ACERCA DEL GENERO VIRTUAL DE LAS SUPERFICIES ALGEBRAICAS

V°B°

Tesis
CAS

Memoria presentada por
D. Eduardo Casas Alvero
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas.

Universidad de Barcelona, Facultad de Matemáticas, 1975.

Proposición IX.2. Sea C una curva localmente principal sobre una superficie S, representada como intersección parcial de S con otra superficie S', designemos por C' el complemento de C en la intersección de S y S', δ' y $p_{C'}$ serán el orden y el género virtual, respectivamente, de C'. Si es cierta la igualdad $(C'.C') + \delta' m = 2p_{C'} - 2 + 4\delta'$, es cierta también la $(C.C) + \delta m = 2p_C - 2 + 4\delta$.

Demostración. Sea m' el grado de S', la curva $C + C'$ es intersección de dos superficies y es bien sabido que por cálculo directo de la postulación se obtiene

$$p_{C+C'} = \frac{1}{2}mm'(m + m' - 4) + 1 \qquad (1)$$

Por otra parte sabemos que

$$1 - p_{C+C'} = 1 - p_C + 1 - p_{C'} - (C.C') \qquad (2)$$

El cálculo de $(C.C)$ y $(C'.C')$ es directo a partir de la definición del capítulo VI, utilizando otra superficie del mismo grado que S', cuya traza en S será linealmente equivalente a $C + C'$, se obtiene

$$(C.C) = \delta m' - (C.C')$$

$$(C'.C') = \delta' m' - (C.C')$$

Supuesta cierta la igualdad para C':

$$2p_{C'} - 2 + 4\delta' = \delta' m' + \delta' m - (C.C')$$

En virtud de (2) se tiene

$$2p_{C+C'} - 2 = 2p_C - 2 + \delta'(m + m' - 4) + (C.C')$$

y utilizando (1) resulta

$$mm'(m + m' - 4) = 2p_C - 2 + \delta'(m + m' - 4) + (C.C')$$

Basta recordar que $mm' = \delta + \delta'$ para obtener

$$2p_C - 2 = \delta(m + m' - 4) - (C.C')$$

igualdad de la que se obtiene la deseada sin más que introducir $(C.C)$.

§2. Caso de una curva reducida.

Proposición IX.3. *Si* C *es una curva de* $P_3(k)$, *localmente intersección de dos superficies en cada punto, y además* C *es reducida (i. e., carece de componentes múltiples), vale la fórmula* $(C.C) + \delta m = 2p_C - 2 + 4\delta$.

Demostración. Como hemos hecho notar ya, basta probar la igualdad sobre una determinada superficie. Consideremos el sistema lineal de superficies de grado m que pasan por C . Es bien sabido que para m lo bastante alto, tal sistema no tiene otros puntos base que los de C y también, si m es lo bastante alto, C es localmente principal sobre una superficie genérica del sistema: basta para ello tomar m de modo que el sistema lineal contenga a las superficies S_1, S_2, S_3, S_4 de VII.4 , razonando directamente, si se quiere, a la manera de VII.5.

Si en estas condiciones S es una superficie de grado m que pasa por C , lo bastante general, C es localmente principal sobre S y, por el teorema de Bertini ([30] , [31]) S es irreducible y no puede presentar puntos singulares más que en la variedad base del sistema que es C . No es posible asegurar en general que S sea no singular: si C presenta un punto singular no plano, es decir, con tangente de Zariski de dimensión superior a dos, no existe ninguna superficie no singular que pase por C . Sin embargo probaremos que S es normal: las únicas curvas múltiples que admite S son las componentes de C ; sea x un punto de una componente C_1 de C , el ideal de C en θ_x (θ haz estructural de S) es principal: (f_x) . Al ser C reducida, las componentes primarias de (f_x) son ideales primos correspondientes a las componentes de C que pasan por x , $(f_x) = \underline{p}_1 \cap \ldots \cap \underline{p}_s$. Si por ejemplo $\underline{p}_1$ corresponde a la componente C_1 , f_x genera el ideal maximal de $(\theta_x)_{\underline{p}_1}$ que es el anillo local de C_1 en S . Resulta así que tal anillo es regular y C_1 no es múltiple en S.

Sabido ya que S presenta solo un número finito de puntos singulares, consideremos el sistema lineal cortado sobre S

por las superficies de grado conveniente que pasan por C, excluida la parte fija C : la curva genérica es irreducible y no puede presentar singularidades más que en algún punto base, tales puntos base son inexistentes ya que si $x \varepsilon S$, existe una ecuación local de C en x lo que asegura que existe una superficie que corta a S exactamente en C en un entorno de x y x no es del complemento de C respecto de la intersección de la superficie con S. Podemos afirmar pues que C puede representarse como intersección parcial de S con otra superficie de manera que el complemento C' es no-singular e irreducible. Por IX.1 vale la fórmula para C' y por IX.2 valdrá también para C.

§3. Caso general.

Teorema IX.4. Si C es una curva localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos y S una superficie tal que C sea localmente principal sobre S, vale la igualdad $(C.C) + \delta m = 2p_C - 2 + 4\delta$ donde $(C.C)$ se ha calculado sobre S, δ es el orden de C y m el de S.

Demostración. El resultado viene asegurado por IX.3 para curvas reducidas. Bastará probar que C admite, sobre una conveniente superficie S un complemento reducido para que, por IX.2, valga la fórmula para C sobre S y valga por lo tanto en general.

Ello resulta de repetir el razonamiento de IX.3 con ligeras modificaciones: podemos tomar S de modo que C sea localmente principal sobre S y S carezca de singularidades fuera de C (Nota: no parece posible asegurar que S sea normal, en cuyo caso bastaría la demostración de IX.3). Tomando otra vez el sistema lineal de las trazas sobre S de las superficies de grado lo bastante elevado que pasan por C , desprovisto de su parte fija C , dicho sistema sigue carente de puntos base y, por una nueva aplicación del teorema de Bertini, su curva genérica carece de partes múltiples.

La igualdad $(C.C) + \delta m = 2p_C - 2 + 4\delta$ nos permite dar nuevas demostraciones de teoremas clásicos, extendiendo su validez al caso de curvas localmente intersección de dos superficies en cada punto, entre ellos queremos destacar:

Corolario IX.5. (Género de una intersección parcial). Si C es una curva de $P_3(k)$, localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos que viene representada como intersección parcial de dos superficies S , S' de órdenes m , m' , el género virtual de C se calcula mediante la fórmula

$$p_C = \frac{\delta(m + m' - 4) - (C.C')}{2} + 1$$

en la que δ es el orden de C , C' es el complemento de C respecto de la intersección de S, S' y suponemos S , por ejemplo, irreducible.

Demostración. Asegurada la válidez de la fórmula $(C.C) + \delta m = 2p_C - 2 + 4\delta$ sobre S , basta expresar $(C.C)$ en función de δ , m' y $(C.C')$ como en la demostración de IX.2.

Conviene señalar que el número de puntos comunes a C y C' , $(C.C')$ depende tan solo de C y C' y no de la superficie S sobre la que se calcula para demostrar el corolario: por su misma definición $(C.C')$ es la dimensión de las secciones globales del cociente del haz estructural de $P_3(k)$ por la suma de los haces de ideales de C y C' , esto es, la característica de Euler-Poincaré de la variedad (de dimensión cero) intersección de C y C' .

CAPITULO X. LA VARIACION DE GENERO VIRTUAL PARA ALGUNAS SUPERFICIES DEL ESPACIO ORDINARIO.

Si C es una curva ν-uple de una superficie irreducible S del espacio ordinario $P_3(k)$, calcularemos en este capítulo la función asociada a C en S en la hipótesis de que C sea localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos y que la dilatación de S centrada en C sea finita. En particular el término independiente del polinomio que corresponde a la función asociada proporcionará la diferencia de géneros virtuales $p_S - p_{\overline{S}}$ donde $\overline{S}$ es la transformada de S respecto de C (capítulo IV).

§1. Polinomio de Hilbert-Samuel del anillo local de una curva sobre una superficie.

Supongamos en primer lugar que C es irreducible; designemos por Ω el haz estructural de $P_3(k)$ y por θ el de S. Siendo S una hipersuperficie, θ es cociente de Ω por el haz de ideales localmente principal correspondiente a S. Sea Ω_o el anillo local de C en $P_3(k)$, fibra de Ω en el punto genérico de C y sea Ω_o el anillo local de C en S, fibra de Ω en el mismo punto. Es bien sabido que Ω_o es regular de dimensión dos y θ_o es de dimensión uno, cociente de Ω_o por el ideal principal correspondiente a S : si g es una ecuación local de S en cualquier punto de C , $g \in \Omega_o$ y el ideal de S en Ω_o es (g), de ahí, $\Omega_o = \theta_o/(g)$. Sean $\underline{P}_o$, $\underline{p}_o$ los ideales maximales de Ω_o , θ_o respectivamente. Obviamente $g \in \underline{P}_o$; supongamos $g \in \underline{P}_o^{\mu} - \underline{P}_o^{\mu+1}$, designando por $\bar{g}$ la clase de g en $\underline{P}_o^{\mu}/\underline{P}_o^{\mu+1}$ (forma inicial de g), se tiene la sucesión exacta

$$0 \to G(\Omega_o) \xrightarrow{i} G(\Omega_o) \xrightarrow{j} G(\theta_o) \to 0$$

donde $G(\Omega_o)$, $G(\theta_o)$ son los graduados de Ω_o y θ_o , i el morfismo que se obtiene al multiplicar por $\bar{g}$ y j el inducido por el paso al cociente $\Omega_o \to \theta_o$. Teniendo en cuenta que Ω_o es regular de dimensión dos, $G(\Omega_o)$ es isomorfo, como anillo graduado, a un anillo de polinomios en dos variables sobre $k = \Omega_o/\underline{P}_o$ y observando que i es un morfismo de grado μ , j un morfismo de grado cero, se calcula inmediatamente la función de Hilbert-Samuel de θ_o resultando, para $n \geqslant \mu-1$

$$\dim_k \theta_o/\underline{p}_o^n = \mu n - \tfrac{1}{2}\mu(\mu-1)$$

En particular, definida la multiplicidad, ν , de S en C a partir del polinomio de Hilbert-Samuel de θ_o , resulta $\mu = \nu$, el polinomio es pues $\nu n - \frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ y la ecuación local de S, g, pertenece a $\underline{P}_o^{\nu} - \underline{P}_o^{\nu+1}$ como es bien sabido.

§2. Resultados auxiliares.

Lema X.1. *Si* $f \in \theta_o$ *es tal que* $f\underline{P}_o^n = \underline{P}_o^{n+1}$ *para* n *mayor que un cierto* n_o, *entonces vale la misma igualdad para* $n \geqslant \nu - 1$.

Demostración. Se observa inmediatamente que el elemento f debe ser de $\underline{P}_o - \underline{P}_o^2$; sea $f' \in \Omega_o$ una antiimagen de f, $f' \in \underline{P}_o - \underline{P}_o^2$. Recordando que una familia de elementos de $\underline{P}_o$ generan el ideal si sus clases en $\underline{P}_o/\underline{P}_o^2$ forman base, f' puede formar parte de un sistema de dos generadores de $\underline{P}_o$ ($\underline{P}_o/\underline{P}_o^2$ es de dimensión dos), sea f', h' tal sistema de generadores. Si $\bar{f}'$, $\bar{h}'$ son las clases de f', h' en $\underline{P}_o/\underline{P}_o^2$, la forma inicial $\bar{g}$ de g (base del ideal de S) se expresará como una forma de grado ν :

$$\bar{g} = P_\nu(\bar{f}',\bar{h}') = a_o\bar{f}'^{\nu} + \ldots + a_\nu\bar{h}'^{\nu}$$

Forzosamente, por la elección de f', $a_\nu \neq 0$: en efecto, en $G(\theta_o)$ tenemos

$$0 = a_o\bar{f}^{\nu} + \ldots + a_\nu\bar{h}^{\nu}$$

si h es la imagen en θ_o de h' y seguimos designando con $\bar{\ }$ las formas iniciales. Si se cumple $f\underline{P}_o^n = \underline{P}_o^{n+1}$, consideremos $h^{n+1} \in \underline{p}_o^{n+1}$, se tendrá $h^{n+1} = f\ell_n$ con $\ell_n \in \underline{p}_o^n$; en $G(\theta_o)$ tendremos $\bar{h}^{n+1} = \bar{f}\bar{\ell}_n$ y por ello el elemento $\bar{h}'^{n+1} - \bar{f}'\bar{\ell}'_n$ (ℓ'_n antiimagen de ℓ_n) deberá ser del ideal generado por $\bar{g} = P_\nu(\bar{f}',\bar{h}')$ en $G(\Omega_o)$: la existencia de un múltiplo de P_ν con un término no nulo en $\bar{h}'^{n+1}$ fuerza $a_\nu \neq 0$.

Tendremos pues en $G(\theta_o)$ una expresión

$$\bar{h}^\nu = b_\nu \bar{f}^\nu + b_{\nu-1}\bar{f}^{\nu-1}\bar{h} + \ldots + b_1 \bar{f}\bar{h}^{\nu-1}$$

de donde es inmediato probar inductivamente que los

$$\bar{f}^m \ , \ \bar{f}^{m-1}\bar{h} \ , \ \ldots \ , \ \bar{f}^{m-\nu+1}\bar{h}^{\nu-1}$$

generan $\underline{p}_o^m/\underline{p}_o^{m+1}$ para $m > \nu - 1$. Aplicando la anterior expresión del polinomio de Hilbert-Samuel, tales elementos son base de $\underline{p}_o^m/\underline{p}_o^{m+1}$ al resultar $\dim_k \underline{p}_o^m/\underline{p}_o^{m+1} = \nu$ para $m \geqslant \nu - 1$. Aplicando el lema de Nakayama, los

$$f^m \ , \ f^{m-1}h \ , \ \ldots \ , \ f^{m-\nu+1}h^{\nu-1}$$

son un sistema mínimo de generadores de $\underline{p}_o^m$ para $m \geqslant \nu - 1$ y se sigue de ahí inmediatamente la igualdad $f\underline{p}_o^m = \underline{p}_o^{m+1}$ para $m \geqslant \nu - 1$.

Volvamos ahora al caso en que C es una curva ν-uple de S, no necesariamante irreducible. El haz de ideales $\underline{\underline{a}}$ de C en S es intersección de los haces de ideales primos correspondientes a cada una de sus componentes y tenemos:

Lema X.2. Si, para un cierto $f \in \underline{\underline{a}}_x$, $f\underline{\underline{a}}_x^{(n)} = \underline{\underline{a}}_x^{(n+1)}$ para n mayor que un cierto n_o , la misma igualdad vale para $n \geqslant \nu - 1$.

Demostración. El enunciado es trivial si $x \notin C$. Si $x \in C$, se observa inmediatamente que $f \in \underline{\underline{a}}_x - \underline{\underline{a}}_x^{(2)}$, basta por ejemplo aplicar IV.1; con ello es obvio que $f\underline{\underline{a}}_x^{(n)} \subset \underline{\underline{a}}_x^{(n+1)}$ cualquiera que sea n .

Designemos por $\underline{p}_1 , \ldots , \underline{p}_m$ los ideales primos asociados a $\underline{\underline{a}}_x$ y por $\theta_1,\ldots,\theta_m$ los localizados de θ_x en dichos ideales . Cada $\underline{p}_i$ es de altura uno y al ser la curva reducida, $\underline{\underline{a}}_x = \underline{p}_1 \cap \ldots \cap \underline{p}_m$. Cada $\underline{p}_i$ corresponde a una componente de C que pasa por x y el localizado θ_i es el anillo local de dicha componente en S . De la hipótesis y del hecho de que $\underline{\underline{a}}_x^n\theta_i = \underline{\underline{a}}_x^{(n)}\theta_i = \underline{p}_i^n\theta_i$ se deduce inmediatamente que $f\underline{p}_i^n\theta_i = \underline{p}_i^{n+1}\theta_i$ para $n > n_o$ y por el lema anterior, tal igualdad es válida para $n \geqslant \nu - 1$. Recordando que por definición, $\underline{\underline{a}}_x^{(n)} = \theta_x \cap (\bigcap_i \underline{\underline{a}}_x^n\theta_i)$ si $z \in \underline{\underline{a}}_x^{(n+1)}$, $z \in \underline{p}_i^{n+1}\theta_i$ para cualquier i , de ahí que si $n \geqslant \nu -1$, $z/f \in \underline{p}_i^n\theta_i$ para todo i . Si $\underline{p}$ es cualquier otro ideal primo de altura uno de θ_x , $f \notin \underline{p}$ en virtud de IV.1 y $z/f \in (\theta_x)_{\underline{p}}$. Así z/f es de θ_x al ser de todos sus localizados en ideales primos de altura uno y $z/f \in \underline{\underline{a}}_x^{(n)}$ con lo que queda probada la igualdad del enunciado para $n \geqslant \nu - 1$.

Lema X.3. Si g es un elemento cualquiera de Ω_x tal que $g \in \underline{\underline{A}}_x^{\mu} - \underline{\underline{A}}_x^{\mu+1}$, entonces $(g) \cap \underline{\underline{A}}_x^n = g\underline{\underline{A}}_x^{n-\mu}$ para $n \geqslant \mu$.

Demostración. Si x no es un punto de C, $\Omega_x = \underline{\underline{A}}_x$ y la igualdad es obvia. En caso contrario sean $\underline{P}_1, \ldots, \underline{P}_m$ los ideales primos asociados a $\underline{\underline{A}}_x$, correspondientes a las componentes de C que pasan por x. Escribiendo $(\Omega_x)_{\underline{P}_i} = \Omega_i$, $\underline{P}_i(\Omega_x)_{\underline{P}_i} = \underline{M}_i$, cada Ω_i es un anillo local regular de ideal maximal $\underline{M}_i$. Es sabido que definiendo $v_i(\alpha) = t$ si y solo si $\alpha \in \underline{M}_i^t - \underline{M}_i^{t+1}$ se tiene una valoración del cuerpo de fracciones de Ω_i centrada en $\underline{M}_i$. Si $g \in \underline{\underline{A}}_x^{\mu} - \underline{\underline{A}}_x^{\mu+1}$, teniendo en cuenta que $\underline{\underline{A}}_x^{(\mu+1)} = \underline{\underline{A}}_x^{\mu+1}$, $g \in \underline{M}_i^{\mu} - \underline{M}_i^{\mu+1}$ y por tanto, $v_i(g) = \mu$ para cada i. Si ahora $hg \in \underline{\underline{A}}_x^n$ ($n \geqslant \mu$) se tendrá $v_i(hg) \geqslant n$ para todo i, de donde $v_i(h) \geqslant n - \mu$ para todo i, $h \in \bigcap_i \underline{M}_i^{n-\mu}$ y resulta $h \in \underline{\underline{A}}_x^{(n-\mu)} = \underline{\underline{A}}_x^{n-\mu}$. Hemos probado pues $(g) \cap \underline{\underline{A}}_x^n \subset g\underline{\underline{A}}_x^{n-\mu}$ y la inclusión contraria es trivial.

§3. Relación entre los ideales asociados a una curva sobre la superficie y en el espacio.

En general, llamando ψ al paso al cociente $\psi : \Omega \to \theta$, no puede asegurarse que $\psi(\underline{\underline{A}}^{(n)}) = \underline{\underline{a}}^{(n)}$ si $\underline{\underline{A}}$ y $\underline{\underline{a}}$ son los haces de ideales, en el espacio y en la superficie, de una curva sobre S. Baste observar que de ser así, si la curva es localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, $\underline{\underline{A}}^{(n)} = \underline{\underline{A}}^n$ y se tendría $\underline{\underline{a}}^{(n)} = \underline{\underline{a}}^n$ para todo n . En el apéndice se da un ejemplo en el que la curva es un par de rectas y las potencias ordinarias y simbólicas de su haz de ideales sobre una superficie no coinciden.

Lema X.4. Consideremos, con las notaciones utilizadas hasta ahora, el morfismo en fibra $\psi_x : \Omega_x \to \theta_x$ en un punto cerrado x de C . Si Σ es el sistema multiplicativo complementario de la reunión de los ideales primos asociados a $\underline{\underline{A}}_x$, escribiendo, para un ideal cualquiera $\underline{I}$ de Ω_x , $\Sigma(\underline{I}) = \underline{I}\Sigma^{-1}\Omega_x \cap \Omega_x$, se tiene $\psi_x^{-1}(\underline{\underline{a}}_x^{(n)}) = \Sigma((g) + \underline{\underline{A}}_x^n)$ donde (g) es el ideal de la superficie en Ω_x , núcleo de ψ_x .

Demostración. Si σ es la imagen por ψ_x de Σ , σ es el complementario de la reunión de los ideales primos asociados a $\underline{\underline{a}}_x$, $\underline{\underline{a}}_x^{(n)} = \sigma(\underline{\underline{a}}_x^n)$. Es obvio que $\psi_x^{-1}(\underline{\underline{a}}_x^{(n)}) \supset \Sigma((g)+\underline{\underline{A}}^n)$. Reciprocamente, si $\psi_x(z) \in \underline{\underline{a}}_x^{(n)}$, $s\psi_x(z) \in \underline{\underline{a}}_x^n$ para cierto s de σ con lo que, escribiendo $s = \psi_x(s')$, $s' \in \Sigma$, $s'z$ difiere de un elemento de $\underline{\underline{A}}_x^n$ en un elemento del núcleo de ψ_x, $s'z \in \underline{\underline{A}}_x^n + (g)$ y $z \in \Sigma(\underline{\underline{A}}_x^n + (g))$.

Proposición X.5. Si C es una curva localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos y es curva ν-uple de una supeficie irreducible S de modo que la dilatación de S centrada en C es finita, se cumple $\psi(\underline{\underline{A}}^{(n)}) = \underline{\underline{a}}^{(n)}$ cualquiera que sea n.

Demostración. Basta probar la igualdad en fibra y ello solo para los puntos de C ya que en los demás la igualdad es obvia. Si $x \in C$, sea g un generador del ideal de S en Ω_x. Por ser C ν-uple en S, $g \in \underline{\underline{A}}_x^{(\nu)} - \underline{\underline{A}}_x^{(\nu+1)} = \underline{\underline{A}}_x^{\nu} - \underline{\underline{A}}_x^{\nu+1}$ y por el lema anterior, para $n \leqslant \nu$,

$$\psi_x^{-1}(\underline{\underline{a}}_x^{(n)}) = \Sigma((g) + \underline{\underline{A}}_x^n) = \Sigma(\underline{\underline{A}}_x^n) = \underline{\underline{A}}_x^{(n)} = \underline{\underline{A}}_x^n$$

de donde $\underline{\underline{a}}_x^{(n)} = \psi_x(\underline{\underline{A}}_x^n)$ para $n \leqslant \nu$. Si $n > \nu$, resulta obvio que $\psi_x \underline{\underline{A}}_x^n = \underline{\underline{a}}_x^n \subset \underline{\underline{a}}_x^{(n)}$. En virtud de V.14 y X.2, existe $f \in \theta_x$ tal que $\underline{\underline{a}}_x^{(n)} = f^{n-\nu}\underline{\underline{a}}_x^{(\nu)} = f^{n-\nu}\psi_x(\underline{\underline{A}}_x^{\nu}) \subset \underline{\underline{a}}_x^{n-\nu}\psi_x(\underline{\underline{A}}_x^{\nu}) = \psi_x(\underline{\underline{A}}_x^{n-\nu})\psi_x(\underline{\underline{A}}_x^{\nu}) = \psi_x(\underline{\underline{A}}_x^n)$.

Corolario X.6. En las condiciones de la proposición anterior, $\underline{\underline{a}}^{(n)} = \underline{\underline{a}}^n$ cualquiera que sea n

Demostración. Basta observar que por ser C localmente intersección de dos superficies en cada punto, $\underline{\underline{A}}^n = \underline{\underline{A}}^{(n)}$ y aplicar X.5.

Corolario X.7 Cualquiera que sea n, la sucesión

$$0 \to \underline{\underline{A}}^n + \Phi/\underline{\underline{A}}^n \to \Omega/\underline{\underline{A}}^n \to \theta/\underline{\underline{a}}^{(n)} \to 0$$

es exacta, siendo Φ el haz de ideales de S en el espacio.

§4. Cálculo efectivo de la función asociada a C en S.

A partir de VIII.1 y X.7 podemos proceder ahora al cálculo de la función asociada $\chi(\theta/\underline{\underline{a}}^{(n)})$. Tenemos en primer lugar el isomorfismo

$$\underline{\underline{A}}^n + \Phi/\underline{\underline{A}}^n \simeq \Phi/\underline{\underline{A}}^n \cap \Phi$$

Se prueba sin dificultad, usando X.3, que $\Phi \cap \underline{\underline{A}}^n = \Phi\underline{\underline{A}}^{n-\nu}$ si $n \geq \nu$ y

$$\Phi/\underline{\underline{A}}^n \cap \Phi = \Phi/\underline{\underline{A}}^{n-\nu}\Phi \simeq \Omega/\underline{\underline{A}}^{n-\nu} \otimes_\Omega \Phi$$

Tomando ahora otra superficie S' del mismo grado que S y que corte a C simplemente en un número finito de puntos, si Φ' es el haz de ideales de S', $\Phi \simeq \Phi'$ como Ω-módulos y

$$\Omega/\underline{\underline{A}}^{n-\nu} \otimes_\Omega \Phi \simeq \Omega/\underline{\underline{A}}^{n-\nu} \otimes_\Omega \Phi' \simeq \Phi'/\underline{\underline{A}}^{n-\nu}\Phi'$$

Usando de nuevo X.3, $\underline{\underline{A}}^{n-\nu}\Phi' = \underline{\underline{A}}^{n-\nu} \cap \Phi'$, de ahí que

$$\Phi'/\underline{\underline{A}}^{n-\nu}\Phi' = \Phi'/\underline{\underline{A}}^{n-\nu} \cap \Phi' \simeq \Phi'+\underline{\underline{A}}^{n-\nu}/\underline{\underline{A}}^{n-\nu}$$

Finalmente podemos establecer la sucesión exacta

$$0 \to \Phi'+\underline{\underline{A}}^{n-\nu}/\underline{\underline{A}}^{n-\nu} \to \Omega/\underline{\underline{A}}^{n-\nu} \to \Omega/\underline{\underline{A}}^{n-\nu}+\Phi' \to 0$$

en la que $\Omega/\underline{\underline{A}}^{n-\nu}+\Phi'$ está concentrado en el número finito de puntos de intersección de C y S'. Se obtiene facilmente

$$\chi(\Omega/\underline{\underline{A}}^{n-\nu}+\Phi') = \tfrac{1}{2}s\delta(n-\nu)(n-\nu+1)$$

si δ es el orden de C y s el de S.

Calculando resulta

$$\chi(\theta/\underline{\underline{a}}^{(n)}) = \chi(\Omega/\underline{\underline{A}}^n) - \chi(\Omega/\underline{\underline{A}}^{n-\nu}) + \tfrac{1}{2}s\delta(n-\nu)(n-\nu+1)$$

para $n > \nu$. Utilizando la función asociada calculada en el capítulo VIII, resulta la expresión efectiva, para $n \geq \nu$, de la función asociada a C sobre S :

Teorema X.8. Si C _es una curva de_ $P_3(k)$, _localmente intersección de dos superficies en cada punto, curva_ ν_-uple de una superficie irreducible_ S _de modo que la dilatación de_ S _a lo largo de_ C _es finita, la función asociada a_ C _sobre_ S _es un polinomio en_ n _para_ $n > \nu$ _que vale_

$$-\left((p_C-1)\nu + \frac{1}{2}(4\nu-s)\delta\right)n^2 + \left((p_C-1)(\nu^2-\nu) + \frac{\delta}{2}(4\nu^2-2\nu s+s)\right)n$$
$$-\frac{1}{6}\left((p_C-1)(2\nu^3-3\nu^2+\nu) + \delta(4\nu^3-4\nu-3s\nu^2+3s\nu)\right)$$

donde δ _y_ p_C _son el orden y el género virtual de_ C _y_ s _el orden de_ S .

En particular se obtiene la variación de género virtual:

Corolario X.9. Si S _es una superficie irreducible de_ $P_3(k)$ _y_ C _es una curva_ ν_-uple de_ S (_posiblemente reducible_) _localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos y tal que la dilatación de_ S _en_ C _es finita, la diferencia entre los géneros virtuales de la transformada_ $\overline{S}$ _respecto de_ C _y la propia_ S _es_

$$p_{\overline{S}} - p_S = \frac{1}{6}\left[(p_C-1)(2\nu^3-3\nu^2+\nu) + \delta(4\nu^3-4\nu-3s\nu^2+3s\nu)\right]$$

con las notaciones del teorema anterior.

El corolario presenta su mayor interes en el caso de aquellas superficies S dotadas de una sola curva ν-uple cuya transformada es no singular. El género virtual $p_{\overline{S}}$ es entonces el género aritmético efectivo de S y resulta directamente calculable a partir del corolario y la expresión, bien conocida, de p_S en función del orden de S :

$$p_S = \frac{(s-1)(s-2)(s-3)}{6}$$

Conviene señalar que la fórmula así obtenida coincide, para $\nu = 2$, con la clásica fórmula del género para superficies dotadas de singularidades ordinarias ([5] pag.108 ó [29] pag. 75)[1] Sin embargo en esta última no se requiere que la curva doble sea, localmente en cada punto, intersección de dos superficies lo que hace suponer que X.8 sea válido sin esta hipótesis restrictiva.

---

[1] En la expresión clásica del género suele figurar el género efectivo de la curva doble que se relaciona con el virtual aquí utilizado mediante los ordenes de singularidad de los puntos múltiples de la curva (véase [3]).

APENDICE.

Sea $\underline{C}$ el cuerpo de los números complejos y consideremos, en el espacio $P_3(\underline{C})$ un cono cuártico cuya directriz presente un punto cuspidal triple. Eligiendo convenientemente una referencia afín la ecuación del cono es $X^3Z - Y^4 = 0$; sus singularidades son la generatriz que pasa por el punto singular de la directriz (eje Z),que es una recta triple, y el vértice, que es un punto de multiplicidad cuatro. Designemos por (x,y,z) el punto genérico del cono, el anillo correspondiente a la parte afín, V , considerada es $\underline{C}[x,y,z]$.

Sea ρ la dilatación centrada en la recta triple. La antiimagen por ρ de la parte afín considerada viene recubierta por dos abiertos afines U_1 , U_2 de anillos $\underline{C}[x,y,z,x/y]$, $\underline{C}[x,y,z,y/x]$. Tomando por ejemplo U_1 , el punto genérico de la transformada es $(x,y,z,x/y)$ y U_1 aparece sumergido en un espacio afín de dimensión cuatro E_4 , la proyección paralelamente al cuarto eje, $E_4 \longrightarrow E_3$, induce en U_1 la restricción de ρ . Es inmediato probar que el cuarto eje está contenido en U_1 y por ello ρ no es finita en el vértice del cono.

Para obtener una dilatación finita tomemos como centro un par de generatrices, una de las cuales sea la triple: elijamos como segunda generatriz el eje X , con ello el ideal correspondiente al par de generatrices en $\underline{C}[x,y,z]$ es (xz,y) y resulta inmediatamente que se verifican las condiciones de IV.2. De hecho, la antiimagen por la dilatación τ ,centrada en el par de generatrices, del abierto afín V es un abierto afín U de anillo $\underline{C}[x,y,z,xz/y]$.

El cono que nos ocupa es racional, tomemos la parametrización

$$x = \alpha^4$$
$$y = \alpha^3\beta$$
$$z = \beta^4$$

El anillo afín de V aparece entonces como $\underline{C}[\alpha^4,\alpha^3\beta,\beta^4]$ con α , β libres sobre $\underline{C}$; el de U será $\underline{C}[\alpha^4,\alpha^3\beta,\beta^4,\alpha\beta^3]$. Es fácil observar en este último anillo que $\alpha^6\beta^2 \notin (\alpha^4)$ y en cambio, $\alpha^6\beta^2(\alpha^4,\alpha^3\beta,\alpha\beta^3,\beta^4) \subset (\alpha^4)$, de ahí que el ideal maximal $(\alpha^4,\alpha^3\beta,\alpha\beta^3,\beta^4)$, correspondiente al origen con las coordenadas tomadas en U , sea primo asociado del ideal principal (α^4) y la superficie transformada del cono no sea C. M..

En particular, utilizando V.15, las potencias simbólicas del haz de ideales del par de generatrices utilizado no coinciden con las ordinarias.

[1] Abhyankar, S. S., Algebraic space curves, Les Presses de l'Université de Montréal, 1971.

[2] Abyankar, S. S., On Macaulay examples, Conference on Conmutative Algebra, Lawrence, Kansas, 1972. Lect. notes in math. n° 311, Springer Verlag.

[3] Casas, E. Sobre el cálculo efectivo del género de las curvas algebraicas, Coll. Math. XXV, fasc. 1°, 1974.

[4] Dieudonné, J., Cours de Géométrie Algebrique, Presses Universitaires de France, 1974.

[5] Enriques, F., Le Superficie Algebriche, Nicola Zanichelli, Bologna, 1949.

[6] Enriques, F. y Chisini, O., Lezioni sulla teoría geométrica delle ecuazioni e delle funzioni algebriche, Nicola Zanichelli, Bologna, 1915-1924.

[7] Gaeta, F., Nuove ricerche sulle curve sghembe algebriche di residuale finito, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Serie IV, XXXI, 1950.

[8] Grothendieck, A. Elements de Géométrie Algebrique, Publications Matematiques I. H. E. S.

[9] Kneser, M., Uber die Darstellung algebraisher Raumkurven als Durchschnitte von Flachen, Arch. Math. 11, 1960.

[10] Lang, S., Algebra, Addison Wesley, 1965.

[11] Mumford, D. Introduction to Algebraic Geometry (versión preliminar), notas ciclostiladas, Harvard University.

[12] Mumford, D., Lectures o curves on an algebraic surface, Ann. of Math. Studies n° 59, Princeton University Press, 1966.

[13] Nagata, M., Local Rings, Tracts in pure and appl. math. n° 13, Interscience Publishers.

[14] Northcott, D. G., A general theory of one-dimensional local rings, Proc. Glasgow Math. Ass. 2, 1956.

[15] Northcott, D. G., The neighbourhoods of a local ring, Journ. London Math. Soc. n° 30, 1955.

[16] Northcott, D. G. Some contributions to the theory of one-dimensional local rings, Proc. London Math. Soc. (3) 8, 1958.

[17] Northcott, D. G., Abstract dilatations and infinitely near points, Proc. Cambridge Phil. Soc. 52, 1956.

[18] Northcott, D. G., Ideal Theory, Cambridge Tracts, Cambridge University Press, 1963.

[19] Perron, O., Uber das Vahlenshe Beispiel zu einem Satz von Kronecker, Math. Zeitsch. 47 , 1941.

[20] Samuel, P., Sur les singularités des varietés algébriques, Bull. Soc. Math. de France 79, 1951.

[21] Samuel, P., La notion de multiplicité en Algébre et en Géométrie algébrique, J. Math. pures et appl., XXX, 1951.

[22] Samuel, P. y Zariski, O., Conmutative Algebra, Van Nostrand, 1960.

[23] Serre, J. P., Faisceaux algebriques coherents, Ann. of Math. 61, n° 2, 1955.

[24] Serre, J. P., Algébre locale et multiplicités, Lect. Notes in Math. n° 11, Springer Verlag, 1965.

[25] Serre, J. P., Groupes algebriques et corps de classes, Hermann, Paris 1959.

[26] Severi, F., Rappresentacione di una forma cualunque per combinazione lineare di piu altre, Memorie Scelte, Ed. Cremonese, 1950.

[27] Severi, F., Il concetto generale di moltiplicitá delle soluzioni pei sistemi di ecuazioni algebriche e la teoría dell'eliminazione, Annali di Mat. Pura et Appl, XXVI, fasc 3-4, 1947.

[28] Severi, F., Il teorema di Riemann-Roch per curve, superficie e varietá. Cuestioni collegate, Springer Verlag, Berlin, 1958.

[29] Zariski, O., Algebraic Surfaces (2ª ed.) Springer Verlag, Berlin, 1958.

[30] Zariski, O., Pencils on an algebraic variety and a new proof of a theorem of Bertini, Collected Papers, vol. I, pag. 154, Massachusetts Institute of Technology Press, 1972.

[31] Zariski, O., The theorem of Bertini on the variable singular points of a linear system of varieties, Collected Papers, vol. I, pag.242, Massachusetts Institute of Technology Press, 1972.

[32] Zariski, O., Introduction to the theory of algebraic surfaces, Lect. Notes in Math.n° 83, Springer Verlag, 1969.

[33] Zariski, O., The reduction of the singularities of an algebraic surface, Collected Papers, vol. I, pag. 325, Massachusetts Institute of Technology Press, 1972.

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

Leída esta Memoria el día 7 de
Julio de 1975 en la Facultad de
Matemáticas, ante el siguiente Tribunal:

PRESIDENTE:

VOCALES:

... calificada de Sobresaliente cum laude