	40	80
1.5	80	400
$5/3$	100	500
2.0	125	400
2.5	200	525
3.0	225	250
4.0	350	250
5.0	300	100

Tab. 7.1: Escala de Taylor y estimación de la escala integral para cada espectro. Estas han sido calculadas a partir de los datos de la gráfica de la figura 7.9.

7.1.3. Las funciones de estructura

Tan sólo en la serie de experimentos a energía total constante se han realizado los cálculos de las funciones de estructuras hasta orden 6. No se ha creído conveniente calcular órdenes mayores porque, a diferencia de en las experiencias numéricas del capítulo 6, tan sólo se disponían de datos Eulerianos de los campos, de resolución 128×128 , en dos instantes diferentes. Es una muestra pequeña como para calcular funciones de estructura de orden mayor que 6, ya que, como se explicó en la sección 2.3.6, éste cálculo requiere una gran cantidad de datos. Pero es una muestra lo suficientemente grande como para calcular funciones de estructura hasta orden 6, ya que no se han encontrado variaciones importantes entre el cálculo con uno y con dos campos.

Los resultados obtenidos para los campos con espectros con exponente $n = 1.1, 5/3, 2.0, 3.0, 4.0$ y 5.0 se muestran en las figuras 7.10 a 7.15. Se observa de nuevo cómo los exponentes relativos, ζ_p/ζ_3 mantienen un comportamiento “horizontal” durante un rango de escalas mucho mayor que los exponentes absolutos.

En el capítulo anterior se llegó a la conclusión de que la intermitencia en general, y las estructuras coherentes en particular, no son reflejadas en la forma del espectro de energía. Aquí habría que matizar esta afirmación, a raíz de las observaciones de los experimentos realizados con diferentes espectros.

Podríamos distinguir entre dos tipos de fenómenos: una estructuración cinemática y otra dinámica. Ambos son fenómenos reflejados a una escala del orden de la microescala de Taylor. De forma que no es ni intermitencia a la escala de disipación, a la que hace referencia la teoría de Kolmogorov de 1962, ni intermitencia externa, producida a la escala de las condiciones de contorno o de forzaje. Por esta razón se ha creído conveniente utilizar el término “estructuración”, a fin de evitar confusiones.

La estructuración dinámica es creada por los procesos de transferencia dinámica de energía y enstrofia entre escalas. La hemos observado en el capítulo anterior como resultado de una Simulación Numérica Directa bidimensional. Estas estructuras no quedan reflejadas en la forma del espectro de energía, pero si se nota su huella claramente en las funciones de estructura, a la escala de Taylor.

La estructuración cinemática surge del hecho de que las funciones de estructura no son autosimilares a una escala del orden de la microescala de Taylor, al menos para Reynolds finito. Ésta sí queda reflejada por la pendiente del espectro de energía. Para leyes espectrales con potencia del orden de 1 (figura 7.10), las funciones de estructura muestran un crecimiento brusco antes de caer en la zona de “ruido” (función de estructura prácticamente

constante y velocidades completamente decorrelacionadas). En este caso, no existe estructuración. Lo mismo observamos para $n = 5/3$ (teoría clásica K41) y $n = 2$. A partir de $n = 3,0$ (teoría clásica de Kraichnan) el comportamiento es muy diferente. Las exponentes de las funciones de estructura se mantienen casi constantes hasta llegar a los alrededores de la escala de Taylor, momento en el que empiezan a decrecer de forma gradual hacia la zona de “ruido”. En esta escala se producen las las estructuras coherentes observadas en las figuras 7.7 y 7.8.

Se ha calculado el valor de los exponentes de las funciones de estructura para diferentes escalas, y se han representado en función del orden p de la función de estructura. Todas las curvas son rectas, dado que el campo creado con la KS es siempre gaussiano², y esto hace que los exponentes de las funciones de estructura se comporten de forma lineal respecto al orden de la función de estructura. Esto no ocurre con campos reales, o los obtenidos mediante simulaciones dinámicas^m (ver figura 6.24).

Al calcular la pendiente de cada una de las rectas y representarlas frente a la pendiente n del espectro, para cada una de las escalas, obtenemos que para escalas lo suficientemente pequeña, forman una exponencial que tiende asintóticamente al valor $\zeta_p = p$ para $n \rightarrow \infty$.

Las regresiones a las exponenciales tienen un factor de correlación mínimo de 0.95 para $r \sim 190\eta$. Si asumimos que la pendiente del exponente de las funciones de estructura sigue una expresión del tipo

$$\frac{\zeta_p}{p} = 1 - \exp(-\alpha n + \beta), \quad (7.2)$$

entonces α y β son función decreciente de la escala.

Al buscar esta función se obtiene que las relaciones son lineales. Con las 6 primeras escalas se obtiene

$$\alpha = -3,6 \cdot 10^{-3} \frac{r}{\eta} + 1 \quad (7.3)$$

$$\beta = -5,8 \cdot 10^{-3} \frac{r}{\eta} + 1,17 \quad (7.4)$$

con un factor de correlación de 0.9933 y 0.9996, respectivamente (ver figura 7.26).

Al substituir estas expresiones en (7.2) y reordenar términos, podemos afirmar que, para escalas $r \lesssim L_\lambda$, la función de estructura no es autosimilar, sino que sigue una relación del tipo

$$S_p(r) \sim r^{\zeta_p(r;n)}, \quad (7.5)$$

² es decir, que si calculamos la distribución de probabilidad de la velocidad, obtendremos una curva gaussiana (Fung et al., 1992).

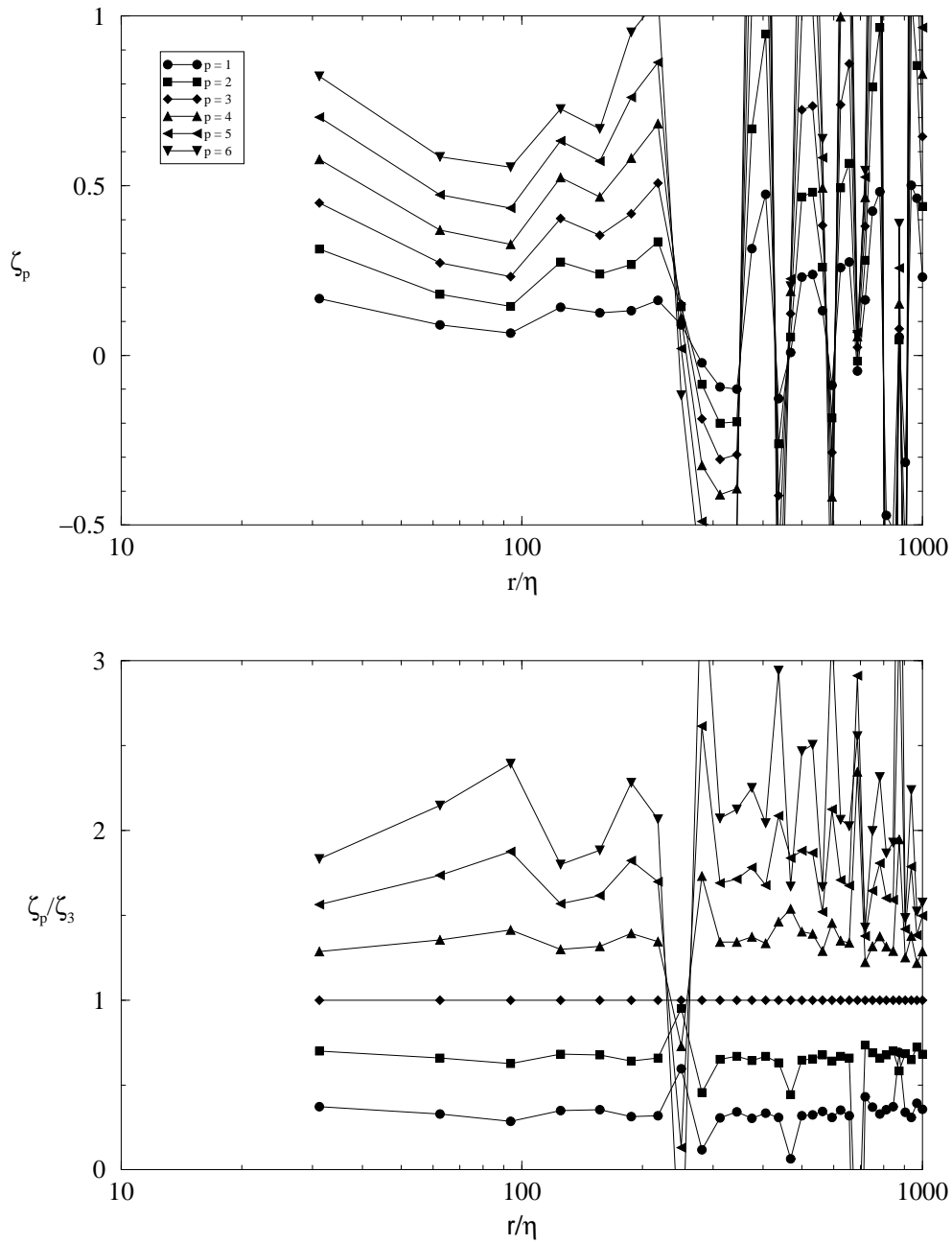


Fig. 7.10: Exponentes y exponentes relativos de las funciones de estructura hasta orden 6 para $n = 1,1$. La microescala de Taylor se encuentra en $r \sim 40\eta$. Se observa el crecimiento brusco los exponentes de las funciones de estructura (sobre todo las de mayor orden) en $r \sim 200\eta$, para luego entrar de lleno en la zona de “ruido”.

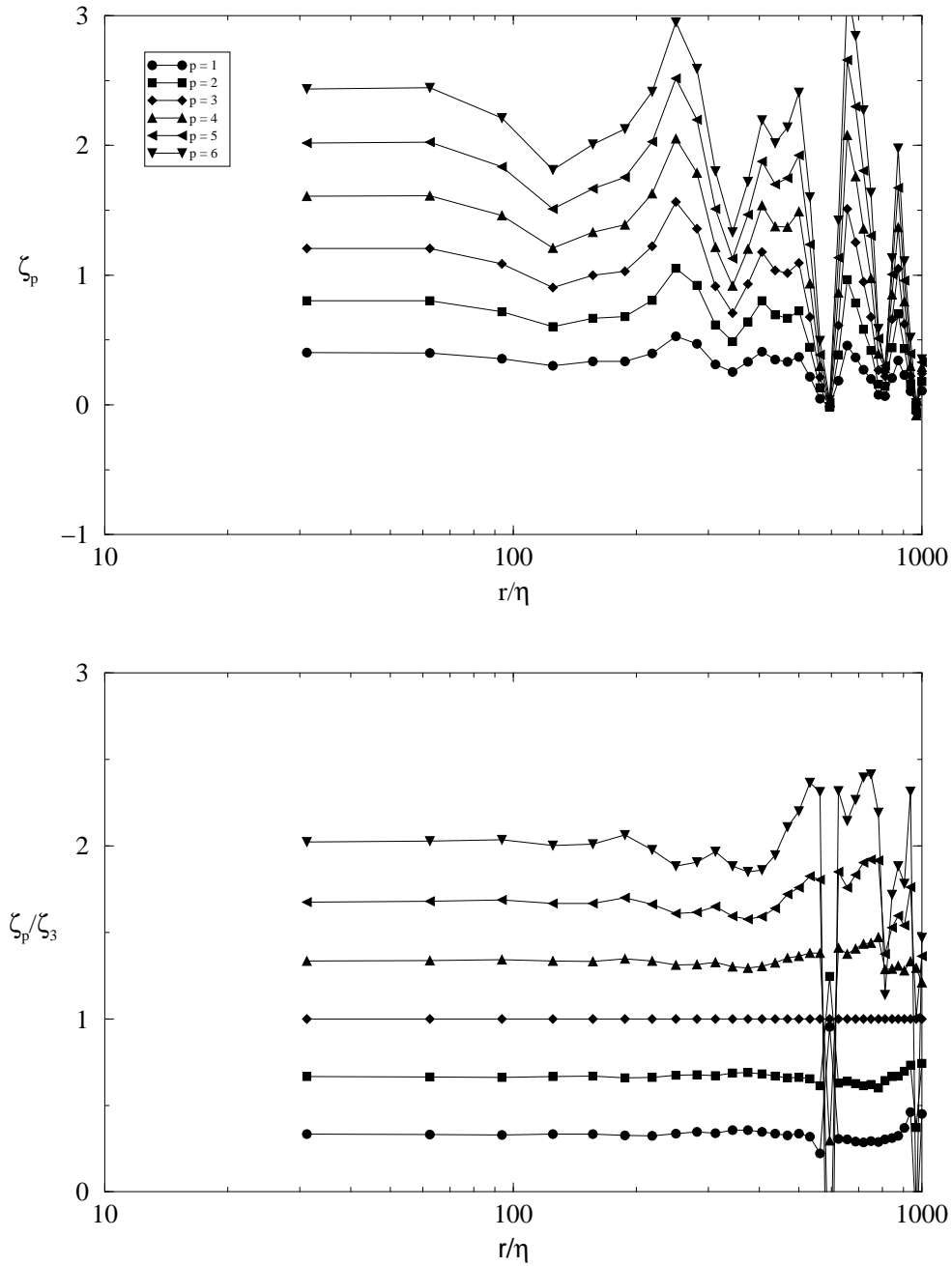


Fig. 7.11: Exponentes y exponentes relativos de las funciones de estructura hasta orden 6 para $n = 5/3$. La microescala de Taylor se encuentra en $r \sim 100\eta$. De nuevo se observa el comportamiento descrito en la figura anterior, pero menos acusado.

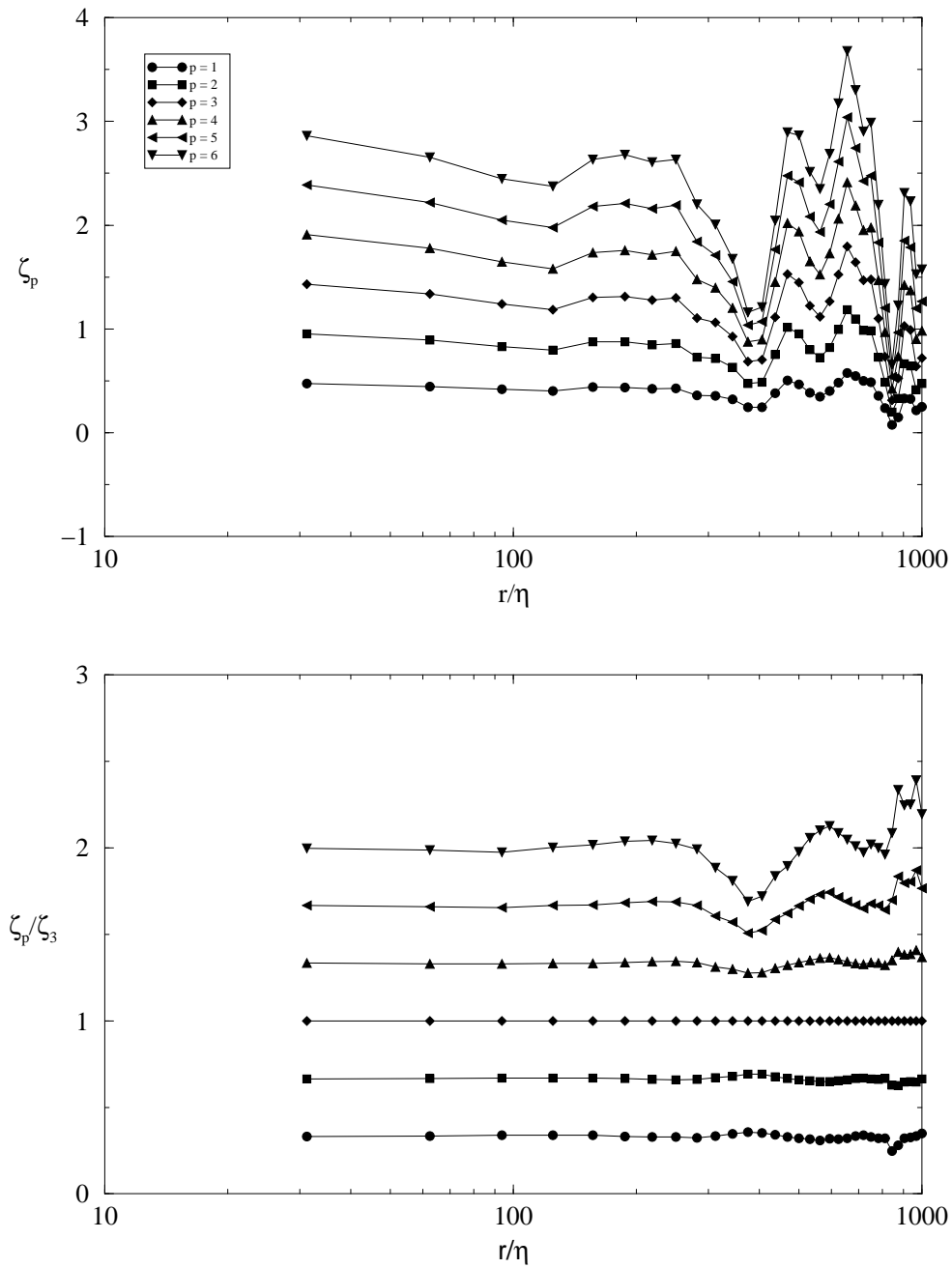


Fig. 7.12: Exponentes y exponentes relativos de las funciones de estructura hasta orden 6 para $n = 2,0$. La microescala de Taylor se encuentra en $r \sim 125\eta$. Casi no existe crecimiento de los exponentes de las funciones de estructura antes de llegar a la zona de “ruido”.

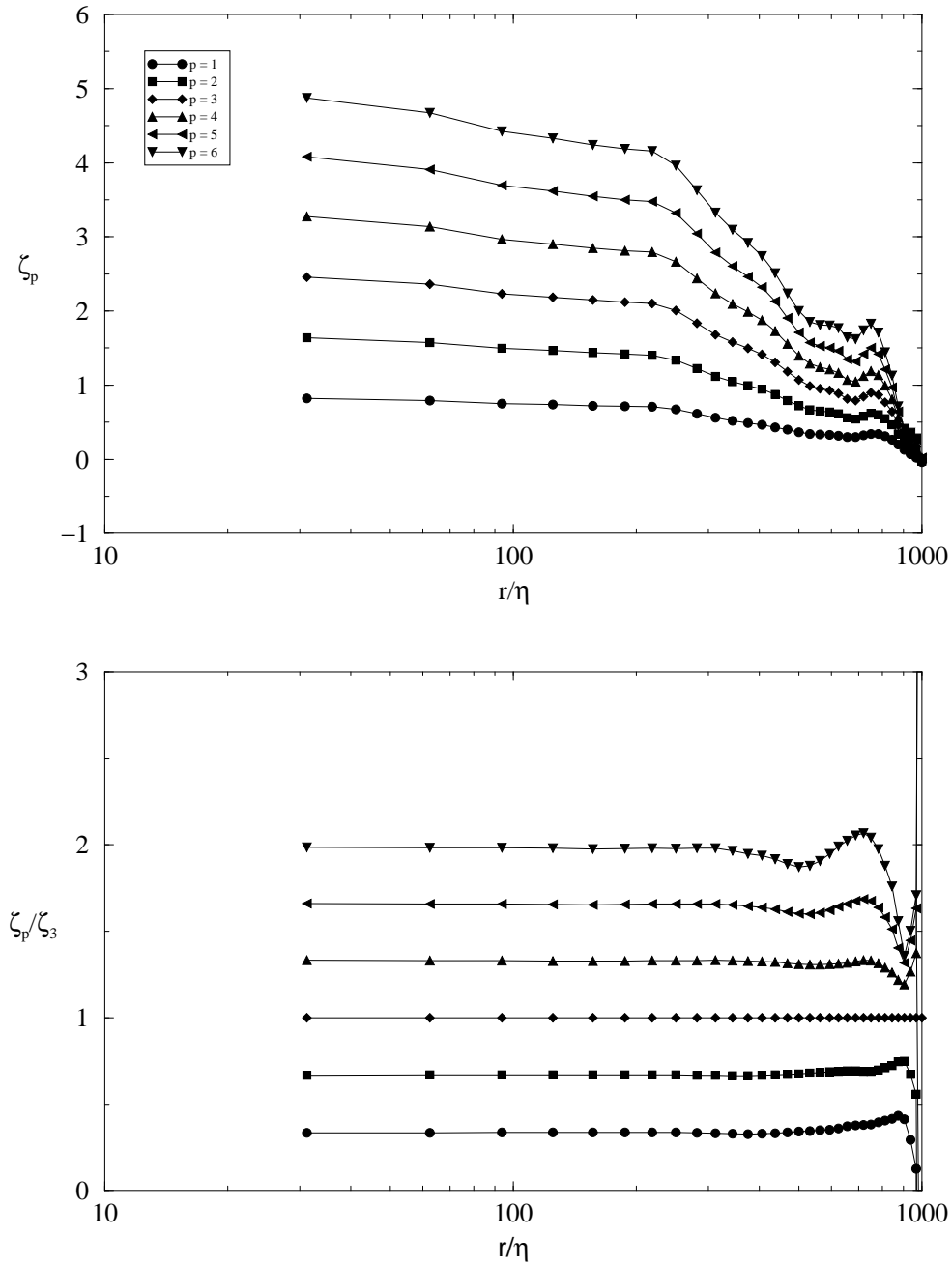


Fig. 7.13: Exponentes y exponentes relativos de las funciones de estructura hasta orden 6 para $n = 3,0$. La microescala de Taylor se encuentra en $r \sim 225\eta$. En esta y en las siguientes figuras se observa un rango de escalas alrededor de la microescalas de Taylor, en el que los exponentes de las funciones de estructura decrecen de forma gradual

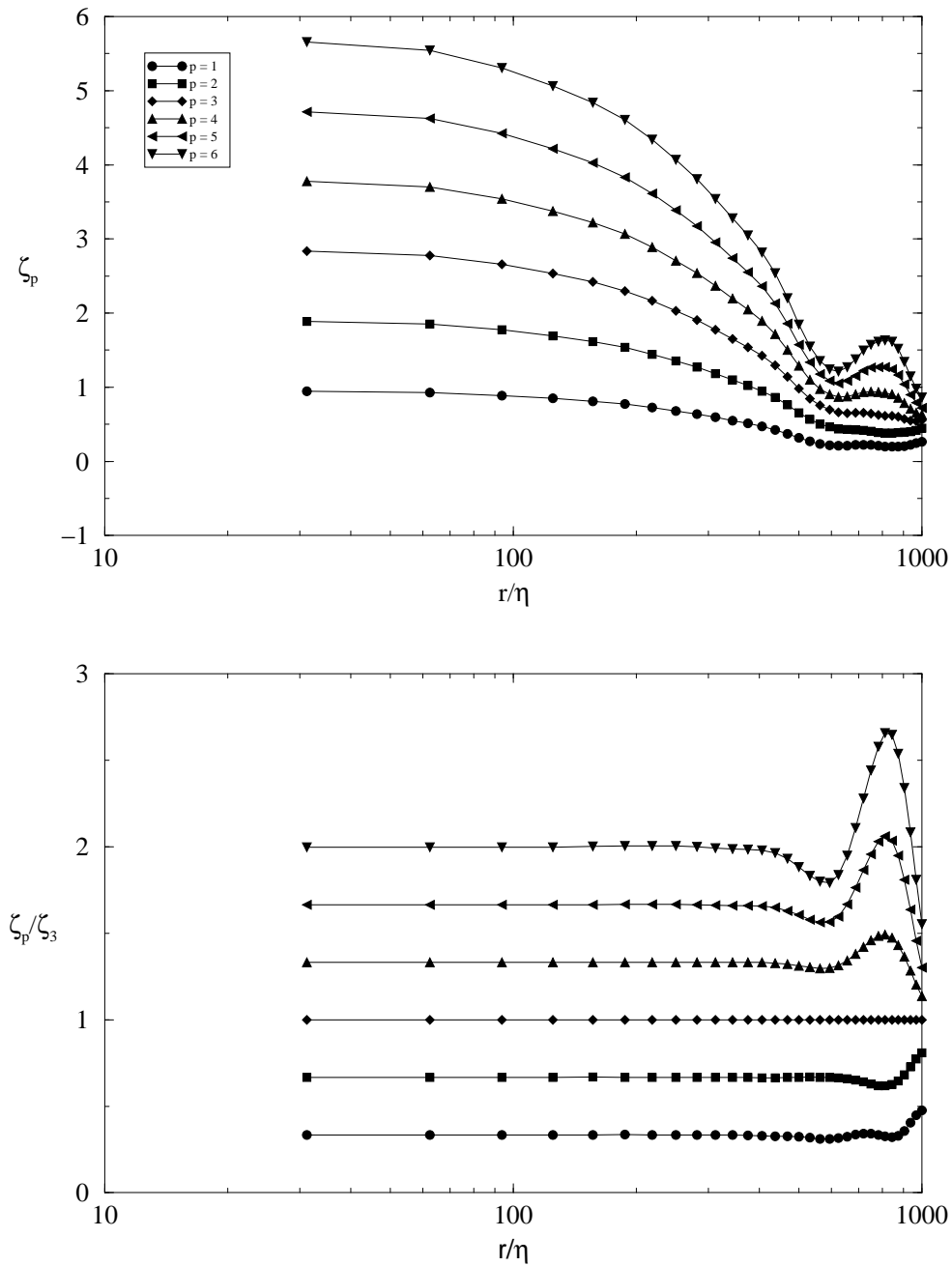


Fig. 7.14: Exponentes y exponentes relativos de las funciones de estructura hasta orden 6 para $n = 4,0$. La microescala de Taylor se encuentra en $r \sim 350\eta$.

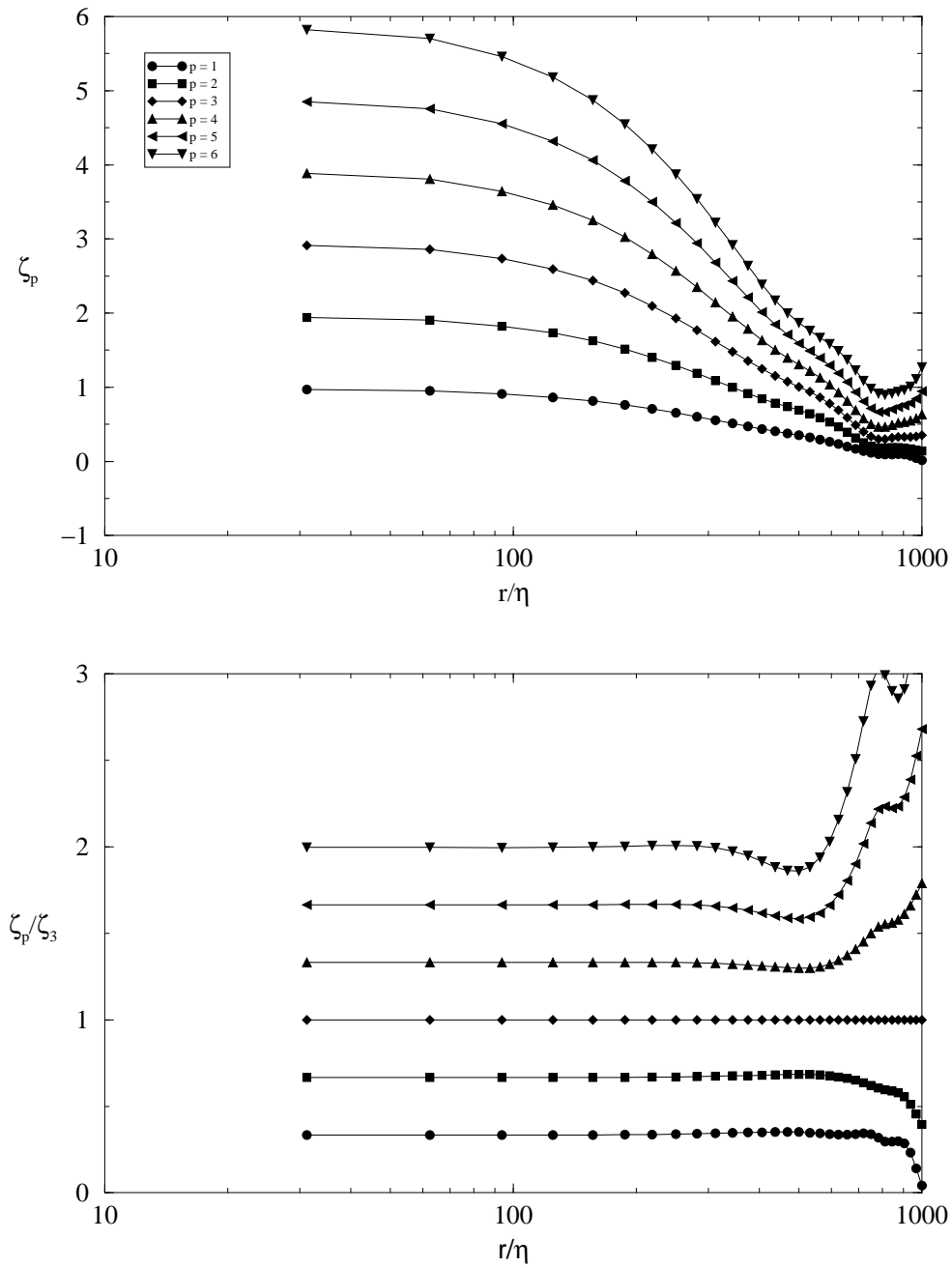


Fig. 7.15: Exponentes y exponentes relativos de las funciones de estructura hasta orden 6 para $n = 5,0$. La microescala de Taylor se encuentra en $r \sim 300\eta$.

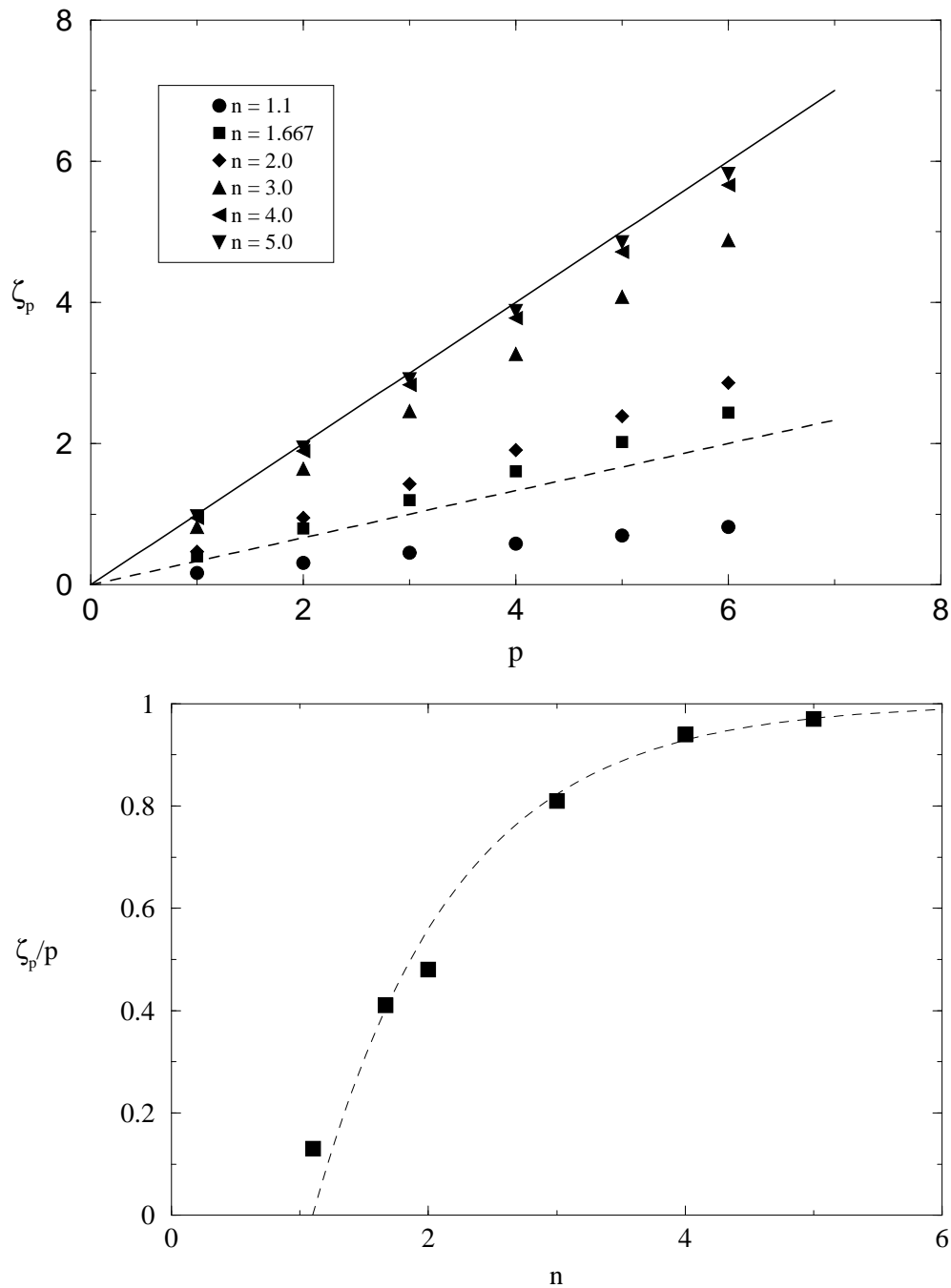


Fig. 7.16: a) Exponentes de funciones de estructura a escala $r = 31\eta$ ver-sus p , el orden de la función de estructura, para cada pendiente del espectro, n . La recta continua es la ley de escala para turbulencia bidimensional ($n = 3,0$), según Kraichnan, $\zeta_p = p$. La recta discontinua es la ley de escala para turbulencia tridimensional ($n = 5/3$), según K41, $\zeta_p = p/3$. b) Pendientes de los exponentes de las funciones de estructura respecto al orden p a escala $r = 31\eta$, para cada valor de la potencia del espectro, n . La línea discontinua corresponde a la función $\frac{\zeta_p}{p} = 1 - \exp(-0,91n + 1,0)$.

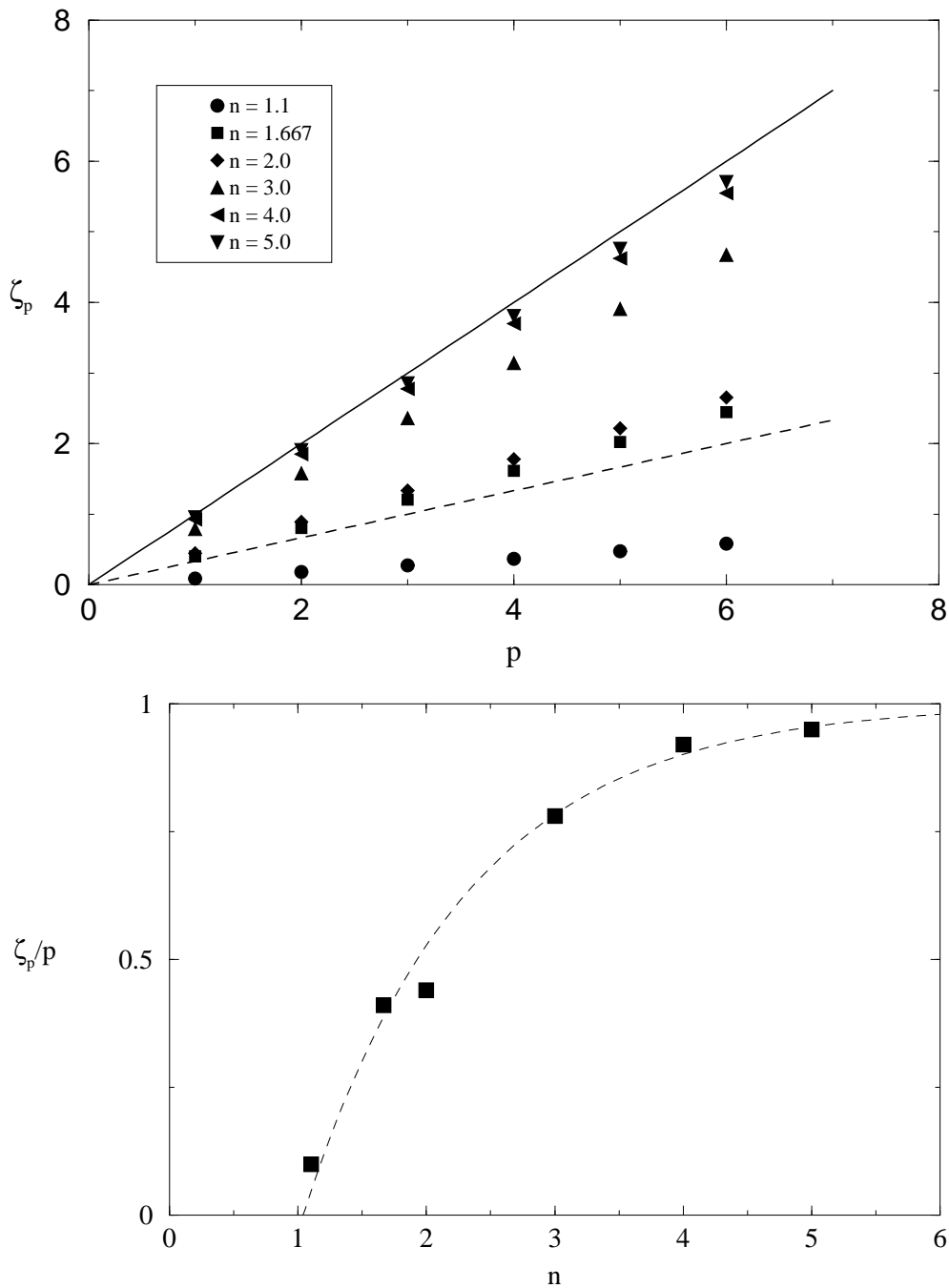


Fig. 7.17: a) Exponentes de funciones de estructura a escala $r = 62,5\eta$ versus p , el orden de la función de estructura, para cada pendiente del espectro, n . La recta continua es la ley de escala para turbulencia bidimensional ($n = 3,0$), según Kraichnan, $\zeta_p = p$. La recta discontinua es la ley de escala para turbulencia tridimensional ($n = 5/3$), según K41, $\zeta_p = p/3$. b) Pendientes de los exponentes de las funciones de estructura a escala $r = 62,5\eta$, para cada valor de la potencia del espectro, n . La línea discontinua corresponde a la función $\frac{\zeta_p}{p} = 1 - \exp(-0,78n + 0,81)$.

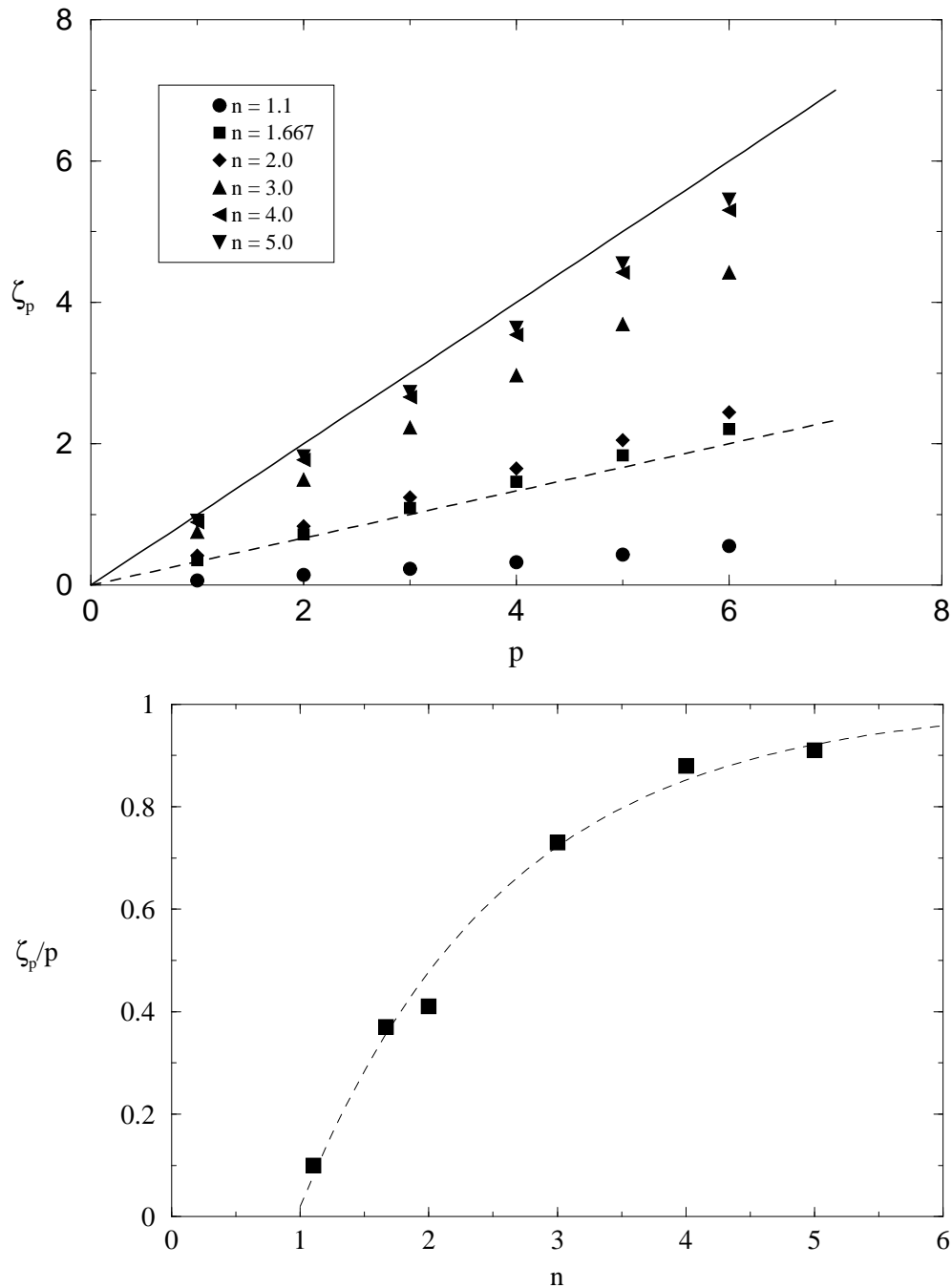


Fig. 7.18: a) Exponentes de funciones de estructura a escala $r = 94\eta$ versus p , el orden de la función de estructura, para cada pendiente del espectro, n . La recta continua es la ley de escala para turbulencia bidimensional ($n = 3,0$), según Kraichnan, $\zeta_p = p$. La recta discontinua es la ley de escala para turbulencia tridimensional ($n = 5/3$), según K41, $\zeta_p = p/3$. b) Pendientes de los exponentes de las funciones de estructura a escala $r = 94\eta$, para cada valor de la potencia del espectro, n . La línea discontinua corresponde a la función $\frac{\zeta_p}{p} = 1 - \exp(-0,63n + 0,61)$.

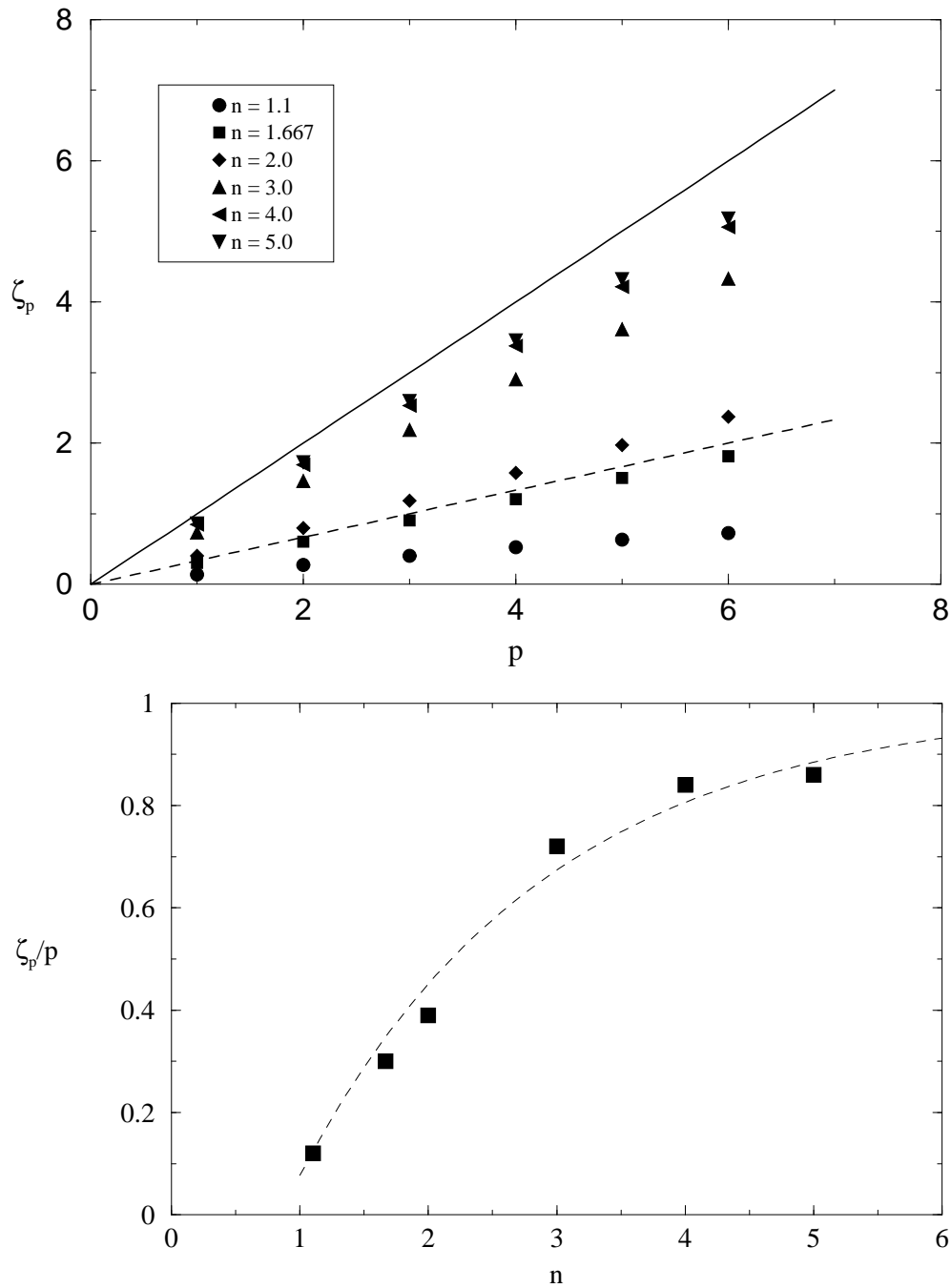


Fig. 7.19: a) Exponentes de funciones de estructura a escala $r = 125\eta$ versus p , el orden de la función de estructura, para cada pendiente del espectro, n . La recta continua es la ley de escala para turbulencia bidimensional ($n = 3,0$), según Kraichnan, $\zeta_p = p$. La recta discontinua es la ley de escala para turbulencia tridimensional ($n = 5/3$), según K41, $\zeta_p = p/3$. b) Pendientes de los exponentes de las funciones de estructura a escala $r = 125\eta$, para cada valor de la potencia del espectro, n . La línea discontinua corresponde a la función $\frac{\zeta_p}{p} = 1 - \exp(-0,52n + 0,44)$.

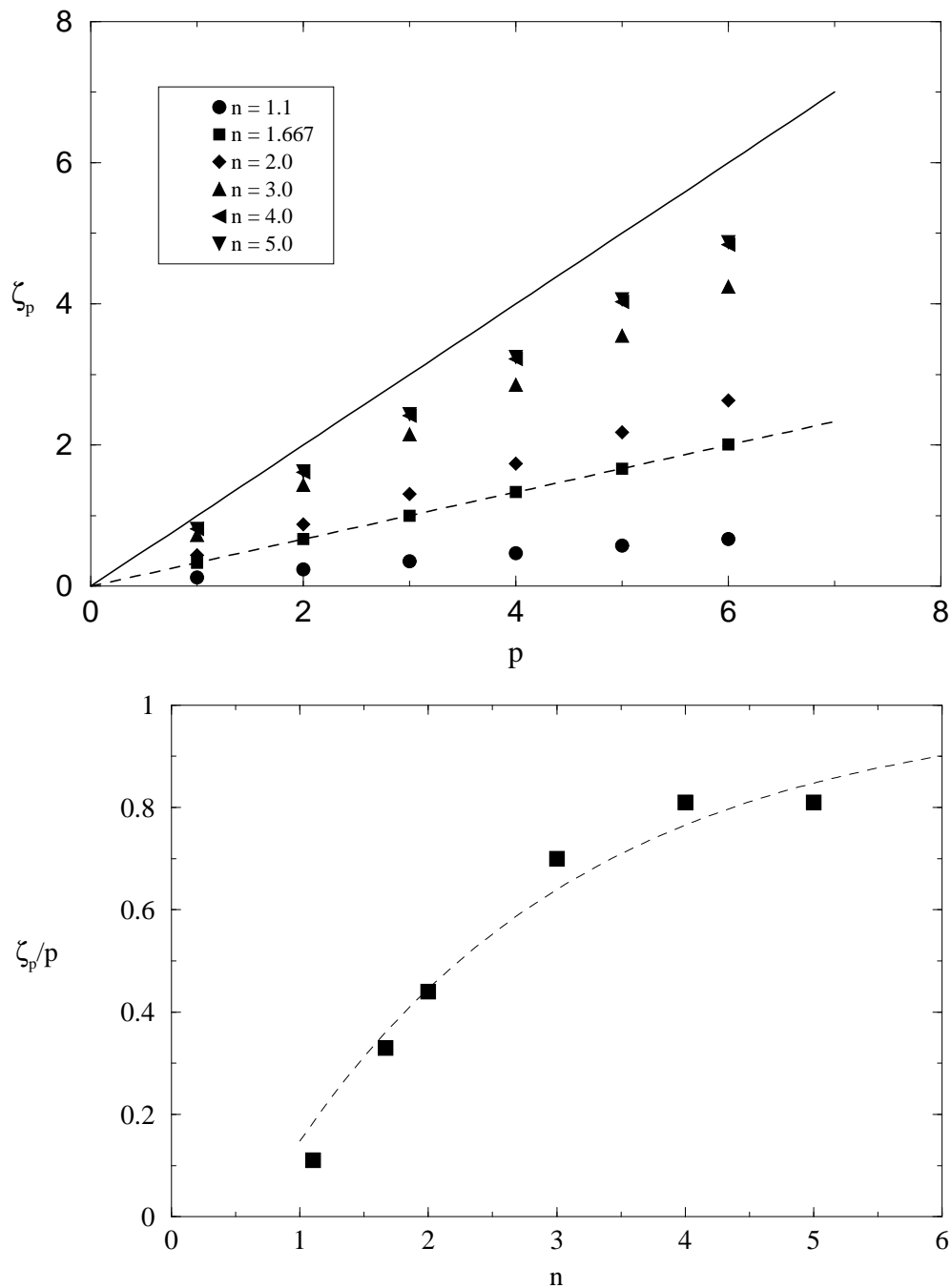


Fig. 7.20: a) Exponentes de funciones de estructura a escala $r = 156\eta$ versus p , el orden de la función de estructura, para cada pendiente del espectro, n . La recta continua es la ley de escala para turbulencia bidimensional ($n = 3,0$), según Kraichnan, $\zeta_p = p$. La recta discontinua es la ley de escala para turbulencia tridimensional ($n = 5/3$), según K41, $\zeta_p = p/3$. b) Pendientes de los exponentes de las funciones de estructura a escala $r = 156\eta$, para cada valor de la potencia del espectro, n . La línea discontinua corresponde a la función $\frac{\zeta_p}{p} = 1 - \exp(-0,43n + 0,27)$.

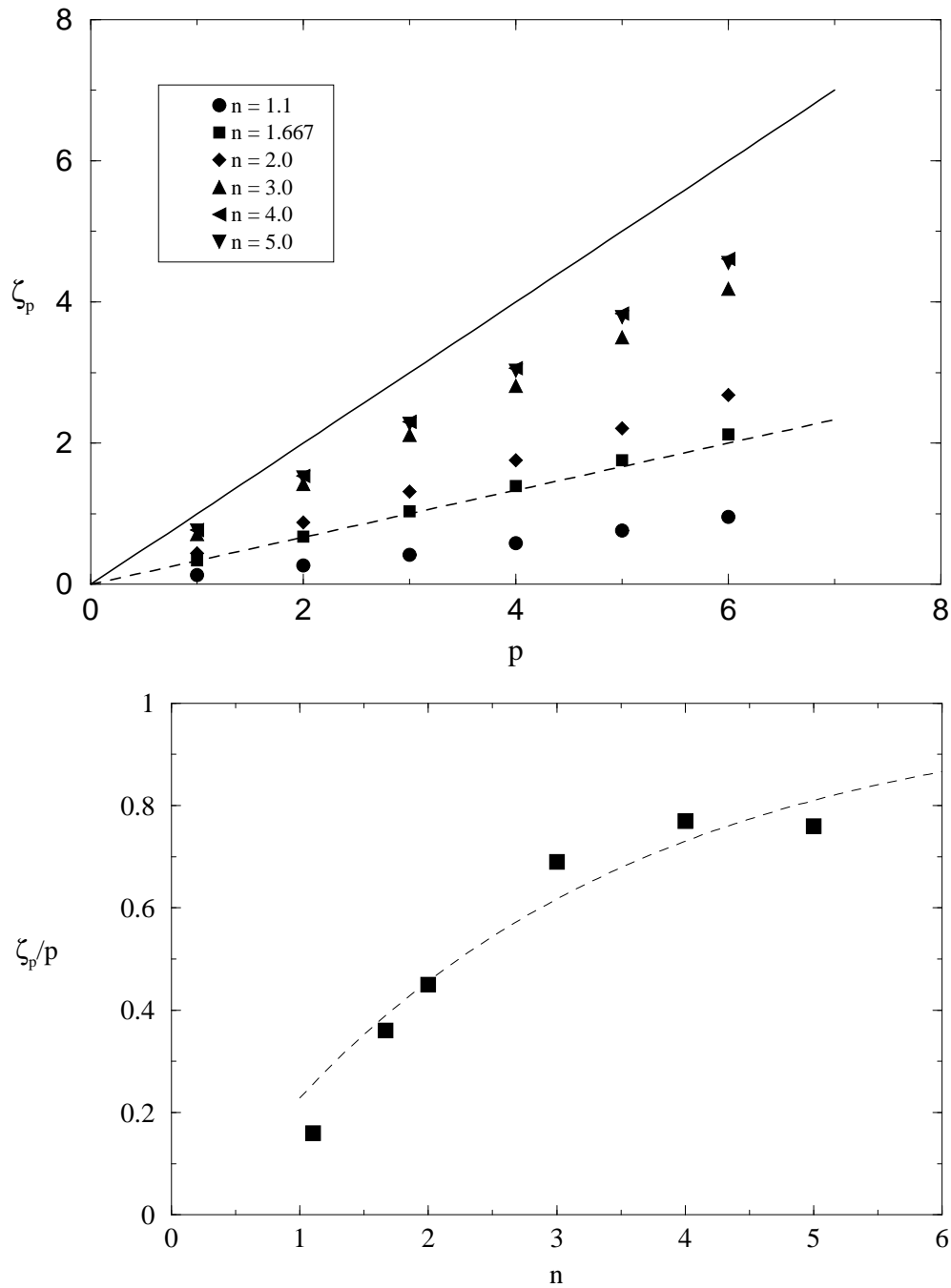


Fig. 7.21: a) Exponentes de funciones de estructura a escala $r = 187,5\eta$ versus p , el orden de la función de estructura, para cada pendiente del espectro, n . La recta continua es la ley de escala para turbulencia bidimensional ($n = 3,0$), según Kraichnan, $\zeta_p = p$. La recta discontinua es la ley de escala para turbulencia tridimensional ($n = 5/3$), según K41, $\zeta_p = p/3$. b) Pendientes de los exponentes de las funciones de estructura a escala $r = 187,5\eta$, para cada valor de la potencia del espectro, n . La línea discontinua corresponde a la función $\frac{\zeta_p}{p} = 1 - \exp(-0,35n + 0,09)$.

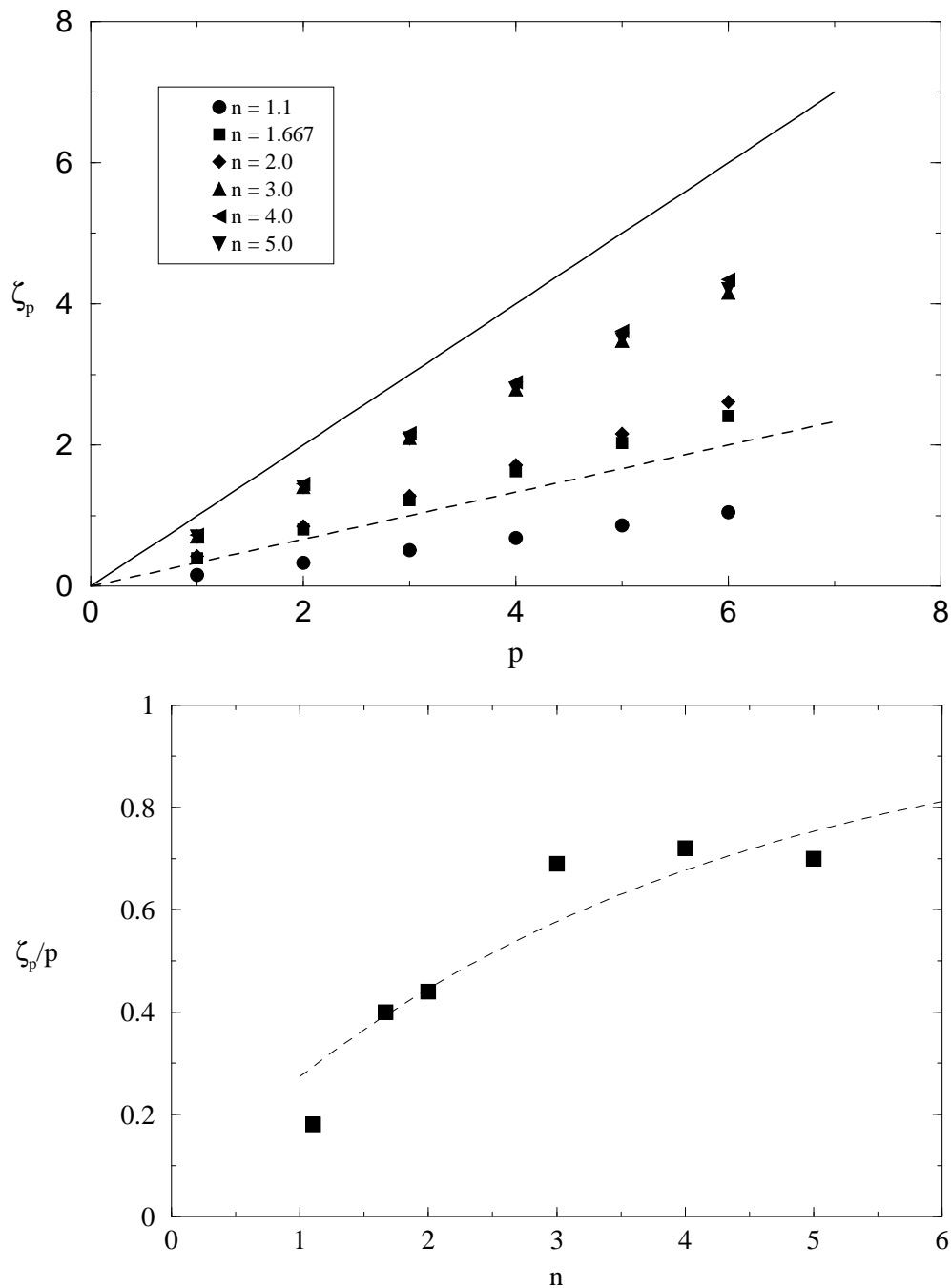


Fig. 7.22: a) Exponentes de funciones de estructura a escala $r = 220\eta$ versus p , el orden de la función de estructura, para cada pendiente del espectro, n . La recta continua es la ley de escala para turbulencia bidimensional ($n = 3,0$), según Kraichnan, $\zeta_p = p$. La recta discontinua es la ley de escala para turbulencia tridimensional ($n = 5/3$), según K41, $\zeta_p = p/3$. b) Pendientes de los exponentes de las funciones de estructura a escala $r = 220\eta$, para cada valor de la pendiente del espectro, n . No parece haber ajuste posible con una curva exponencial. Posiblemente, la escala es ya demasiado grande. Para $n < 3$ se obtiene un comportamiento caótico. Para $n > 3$, la derivada parece estacionarse en un valor aproximado de 0.6. Este comportamiento perdura en escalas mayores (siguientes figuras).

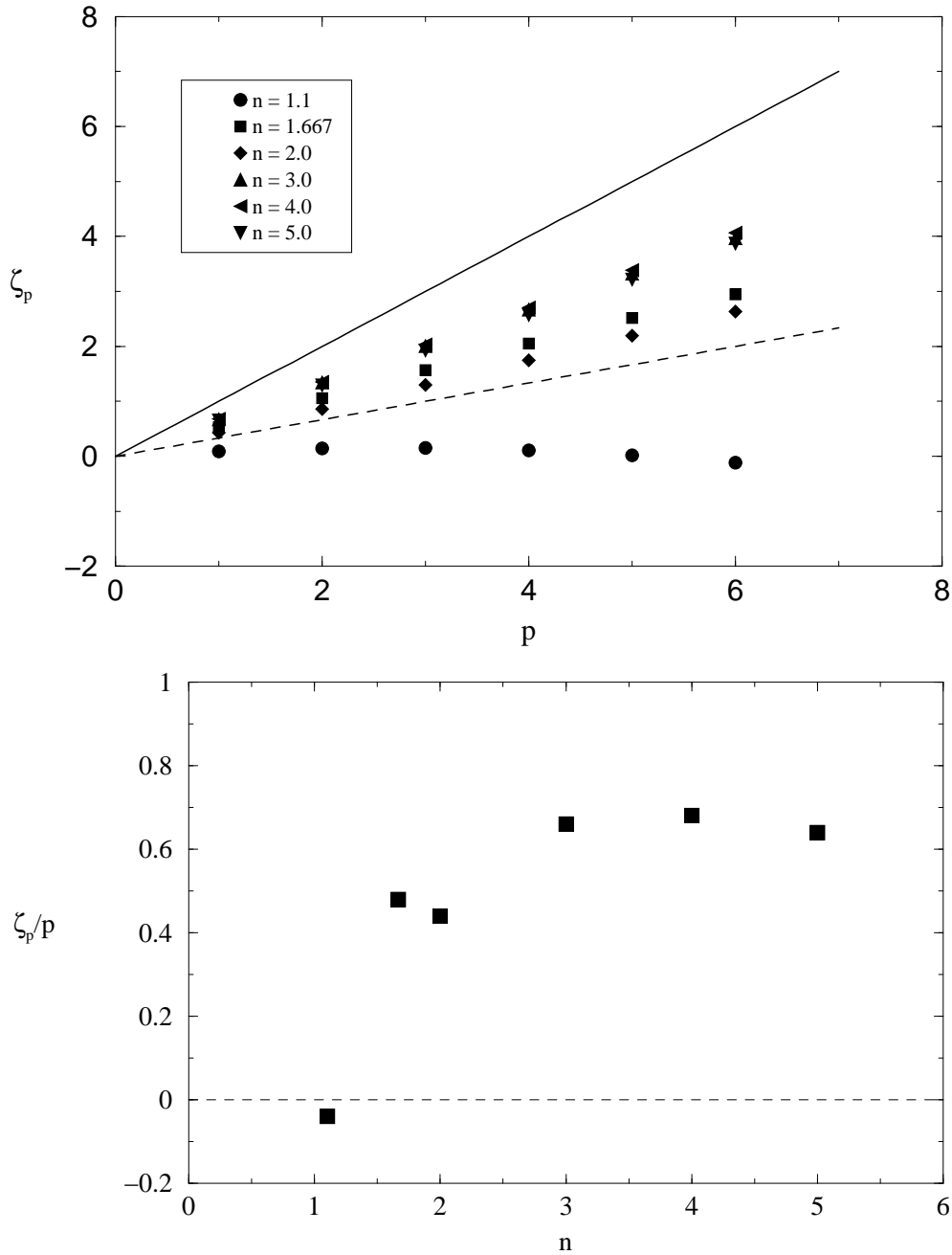


Fig. 7.23: a) Exponentes de funciones de estructura a escala $r = 250\eta$ versus p , el orden de la función de estructura, para cada pendiente del espectro, n . La recta continua es la ley de escala para turbulencia bidimensional ($n = 3,0$), según Kraichnan, $\zeta_p = p$. La recta discontinua es la ley de escala para turbulencia tridimensional ($n = 5/3$), según K41, $\zeta_p = p/3$. b) Pendientes de los exponentes de las funciones de estructura a escala $r = 250\eta$, para cada valor de la pendiente del espectro, n .

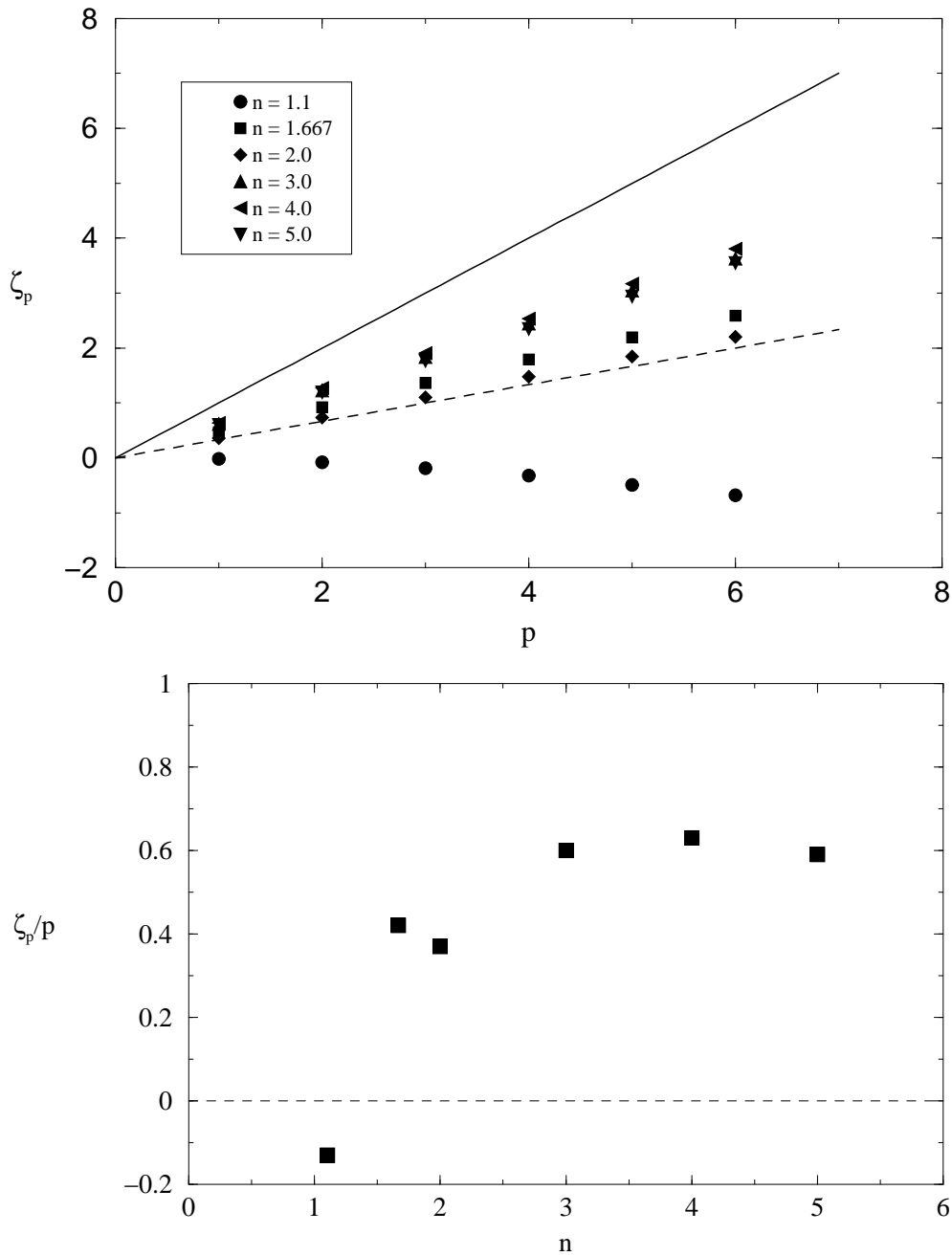


Fig. 7.24: a) Exponentes de funciones de estructura a escala $r = 280\eta$ versus p , el orden de la función de estructura, para cada pendiente del espectro, n . La recta continua es la ley de escala para turbulencia bidimensional ($n = 3,0$), según Kraichnan, $\zeta_p = p$. La recta discontinua es la ley de escala para turbulencia tridimensional ($n = 5/3$), según K41, $\zeta_p = p/3$. b) Pendientes de los exponentes de las funciones de estructura a escala $r = 280\eta$, para cada valor de la pendiente del espectro, n .

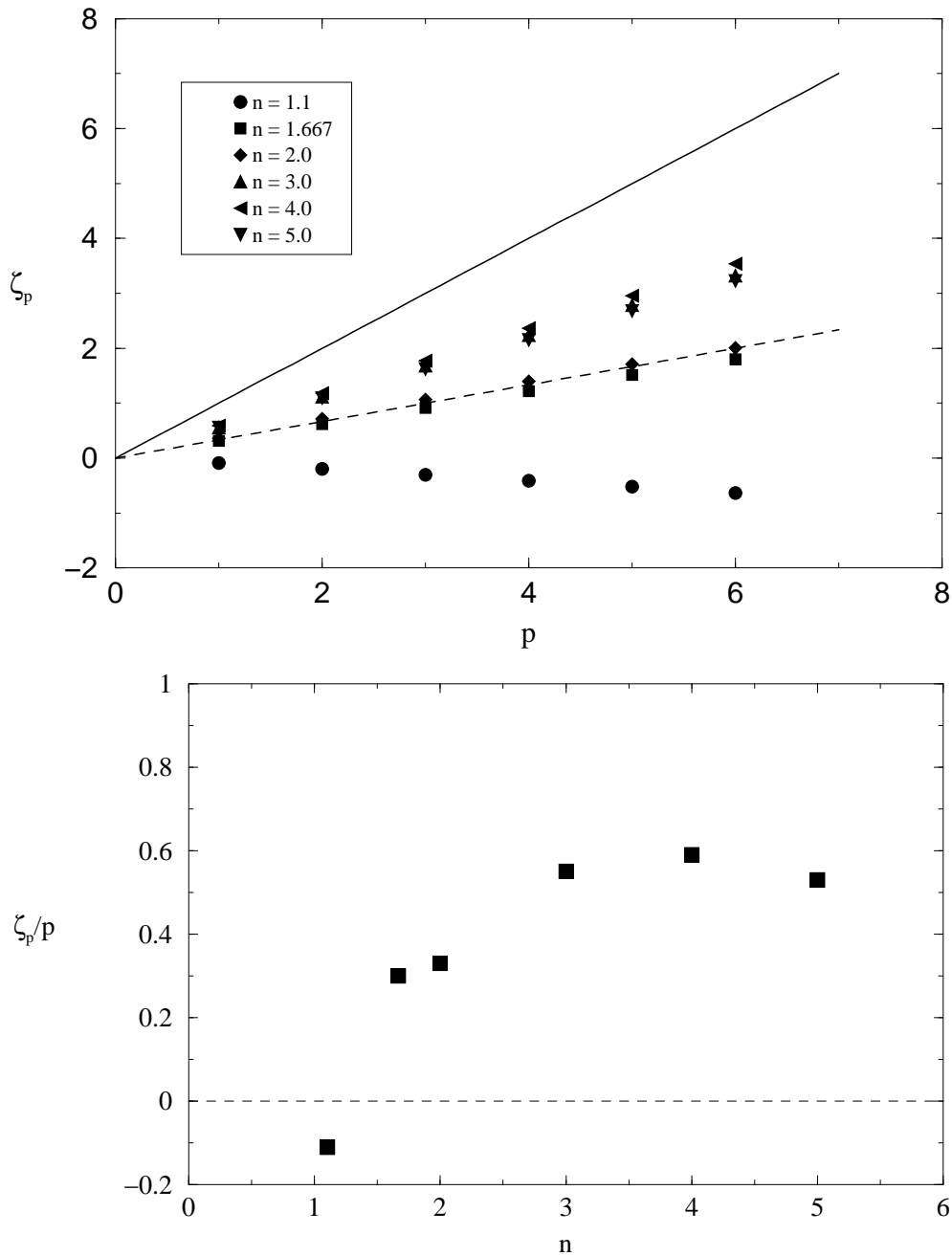


Fig. 7.25: a) Exponentes de funciones de estructura a escala $r = 310\eta$ versus p , el orden de la función de estructura, para cada pendiente del espectro, n . La recta continua es la ley de escala para turbulencia bidimensional ($n = 3,0$), según Kraichnan, $\zeta_p = p$. La recta discontinua es la ley de escala para turbulencia tridimensional ($n = 5/3$), según K41, $\zeta_p = p/3$. b) Pendientes de los exponentes de las funciones de estructura a escala $r = 310\eta$, para cada valor de la pendiente del espectro, n .

con

$$\zeta_p(r; n) = \psi(r; n)p, \quad (7.6)$$

donde

$$\psi(r; n) = 1 - \exp \left[(A_1 n - A_2) \frac{r}{\eta} + A_3 - A_4 n \right]. \quad (7.7)$$

Los valores de los parámetros A_i son, respectivamente, $3,6 \cdot 10^{-3}$, $5,8 \cdot 10^{-3}$, 1,17 y 1,0.

Unas observaciones respecto a los valores de los parámetros:

1. Al observar las gráficas 6.18 a 6.21 del capítulo anterior (con un espectro de la forma $E \sim k^{-4}$, es decir, $n \approx 4$), notamos que no siguen esta relación debido a que el número de Reynolds (y, por lo tanto, la escala de Taylor) es muy diferente en los dos casos. Una factorización de la escala con la de Taylor en lugar de la de Kolmogorov, afectaría únicamente a los parámetros A_1 y A_2 , y haría a (7.7) independiente del número de Reynolds.
2. El parámetro A_4 , que multiplica al exponente del espectro, n en el término independiente del exponencial en (7.7) vale 1.0 con una precisión de hasta 4 cifras decimales (el valor exacto es 0.9992). Casualidad?
3. Para $r \rightarrow 0$ y $n = 5/3$, el valor de ζ_p debería ser $p/3$, según K41. Sin embargo, con (7.7) obtenemos 0.4. Si asumimos que $A_4 = 1,0$, para forzar $\zeta_p = p/3$, deberíamos de modificar el valor de A_3 de 1.17 a 1.26.

Hemos repetido los cálculos normalizando las escalas con la microescala de Taylor. Los exponentes de las funciones de estructura con esta nueva normalización se muestran en la figura 7.27. Los valores de estos mismos exponentes representados frente al orden p de la función de estructura y para cada escala se reflejan en la figura 7.28.

Se han calculado las pendientes de las rectas de la gráfica 7.28 a efectos de obtener una expresión equivalente a 7.7, pero en relación a la microescala de Taylor. Sin embargo, como puede observarse en la gráfica 7.27, para valores bajos de n , el número de muestras para escalas menores que L_λ es demasiado pequeño. Sería conveniente repetir las experiencias Eulerianas con una resolución mayor para obtener información a pequeña escala.

7.1.4. La dispersión relativa de partículas

Todos los experimentos han sido realizados con 6000 parejas de partículas, separadas inicialmente por una distancia $D_0 = 7,36 \cdot 10^{-4}$. La escala de disipación de la turbulencia

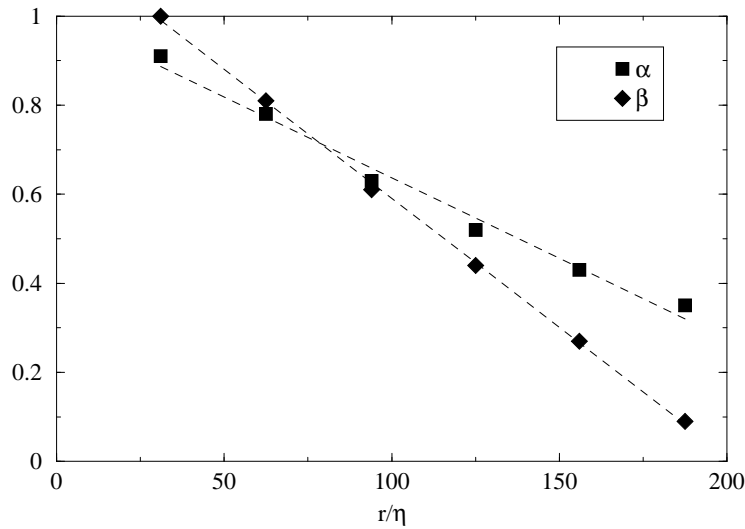


Fig. 7.26: Regresiones lineales para el cálculo de α y β de la expresión (7.2) en función de r/η .

creada es $\eta = 1,6 \cdot 10^{-3}$ ($k_\eta = 4000$), de forma que comienza la dispersión con una separación inicial del orden de la escala de disipación ($D_0 \sim \frac{\eta}{2}$). Para la observación de las dispersiones se han usado dos normalizaciones de longitud y dos de tiempo, una a pequeña escala y otra a gran escala. Las normalizaciones de longitud son la escala de Kolmogorov-Kraichnan, η , y la escala externa, o máxima, del espectro de energía, Λ , que es, por definición, la escala más energética³. Las dos escalas de tiempo son el tiempo característico asociado a la enstrofia media del campo, definido en el capítulo 6, T_c , y el tiempo asociado a la escala externa, T_Λ .

Para calcular la escala externa de cada simulación, se parte de la expresión de la energía total como integral del espectro de energía,

$$E_T = \int_{k_E}^{k_\eta} E(k) dk = \int_{k_E}^{k_\eta} C k^{-n} dk, \quad (7.8)$$

de forma que

$$\Lambda = \frac{2\pi}{k_E} = 2\pi \left[\frac{E_T(n-1)}{C} + \frac{1}{k_\eta^{n-1}} \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad (7.9)$$

con

$$C = 2,3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^n.$$

³ Se usa la escala externa Λ como normalización a gran escala, en lugar de la escala integral, debido a la poca fiabilidad del cálculo de las mismas, como se explica en la página 128.

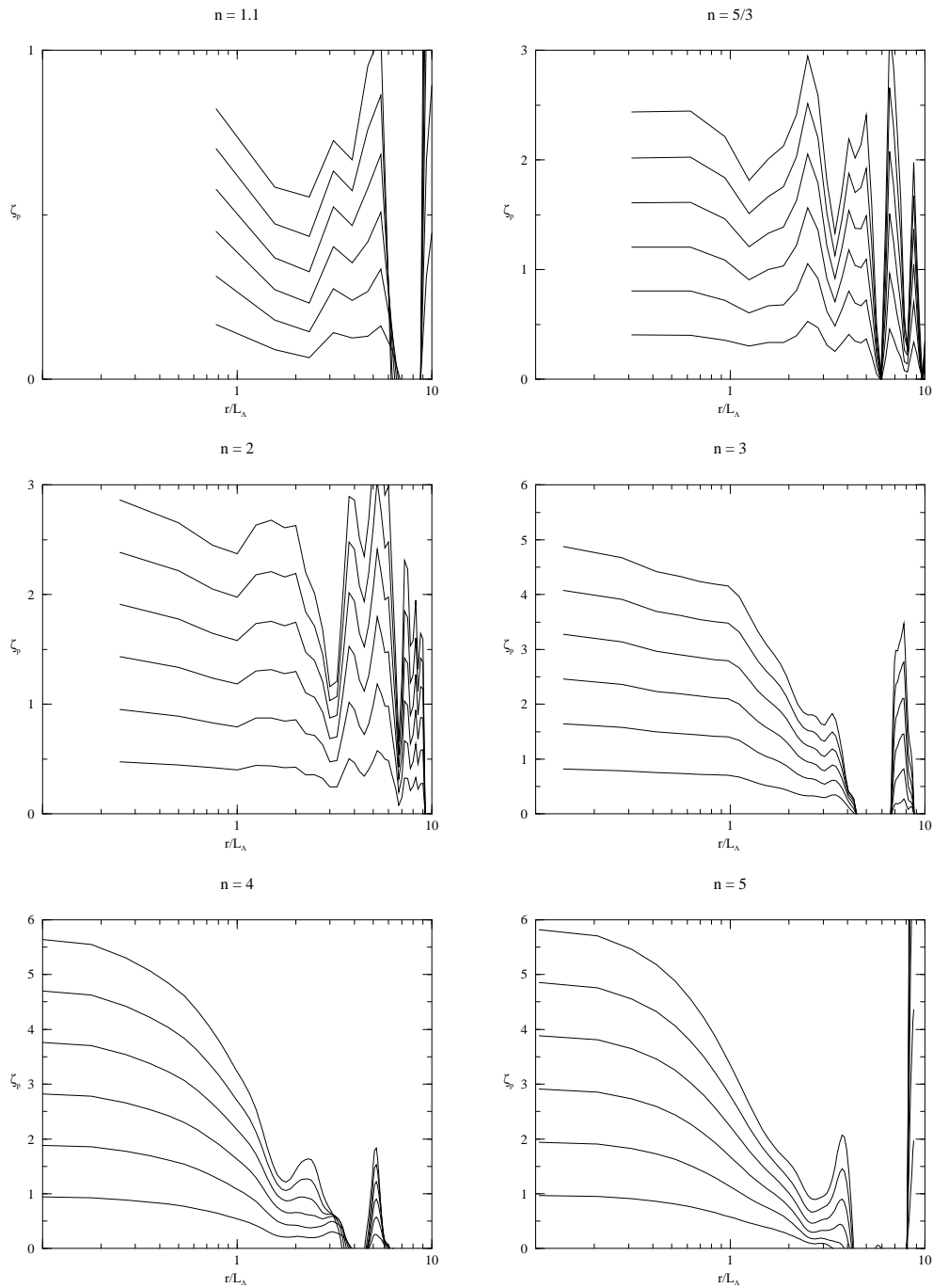


Fig. 7.27: Los exponentes de las funciones de estructura hasta orden 6 frente a la escala normalizada con la microescala de Taylor. Con esta normalización, el comportamiento de los exponentes es muy parecido para todos los valores de n .

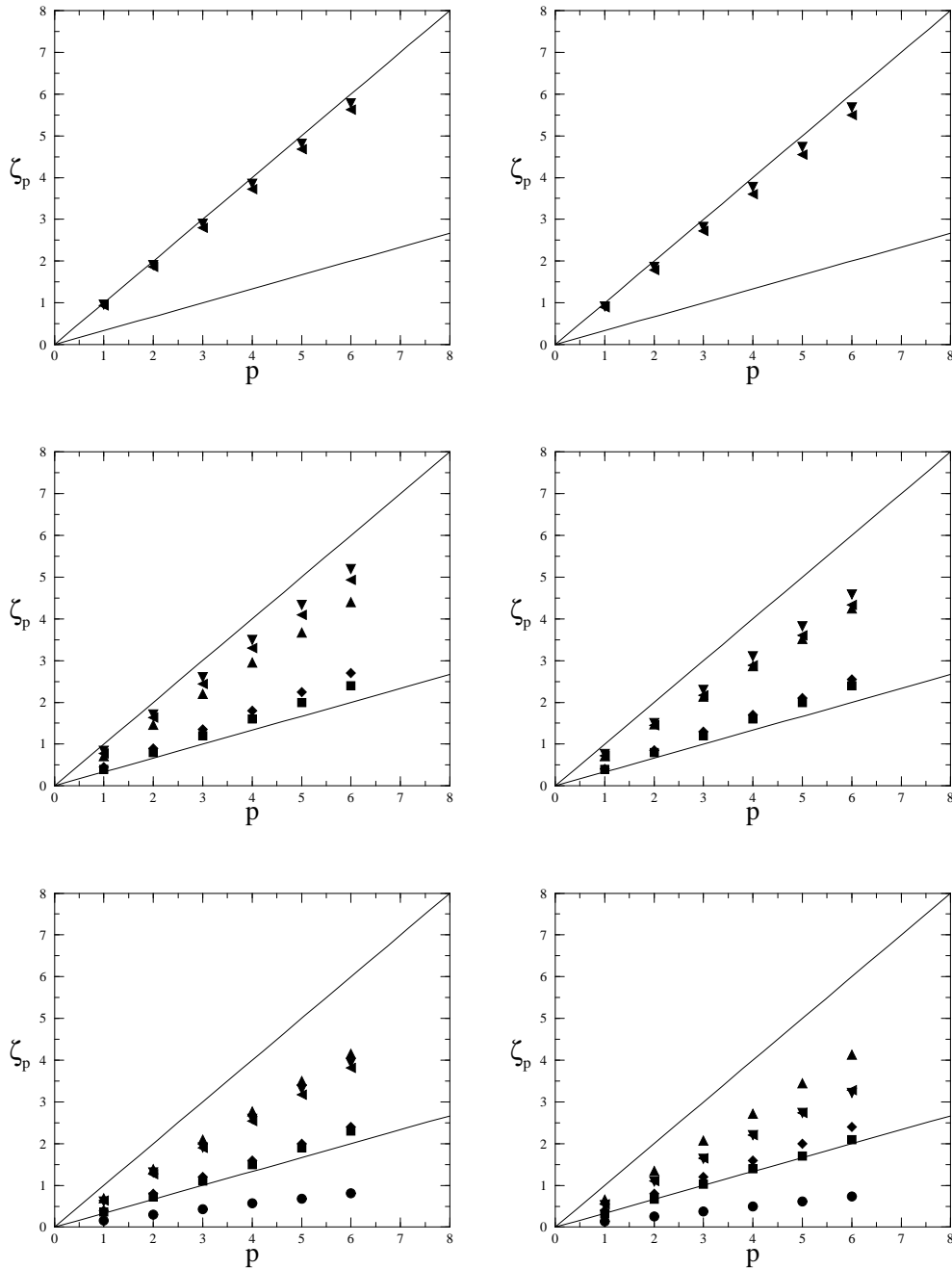


Fig. 7.28: Los exponentes de las funciones de estructura hasta orden 6 frente al orden p . Cada gráfica corresponde a una escala. Éstas son, de izquierda a derecha y de arriba a abajo: $0,1L_\lambda$, $0,2L_\lambda$, $0,4L_\lambda$, $0,6L_\lambda$, $0,8L_\lambda$, $1,0L_\lambda$. Para valores pequeños de r/L_λ no disponemos de muestras para $n < 4$ debido a que las microescalas de Taylor son pequeñas en comparación con la resolución del campo.

La figura 7.29 muestra la dispersión relativa para todos los experimentos a energía constante. Ahora bien, cada realización del campo tiene una enstrofia diferente (aunque la energía se mantenga aproximadamente constante), de forma que los tiempos característicos T_c , según la definición (6.1), también cambian de un campo a otro. En la tabla 7.2 se han sumariado las características más importantes de cada uno de los experimentos. La energía total mostrada en esta tabla es la energía calculada con las velocidades de las partículas; de la misma forma, las enstrofías están calculadas con las vorticidades.

Se ha computado un segundo tiempo característico “macroscópico”, asociado a la escala externa Λ , definido como

$$T_\Lambda = \left(\frac{\Lambda^2}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (7.10)$$

Para calcularlo, es necesario conocer ε , y esto se puede obtener a partir de (2.74)⁴,

$$\varepsilon = \int_0^\infty 2\nu k^2 E(k) dk = 2\nu Z, \quad (7.11)$$

de forma que

$$T_\Lambda = \left(\frac{\Lambda^2}{2\nu Z} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (7.12)$$

La viscosidad ν lo obtenemos a partir del valor de ε para $n = 5/3$, ya que para este espectro, se cumple que la escala de Kolmogorov es (ver ec. (2.81))

$$\nu^4 = \frac{\nu^3}{\varepsilon}; \quad (7.13)$$

así pues, para el espectro de Kolmogorov,

$$\nu^4 = \frac{\nu^3}{2\nu Z} \Rightarrow \nu = \eta^2 \sqrt{2Z}, \quad (7.14)$$

de donde obtenemos

$$\nu \approx 8 \cdot 10^{-4}$$

Si adimensionalizamos los tiempos de dispersión mediante los tiempos característicos T_c , el resultado obtenido es el mostrado en la figura 7.30. La línea discontinua horizontal muestra la escala $(D^2 - D_0^2) \approx D^2 \sim \eta^2$ (dado que $D_0 \ll \eta$), es decir, la entrada de

⁴ Consideraremos aquí únicamente el valor absoluto de la disipación de energía. En la ecuación (2.74) ésta era definida negativa porque está asociada a una disminución de la energía total del flujo.

n	E_T	k_E	Λ	Z	T_c	T_Λ
1.1	1.49	1.7	3.7	$1,1 \cdot 10^6$	$9,7 \cdot 10^{-4}$	0.2
1.5	1.46	0.96	6.5	$1,23 \cdot 10^5$	$2,9 \cdot 10^{-3}$	0.6
1.67	1.45	1.1	5.7	$5,1 \cdot 10^4$	$4,4 \cdot 10^{-3}$	0.7
2.0	1.42	1.6	3.9	$9,2 \cdot 10^3$	0.010	1.0
2.5	1.39	2.3	2.7	$9,0 \cdot 10^2$	0.033	1.7
3.0	1.36	2.9	2.2	166	0.078	2.6
4.0	1.30	3.9	1.6	59	0.13	3.0
5.0	1.25	4.6	1.4	54	0.14	2.8

Tab. 7.2: Características de los campos Eulerianos para los experimentos a energía constante.

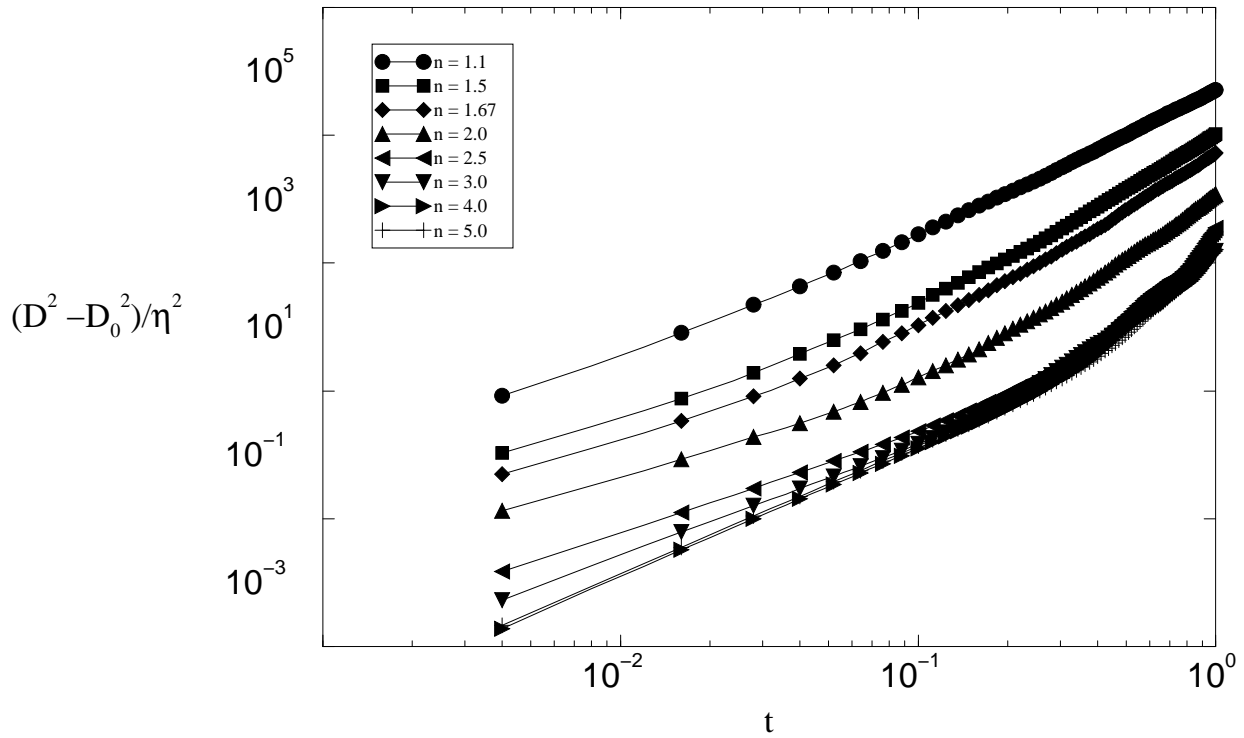


Fig. 7.29: Dispersión relativa en función del tiempo arbitrario t en los experimentos a energía constante.

la dispersión relativa en el subrango inercial. Ninguno de los experimentos es lo bastante largo como para alcanzar la escala externa del subrango inercial y entrar, por tanto, en el régimen Browniano.

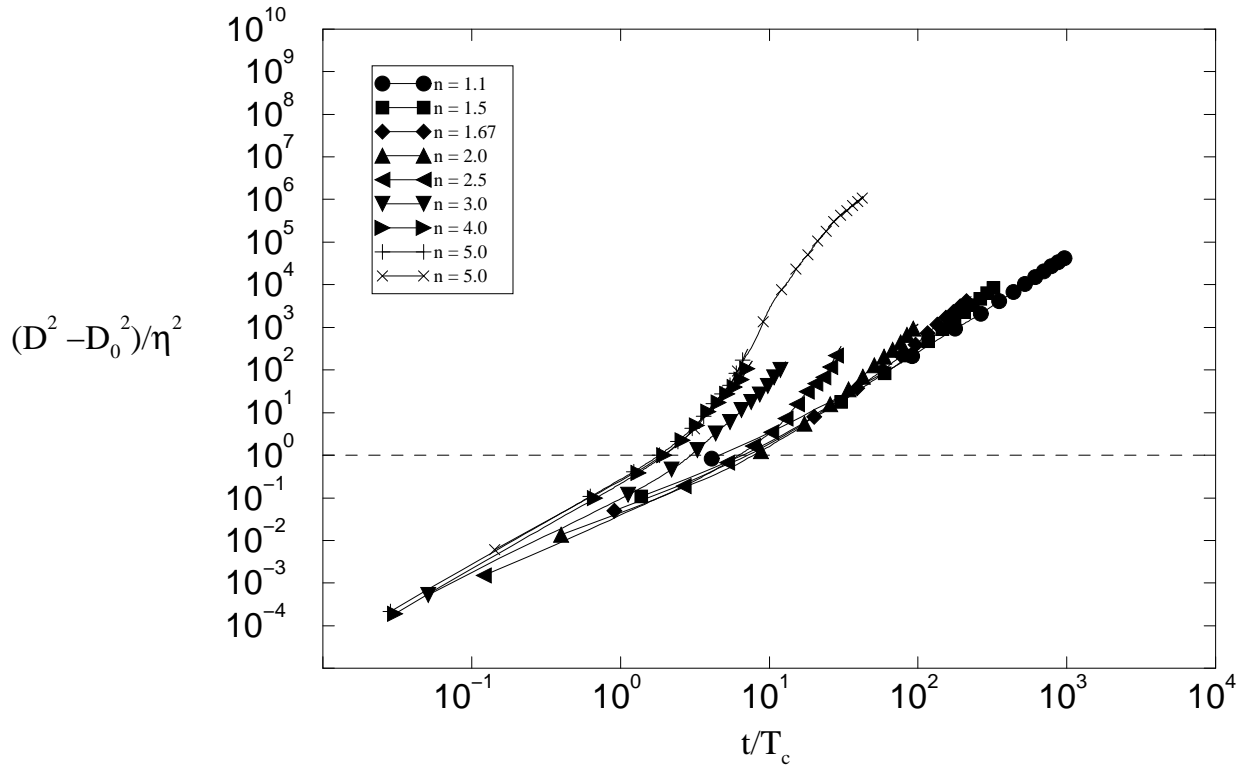


Fig. 7.30: Dispersión relativa con experimentos a energía constante. El tiempo ha sido normalizado con el tiempo característico, T_c y la escala con la escala de disipación, que esta señalada con una línea discontinua. En todos los experimentos se alcanza la escala de disipación para un tiempo entre T_c y $10T_c$

En la figura 7.33 se muestran, para cada uno de los espectros, los exponentes α de la ley potencial de dispersión relativa,

$$(D^2(t) - D_0^2) \sim t^\alpha. \quad (7.15)$$

Se observa que en todos los casos se inicia la dispersión con un exponente próximo a 2, como indica la teoría básica introducida en la sección 3.3.2.

En el tiempo de ejecución de estas simulaciones no es posible ver el el comportamiento a largo plazo de la dispersión en espectros de fuerte pendiente, dado que éstos tienen un tiempo característico muy grande. Para poder apreciar este comportamiento se repitió el

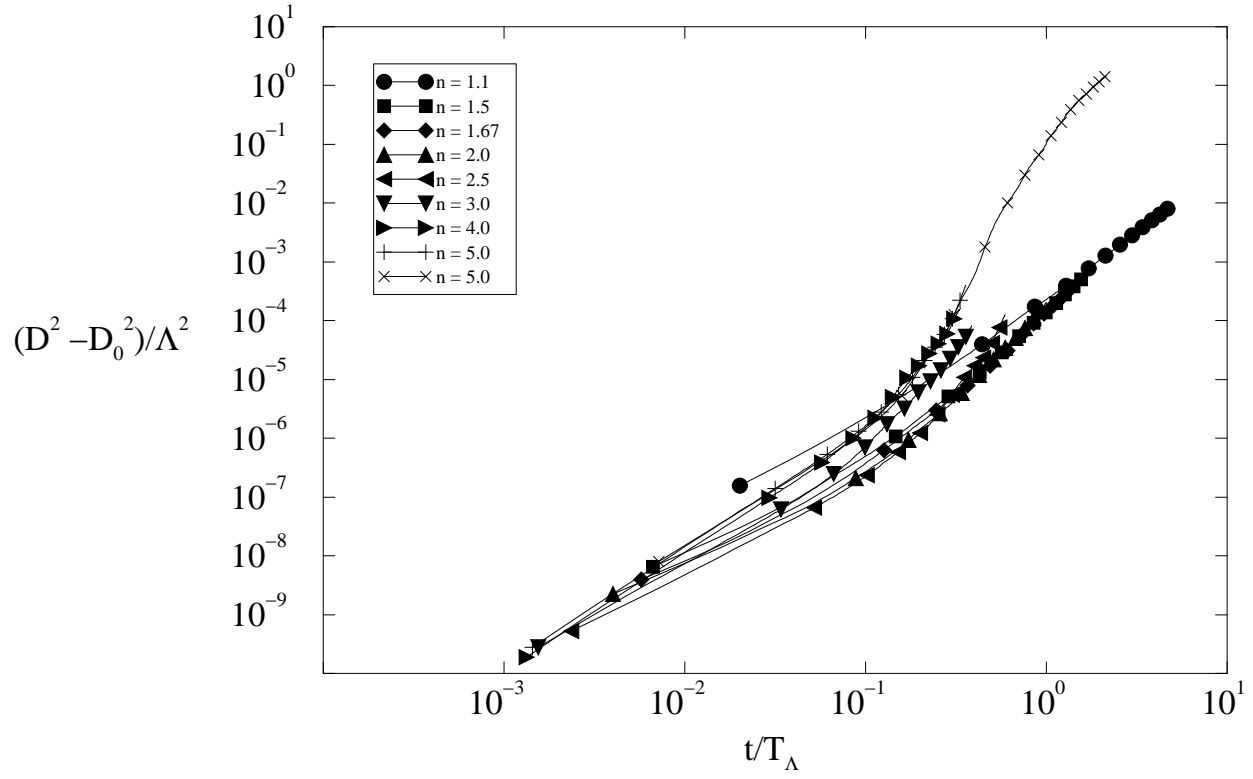


Fig. 7.31: Dispersión relativa con experimentos a energía constante. El tiempo ha sido normalizado con el tiempo macroscópico T_Λ , y la escala con la escala externa Λ . Puede observarse que ninguno de los experimentos es lo suficientemente largo como para llegar a la escala externa.

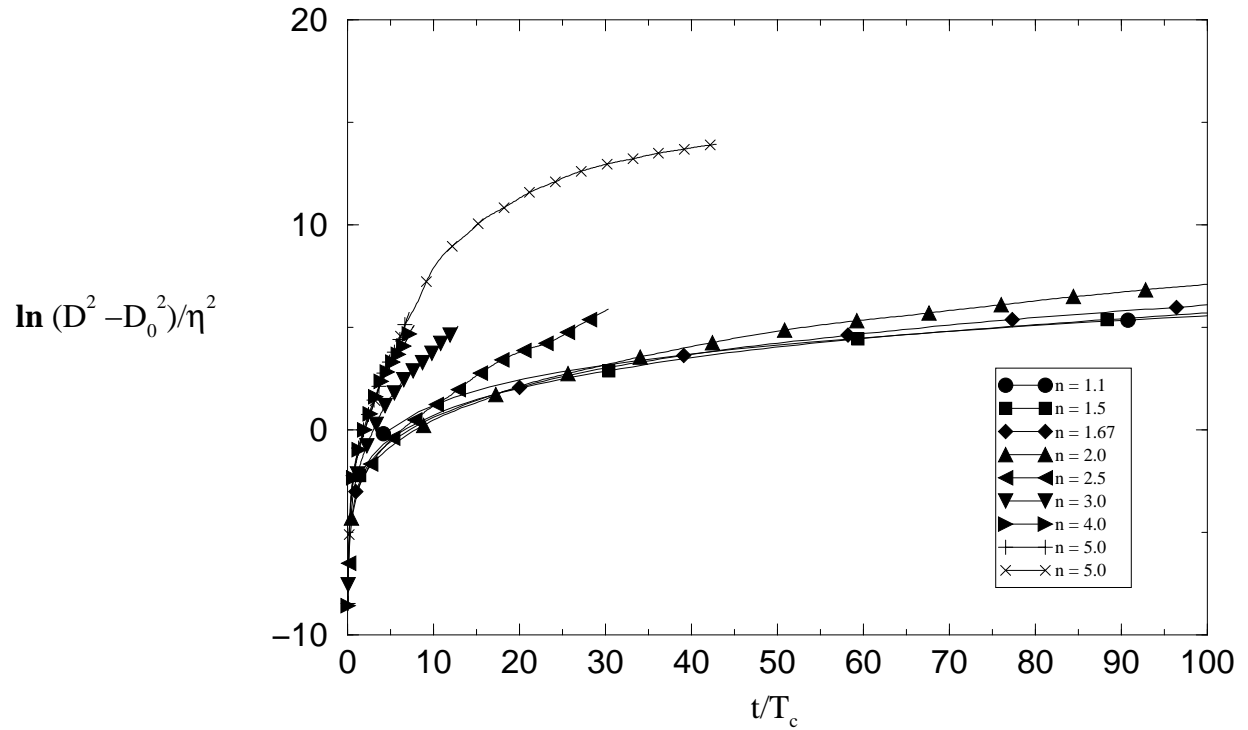


Fig. 7.32: Logaritmo de la dispersión relativa versus tiempo para cada espectro en los experimentos a energía constante. Para espectros con potencia mayor que 2,5 es claramente observable el crecimiento exponencial (lineal en la gráfica) descrito por la ley de Kraichnan-Lin. Los tiempos han sido adimensionalizados con T_c . La ley de Kraichnan-Lin se extiende hasta valores de t del orden de $10 - 20 T_c$.

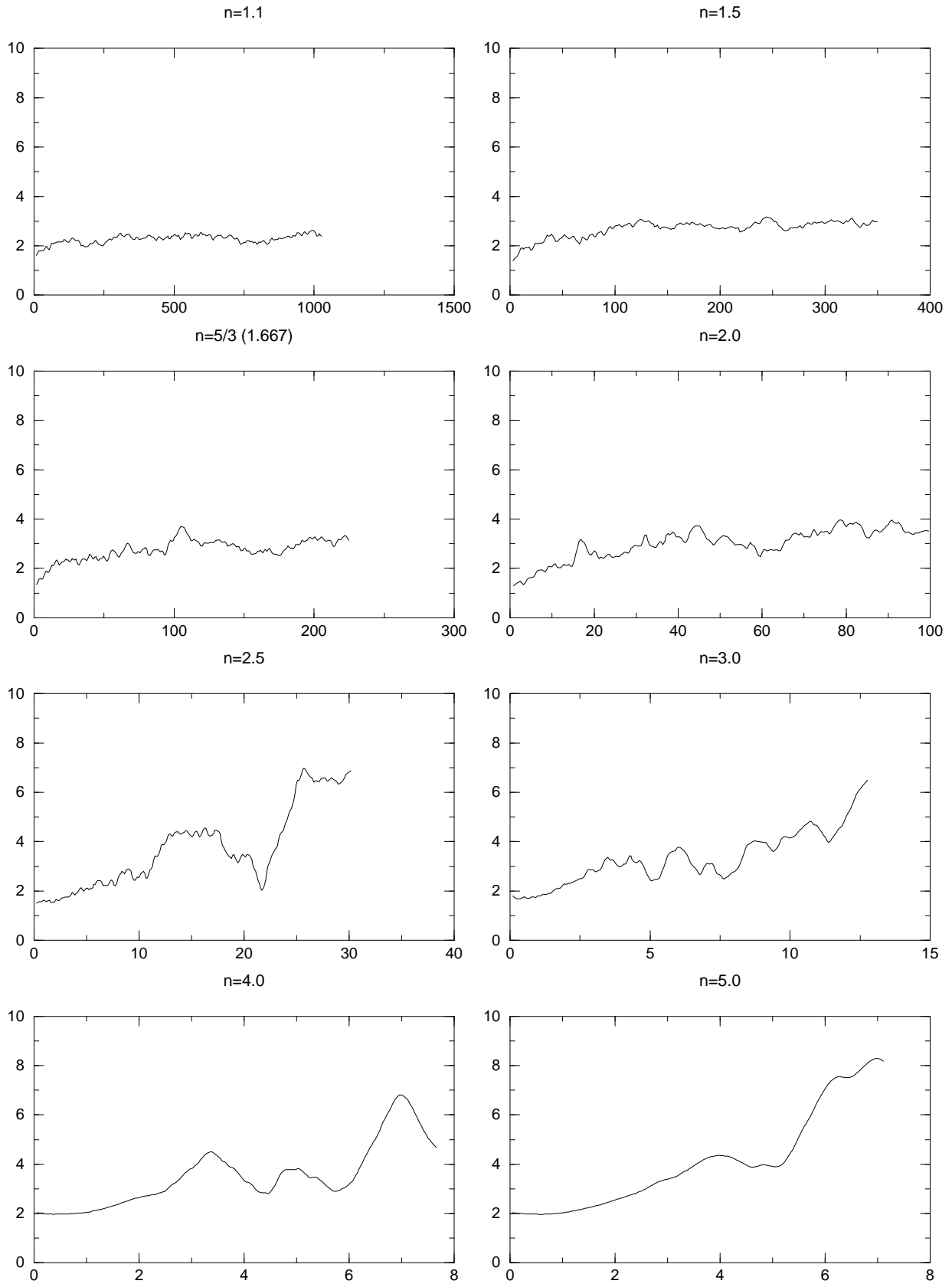


Fig. 7.33: Exponentes α de las leyes de dispersión relativa, $(D^2 - D_0^2) \sim t^\alpha$, para cada espectro en los experimentos a energía constante. Los tiempos han sido adimensionalizados con T_c .

experimento con $n = 5,0$ con un tiempo de ejecución 6 veces mayor, obteniéndose el resultado mostrado en la figura 7.34.

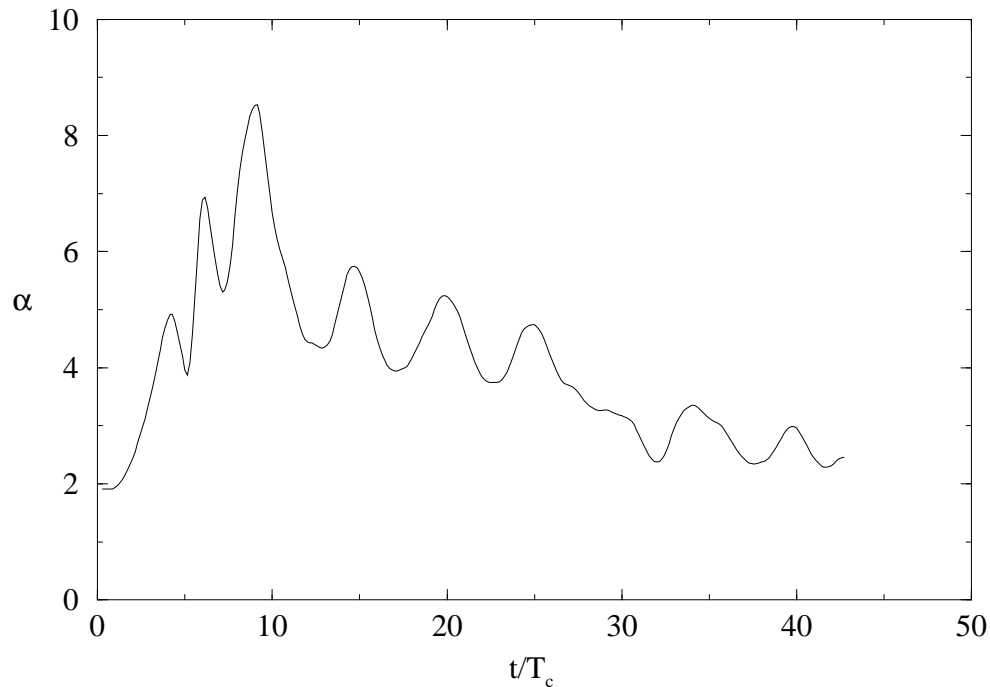


Fig. 7.34: Exponente α de las ley de dispersión relativa para $n = 5,0$.

Se han calculado la media de los exponentes de la dispersión para cada uno de los experimentos. Por supuesto, esta media temporal no se ha realizado en todo el periodo de dispersión, sino tan sólo en el que se considera que la dispersión se está realizando en escalas del subrango inercial. Esta entrada se realiza para tiempos que van de $\sim 10T_c$ para pendientes pequeñas, a $\sim 2 - 3T_c$ para pendientes grandes (ver figura 7.30). Para las pendientes pequeñas esta corrección sobre el tiempo total de dispersión es insignificante, ya que éste es del orden de $500T_c$.

El resultado de estos promedios se muestra en la figura 7.35. Las barras de error indican la desviación estándar de la pendiente. Es interesante notar que ésta es mayor cuanto mayor es el valor de n . La pendiente de la ley de potencia (7.15) sigue la ley de Richardson generalizada (3.55) hasta $n \sim 2$. A partir de este valor, la pendiente se estabiliza en un valor aproximado de 4, aunque con muchas variaciones.

Las barras de error tan grandes encontradas para valores de $n > 2$ son debidas a que la ley de dispersión en estos casos no es potencial, sino exponencial (ley de Kraichnan-Lin).

En efecto, la gráfica de la figura 7.32 muestra el logaritmo natural de la dispersión frente al tiempo, de forma que las líneas rectas observadas para $n > 2$ evidencian el comportamiento exponencial de la ley de dispersión relativa.

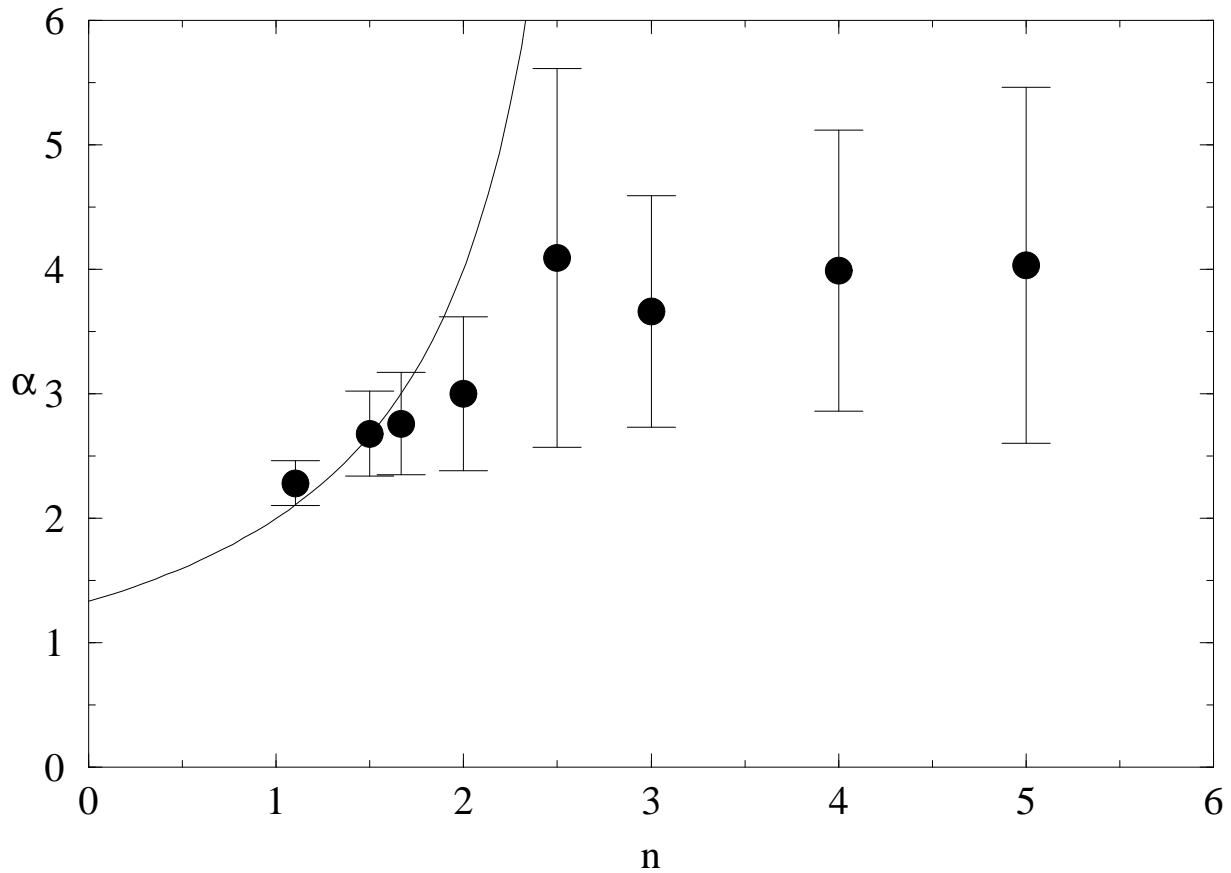


Fig. 7.35: Exponente de la ley de potencia (7.15) frente a la pendiente de espectro de energía para los experimentos a energía constante.

7.2. Campos a escala externa constante

Se ha realizado una segunda serie de experimentos en los que se ha variado también la pendiente de los espectros, pero manteniendo la escala externa constante, $k_E = 1,1$ ($\Lambda = 5,7$), e igual a la obtenida en la serie anterior con $n = 1,67$ (es decir, que los dos experimentos para $n = 1,67 \approx 5/3$ en las dos series son, más o menos, iguales).

Por otro lado, en esta serie se ha ampliado el rango de espectros estudiados, introduciendo valores de la pendiente por debajo de 1, debido a que encontraremos apreciables

variaciones de la energía total del campo y nos interesa comprobar si se cumple la ley de Richardson generalizada incluso con energía variable.

En efecto, si se realiza el sencillo cálculo de la energía total del espectro de energía en función de la ley espectral, manteniendo constante el valor de las escalas máxima y mínima, y la densidad de energía en $k_i = 10$ se sigue manteniendo en $E_i = 2,3 \cdot 10^{-2}$, se obtiene

$$E_T = \int_{k_E} k_\eta C k^{-n} dk = E_i 10^n \frac{1}{n-1} [k_E^{1-n} - k_\eta^{1-n}], \quad (7.16)$$

que está representada en la gráfica 7.36, donde se observa que para valores pequeños de n también obtenemos un aumento significativo de la energía total.

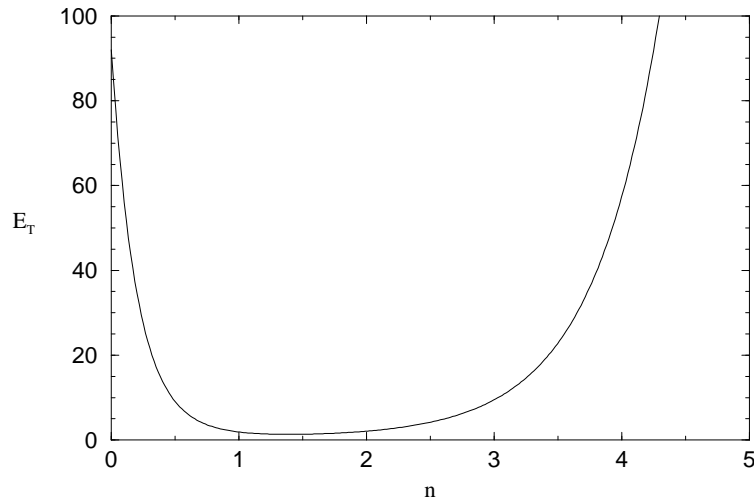


Fig. 7.36: Energía total del flujo turbulento en función de la potencia de la ley espectral, con las escalas externa y de disipación constantes.

Las características de los experimentos numéricos son mostradas en la tabla 7.3.

Para estos experimentos no mostramos las distribuciones de vorticidad porque son muy parecidas a las obtenidas con los de la sección anterior. Pueden observarse, sin embargo, los espectros obtenidos, en la figura 7.37.

7.2.1. La dispersión relativa de partículas

La figura 7.38 muestra la dispersión relativa, normalizada con la escala de disipación, en función del tiempo para la serie de experimentos realizados con la escala externa constante. La figura 7.39 se ha normalizado el tiempo con el tiempo característica T_c , y en la figura

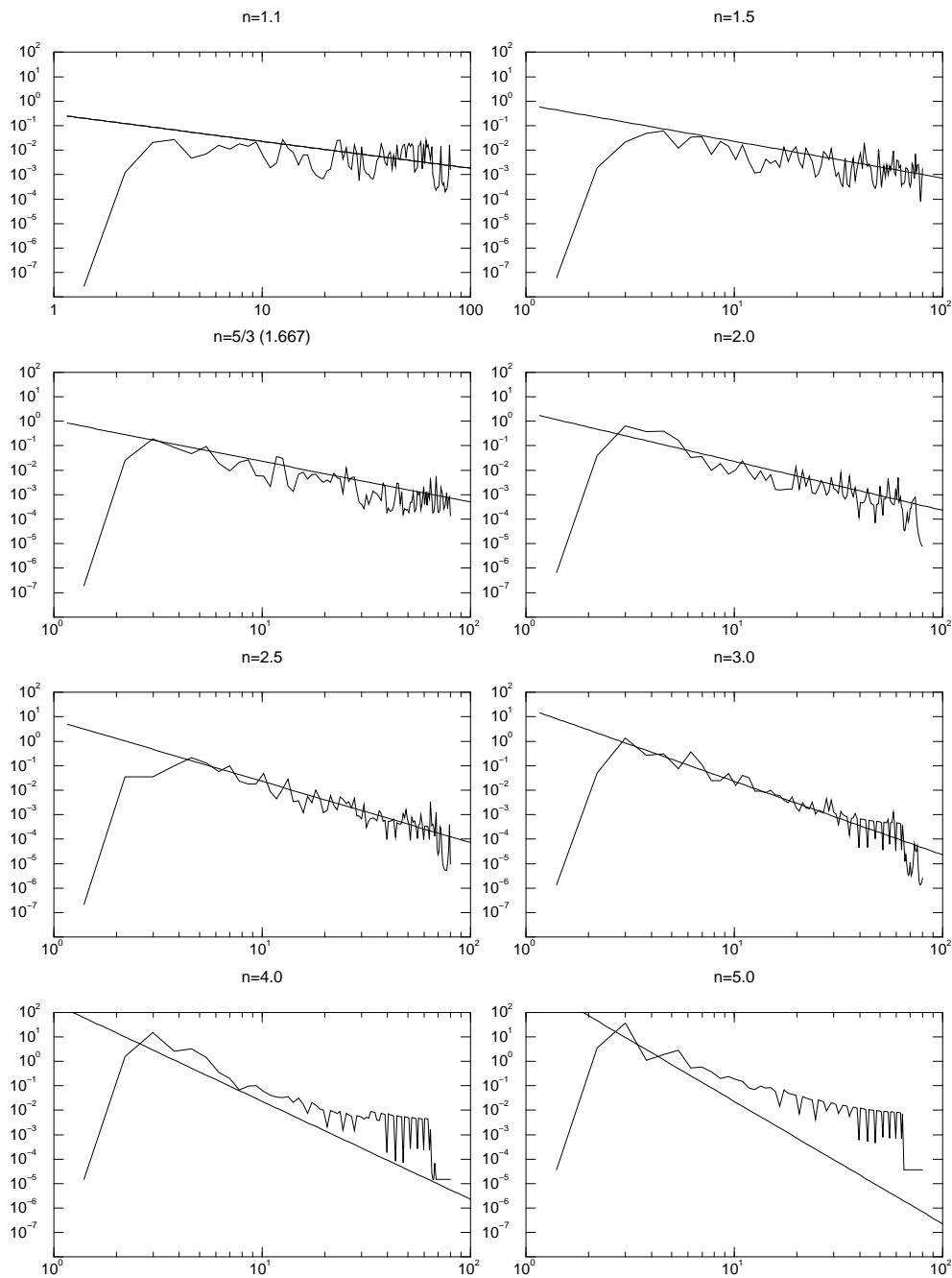


Fig. 7.37: Espectros de los experimentos a escala externa constante, con el mismo fondo de escala para poder apreciar las diferencias de pendientes.

n	E_T	Z	T_c	T_Λ
0.25	27.36	$1,2 \cdot 10^8$	$9,1 \cdot 10^{-5}$	0.06
0.5	9.0	$2,9 \cdot 10^7$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	0.09
0.75	3.57	$7,3 \cdot 10^6$	$3,7 \cdot 10^{-4}$	0.14
1.1	1.59	$1,1 \cdot 10^6$	$9,7 \cdot 10^{-4}$	0.27
1.25	1.37	$4,7 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	0.35
1.5	1.33	$1,2 \cdot 10^5$	$2,9 \cdot 10^{-3}$	0.55
1.67	1.44	$5,1 \cdot 10^4$	$4,4 \cdot 10^{-3}$	0.74
1.75	1.54	$3,3 \cdot 10^4$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	0.85
2.0	1.98	$9,2 \cdot 10^3$	0.010	1.30
2.5	3.87	$9,0 \cdot 10^2$	0.033	2.83
3.0	8.52	187	0.073	4.77
3.5	20.0	133	0.087	5.34
4.0	48.9	198	0.071	4.68
4.5	123	387	0.051	3.74
5.0	316	852	0.034	2.88

Tab. 7.3: Características de los campos Eulerianos para los experimentos a escala externa constante.

7.40, la dispersión relativa ha sido normalizada con la escala externa Λ , y el tiempo con el relativo a dicha escala, T_Λ , definido en (7.10).

En la figura 7.36 y en la tabla 7.3 se comprueba que la energía total del espectro aumenta tanto cuando aumenta el valor de n como cuando disminuye por debajo de $n \sim 1,5$.

Podemos realizar dos observaciones importantes respecto a esta serie de experimentos.

La primera es que para valores de $n \geq 3$, obtenemos de nuevo la ley de Kraichnan-Lin, como se puede apreciar en la figura 7.41, donde se ha representado, como en la serie anterior de experimentos, el logaritmo natural de la dispersión frente al tiempo. Las líneas rectas indican la ley de Kraichnan-Lin.

La segunda observación es que la ley de Richardson generalizada se sigue cumpliendo, independientemente del nivel de energía total del flujo. En la figura 7.42, se muestra claramente cómo el exponente de la ley de dispersión sigue la ley de Richardson generalizada (3.55) incluso para $n = 0,25$, con una energía total del flujo 20 veces mayor que para $n = 5/3$.

Se han representado en la misma gráfica (ver figura 7.44) los exponentes de la ley potencial⁵ para las dos series de experimentos y los resultados obtenidos por Fung and

⁵ Aunque hemos visto que para $n \gtrsim 2,5$ la ley no es potencial, sino exponencial.

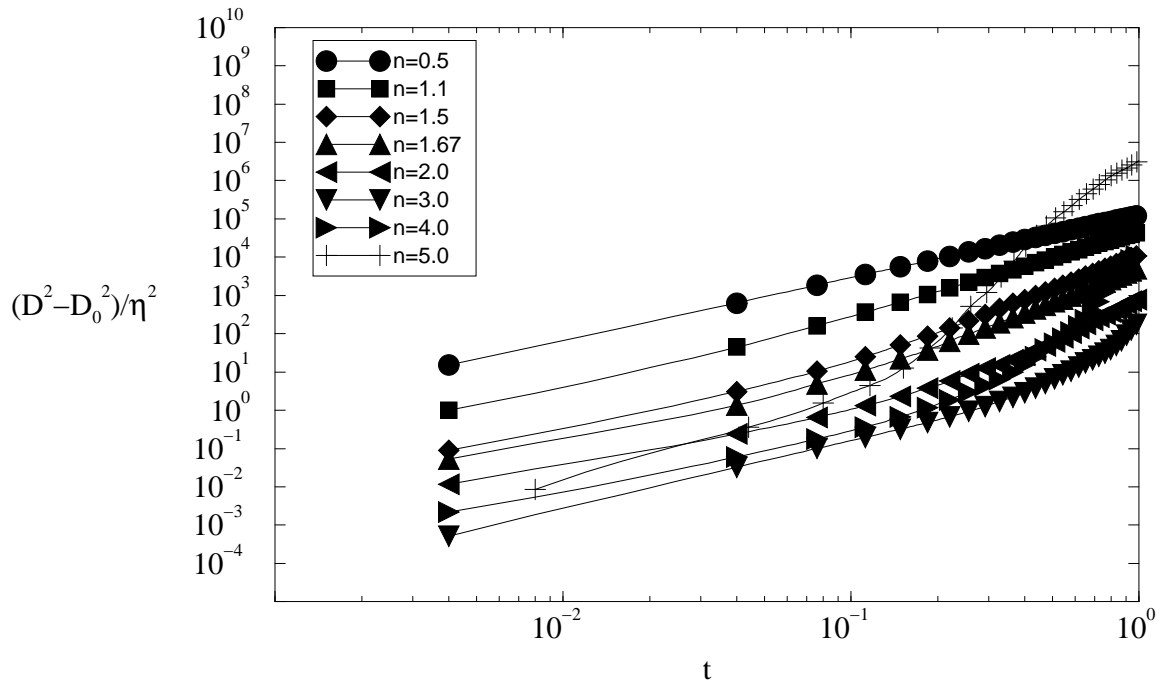


Fig. 7.38: Dispersión relativa en función del tiempo arbitrario t en los experimentos a escala externa constante.

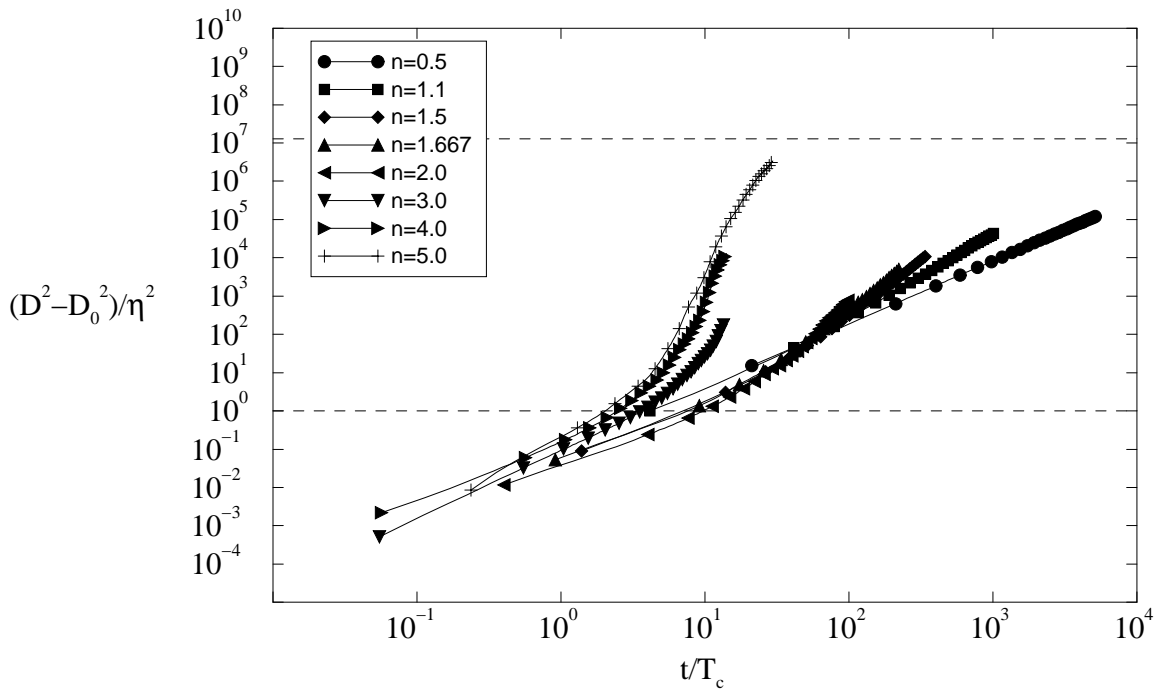


Fig. 7.39: Dispersión relativa en función del tiempo adimensional t/T_c en los experimentos a escala externa constante.

Vassilicos (1998), junto con la ley de Richardson generalizada, (3.55) y la ley de dispersión de Paladin and Vulpiani (1987), (3.89). Se aprecia claramente cómo la ley de Richardson generalizada se cumple para $n < 2$. Para $n = 2$, la divergencia respecto a esta ley es ya apreciable, y se inicia la transición hacia la ley de Kraichnan-Lin.

Los resultados muestran que la ley deducida por Paladin and Vulpiani (1987) no es válida para los tiempos de dispersión mostrados, incluso para valores de n cercanos a $5/3$ (figura 7.45). Dado que esta ley está basada en una ley de escala potencial para la función de estructura de primer orden (sección 3.3.4), ésta sólo puede ser válida para tiempos de dispersión muy pequeños.

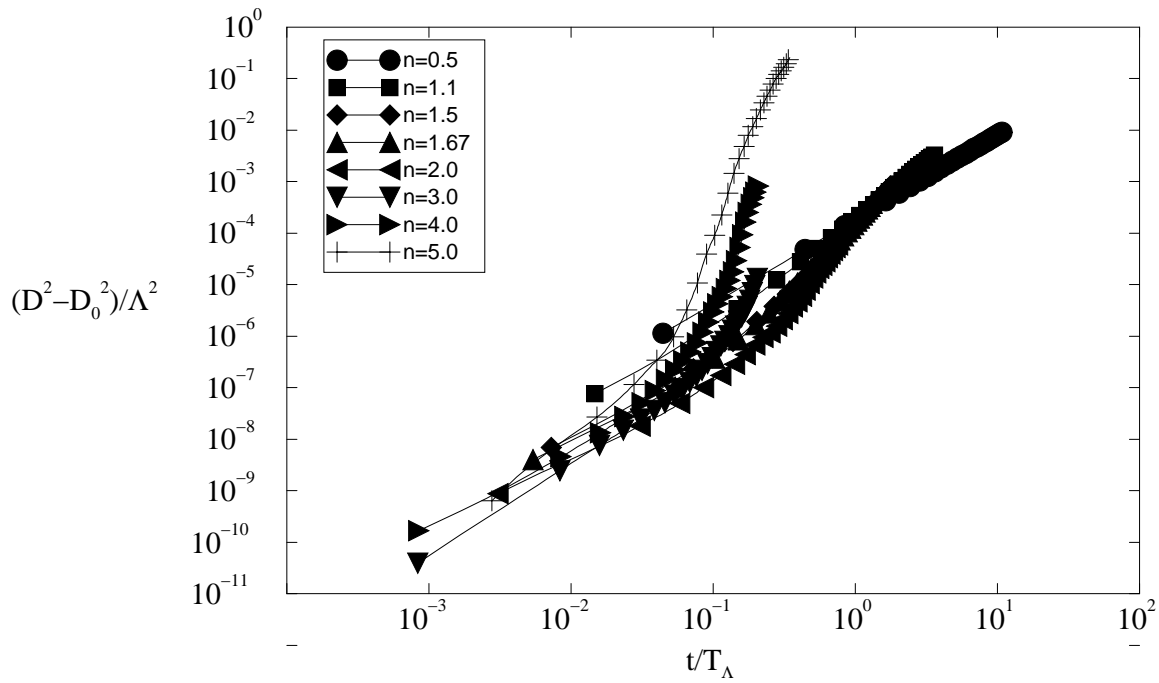


Fig. 7.40: Dispersión relativa normalizada con la escala externa Λ , en función del tiempo adimensional t/T_Λ , en los experimentos a escala externa constante.

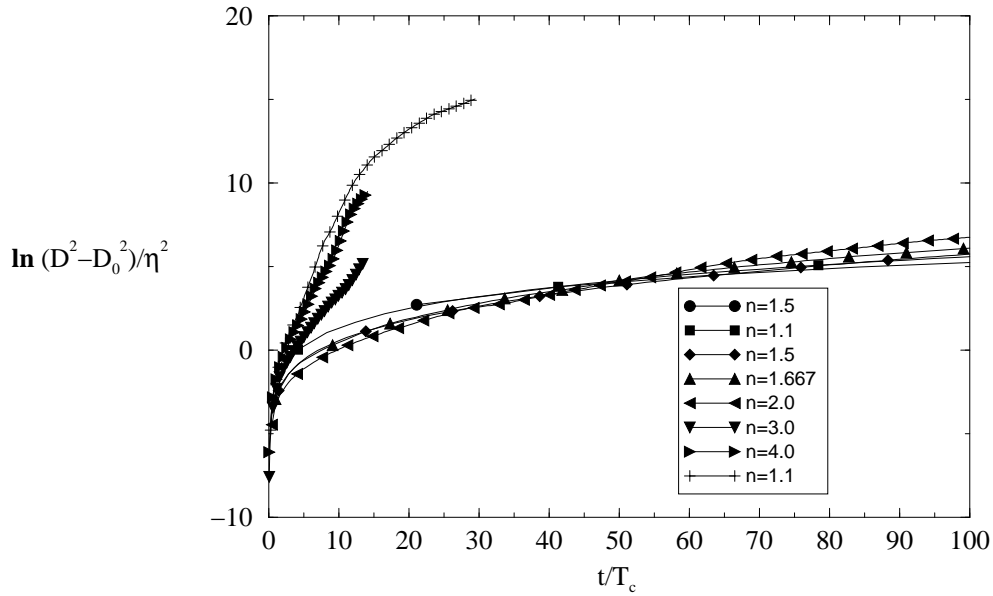


Fig. 7.41: Logaritmo de la dispersión relativa versus tiempo para cada espectro en los experimentos a escala externa constante. Para espectros con potencia mayor que 2,5 es claramente observable el crecimiento exponencial (lineal en la gráfica) descrito por la ley de Kraichnan-Lin. Los tiempos han sido adimensionalizados con T_c . La ley de Kraichnan-Lin se extiende hasta valores de t del orden de $10 - 20 T_c$.

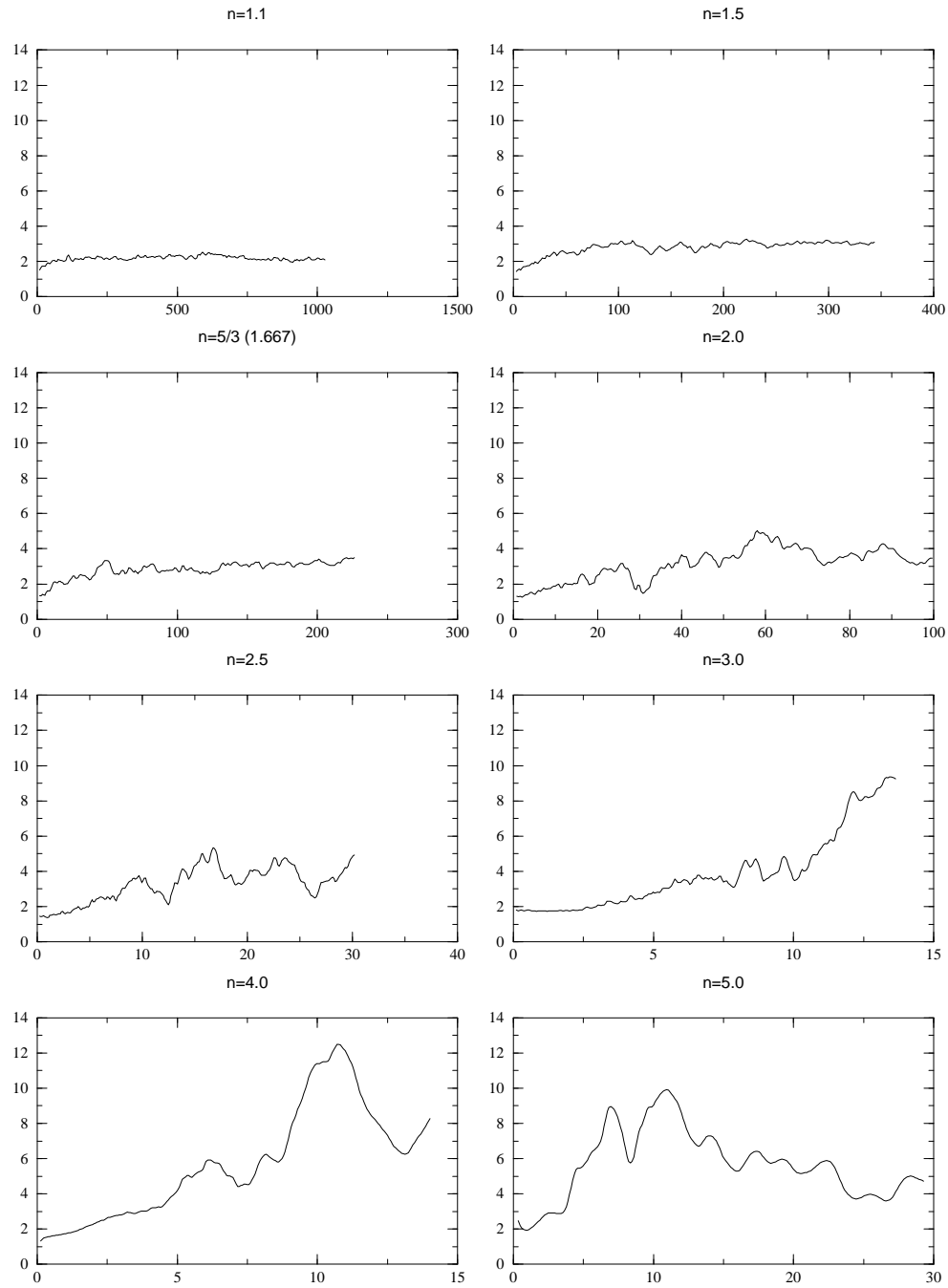


Fig. 7.42: Exponentes α de las leyes de dispersión relativa, $(D^2 - D_0^2) \sim t^\alpha$, para cada espectro en los experimentos a escala externa constante. Los tiempos han sido adimensionalizados con T_c .

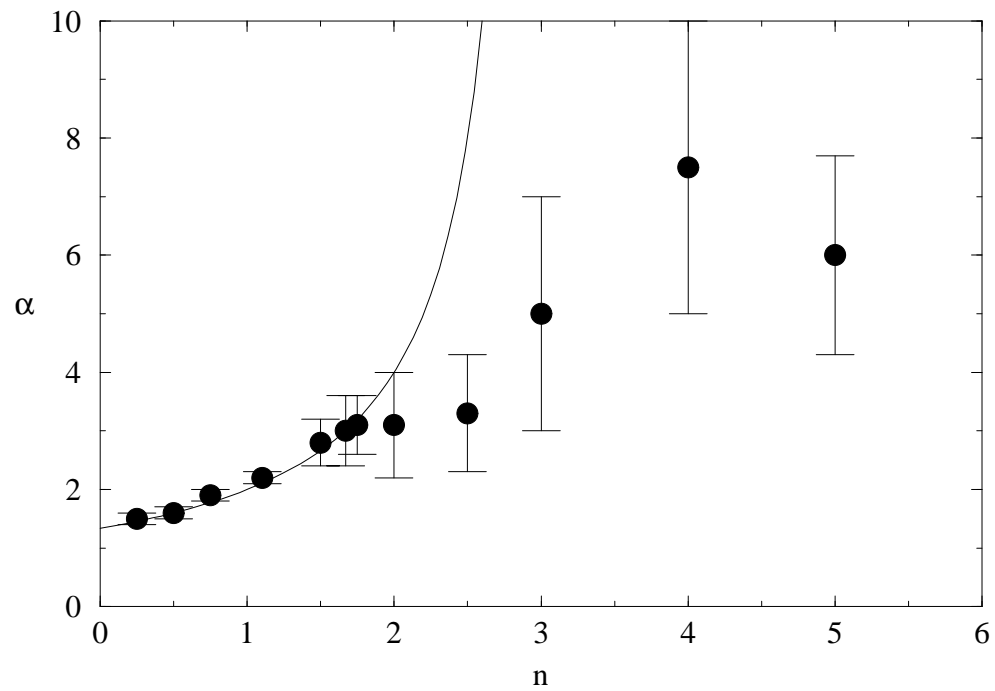


Fig. 7.43: Exponente de la ley de potencia (7.15) frente a la pendiente de espectro de energía para los experimentos a escala externa constante.

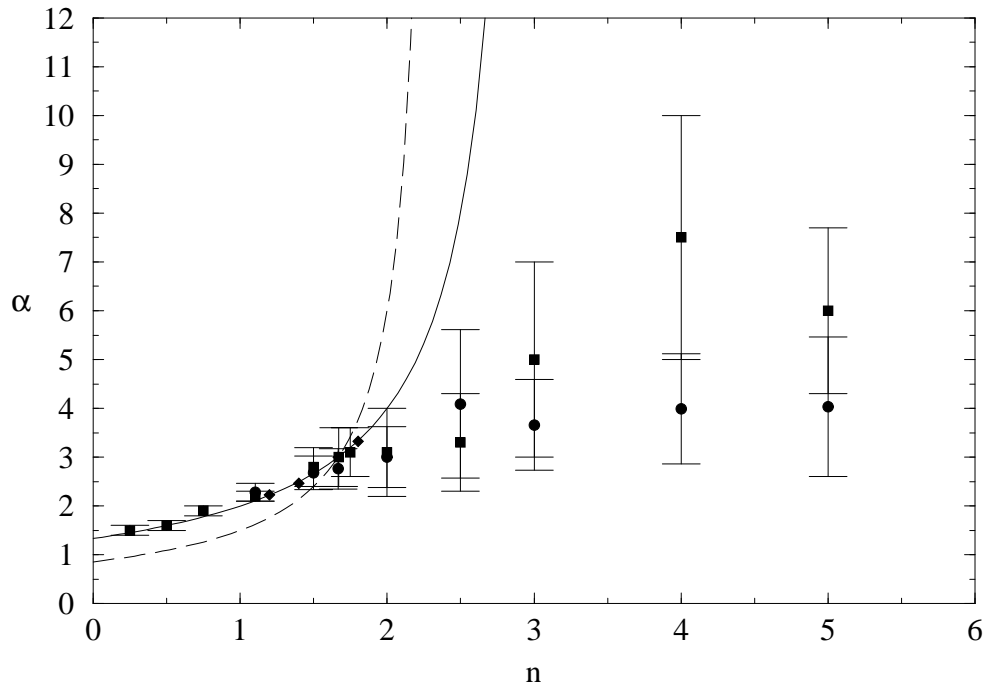


Fig. 7.44: Exponente de la ley de potencia (7.15) frente a la pendiente de espectro de energía para las dos series de experimentos. Los círculos corresponden a los experimentos a energía constante. Los cuadrados son los resultados para los experimentos a escala externa constante. Los rombos son los resultados extraídos de los experimentos de Fung and Vassilicos (1998). La línea continua es la ley de Richardson generalizada, $\alpha = 4/(3-n)$. La línea discontinua es la ley obtenida de la argumentación de Paladin and Vulpiani (1987), $\alpha = 6/(7-3n)$.

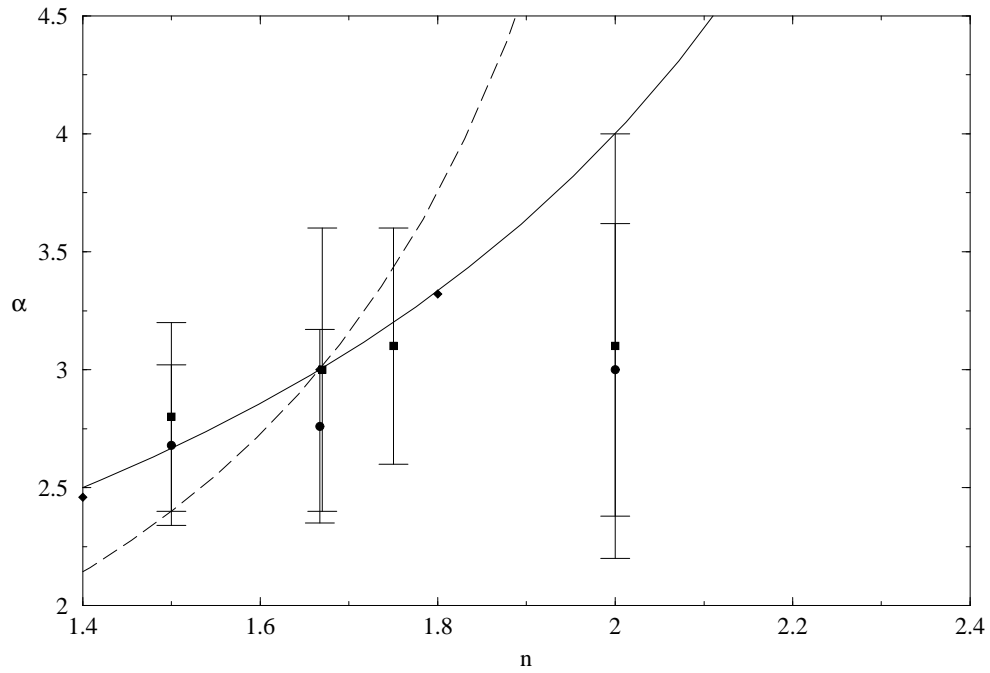


Fig. 7.45: Detalle de la figura 7.44 alrededor del valor $n = 5/3$. Se puede apreciar cómo los datos experimentales se ajustan mucho mejor a la expresión para la ley de Richardson generalizada (3.55) de Fung and Vassilicos (1998) (línea continua), donde se asume únicamente la localidad de las interacciones, que a la de Paladin and Vulpiani (1987) (línea discontinua), donde se parte de la hipótesis de una ley de escala potencial para la función de estructura de primer orden.