



Universitat Autònoma de Barcelona

ADVERTIMENT. L'accés als continguts d'aquesta tesi queda condicionat a l'acceptació de les condicions d'ús establertes per la següent llicència Creative Commons:  http://cat.creativecommons.org/?page_id=184

ADVERTENCIA. El acceso a los contenidos de esta tesis queda condicionado a la aceptación de las condiciones de uso establecidas por la siguiente licencia Creative Commons:  <http://es.creativecommons.org/blog/licencias/>

WARNING. The access to the contents of this doctoral thesis it is limited to the acceptance of the use conditions set by the following Creative Commons license:  <https://creativecommons.org/licenses/?lang=en>

Innovació en el disseny i construcció de sensors rotatius òptics

Néstor Costa Jimeno

Supervisat per: Prof. Dr. Joaquim Bruna,
Pep Bruguera (Director Industrial de R+D+i, Hohner Automáticos S.L.),
Prof. Dr. Sergey Tikhonov

Doctorat Industrial en Matemàtiques,
Hohner Automáticos S.L., Centre de Recerca Matemàtica
Universitat Autònoma de Barcelona



May 2018, Barcelona, Spain.

Certifiquem que la present memòria ha estat realitzada per en Néstor Costa Jimeno sota la nostra direcció i supervisió, al departament de Matemàtiques de la UAB i el Centre de Recerca Matemàtica.

Bellaterra, Maig de 2018

Dr. Joaquim Bruna

Dr. Sergey Tikhonov

Abstract

Hohner Automáticos S.L. és una empresa principalment dedicada a la fabricació d'encoders. Aquesta tesi doctoral s'ha centrat en la millora i innovació respecte a un tipus de producte anomenat encoder rotatori incremental òptic. Aquest tipus de sensor mesura la posició, velocitat i acceleració a la qual gira un eix d'un motor. L'objectiu ha estat solucionar tres problemes que apareixen quan l'encoder assoleix altes resolucions de mesura: obtenir un compta-voltes (senyal de referència Z) precís, augmentar la resolució al generar un senyal de naturalesa òptica necessari per poder utilitzar un procediment d'interpolació electrònica (encoder amb senyals output de tipus \sin/\cos) i atacar un problema d'industrialització com és l'Air-Gap entre disc i màscara, el qual esdevé críticament petit ($\approx 30\mu m$) per a resolucions altes. Partint d'una base teòrica matemàtica (repassant Series i Integrals de Fourier) i física (Òptica de Fourier i Difracció), s'ha arribat a tres solucions de forma analítica (una per cada problema), les quals s'han implementat de forma numèrica i experimental amb molt bons resultats. L'empresa Hohner Automáticos S.L. ha aplicat dues d'aquestes solucions a la seva gama de productes, amb intenció d'implementar la tercera immediatament. A causa de la magnitud innovadora de dues d'aquestes idees dins el mercat, s'ha demanat una sol·licitud de patent per protegir la Propietat Intel·lectual de les invencions.

Índex

Abstract	v
Introducció	1
0 Preliminars	11
0.1 Integrals i sèries de Fourier	11
0.1.1 Introducció. Conceptes previs	11
0.1.2 Sèries de Fourier	12
0.1.3 Sistemes lineals invariants. Resposta impuls i funció de transferència . . .	15
0.1.4 Teoria unificada de Fourier	16
0.2 Equacions de Maxwell, ones electromagnètiques, models per a la difracció	22
0.2.1 Les equacions de Maxwell. Energia electromagnètica	22
0.2.2 El potencial vector i el potencial escalar. L'equació d'ona	24
0.2.3 L'equació d'ona. Ones escalars.	26
0.2.4 Ones electromagnètiques monocromàtiques, espectre d'una ona, ones planes	28
0.2.5 Model per a la difracció	31
1 Generació del senyal de referència Z en encoders incrementals d'alta resolució	40
1.1 El model bàsic d'interacció entre disc i màscara ignorant la difracció. Convolució òptica.	40
1.2 Generació del senyal Z	41
1.3 Golomb Rulers i Sidon sets	44
2 Generació de senyals sinusoidals òptiques. Primera solució sense tenir en compte la difracció.	48
2.1 Encoder incremental sense interpolació electrònica	48
2.2 Encoder incremental sin/cos amb interpolació electrònica	50
2.3 Plantejament del problema	53

2.4	Solució Analítica	54
2.5	Unicitat de la solució	58
2.6	Implementació numèrica	59
3	Màscares robustes a la variació de l'air-gap	63
3.1	Integrals oscil·latòries; mètode de la fase estacionària. Difracció de Fresnel i Fraun- hoffer	63
3.2	Modelització del sistema disc-màscara tenint en compte la difracció	69
3.3	La distància de Talbot	70
3.4	Model del senyal detectat pels fotodíodes a distància z i sota efectes difractius . .	73
3.5	Anàlisi del senyal $P_z(t)$ per a qualsevol gap z . La màscara de segona generació .	76
3.6	Implementació numèrica	78
3.6.1	Implementació numèrica de la difracció	78
3.6.2	Efecte Talbot	86
3.6.3	Comparació de la qualitat del senyal sinusoidal segons el tipus de màscara analitzadora	86
4	Resultats experimentals	90
4.1	Setup experimental	91
4.2	Anàlisi de dades experimentals	94
4.2.1	Comparació de robustesa entre màscares per obtenir senyals sin/cos enfront variacions d'AG	94
4.2.2	Mesura de l'Efecte Talbot	97
5	Implementació industrial	103
5.1	Senyal de referència Z per a qualsevol tipus de resolució	103
5.1.1	Aplicació generadora de senyals de referència Z	104
5.2	Implementació de màscares $M1G$ i $M2G$ en encoders incrementals de tipus sin/cos. Patentabilitat de la invenció	107
5.2.1	Aplicació en el producte	107
5.2.2	Patentabilitat d'invenció	109
5.3	Utilitat de l'efecte Talbot per encoders de molt alta resolució	109
	Conclusions	113
A	Apèndix. Taula de Golomb Rulers	116

B Apèndix. Sol·licitud de patent	120
Bibliografia	154

Índex de figures

0.1	Encoder absolut. Esquema d'un encoder absolut i les configuracions de codificació binària i Gray. <i>Figura reimpressa de Alhomsí for Electric, http://www.alhomsí4elc.de/2017/05/encoder.html.</i>	2
0.2	Output d'encoder absolut. Senyals outputs obtinguts d'un encoder absolut de 4 bits amb codi Gray segons la seva posició angular.	3
0.3	Esquema d'un encoder incremental. Sistema format per un LED, una lent, un disc amb dues pistes (impulsos i referència), una màscara analitzadora amb una finestra associada a cada canal (A, -A, B, -B, Z), i un detector amb un fotodíode per cada canal.	4
0.4	Operabilitat d'encoder incremental. a) Determinació del sentit de gir de l'encoder mitjançant els senyals A i B. b) Neteja de sorolls utilitzant un comparador amb els senyals digitals i els seus negats. <i>Figura reimpressa de Phidgets Inc., www.phidgets.com/docs/. c) Exemple de senyal de referència Z a l'origen.</i>	4
0.1	Difracció. Esquema de com es difracta un feix de llum en propagar-se a través d'una superfície Σ_1 amb obertures O	31
0.2	Condicions de contorn de Kirchhoff. Esquema on es representa una obertura O en una superfície Σ_1 , definint on es situen els punts p i p' , amb la corresponent esfera Σ_2 d'anàlisi, la qual té un radi R	33
0.3	Formulació de Rayleigh-Sommerfeld. Mètode d'imatges. Esquema on es representa una obertura dins una pantalla, i dos punts d'anàlisi simètrics p , \tilde{p} respecte al pla $z = 0$	35
1.1	Funció $f(x)$ corresponent a una obertura del disc. Aquesta funció impuls centrada en $a/2$ és la funció característica I que es repeteix al llarg de tot el disc com $f(x) = \sum_{n=1}^N I(x - 2n\tau)$	42

1.2	Funció $g(x)$ associada al senyal de referència Z. Exemple de senyal de referència Z, el qual genera un conjunt finit de polsos no equiespaiats. Associem 1 a obertures i 0 a zones opaques, referent a com s'imprimeix aquesta seqüència en les pistes corresponents de disc i màscara.	42
2.1	Obtenció de tren de polsos a partir de senyal triangular. Per convolució entre dues obertures rectangulars s'obté un senyal periòdic triangular. Depenent de si el voltatge està per sobre d'un voltatge llindar V_{TH} , es determina si el senyal output esdevé V o 0	50
2.2	Interpolació per quadrants. Divisió en quatre quadrants d'un període de senyal segons tinguem SIN i/o COS en positiu o negatiu. Per període s'obté que tenim un total de $4N$ quadrants	51
2.3	Mètode interpolador de senyal. a) Mètode per obtenir l'alta resolució angular fent la tangent entre diferents punts dels senyals sinusoidals SIN i COS. Ref.: http://doc.ingeniamc.com/motionlab/user-manual/configuring-your-drive/actuator/sincos-encoder b) Esquema del circuit d'un interpolador òptic on els comparadors s'encarreguen d'anar generant els trens de polsos A i B. Ref.: http://www.ichaus.de/upload/pdf/WP7en_High-Precision_Interpolation_140124.pdf	52
2.4	Tren de polsos. Funció $f(x)$ associada al disc.	53
2.5	Solució de Primera Generació. Funció màscara $g(x)$ definida com la part positiva d'un cicle de sinusoidal. Paràmetres d'encoder incremental de $N=2500$ impulsos, període $a = 48\mu m$	57
2.6	Convolució de funcions f i h. La funció f representa l'obertura del disc, essent un pols d'amplada $a/2$. D'altra banda, la funció h és la solució associada a les obertures de la màscara. Com es pot comprovar, la convolució d'ambdues funcions genera una funció sinusoidal positiva.	59
2.7	Simulació de les obertures de disc i màscara de Primera Generació Representació en 2D, i en coordenades cartesianes (x, y) , de les obertures del disc (escletxes rectangulars) i de la màscara de Primera Generació (perfil sinusoidal) per a un encoder de 2500 polsos per volta.	60
2.8	Convolució entre imatges de disc i màscara de Primera Generació. Representa com varia la intensitat que rebria el fotodíode quan el disc gira respecte a la màscara. El resultat obtingut és una sinusoidal positiva.	60

3.1	Propagació transversal de la llum per difracció. En un punt (x, y, z) la difracció només vindrà afectada pel quadrat centrat en $(x, y, z = 0)$ i aresta $\sqrt{\lambda z}$ del camp origen $U_0(x, y)$. La zona Blanca i de Transició són les zones afectades per difracció, mentre que la zona Dark no es veu alterada. <i>Ref: Joseph W Goodman. Introduction to Fourier optics. Roberts and Company Publishers, 2005, pag. 71.</i>	68
3.2	Catifes de Talbot de 500 i 1024 polsos per volta. Simulacions fetes amb $\lambda = 633nm$. Les obertures són encara relativament amples per observar l'efecte Talbot quan s'analitza fins a $2mm$ de propagació.	72
3.3	Catifes de Talbot de 2500 i 4096 polsos per volta. Simulacions fetes amb $\lambda = 633nm$. Les línies grogues i vermelles corresponen a les distàncies $z_{T/4}$ i $z_{T/2}$, respectivament.	72
3.4	Simulació de Màscara de Segona Generació M2G. Representació en 2D d'una màscara M2G per a un encoder de 2500 polsos per volta, on les obertures segueixen l'equació $h2$ com a perímetre.	79
3.5	Perfil de potència de llum a $z = 0$. Imatges del perfil transversal de potència lumínica a la superfície d'un disc de 2500 polsos per volta. Vistes de la imatge $(x, y, P_z(x, y))$ i el corresponent perfil $P_z(x)$	81
3.6	Perfil de potència de llum a $z = \frac{z_T}{4}$. Imatges del perfil transversal de potència lumínica, quan el camp es propaga a un quart de la distància de Talbot respecte a un disc de 2500 polsos per volta. Per analitzar l'efecte de difracció s'ha emprat l'aproximació de Fresnel. Es pot veure com el perfil és bastant irregular, de manera que a aquesta distància hauria de ser difícil de la detecció de senyal mitjançant una màscara. Vistes de la imatge $(x, y, P_z(x, y))$ i el corresponent perfil $P_z(x)$	82
3.7	Perfil de potència de llum a $z = \frac{z_T}{2}$. Imatges del perfil transversal de potència lumínica, quan el camp es propaga a la meitat de la distància de Talbot respecte a un disc de 2500 polsos per volta. Per analitzar l'efecte de difracció s'ha emprat l'aproximació de Fresnel. El perfil agafa una distribució semblant a la de l'origen, però desplaçat 180° . Vistes de la imatge $(x, y, P_z(x, y))$ i el corresponent perfil $P_z(x)$	83
3.8	Perfil de potència de llum a $z = \frac{3z_T}{4}$. Imatges del perfil transversal de potència lumínica, quan el camp es propaga a tres quarts de la distància de Talbot respecte a un disc de 2500 polsos per volta. Per analitzar l'efecte de difracció s'ha emprat l'aproximació de Fresnel. El perfil torna a ser irregular, com quan s'ha analitzat a $z = \frac{z_T}{4}$. Vistes de la imatge $(x, y, P_z(x, y))$ i el corresponent perfil $P_z(x)$	84

3.9	Perfil de potència de llum a $z = z_T$. Imatges del perfil transversal de potència lumínica, quan el camp es propaga fins a la distància de Talbot respecte a un disc de 2500 polsos per volta. Per analitzar l'efecte de difracció s'ha emprat l'aproximació de Fresnel. El perfil esdevé molt semblant a l'observat a l'origen, de manera que la imatge inicial queda reconstruïda a aquesta distància. Vistes de la imatge $(x, y, P_z(x, y))$ i el corresponent perfil $P_z(x)$	85
3.10	Variació d'amplitud de senyal A en funció de z. Perfils d' $A(z)$ dels senyals obtinguts al fer la convolució $U_z(x, y) * H(x, y)$, considerant que $U_0(x, y)$ són obertures d'un disc de 4096 impulsos (i.e. període $a \approx 28\mu m$). La línia blava correspon a utilitzar una màscara de polsos, la vermella una M1G i la verda una M2G. Es comprova que la M2G és la més estable de les tres. D'altra banda, tant la M2G com la de polsos mostren un mínim a $z = z_T/4 = 663\mu m$ i un màxim a $z = z_T/2 = 1325\mu m$, que concorda amb els resultats esperats quan s'utilitza una font de llum de $\lambda = 633nm$	87
3.11	Anàlisi d'error d'ajust en funció de l'Air-Gap. Mesura de l'error d'ajust d'un senyal a-periòdic respecte a una sinusoidal teòrica en funció de la separació entre disc i màscara z . El senyal a-periòdic correspon a la convolució $U_z(x, y) * H(x, y)$, considerant que $U_0(x, y)$ són obertures d'un disc de 4096 impulsos (i.e. període $a \approx 28\mu m$). La línia blava correspon a utilitzar una màscara de polsos, la vermella una M1G i la verda una M2G. Es comprova que la M2G presenta errors molt baixos per a quasi qualsevol distància, apareixent màxims pronunciats només quan $z = \left(\frac{2m+1}{4}\right) z_T$ per $m \in \mathbb{N}$ (amb llum $\lambda = 633nm$).	88
4.1	Esquema del sistema col·limador-expandidor de feix. Es presenta un esquema de com s'ha col·locat una font de llum (Làser Blau, Làser Vermell, LED Blau) a la focal d'una lent esfèrica per fer una col·limació de la llum. Un sistema de telescopi invers de Galileu format per una lent bicòncava i una biconvexa fan d'expandidor, generant un feix col·limat d'uns $8mm$ de diàmetre.	92
4.2	Disseny del sistema col·limador-expandidor de feix. Sistema 'Cage Plate' per alinear i fixar tots els elements en un mateix eix òptic. D'esquerra a dreta s'observa: la font de llum, una lent esfèrica, una lent bicòncava i una biconvexa. .	93

4.3	Disseny del sistema encoder tallat i control de moviment de màscara. S'observen diferents elements: un encoder tallat de manera que el feix extern pugui incidir sobre el disc, un control micromètric que permet variar l'AG entre disc i màscara, un controlador de posició de 5-eixos utilitzat per fer un bon centrat de disc i màscara, i una placa electrònica amb la matriu dels fotodíodes encarregats de registrar el senyal.	94
4.4	Centrat de disc i màscara. La línia blava que s'observa a la imatge és la línia de centrat, la qual està impresa en disc i màscara. Aquesta línia ha de coincidir pel fet que ambdós elements estiguin ben centrats i que les obertures de la màscara coincideixin amb les del disc quant a coordenades cilíndriques.	95
4.5	Imatge de senyal d'oscil·loscopi. Senyal sinusoidal obtingut a partir d'un disc de 500 polsos/volta i una màscara de M2G. Al panell dret hi ha les mesures de Vpp (Vpico-pico) i Duty-cycle (Ciclo trab.)	95
4.6	Setup experimental final. Conjunt d'elements físics utilitzats per a fer les proves experimentals, on es pot observar el sistema col·limador-expandidor, el sistema encoder-motor, el control micromètric d'AG amb el sistema d'ajust de 5 eixos de la màscara, la càmera de centrat i la placa electrònica amb els fotodíodes receptors.	96
4.7	Vpp enfront Air-Gap. Dades experimentals de Voltatge pic-a-pic del senyal enfront l'AG entre disc i màscara, comparant els resultats entre una màscara de polsos rectangulars, una M1G i una M2G amb obertures corresponents a un encoder de 500 polsos per volta. En els tres casos no s'aprecia quasi variació, ja que en aquestes condicions la distància de Talbot queda molt lluny.	97
4.8	Duty enfront Air-Gap. Dades experimentals del Duty-Cycle del senyal enfront l'AG entre disc i màscara, comparant els resultats entre una màscara de polsos rectangulars, una M1G i una M2G amb obertures corresponents a un encoder de 500 polsos per volta. La corba corresponent a M1G va pujant de valor, donant a entendre la baixa robustesa que ofereix aquesta màscara enfront variacions de gap.	98

- 4.9 **Error d'Ajust de sinusoidal enfront Air-Gap (Experimental).** Error d'Ajust de les dades experimentals respecte a una sinusoidal teòrica, a mesura que s'augmenta l'AG entre disc i màscara, comparant els resultats entre una màscara de polsos rectangulars, una M1G i una M2G amb obertures corresponents a un encoder de 500 polsos per volta. Es confirma que la màscara M2G presenta gran robustesa de senyal sota qualsevol gap, mentre que les altres màscares tenen errors significants a algunes distàncies. 99
- 4.10 **Error d'Ajust de sinusoidal enfront Air-Gap (Simulat).** Corbes de variació de l'Error d'Ajust respecte a una sinusoidal teòrica enfront l'augment del gap. Es pot comprovar que les corbes segueixen una trajectòria semblant als resultats experimentals. 99
- 4.11 **Vpp enfront Air-gap. Resolució de 2500 polsos/volta i diferents fonts de llum.** Realitzant l'experiment amb diferents fonts de llum (Làser Blau, Làser Vermell i LED Blau) es mesura el Voltatge Pic-a-Pic del senyal obtingut a mesura que s'augmenta l'Air-Gap. Quant a la corba Blava (Làser Blau) s'observa un mínim a $z = 2.5mm$ corresponent a $z \approx \frac{(2m+1)}{4}z_T$ on $z_T(2500, \lambda = 405nm) = 11.26mm$, i un màxim a $z = 4.6mm$, corresponent a $z \approx \frac{(m)}{2}z_T$. D'altra banda, la corba Vermella (Làser Vermell) té dos mínims a $z = 1.44mm$ i $z = 4.8mm$ corresponent a $z \approx \frac{(2m+1)}{4}z_T$ on $z_T(2500, \lambda = 639nm) = 11.26mm$, i un màxim a $z = 3.24mm$, corresponent a $z \approx \frac{m}{2}z_T$. La corba corresponent al LED segueix un patró amb unes variacions mínimes de Vpp, però es diferencia un mínim a $z = 2.4mm$ i un màxim a $z = 3.8mm$, que corresponen un altre cop a un quart i a la meitat de la distància de Talbot, respectivament. 100
- 4.12 **Vpp enfront Air-gap. Resolució de 4096 polsos/volta i diferents fonts de llum.** Realitzant el mateix experiment que a la Figura 4.11 però amb un disc de 4096 polsos/volta. Quant a la corba Blava (Làser Blau) s'observen dos mínims a $z = 0.78mm$ i $z = 2.78mm$ corresponent a $z \approx \frac{(2m+1)}{4}z_T$ $z_T(4096, \lambda = 405nm) = 4.20mm$, i un màxim a $z = 1.78mm$, corresponent a $z \approx \frac{(m)}{2}z_T$. D'altra banda, la corba Vermella (Làser Vermell) té dos mínims a $z = 0.53mm$ i $z = 1.93mm$ corresponent a $z \approx \frac{(2m+1)}{4}z_T$ $z_T(4096, \lambda = 639nm) = 11.26mm$, i dos màxims a $z = 1.33mm$ i $z = 2.73mm$, corresponent a $z \approx \frac{m}{2}z_T$. Un altre cop, la corba corresponent al LED segueix un patró sense gaires variacions de Vpp, però amb un mínim a $z = 0.68mm$ i un màxim a $z = 1.43mm$, que corresponen un altre cop a un quart i a la meitat de la distància de Talbot, respectivament. 101

5.1	Aplicació del senyal Z a encoder real. Exemple de senyal de referència Z aplicat a un encoder de 2500 polsos/volta.	103
5.2	Paràmetres per a la generació de senyal Z. Introducció de variables i opcions per a la generació del codi de senyal de referència.	104
5.3	Generació d'algoritme de tipus Golomb Ruler. Codi generat per maximitzar el paràmetre K i obtenir un màxim central S_0 amb $S_k \leq 1$. L'algoritme es tracta d'un Golomb Ruler.	106
5.4	Generació d'algoritme amb maximització de <i>Màxima diferència</i>. Amb aquest codi, quan s'aplica la seva autocorrelació s'aconsegueix maximitzar la diferència entre S_0 i σ . No obstant això, al no aplicar un Golomb Ruler, es pot donar que $S_k \geq 1$	106
5.5	Senyal de referència Z Captura d'oscil·loscopi del senyal de referència obtingut amb un encoder de 2500 polsos/volta. La corba lila correspon al senyal directe que s'obté del fotodíode, mentre que la corba groga mostra el senyal tractat amb xip, el qual genera un pols centrat on es troba el màxim central, el qual té un nivell de voltatge per sobre el llindar electrònic. La subfigura de l'esquerra es centra en el màxim S_0 (escala de temps $20\mu s$), mentre que la de la dreta, amb una escala de temps més elevada ($200\mu s$), mostra els màxims secundaris corresponents a S_k	107
5.6	Implementació industrial de màscares sin/cos Disseny en SolidWorks de les màscares $M1G$ i $M2G$ on s'ha fet zoom a les obertures corresponents a un dels canals.	108
5.7	Senyal Multiplicada x10 Mitjançant un disc de $N = 5000$ polsos/volta. Analitzant amb la màscara $M1G$ es pot multiplicar el senyal x10 i obtenir un resolució final de 50000 polsos/volta.	108
5.8	Encoder de 10000 polsos/volta Disseny en SolidWorks del prototip d'un encoder dissenyat per aprofitar l'efecte Talbot amb encoders d'alta resolució. El cos conté un Díode Làser i un sistema de dues lents ajustable per tenir un sistema que expandeixi i col·limi el feix de forma acurada.	110
5.9	Senyal obtingut d'encoder de 10000 polsos/volta amb Air-Gap corresponent a la distància de Talbot Al col·locar la màscara just al doble de la distància de Talbot respecte al disc (en el cas de 10000 polsos/volta i Làser Vermell, $z = 2z_T = 892\mu m$), es comprova que l'encoder obté un senyal de qualitat i analitzable (Duty-cycle i V_{pp} aptes per una bona operabilitat).	111

Índex de taules

1	Canals d'encoder incremental. Diferents canals amb els seus respectius desfasaments	3
3.1	Distàncies de Talbot. Calculades en funció del nombre de polsos per volta del disc i la font de llum. En tots casos s'ha considerat un disc on la pista d'obertures té $19mm$ de radi.	73
A.1	Taula de Golomb Rulers segons la seva llargada M i el nombre de marques k . Extret de: https://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Golomb	118

Introducció

Un encoder és un tipus de sensor que mesura el posicionament, la velocitat i l'acceleració d'un cert objecte. Hohner Automáticos S.L. [1] és una empresa catalana dedicada exclusivament a la fabricació d'aquest tipus de sensor. En concret fabrica encoders rotatius i lineals [2, pp. 100–110], operant amb sistemes òptics [2, pp. 85–86] o magnètics [2, pp. 64–65]; però també produeix altres sensors com potenciòmetres [3] o inclinòmetres [4]. L'encoder lineal fa mesures del desplaçament en una dimensió, com podria ser el moviment d'una eina al llarg d'una recta, mentre que l'encoder rotatiu mesura el desplaçament angular, com podria ser el gir d'un motor. A més a més, el tipus d'encoder pot ser absolut [2, pp. 111–122] o incremental [2, pp. 38–39], segons si la seva funció és mesurar un posicionament exacte o determinar la velocitat de gir amb alta precisió i una posició en relació a una referència. Aquesta tesi es centra en el desenvolupament de know-how i idees innovadores atacant un tipus de producte concret, *l'encoder òptic rotatiu incremental*. A continuació s'especifica l'operabilitat d'ambdós tipus d'encoder rotatiu i les seves principals diferències.

Abans, hem de parlar d'un concepte previ, que és el de la *resolució*, quantificada per un número N . En aquest context significa la capacitat de l'encoder de discriminar N posicions angulars en una volta. És a dir, mesurar canvis de posició de fins a $\frac{2\pi}{N}$ radians. Un encoder ha de ser capaç de dir en quina posició angular es troba l'eix, i la precisió d'aquesta mesura està quantificada per N .

L'encoder absolut codifica cada posició angular en la qual es troba l'eix. És llavors un sistema molt útil per determinar en quina posició està el motor en tot moment, per exemple, després d'una apagada de llum. El sistema consisteix principalment en una fila de LEDs enfocant un disc giratori, una màscara fixa i una fila de fotodíodes receptors. Cada LED il·lumina una pista diferent del disc, les quals estan impreses en forma d'anells de diferents radis. Cada pista està codificada per un seguit d'obertures opaques o transparents, i a cada posició els LEDs il·luminen un codi diferent, el propi de cadascuna de les N posicions. La màscara té un conjunt d'obertures per pista que fan d'analitzadores, les quals estan enfocades cadascuna a un fotodíode diferent. Si s'enfoca una obertura opaca, el respectiu fotodíode no rep llum, i s'obté un senyal digital de

tipus 0. D'altra banda, si l'obertura és transparent, el fotodíode és il·luminat i s'obté un senyal de tipus 1. Generalment s'utilitzen dos tipus de codificacions: la binària i el codi Gray [5]. La configuració binària relaciona cada increment de posició amb el següent número binari, en canvi, el codi Gray és un algoritme dissenyat de tal manera que a cada increment de posició introdueix un canvi en només un dels bits. A la Figura 0.1 es pot veure l'encoder esquematitzat. El problema que presenta aquesta família és que la resolució màxima que pot mesurar és bastant limitada, ja que depèn del nombre de pistes que es poden imprimir radialment. És a dir, si el disc té Q pistes, l'encoder podrà mesurar $N = 2^Q$ posicions. La Figura 0.2 mostra un exemple de com és el senyal analitzat per determinar cada posició angular.

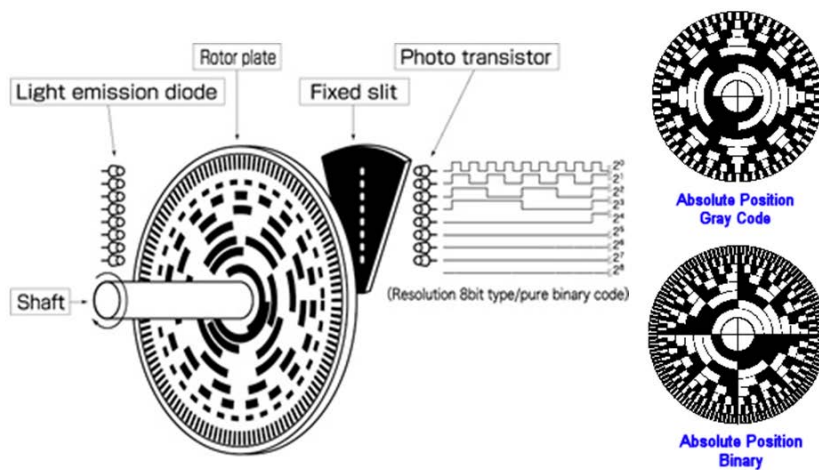


Figura 0.1: **Encoder absolut.** Esquema d'un encoder absolut i les configuracions de codificació binària i Gray. *Figura reimpressa de Alhoms for Electric, <http://www.alhoms4elc.de/2017/05/encoder.html>.*

D'altra banda, l'encoder incremental es fa servir per mesurar la velocitat i acceleració de rotació amb un alt grau de precisió, a més a més de la posició angular respecte a un senyal de referència Z . Aquest tipus d'encoder consta generalment d'un sol LED, una lent col·limadora, un disc amb N obertures, una màscara i diversos fotodíodes receptors. El LED està enfocat cap a una lent responsable de col·limar un feix. Aquest il·lumina una secció del disc giratori, el qual té disposades un seguit de petites obertures col·locades azimuthalment de forma periòdica. Per ser més precisos, les obertures formen una regla de Ronchi circular [6], que nosaltres anomenarem un tren de N impulsos rectangulars equiseparats. A part, una segona pista interior s'encarrega de crear un sol impuls quan el disc dona una volta sencera, anomenat senyal de referència Z i del qual parlarem al Capítol 1. Aquest senyal Z fa de compta-revolucions i interessa que

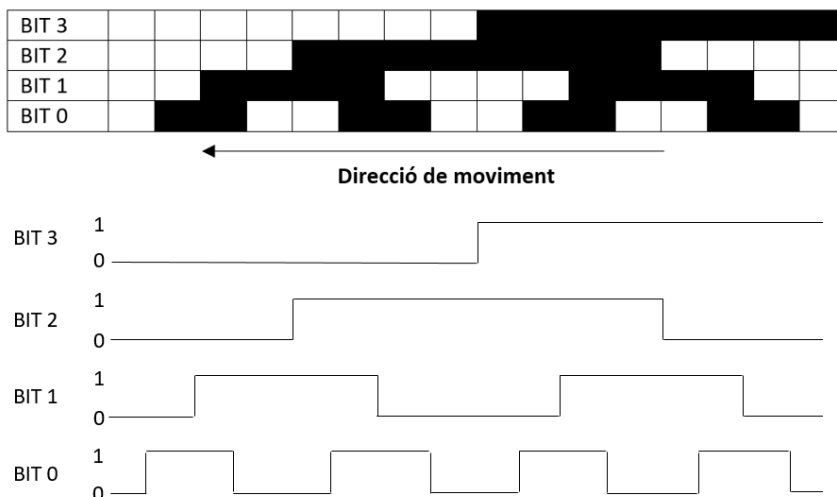


Figura 0.2: **Output d'encoder absolut.** Senyals outputs obtinguts d'un encoder absolut de 4 bits amb codi Gray segons la seva posició angular.

A	B	-A	-B
0°	90°	180°	270°

Taula 1: **Canals d'encoder incremental.** Diferents canals amb els seus respectius desfasaments

en cada volta contingui un únic peak tan alt i localitzat com sigui possible. La màscara és fixa, i normalment conté 6 finestres anomenades A , $-A$, B , $-B$, Z i $-Z$. Les finestres també contenen una sèrie d'obertures disposades de forma periòdica, ara bé, cada finestra introdueix un desfasament diferent tal com es veu a la Taula 1. Quan la llum que ha passat per les obertures del disc arriba a la màscara, es troba amb les sis finestres i genera darrere sis camps, la intensitat dels quals és llegida pels fotodíodes. Així, es generen sis senyals que continuem anomenant A , $-A$, B , $-B$, Z i $-Z$, els quals seran senyals periòdics, pel fet que el disc va girant. Al Capítol 1 explicarem amb detall com modelitzar matemàticament aquest procediment. A la Figura 0.3 s'exposa l'esquema gràfic d'un encoder incremental. El desfasament de 90° entre el senyal A i B , permet saber en quin sentit està girant l'encoder. Depenent de si primer s'encén A o B es pot saber si l'encoder gira en sentit horari o antihorari. D'altra banda, els senyals $-A$ i $-B$ serveixen per netejar possibles sorolls, introduint-los a un comparador diferencial [7] amb els senyals A i B respectivament. La màscara conté dues finestres més, anomenades Z i $-Z$, les quals registren el senyal de referència. Tots aquests processos es poden veure de forma més gràfica a la Figura 0.4.

La gran virtut de l'encoder incremental és la capacitat de fer mesures amb una resolució molt

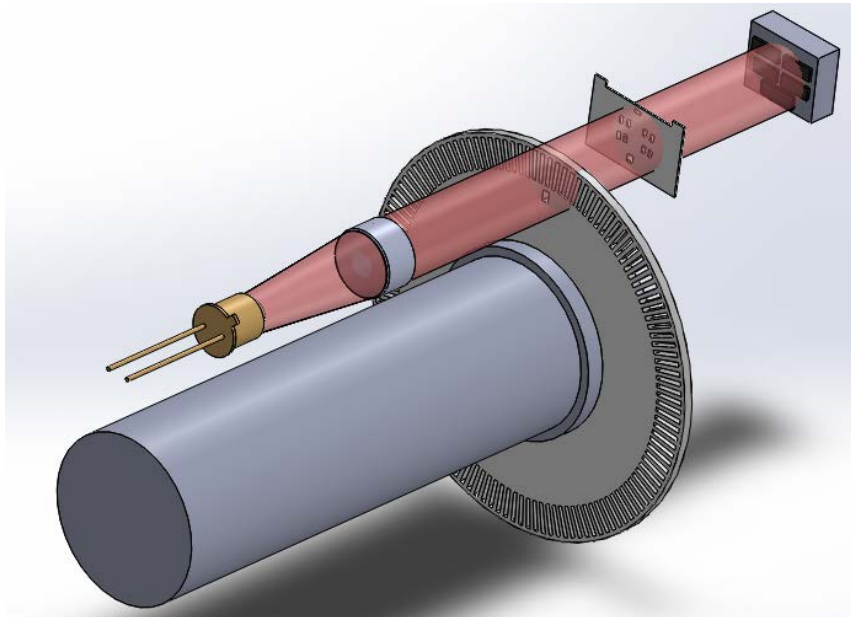


Figura 0.3: **Esquema d'un encoder incremental.** Sistema format per un LED, una lent, un disc amb dues pistes (impulsos i referència), una màscara analitzadora amb una finestra associada a cada canal (A, -A, B, -B, Z), i un detector amb un fotodiode per cada canal.

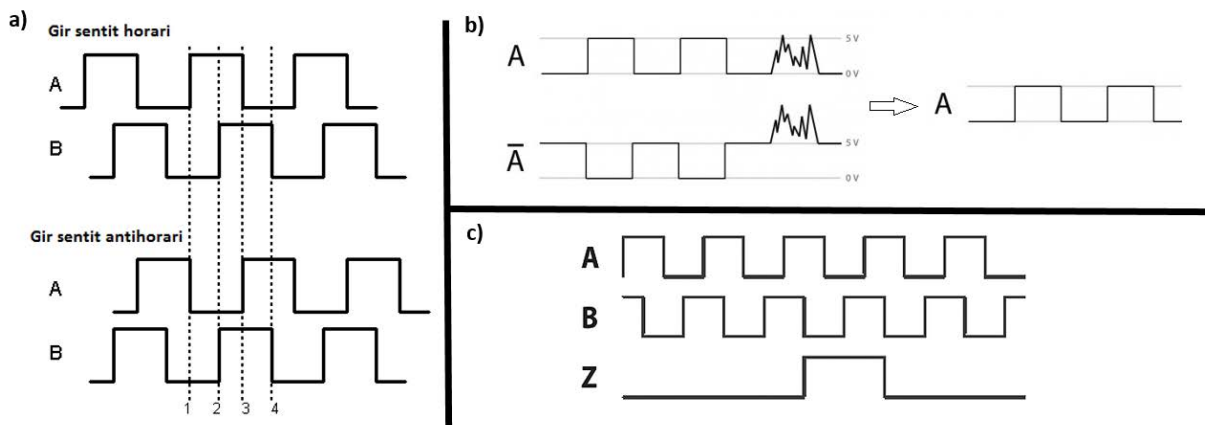


Figura 0.4: **Operabilitat d'encoder incremental.** a) Determinació del sentit de gir de l'encoder mitjançant els senyals A i B. b) Neteja de sorolls utilitzant un comparador amb els senyals digitals i els seus negats. *Figura reimpressa de Phidgets Inc., www.phidgets.com/docs/.* c) Exemple de senyal de referència Z a l'origen.

alta. El nombre d'obertures pot variar d'unes 50 fins a més de 10000 al llarg dels 360° [8]. Com més alta és, més obertures han d'estar impreses al llarg dels 360° , i en conseqüència, aquestes han de ser més estretes. D'altra banda, existeix una alternativa per a augmentar la resolució de l'encoder, i es tracta de la interpolació electrònica. Mitjançant un xip, es pot multiplicar el nombre d'impulsos per volta generats per l'encoder. Per fer-ho, el xip interpolador necessita operar amb

els senyals A i B (netes de soroll) com a inputs, i que aquestes siguin el més sinusoidal possible. La qualitat de les sinusoidals limitarà el grau d'interpolació a la qual podrà arribar l'encoder. Així que es poden aconseguir multiplicacions de polsos de x_2 , x_4 , i fins i tot x_{10} [9].

Com en tots els camps industrials, en la fabricació d'encoders hi ha unes formes estàndards de procedir que segueixen tots els fabricants. En aquesta tradició, la majoria d'encoders tenen trens d'impulsos rectangulars (els més barats d'implementar) tant al disc com a la màscara. Tal com veurem amb detall al Capítol 2, això dona com a senyal de sortida, en primera aproximació, un tren d'impulsos triangulars, lluny de ser sinusoidal. Aquest defecte es mira de compensar llavors dissenyant la interpolació electrònica de forma convenient. El fet és, però, que els xips que treballen amb inputs sinusoidals són els més eficients i barats.

El punt de partida d'aquesta tesi el constitueixen els tres problemes d'interès industrial plantejats per l'empresa:

- Com generar el senyal de referència Z òptim per a cada resolució desitjada?
- Mantinent els trens d'impulsos rectangulars en els discs, com han de ser les obertures a les finestres de la màscara per tal que el senyal de sortida sigui exactament una sinusoide?
- Els encoders treballen sovint sota unes condicions extremes que pertorben molt els paràmetres de sortida. L'experiència acumulada demostra que d'entre tots aquests paràmetres la distància (gap) entre disc i màscara és el més crític, en el sentit que la qualitat del senyal òptica de sortida es deteriora molt quan canvia aquesta distància [10]. Aleshores: és possible dissenyar una màscara que mostri robustesa respecte a aquests petits canvis del gap?

Tot i l'aparent simplicitat del sistema, els encoders incrementals presenten certs problemes a solucionar, on juga un paper clau l'òptica i la modelització matemàtica. D'aquesta manera, aquesta tesi conté tres capítols centrals dedicats a abastar tres idees diferents que han servit per millorar l'operabilitat i fabricació dels encoders, i alhora augmentar el know-how de l'empresa en aquest tipus de producte.

A continuació expliquem com està estructurada aquesta tesi:

El Capítol 0, en dues parts, conté els preliminars per descriure el marc matemàtic i físic del treball, necessaris per a entendre en profunditat la temàtica posterior. Evidentment, la criticitat del gap que s'ha esmentat abans està relacionada amb el fenomen de la difracció de la llum, de manera que el context físic d'aquesta tesi és l'òptica, i més concretament l'òptica de Fourier. La primera part del capítol zero, sobre sèries i integrals de Fourier, descriu d'una manera autocontinguda tots els conceptes necessaris. En aquesta tesi, l'anàlisi de Fourier hi és present

per diferents motius. En primer lloc perquè, com és el cas amb tots els sistemes invariants per translacions que actuen per convolució, l'anàlisi de Fourier és l'eina adequada per a tractar el fenomen de la difracció d'una manera rigorosa. En segon lloc, perquè fins i tot en el cas que no es tingui en compte la difracció, l'acció del sistema disc-màscara es modelitza també mitjançant la convolució entre dues funcions. La segona part del capítol zero està dedicat a fer un repàs a l'òptica de Fourier, on expliquem d'una forma matemàticament rigorosa i precisa el fenomen de la difracció, a partir de les equacions de Maxwell i l'equació d'ona. Aquesta part s'ha escrit també d'una manera autocontinguda, pensada per a un lector matemàtic, la qual no hem sabut trobar a la bibliografia clàssica en aquest camp, per exemple el clàssic Goodman [11].

A continuació entrem en el cos de la tesi, on tractem els tres problemes plantejats. El primer aspecte que s'analitza és el següent: quan la resolució de l'encoder esdevé bastant alta, la intensitat que genera una sola obertura és tan baixa que no pot ser detectada pel fotodíode, de manera que s'ha de buscar una estratègia alternativa. Doncs, el Capítol 1 tracta la qüestió de com generar un senyal Z de referència òptim per a qualsevol resolució, és a dir, com s'han d'imprimir un nombre finit d'obertures en disc i màscara per generar el senyal Z eficient. Novament, l'eina matemàtica per a tractar això és la convolució, més precisament, el problema és equivalent al de trobar senyals digitals (successions de zeros i uns) de forma que la seva autocorrelació (la convolució del senyal amb si mateix) sigui el més semblant possible a un pic alt i concentrat en un sol lloc, i amb l'amplada aproximada d'un impuls. En aquest capítol mostrem que aquest problema és una formulació equivalent al problema de dissenyar "Golomb rulers" [12, pp. 5–15]. Matemàticament són els conjunts de nombres enters tals que totes les diferències entre els seus elements són diferents. Des d'un punt de vista més matemàtic, està relacionat amb encara un altre concepte de l'anàlisi harmònica, els conjunts de Sidon [12, pp. 19–26]. Establerta aquesta relació, el problema pràctic queda resolt per a l'empresa, atès que es coneixen i es troben a internet taules de "Golomb rulers" per a cada nivell de resolució (veure Apèndix A).

El segon problema, el qual consisteix a veure com ha de ser la màscara per tal que el senyal sigui sinusoidal, es tracta en el Capítol 2, en una primera aproximació, ignorant el fenomen de la difracció. Les obertures de disc i màscara corresponen a funcions respectives f, g , i si s'ignora la difracció, el senyal de sortida és proporcional a la convolució $f * g$ entre ambdues. Així el problema es formula de la manera següent: donat un tren f d'impulsos rectangulars, com ha de ser una funció g positiva i amb suport compacte (la funció que modelitza les obertures de la màscara) per tal que la convolució $f * g$ sigui una sinusoide pura? En el Capítol 2 veurem que aquest problema té solució, i el que és més important, essencialment única. Aquesta màscara s'ha anomenat Màscara de 1a Generació (M1G).

En el Capítol 3 es tracta el mateix problema, ara tenint en compte la difracció per tal d'abordar la tercera problemàtica plantejada per l'empresa en relació amb l'"air-gap"(AG) entre disc i màscara. En primer lloc, cal mencionar que en el model s'ha suposat que hom té una ona monocromàtica i plana incidint sobre la pista del disc. A causa de considerar els efectes de difracció i interferència que apareixen al llarg de l'AG, el tractament matemàtic esdevé bastant més complex; en primer lloc es perd la linealitat perquè el que mesuren els fotodíodes és potència lumínica o energia electromagnètica, que és proporcional al quadrat de les amplituds del camp. En segon lloc, aquestes distribucions d'amplitud al llarg del pla (x, y) transversal a l'eix òptic varien segons quin és l'air-gap z . En el tractament matemàtic d'aquest problema redescobrim un fenomen ben conegut pels especialistes en òptica de Fourier, l'anomenat efecte "Talbot" [13]. En essència, aquest efecte consisteix en el fet que quan un patró periòdic es difracta, hi ha una distància z_T , anomenada distància de Talbot, tal que a múltiples enters de z_T reapareix exactament el mateix patró. Per generar-ho, es necessita que la font sigui el més puntual, coherent i monocromàtica possible; de manera que és adient fer un sistema que utilitzi Làser en comptes de llum LED. El que això significa per al problema que tractem és que la solució aportada en el Capítol 2 també funcionarà si la màscara es troba a una d'aquestes distàncies. Amb altres distàncies, però, resulta necessari trobar una màscara diferent per tal que sigui robusta. Aquesta màscara, de la qual també hem trobat la seva corresponent forma, s'ha anomenat Màscara de 2a Generació (M2G); el seu output continua essent sinusoidal per a tots els air-gaps z , encara que ara l'amplitud del senyal depèn de z .

Tant en el Capítol 2 com en el 3, s'ha realitzat un desenvolupament analític del problema, i ahora s'han verificat els resultats mitjançant simulacions de caràcter numèric. S'han analitzat diferents aspectes com: el resultat de la convolució entre les obertures de disc i màscara, aplicació de difracció i interferència respecte a la propagació de llum, la re-construcció de l'estructura periòdica a la distància de Talbot, i diversos scripts per analitzar dades experimentals.

Més significativament, en el capítol següent abordem la comprovació experimental dels resultats obtinguts i la seva anàlisi. Després de construir un banc òptic de proves, hem comprovat experimentalment que les solucions aportades teòricament funcionen i milloren l'operativitat de l'encoder. La part més important del banc ha estat la possibilitat de variar l'AG de manera micromètrica. D'altra banda, també s'han pogut modificar variables com la font de llum, la velocitat de gir i el nombre d'impulsos per volta. Com a prova final, s'ha implementat el know-how descrit en aquesta tesi a un encoder incremental real, verificant que es pot generar senyal sinusoidal obviant la criticitat de l'AG.

En el darrer capítol tractem tot el que té a veure amb la implementació industrial que ha

fet Hohner Automáticos S.L. i de la patent que l'empresa ha presentat en defensa del know-how adquirit amb aquesta tesi. S'ha de fer notar que les solucions proposades als Capítols 1 i 2 ja han estat directament aplicades al producte amb una verificació de millora directa, i de fet Hohner Automáticos S.L. ja té comercialitzat diferents encoders que les incorpora. Per aplicar el mètode generador de codis Z per a qualsevol resolució, Hohner Automáticos S.L. disposa d'un algoritme proporcionat pel CRM [14] (abans havia d'encarregar-ho a una empresa externa amb un cost significatiu). Alhora, s'ha abastat el problema de criticitat de gap per a altes resolucions enfrontant el repte de fabricar un prototip d'encoder de 10000 impulsos per volta treballant amb un ampli AG, aprofitant l'efecte Talbot i modificant el sistema òptic (canviant el LED per Làser i el sistema de col·limació).

Agraïments

M'agradaria ressaltar l'ajuda, col·laboració i confiança que m'han aportat diferents persones al llarg d'aquests tres anys, que han propiciat un ambient de treball i personal idoni per al millor desenvolupament d'aquesta tesi doctoral.

En primer lloc, agrair la confiança que ha dipositat l'empresa Hohner Automáticos S.L., i en concret en Pep Bruguera, en Joan Liarte i la Laura Liarte; en aquest projecte de Doctorat Industrial i en apostar per mi com a doctorand. Les condicions de treball han estat immillorables i valoro molt que s'hagi apostat per les diferents idees innovadores, ja que a vegades pot ser una inversió difícil. Agrair també tota la dedicació, ajuda i aprenentatge que m'han aportat els meus companys del Departament d'R+D+i: Joss Larre, Sergi Ferrer, Sergio Romero, Albert Zardin, Nacho Yélamos, Marc Marinello i especialment en Mark Rühle pel seu alt grau de col·laboració en moltes ocasions.

En segon lloc, m'agradaria agrair tot l'esforç i dedicació del meu director de tesi, Prof. Joaquim Bruna Floris, qui bàsicament ha fet possible que tot aquest projecte s'hagi dut a terme. Tant per la seva aportació d'idees com per tots els desenvolupaments analítics, íntegrament matemàtics, indispensables per desenvolupar i entendre aquesta tesi.

D'altra banda, agrair l'oportunitat que m'ha oferit el Centre de Recerca Matemàtica de ser particip de totes les activitats, recursos i instal·lacions que ofereix. Valorar la col·laboració i supervisió del Prof. Sergey Tikhonov al llarg de tot el projecte, i agrair l'ajuda i companyonia d'altres integrants del centre: Anel Nurtay, Vincent Cregan, Elisa Beltràn, Claudia Fanelli, Gemma Colldeforns, Víctor Navas, Marc Schwarzwälder i especialment l'Helena Ribera per tota l'ajuda oferida en l'àmbit laboral i com a amiatat.

En l'àmbit personal, donar les gràcies a la meva família, mons pares i mon germà, i a les

meves amistats més properes per tot l'interès i suport continu. Finalment agrair a la Vanessa haver convertit una època difícil i feixuga, en una de les èpoques més boniques de la meva vida.

Capítol 0

Preliminars

0.1 Integrals i sèries de Fourier

0.1.1 Introducció. Conceptes previs

L'espai de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^d)$ és l'espai de funcions (mesurables) definides a la recta real, amb valors complexos, definit per

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < +\infty,$$

mentre que l'espai de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^d)$ està definit per

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Utilitzant que

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(f(x)^2 + g(x)^2),$$

tenim que $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$ si $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Això permet definir la *correlació o producte escalar* entre f, g mitjançant

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)} dx.$$

L'analogia amb el producte escalar de vectors és clara: si $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_d)$ són dos vectors d -dimensionals, llavors el seu producte escalar és $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_db_d$.

De la mateixa manera (i amb la mateixa prova) s'obté la desigualtat de Schwarz

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

per a $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on es compleix la igualtat quan

$$f = \lambda g, \lambda \in \mathbb{R} \iff |\langle f, g \rangle| = \|f\|_2 \|g\|_2.$$

De fet, la manera intuïtiva com es mira $L^2(\mathbb{R}^d)$ és com l'espai euclidià d'un “continu de dimensions”; en lloc de tenir un vector d -dimensional de components indexades per $i = 1, 2, \dots, d$, es

té un vector o senyal f amb components $f(x)$ indexades per x o $t \in \mathbb{R}^d$, els quadrats de les quals tenen suma finita. La quantitat $\|f\|_2$ s'anomena la *norma o energia* de f .

Per a una funció f definida a \mathbb{R} hom diu que a és un període si $f(x+a) = f(x)$ per a tot x , anomenant llavors aquesta funció f com a -periòdica. Es poden identificar les funcions a -periòdiques amb les funcions definides en $[0, a]$ que valen igual en 0 i en a (en aquesta tesi interpretem que totes les funcions són contínues). Els períodes de f formen un grup additiu, i si f no és trivial, aquest grup consta dels múltiples enters d'un nombre estrictament positiu, anomenat el *període fonamental* de f . Així, tots aquests períodes són múltiples enters del període fonamental. Evidentment, una funció a -periòdica no pertany mai a $L^1(\mathbb{R})$ o $L^2(\mathbb{R})$; el que té sentit és mirar la mida de f en un període. Designarem per $L^1_{p,a}(\mathbb{R})$, $L^2_{p,a}(\mathbb{R})$ respectivament l'espai de les funcions a -periòdiques tals que

$$\|f\|_1 = \int_0^a |f(x)| dx < +\infty, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^a |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

La versió de la desigualtat de Schwarz en $[0, a]$ implica que $L^2_{p,a}(\mathbb{R}) \subset L^1_{p,a}(\mathbb{R})$ on els subíndexs p i a indiquen que és una funció a -periòdica. De forma més precisa

$$\int_0^a |f(x)| dx \leq \sqrt{a} \left(\int_0^a |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

on \sqrt{a} s'obté de $\|1\|_2$. I d'altra banda, la versió de la correlació o producte escalar en $L^2_{p,a}(\mathbb{R})$ és naturalment,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^a f(x) \overline{g(x)} dx.$$

0.1.2 Sèries de Fourier

Els exemples més senzills de funcions a -periòdiques són les ones elementals

$$\sin\left(\frac{2\pi}{a}nx + \phi\right), \cos\left(\frac{2\pi}{a}nx + \phi\right), n \in \mathbb{Z}$$

i les seves combinacions lineals. Utilitzant la notació complexa $e^{i\frac{2\pi}{a}nx} = \cos\frac{2\pi}{a}nx + i \sin\frac{2\pi}{a}nx$, aquestes funcions a -periòdiques s'escriuen sota la forma

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\frac{2\pi}{a}nx}, a_n \in \mathbb{C}. \quad (0.1)$$

L'enunciat fonamental de Fourier és que tota funció a -periòdica s'expressa d'aquesta manera; ara bé, cal considerar la suma fins a $n = \infty$ (sèrie de Fourier) i llavors cal donar-li un sentit. Per formular un enunciat matemàticament correcte ens cal el concepte de *base hilbertiana* de l'espai $L^2_{p,a}(\mathbb{R})$ o $L^2(\mathbb{R})$, que és una versió semblant al concepte de base ortogonal dels espais euclidians. Concretament, en els espais euclidians $\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d$, una *base ortogonal* o hermitiana és una col·lecció

de d -vectors unitaris $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$ que són dos a dos perpendiculars entre si. Llavors tot altre vector té l'expressió

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^d \langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i.$$

Si H denota $L^2_{p,a}(\mathbb{R})$ o $L^2(\mathbb{R})$ amb la seva corresponent versió de producte escalar, una base hilbertiana de H és una col·lecció numerable $f_n, n \in \mathbb{Z}$ de funcions de H de norma 1 i perpendiculars dos a dos. De forma que $f \in H, \langle f, f_n \rangle = 0$ per a tot n , implica que $f = 0$. Aleshores, hom pot provar que per a $f \in H$ es té

$$f = \sum_n \langle f, f_n \rangle f_n,$$

on la sèrie convergeix en el sentit que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \sum_{|n| \leq N} \langle f, f_n \rangle f_n\|_2 = 0.$$

I com en el cas euclidià, també s'obté el teorema de Pitàgores (aquí anomenat de Parseval)

$$\|f\|_2^2 = \sum_n |\langle f, f_n \rangle|^2.$$

Doncs bé, les funcions del tipus $e^{i\frac{2\pi}{a}nx}, n \in \mathbb{Z}$, formen una base hilbertiana de $L^2_{p,a}(\mathbb{R})$, o equivalentment de $L^2(I)$ si I és un interval de longitud a . El desenvolupament anterior pren la forma

$$f(x) = \sum_n c_n(f) e^{i\frac{2\pi}{a}nx}, \quad c_n(f) = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) e^{-i\frac{2\pi}{a}nx} dx. \quad (0.2)$$

Aquest desenvolupament també té sentit, més generalment, per a funcions periòdiques integrables en un període, concretament les de $L^1_{p,a}(\mathbb{R})$. En aquesta tesi s'interpreta que aquest desenvolupament convergeix punt a punt, la qual cosa és certa si f és una funció prou regular.

0.1.2.1 Integral de Fourier

La definició de la *base de Fourier* a $L^2(\mathbb{R})$ és matemàticament subtil. Si f és una funció qualsevol definida en \mathbb{R} i hom planteja expressar-la com a combinació lineal (infinita) de sinus i cosinus, quelcom natural a fer és restringir f en $[-L, L]$, escriure el seu desenvolupament de Fourier i fer $L \rightarrow +\infty$. El resultat formal que s'obté és la representació de Fourier (o fórmula d'inversió)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad (0.3)$$

on \hat{f} és la transformada de Fourier i ξ és la variable corresponent a les multifreqüències espacials.

La Transformada de Fourier d'una funció f es pot escriure, llavors, de forma inversa com

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx. \quad (0.4)$$

Anàlogament, aquesta definició també es pot aplicar per a dimensió $d > 1$, substituint $x\xi$ pel producte escalar $x \cdot \xi$. Formalment, es pot veure \hat{f} com la correlació de f amb la funció $e_\xi(x) = e^{2\pi i x \cdot \xi}$. Aquesta funció està definida si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, i la seva representació de Fourier és vàlida si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Si això es compleix, es pot reescriure (0.3) i (0.4) formalment com

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad \text{si } f \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d). \quad (0.5)$$

Per a funcions de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ es produeix una mena de miracle, el *teorema de Plancherel* [15]. Aquest afirma que en aquest cas es compleix que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Aquest fet permet estendre (0.5) a funcions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ mitjançant

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq N} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi,$$

així com la seva transformada de Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq N} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx,$$

de manera que la transformada de Fourier és una isometria de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

És interessant observar que tant la fórmula d'inversió com el teorema de Parseval formalment equivalen a l'enunciat

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \xi \cdot (x-y)} d\xi = \delta_0(x-y),$$

és a dir, 1 si $x = y$ i zero altrament. És a dir, la superposició de totes les freqüències és zero fora de l'origen. En efecte, si escrivim la fórmula d'inversió i intercanviem l'ordre d'integració, tenim

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy \right) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i (x-y) \cdot \xi} d\xi \right) dy,$$

on s'observa que formalment la integral interior és $\delta_0(x-y)$. D'una forma anàloga, si escrivim el teorema de Plancherel sota la forma

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(y)} e^{2\pi i y \cdot \xi} dy \right) d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{f(y)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i (y-x) \cdot \xi} d\xi \right) dx dy \end{aligned}$$

veiem també que torna a aparèixer $\delta_0(x-y)$ com a integral interior.

Finalment, hom pot concloure que tot l'anterior es pot escriure formalment com

$$\hat{f}(\xi) = \langle f, e_\xi \rangle, \quad f = \int_{\mathbb{R}^d} \langle f, e_\xi \rangle e_\xi d\xi.$$

Això significa que malgrat que $e_\xi \notin L^2(\mathbb{R}^d)$, la família $\{e_\xi, \xi \in \mathbb{R}^d\}$ funciona com si fos una base hilbertiana indexada per la multifreqüència ξ i per això s'anomena la base de Fourier.

0.1.3 Sistemes lineals invariants. Resposta impuls i funció de transferència

La importància de la base de Fourier, tant en el cas periòdic com en el no periòdic, té a veure amb els *sistemes lineals invariants* o *operadors invariants per translació*. La traslladada de paràmetre y d'una funció f es defineix com $\tau_y f(x) = f(x - y)$. Una aplicació lineal T de $L^2_{p,a}(R)$ o $L^2(\mathbb{R}^d)$ en si mateix, s'anomena invariant per translacions si $T(\tau_y f) = \tau_y(Tf)$. La majoria dels sistemes físics ho són, quan no depenen de l'elecció arbitrària d'un origen de temps o espai.

Els operadors invariants per translació estan completament determinats per la seva *resposta impuls* que d'una manera intuïtiva es pot introduir de la següent manera: tota funció f es pot pensar com la suma dels impulsos $f(x) \delta_x$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \delta_x dx\right)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \delta_x(y) dx = f(y).$$

Llavors, sent T lineal

$$Tf = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) T(\delta_x) dx.$$

Però $\delta_x = \tau_x \delta_0$ i si T és invariant per translacions, hom té $T(\delta_x) = T(\tau_x \delta_0) = \tau_x T(\delta_0)$. Si $g = T(\delta_0)$ és la *resposta a l'impuls* δ_0 , tenim llavors que

$$Tf = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \tau_x g dx,$$

és a dir

$$Tf(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(y - x) dx. \tag{0.6}$$

La funció de la dreta s'anomena la *convolució de f i g* , designada $f * g$. En el cas periòdic, la integral seria al llarg d'un període. Aquest argument formal pot fer-se rigorós no sense dificultats; d'una manera genèrica, tot operador invariant per translacions és un operador de convolució.

Què té a veure tot això amb la base de Fourier? El fet bàsic i transcendental, és que les funcions e_ξ són *vectors propis de tots els operadors invariants per translació*. Això també es pot veure d'una manera intuïtiva. La propietat característica de les funcions e_ξ és que són *caràcters*, en el sentit que

$$e_\xi(x + y) = e_\xi(x) e_\xi(y),$$

fet que es pot escriure com $\tau_{-y} e_\xi = e_\xi(y) e_\xi$. Aplicant T es té $\tau_{-y} T e_\xi = e_\xi(y) T(e_\xi)$, és a dir,

$$T e_\xi(x + y) = e_\xi(y) T e_\xi(x),$$

i fent $x = 0$ es comprova que $T e_\xi = m(\xi) e_\xi$ amb $m(\xi) = T(e_\xi)(0)$.

Aleshores, el funcionament de T és transparent si s'utilitza la base de Fourier:

$$f = \int_{\mathbb{R}^d} \langle f, e_\xi \rangle e_\xi d\xi \longrightarrow Tf = \int_{\mathbb{R}^d} \langle f, e_\xi \rangle T(e_\xi) d\xi,$$

és a dir,

$$\widehat{Tf(\xi)} = m(\xi)\hat{f}(\xi), \quad Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) m(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

En el cas periòdic

$$f(x) = \sum_n c_n(f) e^{i \frac{2\pi}{a} n x} \longrightarrow Tf(x) = \sum_n c_n(f) m_n e^{i \frac{2\pi}{a} n x},$$

és a dir, $c_n(Tf) = m_n c_n(f)$.

Dit d'una altra manera, *tots els operadors invariants per translacions diagonalitzen en la base de Fourier*, i d'aquí la seva importància. La funció de valors propis $m(\xi)$, o successió m_n en el cas periòdic, s'anomena la *funció de transferència* de T .

Evidentment, hi ha una relació entre la resposta impuls i la funció de transferència, la qual s'obté a partir de les dues maneres en les quals es pot representar l'operador T : $Tf = f * g$ i $\widehat{Tf} = m\hat{f}$. És immediat comprovar que

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}, \quad c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g),$$

d'on resulta que $m(\xi) = \hat{g}(\xi)$, $m_n = c_n(g)$.

Per exemple, l'operador τ_y és invariant per translacions i $\widehat{\tau_y f(\xi)} = e^{-2\pi i y \xi} \hat{f}(\xi)$, en aquest cas $m(\xi) = e^{-2\pi i y \xi}$. Un altre exemple és un operador diferencial amb coeficients constants $P(D)f = \sum a_\alpha D^\alpha f$, el qual també és invariant per translacions. En aquest cas,

$$P(\widehat{D})\hat{f}(\xi) = \left(\sum_\alpha a_\alpha (2\pi i \xi)^\alpha \right) \hat{f}(\xi), \tag{0.7}$$

essent $m(\xi) = \left(\sum_\alpha a_\alpha (2\pi i \xi)^\alpha \right)$, és a dir, la transformada de Fourier transforma derivades en productes.

0.1.4 Teoria unificada de Fourier

En aquesta tesi, es consideraran en alguns punts transformades de Fourier de funcions que no són ni periòdiques ni de $L^p(\mathbb{R}^d)$ ($p = 1, 2$), per tant es necessita una extensió de la teoria. Aquesta extensió és la donada per la teoria de *distribucions* que aquí es recorda breument [15, 16]. Un benefici afegit d'aquesta teoria és que proporciona un únic marc teòric en el qual s'engloben tant les sèries de Fourier com les integrals de Fourier.

El primer pas previ a fer és veure les funcions d'una altra manera. En lloc de pensar-les com aplicacions que associen valors a una variable independent x , s'han de pensar com aplicacions que assignen valors a unes *funcions test*. És a dir, la variable independent serà ara una funció test. Interessa aplicar també aquesta teoria al cas multidimensional $d > 1$.

Es defineix l'espai $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ de funcions test com l'espai de les funcions φ que tenen totes les seves derivades $D^\alpha \varphi$ de tots els ordres amb suport compacte. Si f és una funció localment integrable, és a dir, per a qualsevol bola $B = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq r\}$, tenim

$$\int_B |f(x)| dx < +\infty,$$

on li podem associar l'aplicació T_f que actua en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$(T_f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x) dx.$$

Si dues d'aquestes funcions f, g compleixen $T_f = T_g$, és a dir,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\varphi(x) dx, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d),$$

aleshores hom té $f(x) = g(x)$ per a tot x (quasi per tot x si no són funcions contínues).

Això porta a definir una *distribució* com una aplicació lineal definida en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, amb valors escalars complexos, i que és contínua en el següent sentit: si φ_n és una successió de funcions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ que tenen suport en una bola fixada i $D^\alpha \varphi_n(x) \rightarrow D^\alpha \varphi(x)$ quan $n \rightarrow \infty$ uniformement en x , aleshores $(T, \varphi_n) \rightarrow (T, \varphi)$. Aquesta és una noció tècnica que compleixen les T definides d'una forma natural.

Així, qualsevol funció contínua, o més generalment, qualsevol funció localment integrable f , identificada amb T_f , és una distribució. Un altre exemple és la *Delta de Dirac* en un punt p , definida per

$$(\delta_p, \varphi) = \varphi(p)$$

i que no és pas una funció. Més generalment, si E és un conjunt de punts sense punts d'acumulació finits (és a dir, una successió (p_n) amb límit ∞), considerem la *pinta de Dirac* $\delta_E = \sum_n \delta_{p_n}$ com la distribució

$$(\delta_E, \varphi) = \sum_n \varphi(p_n).$$

Evidentment, les funcions de $L^1(\mathbb{R}^d)$ són localment integrables, i per tant, distribucions. Les funcions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ també són localment integrables, perquè per la desigualtat de Schwarz, per a qualsevol bola B es compleix

$$\int_B |f(x)| dx \leq |B|^{\frac{1}{2}} \left(\int_B |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = |B|^{\frac{1}{2}} \|f\|_2.$$

En el cas $d = 1$, les funcions periòdiques integrables en un període, $L^1_{p,a}(\mathbb{R})$, i per tant també les de $L^2_{p,a}(\mathbb{R})$, són localment integrables perquè qualsevol interval I està inclòs en un nombre finit M de períodes, i per tant

$$\int_I |f(x)| dx \leq M \|f\|_1.$$

Amb la visió clàssica de funció, es poden trobar funcions que no són derivables a alguns punts, o més complicat encara, que no siguin derivables a cap punt. En canvi, tota distribució té una derivada, la qual és una altra distribució. Per saber quina ha de ser la definició correcta, es pren una funció f que té derivades parcials $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ contínues en el sentit clàssic i es compara $T_f, T_{D_i f}$. Integrant per parts,

$$(T_{D_i f}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} D_i f(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) D_i \varphi(x) dx = -(T_f, D_i \varphi).$$

En conseqüència, la derivada $D_i T$ d'una distribució T es defineix com

$$(D_i T, \varphi) = -(T, D_i \varphi).$$

Per exemple, la funció de Heavyside H que val zero si $x < 0$ i 1 si $x \geq 0$, no és derivable en el sentit clàssic. La seva derivada en el sentit de les distribucions és

$$((T_H)', \varphi) = -(T_H, \varphi') = - \int_0^\infty \varphi' dx = \varphi(0) = (\delta_0, \varphi),$$

per tant $(T_H)' = \delta_0$.

Reiterant, l'acció d'una derivada D^α és

$$(D^\alpha T, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (T, D^\alpha \varphi).$$

D'altra banda, el producte d'una distribució T per una funció ψ indefinidament derivable es defineix per

$$(\psi T, \varphi) = (T, \psi \varphi),$$

de forma que quan $T = T_f$, hom té $\psi T_f = T_{\psi f}$. Així, es conclou que té sentit aplicar qualsevol operador diferencial $\sum_\alpha c_\alpha(x) D^\alpha$ a una distribució.

Seguidament, pretenem definir la transformada de Fourier d'una distribució. Com abans, s'ha de veure quina és la relació entre les distribucions definides per una funció i la seva transformada de Fourier. Aplicant Fubini, es pot escriure

$$\begin{aligned} (T_{\hat{f}}, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right) \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi) e^{-2\pi i \xi x} d\xi \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{\varphi}(x) dx = (T_f, \hat{\varphi}). \end{aligned}$$

De manera que cal definir \hat{T} com

$$(\hat{T}, \varphi) = (T, \hat{\varphi}). \tag{0.8}$$

Malauradament apareix un problema, que és que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, llavors $\hat{\varphi} \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Això es pot veure mitjançant el *Principi d'Incertesa de Heisenberg*. Pensant en una funció localitzada, amb una certa variància σ , llavors, es compleix

$$\sigma(f) \sigma(\hat{f}) \geq cte.$$

El qual vol dir que si una funció està molt localitzada, la seva transformada de Fourier està molt estesa. De fet, $\hat{\varphi}$ té una extensió entera al pla complex i no pot anul·lar-se en cap interval.

Per resoldre aquest problema és necessari introduir un tipus especial de distribucions, les *distribucions atemperades*. Primer cal introduir l'espai de Schwartz

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d), |x|^l |D^\alpha \psi(x)| \leq C, \forall l, \alpha\},$$

de les funcions suaus *ràpidament decreixents*. Un exemple d'aquest tipus de funcions ψ seria la funció Gaussiana del tipus $f(x) = ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$.

Atès que, tal com hem vist abans en (0.7), la transformada de Fourier de derivades esdevé un producte per polinomis, es pot comprovar que la transformació de Fourier és bijectiva en l'espai $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. És a dir, $\hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si i només si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ara, una *distribució atemperada* es defineix com una aplicació lineal

$$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C},$$

la qual és contínua en un cert sentit. Com que evidentment $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tota distribució atemperada és una distribució. Es pot mirar, llavors, les distribucions atemperades com aquelles distribucions que poden actuar sobre les funcions de l'espai $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, sobre un conjunt de funcions test més gran.

Qualsevol funció f de $L^1(\mathbb{R}^d)$ o $L^2(\mathbb{R}^d)$ és una distribució atemperada, és a dir, que T_f és capaç d'actuar sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, de manera que

$$|(T_f, \psi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\psi(x) dx \right| \leq \|f\|_1 \|\psi\|_\infty, \quad \|(T_f, \psi)\| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\psi(x) dx \right| \leq \|f\|_2 \|\psi\|_2.$$

D'altra banda, una funció periòdica $f \in L^1_{p,a}(\mathbb{R})$ és també una distribució atemperada. En efecte, es pot observar que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi(x) dx &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{na}^{(n+1)a} f(x)\psi(x) dx = \\ &= \int_0^a \sum_n f(na+t)\psi(na+t) dt = \int_0^a f(t) \sum_n \psi(t+na) dt \end{aligned} \tag{0.9}$$

està definit perquè $|\psi(x+na)| \leq \frac{K}{n^2}$, on K és una constant, i per tant $\sum_n \psi(x+na)$ és acotada. Una pinta de Dirac del tipus $\Delta_a = \sum_n \delta_{na}$ és també una distribució atemperada, pel mateix motiu.

Ara ja es pot definir la transformada de Fourier d'una distribució atemperada T anàlogament a com s'ha definit en (0.8),

$$(\hat{T}, \psi) = (T, \hat{\psi}). \tag{0.10}$$

Per definició, doncs, $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$ si $f \in L^1(\mathbb{R}^d), L^2(\mathbb{R}^d)$. És a dir, aquesta definició és coherent amb la Transformada de Fourier en aquests espais. És fàcil veure que una altra forma d'escriure-ho és

$$\hat{T} = \int_{\mathbb{R}^d} (e_{-x}T) dx,$$

on $e_{-x}T$ és el producte de T amb la funció $e_{-x}(\xi) = e^{-2\pi i x \cdot \xi}$ definit per $(e_{-x}T, \psi) = (T, e_{-x}\psi)$.

Com que la transformada de Fourier és un isomorfisme en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ també ho és en l'espai de les distribucions atemperades, així que hom té la mateixa fórmula d'inversió

$$T = \int_{\mathbb{R}^d} e_{\xi} \hat{T} d\xi. \tag{0.11}$$

Seguidament s'analitza el cas d'una funció periòdica. Per a una funció $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ s'anomena $\psi_{p,a}$ la seva a -perioditzada, que és, repreneient l'equació (0.9),

$$\psi_{p,a}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \psi(x + ma).$$

Els seus coeficients de Fourier són

$$\begin{aligned} c_n(\psi_{p,a}) &= \frac{1}{a} \int_0^a \psi_{p,a}(x) e^{-i \frac{2\pi}{a} nx} dx = \frac{1}{a} \sum_m \int_0^a \psi(x + ma) e^{-i \frac{2\pi}{a} nx} dx = \\ &= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{-i \frac{2\pi}{a} nx} dx = \frac{1}{a} \hat{\psi}\left(\frac{n}{a}\right). \end{aligned} \tag{0.12}$$

Per tant

$$\sum_m \psi(x + ma) = \psi_{p,a}(x) = \sum_n c_n(\psi_{p,a}) e^{i \frac{2\pi}{a} nx} = \frac{1}{a} \sum_n \hat{\psi}\left(\frac{n}{a}\right) e^{i \frac{2\pi}{a} nx}.$$

Concretament, la fórmula

$$\sum_m \psi(x + ma) = \frac{1}{a} \sum_n \hat{\psi}\left(\frac{n}{a}\right) e^{i \frac{2\pi}{a} nx}$$

s'anomena la *fórmula de Poisson*. Canviant ψ per $\hat{\psi}$ es té també

$$\sum_m \hat{\psi}(x + ma) = \frac{1}{a} \sum_n \psi\left(\frac{n}{a}\right) e^{-i \frac{2\pi}{a} nx}.$$

En el cas $x = 0$,

$$\sum_m \psi(ma) = \frac{1}{a} \sum_n \hat{\psi}\left(\frac{n}{a}\right),$$

la qual cosa vol dir que la transformada de Fourier de la pinta de Dirac $\Delta_a = \sum_m \delta_{ma}$ és la pinta $\hat{\Delta}_a = \frac{1}{a} \Delta_{\frac{n}{a}}$.

Sigui ara $f \in L^1_{p,a}(\mathbb{R})$; calculem la seva transformada de Fourier com a distribució atemperada. S'obté, segons (0.10)

$$(\hat{f}, \psi) = (f, \hat{\psi}) = \int_0^a f(x) \sum_n \hat{\psi}(x + na) dx,$$

però, segons la fórmula de Poisson, la darrera suma coincideix amb $\frac{1}{a} \sum_n \psi\left(\frac{n}{a}\right) e^{-i \frac{2\pi}{a} nx}$, per tant

$$(\hat{f}, \psi) = \frac{1}{a} \sum_n \psi\left(\frac{n}{a}\right) \int_0^a f(x) e^{-i \frac{2\pi}{a} nx} dx = \sum_n \psi\left(\frac{n}{a}\right) c_n(f) = \left(\sum_n c_n(f) \delta_{\frac{n}{a}}, \psi \right).$$

És a dir,

$$\hat{f} = \sum_n c_n(f) \delta_{\frac{n}{a}}.$$

Això significa que \hat{f} és una suma de deltes de Dirac situades en els punts $\frac{n}{a}$ i els coeficients són precisament els $c_n(f)$. Doncs, la fórmula d'inversió (0.11) es converteix en

$$f = \int_{\mathbb{R}} e_{\xi} \hat{f} d\xi = \sum_n c_n(f) e_{\frac{n}{a}},$$

la qual expressa f com la suma de la seva sèrie de Fourier.

D'aquesta manera la transformació de Fourier de distribucions atemperades proporciona un marc únic que engloba tant les sèries com les integrals de Fourier.

Acabarem aquesta secció amb el còmput de la transformada d'una funció concreta, la funció

$$f(x) = e^{-\alpha\pi|x|^2}$$

amb $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$. Per simplificar, es suposa el cas $d = 1$. Si $\operatorname{Re} \alpha > 0$ es tracta d'una funció de la classe de Schwarz. Si $\operatorname{Re} \alpha = 0$ és una funció de mòdul 1, per tant una distribució atemperada. Mentre que si $\operatorname{Re} \alpha < 0$ és una funció localment integrable que no és una distribució atemperada perquè té un creixement massa ràpid a l'infinit. Quan $\operatorname{Re} \alpha > 0$ es pot repetir l'argument habitual per a les gaussianes (corresponents a α real): com que $f'(x) = -2\alpha\pi x f(x)$, aplicant la transformada a ambdós membres es comprova que \hat{f} compleix l'equació $(\hat{f})'(\xi) = -\frac{2\pi}{\alpha} \hat{f}(\xi)$, i per tant

$$\hat{f}(\xi) = C(\alpha) e^{-\frac{\pi}{\alpha} \xi^2}.$$

D'altra banda,

$$C(\alpha)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha\pi x^2} dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha\pi(x^2+y^2)} dx dy = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\pi r^2} r dr = \frac{1}{\alpha},$$

d'on es dedueix que $C(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

En definitiva s'obté que la transformada és

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{\pi}{\alpha} |\xi|^2}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0. \quad (0.13)$$

Si $\operatorname{Re} \alpha = 0$, considerem $\alpha_t = \alpha + t$, $t > 0$ i prenem ψ en la classe de Schwarz. Per (0.10), hom té

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(x) e^{-(\alpha+t)\pi x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) e^{-\frac{\pi}{\alpha+t} x^2} dx.$$

Fent límit quan $t \rightarrow 0$ i aplicant el teorema de la convergència dominada, s'arriba a la mateixa conclusió que amb $t = 0$, la qual cosa demostra que la Transformada en el sentit de les distribucions també és la donada per (0.13).

0.2 Equacions de Maxwell, ones electromagnètiques, models per a la difracció

0.2.1 Les equacions de Maxwell. Energia electromagnètica

Les equacions de Maxwell per als camps elèctric \vec{E} i camp magnètic \vec{B} en el buit, en la seva forma diferencial, són respectivament, la llei de Gauss de l'electroestàtica, la llei de Gauss de l'electromagnetisme, la llei de Faraday i la llei d'Ampère (modificada per Maxwell)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (0.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (0.15)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (0.16)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (0.17)$$

on $\rho(p, t)$ és la densitat de càrrega, $\vec{J}(p, t) = \rho(p, t)\vec{v}(p, t)$ és el camp densitat de corrent i ϵ_0, μ_0 són la permitivitat elèctrica i permeabilitat magnètica en el buit, respectivament. Es pot comprovar que entre elles no són independents; per exemple, la llei de Faraday implica que $\nabla \cdot \vec{B}$ és independent del temps.

Com a conseqüència d'aquestes tenim l'equació de continuïtat

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Un camp electromagnètic, la llum en particular, és un parell $(\vec{E}(p, t), \vec{B}(p, t))$ de camps dependents de la posició i el temps, els quals compleixen les equacions de Maxwell.

Recordem ara la formulació precisa del concepte d'*intensitat o energia* d'un camp; de les dues darreres equacions (0.16) i (0.17) es dedueix

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \mu_0 \left(\vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0}) \right),$$

que és equivalent a

$$-\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0}).$$

La seva forma integral (si D és un domini acotat amb vora Σ) esdevé

$$-\int_{\Sigma} \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot \vec{n} dA = \int_D \vec{J} \cdot \vec{E} dV + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_D (\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0}) dV, \quad (0.18)$$

on dV i dA són diferencials de volum i àrea, respectivament.

En l'equació anterior donem una interpretació a la primera integral del terme dret. En una situació simplificada, se suposa que a l'instant t , hi ha dins D , N càrregues puntuals q_1, q_2, \dots, q_N situades als punts p_1, p_2, \dots, p_N . La potència mecànica exercida sobre aquestes càrregues és

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}(p_i, t) \cdot \vec{v}(p_i, t) = \sum_{i=1}^N \left(q_i \vec{E}(p_i, t) + q_i \vec{v}(p_i, t) \times \vec{B}(p_i, t) \right) \cdot \vec{v}(p_i, t) = \sum_{i=1}^N q_i \vec{E}(p_i, t) \cdot \vec{v}(p_i, t),$$

on s'ha utilitzat que $\vec{v} \times \vec{B}$ és perpendicular a \vec{v} . Pensant en sumes de Riemann, hom pot veure, per tant, que la primera integral de la dreta de (0.18), representa la potència mecànica exercida sobre les càrregues que componen el corrent elèctric dins D , en cada instant. Per interpretar l'altra integral es pot pensar primer en el cas $D = \mathbb{R}^3$, acceptant que \vec{E}, \vec{B} s'anul·len l'infinít, de forma que no hi ha integral a la vora Σ . Així, l'equació es pot reescriure com

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{J} \cdot \vec{E} dV + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0}) dV = 0.$$

Segui $W(t)$ el treball mecànic acumulat produït pel camp en actuar sobre totes les càrregues des de l'instant inicial fins a l'instant t , llavors la primera integral anterior és $\frac{dW}{dt}$, i per tant

$$W(t) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0}) dV = \text{constant}.$$

Això significa que una variació en el temps de la quantitat

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0}) dV$$

repercuteix en una variació de signe contrari de $W(t)$ en el mateix període de temps. Aquest terme representa, per tant, *l'energia potencial del camp electromagnètic*. El seu integrand és la *densitat d'energia potencial*, conformat pels termes d'energia electroestàtica $\frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2$ i d'energia magnetostàtica $\frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}$. Tornant a la fórmula (0.18), es pot escriure ara sota la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_D (\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0}) dV + \int_{\Sigma} (\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}) \cdot \vec{n} dA = - \int_D \vec{J} \cdot \vec{E} dV = - \frac{dW_D}{dt},$$

on ara $W_D(t)$ és el treball mecànic acumulat, produït pel camp en actuar sobre totes les càrregues dins D des de l'instant inicial fins a l'instant t . Segons la interpretació anterior, el primer terme és la taxa de variació d'energia emmagatzemada dins D . Això porta a interpretar

$$\int_{\Sigma} (\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}) \cdot \vec{n} dA$$

com la taxa amb la qual l'energia flueix, de dins a fora i perpendicular a dA , a través de Σ . El vector

$$\vec{S}(p, t) = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \tag{0.19}$$

s'anomena *vector de Poynting*, el qual té, per tant, la següent interpretació: si Σ és una superfície, tancada o no, $\int_{\Sigma}(\vec{S} \cdot \vec{n}) dA$ és la taxa amb la qual l'energia electromagnètica travessa Σ i

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma} (\vec{S}(p, t) \cdot \vec{n}(p)) dA(p) dt$$

és l'energia total transportada a través de Σ entre els instants t_1, t_2 . La seva direcció, perpendicular a \vec{E}, \vec{B} , és la direcció en la qual el camp electromagnètic transporta energia (és la que intuïtivament s'anomena la direcció de propagació del camp). Com que el vector de Poynting és perpendicular als camps \vec{E}, \vec{B} , les ones electromagnètiques es diuen de tipus transversal, en contraposició a les ones mecàniques (com el so), que són ones longitudinals. El mòdul del vector de Poynting representa, en cada instant, el ritme amb el qual l'energia es transporta a través d'una superfície unitària perpendicular. A la pràctica, s'observen valors mitjans d'aquest vector; la *intensitat mitjana* d'un camp en un punt donat p en l'instant t es defineix com el valor mitjà en el període d'observació $[t - T, t + T]$ del vector de Poynting. Escrit formalment, s'obté

$$\langle \vec{I} \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t+T} \vec{S}(p, s) ds,$$

on s és la superfície que travessa \vec{S} . Per definició, $\int_{\Sigma} \langle \vec{I} \rangle \cdot \vec{n} dA(p)$ representa el flux d'energia que travessa Σ en terme mitjà. La *intensitat total* d'una ona en un punt p es defineix com la integral

$$\vec{I}(p) = \int \vec{S}(p, s) ds.$$

Per definició, el flux de \vec{I} en Σ quantifica l'energia total transportada a través de Σ . La intensitat és, doncs, una densitat superficial d'energia total.

0.2.2 El potencial vector i el potencial escalar. L'equació d'ona

A continuació, reformularem les equacions de Maxwell en termes dels anomenats *potencials elèctric i magnètic*. L'equació $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ equival a l'existència d'un *potencial vector* \vec{A} , tal que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. La llei de Faraday (0.16) s'escriu, llavors, com $\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$, que porta a l'existència d'un potencial escalar V tal que $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$. Així s'obté,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V. \quad (0.20)$$

Aquests potencials no són únics; la forma general d' \vec{A} és $\vec{A} = \vec{A}_0 + \nabla \psi$, amb $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}_0$ i $\psi(p, t)$ arbitrària. Llavors V té l'expressió general

$$V = V_0 - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \text{on} \quad \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} = -\nabla V_0.$$

En termes d'aquests dos potencials, les altres dues equacions de Maxwell, (0.14) i (0.17), es reescriuen com

$$\nabla \cdot (\nabla V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (0.21)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} - \mu_0 \epsilon_0 (\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}). \quad (0.22)$$

Utilitzant que per a un camp \vec{X} es compleix que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{X}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{X}) - \Delta \vec{X}, \quad (0.23)$$

on el laplacà $\Delta = \nabla^2$ actua component a component, es poden reescriure (0.21) i (0.22) sota la forma

$$(\Delta - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2})V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}) \quad (0.24)$$

$$(\Delta - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{A} = -\mu_0 \vec{J} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}). \quad (0.25)$$

Si es tria \vec{A} de forma que es compleixi l'equació de Lorentz

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

veiem que els dos potencials compleixen una equació no homogènia. Es designa

$$L = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

amb $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-\frac{1}{2}}$, com l'operador d'ona. Les equacions dels potencials (0.25) i (0.24) esdevenen, per tant

$$L\vec{A} = -\mu_0 \vec{J}, \quad LV = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (0.26)$$

La tria d' \vec{A} significa

$$\nabla \cdot (\vec{A}_0 + \nabla \psi) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(V_0 - \frac{\partial \psi}{\partial t}) = 0,$$

és a dir,

$$L\psi = -\nabla \cdot \vec{A}_0 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V_0}{\partial t},$$

que és una equació del mateix tipus.

Tornant als camps, aplicant (0.20) i (0.26), es té

$$\begin{aligned} L\vec{E} &= L(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V) = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \\ L\vec{B} &= L(\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times L\vec{A} = -\mu_0 \nabla \times \vec{J}, \end{aligned}$$

equacions que òbviament poden, també, deduir-se directament de les equacions de Maxwell sense passar pels potencials.

En regions lliures de càrregues i corrents ($\rho = 0, \vec{J} = 0$) tenim equacions homogènies

$$L\vec{E} = 0, \quad L\vec{B} = 0.$$

L'equació $Lu = 0$ s'anomena *l'equació d'ona*. La discussió anterior diu que posant $B = \nabla \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\nabla V$, i complint-se $L\vec{A} = 0, LV = 0$ i l'equació de Lorentz $\nabla \cdot \vec{A} + c^{-2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$, s'obté l'ona electromagnètica general.

El valor de c obtingut a partir de μ_0, ϵ_0 va resultar ser el mateix que el valor estimat per a la velocitat de la llum en el temps de Maxwell, i això el portà a enunciar que la llum és una ona electromagnètica i a formular la teoria ondulatoria de la llum.

Hi ha diversos problemes que és natural plantejar, matemàticament parlant, amb les equacions de Maxwell, la qüestió de quines condicions inicials o de frontera cal afegir de forma que els camps quedin completament determinats. És a dir, la formulació de teoremes d'existència i unicitat que corresponguin a la realitat física. Per exemple, se suposa que en tot instant es coneixen la distribució de càrregues i de corrents, ρ i \vec{J} , sempre complint l'equació de continuïtat. Si es fa un recompte de les incògnites i equacions que es té, surten sis incògnites per a les components dels camps, i vuit equacions, de forma que hauria d'haver-hi una solució única. També, hom pot mirar-s'ho amb les equacions dels potencials: quatre equacions i quatre incògnites.

0.2.3 L'equació d'ona. Ones escalars.

Les solucions escalars $u(p, t)$ de l'equació $Lu = 0$, com per exemple les components de \vec{E} i \vec{B} en regions lliures de càrregues, s'anomenen *ones escalars*.

En el cas unidimensional, la solució general de l'equació d'ona és $u(p, t) = f(p + ct) + g(p - ct)$, que és la superposició d'una ona que viatja a l'esquerra amb velocitat c amb una altra que ho fa cap a la dreta també amb velocitat c .

En dimensió superior, pensant en $d = 3$, no és tan fàcil escriure la solució general. No obstant això, hi ha unes ones particulars, anomenades elementals, que respecten la forma de la solució d'ona escalar. Si f és qualsevol funció d'una variable i \vec{n} és una direcció unitària fixada, $u(p, t) = f(\frac{1}{c} p \cdot \vec{n} \pm t)$ és una solució. De fet, és la solució general en la qual la dependència en p és a través de $p \cdot \vec{n}$. Com que en cada instant, l'ona és constant en els plans perpendiculars a \vec{n} , aquesta s'anomena *ona plana*. Una ona plana s'anomena *periòdica* de període fonamental T , si ho és en t . És a dir, de la forma $u(p, t) = f(\omega(\frac{1}{c} \vec{n} \cdot p - t))$, on $\omega = \frac{1}{T}$, essent f , llavors, una funció T -periòdica. Aleshores, $u(p + \frac{c}{\omega} \vec{n}, t) = u(p, t)$, és també periòdica en p en la direcció \vec{n} , i el període espacial $\lambda = \frac{c}{\omega}$ s'anomena *la longitud d'ona*.

Expressant f en termes de la seva sèrie de Fourier, es pot veure que tota ona plana T -periòdica és una superposició d'ones del tipus

$$u(\mathbf{p}, t) = \operatorname{Re} A e^{2\pi i \omega (\frac{1}{c} \vec{n} \cdot \mathbf{p} - t)},$$

la qual també s'acostuma a escriure com $u(\mathbf{p}, t) = \operatorname{Re} A e^{i(\vec{k} \cdot \mathbf{p} - 2\pi \omega t)}$, amb $\vec{k} = \frac{2\pi \omega \vec{n}}{c}$ essent el *vector d'ona*. En diem *ones escalars planes monocromàtiques o harmòniques*, perquè tenen una única component freqüencial en t .

En general, s'anomena *ona monocromàtica* a qualsevol ona del tipus

$$u(\mathbf{p}, t) = \operatorname{Re} U(\mathbf{p}) e^{-2\pi i \omega t}$$

amb $U(\mathbf{p})$ complexa. Per tal que u compleixi l'equació d'ona, s'ha de satisfer

$$\Delta U(\mathbf{p}) + k^2 U(\mathbf{p}) = 0, \quad k = \frac{2\pi \omega}{c},$$

la qual s'anomena *equació de Helmholtz*. En aquest cas, es pot redefinir la *longitud d'ona* com $\lambda = \frac{c}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$.

Si ara es representa l'ona com $U(x) = |U(x)| e^{2\pi i g(x)}$ o $u(x, t) = |U(x)| e^{2\pi i (g(x) - \omega t)}$, $g(x)$ representa la fase, i les superfícies que comparteixen una mateixa $g(x)$ es defineixen com *els fronts d'ona*.

Un altre tipus d'ona escalar particularment important és l'*ona esfèrica*, és a dir, solucions de $Lu = 0$ de la forma $u(\mathbf{p}, t) = v(r, t)$, $r = \|\mathbf{p}\|$. És immediat de comprovar que $Lu = 0$ equival llavors a

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rv(r, t)) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rv(r, t)) = 0,$$

i per tant, la solució general és

$$u(r, t) = \frac{1}{r} (f(\frac{r}{c} + t) + g(\frac{r}{c} - t)).$$

Entre aquestes, l'ona radial i monocromàtica

$$u(r, t) = \operatorname{Re} \frac{1}{r} e^{2\pi i \omega (\frac{r}{c} - t)}$$

és particularment important. Concretament, la funció

$$G(r) = \frac{1}{r} e^{2\pi i \omega \frac{r}{c}} = \frac{1}{r} e^{ikr}$$

és la *solució fonamental* de l'equació de Helmholtz (llevat de constants). Compleix l'equació en el sentit clàssic en $r \neq 0$, però a més a més, hom té

$$(\Delta + k^2 I) \frac{1}{4\pi} G = \delta_0$$

en el sentit de les distribucions. Aquest fet es descriu amb detall a la secció següent.

Igual que en una variable, tota ona escalar es pot veure com una superposició d'ones planes i monocromàtiques. En efecte, utilitzant la transformació de Fourier en la variable p ,

$$\hat{u}(q, t) = \int_{\mathbb{R}^3} u(p, t) e^{-2\pi i q \cdot p} dp$$

l'equació d'ona es transforma en

$$2\pi|q|^2 \hat{u} + c^{-2} \hat{u}_{tt} = 0,$$

la qual té com a solució general

$$\hat{u}(q, t) = A_1(q) e^{2\pi i |q| ct} + A_2(q) e^{-2\pi i |q| ct},$$

i per tant, l'ona general complexa és

$$u(p, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(A_1(q) e^{2\pi i (q \cdot p + |q| ct)} + A_2(q) e^{2\pi i (q \cdot p - |q| ct)} \right) dq.$$

L'ona escalar general real correspon a $A_2(q) = \overline{A_1(-q)}$, és a dir,

$$u(p, t) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^3} A_2(q) e^{2\pi i (q \cdot x - |q| ct)} dq, \quad (0.27)$$

que fent un canvi a polars podem reescriure com

$$u(r, t) = 2\operatorname{Re} \int_0^\infty r^2 dr \int_{\|\vec{n}\|=1} A_2(r\vec{n}) e^{\frac{2\pi i}{r} (\vec{n} \cdot p - ct)} dA(\vec{n}).$$

L'ona escalar és, per tant, una superposició d'ones planes monocromàtiques, on es necessita analitzar totes les direccions \vec{n} i totes les freqüències cr . Això no vol dir però que u sigui una ona que viatja amb velocitat c . Malgrat això, aquest és el motiu pel qual l'equació s'anomena l'equació d'ona, i anomenem *ona escalar* qualsevol solució. La component monocromàtica de u en la freqüència $\omega = cr$ s'obté integrant en \vec{n} . Equivalentment, podem considerar la integral de Fourier en t per arribar al mateix resultat.

0.2.4 Ones electromagnètiques monocromàtiques, espectre d'una ona, ones planes

Tornem ara a considerar el cas concret d'una ona electromagnètica general, és a dir, un parell de camps (\vec{E}, \vec{B}) que compleixen les equacions de Maxwell. Hom diu que és una ona *monocromàtica* si \vec{E} i \vec{B} són de la forma

$$\vec{E}(p, t) = \operatorname{Re} \vec{E}_0(p) e^{-2\pi i \omega t}, \quad \vec{B}(p, t) = \operatorname{Re} \vec{B}_0(p) e^{-2\pi i \omega t}, \quad (0.28)$$

amb \vec{E}_0 i \vec{B}_0 com camps complexos a \mathbb{C}^3 . En aquest cas, les equacions de Maxwell es redueixen a

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E}_0 &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B}_0 &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{E}_0) &= k^2 \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 &= -\frac{i}{2\pi\omega} \nabla \times \vec{E}_0.\end{aligned}\tag{0.29}$$

Aplicant (0.23), a partir de (0.29) es pot veure que l'expressió general d'una ona monocromàtica és (\vec{E}, \vec{B}) de la forma (0.28) amb $\vec{B}_0 = -\frac{i}{2\pi\omega} \nabla \times \vec{E}_0$ i \vec{E}_0 complint

$$\Delta \vec{E}_0 + k^2 \vec{E}_0 = 0, k = \frac{2\pi\omega}{c}.$$

Això és aplicable a les sis components de \vec{E} i \vec{B} , compleixen l'equació escalar de Helmholtz. El vector de Poynting és llavors

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\text{Re}(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^*) + \text{Re}(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0 e^{4\pi i \omega t}) \right)$$

i la intensitat mitjana és

$$\begin{aligned}\langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 + \frac{1}{2\mu_0 T} \int_{t-T}^{t+T} \text{Re}(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0 e^{4\pi i \omega t}) e^{4\pi i \omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 + \frac{1}{8\pi\mu_0\omega T} \text{Re}(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \sin 2\pi\omega(t+T)).\end{aligned}$$

Com que el període d'observació $2T$ és en general molt gran en relació al període $\frac{1}{\omega}$, el segon terme es negligeix.

Una *ona electromagnètica plana* en la direcció unitària \vec{n} és aquella de la forma

$$\vec{E}(p, t) = \vec{E}_1 \left(\frac{1}{c} p \cdot \vec{n} - t \right), \quad \vec{B}(p, t) = \vec{B}_1 \left(\frac{1}{c} p \cdot \vec{n} - t \right)$$

amb \vec{E}_1, \vec{B}_1 essent funcions d'una variable real $\tau = \frac{1}{c} p \cdot \vec{n} - t$.

En aquest cas, les equacions de Maxwell es redueixen a

$$\begin{aligned}\vec{E}'_1(\tau) \cdot \vec{n} &= 0 \\ \vec{B}'_1(\tau) \cdot \vec{n} &= 0 \\ \vec{n} \times \vec{E}'_1(\tau) &= c \vec{B}'_1(\tau) \\ \vec{n} \times \vec{B}'_1(\tau) &= -c \vec{E}'_1(\tau).\end{aligned}$$

La darrera equació diu que $(\vec{E}_1 + \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{B}_1)' = 0$, per tant $\vec{E}_1 + \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{B}_1$ és un camp constant; com que s'ha de complir que en l'infinit és zero, és zero. De la mateixa manera veiem que $c \vec{B}_1 - \vec{n} \times \vec{E}_1 = 0$.

En conclusió, una ona electromagnètica plana ve donada per un camp $\vec{E}(p, t) = \vec{E}_1(\frac{1}{c}p \cdot \vec{n} - t)$ amb $\vec{E}_1 \cdot \vec{n} = 0$ i $\vec{B}(p, t) = \frac{1}{c}\vec{n} \times \vec{E}_1(\frac{1}{c}p \cdot \vec{n} - t)$. Els dos camps \vec{E}, \vec{B} són perpendiculars, amb $\|\vec{B}\| = \frac{1}{c}\|\vec{E}\|$. I a més a més, el vector de Poynting $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$ té la direcció de \vec{n} i mòdul

$$\|\vec{S}\| = \frac{1}{c\mu_0}\|\vec{E}(\frac{1}{c}p \cdot \vec{n} - t)\|^2. \quad (0.30)$$

Una *ona electromagnètica plana i monocromàtica* és aquella monocromàtica en la qual la dependència en p és a través de $p \cdot \vec{n}$, és a dir, $\vec{E}_0(p) = \vec{E}_1(p \cdot \vec{n})$. Imposant a \vec{E}_0 que $\nabla \cdot \vec{E}_0 = 0$ i que compleixi l'equació de Helmholtz, es pot veure que $\vec{E}_0(p) = \vec{C}e^{2\pi i\omega\frac{1}{c}p \cdot \vec{n}}$, amb \vec{C} constant. Per tant,

$$\vec{E}(p, t) = \text{Re } \vec{C}e^{2\pi i\omega(\frac{1}{c}p \cdot \vec{n} - t)}, \quad \vec{B}(p, t) = \frac{2\pi}{c}\text{Re } \vec{C} \times \vec{n}e^{2\pi i\omega(\frac{1}{c}p \cdot \vec{n} - t)}$$

és l'ona electromagnètica plana i monocromàtica general. Naturalment s'arriba a la mateixa conclusió si s'imposa a una ona plana que sigui també monocromàtica.

Igual que per a ones escalars, tota ona electromagnètica general (\vec{E}, \vec{B}) és superposició d'ones electromagnètiques planes i monocromàtiques. Per veure això utilitzarem el potencial vector \vec{A} i el potencial escalar V , lligats per l'equació de Lorentz $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, de forma que $\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Com que segons hem vist \vec{A}, V compleixen l'equació d'ona, tenim la representació (0.27)

$$\vec{A}(p, t) = \text{Re} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{A}_0(q)e^{2\pi i(q \cdot p - |q|ct)} dq, \quad V(p, t) = \text{Re} \int_{\mathbb{R}^3} V_0(q)e^{2\pi i(q \cdot p - |q|ct)} dq.$$

L'equació de Lorentz equival a

$$cq \cdot \vec{A}_0(q) = \|q\|V_0(q).$$

Fixem-nos en particular que gràcies a la transformada de Fourier podem parametritzar tots els camps electromagnètics amb $\vec{A}_0(q)$ un camp arbitrari: definim $\vec{V}_0(q) = \frac{c}{\|q\|}q \cdot \vec{A}_0(q)$ (amb la qual cosa es compleix l'equació de Lorentz), definim \vec{A}, V per les equacions anteriors (amb la qual cosa es compleix l'equació d'ona $L\vec{A} = 0, LV = 0$), i finalment definim $\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Aplicant rotacional a la primera equació anterior s'obté

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{B}_q dq, \quad \vec{B}_q = \text{Re} (2\pi i q \times \vec{A}_0(q)e^{2\pi i(q \cdot p - |q|ct)})$$

i aplicant $-\nabla - \frac{\partial}{\partial t}$ s'obté

$$\vec{E} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{E}_q dq, \quad \vec{E}_q = \text{Re} \left[-2\pi i V_0(q)q + 2\pi ic\|q\|\vec{A}_0(q) \right] e^{2\pi i(q \cdot p - |q|ct)}.$$

L'ona (\vec{E}_q, \vec{B}_q) és efectivament una ona plana i monocromàtica en la direcció q perquè

$$\begin{aligned} \left[-2\pi i V_0(q)q + 2\pi ic\|q\|\vec{A}_0(q) \right] \cdot q &= 2\pi i\|q\| \left(\vec{A}_0(q) \cdot q - \|q\| \right) = 0, \\ q \times \left[-2\pi i V_0(q)q + 2\pi ic\|q\|\vec{A}_0(q) \right] &= 2\pi ic\|q\|q \times \vec{A}_0(q). \end{aligned}$$

0.2.5 Model per a la difracció

El principi de Huygens de l'òptica geomètrica [11, pp. 33–35] estableix que les fonts de llum generen camps que es propaguen d'una forma que es podria resumir així: *si es té una ona primària monocromàtica* $u(p, t) = \text{Re} A(p)e^{2\pi i \omega t} = |A(p)| \cos(2\pi \omega t + \alpha(p))$, *cada punt d'un front d'ona primari* $\{p : 2\pi \omega t + \alpha(p) = \text{constant}\}$ *actua com a font de fronts d'ona esfèrics secundaris que avancen amb velocitat igual als de l'ona primària. El front d'ona primari* $\{p : 2\pi \omega t' + \alpha(p) = \text{constant}\}$ *en un instant posterior* $t' > t$ *és l'envolvent dels fronts d'ona secundaris.*

Una altra descripció clàssica és la de la difracció, descrita a la Figura 0.1. Es tenen dues regions I, II separades per una superfície Σ_1 . La part Σ_1 té unes parts opaques i unes obertures O . Les fonts de llum a la regió I generen camps que es propaguen fins a topa amb Σ_1 , on queden bloquejats fora de les obertures O , però propagant-se a través d'elles, en les quals es difracten seguint el principi de Huygens.

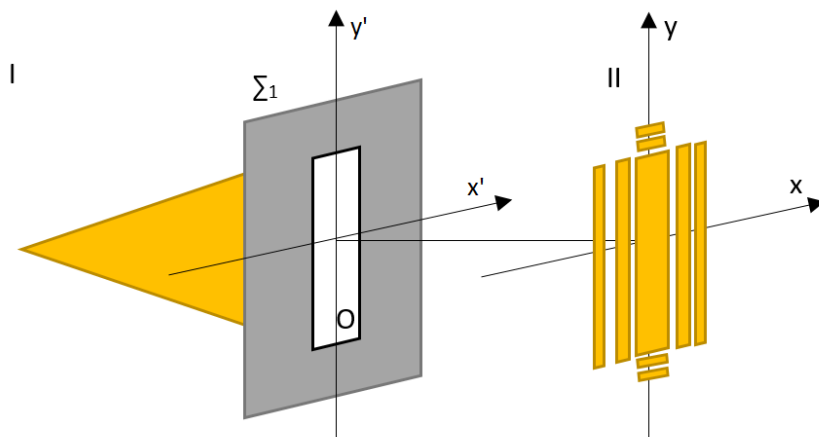


Figura 0.1: **Difracció.** Esquema de com es difracta un feix de llum en propagar-se a través d'una superfície Σ_1 amb obertures O

El tractament matemàtic rigorós d'ambdós fenòmens descrits anteriorment fou fet per Kirchhoff i Sommerfeld. Aquest tractament es basa principalment en l'equació d'ona. Des d'un punt de vista matemàtic, aquestes formulacions no són altra cosa que la generalització a ones escalars monocromàtiques (és a dir, solucions de l'equació de Helmholtz) dels teoremes clàssics de representació de funcions harmòniques de la teoria del potencial.

El punt de partida és la segona identitat de Green, que estableix que si C és un domini acotat amb vora regular Σ i f, g són dues funcions prou regulars, hom té

$$\int_C (f \Delta g - g \Delta f) dV = \int_\Sigma (f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}) dA,$$

on \vec{n} designa la normal exterior unitària. Evidentment, es pot substituir a la integral de l'esquerra l'operador Δ per l'operador $H = \Delta + k^2 I$ de Helmholtz. De manera que s'obté

$$\int_C (fHg - gHf) dV = \int_\Sigma (f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}) dA.$$

Donat un punt $p \in C$, es pot aplicar aquest fet a una funció U qualsevol i a la funció

$$G(p, p') = G_p(p') = \frac{1}{|p - p'|} e^{ik|p-p'|}$$

que, segons s'ha vist abans, és solució de l'equació de Helmholtz en $p' \neq p$.

Com que G_p és singular en p , s'ha de treure una petita bola $B_\varepsilon(p) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - p| \leq \varepsilon\}$ centrada en p , i considerar $D \setminus B_\varepsilon(p)$. S'obté, per tant,

$$\int_\Sigma (U \frac{\partial G_p}{\partial \vec{n}} - G_p \frac{\partial U}{\partial \vec{n}}) dA(p') = \int_{|p-p'|=\varepsilon} (U \frac{\partial G_p}{\partial \vec{n}} - G_p \frac{\partial U}{\partial \vec{n}}) dA(p') - \int_C HU(p')G_p(p') dV(p'), \quad (0.31)$$

on les dues normals són les exteriors. A la integral en $|p - p'| = \varepsilon$,

$$G_p = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial G_p}{\partial \vec{n}} = -\frac{1}{\varepsilon^2} e^{ik\varepsilon} + ik \frac{1}{\varepsilon} e^{ik\varepsilon} = e^{ik\varepsilon} \left(-\frac{1}{\varepsilon^2} + i \frac{k}{\varepsilon} \right).$$

Com que l'àrea de l'esfera és $4\pi\varepsilon^2$, al fer $\varepsilon \rightarrow 0$ s'obté

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \left(\frac{1}{|p - p'|} e^{ik|p-p'|} \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} - U \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{|p - p'|} e^{ik|p-p'|} \right) \right) dA + \frac{1}{4\pi} \int_C HU(p')G_p(p') dV(p'). \quad (0.32)$$

Quan U és solució de l'equació de Helmholtz $HU = 0$ s'obté, per tant, una fórmula que dona $U(p)$ en termes de U i $\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}$ en Σ . Fent els càlculs, surt

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \frac{e^{ik|p-p'|}}{|p - p'|} \vec{n} \cdot \left(\nabla U(p') + iU(p')k \left(1 + \frac{i}{k|p - p'|} \right) \right) \frac{p - p'}{|p - p'|} dA. \quad (0.33)$$

Si s'aplica (0.32) a una funció test U amb suport compacte, es té

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} HU(p')G_p(p') dV(p')$$

que diu que, en el sentit de les distribucions, hom té $H(\frac{1}{4\pi}G_p) = \delta_p$. És a dir, que $E = \frac{1}{4\pi}G_p$ és una solució fonamental de l'operador H .

Si s'aplica (0.33) a una ona escalar solució de $HU = 0$, a la regió davant d'un front d'ona $F = \{-2\pi\omega t + \alpha(p) = \text{constant}\}$ i dins d'una bola $B_R(p)$ on es fa tendir $R \rightarrow \infty$, i suposant que els termes a l'infinit s'anul·len, s'obté

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_F \left(\frac{1}{|p - p'|} e^{ik|p-p'|} \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} - U \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{|p - p'|} e^{ik|p-p'|} \right) \right) dA$$

amb $\vec{n} = -\frac{\nabla \alpha}{\|\nabla \alpha\|}$. Aquesta és la versió precisa i rigorosa del principi de Huygens feta per Kirchhoff.

Amb la fórmula (0.33) es pot plantejar un primer model per a la difracció. A la regió *II* de la Figura 0.2, acceptant que la contribució de la part Σ_2 s'anul·la l'infinit, es té

$$U(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_1} \frac{e^{ik|p-p'|}}{|p-p'|} \vec{n} \cdot \left(\nabla U(p') + iU(p')k \left(1 + \frac{i}{k|p-p'|} \right) \frac{p-p'}{|p-p'|} \right) dA, \quad (0.34)$$

on Σ_1 és la pantalla difractora. Per tenir l'ona U a la zona difractada *II* cal conèixer U , $\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}$ en Σ_1 . Kirchhoff feia dues hipòtesis [11, pp. 44–46]:

- U , $\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}$ s'anul·len en Σ_1 excepte a les obertures O .
- Els valors d' U , $\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}$ a les obertures, són els mateixos que si no hi hagués la pantalla.

i postula que l'ona ve donada per la mateixa expressió on la integral s'estén solament a les obertures O .

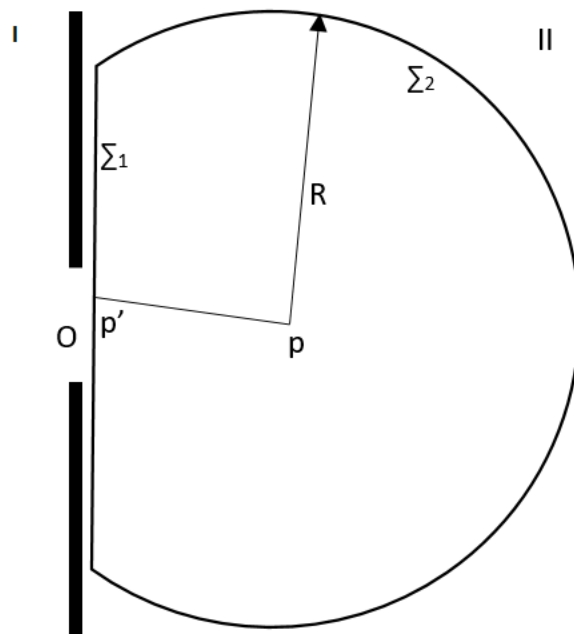


Figura 0.2: **Condicions de contorn de Kirchhoff.** Esquema on es representa una obertura O en una superfície Σ_1 , definint on es situen els punts p i p' , amb la corresponent esfera Σ_2 d'anàlisi, la qual té un radi R .

Sota aquestes hipòtesis, i amb algunes aproximacions, és com es treballa habitualment en òptica. Ara bé, hi ha una inconsistència seriosa en aquestes dues hipòtesis. El fet és que si una solució U de l'equació de Helmholtz compleix que U , $\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}$ són zero en un tros de superfície, llavors U és idènticament zero. En efecte, el teorema següent és ben conegut pel cas de funcions harmòniques ($k = 0$) (exercici 2.2 de [17]) i és vàlid més generalment per a dominis amb vora regular. Donem la prova, elemental, per al cas que ens interessa, el semiplà $z > 0$.

Teorema 1. *Sigui Π el semiplà $\{z > 0\}$ i $u \in C^2(\overline{\Pi})$ una solució de l'equació de Helmholtz $\Delta u + ku = 0$. Si $u = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ en un obert U del pla xy , aleshores $u = 0$.*

Demostració. Definim $u = 0$ en $z < 0$. Si provem que u és de classe C^2 a l'obert $V = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^2 \setminus U)$, u serà una solució de l'equació $\Delta u + ku = 0$ en V , per tant analítica en les variables x, y, z . Com que u és zero en $z < 0$, pel principi de prolongació analítica, $u = 0$.

Per tant és suficient veure que totes les derivades de primer i segon ordre són zero en U . Això és evident per a les derivades de primer ordre, per hipòtesi. Evidentment com que $u = 0$ en U

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Com que $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ en U , també

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

Finalment,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - ku = 0.$$

□

D'altra banda, la funció definida per (0.34) no pren en Σ_1 els valors originals.

Aquestes inconsistències poden ser eliminades amb l'elecció d'una *funció de Green* convenient, introduïda per Sommerfeld [11, pp. 46–50]. Tornant a la situació original on C és una regió acotada amb vora Σ , una funció de Green-Dirichlet $E_D(p, p')$, per a C , és una funció que segueix complint

$$H_{p'} E_D(p, p') = \delta_p, \tag{0.35}$$

Però ara, a més a més, $E_D(p, p') = 0$ si $p' \in \Sigma$. Llavors

$$U(p) = - \int_{\Sigma} U(p') \frac{\partial E_D}{\partial \vec{n}}(p, p') dA(p')$$

és una fórmula consistent. De la mateixa manera, una funció de Green-Neumann $E_N(p, p')$ continua complint (0.35), i a més a més, $\frac{\partial E_N}{\partial \vec{n}} = 0$ en Σ , de manera que

$$U(p) = \int_{\Sigma} \frac{\partial U(p')}{\partial \vec{n}} E_N(p, p') dA(p').$$

Pel cas on C és el semiespai $z > 0$ és possible donar explícitament E_D , E_N amb el *mètode d'imatges*. En efecte, si $p = (x, y, z)$ i $\tilde{p} = (x, y, -z)$ és el punt simètric respecte $z = 0$, tal com es mostra a la Figura 0.3, la funció

$$E_D(p, p') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{ik|p-p'|}}{|p-p'|} - \frac{e^{ik|\tilde{p}-p'|}}{|\tilde{p}-p'|} \right)$$

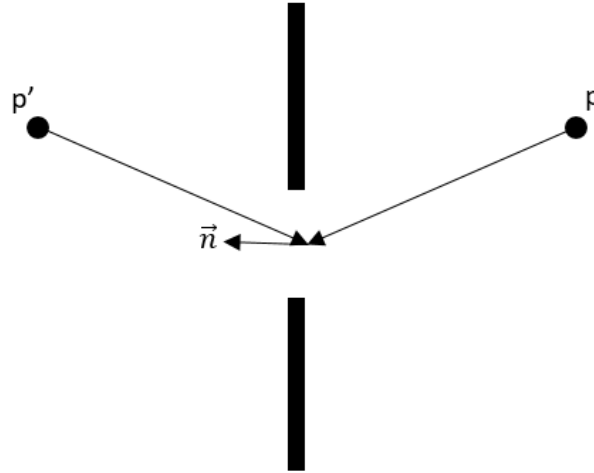


Figura 0.3: **Formulació de Rayleigh-Sommerfeld. Mètode d'imatges.** Esquema on es representa una obertura dins una pantalla, i dos punts d'anàlisi simètrics p, \tilde{p} respecte al pla $z = 0$

s'anul·la en $z = 0$ i continua complint (0.35). D'altra banda, la funció

$$E_N(p, p') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{ik|p-p'|}}{|p-p'|} + \frac{e^{ik|\tilde{p}-p'|}}{|\tilde{p}-p'|} \right)$$

també compleix (0.35) i té derivada respecte de z igual a zero. Substituint a (0.31) la funció E_p per E_D , s'obté

$$U(p) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{ik|p-p'|}}{|p-p'|} \left(1 + \frac{i}{k|p-p'|} \right) \frac{z}{|p-p'|} U(p') dA(p'), \quad (0.36)$$

on $p = (x, y, z)$, $p' = (x', y', 0)$. Reescrivint això i utilitzant la notació $U_z(x, y) = U(p)$, $U_0(x', y') = U(p')$, $R = |p-p'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$ veiem que

$$U_z(x, y) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{ikR}}{R} \left(1 + \frac{i}{kR} \right) \frac{z}{R} U_0(x', y') dx' dy'. \quad (0.37)$$

Això ens diu que U_z és la convolució de U_0 amb el nucli

$$K_z(x, y) = \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \left(1 + \frac{i}{k\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \quad (0.38)$$

Naturalment, tal com s'ha explicat a la Secció 0.1.3, això correspon al fet que $U_0 \rightarrow U_z$ és un operador invariant per translacions. Escrivim

$$K_z(x, y) = \frac{1}{2\pi} z \frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} + \frac{k}{2\pi i} z \frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}.$$

El cas $k = 0$ és el nucli de Poisson $P_z(x, y)$ del semiplà $z > 0$. Com que

$$P_z(x, y) = P_1\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \quad \int_{\mathbb{R}^2} P_1 = 1$$

el primer terme P_z és una unitat aproximada, és a dir, $P_z dx dy \rightarrow \delta_0$; per tant el primer terme de K_z és de L^1 (i també de L^2) i té límit δ_0 . D'altra banda, el segon terme no és de L^1 sinó de L^2 , i es pot veure que té límit zero en el sentit de les distribucions, és a dir, per a tota funció test φ es compleix

$$\int_{\mathbb{R}^2} z \frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} \varphi(x, y) dx dy \rightarrow 0$$

quan $z \rightarrow 0$. Tot plegat, fa que $K_z dx dy \rightarrow \delta_0$ en el sentit de les distribucions, per tant $U_z \rightarrow U_0$ i l'equació (0.37) és coherent.

Seguidament estudiem l'operador $U_0 \rightarrow U_z$ en el domini freqüencial, és a dir, utilitzant la transformació de Fourier bidimensional. Tal com s'ha explicat a la Secció 0.1.3, això implica fer el càlcul de la transformada de Fourier del nucli K_z , que és una funció de $L^2(\mathbb{R}^2)$. S'utilitza $q = (\xi, \eta)$ per les coordenades duals de Fourier de (x, y) , és a dir,

$$\widehat{K}_z(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} K_z(x, y) e^{-2\pi i(x\xi + y\eta)} dx dy, \quad K_z(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{K}_z(\xi, \eta) e^{2\pi i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta.$$

Començarem fent el càlcul de la transformada de Fourier de la solució fonamental E

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{ikR}}{R} e^{-2\pi i(x\xi + y\eta)} dx dy.$$

Posant $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $r^2 = x^2 + y^2$, i integrant en polars,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}} e^{-2\pi i r \rho \cos \theta} r dr d\theta = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ik\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}} 2\pi J_0(2\pi \rho r) r dr, \end{aligned}$$

on J_0 és la funció de Bessel

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \theta} d\theta.$$

Amb el canvi $s = 2\pi r$,

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\frac{k}{2\pi}\sqrt{s^2+4\pi^2 z^2}}}{\sqrt{s^2+4\pi^2 z^2}} J_0(s\rho) s ds.$$

Utilitzant l'equació descrita a [18] amb $a = \frac{k}{2\pi}$, $\beta = 2\pi z$, aquesta transformada és

$$\begin{aligned} &\frac{i}{2} \frac{e^{ikz\sqrt{1-\lambda^2\rho^2}}}{k\sqrt{1-\lambda^2\rho^2}}, \rho \leq \frac{1}{\lambda}, \\ &\frac{1}{2} \frac{e^{-kz\sqrt{\lambda^2\rho^2-1}}}{k\sqrt{\lambda^2\rho^2-1}}, \rho \geq \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Recordem que per obtenir K_z cal canviar z^2 per $(z' - z)^2$, i aleshores $K_z = -2\frac{\partial}{\partial z'}$ en $z' = 0$.

Llavors \widehat{K}_z és $-2\frac{\partial}{\partial z}$, de l'expressió anterior, això és

$$\begin{aligned} \widehat{K}_z(\xi, \eta) &= e^{ikz\sqrt{1-\lambda^2(\xi^2+\eta^2)}}, \quad \text{si } \lambda^2(\xi^2 + \eta^2) < 1, \\ \widehat{K}_z(\xi, \eta) &= e^{-kz\sqrt{\lambda^2(\xi^2+\eta^2)-1}}, \quad \text{si } \lambda^2(\xi^2 + \eta^2) > 1. \end{aligned} \tag{0.39}$$

Fixem-nos que efectivament $\widehat{K}_z \rightarrow 1$ quan $z \rightarrow 0$, tal com correspon a una unitat aproximada.

Per tant

$$U_z(x, y) = \int_{\lambda^2(\xi^2 + \eta^2) < 1} \widehat{U}_0(\xi, \eta) e^{ik\sqrt{1-\lambda^2(\xi^2 + \eta^2)}z} e^{2\pi i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta + \int_{\lambda^2(\xi^2 + \eta^2) > 1} \widehat{U}_0(\xi, \eta) e^{-k\sqrt{\lambda^2(\xi^2 + \eta^2) - 1}z} e^{2\pi i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta. \quad (0.40)$$

Es pot arribar a aquesta mateixa expressió escrivint l'equació de Helmholtz en freqüència.

En efecte, a partir de

$$U(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{U}_z(\xi, \eta) e^{2\pi i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta,$$

es té

$$\Delta U + k^2 U = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial^2 \widehat{U}_z}{\partial z^2} + \widehat{U}_z(\xi, \eta) \left[(2\pi i)^2 (\xi^2 + \eta^2) + k^2 \right] \right) e^{2\pi i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta$$

de manera que l'equació de Helmholtz equival a

$$\frac{\partial^2 \widehat{U}_z}{\partial z^2} + \widehat{U}_z(\xi, \eta) \left[-4\pi^2 (\xi^2 + \eta^2) + k^2 \right] = 0.$$

És a dir

$$\frac{\partial^2 \widehat{U}_z}{\partial z^2} = -k^2 (1 - \lambda^2 \rho^2) \widehat{U}_z.$$

La solució general d'aquesta equació és

$$\widehat{U}_z(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) e^{kz\sqrt{1-\lambda^2\rho^2}} + B(\xi, \eta) e^{-kz\sqrt{1-\lambda^2\rho^2}}.$$

Una solució d'aquesta equació és precisament

$$\begin{aligned} \widehat{U}_z(\xi, \eta) &= \widehat{U}_0(\xi, \eta) e^{ikz\sqrt{1-\lambda^2(\xi^2 + \eta^2)}}, \quad \text{si } \lambda^2(\xi^2 + \eta^2) < 1 \\ \widehat{U}_z(\xi, \eta) &= \widehat{U}_0(\xi, \eta) e^{-kz\sqrt{\lambda^2(\xi^2 + \eta^2) - 1}}, \quad \text{si } \lambda^2(\xi^2 + \eta^2) > 1 \end{aligned} \quad (0.41)$$

que com hem vist a (0.39) és $\widehat{K}_z \widehat{U}_0$.

Tornant a (0.40), la interpretació és la següent. El primer terme representa la superposició d'ones planes, una per a cada ξ, η amb $\lambda^2(\xi^2 + \eta^2) < 1$; el segon terme, en canvi, representa la superposició d'ones *evanescentes* que tendeixen a desaparèixer per a z gran;

Tot i que en aquest treball no ho necessitem, comentem a continuació un aspecte estrictament matemàtic relacionat amb les fórmules per als camps difractats que acabem de veure. Suposant que la difracció té lloc en $z = 0$, hem vist que totes les components $U(x, y, z)$ dels camps \vec{E}, \vec{B} vénen donades en $z > 0$ per (0.37). En conseqüència, les mateixes expressions són certes per als camps \vec{E}, \vec{B} , és a dir,

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{ikR}}{R} \left(1 + \frac{i}{kR} \right) \frac{z}{R} \vec{E}(x', y', 0) dx' dy', \quad z > 0$$

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{ikR}}{R} \left(1 + \frac{i}{kR}\right) \frac{z}{R} \vec{B}(x', y', 0) dx' dy'. z > 0.$$

Ara bé, hom pot comprovar que si es defineix els camps d'aquesta forma per a camps arbitraris $\vec{E}(x', y', 0), \vec{B}(x', y', 0)$ en $z = 0$ no es compleixen necessàriament les equacions de Maxwell en $z > 0$. Això significa que la restricció dels camps \vec{E}, \vec{B} a $z = 0$ compleixen de fet certes condicions de comptabilitat que fan que les expressions anteriors sí que compleixin les equacions de Maxwell. Dit d'una altra manera, les equacions de Maxwell tenen traça en $z = 0$. Es pot veure que aquestes condicions de comptabilitat sobre $\vec{E}(x', y', 0), \vec{B}(x', y', 0)$ vénen expressades en termes d'integrals singulars en el domini espacial i per multiplicadors del tipus de Riesz, actuant sobre $\widehat{\vec{E}}, \widehat{\vec{B}}$, en el domini freqüencial. Utilitzant aquestes condicions es pot arribar a altres expressions

$$(\vec{E}, \vec{B})(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}^2} (\vec{E}, \vec{B})(x', y', 0) \times (L, M)(x - x', y - y', z) dx' dy',$$

(no necessàriament $\vec{E}(x, y, z), \vec{B}(x, y, z)$ s'expressen només en termes de $\vec{E}(x', y', 0), \vec{B}(x', y', 0)$) on els nuclis involucrats L, M sí que compleixen les equacions de Maxwell.

Capítol 1

Generació del senyal de referència Z en encoders incrementals d'alta resolució

1.1 El model bàsic d'interacció entre disc i màscara ignorant la difracció. Convolució òptica.

Primer de tot cal descriure matemàticament la interacció entre disc i màscara, tant per generar els senyals A, B com per la Z . Les obertures practicades en el disc giratori que són il·luminades les descrivim mitjançant una funció $f(x)$ de la posició angular x . Més precisament, f és una funció positiva i les obertures de la màscara corresponen al subgraf de f . Les obertures practicades a la màscara, a distància z del disc, les descrivim anàlogament com el subgraf d'una altra funció positiva g , que suposarem que té suport compacte, donat per la mida de la màscara fixa. En principi f, g podrien ser arbitràries.

Ara intentem descriure de la forma més senzilla possible el senyal mesurat pels fotodíodes en cada instant. Els fotodíodes [19] reben un senyal proporcional a la intensitat de la llum rebuda. Aquest tipus d'element consisteix en un semiconductor (normalment Silici), construït amb estructura d'unió PN o PIN, la qual és sensible a la llum en un cert rang de longituds d'ona λ . Idealment, cada fotó que incideix sobre l'element hauria d'excitar un electró, i per tant, un flux de llum crea una intensitat de corrent elèctrica. Aquesta intensitat és proporcional a la potència de la llum incident P ,

$$I = \frac{\eta_{qe} q}{h\nu} P,$$

on η_{qe} és l'eficiència quàntica del fotodíode, q la càrrega de l'electró, h la constant de Planck i ν la freqüència òptica.

Suposarem que la llum és una ona plana monocromàtica amb direcció (vector de Poynting) n perpendicular al disc i màscara. En aquest cas, la potència és constant en tots els punts a una mateixa distància z en la direcció n . Si ignorem l'efecte de la difracció, arribem a la conclusió que el senyal mesurat pels fotodíodes en cada instant t és proporcional a l'àrea comuna determinada per les obertures de disc i màscara en aquell instant. El gir del disc, el qual suposem uniforme, correspon a canviar $f(x)$ per $f(x - t)$. Per tant, el senyal generat és

$$CO(f, g)(t) = \int \min[f(x - t), g(x)] dx = \int \min(f(x), g(x + t)) dx, \quad (1.1)$$

quelcom que podríem anomenar *convolució òptica*. Com a funció de f, h la CO és invariant per translacions però no és lineal, fet que en fa difícil el seu estudi matemàtic. Hem dit abans que a la indústria dels encoders és un fet universal que al disc hi ha un tren d'impulsos rectangulars. L'explicació d'això és segurament de caràcter econòmic, però el fet és que des del punt de vista de la modelització matemàtica també té una explicació clara. Si f només pren els valors 0 i 1, com és el cas d'un tren d'impulsos rectangulars, i suposem que $0 \leq g \leq 1$ (que correspon a dir que les alçades de les obertures de la màscara no depassen les del disc), aleshores $\min[f(x - t), g(x)] = f(x - t)g(x)$ i passem a tenir bàsicament la convolució

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t)g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x + t) dx \quad (1.2)$$

que com hem vist al Capítol 0 és quelcom manipulable utilitzant transformació de Fourier.

Així, les obertures del disc que serviran per generar els senyals A, B , etc. és el tren de N impulsos rectangulars equiespaiats

$$f(x) = \sum_{n=1}^N I(x - 2n\tau), \tau = \frac{2\pi}{2N},$$

on I és la funció característica de $[0, \tau]$. A la Figura 1.1 es pot veure aquesta funció representada com una funció impuls.

1.2 Generació del senyal Z

Recordem que el senyal de referència Z té per objectiu bàsic fer de *compta-revolucions*. A cada volta s'ha de generar, òpticament, un senyal que faci aquesta funció, per exemple que tingui un peak i només un en cada volta, en una de les N posicions detectades per l'encoder. Evidentment, el més senzill seria practicar una obertura rectangular en el disc i una altra de la mateixa mida

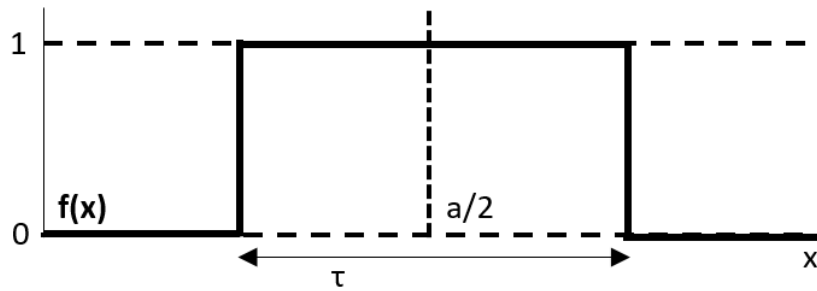


Figura 1.1: **Funció $f(x)$ corresponent a una obertura del disc.** Aquesta funció impuls centrada en $a/2$ és la funció característica I que es repeteix al llarg de tot el disc com $f(x) = \sum_{n=1}^N I(x - 2n\tau)$.

a la màscara. Quan la resolució de l'encoder comença a ser alta, però, l'obertura hauria de ser tan estreta que la intensitat de llum que hi passa seria indetectable pel fotodiode. Per això, cal idear un nou mètode per crear un impuls tan alt i concentrat com sigui possible, quan el disc dóna una volta sencera.

Amb aquesta finalitat, la màscara porta unes obertures rectangulars no equiespaides, que escriurem sota la forma

$$g(x) = \sum_k I(x - 2n_k\tau),$$

amb uns certs enters $n_k \leq N$. De fet, com que s'ajusta a les dimensions de la màscara (on hi caben un finit nombre M d'obertures), implica que $n_k \leq M$, amb M molt menor que N , i en tot cas $M \leq \frac{N}{2}$. A la Figura 1.2 es mostra un exemple de com seria la distribució d'una funció $g(x)$ i com s'aplica al senyal Z en forma d'obertures.

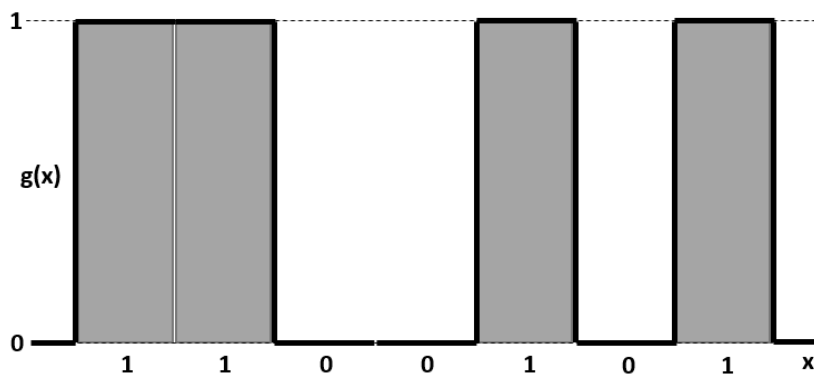


Figura 1.2: **Funció $g(x)$ associada al senyal de referència Z.** Exemple de senyal de referència Z, el qual genera un conjunt finit de polsos no equiespaïats. Associem 1 a obertures i 0 a zones opaques, referent a com s'imprimeix aquesta seqüència en les pistes corresponents de disc i màscara.

El disc porta incorporada una altra rèplica de g . En cada instant t les obertures s'escriuen com $g(x-t)$. En la situació que ens interessa podem evidentment ignorar la difracció, de manera que el senyal que genera el fotodiode encarregat de Z és l'*autocorrelació*

$$g * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)g(x) dx.$$

És evident que el màxim d'aquesta funció autocorrelació serà quan ambdues funcions coincideixin, és a dir, quan no hi hagi desplaçament entre elles, $t = 0$. El que voldríem és que $g * g$ fos el més petit possible per als altres valors angulars observats per l'encoder, $t = k \frac{2\pi}{N}$, diferents de zero.

Un model equivalent i simplificat consisteix a substituir g per un codi binari $A = (a_n)_{n=1}^M$ de zeros i uns, posant $a_n = 1$ si $n = n_k$ i 0 si no; és a dir, $g(x) = \sum_{n=1}^M a_n I(x - 2n\tau)$. Aleshores, l'objecte d'estudi és l'autocorrelació discreta d'aquest codi binari

$$A * A(k) = S(k) = \sum_{i=k+1}^M a_{i-k}a_i, k = 0, \dots, M-1.$$

Si redefinim a_n posant $a_n = 0$ si $n \notin [1, M]$, podem considerar

$$S(k) = \sum_i a_{i-k}a_i = \sum_i a_i a_{i+k},$$

com a funció par en k . Observem que no es tracta per tant de l'anomenada autocorrelació circular, on considerariem A com a senyal M -periòdica. La pregunta, és ara, saber com cal triar A per tal que el seu valor màxim $S(0)$ (el nombre d'1's que conté, anomenat *màxim d'intensitat central*) estigui molt per sobre dels altres valors $S(k), k \neq 0$. Per quantificar i formular el problema de forma precisa, introduïm

$$\sigma = \max_{k \neq 0} S(k),$$

que és òbviament $< S(0)$ i introduïm dos paràmetres possibles de concentració:

- **Senyal efectiva (Màxima diferència)** : Es defineix *senyal efectiva* a la diferència entre el primer i el segon màxim del senyal de referència, $SE = S_0 - \sigma$. Aquesta és la quantitat de senyal útil si situem el llindar electrònic de comparació a l'altura del segon màxim.
- **Factor K**: Aquest factor es defineix per $K = S_0/\sigma$. Com més gran és aquest paràmetre millor serà la relació entre el primer i el segon màxim. Si considerem com soroll l'estructura del senyal en la part externa al pols central, el factor seria equivalent a la relació senyal-soroll.

Treballarem amb el segon, per tant volem triar A de forma que

$$K(A) = \frac{S(0)}{\sigma}, \quad (1.3)$$

sigui el més gran possible entre tots els codis binaris A de longitud M (i que tinguin més d'un 1, amb $\sigma \geq 1$). Podem considerar

$$K(M) = \max(K(A)),$$

on A té longitud M i $\sigma > 0$.

El problema matemàtic consisteix a avaluar com creix $K(M)$ i el problema pràctic consisteix a trobar explícitament un codi A per al qual $K(A)$ sigui l'òptim o proper a l'òptim. Per a valors de M petits, hom pot examinar per força bruta els 2^M codis de longitud M , i constatar que no hi ha un únic codi òptim.

A la secció següent veurem que, reformulat, aquest problema és equivalent a dos problemes ben coneguts.

1.3 Golomb Rulers i Sidon sets

La reformulació passa per considerar el conjunt de posicions on hi ha un 1

$$G = \{i = 1, 2, \dots, M : a_i = 1\}.$$

Llavors $S(k)$ és el cardinal del conjunt $G \cap (G - k)$, amb la qual cosa veiem que el problema té a veure amb *difference sets* [20], un camp molt estudiat en teoria additiva de nombres.

Considerem la condició $\sigma = 1$, és a dir, $S(k) = 0, 1$ si $k \neq 0$. Això significa que per a cada k hi ha com a molt un i tal que $a_{i+k} = a_i = 1$, és a dir, $i + k, i \in G$. Això vol dir exactament que totes les diferències $i - j, i, j \in G, i \neq j$ són diferents. Aquesta és la definició d'un *Golomb Ruler* de longitud M , un subconjunt

$$G = \{i_1 = 1 < i_2 < \dots < i_K = M\},$$

de $\{1, 2, \dots, M\}$ per al qual totes les diferències són diferents. M s'anomena la llargada i K la mida de G . A internet es poden trobar molts articles i taules referents a Golomb Rulers [21].

Aquests conjunts van aparèixer en radioastronomia als anys 40 (les distàncies entre radiostacions col·locades en una línia recta convé que segueixin un ruler per a minimitzar certs paràmetres), i també en teoria de codis autocorrectors.

El nom de *ruler* s'utilitza perquè si G ho és, posant en un llistó les marques corresponents als i_k es poden mesurar llargades amb aquest regle d'una sola manera (en aquest sentit, els regles habituals són redundants, perquè una determinada longitud la podem mesurar utilitzant marques diferents). Un ruler s'anomena *complet* si el conjunt de diferències és exactament $\{1, 2, \dots, M\}$. Una interpretació diferent i curiosa que es troba a internet és pensar en una gran sala rectangular de conferències que hom voldria que fos convertible, a base de col·locar unes parets mòbils, en

sales de capacitats més petites però diferents. Si les parets mòbils es col·loquen exactament en els punts indicats per un Golomb ruler, optimitzem els costos.

El problema a resoldre és: donada una llargada M , quin és el Golomb Ruler més gran que es pot obtenir? Podem considerar

$$F(M) = \max K,$$

on el màxim és entre tots els Golomb rulers de longitud M , i el problema és com abans: determinar com creix $F(M)$ i explicitar rulers òptims.

És molt fàcil fer una primera estimació de $F(M)$. El nombre de diferències $i - j, i, j \in G$ no nul·les és exactament

$$\frac{k(k-1)}{2},$$

i com que totes han de ser diferents i són nombres entre 1 i M , tindrem

$$\frac{k(k-1)}{2} \leq M,$$

d'on s'obté

$$F(M) \leq \sqrt{2M} + 1.$$

Una reformulació essencialment equivalent dels Golomb rulers és en termes de *Sidon sets*. Un *conjunt de Sidon* és un conjunt G de nombres enters tals que totes les sumes $i+j, i \neq j, i, j \in G$ són diferents. Evidentment és un concepte equivalent al de Golomb ruler. Sota aquesta formulació, aquests conjunts, en general infinits, van ser introduïts per Sidon en relació a sèries de Fourier; les sèries de Fourier amb freqüències en un conjunt de Sidon tenen propietats especials.

Erdos i Turan [22] demostraren que

$$F(M) \leq \sqrt{M} + o(\sqrt{M}),$$

mentre que construccions explícites de Singer [23] i Rusza [24] provaren que

$$F(M) \geq \sqrt{M} - o(\sqrt{M}),$$

de manera que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{F(M)}{\sqrt{M}} = 1.$$

És a dir, els Golomb Ruler òptims tenen aproximadament \sqrt{M} uns.

Tornant a $K(M)$, el cas particular $\sigma = 1$ és el que ens ha dut a $F(M)$, és a dir,

$$K(M) \geq F(M),$$

per tant en principi podria ser que $K(M)$ fos asimptòticament més gran que \sqrt{M} . En una comunicació privada, però, Noga Alon ens ha fet arribar una prova del fet que $K(M)$ continua essent com \sqrt{M} .

La conclusió rellevant per a nosaltres és que el senyal A que generi el senyal Z més potent possible dins de la mida M donada per les mides del fotodíode i la resolució, és un tren d'impulsos rectangulars

$$g(x) = \sum_{n=1}^M a_n 1(x - 2n\tau),$$

amb $a_n = 1$ si $n \in G$, $a_n = 0$ si $n \notin G$, on G és un Golomb ruler òptim de longitud M i mida aproximadament \sqrt{M} .

Mitjançant diferents projectes web, s'ha arribat a trobar el Golomb Ruler òptim per a $k = 27$ marques, el qual té una longitud de $M = 553$. La taula completa es mostra a l'Annex 1.

Capítol 2

Generació de senyals sinusoidals òptiques. Primera solució sense tenir en compte la difracció.

Tal com s'ha esmentat abans, els encoders òptics rotatius de tipus incremental juguen un dels papers més importants en aquest sector. El fet de poder calcular, alhora, velocitats i posicions relatives amb un alt grau de resolució fan que la indústria s'hagi centrat en com millorar aquest tipus de sensor. A més a més, aquest tipus d'encoder presenta alguns dels reptes més difícils del sector, ja que quan s'augmenta el nombre d'obertures per volta, la mida de les obertures es redueix, i es fa crítica la precisió amb la qual s'ha de fabricar el sensor. En el moment que es treballa amb obertures de l'ordre de desenes de micres, implica que la distància (AG) entre disc i màscara haurà de ser també de l'escala micromètrica, esdevenint un fet molt complicat en el procés de fabricació, i que alhora pot afectar a l'operabilitat de l'encoder a llarga durada. Així, que a l'hora de fabricar un encoder d'alta resolució, hi ha dues opcions per abastar el problema: tractar de buscar un mètode que ens permeti allargar el gap tot mantenint l'operabilitat del sensor, o d'altra banda, buscar un sistema que permeti multiplicar la resolució a partir de pocs impulsos per volta. Aquest apartat es centra en la segona opció, focalitzant-se amb un mètode anomenat interpolació electrònica.

2.1 Encoder incremental sense interpolació electrònica

En primer lloc, analitzem com funciona un encoder sense interpolació, per tal d'entendre alguns conceptes bàsics de com funciona el sensor. En aquest cas, es té un disc amb N obertures rectangulars i una màscara que analitza cadascun dels senyals amb obertures idèntiques a les del

disc. És fàcil de comprovar, si s'obvien els efectes de difracció, que els senyals A i B generen un senyal periòdic triangular quan el disc gira; fet que es pot comprovar mitjançant la convolució entre dos polsos. Analitzant-ho amb detall, considerem $f(x)$ com la funció d'un sol pols associat a una obertura del disc, i $g(x)$ com una funció idèntica, però associada a una obertura de la màscara, de manera que

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0, & t < -a/2 \\ 1, & -a/2 \leq t \leq a/2 \\ 0, & t > a/2. \end{cases}$$

Quan el disc giri respecte a la màscara, el senyal que obtindrà cada fotodíode serà proporcional a $Q(f * g)(t)$, on Q són les obertures que té cada canal de la màscara. Calculant la convolució entre ambdues funcions es té

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 0, & t < -a \\ \int_{-a/2}^{t+a/2} dx = t + a, & -a \leq t \leq 0 \\ \int_{t-a/2}^{a/2} dx = a - t, & 0 \leq t \leq a \\ 0, & t > a. \end{cases}$$

El següent pas és considerar que en realitat s'il·luminen uns quants polsos al disc, expressats com $f(x) \rightarrow \sum'_n f(x - na)$. Aquest fet fa que en fer la convolució, es generi un tren de senyals triangulars. A partir d'aquí, per generar el tren de polsos, manualment es regula un voltatge llinar a $V_{TH} = 1/2V_{pp}$ (on V_{pp} és el Voltatge Pic-a-Pic) mitjançant un potenciòmetre, tal que si $V_{in} \geq V_{TH} \Rightarrow V_{out} = V$ i si $V_{in} < V_{TH} \Rightarrow V_{out} = 0$, mitjançant un comparador Schmitt Trigger [25]. S'agafa la meitat de V_{pp} amb l'objectiu de què el tren de polsos tingui un Duty-Cycle d'un 50%, el qual vol dir que mig període doni voltatge V i l'altre mig període 0. A la Figura 2.1 s'ha graficat un cas com a exemple.

De manera anàloga es fa el tractament per a cada canal, els quals estan inscrits amb el seu desfasament corresponent. És important, llavors, que la il·luminació de la màscara sigui uniforme, de manera que a tots els canals hi arribi una potència de llum semblant, i així tots els Duty-Cycles es mantinguin el més proper possible al 50%.

El senyal de referència Z està imprès tal com s'ha descrit al Capítol 1, però electrònicament es genera un pols de llargada angular $a = 2\pi/N$ al voltant del màxim central, coincident amb un pols d'algun dels dos canals A o B.

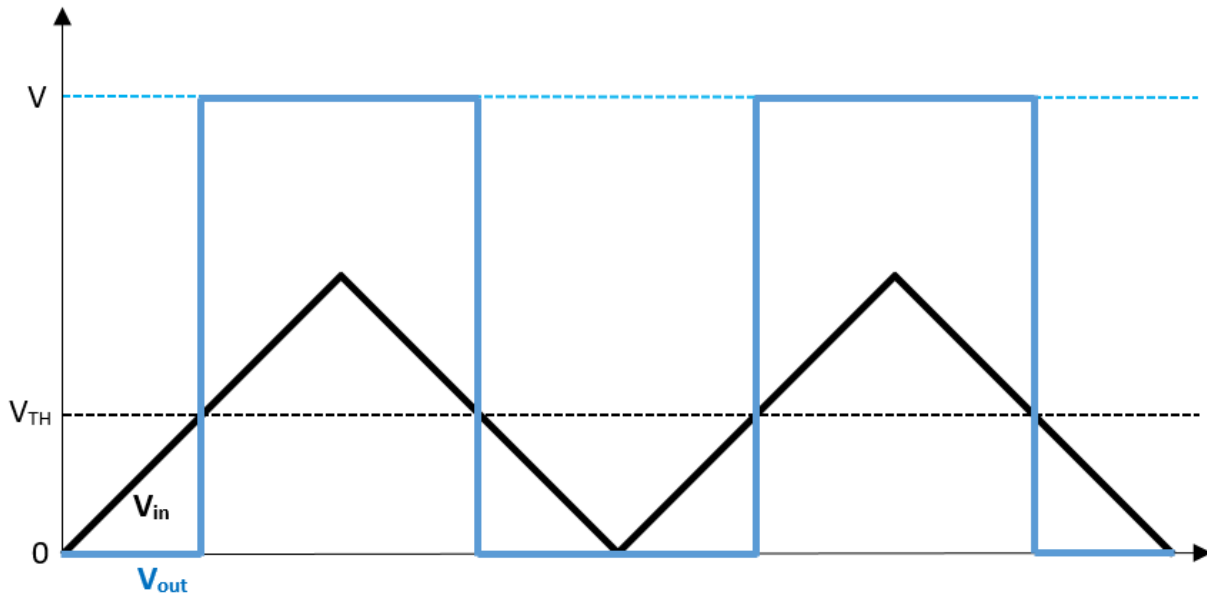


Figura 2.1: **Obtenció de tren de polsos a partir de senyal triangular.** Per convolució entre dues obertures rectangulars s'obté un senyal periòdic triangular. Depenent de si el voltatge està per sobre d'un voltatge llindar V_{TH} , es determina si el senyal output esdevé V o 0

2.2 Encoder incremental sin/cos amb interpolació electrònica

Els encoders incrementals aptes per treballar amb interpolació electrònica s'anomenen del tipus sin/cos [26], ja que els senyals amb els quals necessita treballar el xip interpolador són sinusoidals. Concretament, del fotodíode obtindrem un senyal anomenat SIN i un altre idèntic però desplaçat 90° anomenat COS. Aquests senyals s'apliquen com a inputs d'un xip interpolador [9], el qual s'encarrega de fer un mostratge d'ambdós senyals per obtenir trens de polsos. L'operació que fa l'interpolador és mesurar l'arctangent entre ambdós senyals i determinar quin punt de la sinusoidal s'està mesurant. A continuació s'explica amb més detall.

Abans, però, esmentar que existeix un primer mostratge del senyal, el qual es pot realitzar amb un mètode molt simple. Primer de tot, recordem que la resolució N és el nombre d'obertures gravades de forma periòdica en la pista del disc. Al girar el disc es generen els dos senyals SIN i COS periòdics. Per cada període és fàcil diferenciar 4 quadrants segons si els senyals estan per sobre o per sota d'un $V_{TH} = 1/2V_{pp}(SIN)$, tal com es veu a la Figura 2.2. D'aquesta manera ja es pot fer una primera divisió del senyal i una primera multiplicació bàsica de la resolució.

A partir d'aquí, es calcula l'increment angular de gir mitjançant l'equació

$$\phi_{incr}[deg] = \frac{360}{4N} \cdot incr + \Phi_0,$$

on $incr$ és el nombre de quadrants contats i Φ_0 l'angle a l'origen. Cada cop que es registra que

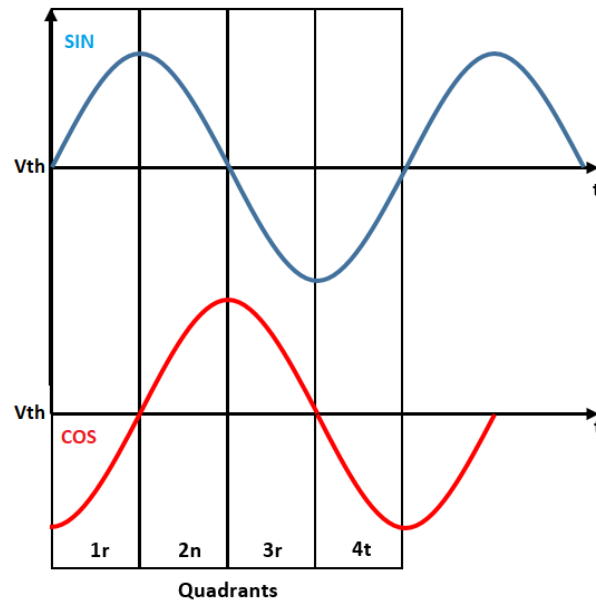


Figura 2.2: **Interpolació per quadrants.** Divisió en quatre quadrants d'un període de senyal segons tinguem SIN i/o COS en positiu o negatiu. Per període s'obté que tenim un total de $4N$ quadrants

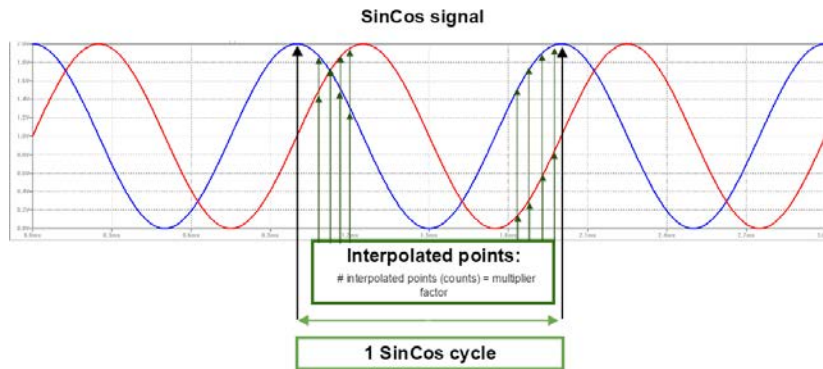
s'ha avançat $incr$ es genera un senyal 1 o 0, de manera que cada dos $incr$ s'obté un pols. En aquest cas bàsic, es tenen només quatre quadrants, de manera que la resolució del senyal queda multiplicada per dos.

En introduir els senyals sinusoidals SIN i COS al xip interpolador, es calcula l'angle amb una resolució molt més acurada mitjançant

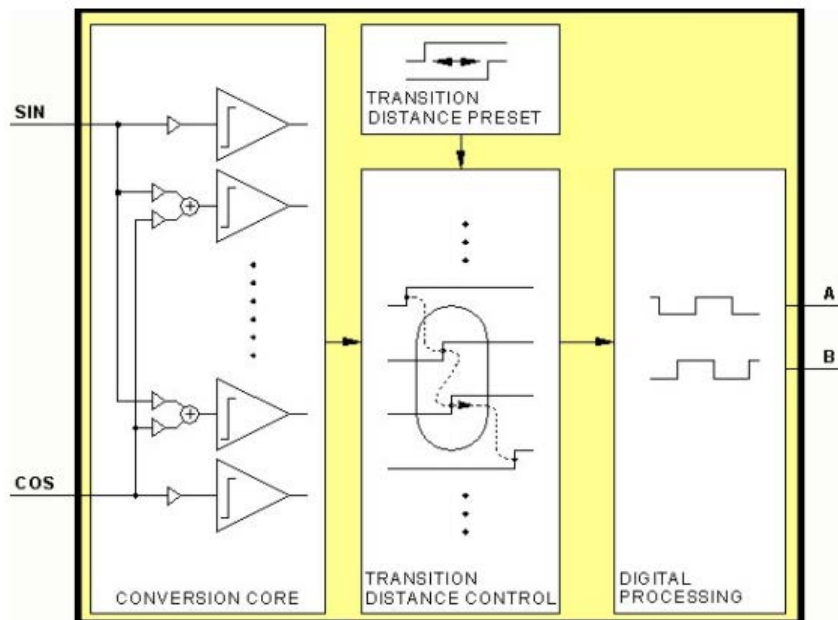
$$\phi_{SIN',COS'}[deg] = \begin{cases} 90^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{COS'}{SIN'}\right) & \text{si } SIN' \geq 0 \\ 270^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{COS'}{SIN'}\right) & \text{si } SIN' < 0. \end{cases}$$

On $SIN' = SIN - V_{Off}$ i $COS' = COS - V_{Off}$ són els senyals originals als quals se'ls ha restat el voltatge d'Offset, corresponent a V_{TH} .

El xip està dissenyat de forma que es pugui configurar de diferents maneres segons el grau d'interpolació que es desitgi. Les opcions en el cas del xip utilitzat a Hohner Automáticos són de $\Gamma = x4, x5, x8$ o $x10$, depenent de per quant es vol multiplicar la resolució N . Per fer-ho s'utilitza el mètode electrònic anomenat *Flash Conversion* [27], el qual consisteix en fragmentar una funció tangent en Γ segments i associar a cadascun a un voltatge. Cadascun d'aquests voltatges està connectat a un comparador que s'activa si el valor d'entrada $V = \tan(SIN'/COS')$ supera el seu voltatge associat. Segons la configuració del xip, quan un cert nombre de comparadors s'activen, es genera un 1 o un 0 en el senyal A o B, de manera que es va generant una seqüència de polsos equiespaiats (amb l'ajuda d'un *Edge Distance Control*). A la Figura 2.3 es pot veure un diagrama de blocs del circuit i un esquema de com es mostreja el senyal.



(a) Càlcul d'angle amb alta resolució



(b) Diagrama de bloc de xip interpolador

Figura 2.3: **Mètode interpolador de senyal.** a) Mètode per obtenir l'alta resolució angular fent la tangent entre diferents punts dels senyals sinusoidals SIN i COS. Ref.: <http://doc.ingeniamc.com/motionlab/user-manual/configuring-your-drive/actuator/sincos-encoder> b) Esquema del circuit d'un interpolador òptic on els comparadors s'encarreguen d'anar generant els trens de polsos A i B. Ref.: http://www.ichaus.de/upload/pdf/WPTen_High-Precision_Interpolation_140124.pdf.

És important veure que el xip pot arribar a alts graus d'interpolació, però cal parar atenció a què si els senyals *SIN* i *COS* no tenen una forma sinusoidal molt ben definida els senyals A i B no es podran generar adequadament. Sobretot poden aparèixer problemes de Duty-Cycle (polsos amples o estrets), o fins i tot, errors en el comptatge de polsos. Per aquest motiu, el segon problema plantejat en aquesta tesi es centra a trobar un mètode robust que permeti generar senyals sinusoidals les més acurades possibles, com a output dels encoders incrementals i input dels xips interpoladors. Hi ha diferents maneres d'aconseguir-ho, però en el nostre cas s'analitza com fer-ho directament de forma òptica, modificant només el perfil de les obertures impreses a la màscara. En aquest capítol aportem una solució *ignorant la difracció*. Tot i que hom podria pensar que això és poc realista, perquè evidentment que hi ha difracció en els encoders. Al capítol següent veurem que aquesta solució funciona a la realitat, amb difracció, quan el gap z entre disc i màscara és triat convenientment.

2.3 Plantejament del problema

Recordem de la Secció 1.1 que el tren de N impulsos rectangulars equiespaiats del disc giratori, corresponent a les obertures il·luminades, s'escriu

$$f(x) = \sum_{n=1}^N I(x - 2n\tau), \tau = \frac{2\pi}{2N},$$

on I és la funció característica de $[\frac{a}{4}, \frac{3a}{4}]$, on $a = \frac{2\pi}{N}$, la qual està graficada a la Figura 2.4.

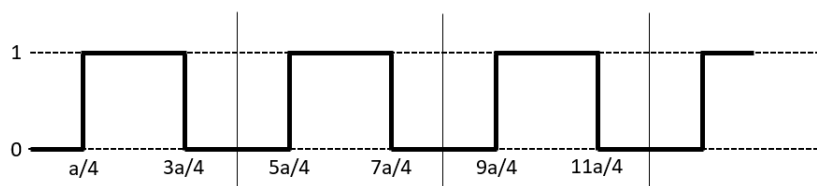


Figura 2.4: **Tren de polsos.** Funció $f(x)$ associada al disc.

Les obertures de la màscara és el subgràfic d'una funció positiva g amb suport compacte. Recordem també que si s'ignora la difracció, i si $g \leq 1$, el senyal captat pel fotodíode és proporcional a

$$f_p * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(x - t)g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(x)g(x + t) dx, \quad (2.1)$$

on f_p és la a -perioditzada de f , $a = \frac{2\pi}{N}$. Per conveniència del càlcul farem una translació en t i suposarem que f_p és la funció a -periòdica que en l'interval $[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]$ coincideix amb la funció

característica de $[-\frac{a}{4}, +\frac{a}{4}]$; com que f_p és par, l'expressió anterior es tracta de la convolució de f_p amb g .

L'objectiu d'aquest capítol és buscar una g apropiada, que convolucionada amb f_p doni una funció sinusoidal/cosinusoidal, positiva, amb el mateix període bàsic. La buscarem també par, i plantegem

$$(f_p * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(x-t)g(x) dx = A(1 + \cos \frac{2\pi}{a}t). \quad (2.2)$$

2.4 Solució Analítica

Per a resoldre aquest problema analíticament, utilitzarem la transformada de Fourier, ja que aquesta és l'eina adequada per a manipular les operacions lineals invariants per translació, les convolucions.

La convolució de f_p amb g és evidentment a -periòdica,

$$(f_p * g)(t+a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(x-t-a)g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(x-t)g(x) dx = (f_p * g)(t),$$

i per tant, té un desenvolupament

$$(f_p * g)(t) = \sum_n c_n(f_p * g)e^{2\pi i \frac{n}{a}t}. \quad (2.3)$$

Els coeficients $c_n(f_p * g)$ són

$$c_n(f_p * g) = \frac{1}{a} \int_0^a (f_p * g)(t)e^{-2\pi i \frac{n}{a}t} dt = \frac{1}{a} \int_0^a \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(x-t)g(x) dx \right\} e^{-2\pi i \frac{n}{a}t} dt,$$

i aplicant Fubini,

$$\begin{aligned} c_n(f_p * g) &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^a f_p(x-t)e^{-2\pi i \frac{n}{a}(t-x)} dt \right\} g(x)e^{-2\pi i \frac{n}{a}x} dx = \\ &= c_n(f_p) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-2\pi i \frac{n}{a}x} dx = c_n(f_p)\hat{g}\left(\frac{n}{a}\right). \end{aligned}$$

En definitiva, els coeficients de la sèrie de Fourier de la convolució són el producte dels dos coeficients de Fourier: el de f_p com a funció periòdica i el de g com a funció amb suport compacte.

$$c_n(f_p * g) = c_n(f_p)\hat{g}\left(\frac{n}{a}\right).$$

Calculem $c_n(f_p)$ utilitzant un període com el mostrat a la Figura 2.4,

$$\text{per a } n \neq 0 \quad c_n(f_p) = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{4}}^{+\frac{a}{4}} e^{-2\pi i \frac{n}{a}t} dt = \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{(-1)^k}{\pi n}, & \text{si } n = 2k+1 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\text{per a } n = 0 \quad c_0 = \frac{1}{a} \frac{a}{2} = \frac{1}{2}. \quad (2.5)$$

L'objectiu és obtenir una solució sinusoidal positiva

$$(f_p * g)(t) = 1 + \cos(2\pi \frac{t}{a}) = 1 + \frac{1}{2}(e^{2\pi i \frac{t}{a}} + e^{-2\pi i \frac{t}{a}})$$

amb una tria de g convenient, positiva. Comparant ambdós desenvolupaments, veiem que g ha de complir

$$c_n(f_p)\hat{g}(\frac{n}{a}) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } n = \pm 1 \\ 0, & \text{si } n \neq 0, \pm 1. \end{cases}$$

Com que els $c_n(f_p)$ són zero per als n parells diferents de zero, això implica que la transformada de Fourier de g ha de complir

$$\hat{g}(\frac{n}{a}) = \begin{cases} \hat{g}(0) = 2 \\ \hat{g}(\pm \frac{1}{a}) = \frac{\pi}{2} \\ \hat{g}(\frac{n}{a}) = 0 \text{ per a } n \text{ senar, } n \neq \pm 1 \\ \text{cap condició per a } n \text{ parell, } n \neq 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Considerem la funció més senzilla que s'anul·la en els punts $\frac{n}{a}$ per a n senar, la qual és $\cos \frac{\pi}{2} a\xi$. De fet, té una factorització com a producte infinit [28]

$$\cos \frac{\pi}{2} a\xi = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{a^2 \xi^2}{(2k+1)^2}) = \prod_{n \text{ senar}} (1 - \frac{a\xi}{n}).$$

Com que no es vol que \hat{g} s'anul·li en els punts $\pm \frac{1}{a}$, factoritzem aquests zeros i provem amb

$$\hat{g}(\xi) = 2(\cos \frac{\pi}{2} a\xi) \frac{1}{(1 - a^2 \xi^2)} \quad (2.7)$$

(aquesta expressió està motivada pel fet que la transformada de Fourier d'una funció amb suport compacte és una funció entera amb aquesta expressió general). Amb això $\hat{g}(0) = 2$, mentre que en els punts $\pm \frac{1}{a}$ es té

$$\hat{g}(\pm \frac{1}{a}) = 2 \lim_{\xi \rightarrow \pm \frac{1}{a}} \left\{ (\cos \frac{\pi}{2} a\xi) \frac{1}{(1 - a^2 \xi^2)} \right\}.$$

Calculant el límit amb la regla de L'Hôpital es té

$$\hat{g}(\pm \frac{1}{a}) = \frac{\pi}{2},$$

com volíem. Així, la funció (2.7) compleix totes les condicions requerides, i en certa forma és la tria més senzilla. El següent pas és calcular $g(x)$ fent la Transformada de Fourier inversa de (2.7), és a dir

$$g(x) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x \xi} \cos\left(\frac{\pi}{2} a \xi\right) \frac{d\xi}{(1 - a^2 \xi^2)}.$$

Definim $k(x)$ per

$$k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x \xi} \frac{d\xi}{1 - \frac{\xi^2}{v^2}} = \frac{v}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x \xi} \frac{d\xi}{v - \xi} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x \xi} \frac{d\xi}{v + \xi} \right], \quad (2.8)$$

amb $v = \frac{1}{a}$, de forma que

$$g(x) = k\left(x + \frac{a}{4}\right) + k\left(x - \frac{a}{4}\right).$$

Per a calcular k partim de

$$\int \frac{e^{2\pi i x \xi}}{\xi} d\xi = \begin{cases} \pi i, & \text{si } x > 0 \\ -\pi i, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(la funció H de la dreta té derivada en el sentit de les distribucions $2\pi i \delta_0$, per tant té transformada \hat{H} que compleix $\xi \hat{H} = 1$; la funció $\frac{1}{\xi}$ no és, però, localment integrable i la integral s'ha d'interpretar en el sentit del valor principal). Aleshores,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i x \xi}}{v - \xi} d\xi = \begin{cases} -\pi i e^{2\pi i x v}, & \text{si } x > 0 \\ \pi i e^{2\pi i x v}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i x \xi}}{v + \xi} d\xi = \begin{cases} \pi i e^{-2\pi i x v}, & \text{si } x > 0 \\ -\pi i e^{-2\pi i x v}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Doncs, s'arriba a la solució

$$k(x) = \begin{cases} \frac{v}{2} (-\pi i e^{2\pi i x v} + \pi i e^{-2\pi i x v}) = v\pi \sin(2\pi x v), & \text{si } x > 0 \\ \frac{v}{2} (\pi i e^{2\pi i x v} - \pi i e^{-2\pi i x v}) = -v\pi \sin(2\pi x v), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Substituint a $g(x) = k\left(x + \frac{a}{4}\right) + k\left(x - \frac{a}{4}\right)$, com que

$$\sin\left(\frac{2\pi}{a}\left(x \pm \frac{a}{4}\right)\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{a} + \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos \frac{2\pi}{a} x,$$

resulta que $g(x) = 0$ si $x + \frac{a}{4} < 0$ o $x - \frac{a}{4} > 0$ i en $[-\frac{a}{4}, +\frac{a}{4}]$ val

$$g(x) = \frac{2\pi}{a} \cos\left(\frac{2\pi}{a} x\right). \quad (2.9)$$

En definitiva, s'obté com a g , llevat de constants, la funció que consisteix a prendre la part positiva de $\cos(2\pi\frac{x}{a})$. Òbviament, es poden afegir a g tantes a -traslladades seves com càpiguen a la finestra de la màscara, tal com es mostra a la Figura 2.5. Anomenem aquesta funció solució de primera generació, i la màscara que l'aplica es defineix com *Màscara de Primera Generació (M1G)*.

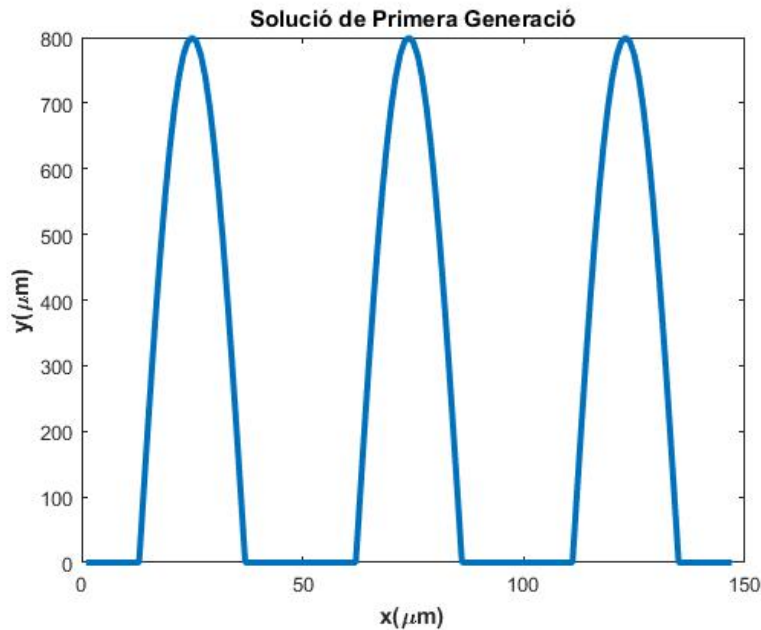


Figura 2.5: **Solució de Primera Generació.** Funció màscara $g(x)$ definida com la part positiva d'un cicle de sinusoidal. Paràmetres d'encoder incremental de $N=2500$ impulsos, període $a = 48\mu\text{m}$.

Per a reafirmar que aquesta màscara és bona, calculem ara directament la convolució de g i f_p . Com que f_p és la a -perioditzada de la funció f que en l'interval $[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]$ coincideix amb la funció característica de $[-\frac{a}{4}, +\frac{a}{4}]$ el resultat és la a -perioditzada de

$$\int_{-\frac{a}{4}}^{+\frac{a}{4}} (\cos \frac{2\pi}{a}x) f(x-t) dx = \int_{\max(-\frac{a}{4}, t-\frac{a}{4})}^{\min(\frac{a}{4}, t+\frac{a}{4})} \cos \frac{2\pi}{a}x dx.$$

Si $|t| \geq \frac{a}{2}$ és zero, mentre que si $0 \leq t \leq \frac{a}{2}$ val

$$\int_{t-\frac{a}{4}}^{\frac{a}{4}} \cos \frac{2\pi}{a}x dx = \frac{a}{2\pi}(1 + \cos \frac{2\pi}{a}t), \tag{2.10}$$

i anàlogament, si $-\frac{a}{2} \leq t \leq 0$. En definitiva, s'obté un múltiple de $1 + \cos \frac{2\pi}{a}t$, verificant així que la solució és perfectament vàlida.

2.5 Unicitat de la solució

En aquesta secció veurem que la solució que s'ha trobat és essencialment única. En primer lloc, recordem que la propietat buscada és equivalent a (2.6), les quals són condicions sobre $\hat{g}(\frac{n}{a})$. A l'equació (0.12) hem vist que aquests són, llevat de constants, els coeficients de la a -perioditzada de g . En conseqüència es tracta d'una propietat de la funció a -perioditzada de g . Evidentment, podem tenir dues funcions compactes positives amb la mateixa a -perioditzada. Per exemple, si repartim la massa de g en el seu suport en dues parts i cada part la traslladem un múltiple enter d' a obtindrem una altra funció amb la mateixa perioditzada.

Això significa que el que té sentit és preguntar-se per la unicitat de g entre totes les funcions positives suportades en un període, diguem $[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]$. Hem vist que $g(x) = \frac{2\pi}{a} \cos(\frac{2\pi}{a}x)$, $|x| \leq \frac{a}{4}$ compleix l'equació de convolució

$$(f_p * g)(t) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x-t)g(x) dx = 1 + \cos \frac{2\pi}{a}t, t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2. *La funció g és l'única funció positiva amb suport en $[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]$ que compleix aquesta equació.*

La demostració és elemental. Sigui h una solució positiva amb suport a $[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]$ que també compleixi l'equació; considerem $u = h - g$, la qual té suport en $[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]$ i compleix

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} f(x-t)u(x) dx = 0, -\frac{a}{2} \leq t \leq \frac{a}{2}.$$

A més a més, com que $g(x) = 0$ si $|x| > \frac{a}{4}$, $u(x) \geq 0$ si $|x| > \frac{a}{4}$. La integral anterior avaluada en $t = \frac{a}{2}$ és

$$0 = \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{a}{2}} u(x) dx,$$

i per tant $u = 0$ en aquest interval. Avaluant en $t = -\frac{a}{2}$ hom veu anàlogament que $u = 0$ en $[-\frac{a}{2}, -\frac{a}{4}]$. Llavors, tenim

$$0 = \int_{-\frac{a}{4}}^{+\frac{a}{4}} f(x-t)u(x) dx = \int_{\max(-\frac{a}{4}, t-\frac{a}{4})}^{\min(\frac{a}{4}, t+\frac{a}{4})} u(x) dx, t \in \mathbb{R}.$$

Si $-\frac{a}{4} \leq t \leq 0$ això diu que

$$\int_{-\frac{a}{4}}^{t+\frac{a}{4}} u(x) dx = 0, -\frac{a}{4} \leq t \leq 0,$$

i per tant $u = 0$ en $[0, \frac{a}{4}]$. Si $0 \leq t \leq \frac{a}{4}$ diu que

$$0 = \int_{t-\frac{a}{4}}^{\frac{a}{4}} u(x) dx, 0 \leq t \leq \frac{a}{4},$$

i per tant $u = 0$ en $[-\frac{a}{4}, 0]$.

2.6 Implementació numèrica

Utilitzant un desenvolupament analític basat en la convolució i l'anàlisi de la Transformada de Fourier de funcions a -periòdiques s'ha arribat que una solució adequada és l'equació (2.9) en l'interval $[-\frac{a}{4}, \frac{a}{4}]$. Tot i fer una verificació més amb (2.10), s'ha volgut implementar-ho de forma numèrica, simulant el problema mitjançant Matlab.

Primer, s'ha comprovat que fent la convolució entre les funcions h i f es genera una solució de tipus sinusoidal positiva i a -periòdica, tal com es descriu a (2.2). A la Figura 2.6 es mostra el resultat obtingut.

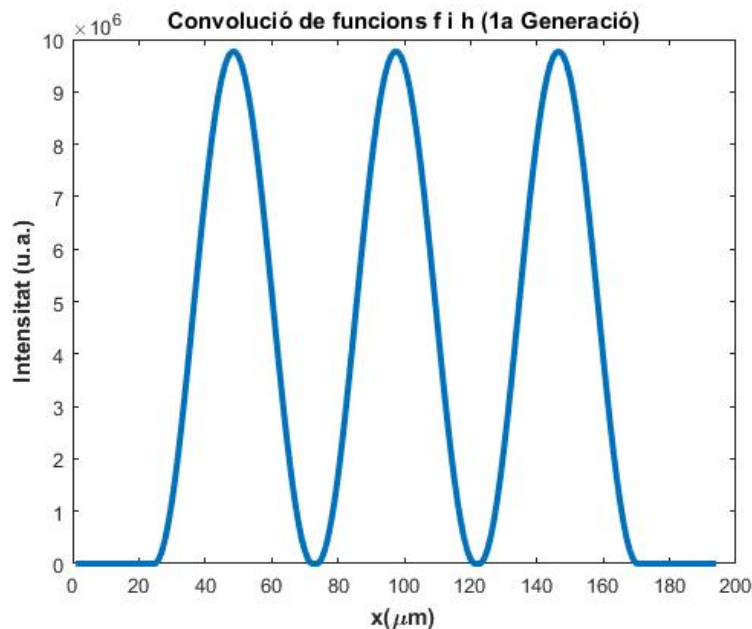


Figura 2.6: **Convolució de funcions f i h** . La funció f representa l'obertura del disc, essent un pols d'amplada $a/2$. D'altra banda, la funció h és la solució associada a les obertures de la màscara. Com es pot comprovar, la convolució d'ambdues funcions genera una funció sinusoidal positiva.

D'altra banda, s'ha fet el mateix procés, però en comptes de fer la convolució entre dues funcions, s'ha fet entre dues imatges binàries construïdes a base de matrius d'1s i 0s, les quals recreen les zones transparents o opaques de disc i màscara. La primera representa les obertures rectangulars del disc, i la segona correspon a les obertures impreses a la màscara, on el perímetre segueix l'equació (2.9). Ambdues es veuen simulades a la Figura 2.7. Es pot apreciar que les obertures de la màscara han estat doblades per simplicitat de disseny. La convolució d'ambdues imatges es representa a la Figura 2.8, on es comprova que s'obtenen els resultats requerits.

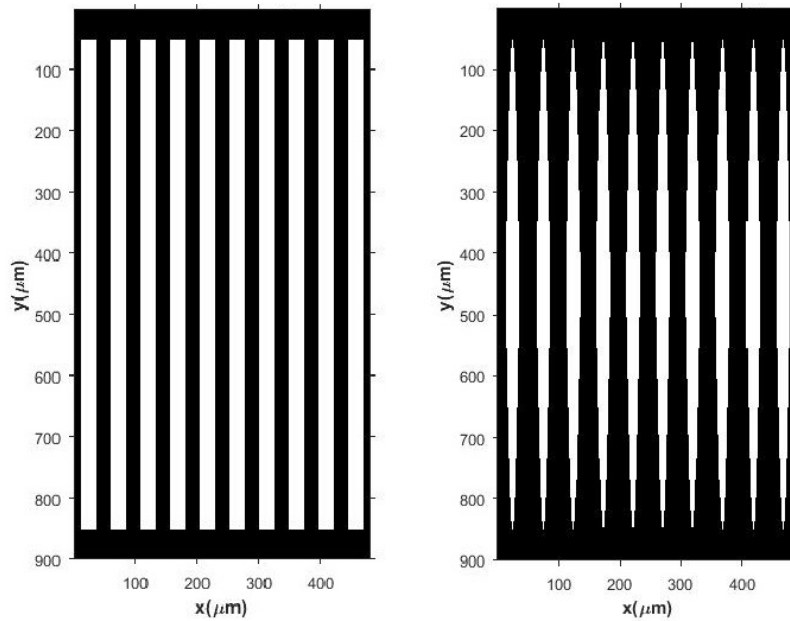


Figura 2.7: **Simulació de les obertures de disc i màscara de Primera Generació** Representació en 2D, i en coordenades cartesianes (x, y) , de les obertures del disc (esclertxes rectangulars) i de la màscara de Primera Generació (perfil sinusoidal) per a un encoder de 2500 polsos per volta.

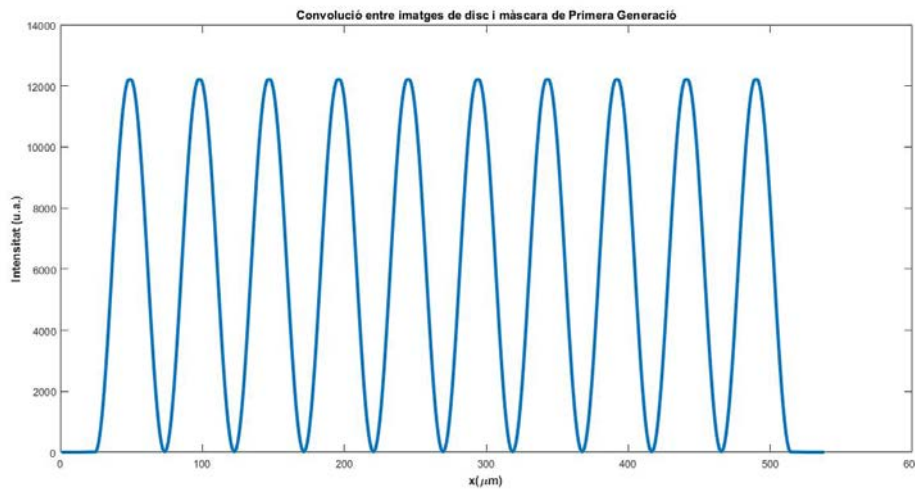


Figura 2.8: **Convulsió entre imatges de disc i màscara de Primera Generació.** Representa com varia la intensitat que rebria el fotodíode quan el disc gira respecte a la màscara. El resultat obtingut és una sinusoidal positiva.

Totes aquestes simulacions s’han realitzat amb els paràmetres típics d’un encoder de tipus Sèrie 10, el qual és el model d’encoder de referència que s’ha utilitzat al llarg d’aquesta tesi per fer totes les simulacions i proves experimentals. Aquest encoder incremental presenta un disc amb la pista d’obertures situada a $r = 19mm$ de radi. Així que és fàcil calcular que la periodicitat

espacial entre obertures és

$$a = \frac{2\pi r}{2500} \approx 48\mu m. \quad (2.11)$$

D'altra banda, especificar que les obertures de la màscara tenen una altura de $y_0 = 800\mu m$ pel fet de no excedir les mides del fotodíode. És important comentar que el problema s'ha tractat amb coordenades cartesianes (x, y) i no cilíndriques (r, θ) , però és una aproximació vàlida, ja que a efectes pràctics les variacions són mínimes.

Després d'un desenvolupament analític i una verificació numèrica s'ha arribat a una solució del problema plantejat: la Màscara de Primera Generació. No obstant això, al fer els càlculs només tenint en compte la convolució entre obertures, el model és com si s'estigués considerant que no hi ha separació entre disc i màscara. Però com s'ha descrit abans, això és fals, ja que existeix un AG que no es pot obviar. Al llarg d'aquesta separació apareixen efectes de difracció i interferència de la llum que compliquen el problema, i que al següent capítol s'analitzen amb detall per trobar una solució òptima.

Capítol 3

Màscares robustes a la variació de l'air-gap

Un dels grans problemes que els fabricants d'encoders incrementals tenen en comú, és la criticitat de l'Air-Gap existent entre disc i màscara. Hi ha una dependència inversament proporcional entre la resolució de l'encoder i l'AG, és a dir, que com més reduïdes són les obertures més s'ha de reduir la separació entre disc i màscara perquè el fotodíode registri variacions de senyal, i per tant, pugui generar senyals que es puguin convertir en polsos. Quan l'ample de les obertures és de l'ordre de desenes de micres, l'AG ha de ser del mateix ordre, i en conseqüència es té un difícil procés de fabricació i un producte final amb un baix nivell de robustesa. Per intuïció, hom pot veure que hi ha tres factors principals que contribueixen a aquest problema: la qualitat de col·limació del sistema òptic, i els efectes de difracció i interferència que pateix la llum després de travessar les obertures del disc. Al llarg d'aquest capítol s'analitza l'existència d'una màscara que generi senyals sinusoidals sense que l'AG sigui un factor crític. Això comporta tenir en compte tots aquests efectes. Per a la modelització i estudi de la difracció cal fer unes aproximacions, habituals en òptica, que tot seguit justifiquem matemàticament.

3.1 Integrals oscil·latòries; mètode de la fase estacionària. Difracció de Fresnel i Fraunhofer

Partint de la formulació de l'efecte de difracció desenvolupat a la secció 0.2.5, es poden aplicar diferents aproximacions segons el pla z que estiguem analitzant. S'ha vist que el nucli de convolució K_z que descriu la difracció és,

$$K_z(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \left(ik - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

reescrivint-lo lleugerament diferent a (0.38).

És habitual en òptica fer unes aproximacions que simplifiquen aquestes expressions. Hi ha dos tipus d'aproximacions, segons si es fan en el domini espacial o en el domini freqüencial. Aquesta darrera, la qual anomenarem K_z^e , és la que resulta del que s'ha dit a la secció 0.2.5. Menyspreant la contribució de les ones evanescents, K_z^e està definit per

$$\widehat{K}_z^e(\xi, \eta) = e^{ikz\sqrt{1-\lambda^2(\xi^2+\eta^2)}}, \quad (3.1)$$

quan $\lambda^2(\xi^2 + \eta^2) < 1$ i zero altrament. Menysprear les ones evanescents $e^{-kz\sqrt{\lambda^2(\xi^2+\eta^2)-1}}$ és realista quan zk és gran, és a dir, quan z és de l'ordre d'unes quantes longituds d'ona.

Com que \widehat{K}_z^e s'obté de \widehat{K}_z multiplicant per la funció característica H del disc de radi $\frac{1}{\lambda}$, K_z^e és la convolució de K_z amb la transformada de Fourier de H . Aquesta darrera és una funció de Bessel, no explícita, i llavors K_z^e tampoc ho és.

L'altra aproximació opera directament amb el nucli

$$K_z(x', y') = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \left(\frac{1}{R} - ik \right) \frac{z}{R},$$

amb $R = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}$. En primer lloc, per a valors de z (i per tant de R) molt més grans que λ , com és el cas que ens interessarà, s'ignora el terme $\frac{1}{R}$ del parèntesi i es considera l'aproximació

$$K_z(x', y') = -\frac{ik}{2\pi} \frac{ze^{ikR}}{R^2} = \frac{z}{i\lambda} \frac{e^{ikR}}{R^2}. \quad (3.2)$$

Convé fixar-se que aquest és el terme amb límit zero quan $z \rightarrow 0$. És l'altre el que porta l'aproximació de la identitat, tal com s'ha explicat abans. Amb això tenim l'expressió del camp difractat quan $z \gg \lambda$,

$$\frac{z}{i\lambda} \int_{\mathbb{R}^2} U_0(x - x', y - y') \frac{e^{ikR}}{R^2} dx' dy'.$$

En polars,

$$\frac{z}{i\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ik\sqrt{r^2+z^2}}}{r^2+z^2} \left(\int_0^{2\pi} U_0(x - r \cos \theta, y - r \sin \theta) d\theta \right) r dr,$$

i ara fent el canvi $r = tz$,

$$\frac{z}{i\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ikz\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} \left(\int_0^{2\pi} U_0(x - tz \cos \theta, y - tz \sin \theta) d\theta \right) t dt. \quad (3.3)$$

Per explicar com es simplifica aquests tipus d'integral hem de parlar ara d'integrals oscil·latòries, les del tipus

$$I(\mu) = \int_a^b e^{i\mu\Phi(t)} \Psi(t) dt.$$

En el nostre cas, $\Phi(t) = \sqrt{1+t^2}$ i $\mu = kz$ és gran. Un principi bàsic [29, p. 330] d'aquestes integrals és el *principi de localització*, segons el qual el comportament asimptòtic quan μ és gran està determinat pels punts on $\Phi'(t) = 0$. Concretament, si $\Phi'(t) \neq 0$ en $[a, b]$, aleshores

$$I(\mu) = O(\mu^{-N}), \forall N.$$

En canvi, si $\Phi'(t)$ s'anulla en un punt t_0 (en el nostre cas $t_0 = 0$) el comportament ve donat per l'ordre k de la primera derivada $\Phi^{(k)}(t_0) \neq 0$. Concretament [29, p. 334]

$$I(\mu) \approx \mu^{-\frac{1}{k}}.$$

El que això significa és que en una integral oscil·latòria, la contribució essencial a la integral és la d'un interval al voltant dels punts t_0 on la fase Φ té derivada zero, i la resta és d'ordre molt més petit. A més a més, podem substituir $\Phi(t)$ pel seu desenvolupament en t_0 fins a l'ordre k en t_0 .

En el nostre cas, $\Phi(t) = \sqrt{1+t^2}$ té el punt estacionari $t = 0$, i per tant la contribució essencial en (3.3) és la d'un interval $[0, \varepsilon]$. Utilitzant el desenvolupament

$$\sqrt{1+t^2} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \dots,$$

el nucli de (3.3)

$$e^{ikz\sqrt{1+t^2}},$$

es simplifica per

$$e^{ikz(1+\frac{1}{2}t^2)}.$$

Desfent els canvis i aplicant a (3.2), el resultat final és l'anomenada *aproximació de Fresnel* utilitzada comunament en òptica

$$K_z^f(x-x', y-y') = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}[(x-x')^2+(y-y')^2]},$$

vàlida quan $|x-x'| + |y-y'| \leq \varepsilon z$ i $z \gg \lambda$.

Per a comparar K_z^e amb K_z^f calcularem la transformada $\widehat{K_z^f}$. A (0.13), s'ha vist que la transformada (1-dimensional) de $e^{-\alpha\pi|x|^2}$ és $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{\pi}{\alpha}|\xi|^2}$ si $\text{Re } \alpha \geq 0$. Separant variables, resulta que en el cas d -dimesional és $\alpha^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{\pi}{\alpha}|\xi|^2}$. En el nostre cas, $\alpha = -i\frac{k}{2\pi z} = -i\frac{1}{\lambda z}$ i s'obté

$$\widehat{K_z^f}(\xi, \eta) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{-i\pi\lambda z(|\xi|^2+|\eta|^2)} = e^{ikz} e^{-i\pi\lambda z(|\xi|^2+|\eta|^2)}. \quad (3.4)$$

Si a la funció de transferència (3.1) se li aplica la mateixa aproximació que abans

$$kz\sqrt{1-\lambda^2(\xi^2+\eta^2)} = kz\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2(\xi^2+\eta^2)\right) = kz - z\pi\lambda(|\xi|^2+|\eta|^2), \quad (3.5)$$

s'obté exactament $\widehat{K_z^f}$, de forma que ambdues aproximacions es consideren com equivalents.

En definitiva, amb l'aproximació de Fresnel, U_z és per tant la convolució de U_0 amb el *nucli de Fresnel*

$$K_z^f(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}[x^2+y^2]},$$

és a dir

$$U_z(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x', y') \exp \left\{ i\frac{k}{2z} [(x-x')^2 + (y-y')^2] \right\} dx' dy'. \quad (3.6)$$

Aquesta és una bona aproximació en la regió $z \gg \lambda$, i si el quadrat de centre (x, y) i radi εz és inclòs en el suport de U_0 .

De fet, és possible afinar molt més analitzant amb més detall el nucli de Fresnel. Suposem per simplificar que $U_0(x', y')$ és separable (que és el cas que ens interessarà després), en un producte $A(x')B(y')$, cosa que ens porta a una integral en una variable (llevat de constants, i posant $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(x') e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(x-x')^2} dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x-x') e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(x')^2} dx'.$$

Considerem una integral tipus Fresnel com abans, amb Ψ de la classe de Schwarz,

$$I(\mu) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\mu t^2} \Psi(t) dt, \mu > 0$$

que està òbviament ben definida. Amb el canvi $t = (\mu)^{-\frac{1}{2}}s$, per a $\mu \rightarrow +\infty$, utilitzant (0.13) ja es veu que, suposant $\Psi(0) \neq 0$,

$$I(\mu) = (\mu)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{is^2} \Psi((\mu)^{-\frac{1}{2}}s) ds \approx (\mu)^{-\frac{1}{2}} \Psi(0) \int_{\mathbb{R}} e^{is^2} ds = (\mu)^{-\frac{1}{2}} \Psi(0) e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Ens interessa precisar més i avaluar quan μ és gran quina és la part essencial de $I(\mu)$. La idea intuïtiva és que $e^{i\mu t^2}$ no oscil·la mentre $|t|^2 \leq O(\mu)$ i en canvi oscil·la molt ràpidament a partir de $|t|^2 \geq O(\mu)$, amb la qual cosa hi ha molta cancel·lació, de forma que la contribució essencial és la de $|t| \leq O(\sqrt{\mu})$. A continuació, formalitzem aquesta idea (la qual es troba a la majoria de llibres d'òptica sense prova) amb precisió, en el cas $\Psi(0) \neq 0$.

Lemma 3. *Si Ψ és de la classe de Schwarz i $h \equiv \mu^{-\frac{1}{2}}$, aleshores*

$$\int_{|t| \leq h} e^{i\mu t^2} \Psi(t) dt = O(\mu^{-\frac{1}{2}}), \int_{|t| \geq h} e^{i\mu t^2} \Psi(t) dt = O(\mu^{-\frac{1}{2}})$$

Demostració. La primera és evident. La segona l'expressem

$$\int_{|t| \geq h} \frac{(e^{i\mu t^2})'}{2i\mu t} \Psi(t) dt,$$

i integrem per parts,

$$= -\frac{1}{2i\mu} \int_{|t|\geq h} e^{i\mu t^2} \left(\frac{\Psi(t)}{t}\right)' dt.$$

Com que la derivada és $O(t^{-2})$, la integral és $O(h^{-1})$. □

Seguidament analitzem el comportament de

$$\Phi(x) = \int_{-x}^x e^{i\pi s^2} ds.$$

que com sabem té límit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

El fet bàsic és que $\Phi(x)$ assoleix molt ràpidament el valor límit, diguem en $x = x_0$, i després oscil·la al voltant d'aquest valor amb amplitud decreixent. De fet hom té

$$\Phi(x) = e^{i\frac{\pi}{4}} - \frac{e^{i\pi x^2}}{\pi i x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right). \tag{3.7}$$

En efecte, integrant per parts

$$\int_h^{+\infty} e^{i\pi x^2} dx = \int_{-h}^h \frac{1}{2\pi i x} (e^{i\pi x^2})' dx = -\frac{e^{i\pi h^2}}{2\pi i h} + \frac{1}{2\pi i} \int_h^{+\infty} \frac{e^{i\pi x^2}}{x^2} dx.$$

Repetint l'argument a la darrera integral s'obté (3.7).

Aquest valor x_0 compleix doncs que

$$\int_{|s|\geq x_0} e^{i\pi s^2} ds = 0.$$

Prenem $h = \mu^{-\frac{1}{2}} x_0$, de forma que

$$\int_{|t|\geq h} e^{i\mu t^2} dt = 0.$$

Lemma 4. *Si Ψ és a la classe de Schwarz, llavors*

$$\int_{|t|\geq h} e^{i\mu t^2} \Psi(t) dt = O(\mu^{-\frac{3}{2}}).$$

Demostració. Podem escriure la integral com

$$\int_{|t|\geq h} e^{i\mu t^2} (\Psi(t) - \Psi(0)) dt = \int_{|t|\geq h} e^{i\mu t^2} t\psi(t) dt,$$

amb ψ també a la classe de Schwarz. Repetint la integració per parts anterior trobem

$$= -\frac{1}{2i\mu} \int_{|t|\geq h} e^{i\mu t^2} \phi'(t) dt,$$

i ara apliquem el lema anterior. □

Tenim llavors que

$$I(\mu) = \int_{|t| \geq h} e^{i\mu t^2} \Psi(t) dt + \int_{|t| \leq h} e^{i\mu t^2} \Psi(t) dt \approx (\mu)^{-\frac{1}{2}} \Psi(0) e^{i\frac{\pi}{4}},$$

però el segon sumand és $O(\mu^{-\frac{3}{2}})$, per tant és d'ordre més petit que el primer.

Tornant a (3.6), $\mu = \frac{k}{2z} = \frac{\pi}{\lambda z}$, veiem que la part essencial en la integral és la del quadrat

$$|x - x'|, |y - y'| \leq O(\sqrt{\lambda z}), \tag{3.8}$$

que és molt més petit que el quadrat considerat fins ara

$$|x - x'|, |y - y'| \leq \varepsilon z,$$

perquè $z \gg \lambda$.

El significat d'aquesta aproximació és que si el camp $U_0(x, y)$ té suport en una regió G del pla, aleshores l'aproximació de Fresnel és acurada en els punts (x, y, z) tals que el quadrat de centre $(x, y, z = 0)$ i aresta $\sqrt{\lambda z}$ és tot ell inclòs dins G . Aquesta *regió d'influència* té un perfil de tipus parabòlic [11, pp. 70–72]. Podem considerar com a zona fosca el conjunt de punts (x, y, z) tals que aquest quadrat és disjunt amb G . La Figura 3.1 il·lustra aquesta situació.

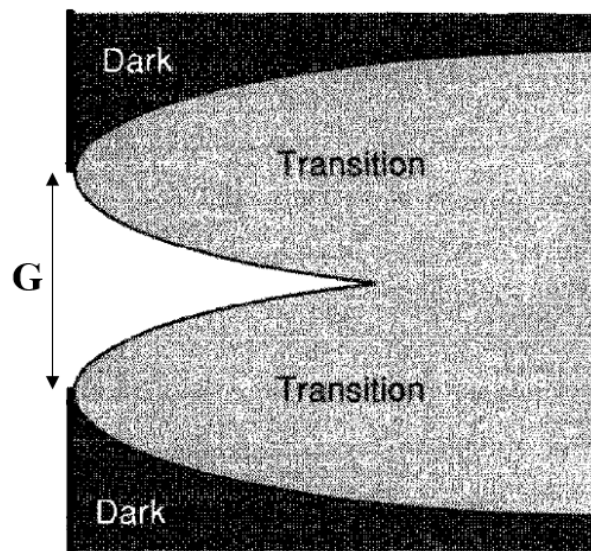


Figura 3.1: **Propagació transversal de la llum per difracció.** En un punt (x, y, z) la difracció només vindrà afectada pel quadrat centrat en $(x, y, z = 0)$ i aresta $\sqrt{\lambda z}$ del camp origen $U_0(x, y)$. La zona Blanca i de Transició són les zones afectades per difracció, mentre que la zona Dark no es veu alterada. Ref: Joseph W Goodman. *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers, 2005, pag. 71.

Una altra forma d'expressar l'aproximació de Fresnel és

$$U_z(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ U_0(x', y') e^{i\frac{k}{2z}(x'^2+y'^2)} \right\} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(xx'+yy')} dx' dy',$$

on a la integral hi reconeixem la transformada de Fourier, avaluada a (x, y) , de la funció

$$U_0(x', y') e^{i\frac{k}{2z}(x'^2+y'^2)}.$$

De forma resumida, el que s'ha fet amb aquesta aproximació, és substituir les ondetes esfèriques secundàries aplicades pel principi de Huygens-Fresnel per ondetes parabòliques.

Tot i que al llarg d'aquesta tesi considerarem sempre l'aproximació de Fresnel per analitzar tots els efectes de difracció, citarem que existeix una altra aproximació per a valors de z més grans, anomenada *Aproximació de Fraunhofer* [11, pp. 74–75]. Si s'està analitzant un pla situat a una distància suficientment llarga, per al qual

$$z \gg \frac{k(x'^2 + y'^2)}{2},$$

es pot dir que l'exponent de fase quadràtic de (x', y') dins de la integral és unitari i llavors es pot considerar el camp U_z directament com la Transformada de Fourier de l'obertura, llevat dels factors multiplicatius,

$$U_z(x, y) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{i\lambda z} \int \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x', y') \exp \left[-i\frac{2\pi}{\lambda z}(xx' + yy') \right] dx' dy'.$$

3.2 Modelització del sistema disc-màscara tenint en compte la difracció

A efectes teòrics s'ha considerat que la col·limació, en un aspecte tècnic que depèn del tipus de font de llum i la qualitat òptica del sistema, actua en condicions ideals. Doncs, considerarem que tenim una ona monocromàtica plana i molt ben col·limada enfocant de forma totalment normal a les obertures del disc. D'aquesta manera, tornant al marc descrit a la Secció 3.1 i seguint la nomenclatura de (0.41), tenim que el camp origen (E_0, B_0) té les sis components $U_0(x, y)$ proporcionals a la funció

$$U_0(x, y) = I\left(\frac{x}{c}\right) I\left(\frac{y}{c}\right) f_p(x),$$

on I és la funció característica de l'interval $[-1, +1]$, i f_p és la funció de període a la qual correspon a les obertures del disc utilitzada al capítol anterior, que en $[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]$ val 1 si $|x| \leq \frac{a}{4}$ i zero fora. El producte $I(\frac{x}{c})I(\frac{y}{c})$ modelitza la regió il·luminada per la llum incident. En l'anàlisi que segueix podem considerar una funció general h , i estariem per tant analitzant el patró de difracció de Fresnel d'una red unidimensional donada per $I(\frac{y}{c})h(x)I(\frac{x}{c})$.

Designem per (E_z, B_z) el camp a distància z del disc. En analitzar distàncies molt properes al disc, podem aplicar l'aproximació de Fresnel definida a (3.6). Designant per

$$A_z(x) = e^{i\frac{\pi}{\lambda z}x^2},$$

el nucli de Fresnel unidimensional, resulta que cadascuna de les components és proporcional a

$$\begin{aligned} U_z(x, y) &= \int \int U_0(x', y') K_z^f(x - x', y - y') dx' dy' = \\ &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \left(\int_{-1}^1 A_z(y - y') dy' \right) \left(\int_{-c}^c h(x) A_z(x - x') dx' \right). \end{aligned}$$

En aquest punt fem la hipòtesi que z és tal que l'interval de centre x i radi $\sqrt{\lambda z}$ és inclòs a $[-c, c]$. Segons hem vist a la Secció 3.1 això ens permet simplificar la integral en x prescindint del factor $I(\frac{x}{c})$ i obtenim

$$U_z(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \phi_z(y) \int_{-\infty}^{+\infty} h(x') A_z(x - x') dx' = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \phi_z(y) h_z(x), \quad (3.9)$$

amb

$$\phi_z(y) = \int_{-c}^c A_z(y - y') dy', h_z = h * A_z.$$

3.3 La distància de Talbot

Suposem que la xarxa periòdica 1-dimensional és periòdica, és a dir, h és una funció a -periòdica. Aleshores té un desenvolupament

$$h(x) = \sum_n c_n(h) e^{2\pi i \frac{n}{a} x}.$$

Per tant, repetint els càlculs de la secció 2.4, la convolució $h_z = h * A_z$ també és a -periòdica amb desenvolupament

$$h_z(x) = \sum_n c_n(h) \widehat{A}_z\left(\frac{n}{a}\right) e^{2\pi i \frac{n}{a} x}.$$

A l'equació (0.13) hem vist que

$$\widehat{A}_z(\xi) = \sqrt{\lambda z} \exp\left[-i\pi\lambda z \xi^2\right].$$

Per tant,

$$h_z(x) = \sum_n c_n e^{-i\pi\lambda z \frac{n^2}{a^2}} e^{2\pi i \frac{n}{a} x} \quad (3.10)$$

i hom pot acabar reescrivint (3.9) com

$$U_z(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\sqrt{\lambda z}} \phi_z(y) \sum_n c_n(h) e^{-i\pi\lambda z \frac{n^2}{a^2}} e^{2\pi i \frac{n}{a} x}. \quad (3.11)$$

Si es pren z de forma que $\frac{\lambda z}{a^2}$ sigui parell

$$\frac{\lambda z}{a^2} = 2m,$$

és a dir, que z sigui un múltiple enter de

$$z_T = \frac{2a^2}{\lambda}, \quad (3.12)$$

anomenada *distància de Talbot* [11, pp. 89–91], aleshores $e^{-i\pi\lambda z \frac{n^2}{a^2}} = 1$ per a tot n , i per tant $h_z = h$ i

$$U_z = \frac{e^{ikz}}{i\sqrt{\lambda z}} \phi_z(y) h(x).$$

És a dir, a múltiples enters de la distància de Talbot apareix una distribució de camp idèntica al camp origen, amb només una variació de fase.

Si en canvi

$$\frac{\lambda z}{a^2} = (2m + 1), z = (m + \frac{1}{2})z_T,$$

aleshores $e^{-i\pi\lambda z \frac{n^2}{a^2}} = e^{-i\pi n^2} = (-1)^{n^2} = (-1)^n$, amb la qual cosa

$$U_z(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\sqrt{\lambda z}} \phi_z(y) \sum_n c_n(h) (-1)^n e^{2\pi i \frac{n}{a} x} = \frac{e^{ikz}}{i\sqrt{\lambda z}} \phi_z(y) h(x + \frac{a}{2}).$$

Això significa que hi ha un desfasat de 180°. En el cas $h = f_p$ les zones opaques s'intercanvien amb les il·luminades. Finalment, si

$$\frac{\lambda z}{a^2} = (2m + 1), z = (2m + 1) \frac{z_T}{4},$$

aleshores $e^{-i\pi\lambda z \frac{n^2}{a^2}} = (-1)^{mn^2} (-i)^{n^2}$. Aquesta expressió val 1 si n és parell i $(-1)^{m+1}i$ si n és senar. Això significa que

$$h_z(x) = \sum_{n\text{par}} c_n e^{2\pi i \frac{n}{a} x} + (-1)^{m+1} i \sum_{n\text{senar}} c_n e^{2\pi i \frac{n}{a} x}.$$

El primer sumatori és una funció $\frac{a}{2}$ -periòdica, mentre que el segon sumatori $S(x)$ compleix $S(x + \frac{a}{2}) = -S(x)$. En definitiva, $|h_z|^2$, i per tant la potència, és una funció $\frac{a}{2}$ -periòdica, té doble freqüència.

Les Figures 3.2 i 3.3, es presenten quatre exemples de diferents Catifes de Talbot [30].

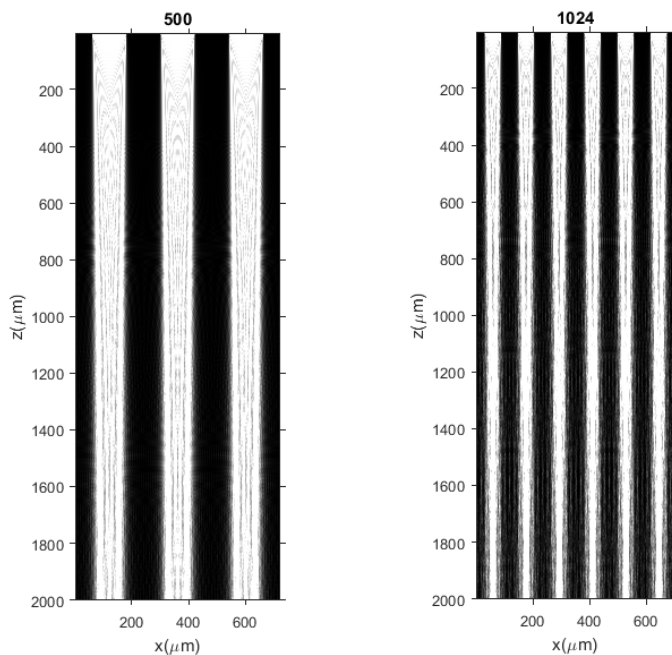


Figura 3.2: **Catifes de Talbot de 500 i 1024 polsos per volta.** Simulacions fetes amb $\lambda = 633nm$. Les obertures són encara relativament amples per observar l'efecte Talbot quan s'analitza fins a 2mm de propagació.

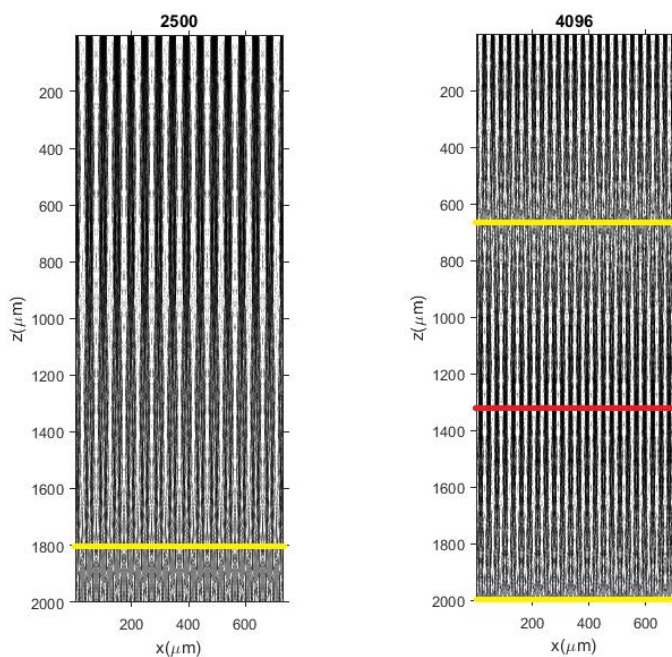


Figura 3.3: **Catifes de Talbot de 2500 i 4096 polsos per volta.** Simulacions fetes amb $\lambda = 633nm$. Les línies grogues i vermelles corresponen a les distàncies $z_{T/4}$ i $z_{T/2}$, respectivament.

Cadascuna d'aquestes simulacions s'ha fet tenint en compte que es tenia una font vermella ($\lambda = 633nm$), així que utilitzant les equacions (2.11) i (3.12), es poden calcular les diferents

	500	1024	2500	4096
Làser Vermell ($\lambda = 635nm$)	179.55mm	42.81mm	7.14mm	2.66mm
Làser Blau ($\lambda = 405nm$)	281.52mm	67.12mm	11.26mm	4.2mm
LED ($\lambda = 470nm$)	242.58mm	57.84mm	9.70mm	3.62mm

Taula 3.1: **Distàncies de Talbot.** Calculades en funció del nombre de polsos per volta del disc i la font de llum. En tots casos s'ha considerat un disc on la pista d'obertures té $19mm$ de radi.

distàncies de Talbot per a un nombre N donat de polsos per volta. En els casos analitzats es té $z_T(500) = 179.55mm$, $z_T(1024) = 42.81mm$, $z_T(2500) = 7.18mm$ i $z_T(4096) = 2.68mm$.

D'altra banda, la Taula 3.1 mostra les diferents distàncies de Talbot calculades per a resolucions de 500, 1024, 2500 i 4096 polsos per volta (en disc de $19mm$ de radi), en funció de la font d'il·luminació utilitzada.

3.4 Model del senyal detectat pels fotodíodes a distància z i sota efectes difractius

Continuem analitzant el camp difractat per una xarxa periòdica unidimensional $I(\frac{y}{c})h(x)$, donat per (3.9). Com que totes les components del camp (E_z, B_z) són proporcionals a U_z la intensitat o potència P_z del camp al punt (x, y, z) és proporcional a $|U_z(x, y)|^2$,

$$P_z(x, y) \propto |\phi_z(y)|^2 |h_z(x)|^2. \quad (3.13)$$

Considerem ara la màscara, modelitzada per la funció g amb suport compacte. Aquí pensarem per conveniència que està simetritzada, duplicada, i que les obertures de la màscara ocupen, a distància z , la regió del pla donada per

$$G = \{(x, y), 0 \leq |y| \leq g(x)\}. \quad (3.14)$$

Considerant també que els fotodíodes són solidaris a la màscara, la intensitat que capten és

$$P_z = \int_G |\phi_z(y)|^2 |h_z(x)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |h_z(x)|^2 \left(\int_{|y| \leq g(x)} |\phi_z(y)|^2 dy \right) dx. \quad (3.15)$$

Encara que en realitat no és necessari que els fotodíodes estiguin enganxats a la màscara (tal com es pot veure la Figura 0.3), ja que en definitiva el que s'està mesurant és la integral $\int_{\mathbb{R}^2} |U_z(x, y)|^2 dx dy$, i no com està distribuït el camp. Per la fórmula de Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}^2} |U_z(x, y)|^2 dx dy = \int \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{U}_z(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta,$$

que coincideix amb

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{K}_z(\xi, \eta)|^2 |\hat{U}_0(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta,$$

on en aquest cas $z = 0$ correspondria a la posició de la màscara. Si el fotodíode està situat en una posició permesa per l'aproximació de Fresnel, per (3.4) s'obté $|\hat{K}_z| = 1$ i la conclusió és que $\int_{\mathbb{R}^2} |U_z(x, y)|^2 dx dy$ no depèn de z .

D'aquesta manera, si el fotodíode utilitzat abasta una àrea F més ampla que la zona de transició (per qualsevol z), tal com es mostra a la Figura 3.1, llavors la integral

$$\int_F |U_z(x, y)|^2 dx dy$$

no dependrà de z . De manera que aquest segon Air-Gap no tindrà importància en el procés de fabricació.

Tornant a l'equació (3.15), veure que tot això ens porta a introduir la funció, també a suport compacte, \tilde{g} per

$$\tilde{g}(x) = \int_{|y| \leq g(x)} |\phi_z(y)|^2 dy, x \in \mathbb{R},$$

de forma que

$$P_z = \int_{\mathbb{R}} |h_z(x)|^2 \tilde{g}(x) dx.$$

El següent pas és considerar com variarà la potència lumínica $P_z(t)$ quan gira el disc. A l'instant t cal canviar $h(x)$ per $h(x - t)$, llavors $h_z(x)$ canvia a $h_z(x - t)$ i obtenim

$$P_z(t) = \int_{\mathbb{R}} |h_z(x - t)|^2 \tilde{g}(x) dx = (|h_z|^2 * \tilde{g})(t). \quad (3.16)$$

En definitiva, si el disc està donat per h i la màscara per g , el senyal captat pel fotodíode ve donat per l'expressió anterior. Destaquen dues característiques: la no linealitat deguda al terme quadràtic, i la substitució de g per \tilde{g} . Per analitzar el model és necessari fer-ne una simplificació més, veurem de fet que $\tilde{g} \approx g$.

La màscara té unes dimensions verticals més petites que la zona il·luminada, és a dir, g és molt més petita que c , Aleshores, en

$$\phi_z(y) = \int_{-c}^c A_z(y - y') dy' = \int_{-c}^c e^{i \frac{\pi}{\lambda z} (y - y')^2} dy', |y| \ll c,$$

la part essencial és, com hem vist a la Secció 3.1 la de l'interval $[y - O(\sqrt{\lambda z}), y + O(\sqrt{\lambda z})]$, que és tot ell dins $[-c, c]$, i per tant $|\phi_z(y)|$ és essencialment constant a la màscara.

Si no es vol utilitzar el principi de la fase estacionària, un argument alternatiu és veure que

$$J = \int_{-r}^r \left| \int_{-1}^1 e^{i\mu(y-t)^2} dt \right|^2 dy \equiv cr.$$

Tenim

$$J = \int_{-r}^r \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{i\mu(t^2-s^2+2y(s-t))} dy dt ds,$$

que integrant primer en y coincideix amb

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sin[2\mu r(s-t)]}{\mu(s-t)} e^{i\mu(t^2-s^2)} ds dt.$$

Amb el canvi de variable $u = s - t, v = s + t$ arribem a

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \left(\int_{|u|-2}^{2-|u|} \frac{\sin 2\mu r u}{\mu u} e^{-i\mu v u} dv \right) du = \\ &= \int_{-2}^2 \frac{\sin 2\mu r u}{\mu u} \frac{\sin(\mu u(2 - |u|))}{\mu u} du = \\ &= 2 \int_0^2 \frac{(\sin 2\mu r u)(\sin(\mu u(2 - |u|)))}{\mu^2 u^2} du. \end{aligned}$$

Si substituïm el primer sinus pel seu desenvolupament constatem que efectivament

$$J = c_1 r + c_2 r^3 + \dots \equiv cr.$$

Amb aquesta simplificació, en definitiva, llevat de constants,

$$P_z(t) = (|h_z|^2 * g)(t). \tag{3.17}$$

Quan z és un múltiple de la distància de Talbot, aleshores $h_z = h, |h_z|^2 = h^2$. En el nostre cas, a més, $h = f_p$ i $f_p^2 = f_p$. Això significa que en aquest cas **l'anàlisi feta al Capítol 2 és vàlid, i la màscara de primera generació donarà un output sinusoidal pur**. No el donarà, però, per a altres valors de z . En el capítol següent veurem, amb el banc de proves, que aquesta conseqüència del model teòric queda completament validada per l'experiència: variant z , es comprova que el senyal sinusoidal apareix a certes distàncies i desapareix a les altres.

D'altra banda, es pot veure que la font de llum juga un paper crucial amb la distància de Talbot. Quan estem tractant amb λ curta (com el blau), z_T augmenta i la Catifa de Talbot s'expandeix. D'aquesta manera, el sistema admet majors toleràncies a l'hora de col·locar la màscara al voltant d'una determinada z_T . No obstant això, també pot ser positiu utilitzar λ llarga (com l'IR), ja que en una llargada reduïda, es poden abastar diferents múltiples de z_T . Depenent de la periodicitat entre obertures, relacionat amb la resolució de l'encoder, pot interessar aprofitar una propietat o una altra.

3.5 Anàlisi del senyal $P_z(t)$ per a qualsevol gap z . La màscara de segona generació

Quan s'analitza la funció difractada a qualsevol distància diferent de la de Talbot, $z \neq z_T$, no tenim $h_z = h$. L'objectiu d'aquesta secció és trobar g tal que P_z sigui una sinusoide. Com que aquesta és una equació de convolució hem de procedir igual que en el Capítol 2 però hem d'utilitzar $|h_z|^2$ quan $h = f_p$. Partim de (3.10), on els c_n són els de (2.4), (2.5). Tindrem

$$|h_z(x)|^2 = h_z(x)\overline{h_z(x)} = \sum_{n,m} c_n \bar{c}_m e^{i\pi\lambda z \frac{1}{a^2}(m^2-n^2)} e^{2\pi i \frac{x}{a}(n-m)}.$$

Agrupant els termes amb $n - m = l$, s'obté

$$|h_z(x)|^2 = \sum_l \left(e^{-i\pi\lambda z \frac{l^2}{a^2}} \sum_m \bar{c}_m c_{m+l} e^{-i\pi\lambda z \frac{2ml}{a^2}} \right) e^{2\pi i \frac{x}{a}l}.$$

Definim la funció $d_l(z)$ com

$$d_l(z) = \sum_m \bar{c}_m c_{m+l} e^{-i\pi\lambda z \frac{2ml}{a^2}}. \quad (3.18)$$

S'obté, doncs

$$|h_z(x)|^2 = \sum_l d_l(z) e^{-i\pi\lambda z \frac{l^2}{a^2}} e^{2\pi i \frac{x}{a}l}.$$

Recordant (2.4), (2.5),

$$c_m = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per a } m = 0 \\ 0 & \text{per a } m \text{ parell } \neq 0 \\ \frac{(-1)^k}{\pi m} & \text{si } m = 2k + 1, \end{cases}$$

es pot calcular $d_l(z)$ segons el valor de l

1. Cas $l = 0$. En aquest cas es té

$$d_0(z) = \sum_m |c_m|^2.$$

Per Parseval es pot desenvolupar

$$\frac{a}{2} = \int_0^a |f_0(x)|^2 dx = \sum_m |c_m|^2 \int_0^a \left| e^{2\pi i \frac{x}{a}m} \right|^2 dx = a \sum_m |c_m|^2,$$

concloent que $d_0 = c_0 = \frac{1}{2}$.

2. Cas $l = 2p \neq 0$. A l'equació (3.18) es té en compte, llavors, els casos $m = 2k + 1$ i $m = 0$.

$$\begin{aligned} d_{2p}(z) &= \bar{c}_0 c_{2p} + \sum_k \frac{(-1)^k}{\pi(2k+1)} \frac{(-1)^{k+p}}{\pi(2(p+k)+1)} e^{-i\pi\lambda z \frac{2(2k+1)2p}{a^2}} = \\ &= \frac{(-1)^p}{\pi^2} e^{-i\pi\lambda z \frac{4p}{a^2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\pi\lambda z \frac{8pk}{a^2}}}{(2k+1)(2k+2p+1)}. \end{aligned}$$

3. Cas l senar. Aquí es considera només $m = 0$ i $m = -l$, ja que en els altres casos $c_{m+l} = 0$, essent $m + l$ un nombre parell no nul, de manera que

$$d_l(z) = \frac{1}{2}c_l + \frac{1}{2}\bar{c}_{-l}e^{i\pi\lambda z\frac{2l^2}{a^2}} = \frac{1}{2}c_l(1 + e^{i\pi\lambda z\frac{2l^2}{a^2}}),$$

ja que $\bar{c}_{-l} = c_l$.

En definitiva, els coeficients de Fourier \tilde{c}_l , de $|h_z|^2$ són

$$\begin{aligned} \tilde{c}_0 &= c_0 = \frac{1}{2} \\ \tilde{c}_l &= c_l \cos\left(\pi\lambda z\frac{l^2}{a^2}\right) \\ \tilde{c}_l &= \frac{(-1)^p}{\pi^2} e^{-i\pi\lambda z\frac{l^2+2l}{a^2}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\pi\lambda z\frac{8pk}{a^2}}}{(2k+1)(2k+2p+1)}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

El desenvolupament de Fourier de $P_z = |h_z|^2 * g$ és llavors

$$P_z(t) = \sum_n \tilde{c}_n \hat{g}\left(\frac{n}{a}\right) e^{2\pi i \frac{nt}{a}}.$$

El nostre problema és trobar g tal que P_z sigui una sinusoide pura de període a . Com que ara cap dels \tilde{c}_n són zero en general, $\hat{g}\left(\frac{n}{a}\right)$ ha de ser zero per a tot $n \neq 0, 1, -1$, per tant de la forma (fent una translació si és necessari), llevat constants multiplicatives

$$g(x) = 1 + A \cos \frac{x}{a}. \tag{3.20}$$

Com que es vol g positiva i amb suport compacte triem senzillament la funció g amb suport a $[0, a]$ que val $1 + A \cos 2\pi \frac{x}{a}$ amb $0 \leq A \leq 1$. Evidentment,

$$\hat{g}(0) = a, \hat{g}(\pm 1) = \frac{aA}{2},$$

amb la qual cosa, tenint en compte que $\tilde{c}_1 = c_1 \cos(\pi\lambda z\frac{1}{a^2}) = \frac{1}{\pi} \cos(\pi\lambda z\frac{1}{a^2})$,

$$P_z(t) = \frac{a}{2} + \frac{Aa}{\pi} \cos(\pi\lambda z\frac{1}{a^2}) \cos(2\pi\frac{t}{a}).$$

En definitiva, la propietat que explotem en la tria de la màscara és que els sinus i cosinus són vectors propis per a tots els operadors de convolució. En aquest cas veiem que no és possible obtenir una sinusoide pura que passi per zero. Amb $A = 1$, el resultat és, llevat de constants

$$P_z(t) = 1 + \frac{2}{\pi} \cos(\pi\lambda z\frac{1}{a^2}) \cos(2\pi\frac{t}{a}).$$

Consultada l'empresa, el fet que no passi per zero no representa cap inconvenient seriós, i de fet té algun avantatge tècnic, perquè representa que en tot moment el fotodíode rep fotons i això facilita que la seva resposta sigui més ràpida quan hi ha un increment.

Com es pot apreciar el resultat esdevé sinusoidal per qualsevol valor de z , sense que apareguin harmònics secundaris. Però alhora, hom també pot veure com hi ha una dependència amb z que afecta l'amplitud del senyal observat. Just coincideix que l'amplitud de la sinusoidal,

$$A(z) = \left| \frac{2}{\pi} \cos\left(\pi \lambda z \frac{1}{a^2}\right) \right|,$$

és màxima a múltiples enters de la meitat de la distància de Talbot, i zero en aquests valors desplaçats $\frac{zT}{4}$. Aquesta màscara s'ha anomenat Màscara de Segona Generació (M2G).

La primera màscara té transformada

$$2 \cos \frac{\pi}{2} a \xi \frac{1}{1 - a^2 \xi^2},$$

per tant té coeficients $2(-1)^n \frac{1}{1-n^2}$ en els parells, que per (2.6) són irrelevantes; si a la primera màscara se li perturben aquests harmònics continuaria funcionant, en aquest sentit és més robusta que la segona, però en un altre sentit.

3.6 Implementació numèrica

3.6.1 Implementació numèrica de la difracció

Després d'haver realitzat tot el desenvolupament analític a la secció anterior, el següent pas natural és fer una implementació numèrica per simular i verificar els fenòmens i resultats obtinguts anteriorment. Per fer les simulacions es poden separar tres etapes: simulació del disc, propagació del camp $U_0(x, y)$ fins a una distància z i convolució del camp $U_z(x - t, y)$ amb una màscara analitzadora $H(x, y)$.

Anàleg a la Secció 2.6, s'ha generat una imatge binària $H(x, y)$, corresponent a una matriu d'1s i 0s, que correspon a (3.14), on g és la funció de (3.20). A la Figura 3.4 es mostra com és la imatge de la màscara M2G parametritzada per a un encoder de 2500 polsos per volta.

El primer obstacle que es troba la llum són les obertures del disc. Aquestes formen una regla a-periòdica de Ronchi, i tenen una amplada determinada per la resolució de l'encoder. S'ha realitzat la simulació en les condicions ideals que hem suposat en el model teòric, és a dir, que es parteix del fet que la llum que il·lumina les obertures està perfectament col·limada, i per tant, incideix com a ona plana. Aquest fet, traduït a aspectes numèrics, correspon a crear el camp $U_0(x, y)$ com una matriu d'1s i 0s, segons si s'està representant part d'una obertura o d'una zona opaca del disc, respectivament. Aquesta matriu està formada per N_x files i N_y columnes. De manera, que aquest primer pas no té cap diferència respecte a les obertures rectangulars

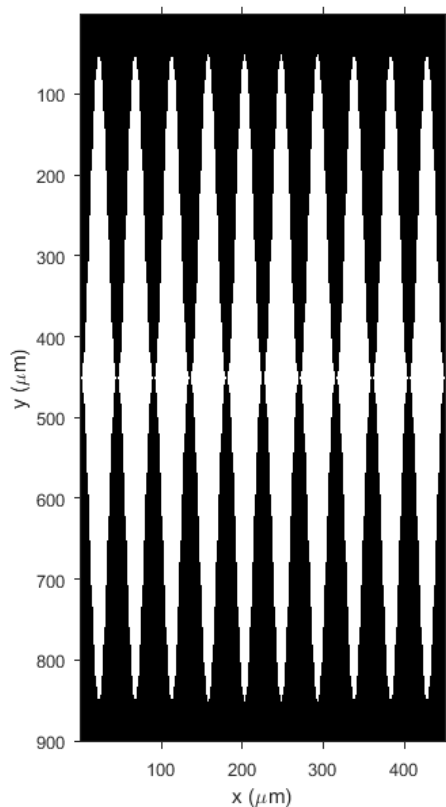


Figura 3.4: **Simulació de Màscara de Segona Generació M2G.** Representació en 2D d'una màscara M2G per a un encoder de 2500 polsos per volta, on les obertures segueixen l'equació $h/2$ com a perímetre.

generades a la Secció 2.6. Com a exemple es pot reprendre la Figura 2.7, i fixar-se en la sub-figura de l'esquerra, on es genera la imatge de les obertures corresponents a un disc de 2500 polsos per volta.

El següent pas ha estat obtenir el camp $U_z(x, y)$ generat a qualsevol distància z . Com que les distàncies a analitzar tenen una llargada de l'ordre de l'amplada de les obertures, s'ha utilitzat l'aproximació de Fresnel. En primer lloc, es realitza la Transformada de Fourier Ràpida [31] en dues dimensions de la matriu corresponent a la imatge del disc

$$FFT(U_0(x, y)) = \widehat{U}_0(\xi, \eta),$$

on ξ, η són les variables freqüència corresponents a x, y , respectivament. Com és obvi, aquest camp $\widehat{U}_0(\xi, \eta)$ té components complexes i forma una matriu de dimensions iguals a $U_0(x, y)$. Quan hom fa la FFT d'una mostra de mida N equiespaiada d'una funció en un interval de longitud L , els valors obtinguts són els continguts freqüencials, equiespaiats, fins a la màxima freqüència

$$f_m = \frac{N}{2L}.$$

En el cas simulat, s'ha considerat que cada punt equival a $1\mu m^2$, de manera que si la imatge s'ha generat de manera que $N_i = L_i\mu m$, l'equació anterior esdevé

$$f_m = f_m = \frac{1}{2}\mu m^{-1}.$$

El camp $\widehat{U}_0(\xi, \eta)$ és, llavors, una matriu de $N_x \times N_y$ punts dins el quadrat $[-f_m, f_m] \times [-f_m, f_m]$.

El següent pas consisteix a aplicar la funció de transferència corresponent a l'aproximació de Fresnel, donada a (3.4), de manera que s'estarà propagant el camp fins a una distància z seguint l'equació

$$\widehat{U}_z(\xi, \eta) = \widehat{U}_0(\xi, \eta)e^{ikz} \exp[-i\pi\lambda z(\xi^2 + \eta^2)].$$

Finalment, per obtenir la matriu del camp en l'espai euclidià, es fa la Transformada de Fourier Ràpida Inversa, tal que

$$U_z(x, y) = IFFT(\widehat{U}_z(\xi, \eta)).$$

Tal com s'ha dit abans a l'equació (3.13), la potència lumínica és

$$P_z(x, y) \propto |U_z(x, y)|^2,$$

i la seva distribució al llarg de (x, y) és, en definitiva, la imatge difractada que obtenim a una certa distància z .

A continuació, les Figures 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 i 3.9, mostren com varia la distribució transversal de camp quan z avança $\Delta z = \frac{1}{4}z_T$ cada cop.

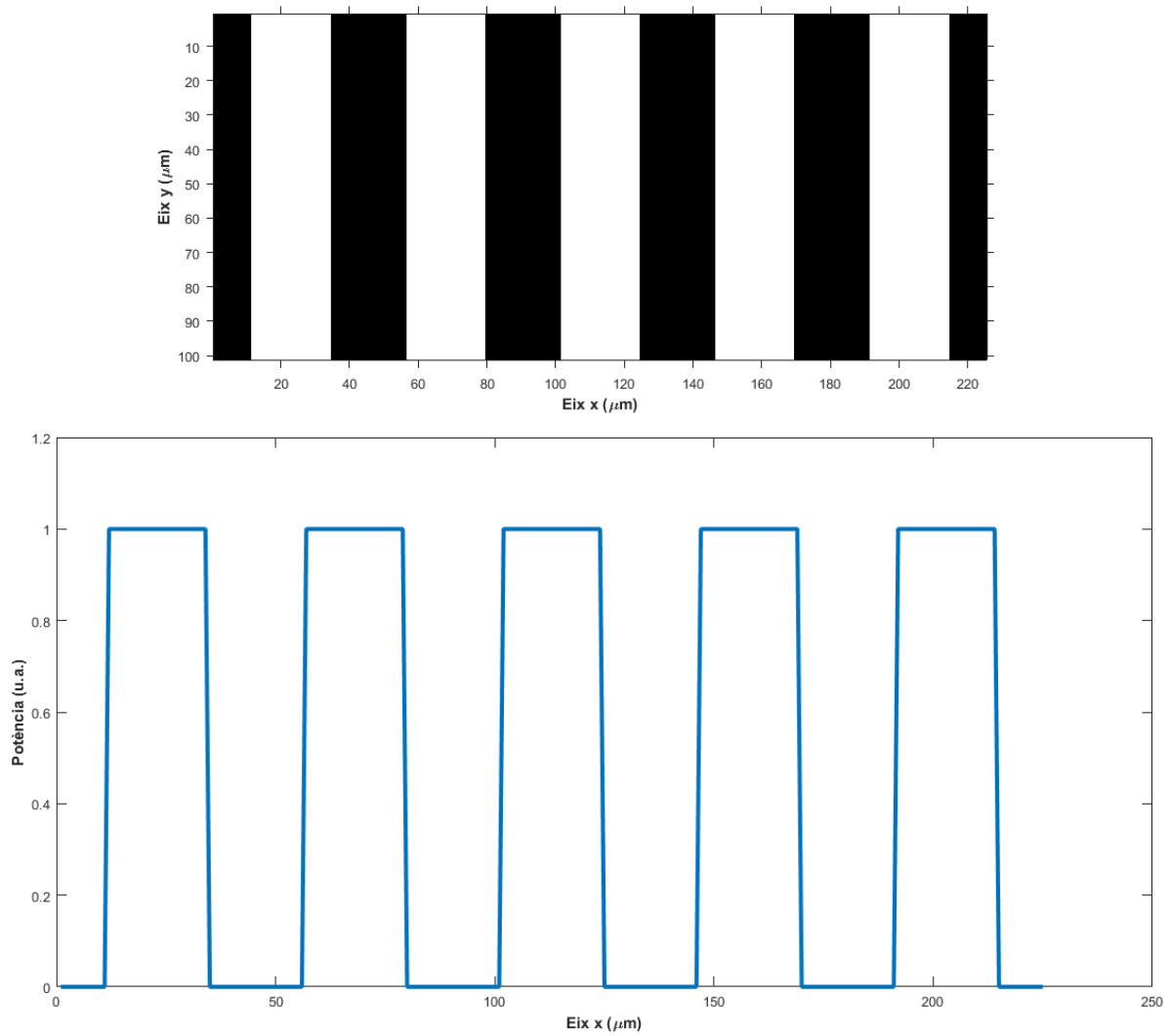


Figura 3.5: **Perfil de potència de llum a $z = 0$.** Imatges del perfil transversal de potència lumínica a la superfície d'un disc de 2500 polsos per volta. Vistes de la imatge $(x, y, P_z(x, y))$ i el corresponent perfil $P_z(x)$.

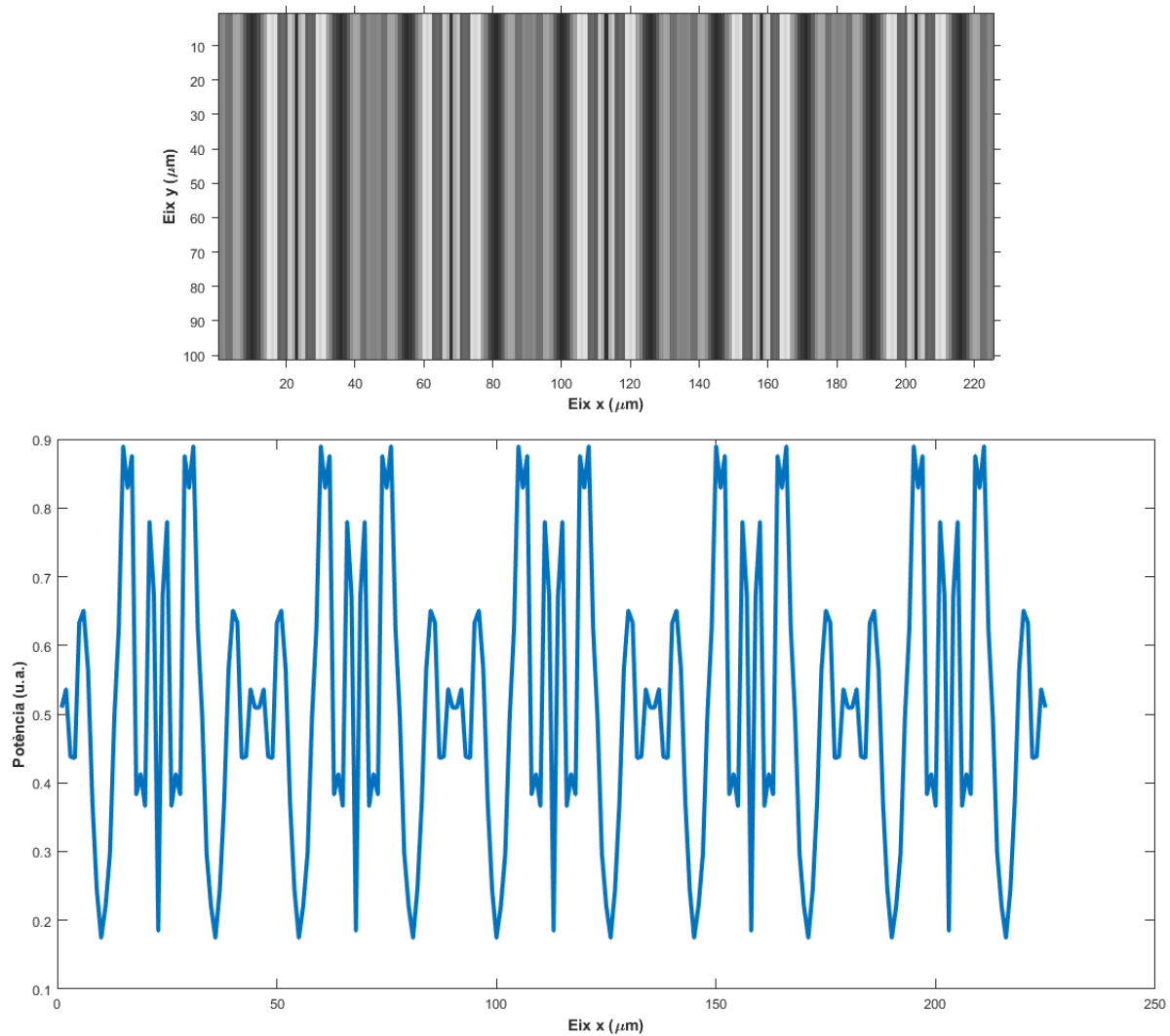


Figura 3.6: **Perfil de potència de llum a $z = \frac{z_T}{4}$.** Imatges del perfil transversal de potència lumínica, quan el camp es propaga a un quart de la distància de Talbot respecte a un disc de 2500 polsos per volta. Per analitzar l'efecte de difracció s'ha emprat l'aproximació de Fresnel. Es pot veure com el perfil és bastant irregular, de manera que a aquesta distància hauria de ser difícil de la detecció de senyal mitjançant una màscara. Vistes de la imatge $(x, y, P_z(x, y))$ i el corresponent perfil $P_z(x)$.

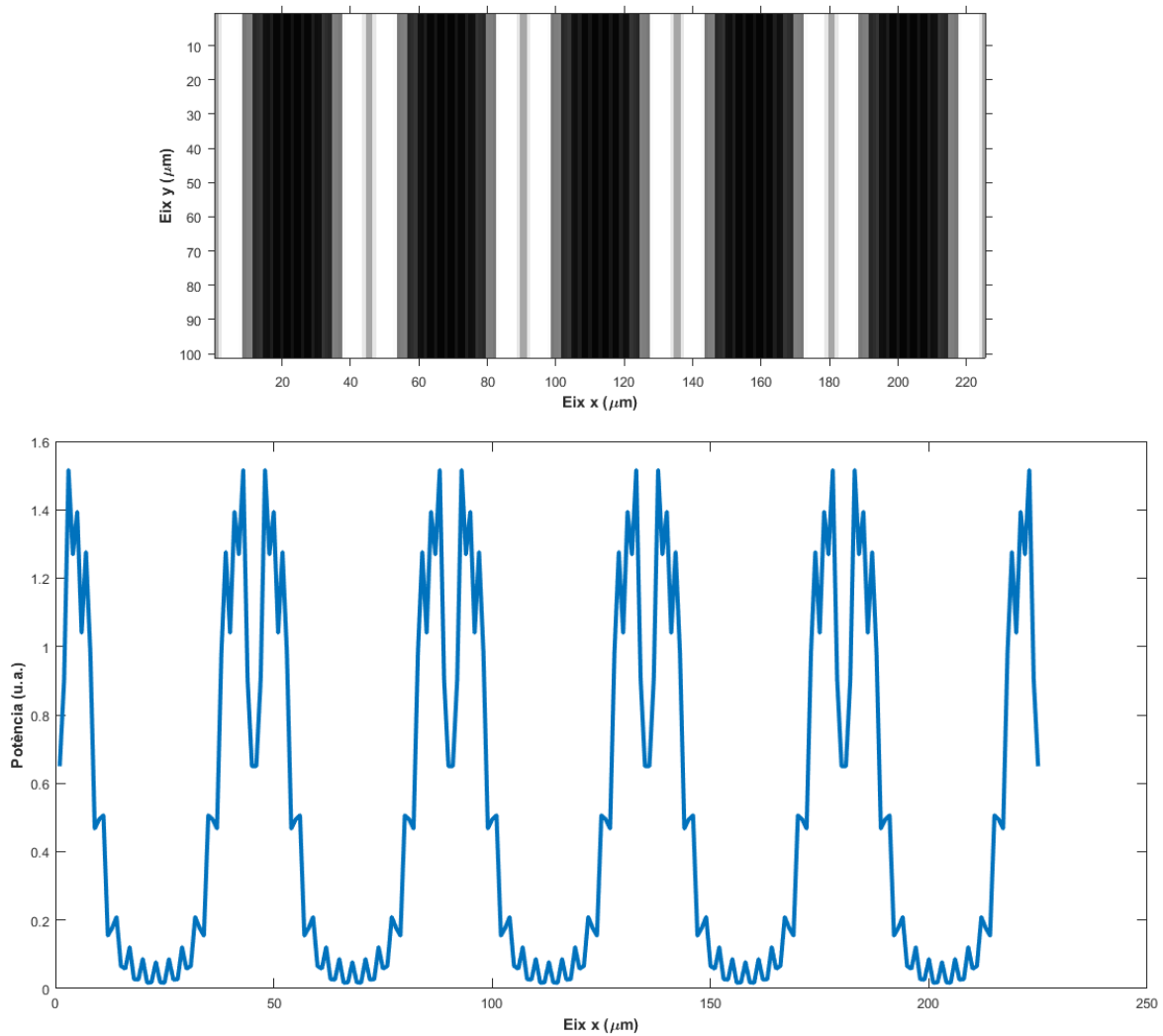


Figura 3.7: **Perfil de potència de llum a $z = \frac{z_T}{2}$.** Imatges del perfil transversal de potència lumínica, quan el camp es propaga a la meitat de la distància de Talbot respecte a un disc de 2500 polsos per volta. Per analitzar l'efecte de difracció s'ha emprat l'aproximació de Fresnel. El perfil agafa una distribució semblant a la de l'origen, però desplaçat 180° . Vistes de la imatge $(x, y, P_z(x, y))$ i el corresponent perfil $P_z(x)$.

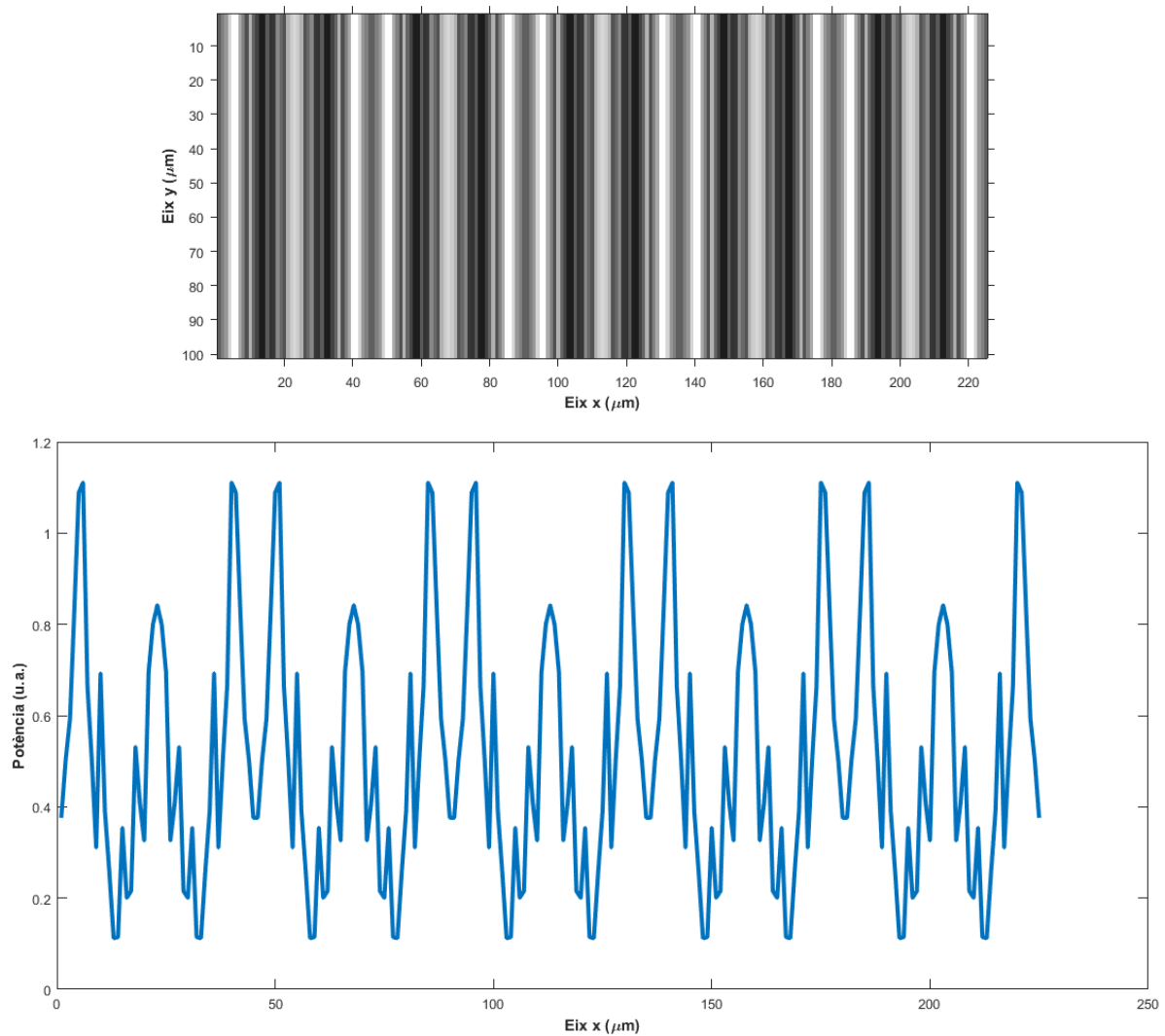


Figura 3.8: **Perfil de potència de llum a $z = \frac{3z_T}{4}$.** Imatges del perfil transversal de potència lumínica, quan el camp es propaga a tres quarts de la distància de Talbot respecte a un disc de 2500 polsos per volta. Per analitzar l'efecte de difracció s'ha emprat l'aproximació de Fresnel. El perfil torna a ser irregular, com quan s'ha analitzat a $z = \frac{z_T}{4}$. Vistes de la imatge $(x, y, P_z(x, y))$ i el corresponent perfil $P_z(x)$.

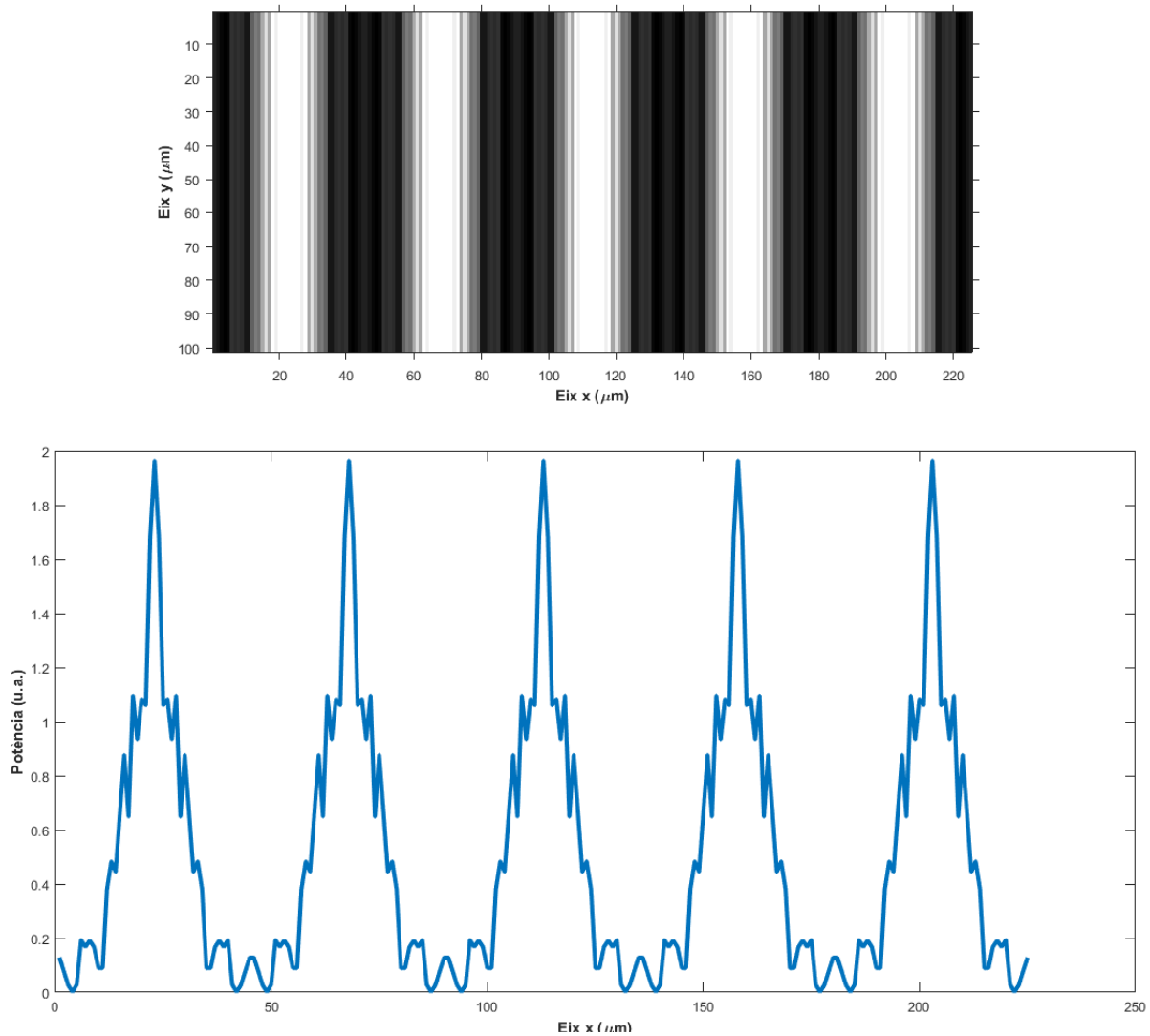


Figura 3.9: **Perfil de potència de llum a $z = z_T$.** Imatges del perfil transversal de potència lumínica, quan el camp es propaga fins a la distància de Talbot respecte a un disc de 2500 polsos per volta. Per analitzar l'efecte de difracció s'ha emprat l'aproximació de Fresnel. El perfil esdevé molt semblant a l'observat a l'origen, de manera que la imatge inicial queda reconstruïda a aquesta distància. Vistes de la imatge $(x, y, P_z(x, y))$ i el corresponent perfil $P_z(x)$.

3.6.2 Efecte Talbot

La Catifa de Talbot esmentada a la Secció 3.3 es pot visualitzar per mètodes numèrics, però no de forma experimental a ull nu. Per fer un model numèric utilitzem

$$P_z(\tau) = (U_z * H)(\tau, 0),$$

que podem mirar també com una convolució en la direcció de les x . Aquí, òbviament τ és un paràmetre discret. Aquesta funció P_z té associada una certa amplitud de senyal $A(z)$, i com és obvi, on més alta sigui aquesta amplitud, més fàcil serà analitzar el senyal. En el model teòric,

$$A(z) = \left| \cos\left(\pi \lambda z \frac{l^2}{a^2}\right) \right|.$$

A la Figura 3.10 es mostra una gràfica de com varia $A(z)$ segons la distància a la qual es col·loca la màscara analitzadora. S'han emprat tres tipus de màscara diferents per fer una comparació de resultats: una màscara de polsos rectangulars, una de tipus M1G i una de M2G. A l'esmentada figura es comprova que la màscara que dóna una variació més estable de A alhora que augmenta z és la M2G, mentre que la màscara de polsos és la que presenta unes variacions més irregulars. A priori, això ja sembla ser un primer indicatiu del fet que la màscara M2G és la més robusta enfront variacions d'AG, però no és suficient.

3.6.3 Comparació de la qualitat del senyal sinusoidal segons el tipus de màscara analitzadora

A l'apartat anterior, s'ha pogut comprovar com l'amplitud de senyal $A(z)$ augmenta quan l'air-gap s'acosta a un múltiple de la meitat de la distància de Talbot i desapareix quan es desplaça un quart d'aquesta distància. Comparant entre diferents màscares, s'ha vist com la M2G presenta variacions més suaus a mesura que varia z . Aquesta dada $A(z)$ ens indica la mesurabilitat de senyal a aquella distància, però, en principi, això no té cap correlació amb la qualitat del senyal sinusoidal.

Per calcular la semblança d'un cert senyal respecte a una sinusoidal teòrica hem utilitzat el mètode de fitting. Per fer-ho, es genera una corba del tipus $y = y_0 + A/2 \sin\left(\frac{2\pi}{a}(\tau + \varphi_0)\right)$, on y_0 , A i φ_0 són paràmetres obtinguts a partir del senyal a analitzar, de manera que $y(\tau)$ s'ajusti el màxim possible a $P_z(\tau)$. Per veure la qualitat de l'ajust, s'ha sumat la quantitat d'error de mínims quadrats corresponent a cada punt. És a dir,

$$e_z = \frac{\sum_{\tau} |y(\tau) - P_z(\tau)|^2}{A^2}.$$

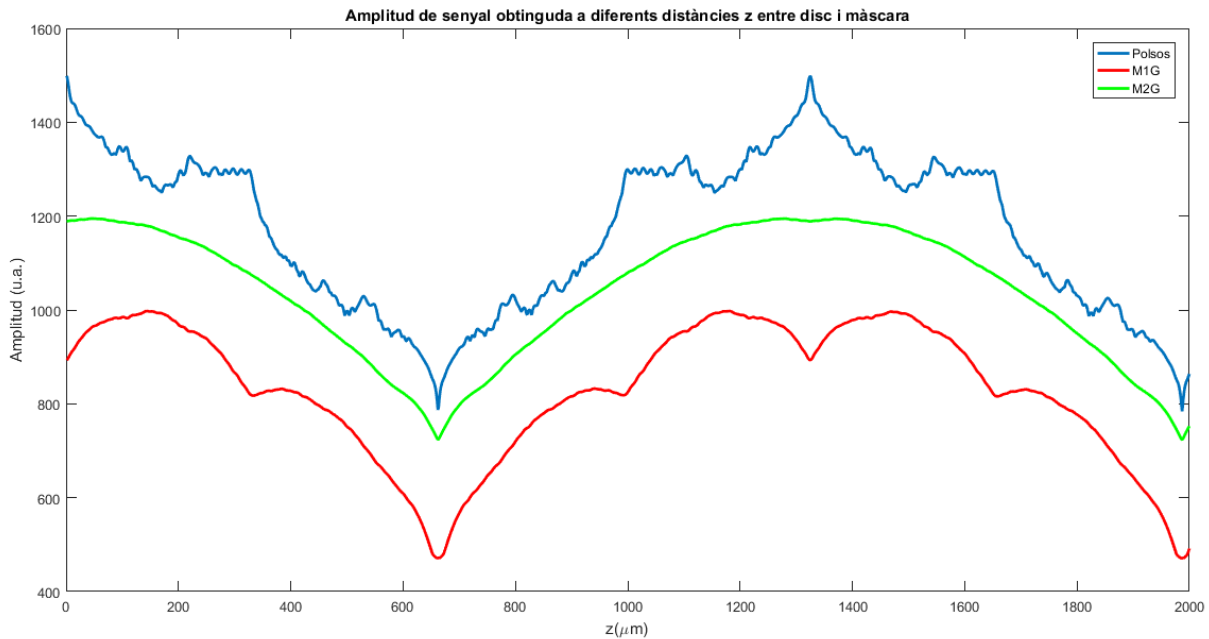


Figura 3.10: **Variació d'amplitud de senyal A en funció de z .** Perfils d' $A(z)$ dels senyals obtinguts al fer la convolució $U_z(x, y) * H(x, y)$, considerant que $U_0(x, y)$ són obertures d'un disc de 4096 impulsos (i.e. període $a \approx 28\mu\text{m}$). La línia blava correspon a utilitzar una màscara de polsos, la vermella una M1G i la verda una M2G. Es comprova que la M2G és la més estable de les tres. D'altra banda, tant la M2G com la de polsos mostren un mínim a $z = z_T/4 = 663\mu\text{m}$ i un màxim a $z = z_T/2 = 1325\mu\text{m}$, que concorda amb els resultats esperats quan s'utilitza una font de llum de $\lambda = 633\text{nm}$.

Òbviament, com més baix és l'error e_z , millor qualitat de senyal sinusoidal s'està obtenint. La Figura 3.11 mostra com varia aquest error enfront l'Air-Gap, fent una comparació de robustesa i qualitat entre les tres màscares utilitzades: polsos, M1G i M2G.

Com a conclusió final, es pot afirmar que la màscara M2G presenta una gran robustesa de senyal sinusoidal enfront quasi qualsevol AG. En primer lloc, la variació d'amplitud de senyal $A(z)$ varia de forma progressiva a mesura que augmenta l'AG, seguint una paràbola la qual es fa mínima quan $z_{\min} = \left(\frac{2m+1}{4}\right) z_T$ i màxima quan $z_{\max} = \left(\frac{m}{2}\right) z_T$ per $m \in \mathbb{N}$, quan amb les altres màscares les variacions d'amplitud són més irregulars. I més important encara, l'error d'ajust respecte a una sinusoidal teòrica és gairebé nul a qualsevol distància, essent només significat a $z_{\min} = \left(\frac{2m+1}{4}\right) z_T$. Aquest fet permet obviar l'efecte de criticitat d'AG, i alhora poder dissenyar encoders amb gran robustesa, sobretot quan la resolució és elevada. D'altra banda, la màscara M1G presenta bons resultats a les distàncies de Talbot, però per a altres z l'error respecte a un senyal sinusoidal és bastant elevat. Finalment, el senyal de polsos presenta perfils irregulars tant de $e(z)$ com de $A(z)$, descartant-la com a possible màscara per generar senyals sinusoidals.

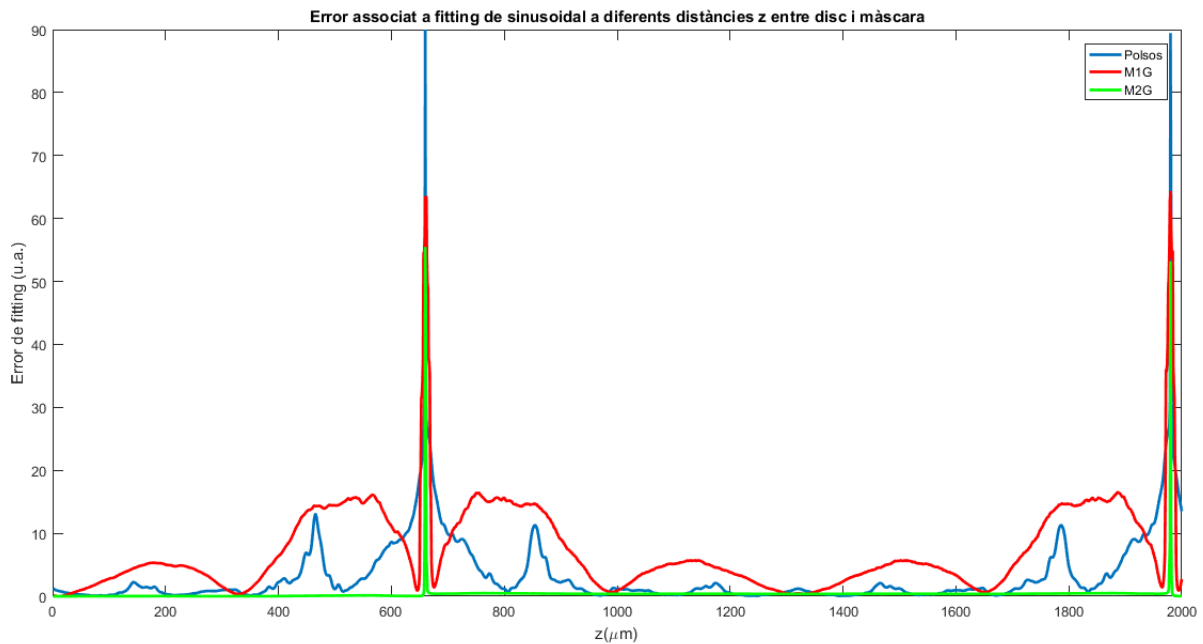


Figura 3.11: **Anàlisi d'error d'ajust en funció de l'Air-Gap.** Mesura de l'error d'ajust d'un senyal a-periòdic respecte a una sinusoidal teòrica en funció de la separació entre disc i màscara z . El senyal a-periòdic correspon a la convolució $U_z(x, y) * H(x, y)$, considerant que $U_0(x, y)$ són obertures d'un disc de 4096 impulsos (i.e. període $a \approx 28\mu m$). La línia blava correspon a utilitzar una màscara de polsos, la vermella una M1G i la verda una M2G. Es comprova que la M2G presenta errors molt baixos per a quasi qualsevol distància, apareixent màxims pronunciats només quan $z = \left(\frac{2m+1}{4}\right) z_T$ per $m \in \mathbb{N}$ (amb llum $\lambda = 633nm$).

Capítol 4

Resultats experimentals

Fruit dels desenvolupaments analítics realitzats als Capítols 2 i 3, s'han obtingut dos tipus de màscares que quan són implementades en un encoder, fan que els fotodíodes receptors rebin senyals sinusoidals. Ara bé, s'ha mostrat que amb la M2G s'obtenen sinusoidals pures a quasi qualsevol Air-Gap, mentre que la M1G només ho compleix a múltiples de la meitat de la distància de Talbot.

Tots aquests càlculs i comprovacions s'han realitzat de manera analítica (utilitzant aproximacions) i numèrica amb resultats satisfactoris, essent el següent pas natural comprovar-ho de forma empírica mitjançant un procediment experimental. Aquestes proves s'han centrat a validar diferents efectes tenint en compte les possibles variables:

1. Efecte de Talbot

- (a) **Font de llum.** La font de llum afecta significantment a l'efecte Talbot per diferents motius. El fet de tenir una font més o menys extensa afecta la qualitat de col·limació del feix. El grau de monocromaticitat i coherència afecta a com d'ideal serà la Catifa de Talbot generada. La longitud d'ona λ juga un paper fonamental per determinar on està posicionada la distància de Talbot. Doncs, hi ha grans diferències entre utilitzar un LED o un Làser, i s'ha de tenir en compte com és el seu espectre d'emissió.
- (b) **Resolució del disc.** La resolució del disc determina com ha de ser l'amplada de les obertures, la qual és una variable que també determina on es posiciona la distància de Talbot. Recordem que

$$z_T = \frac{2a^2}{\lambda}.$$

- (c) **Voltatge Pic-a-Pic (VPP) fotodíode.** En fer girar el disc enfront la màscara situada a un cert AG, el fotodíode dóna un senyal output amb un cert voltatge Pic-a-Pic. Segons la Figura 3.10, amb la màscara de polsos rectangulars o M2G, s'obtindran

màxims de VPP a meitats de la distància de Talbot i mínims a $z = \frac{2m+1}{4}z_T$.

2. Qualitat i robustesa de senyal sinusoidal enfront Air-Gap

- (a) **Tipus de màscara.** Depenent del tipus de màscara i a quina distància estigui situada respecte al disc, s'obté un tipus de senyal output diferent al fotodíode. Així que s'ha realitzat el mètode experimental intercanviant entre les màscares de polsos rectangulars, M1G i M2G.
- (b) **Duty-cycle.** Aquesta variable serveix per definir quin percentatge del senyal està per sobre de $V = \frac{1}{2}V_{PP}$ i quin per sota. És un primer bon indicatiu de si s'està obtenint un senyal amb bon ajust sinusoidal, el qual idealment hauria de tenir un duty-cycle del 50%, lluny d'aquest valor és un indicatiu del fet que la qualitat del senyal no és bona.
- (c) **Ajust respecte a un senyal sinusoidal ideal.** Mitjançant tècniques de fitting s'obté una corba sinusoidal teòrica que s'ajusta a les dades experimentals. L'error de mínims quadrats calculat punt a punt entre ambdues corbes determina la qualitat de l'ajust. Aquest valor és el que finalment permet fer una comparació de robustesa i qualitat de senyal entre màscares sota variació d'AG.

4.1 Setup experimental

Com s'ha esmentat anteriorment, les condicions experimentals depenen de diferents variables a tenir en compte. En conseqüència, per tenir tots els paràmetres controlats, s'ha dissenyat un setup experimental adient. Per garantir una bona fixació i alineació, s'ha utilitzat una placa de proves òptiques on s'hi ha afegit els següents elements:

- **Font de llum i Sistema col·limador-expandidor de feix.** A les simulacions realitzades de forma numèrica s'ha considerat que el feix que incideix sobre el disc té un front d'ona pla, i que a més a més és suficientment ample com per il·luminar tota la màscara. Per aquest motiu, és important tenir un primer sistema òptic que expandeixi i col·limi la llum emergent de la font. El sistema utilitzat ha estat el que s'esquematitza a la Figura 4.1.

En primer lloc, esmentar que s'ha utilitzat tres tipus diferents de font de llum. Un Díode Làser Vermell ($\lambda = 639nm$, $\theta = 8^\circ$) [32], un Díode Làser Blau ($\lambda = 405nm$, $\theta = 8.5^\circ$) [33] i un LED blau ($\lambda = 470 \pm 12.5nm$, $\theta = 15^\circ$) [34].

La font es col·loca a la focal d'una lent esfèrica ($f_{asf} = 11mm$, $NA = 0.26$, Diàmetre d'obertura efectiva = $5,5mm$) [35] encarregada de fer una bona primera col·limació del feix.

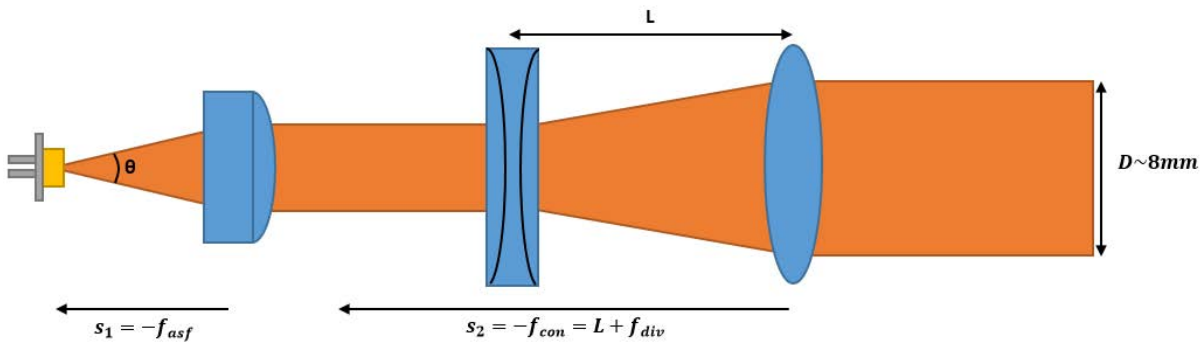


Figura 4.1: **Esquema del sistema col·limador-expandidor de feix.** Es presenta un esquema de com s'ha col·locat una font de llum (Làser Blau, Làser Vermell, LED Blau) a la focal d'una lent asfèrica per fer una col·limació de la llum. Un sistema de telescopi invers de Galileu format per una lent biconcava i una biconvexa fan d'expandidor, generant un feix col·limat d'uns $8mm$ de diàmetre.

Mitjançant un sistema telescopi de Galileu invers es fa l'expandidor de feix, el qual ha d'assolir un diàmetre $D \approx 8mm$. En aquest cas s'ha utilitzat una lent divergent biconcava ($f_{div} = -25mm$, Diàmetre = $25.4mm$) [36] alineada amb una lent convergent biconvexa ($f_{con} = 50mm$, Diàmetre = $25.4mm$) [37], les quals han d'estar separades a una distància $L = f_{con} - |f_{div}| = 25mm$.

Tots elements han estat alineats amb el sistema 'Cage Plate' [38], el qual utilitza unes muntures fixes alineades mitjançant varetes d'alumini, per assegurar que tot el sistema és solidari a un mateix eix òptic. El feix resultat s'ha enfocat perpendicularment al disc d'un encoder sobre la regió on estan impreses les obertures. La Figura 4.2 mostra un primer disseny amb l'eina Solid Works.

- **Sistema encoder adaptat.** Per fer les proves s'han utilitzat encoders incrementals de diferents resolucions: 500, 1024, 2500 i 4096 pulsos per volta. Cadascun dels cossos d'aquests encoders han estat tallats de manera que el feix col·limat pugui enfocar el disc, tal com es pot veure a la Figura 4.3. Mitjançant un sistema d'engranatges l'eix de l'encoder es mou solidari a un motor extern, fent rotar el disc a velocitat constant. A l'altre costat del cos hi ha unes rosques per fixar la placa electrònica, la qual conté la matriu de fotodíodes analitzadors per a cada canal.
- **Sistema de posicionament de màscara, controlador d'AG** Per a cada resolució d'encoder (500, 1024, 2500 i 4096 pulsos per volta) s'han dissenyat els tres tipus de màscara a comparar: pulsos rectangulars, M1G i M2G. La màscara es controla de forma externa i s'introdueix entre el disc i els fotodíodes de manera paral·lela a aquests. Mitjançant un



Figura 4.2: **Disseny del sistema col·limador-expandidor de feix.** Sistema 'Cage Plate' per alinear i fixar tots els elements en un mateix eix òptic. D'esquerra a dreta s'observa: la font de llum, una lent esfèrica, una lent bicòncava i una biconvexa.

control [39] es pot variar la distància d'AG de manera micromètrica fins a una distància de 15mm . A la Figura 4.3 es mostra el disseny complet d'aquest sistema.

- **Sistema de centrat de disc i màscara** Un dels fets imprescindibles per al bon funcionament d'un encoder és que el disc i la màscara estiguin centrats. Això vol dir posicionar la màscara de manera que les obertures coincideixin amb les del disc, sinó es pot donar l'efecte de Franges de Moiré [40] i obtenir senyals defectuosos. Per fer-ho, un control de 5-eixos [41] posiciona la màscara en (x, y, z) i dos angles de rotació. Amb una càmera microscòpica es busca la posició centrada, tal com es pot veure a la Figura 4.4.
- **Detecció i mesura de senyal.** A un costat del cos hi ha unes rosques per fixar la placa electrònica amb circuit imprès, la qual conté la matriu de fotodíodes analitzadors per a cada canal. Cada canal detector té associat un pin on s'hi ha pinçat una sonda, la qual està connectada a un oscil·loscopi. D'aquesta manera, es pot mesurar el V_{pp} i el duty del senyal, guardar una imatge del senyal o descarregar les dades per a un futur processat. A la Figura 4.5 es mostra un exemple d'imatge obtinguda per oscil·loscopi d'un senyal sinusoidal, on automàticament es poden prendre mesures de V_{pp} i Duty-cycle.

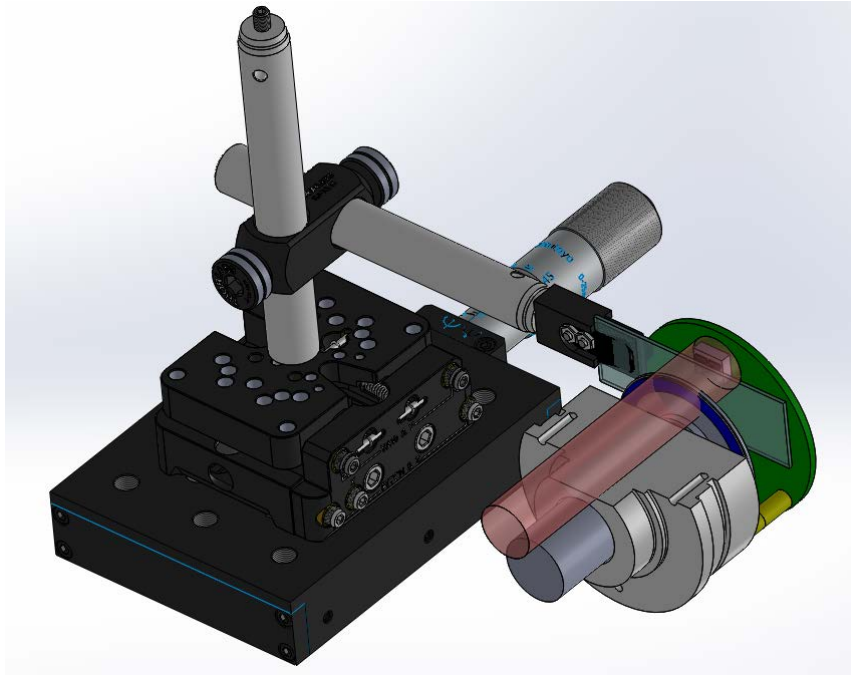


Figura 4.3: **Disseny del sistema encoder tallat i control de moviment de màscara.** S'observen diferents elements: un encoder tallat de manera que el feix extern pugui incidir sobre el disc, un control micromètric que permet variar l'AG entre disc i màscara, un controlador de posició de 5-eixos utilitzat per fer un bon centrat de disc i màscara, i una placa electrònica amb la matriu dels fotodíodes encarregats de registrar el senyal.

El setup en conjunt es pot veure a la Figura 4.6.

4.2 Anàlisi de dades experimentals

4.2.1 Comparació de robustesa entre màscares per obtenir senyals sin/cos enfront variacions d'AG

Com hem vist en seccions anteriors, la robustesa de senyal sinusoidal sota variacions d'AG de la màscara M2G respecte a la M1G hauria de ser bastant alta. Aquesta hipòtesi s'ha verificat mitjançant tècniques numèriques, però també s'ha comprovat de manera empírica.

Per comprovar-ho s'ha realitzat l'experiment en les següents condicions. S'ha utilitzat com a font de llum el Díode Làser vermell el qual s'ha col·limat, expandit i enfocat cap a un disc de 500 polsos/volta. S'ha elegit aquest disc pel motiu que les obertures són relativament grans (respecte a, per exemple, un disc de 2500 polsos/volta), i així poder contrastar millor les diferències entre màscares. Alhora, per resolucions baixes, l'error introduït en el centrat de disc i màscara és menys significant.

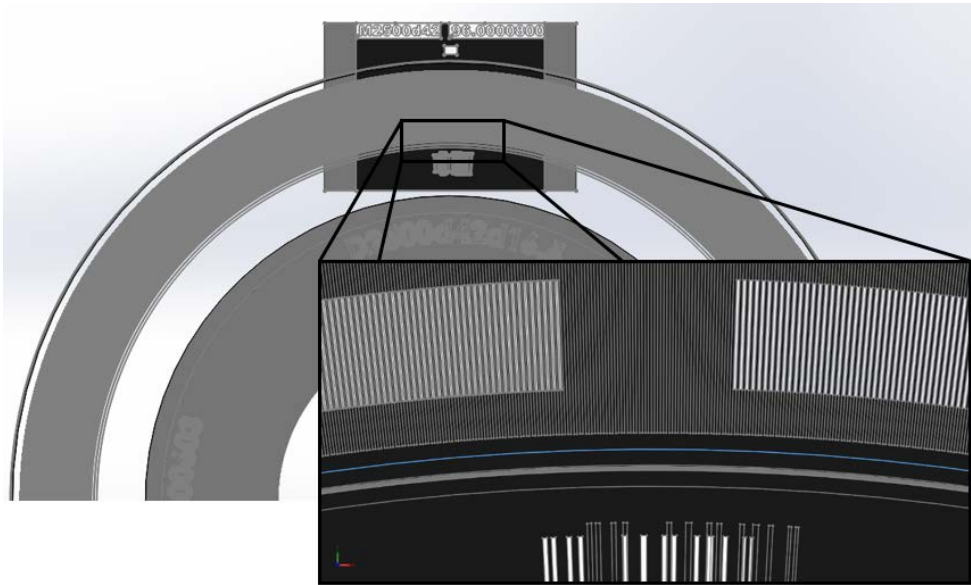


Figura 4.4: **Centrat de disc i màscara.** La línia blava que s'observa a la imatge és la línia de centrat, la qual està impresa en disc i màscara. Aquesta línia ha de coincidir pel fet que ambdós elements estiguin ben centrats i que les obertures de la màscara coincideixin amb les del disc quant a coordenades cilíndriques.

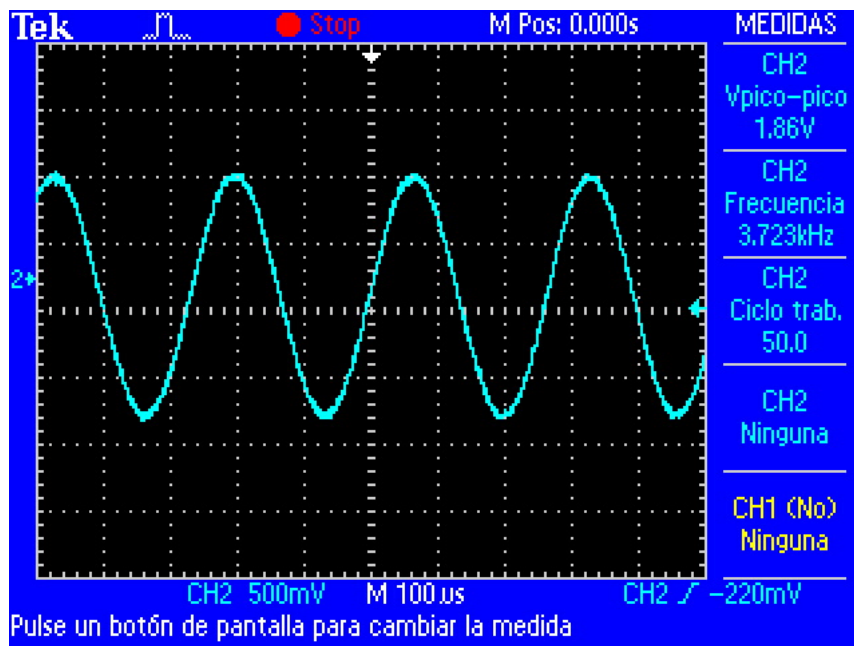


Figura 4.5: **Imatge de senyal d'oscil·loscopi.** Senyal sinusoidal obtingut a partir d'un disc de 500 pulsos/volta i una màscara de M2G. Al panell dret hi ha les mesures de Vpp (Vpico-pico) i Duty-cycle (Ciclo trab.)

En aquestes condicions, s'han utilitzat els tres tipus de màscara disponibles: pulsos rectangulars, M1G i M2G. Després del centrat entre disc i màscara, s'ha mogut el control micromètric

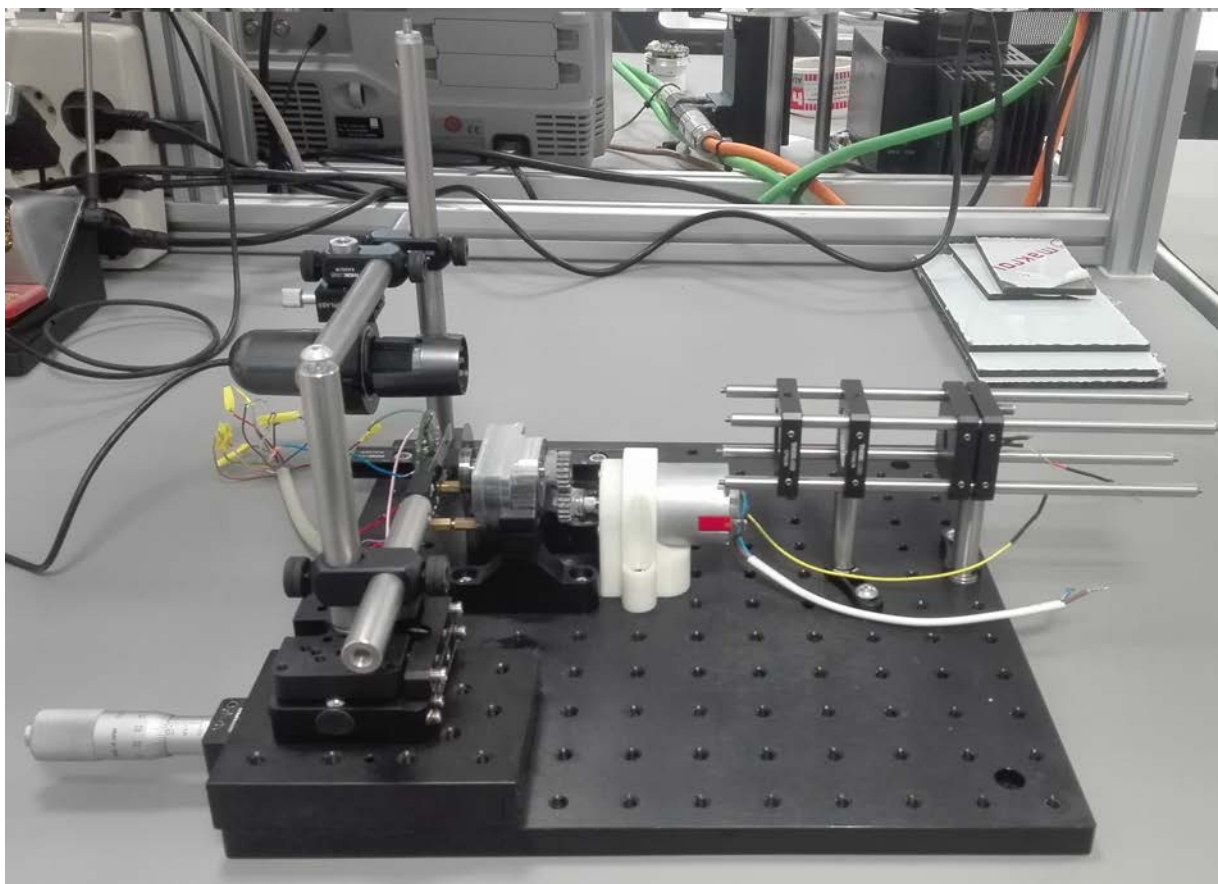


Figura 4.6: **Setup experimental final.** Conjunt d'elements físics utilitzats per a fer les proves experimentals, on es pot observar el sistema col·limador-expansor, el sistema encoder-motor, el control micromètric d'AG amb el sistema d'ajust de 5 eixos de la màscara, la càmera de centrat i la placa electrònica amb els fotodíodes receptors.

fins que ambdós elements estiguessin tocant-se, és a dir, sense haver-hi AG, $z = 0mm$. Fent girar el disc a velocitat constant amb l'ajuda d'un motor, s'ha generat un senyal periòdic mesurat a l'oscil·loscopi. S'han obtingut dades variant la distància d'AG entre $z = 0mm$ i $z = 10mm$ amb la precisió del control micromètric.

Les Figures 4.7, 4.8 i 4.9 mostren els resultats obtinguts de V_{pp} , Duty-Cycle i Error d'Ajust respecte a Sinusoidal. D'aquestes dades obtenim la següent informació: els V_{pp} quasi no varien respecte a la variació d'AG pel motiu que, en aquestes condicions, la primera distància de Talbot es troba a $z_T(500) = 180mm$. S'aprecia com els Duty-cycles corresponents a la màscara de polsos rectangulars i M2G es mantenen bastant estables amb l'augment de gap, mentre que la M1G presenta una pujada considerable, donant uns primers símptomes de baixa robustesa.

El test definitiu que compara la robustesa és l'Error d'ajust respecte a una Sinusoidal, on es poden treure algunes conclusions: la màscara de polsos rectangulars comença amb un error considerable, ja que a $z = 0$, al no haver encara difracció, el senyal obtingut és triangular, que

és el resultat esperat de fer la convolució de dues obertures rectangulars. D'altra banda, la M1G presenta un molt bon ajust al voltant de l'origen, però quan es comença a augmentar z , l'error també puja. En canvi, utilitzant la màscara M2G l'error d'ajust no varia independentment d'on posicionem la màscara. La Figura 4.10 és un càlcul numèric de com hauria de ser l'Error d'Ajust en aquestes condicions, i es pot apreciar que les dades experimentals segueixen corbes semblants a aquestes, validant així la fiabilitat del mètode. Finalment s'acaba verificant la hipòtesi de la robustesa de la màscara M2G vers les altres utilitzant elements físics.

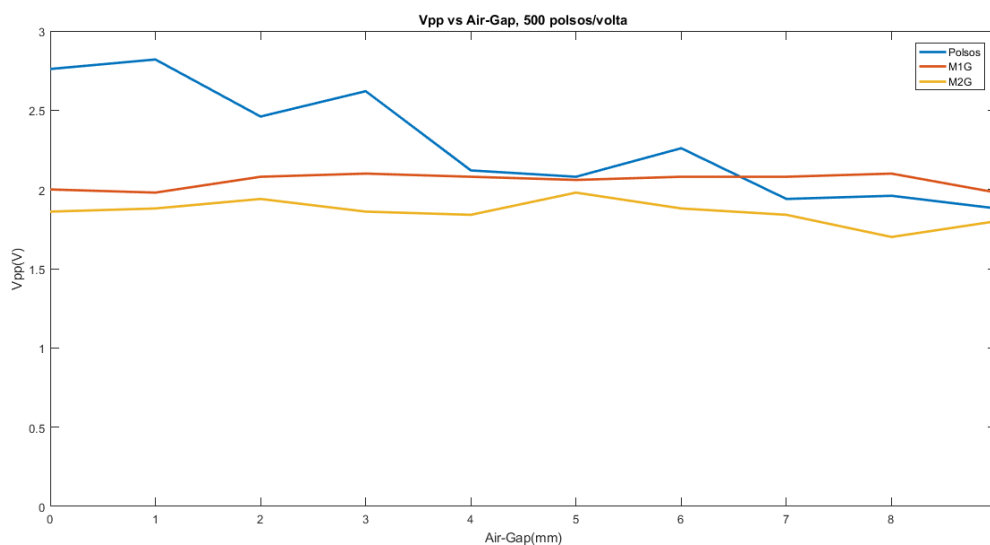


Figura 4.7: **Vpp enfront Air-Gap.** Dades experimentals de Voltatge pic-a-pic del senyal enfront l'AG entre disc i màscara, comparant els resultats entre una màscara de polsos rectangulars, una M1G i una M2G amb obertures corresponents a un encoder de 500 polsos per volta. En els tres casos no s'aprecia quasi variació, ja que en aquestes condicions la distància de Talbot queda molt lluny.

4.2.2 Mesura de l'Efecte Talbot

Tal com s'ha vist a les Figures 3.11 i 3.10 de la Secció 3.6.2, quan l'AG s'acosta a $z = \frac{(2m+1)}{4} z_T$ el Voltatge Pic-a-Pic és molt baix, de manera que pot haver-hi problemes amb la detecció de variació de potència lumínica al fotodíode, i alhora, l'Error d'Ajust respecte a una sinusoidal teòrica esdevé molt gran, fins i tot per la màscara M2G, verificada com la més robusta. Aquest fet pot ser crític, ja que el xip interpolador pot necessitar un cert voltatge V_{pp} per operar correctament. Llavors, en definitiva, a l'hora de fabricar un encoder només s'ha de tenir en compte no col·locar la màscara a una separació del disc propera a $z = \frac{(2m+1)}{4} z_T$.

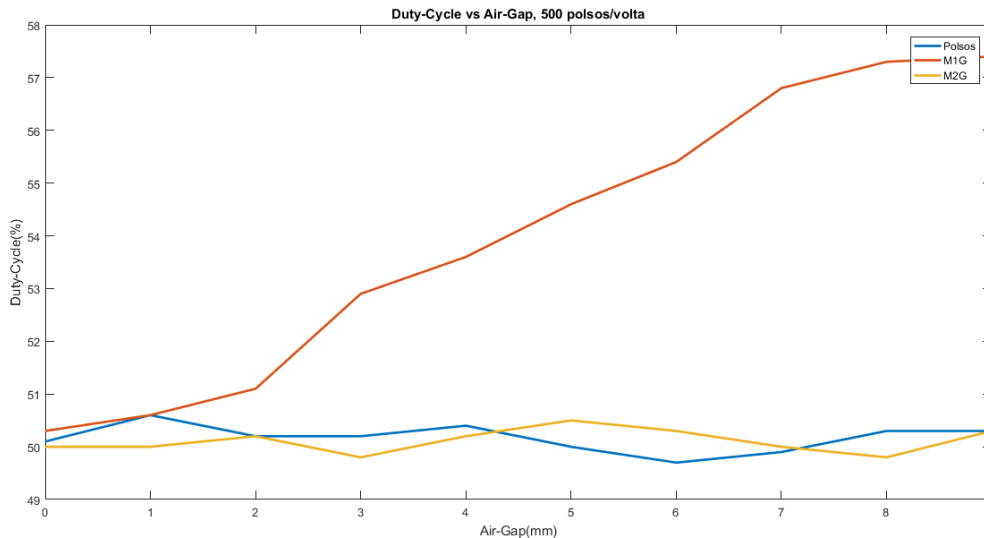


Figura 4.8: **Duty enfront Air-Gap.** Dades experimentals del Duty-Cycle del senyal enfront l'AG entre disc i màscara, comparant els resultats entre una màscara de polsos rectangulars, una M1G i una M2G amb obertures corresponents a un encoder de 500 polsos per volta. La corba corresponent a M1G va pujant de valor, donant a entendre la baixa robustesa que ofereix aquesta màscara enfront variacions de gap.

Tot i haver fet simulacions numèriques de l'efecte Talbot, s'han realitzat proves experimentals per validar el comportament de forma física. Com s'ha comentat abans, aquest efecte només depèn de la longitud d'ona de la font de llum utilitzada i de l'ample de les obertures a-periòdiques.

Les fonts de llum utilitzades han estat un Làser Blau ($\lambda = 405nm$), un Làser Vermell ($\lambda = 639nm$) i un LED Blau ($\lambda = 470 \pm 12.5nm$). Aquest fenomen apareix a causa d'efectes de difracció i interferència, de forma que depèn de la monocromaticitat i coherència de la font de llum, i a més a més de la qualitat de col·limació del feix incident. Per aquest motiu, s'ha volgut validar també que l'efecte Talbot apareix molt més difós quan s'han realitzat els experiments amb llum LED.

D'altra banda, per a les proves s'han utilitzat discs de 2500 i 4096 *polsos/volta*, ja que són resolucions on la distància de Talbot és relativament curta. Concretament, tenim $a_{2500} = 48\mu m$ i $a_{4096} = 29\mu m$, de manera que per al Làser Vermell s'obté $z_T(2500, \lambda = 639nm) = 7.14mm$ i $z_T(4096, \lambda = 639nm) = 2.66mm$, i per al Làser Blau $z_T(2500, \lambda = 405nm) = 11.26mm$ i $z_T(4096, \lambda = 405nm) = 4.20mm$.

L'efecte Talbot s'ha comprovat mesurant el Vpp del senyal amb un oscil·loscopi, obtingut amb el disc girant a un cert Air-Gap respecte a la màscara. Després d'un adequat centrat, amb el control micromètric s'ha pogut fer un desplaçament de la màscara al llarg de l'eix z . A les Figures 4.11 i 4.12 es poden veure els resultats obtinguts. En tots casos s'ha determinat que

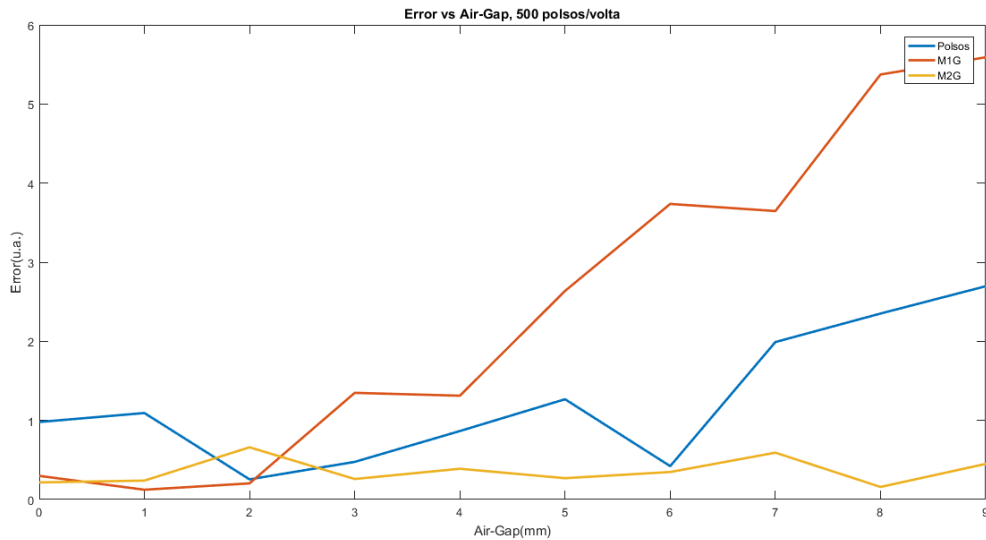


Figura 4.9: **Error d’Ajust de sinusoidal enfront Air-Gap (Experimental)**. Error d’Ajust de les dades experimentals respecte a una sinusoidal teòrica, a mesura que s’augmenta l’AG entre disc i màscara, comparant els resultats entre una màscara de polsos rectangulars, una M1G i una M2G amb obertures corresponents a un encoder de 500 polsos per volta. Es confirma que la màscara M2G presenta gran robustesa de senyal sota qualsevol gap, mentre que les altres màscares tenen errors significants a algunes distàncies.

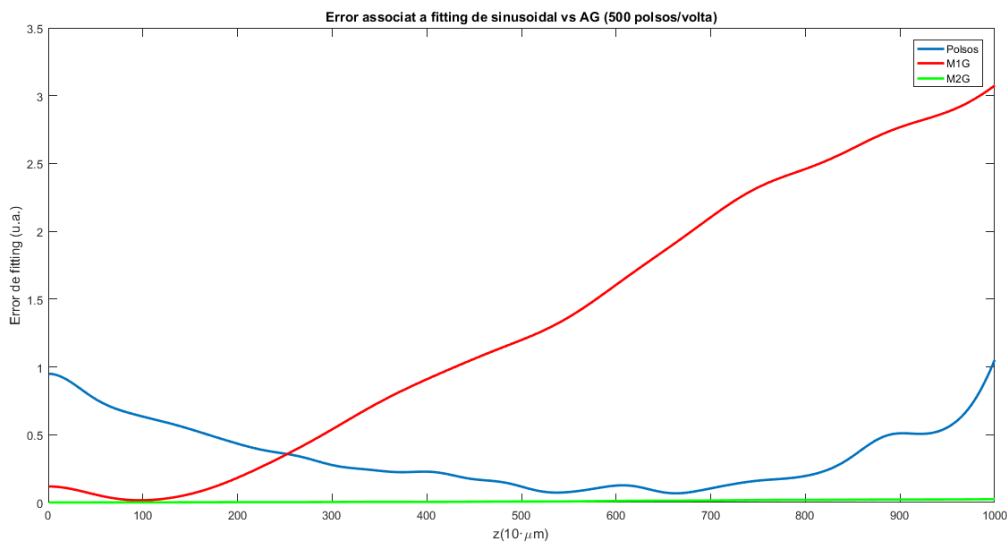


Figura 4.10: **Error d’Ajust de sinusoidal enfront Air-Gap (Simulat)**. Corbes de variació de l’Error d’Ajust respecte a una sinusoidal teòrica enfront l’augment del gap. Es pot comprovar que les corbes segueixen una trajectòria semblant als resultats experimentals.

l'efecte Talbot es compleix tal com s'ha predit teòricament, i que s'obtenen mínims i màxims de V_{pp} a les distàncies corresponents. En el cas del LED, s'observa aquest efecte, però els valors de V_{pp} són baixos en comparació a quan s'utilitza una font làser; fet que indica que la Catifa de Talbot presenta un patró més difós.

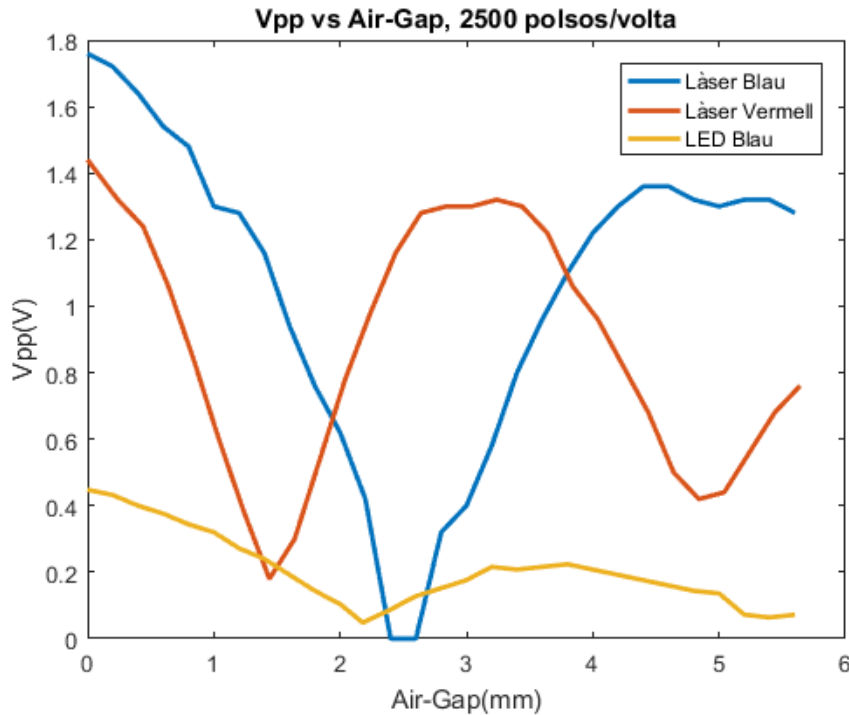


Figura 4.11: **Vpp enfront Air-gap. Resolució de 2500 polsos/volta i diferents fonts de llum.** Realitzant l'experiment amb diferents fonts de llum (Làser Blau, Làser Vermell i LED Blau) es mesura el Voltatge Pic-a-Pic del senyal obtingut a mesura que s'augmenta l'Air-Gap. Quant a la corba Blava (Làser Blau) s'observa un mínim a $z = 2.5mm$ corresponent a $z \approx \frac{(2m+1)}{4}z_T$ on $z_T(2500, \lambda = 405nm) = 11.26mm$, i un màxim a $z = 4.6mm$, corresponent a $z \approx \frac{(m)}{2}z_T$. D'altra banda, la corba Vermella (Làser Vermell) té dos mínims a $z = 1.44mm$ i $z = 4.8mm$ corresponent a $z \approx \frac{(2m+1)}{4}z_T$ on $z_T(2500, \lambda = 639nm) = 11.26mm$, i un màxim a $z = 3.24mm$, corresponent a $z \approx \frac{(m)}{2}z_T$. La corba corresponent al LED segueix un patró amb unes variacions mínimes de V_{pp} , però es diferencia un mínim a $z = 2.4mm$ i un màxim a $z = 3.8mm$, que corresponen un altre cop a un quart i a la meitat de la distància de Talbot, respectivament.

Fent un recull dels resultats obtinguts s'arriba a les següents conclusions. En absència d'AG i a les distàncies de Talbot (concretament $z = \frac{m}{2}z_T$), tant amb la màscara M1G com la M2G s'obtenen senyals sinusoidals que s'ajusten bastant bé a la corba teòrica. A l'hora d'augmentar el gap, la M1G va presentant errors elevats, mentre que la M2G va mantenint el perfil sinusoidal,

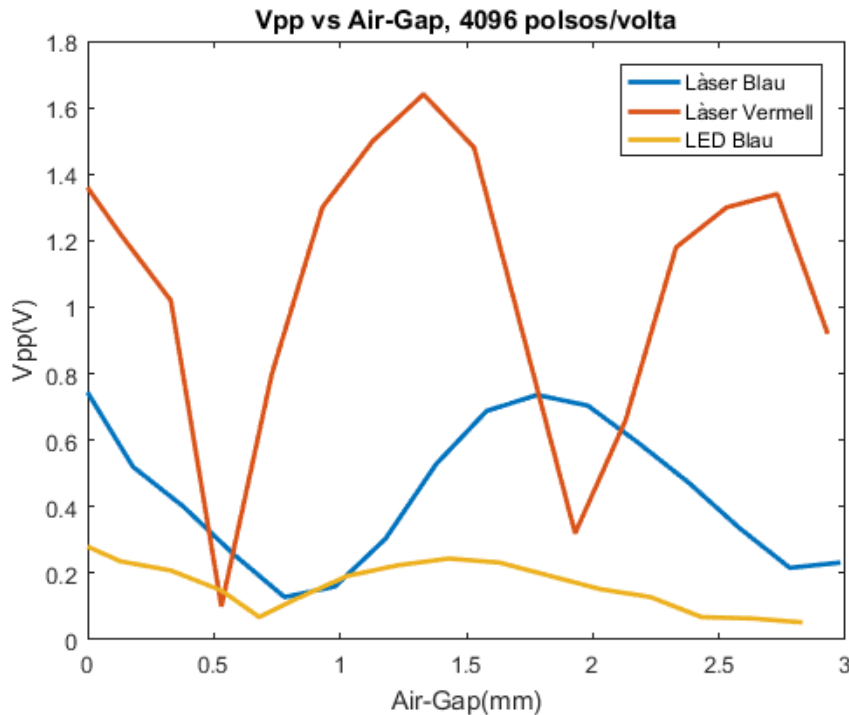


Figura 4.12: **Vpp enfront Air-gap. Resolució de 4096 polsos/volta i diferents fonts de llum.**

Realitzant el mateix experiment que a la Figura 4.11 però amb un disc de 4096 polsos/volta. Quant a la corba Blava (Làser Blau) s'observen dos mínims a $z = 0.78\text{mm}$ i $z = 2.78\text{mm}$ corresponent a $z \approx \frac{(2m+1)}{4}z_T$ $z_T(4096, \lambda = 405\text{nm}) = 4.20\text{mm}$, i un màxim a $z = 1.78\text{mm}$, corresponent a $z \approx \frac{(m)}{2}z_T$. D'altra banda, la corba Vermella (Làser Vermell) té dos mínims a $z = 0.53\text{mm}$ i $z = 1.93\text{mm}$ corresponent a $z \approx \frac{(2m+1)}{4}z_T$ $z_T(4096, \lambda = 639\text{nm}) = 11.26\text{mm}$, i dos màxims a $z = 1.33\text{mm}$ i $z = 2.73\text{mm}$, corresponent a $z \approx \frac{m}{2}z_T$. Un altre cop, la corba corresponent al LED segueix un patró sense gaires variacions de Vpp, però amb un mínim a $z = 0.68\text{mm}$ i un màxim a $z = 1.43\text{mm}$, que corresponen un altre cop a un quart i a la meitat de la distància de Talbot, respectivament.

essent així molt més robusta. D'altra banda, s'ha validat el fenomen d'efecte Talbot, verificant que és important col·locar les màscares lluny de $z = \frac{2m+1}{4}z_T$, ja que el Voltatge Pic-a-Pic registrat és molt baix, i alhora l'error d'ajust del senyal respecte a una sinusoidal és molt elevat, fent impossible la interpolació de senyal. Cal afegir la importància que té la font de llum, la qual és important que sigui puntual, coherent i monocromàtica, per tal de poder col·limar bé el feix i que la Catifa de Talbot es generi adequadament. Doncs, és preferible que s'utilitzi llum làser en comptes de LED. Depenent del producte, es pot jugar amb les variables Resolució i Longitud d'ona per determinar on estan posicionades les distàncies de Talbot i fer un disseny d'encoder òptim.

Capítol 5

Implementació industrial

5.1 Senyal de referència Z per a qualsevol tipus de resolució

Tal com s'ha descrit al Capítol 1, s'ha arribat a la conclusió que per generar senyals de referència, s'ha d'imprimir a la pista del canal Z un patró d'obertures que segueixi la configuració d'un Golomb Ruler o Sidon Set, per tal que sigui òptim. En comptes de tenir 1 i 0 es té una sèrie d'obertures transparents o opaques, respectivament. La llargada del ruler ve determinada pel nombre d'obertures que caben dins la finestra associada al fotodíode del canal Z . A la Figura 5.1 es pot veure un exemple per a un encoder de 2500 polsos/volta.

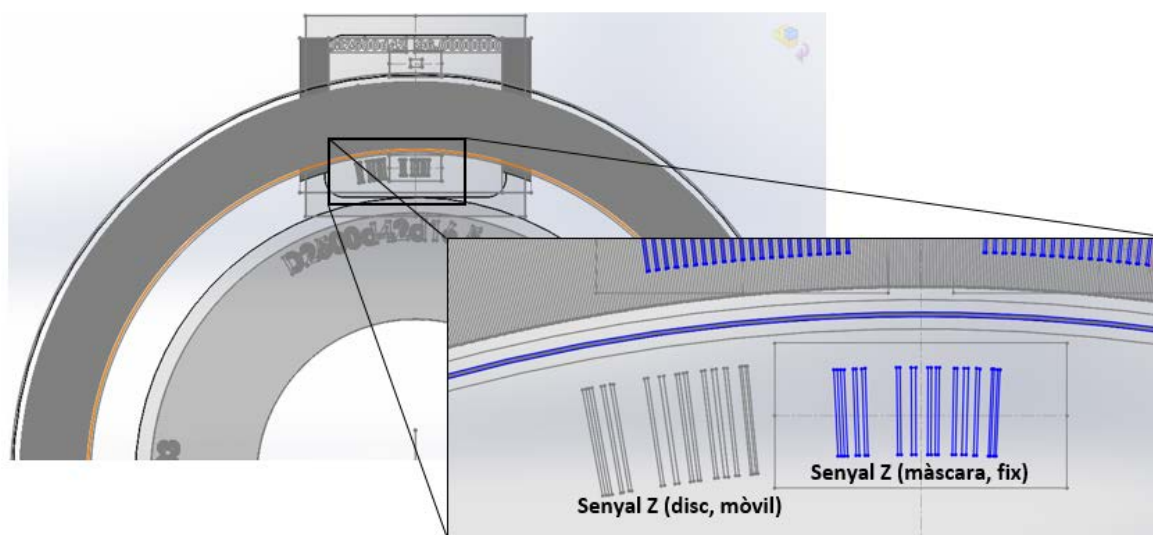


Figura 5.1: **Aplicació del senyal Z a encoder real.** Exemple de senyal de referència Z aplicat a un encoder de 2500 polsos/volta.

És a dir, la finestra té una longitud X , on s'hi poden inscriure un màxim de M obertures

d'amplada $\frac{R_Z \alpha}{2}$ on R_Z és el radi mitjà de la pista del canal Z . L'angle α és $\frac{2\pi}{N}$, on N és la resolució. Tal com s'ha descrit abans, s'inscriuran a la finestra de la màscara un nombre d'obertures col·locades seguint el patró d'una estructura que maximitza el valor $K(Z)$ descrit en l'equació (1.3). El mateix patró d'obertures s'inscriurà també a la pista del disc, de manera que quan el disc just passi per l'origen, les obertures coincideixin i hi hagi un "flash" de llum que creï un impuls. Quan no coincideixin, pràcticament no es veu res.

Perquè Hohner Automáticos pugui generar els seus propis codis de referència Z basats en Golomb Rulers, s'ha generat una aplicació. Mitjançant aquesta eina, es determina de forma automàtica com ha de ser la llargada del codi, l'amplada de les obertures i la seva distribució.

5.1.1 Aplicació generadora de senyals de referència Z

L'aplicació software es tracta d'un document del tipus *Microsoft Excel Macro-Enabled Worksheet*, el qual està dissenyat de manera que en introduir els paràmetres referents a les característiques de l'encoder, es genera automàticament el senyal de referència òptim. La Figura 5.2 mostra la primera finestra que apareix en iniciar el programa, on es poden introduir totes les variables i decidir diferents opcions de generació de codi.

Figura 5.2: Paràmetres per a la generació de senyal Z . Introducció de variables i opcions per a la generació del codi de senyal de referència.

Els paràmetres i opcions importants a introduir es descriuen a continuació:

Característiques Encoder:

- **Número de Polsos:** nombre de polsos per volta de l'encoder, N .
- **Diàmetre encoder (mm):** determina la posició radial del disc de l'encoder on s'imprimirà el senyal Z . Aquest radi determina com haurà de ser l'amplada de l'obertura.
- **Amplada fotodíode (mm):** determina el número màxim M d'obertures que es poden incloure. És a dir, limita la llargada del codi a generar.
- **Nombre d'obertures del senyal principal:** llargada del codi. Nombre d'obertures M que caben dins les dimensions del fotodíode.
- **Introduir relació C entre amplada d'obertures:** Aquest paràmetre diu quina relació d'amplada hi ha entre les obertures dels canals A i B , i l'amplada de les obertures utilitzades per generar el senyal Z .

Amplitud de senyal: Mitjançant aquesta opció es pot decidir si es vol que l'amplada del senyal de referència abasti 1 o 2 períodes de senyal.

A manera d'exemple s'han introduït els següents paràmetres:

- Nombre de polsos: 4096
- Diàmetre encoder (mm): 40
- Amplada fotodíode (mm): 2
- Nombre d'obertures senyal principal N_p : 30
- Nombre d'obertures del senyal Z , N_Z : 30
- Amplada fotodíode Z (mm): 2
- Relació C entre amplada d'obertures: 1

A partir d'aquestes dades es generen dos codis: un que optimitza la variable K i l'altre que optimitza la *Màxima diferència entre màxims*. Aquests codis es poden veure a la Figura 5.3 i 5.4 respectivament. Com es pot veure, el Golomb Ruler treballa amb un màxim central S_0 molt diferenciat respecte als altres valors $S(k) \leq 1$. Ara bé, es comprova que utilitzant el codi *Màxima diferència entre màxims* pot haver-hi una configuració que no tingui les propietats d'un Golomb

K máxima (Coeficiente que nos relaciona S_0 con el máximo sigma de los valores adyacentes)

Código:

Señal de referencia:

Características Código

S_0	7
Sigma	1
Máxima Diferencia	6
K	7,000
Iluminación total, I_z	23%
Iluminación Sigma	3,33%

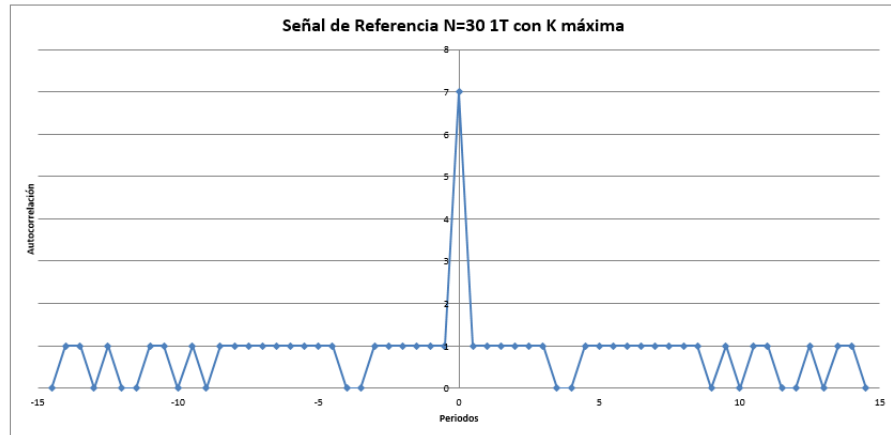


Figura 5.3: **Generació d'algorithm de tipus Golomb Ruler.** Codi generat per maximitzar el paràmetre K i obtenir un màxim central S_0 amb $S_k \leq 1$. L'algorithm es tracta d'un Golomb Ruler.

Máxima Diferencia (Diferencia entre S_0 y el máximo sigma de los valores adyacentes)

Código:

Señal de referencia:

Características Código

S_0	14
Sigma	5
Máxima Diferencia	9
K	2,800
Iluminación total, I_z	47%
Iluminación Sigma	16,67%

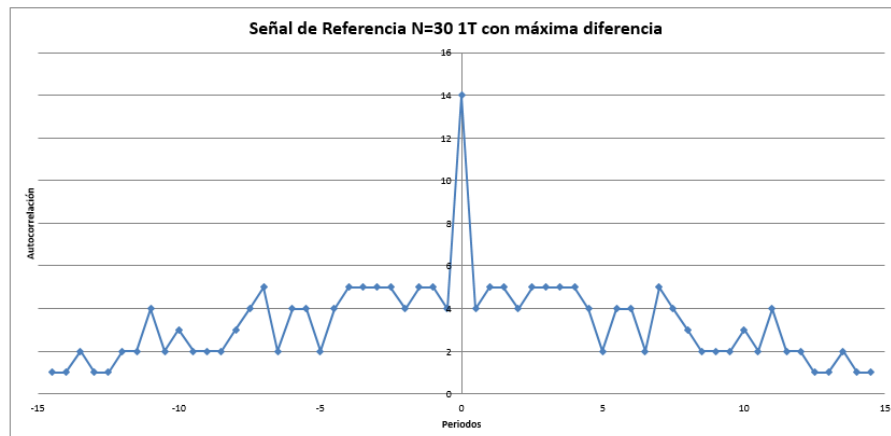


Figura 5.4: **Generació d'algorithm amb maximització de Màxima diferència.** Amb aquest codi, quan s'aplica la seva autocorrelació s'aconsegueix maximitzar la diferència entre S_0 i σ . No obstant això, al no aplicar un Golomb Ruler, es pot donar que $S_k \geq 1$.

Ruler, però on S_0 sigui més elevat i alhora mantingui una diferència més alta respecte al segon màxim σ .

Es pot aplicar una configuració o altra depenent de si es prioritza que S_k es mantinguin a valors mínims o si es vol un 'flaix' de llum més potent a S_0 . En definitiva, el que és important, és que es pugui introduir un llindar de voltatge electrònic que identifiqui el pic central per generar un pols. A la Figura 5.5 es mostra com és el senyal de referència generat per un encoder real de

2500 polsos/volta, on s'aprecia un màxim central que genera el pols i altres petits màxims que no sobrepassen el llindar electrònic.

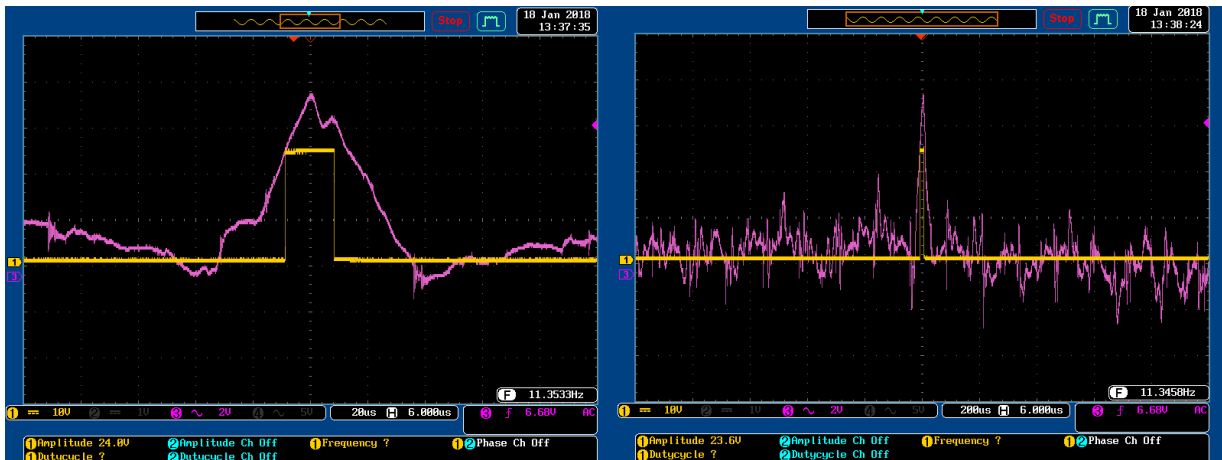


Figura 5.5: **Senyal de referència Z** Captura d'oscil·loscopi del senyal de referència obtingut amb un encoder de 2500 polsos/volta. La corba lila correspon al senyal directe que s'obté del fotodíode, mentre que la corba groga mostra el senyal tractat amb xip, el qual genera un pols centrat on es troba el màxim central, el qual té un nivell de voltatge per sobre el llindar electrònic. La subfigura de l'esquerra es centra en el màxim S_0 (escala de temps $20\mu s$), mentre que la de la dreta, amb una escala de temps més elevada ($200\mu s$), mostra els màxims secundaris corresponents a S_k .

5.2 Implementació de màscares $M1G$ i $M2G$ en encoders incrementals de tipus sin/cos. Patentabilitat de la invenció

5.2.1 Aplicació en el producte

Al llarg d'aquests tres anys s'ha anat treballant progressivament en el disseny de màscares per generar sinusoidals. Durant la primera meitat del doctorat s'ha arribat a la solució $M1G$, tenint només en compte la convolució entre obertures i sense tenir en compte la difracció, però durant la segona meitat ha estat quan s'ha arribat a la solució $M2G$, on s'ha donat importància a la difracció i a buscar un mètode per reduir la criticitat de l'air-gap. Doncs, la màscara $M1G$ ja ha estat implementada en encoders durant aquests últims dos anys, però a partir de 2018 es substituirà per la màscara $M2G$, la qual ofereix molta més robustesa. No obstant això, la màscara $M1G$ ha donat molt bons resultats, generant senyals sinusoidals d'alta qualitat; encara que per obtenir-ho s'ha seguit ajustant l'AG a distàncies molt curtes, de l'ordre de desenes de micres. Actualment, utilitzant aquesta màscara, s'han fabricat encoders amb una resolució que

pot arribar fins als 5000 polsos/volta. A la Figura 5.6 es poden veure les màscares *M1G* i *M2G* de 2500 polsos/volta generades amb el programa SolidWorks, les quals poden ser impreses en una placa de vidre o plàstic i implementades en un encoder incremental.

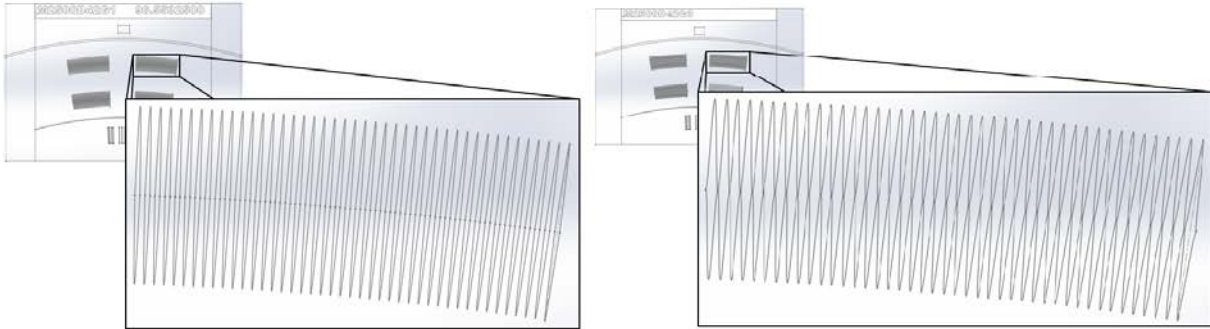


Figura 5.6: **Implementació industrial de màscares sin/cos** Disseny en SolidWorks de les màscares *M1G* i *M2G* on s'ha fet zoom a les obertures corresponents a un dels canals.

A la Figura 5.7 es mostra com opera l'encoder incremental sin/cos amb la màscara *M1G*, on es mostra la corba sinusoidal generada quan el disc està girant, i els polsos obtinguts quan s'aplica una multiplicació de senyal de $\times 10$ amb el xip interpolador electrònic. Hohner Automáticos S.L. ha aplicat amb èxit les màscares *M1G*, de manera que al multiplicar el senyal $\times 10$, pot vendre un producte que treballa a 50000 polsos/volta, el qual és molt competitiu al mercat.

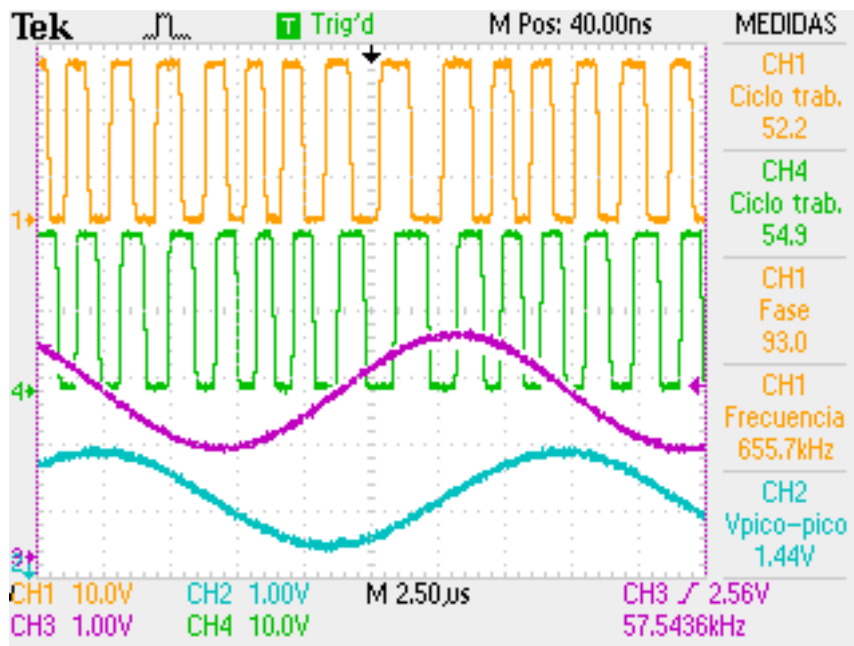


Figura 5.7: **Senyal Multiplicada x10** Mitjançant un disc de $N = 5000$ polsos/volta. Analitzant amb la màscara *M1G* es pot multiplicar el senyal $\times 10$ i obtenir un resolució final de 50000 polsos/volta.

5.2.2 Patentabilitat d'invenció

Tal com s'ha vist als Capítols 2 i 3, mitjançant desenvolupaments analítics s'ha arribat a les solucions (2.9) i (3.20), les quals indiquen com ha de ser el contorn de les obertures de les màscares M1G i M2G, respectivament. Hom es pot adonar que aquestes solucions són úniques, en cas que s'utilitzi aquest model, i que amb qualsevol altra proposta obtindríem senyals aproximadament sinusoidals. Per aquest motiu, Hohner Automáticos S.L. ha vist una oportunitat de demanar la patentabilitat d'aquesta invenció, reclamant tant ambdues màscares M1G i M2G, com els mètodes utilitzats per calcular la seva forma. A l'Apèndix B es mostra la documentació aportada i el document acreditatiu de la sol·licitud.

5.3 Utilitat de l'efecte Talbot per encoders de molt alta resolució

Més enllà de l'objectiu de fabricar encoders de tipus sin/cos d'alta qualitat de sinusoidal, Hohner Automáticos S.L. ha volgut atacar el problema de la criticitat d'Air-Gap, ja que és un problema que afecta a tots els fabricants d'encoder incremental a escala mundial. Fins al punt que fabricar un encoder de 10000 polsos/volta és tot un repte. Al no tenir en compte l'efecte Talbot, la millor opció ha estat sempre reduir l'AG el màxim possible, i per a aquestes altes resolucions s'ha arribat a reduir fins a $\Delta z = 30\mu m$ per obtenir una bona operabilitat de l'encoder. Aquest fet dificulta molt la seva fabricació, ja que el disc queda pràcticament a tocar de la màscara, i alhora s'obté un sensor amb un baix nivell de robustesa, comportant un alt risc de fallida a llarg termini.

Per solucionar aquest problema s'ha volgut afavorir l'efecte Talbot i així tenir diferents distàncies on poder col·locar la màscara, sense haver de posicionar-la tan a prop del disc. Per fer-ho s'ha dissenyat el prototip mostrat a la Figura 5.8, el qual presenta les següents modificacions.

- **Llum Làser** S'ha intercanviat la font de llum LED per un Díode Làser vermell ($\lambda = 639nm$). Un dels motius principals és que el LED per definició no es pot col·limar, pel fet de ser una font de llum extensa. D'altra banda, també es vol afavorir que la llum sigui coherent i monocromàtica, per afavorir una Catifa de Talbot amb el contrast més gran possible.
- **Expandidor-col·limador** Com que el Díode Làser emprat té un angle d'obertura molt reduït ($\theta = 8^\circ$) es necessita un sistema expandidor de feix perquè enfoqui tots els canals de la màscara. Per fer-ho s'ha intercanviat la lent col·limadora esfèrica utilitzada normalment, per un sistema Ullera de Galileu invers. Les lents utilitzades han estat una bicòncava divergent (especificacions aquí) i una lent esfèrica (especificacions aquí) la qual es pot

caragolar fins a ajustar la seva posició fins a una distància on s'obtingui una col·limació òptima.

- **Ajust d'Air-Gap disc-màscara** En comptes de fer un ajust entre disc i màscara de manera que quedin el més pròxim possible, s'ha fabricat l'encoder de manera que la distància entre disc i màscara sigui la distància de Talbot. En el cas de 10000 polsos/volta i Làser Vermell, $a = 11.9\mu m$ i $z_T = 446\mu m$, així que s'ha col·locat el disc a un AG de $z = 2z_T = 892\mu m$.

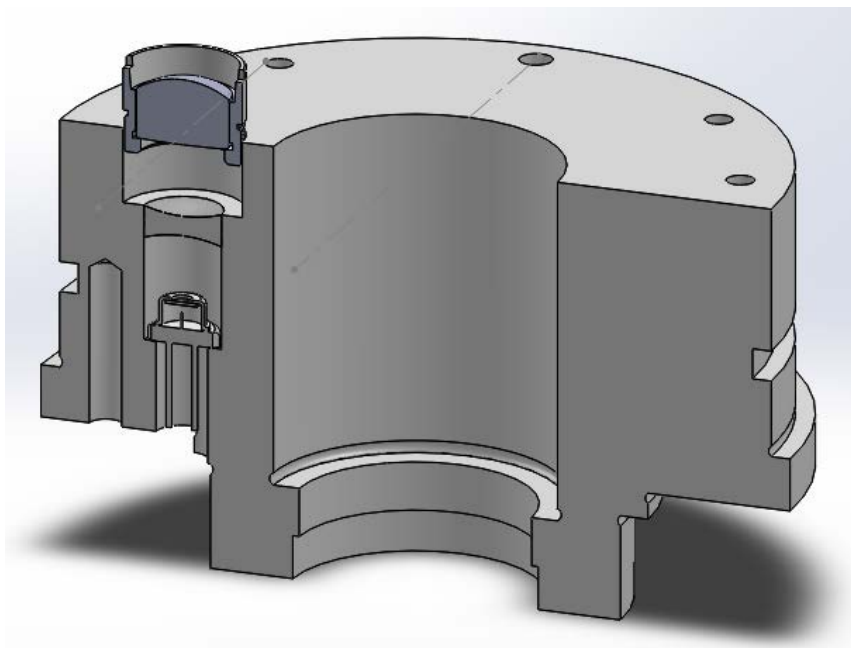


Figura 5.8: **Encoder de 10000 polsos/volta** Disseny en SolidWorks del prototip d'un encoder dissenyat per aprofitar l'efecte Talbot amb encoders d'alta resolució. El cos conté un Díode Làser i un sistema de dues lents ajustable per tenir un sistema que expandeixi i col·limi el feix de forma acurada.

L'objectiu d'obtenir un senyal amb un encoder d'alta resolució amb un AG relativament gran s'ha complert amb resultats satisfactoris, tal com es veu a la Figura 5.9. És així interessant aplicar llum làser i un bon sistema col·limador als encoders incrementals, per aprofitar l'efecte Talbot i reduir considerablement la criticitat del gap. Això pot permetre treballar amb encoders de molt alta resolució d'una manera més robusta. A més a més, si s'aplica la màscara M2G, es pot generar senyal sinusoidal i utilitzar el xip interpolador per multiplicar encara més la resolució. Aquesta gama d'encoders de resolució tan alta tindrien una gran aplicació en telescopis planetaris o tècniques de nanoimpresió.

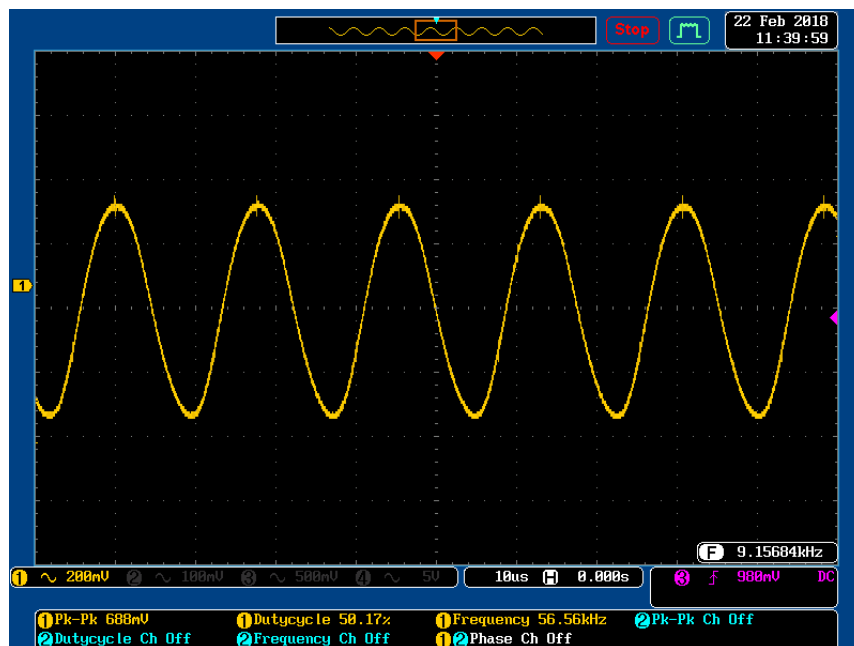


Figura 5.9: **Senyal obtingut d'encoder de 10000 polsos/volta amb Air-Gap corresponent a la distància de Talbot** Al col·locar la màscara just al doble de la distància de Talbot respecte al disc (en el cas de 10000 polsos/volta i Làser Vermell, $z = 2z_T = 892\mu m$), es comprova que l'encoder obté un senyal de qualitat i analitzable (Duty-cycle i Vpp aptes per una bona operabilitat).

Conclusions

A la Introducció d'aquesta tesi s'han plantejat tres problemes relacionats amb els encoders incrementals rotatius òptics d'alta resolució. A partir de tres idees, s'ha desenvolupat una solució diferent per a cadascun dels problemes.

En primer lloc, s'ha generat un senyal de referència Z adequat a qualsevol resolució de l'encoder. Per fer-ho, s'han imprès unes obertures en el disc distribuïdes de manera que formin un Golomb Ruler o un Sidon Set. Imprimint les obertures amb la mateixa distribució sobre el canal Z de la màscara fixa, per autocorrelació, s'obté un màxim diferenciat de llum just quan el disc passa per l'origen, mentre que per altres posicions el fotodíode rep un senyal indetectable. Mitjançant una aplicació software, Hohner Automáticos S.L. ha pogut generar aquestes distribucions, prioritzant si es preferia utilitzar un Golomb Ruler o un màxim central d'intensitat més alt. Aquest mètode ha estat aplicat a tota la gama de productes d'encoders incrementals amb molt bons resultats.

En segon lloc, s'ha solucionat el problema que l'encoder doni un senyal de sortida de tipus sinusoidal d'una manera totalment òptica quan el disc gira. És a dir, que s'ha calculat la forma que han de tenir les obertures de la màscara tal que al convolucionar amb les obertures rectangulars del disc, el fotodíode generi un senyal sinus o cosinus positiu. Obviant efectes de difracció, s'ha arribat a la solució de Primera Generació, la qual defineix el perímetre de les obertures com la part positiva de $\cos(2\pi\frac{x}{a})$. Aquests senyals sinusoidals són introduïts en un xip, el qual s'encarrega de fer una multiplicació de resolució (fins a $\times 10$) mitjançant interpolació electrònica. S'ha realitzat una implementació industrial d'èxit en diversos productes, arribant al fet que un encoder de 5000 polsos/volta pugui operar amb una resolució de 50.000 polsos/volta.

Com a invenció més important, s'ha tractat el problema anterior, però aquest cop tenint en compte els fenòmens difractius i d'interferència que apareixen a l'Air-Gap entre disc i màscara. En primer lloc s'ha identificat la importància de l'efecte Talbot, el qual diu que a certes distàncies z_T (distàncies de Talbot), el patró d'intensitat de llum es reconstrueix formant un perfil idèntic a l'origen, $U_z(x, y) = U_0(x, y)$. Això vol dir que a aquestes distàncies la solució anterior serviria per generar els senyals sinusoidals, però que per altres AG no funciona, i per tant, s'ha buscat

una segona solució. Aquesta s'ha trobat a partir de fer la convolució entre el patró difractat de llum (en condicions de Fresnel) de les obertures rectangulars del disc i les obertures de la màscara analitzadora. La forma que defineix el perímetre de les obertures d'aquesta nova màscara s'ha definit com a solució de Segona Generació i segueix l'equació $1 + A \cos 2\pi \frac{x}{a}$. Aplicant aquesta màscara, i amb el disc girant, el fotodíode obtindrà una potència lumínica definida com $P_z(t) = 1 + \frac{2}{\pi} \cos(\pi \lambda z \frac{1}{a^2}) \cos(2\pi \frac{t}{a})$, on s'aprecia la dependència de l'amplitud amb z , és a dir, l'Air-Gap. Això vol dir que amb aquesta màscara sempre obtindrem un senyal sinusoidal com a output, però que l'amplitud d'aquest senyal variarà segons on col·loquem la màscara; essent màxima a meitats i enters de la distància de Talbot, i nul·la a múltiples senars d'un quart de la distància de Talbot. S'ha analitzat la solució de manera numèrica mitjançant simulacions amb Matlab i de forma empírica amb l'ajuda d'un banc òptic on s'han pogut analitzar diferents fonts de llum (Làser Vermell, Làser Blau, LED), diferents resolucions d'encoder i variacions d'Air-Gap amb una precisió micromètrica. S'ha verificat que les dades experimentals s'aproximen molt bé a les teòriques, i que l'amplitud del senyal sinusoidal es maximitza a les distàncies de Talbot. Alhora, mitjançant el mètode de *fitting* respecte a un senyal sinusoidal teòrica, s'ha comprovat que la Màscara de Segona Generació presenta una gran robustesa enfront la variació de l'Air-Gap, mentre que la Màscara de Primera Generació presenta senyals les quals divergeixen respecte a una sinusoidal quan s'analitza en les mateixes condicions. També cal esmentar, que s'ha comprovat que l'efecte Talbot es compleix quan la llum és puntual i monocromàtica, així que s'aconsella utilitzar llum Làser en comptes de LED. Aquesta solució està pendent de ser aplicada en futurs encoders incrementals de tipus *sin/cos*.

Tant la Màscara de Primera Generació com la de Segona Generació, i els mètodes per obtenir-les, s'han inclòs en una mateixa sol·licitud de patent per protegir la Propietat Intel·lectual de Hohner Automáticos S.L. adquirida amb aquesta tesi.

Com a punt final, s'ha volgut atacar el problema d'abolir la criticitat d'Air-Gap en un encoder de 10000 polsos/volta. Per fer-ho s'ha modificat el producte introduint una font Díode Làser Vermella i un sistema de lents formant un Col·limador-Expandidor de feix (Ullera de Galileu inversa). Col·locant la màscara a una distància del disc corresponent al doble de la distància de Talbot, s'ha comprovat que el disc opera amb un Duty-Cycle i Vpp correctes.

D'aquesta manera, es pot concloure que les tres idees han estat un èxit, i que s'ha realitzat una bona tasca d'innovació en el camp dels encoders incrementals òptics rotatius, on sobretot s'ha ampliat el know-how referent a aquest tipus de producte.

Apèndix A

Apèndix. Taula de Golomb Rulers

Ordre (k)	Llargada (M)	Marques	Descobridors (Any)
1	0	0	-
2	1	0 1	-
3	3	0 1 3	-
4	6	0 1 4 6	-
5	11	0 1 4 9 11 0 2 7 8 11	John P. Robinson i Arthur J. Bernstein (1967)
6	17	0 1 4 10 12 17 0 1 4 10 15 17 0 1 8 11 13 17 0 1 8 12 14 17	John P. Robinson i Arthur J. Bernstein (1967)
7	25	0 1 4 10 18 23 25 0 1 7 11 20 23 25 0 1 11 16 19 23 25 0 2 3 10 16 21 25 0 2 7 13 21 22 25	John P. Robinson i Arthur J. Bernstein (1967)

Ordre (k)	Llargada (M)	Marques	Descobridors (Any)
8	34	0 1 4 9 15 22 32 34	William Mixon (1972)
9	44	0 1 5 12 25 27 35 41 44	William Mixon (1972)
10	55	0 1 6 10 23 26 34 41 53 55	William Mixon (1972)
11	72	0 1 4 13 28 33 47 54 64 70 72 0 1 9 19 24 31 52 56 58 69 72	William Mixon (1972)
12	85	0 2 6 24 29 40 43 55 68 75 76 85	John P. Robinson (1979)
13	106	0 2 5 25 37 43 59 70 85 89 98 99 106	John P. Robinson (1981)
14	127	0 4 6 20 35 52 59 77 78 86 89 99 122 127	James B. Shearer (1985)
15	151	0 4 20 30 57 59 62 76 100 111 123 136 144 145 151	James B. Shearer (1985)
16	177	0 1 4 11 26 32 56 68 76 115 117 134 150 163 168 177	James B. Shearer (1986)
17	199	0 5 7 17 52 56 67 80 81 100 122 138 159 165 168 191 199	W. Olin Sibert (1993)
18	216	0 2 10 22 53 56 82 83 89 98 130 148 153 167 188 192 205 216	W. Olin Sibert (1993)
19	246	0 1 6 25 32 72 100 108 120 130 153 169 187 190 204 231 233 242 246	Apostolos Dollas, William T. Rankin i David McCracken (1994)
20	283	0 1 8 11 68 77 94 116 121 156 158 179 194 208 212 228 240 253 259 283	Mark Garry, David Vanderschel i altres (projecte web) (1997)

Ordre (k)	Llargada (M)	Marques	Descobridors (Any)
21	333	0 2 24 56 77 82 83 95 129 144 179 186 195 255 265 285 293 296 310 329 333	Mark Garry, David Vanderschel i altres (projecte web) (1998)
22	356	0 1 9 14 43 70 106 122 124 128 159 179 204 223 253 263 270 291 330 341 353 356	Mark Garry, David Vanderschel i altres (projecte web) (1999)
23	372	0 3 7 17 61 66 91 99 114 159 171 199 350 200 226 235 246 277 316 329 348 366 372	Mark Garry, David Vanderschel i altres (projecte web) (1999)
24	425	0 9 33 37 38 97 122 129 140 142 152 191 205 208 252 278 286 326 332 353 368 384 403 425	distributed.net (2004)
25	480	0 12 29 39 72 91 146 157 160 161 166 191 207 214 258 290 316 354 372 394 396 431 459 467 480	distributed.net (2008)
26	492	0 1 33 83 104 110 124 163 185 200 203 249 251 258 314 318 343 356 386 430 440 456 464 475 487 492	distributed.net (2009)
27	553	0 3 15 41 66 95 97 106 142 152 220 221 225 242 295 330 338 354 382 388 402 415 486 504 523 546 553	distributed.net (2014)

Taula A.1: Taula de Golomb Rulers segons la seva llargada M i el nombre de marques k . Extret de: https://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Golomb

Apèndix B

Apèndix. Sol·licitud de patent

Acknowledgement of receipt

We hereby acknowledge receipt of your request for grant of a European patent as follows:

Submission number	300264677	
Application number	EP18382082.8	
File No. to be used for priority declarations	EP18382082	
Date of receipt	14 February 2018	
Your reference	18EP_2996	
Applicant	HOHNER AUTOMATICOS, S. L.	
Country	ES	
Title	AN OPTICAL INCREMENTAL ENCODER, A MASK FOR AN OPTICAL INCREMENTAL ENCODER AND A METHOD TO CALCULATE THE SHAPE OF A MASK SLOTS OF AN OPTICAL INCREMENTAL ENCODER	
Documents submitted	package-data.xml application-body.xml SPECEPO-3.pdf\MEM DEF 18EP_2996 Abstract.pdf (1 p.) SPECTRANONEP.pdf\MEM DEF 18EP_2996 RESUMEN ES.pdf (1 p.) SPECEPO-1.pdf\MEM DEF 18EP_2996 Description.pdf (7 p.) SPECAUTH-1.pdfAutorizacioP atent_20180209.pdf (2 p.) feesheetint.pdf (1 p.)	ep-request.xml ep-request.pdf (5 p.) SPECEPO-4.pdf\MEM DEF 18EP_2996 Drawings.pdf (7 p.) OLF-ARCHIVE.zip\17-8583 MEMORIA_EN_V02_MEM DEF 18EP_2996.zip SPECEPO-2.pdf\MEM DEF 18EP_2996 Claims.pdf (4 p.) f1002-1.pdf (2 p.)
Submitted by	CN=Jose Gallego Jimenez 11560	

Method of submission	Online
Date and time receipt generated	14 February 2018, 10:23:50 (CET)
Official Digest of Submission	5E:DE:B9:CB:1A:F1:90:CE:1B:67:D1:21:C2:FC:DE:C5:F5:E4:4C:9B

/Madrid, Oficina Receptora/



Request for grant of a European patent

<i>For official use only</i>	
1 Application number:	MKEY
2 Date of receipt (Rule 35(2) EPC):	DREC
3 Date of receipt at EPO (Rule 35(4) EPC):	RENA
4 Date of filing:	

5 Grant of European patent, and examination of the application under Article 94, are hereby requested.

Request for examination in an admissible non-EPO language:

Se solicita el examen de la solicitud según el artículo 94.

5.1 The applicant waives his right to be asked whether he wishes to proceed further with the application (Rule 70(2))

Procedural language:

en

Description and/or claims filed in:

en

6 Applicant's or representative's reference

18EP_2996

Filing Office:

ES

Applicant 1

7-1 Name: HOHNER AUTOMATICOS, S. L.

8-1 Address: C/ Sant Francesc, s/n
P. I. Can Batlle
17400 BREDA
Spain

10-1 State of residence or of principal place of business: Spain

14.1 The/Each applicant hereby declares that he is an entity or a natural person under Rule 6(4) EPC.

Representative 1

15-1	Name:	GALLEGO JIMÉNEZ, Mr José Fernando
	Company:	INGENIAS
16-1	Address of place of business:	Av. Diagonal, 421, 2 08008 Barcelona Spain
17-1	Telephone:	+34 93 238 7828
17-1	Fax:	+34 93 238 7829
17-1	E-mail:	patent@ingenias.es

20 An individual authorisation is attached.

Inventor(s)

23 Inventor details filed separately

24 Title of invention

Title of invention: AN OPTICAL INCREMENTAL ENCODER, A MASK FOR AN OPTICAL INCREMENTAL ENCODER AND A METHOD TO CALCULATE THE SHAPE OF A MASK SLOTS OF AN OPTICAL INCREMENTAL ENCODER

25 Declaration of priority (Rule 52)

A declaration of priority is hereby made for the following applications

25.2 This application is a complete translation of the previous application

25.3 It is not intended to file a (further) declaration of priority

26 Reference to a previously filed application

27 Divisional application

28 Article 61(1)(b) application

29 Claims

Number of claims: 15

29.1 as attached

29.2 as in the previously filed application (see Section 26.2)

29.3 The claims will be filed later

30 Figures

It is proposed that the abstract be published together with figure No.

31 Designation of contracting states

All the contracting states party to the EPC at the time of filing of the European patent application are deemed to be designated (see Article 79(1)).

32 Different applicants for different contracting states

33 Extension/Validation

This application is deemed to be a request to extend the effects of the European patent application and the European patent granted in respect of it to all non-contracting states to the EPC with which extension or validation agreements are in force on the date on which the application is filed. However, the request is deemed withdrawn if the extension fee or the validation fee, whichever is applicable, is not paid within the prescribed time limit.

33.1 It is intended to pay the extension fee(s) for the following state(s):

33.2 It is intended to pay the validation fee(s) for the following state(s):

34 Biological material

38 Nucleotide and amino acid sequences

The European patent application contains a sequence listing as part of the description

The sequence listing is attached in computer-readable format in accordance with WIPO Standard ST.25

The sequence listing is attached in PDF format

Further indications

39 Additional copies of the documents cited in the European search report are requested

Number of additional sets of copies:

40 Refund of the search fee under to Article 9 of the Rules relating to Fees is requested

Application or publication number of earlier search report:

42 Payment

Method of payment

Not specified

43 Refunds

Any refunds should be made to EPO deposit account:

28120048

Account holder:

INGENIAS

44-A Forms

Details:

System file name:

A-1	Request		as ep-request.pdf
A-2	1. Designation of inventor	1. Inventor	as f1002-1.pdf

44-B Technical documents

Original file name:

System file name:

B-1	Specification	MEM DEF 18EP_2996 Abstract.pdf abstract	SPECEPO-3.pdf
B-2	Specification	MEM DEF 18EP_2996 Drawings.pdf 14 figure(s)	SPECEPO-4.pdf
B-3	Specification	MEM DEF 18EP_2996 Description.pdf Description	SPECEPO-1.pdf
B-4	Specification	MEM DEF 18EP_2996 Claims.pdf 15 claims	SPECEPO-2.pdf
B-5	Pre-conversion archive	17-8583 MEMORIA_EN_V02_MEM DEF 18EP_2996.zip	OLF-ARCHIVE.zip
B-6	Translation of description, claims, abstract and drawings in Spanish	MEM DEF 18EP_2996 RESUMEN ES.pdf	SPECTRANONEP.pdf

44-C Other documents

Original file name:

System file name:

C-1	1. Specific authorisation	AutorizacioPatent_20180209.pdf	SPECAUTH-1.pdf
------------	---------------------------	--------------------------------	----------------

45

General authorisation:

46 Signature(s)

Place: **Barcelona**

Date: **14 February 2018**

Signed by: **Jose Gallego Jimenez 11560**

Representative name: **José Fernando GALLEGO JIMÉNEZ**

Capacity:

(Representative)

Form 1002 - 1: Public inventor(s)

Designation of inventor

User reference: 18EP_2996
 Application No:

Public

Inventor	Name: BRUGUERA PRUNA, Mr. Josep Company: HOHNER AUTOMÁTICOS, S. L. Address: C/ Sant Francesc, s/n P. I. Can Batlle 17400 BRED Spain	The applicant has acquired the right to the European patent: As employer
Inventor	Name: BRUNA FLORIS, Mr. Joaquim Address: C/ Sant Francesc, s/n P. I. Can Batlle 17400 BRED Spain	The applicant has acquired the right to the European patent: Under agreement: 01 October 2014
Inventor	Name: COSTA JIMENO, Mr. Nestor Company: HOHNER AUTOMÁTICOS, S. L. Address: C/ Sant Francesc, s/n P. I. Can Batlle 17400 BRED Spain	The applicant has acquired the right to the European patent: As employer
Inventor	Name: TIKHONOV, Mr. Sergey Yu. Address: C/ Sant Francesc, s/n P. I. Can Batlle 17400 BRED Spain	The applicant has acquired the right to the European patent: Under agreement: 01 October 2014

Signature(s)

Place: **Barcelona**
 Date: **14 February 2018**

User reference: 18EP_2996
Application No:

Signed by: **Jose Gallego Jimenez 11560**
Representative name: **José Fernando GALLEGO JIMÉNEZ**
Capacity: **(Representative)**

Internal fee calculation sheet

This sheet has been produced using data entered in Form EP1001E.

Applicant's or representative's reference

18EP_2996

Applicant 1

HOHNER AUTOMATICOS, S. L.

Representative 1

GALLEGO JIMÉNEZ, Mr José Fernando

Title of invention:

AN OPTICAL INCREMENTAL ENCODER, A MASK FOR AN OPTICAL INCREMENTAL ENCODER AND A METHOD TO CALCULATE THE SHAPE OF A MASK SLOTS OF AN OPTICAL INCREMENTAL ENCODER

Fees	Factor applied	Fee schedule	Amount to be paid
001 Filing fee - EP direct - online	1	120.00	120.00
002 Fee for a European search - Applications filed on/after 01.07.2005	1	1 300.00	1 300.00
015 Claims fee - For the 16th to the 50th claim	0	235.00	0.00
015e Claims fee - For the 51st and each subsequent claim	0	585.00	0.00
501 Additional filing fee for the 36th and each subsequent page	0	15.00	0.00
Total:		EUR	1 420.00



**Vollmacht¹
Authorisation¹
Pouvoir¹**

Bitte vor dem Ausfüllen des Formblatts Rückseite beachten. /
Please read the notes overleaf before completing the form. /
Veuillez lire les remarques au verso avant de remplir le formulaire.

Zeichen des Anmelders / Applicant's reference / Référence du demandeur
(max. 15 Positionen / max. 15 spaces / 15 caractères au maximum)

18EP_2996

Anmelde-/Patentnummer / Application/Patent No. /
N° de la demande (du brevet)

An optical incremental encoder, a mask for
an optical incremental encoder and a
method to calculate the shape of mask
slots of an optical incremental encoder

Ich (Wir)² /
I (We)² /
Je (Nous)²

HOHNER AUTOMÁTICOS, S. L.
C/ Sant Francesc s/n, P.I. Cal Batlle
17400 Breda (Girona) Spain

bevollmächtigte(n) hiermit³ /
do hereby authorise³ /
autorise (autorisons) par la présente³

GALLEGO JIMÉNEZ, José Fernando
Av. Diagonal, 421, 2
08008 Barcelona, SPAIN

sowie weitere auf einem gesonderten Blatt angegebene Vertreter / and additional representatives indicated
on a separate sheet / ainsi que d'autres mandataires mentionnés sur une feuille supplémentaire

mich (uns) zu vertreten als / to represent me (us) as / à me (nous) représenter en tant que

Anmelder oder Patentinhaber, / applicant(s) or patent proprietor(s), /
demandeur(s) ou titulaire(s) du brevet,

Einsprechenden (Einsprechende), / opponent(s), /
opposant(s),

und in den durch das Europäische Patentübereinkommen geschaffenen Verfahren
betreffend die folgende(n) europäische(n) Patentanmeldung(en) oder das (die)
folgende(n) europäische(n) Patent(e)⁴ für mich (uns) zu handeln und Zahlungen
für mich (uns) in Empfang zu nehmen: /

to act for me (us) in all proceedings established by the European Patent Convention
concerning the following European patent application(s) or patent(s)⁴ and to receive
payments on my (our) behalf: /

à agir en mon (notre) nom dans toute procédure instituée par la Convention sur
le brevet européen et concernant la (les) demande(s) de brevet ou le (les)
brevet(s) européen(s)⁴ suivant(s) et à recevoir des paiements en mon (notre) nom: /

Fortsetzung auf einem gesonderten Blatt. / Additional applications or patents are
indicated on a supplementary sheet. / Suite sur une feuille supplémentaire.

Diese Vollmacht gilt auch für Verfahren nach dem Vertrag über die internationale Zusammenarbeit auf dem Gebiet des Patentwesens. /
This authorisation also applies to any proceedings established by the Patent Cooperation Treaty. /
Ce pouvoir s'applique également à toute procédure instituée par le Traité de coopération en matière de brevets.

Diese Vollmacht gilt auch für etwaige europäische Teilanmeldungen. / This authorisation also covers any European divisional applications. /
Ce pouvoir vaut également pour toute demande divisionnaire européenne.

Es kann eine Intervollmacht erteilt werden. / A sub-authorisation may be given. / Ce pouvoir peut être délégué.

Ich (Wir) widerrufe(n) hiermit frühere Vollmachten in Bezug auf die oben genannte(n) Anmeldung(en) oder das (die) oben genannte(n) Patent(e)⁵. /
I (We) hereby revoke all previous authorisations in respect of the above application(s) or patent(s)⁵. /
Je révoque (Nous révoquons) par la présente tout pouvoir antérieur, donné pour la (les) demande(s) ou le (les) brevet(s) mentionné(e)(s) ci-dessus⁵.

Ort / Place / Lieu

Breda

Datum / Date

08/02/2018

Unterschrift(en)⁶ / Signature(s)⁶

HOHNER AUTOMÁTICOS, S. L.
Name and post: **PEP BRUGUERA PRUNA - DIRECTOR IES**
Prolongació Sant Francesc s/n
17400 Breda (Girona) SPAIN

Das Formblatt muss vom (von den) Vollmachtgeber(n) eigenhändig unterzeichnet sein (bei juristischen Personen die Stellung des Unterzeichnenden angeben). /
The form must bear the personal signature(s) of the authorisee(s) (in the case of legal persons, that of the officer empowered to sign). After the signature, please print the name(s) of the
signatory(ies) adding, in the case of legal persons, his (their) position within the company. /
Le formulaire doit être signé de la propre main du (des) mandant(s) (dans le cas de personnes morales, de la personne ayant qualité pour signer).
Veuillez ajouter en caractères d'imprimerie, après la signature, le (les) nom(s) du (des) signataire(s) en mentionnant, dans le cas de personnes
morales, ses (leurs) fonctions au sein de la société.

bitte wenden / P.T.O. / T.S.V.P.

I. Fußnoten zur Vorderseite

- 1 a) Die Verwendung dieses Formblatts wird empfohlen für die Bevollmächtigung von Vertretern vor dem Europäischen Patentamt – zugelassene Vertreter, Rechtsanwälte im Sinne des Artikels 134 (8) und Zusammenschlüsse von Vertretern nach Regel 152 (11) – sowie für die Bevollmächtigung von Angestellten im Sinne des Artikels 133 (3) Satz 1; zu Satz 2 sind bisher keine Ausführungsbestimmungen ergangen.
Zugelassene Vertreter, die sich als solche zu erkennen geben, müssen nach Regel 152 (1) in Verbindung mit dem Beschluss der Präsidentin des EPA vom 12. Juli 2007 nur in bestimmten Fällen eine unterzeichnete Vollmacht einreichen (Sonderausgabe Nr. 3, ABI EPA 2007, L.1.). Hingegen müssen nach Artikel 134 (8) vertretungsberechtigte Rechtsanwälte sowie Angestellte, die für einen Anmelder gemäß Artikel 133 (3) Satz 1 handeln und keine zugelassenen Vertreter sind, eine unterzeichnete Vollmacht einreichen.
- b) Zutreffendes ist anzukreuzen.
- 2 Name(n) und Anschrift(en) sowie Staat des Sitzes oder Wohnsitzes des Vollmachtgebers (der Vollmachtgeber) nach Maßgabe der nachstehenden Regel 41 (2) c): „Bei natürlichen Personen ist der Familienname vor den Vornamen anzugeben. Bei juristischen Personen und Gesellschaften, die juristischen Personen gemäß dem für sie maßgebenden Recht gleichgestellt sind, ist die amtliche Bezeichnung anzugeben. Anschriften sind gemäß den üblichen Anforderungen für eine schnelle Postzustellung an die angegebene Anschrift anzugeben und müssen in jedem Fall alle maßgeblichen Verwaltungseinheiten, gegebenenfalls bis zur Hausnummer einschließlich, enthalten.“
- 3 Name(n) und Geschäftsanschrift des Vertreters (der Vertreter) nach Maßgabe der in Ziff. 2 wiedergegebenen Regel 41 (2) c).
- 4 Nummer der Anmeldung(en) (falls bekannt) oder des Patents (der Patente) und Bezeichnung(en) der Erfindung(en).
- 5 Der Widerruf erfasst nicht eine gegebenenfalls erteilte allgemeine Vollmacht.
- 6 Übliche Unterschrift des (der) Vollmachtgeber(s). Wird die Vollmacht für eine juristische Person unterzeichnet, so dürfen nur solche Personen unterzeichnen, die nach Gesetz und/oder Satzung der juristischen Person dazu berechtigt sind (Artikel 58, Regel 152 (1)). Es ist ein Hinweis auf die Unterschriftsberechtigung des Unterzeichneten zu geben (z. B. Geschäftsführer, Prokurist, Handlungsbevollmächtigter; president, director, company secretary; président, directeur, fondé de pouvoir). Unterzeichnet ein sonstiger Angestellter einer juristischen Person aufgrund einer speziellen Vollmacht der juristischen Person, so ist dies anzugeben; von der speziellen Vollmacht ist eine Kopie, die nicht beglaubigt zu sein braucht, beizufügen. Eine Vollmacht mit der Unterschrift einer nicht zeichnungsberechtigten Person wird als nicht unterzeichnete Vollmacht behandelt.

II. Hinweise

- a) Erstreckt sich die Vollmacht auf mehrere Anmeldungen oder Patente, so ist sie in der entsprechenden Stückzahl einzureichen (vgl. Regel 152 (2)).
- b) Alle Entscheidungen, Ladungen, Bescheide und Mitteilungen werden an den Vertreter übersandt (vgl. Regel 130). Im Fall der Bevollmächtigung von Angestellten im Sinne des Artikels 133 (3) werden die genannten Schriftstücke dem Anmelder übersandt.
- c) Regel 152 (9) bestimmt: „Sofern die Vollmacht nichts anderes bestimmt, erlischt sie gegenüber dem Europäischen Patentamt nicht mit dem Tod des Vollmachtgebers.“
- d) Im Übrigen vgl. die Mitteilung zu Fragen der Vertretung vor dem EPA im Amtsblatt EPA 4/1978, 281 ff.

I. Footnotes to text overleaf

- 1 (a) The use of this form is recommended for authorising representatives before the European Patent Office – professional representatives, legal practitioners under Article 134(8) and associations of representatives pursuant to Rule 152(11) – and for authorising employees under Article 133(3), first sentence; as regards the second sentence, no implementing regulation has yet been issued.
Professional representatives who identify themselves as such are required under Rule 152(1), in conjunction with the decision of the President of the EPO dated 12 July 2007, to file a signed authorisation only in particular cases (Special edition No 3, OJ EPO 2007, L.1.). However, a legal practitioner entitled to act as a professional representative in accordance with Article 134(8), or an employee acting for an applicant in accordance with Article 133(3), first sentence, but who is not a professional representative, must file a signed authorisation.
- (b) Where applicable place a cross in the box.

2 Name(s) and address(es) of the party (parties) giving the authorisation and the State in which his (their) residence or principal place of business is located, in accordance with Rule 41(2) (c): „Names of natural persons shall be indicated by the person's family name, followed by his given names. Names of legal persons, as well as of bodies equivalent to legal persons under the law governing them, shall be indicated by their official designations. Addresses shall be indicated in accordance with applicable customary requirements for prompt postal delivery and shall comprise all the relevant administrative units, including the house number, if any.“

3 Name(s) and address of place of business of the representative(s) in accordance with Rule 41(2)(c) (cf. note 2 above).

4 Application No(s), or patent No(s), (if known) and title(s) of the invention(s).

5 The revocation does not extend to any general authorisation which may have been given.

6 Usual signature(s) of person(s) giving the authorisation. Where the authorisation is signed on behalf of a legal person, only such persons as are entitled to sign by law and/or in accordance with the articles of association or equivalent of the legal person may do so (Article 58, Rule 152(1)). An indication is to be given of the signatory's entitlement to sign (e.g. president, director, company secretary; Geschäftsführer, Prokurist, Handlungsbevollmächtigter; président, directeur, fondé de pouvoir). If any other employee of a legal person signs by virtue of a special authorisation conferred by the legal person, this is to be indicated and a copy of the special authorisation, which need not be certified, is to be supplied. An authorisation bearing the signature of a person not entitled so to sign will be treated as an unsigned authorisation.

II. Notices

- (a) Authorisations covering more than one application or patent are to be filed in the corresponding number of copies (cf. Rule 152(2)).
- (b) All decisions, summonses and communications will be sent to the representative (cf. Rule 130). In cases where employees are authorised under Article 133(3), these documents will be sent to the applicant.
- (c) Rule 152(9) states: "Unless it expressly provides otherwise, an authorisation shall not terminate vis-à-vis the European Patent Office upon the death of the person who gave it."
- (d) See also Communication on matters concerning representation before the EPO in the Official Journal EPO 4/1978, 281 ff.

I. Renvois concernant le texte figurant au recto

- 1 a) Il est recommandé d'utiliser ce formulaire pour mandater des représentants devant l'Office européen des brevets – mandataires agréés, avocats au sens de l'article 134(8) et groupements de mandataires conformément à la règle 152(11) – ainsi que pour mandater des employés au sens de l'article 133(3), première phrase; il n'a pas encore été arrêté de dispositions d'application relatives à la deuxième phrase. En vertu de la règle 152(1) en liaison avec la décision de la Présidente de l'OEB en date du 12 juillet 2007, les mandataires agréés qui se font connaître comme tels ne sont tenus de déposer un pouvoir signé que dans certains cas (Edition spéciale n° 3, JO OEB 2007, L.1.). En revanche, les avocats habilités à agir en qualité de mandataires en vertu de l'article 134(8), ainsi que les employés qui agissent pour le compte d'un demandeur conformément à l'article 133(3), 1^{ère} phrase, et qui ne sont pas des mandataires agréés, doivent déposer un pouvoir signé.
- b) Faire une croix dans la case si nécessaire.

2 Nom(s) et adresse(s), Etat du siège ou du domicile du (des) mandant(s), dans les conditions prévues à la règle 41(2) c) et reproduites ci-après: «Les personnes physiques doivent être désignées par leur nom suivi de leurs prénoms. Les personnes morales et les sociétés assimilées aux personnes morales en vertu du droit dont elles relèvent doivent figurer sous leur désignation officielle. Les adresses doivent être indiquées selon les exigences usuelles en vue d'une distribution postale rapide à l'adresse indiquée et comporter en tout état de cause toutes les indications administratives pertinentes, y compris, le cas échéant, le numéro de la maison.»

3 Nom(s) et adresse professionnelle du (des) mandataire(s), dans les conditions prévues à la règle 41(2) c) et mentionnées au point 2.

4 Numéro de la (des) demande(s) (s'il est connu) ou du (des) brevet(s) et titre(s) de l'invention (des inventions).

5 La révocation ne s'étend pas à un pouvoir général éventuellement donné.

6 Signature(s) habituelle(s) du (des) mandant(s). Lorsque le pouvoir est signé au nom d'une personne morale, seules sont habilitées à signer les personnes auxquelles cette qualité est reconnue en vertu de la loi et/ou du statut de la personne morale concernée (article 58, règle 152(1)). Il convient d'indiquer la qualité du signataire (par exemple: président, directeur, fondé de pouvoir, Geschäftsführer, Prokurist, Handlungsbevollmächtigter; président, directeur, fondé de pouvoir). Il y a lieu de signaler les cas où un autre employé d'une personne morale signe en vertu d'un pouvoir spécial conféré par la personne morale et de fournir alors une copie, qui peut ne pas être certifiée conforme, de ce pouvoir spécial. Un pouvoir portant la signature d'une personne non habilitée à signer sera considéré comme non signé.

II. Notes

- a) Si le pouvoir est donné pour plusieurs demandes ou plusieurs brevets, il doit être fourni un nombre correspondant d'exemplaires (cf. règle 152(2)).
- b) Toutes les décisions, citations, notifications seront adressées au mandataire (voir règle 130). Dans le cas où des employés au sens de l'article 133(3) sont mandatés, les pièces mentionnées sont envoyées au demandeur.
- c) La règle 152(9) stipule: «Sauf s'il en dispose autrement, le pouvoir ne prend pas fin, à l'égard de l'Office européen des brevets, au décès du mandant.»
- d) Pour le reste, se reporter à la Communication concernant les questions relatives à la représentation près l'OEB, parue au Journal officiel de l'OEB, 4/1978, 281 s.

An optical incremental encoder, a mask for an optical incremental encoder and a method to calculate the shape of mask slots of an optical incremental encoder

Technical Field

5 The present invention is directed, in general, to the field of optical encoders. In particular, the invention relates to an optical incremental encoder, to a mask for an optical incremental encoder and to a method to calculate the shape of mask slots of an optical incremental encoder.

Encoders are devices that provide the position and the speed of a rotating axis, the accuracy depending on the encoder's resolution.

10 Background of the Invention

Fig. 1 illustrates a basic scheme of an incremental optical encoder. The rotating disk 1 has N rectangular slots 2 in its periphery allowing light to go through, the remaining part being opaque. That is, the angle between two consecutive slots is $\alpha = \frac{2\pi}{N}$ radians.

15 The value of N is what is called the optical resolution. An incident beam 3 of light emanating from a light source 4, in this case collimated by a convergent lens 5, goes through them and reaches a fixed (non-rotating) mask 6 with other built-in slots 7. The amount of light intensity passing through the slots in the rotating disk 1 and in the mask 6 changes as the rotating disk 1 rotates with time t and can be measured by a set of photodiodes 8 that generate a periodic pulse $S(t)$.

20 To describe $S(t)$, for simplicity the effects of the diffraction that occurs in the rotating disk 1 are ignored. The rectangular slots in the rotating disk 1 are modeled by a periodic train $H(x)$ of rectangular impulses 9; see the first of the figures in Fig. 2. The slots 2 correspond to the region under the graphic of H ; the rotation of the rotating disk 1 (at constant speed) means replacing $H(x)$ by $H(x - t)$; this is the second of the figures in Fig. 2.

25 Next, the slots 7 in the mask 6 are modeled analogously by a function F ; if they are also rectangular as those in the rotating disk 1, F is a function with a finite number of impulses 10 (two in Fig. 3). Again, the slots 7 in the mask 6 correspond to the region below the graphic of F .

30 The intensity of light going through the rotating disk 1 and the mask 6 is then proportional to the area 11 of the region obtained by superposing the graphs of H, F .

In mathematical terms, the signal $S(t)$ is the so-called *convolution* of H, F

$$S(t) = (H * F)(t) = \int H(x - t)F(x) dx$$

Suppose F as in Fig. 3. If say at time $t = 0$ the slots 2 in the rotating disk 1 overlap with
 5 opaque parts of the mask 6 (where $F(x) = 0$), this area is zero and $S(0) = 0$, this is illustrated
 in Fig. 4. In the opposite case, when the positions of the slots 2 in the rotating disk 1 overlap
 with the slots 7 in the mask 6, this area is maximum, as shown in Fig. 5. Between these two
 extreme cases, the area changes linearly. This means that in this case- when slots 7 in the
 mask 6 are also rectangular- the signal $S(t)$ will be a periodic train of N triangular impulses
 10 for each rotation, as shown in Fig. 6.

In fact, other three signals like $S(t)$ are generated in a similar way for robust purposes. This
 periodic pulse $S(t)$ codes the position of the rotating disk 1 as soon as a reference signal Z
 is produced for each turn. The way these other three signals and Z are generated is well-known
 and will not be mentioned here.

15 Once the signal $S(t)$ has been optically generated, a second part of the process consists in
 its processing by electronic means to increase the resolution by a big factor μ . Each output
 signal can be electronically interpolated, multiplying the resolution by the factor μ , thus
 achieving a final resolution of μN . The way this is done will not be described here as it is the
 object of a number of active patents.

20 In the existing electrical interpolation algorithms the more sinusoidal the signal is the better
 interpolation quality will be achieved for high values of μ , like in Fig. 7. However, this raises
 the problem of finding the shape that the slots 7 in the mask 6 should have so that the
 resulting signal $S(t)$ consists in a periodic train of sinusoidal pulses 13 instead of triangular
 ones 12. In the past this has been approached simply by experimenting with different kind of
 25 shapes, with only poor approximate results.

In mathematical terms the question is to find and describe all positive functions F such that
 the convolution $F * H$ equals a pure sinusoidal function. Present invention involves the
 determination of two solutions of this problem, that is, the determination of two shapes that
 slots 7 in the mask 6 should have to obtain exactly a sinusoidal signal $S(t)$ like 13.

30 Description of the Invention

To that end the present invention provides, according to one aspect, an optical incremental encoder, comprising, as the proposals known in the field:

- a rotating disk positioned perpendicular to a rotating axis, fixed to the latter, and rotating at a same velocity, said rotating disk having a first part in the periphery thereof comprising a plurality of disk slots having a rectangular shape allowing light to go through and a second part not allowing the light to go through;
- a light source configured to emit a light beam, said light beam being collimated by a lens, e.g. a convergent lens, and reaching the rotating disk producing a diffraction effect in the rectangular disk slots;
- a mask, positioned at a certain distance after the rotating disk, comprising a plurality of mask slots with a particular shape and configured to receive the light diffracted by the rotating disk; and
- an optoelectronic unit, such as a set of photodiodes, positioned after the mask, and configured to generate a periodic signal with a given first resolution using an amount of light reaching the optoelectronic unit, said amount of light being dependent on the rotation of the rotating disk; and to convert said generated periodic signal into an electronic pulse which is processed to obtain a final output with a given second resolution.

Unlike the proposals known in the field, the shape of the mask slots in the proposed optical incremental encoder are calculated by performing a Fourier transform on a convolution equation between a function H and a function F , either ignoring or considering the effects of diffraction occurring in the rotating disk, so that the generated periodic signal being a pure sinusoidal signal. It should be noted that the function H defines the rectangular shape of the disk slots whereas the function F defines the shape of the mask slots.

According to a first embodiment, the calculation of the shape of the mask slots is performed by ignoring the effects of diffraction occurring in the rotating disk. In this case, the following equation $(F * H)(t) = \int F(x) H(x - t) dx = c(1 + \sin Nt)$ is used, where c is a constant, which does not depend on the distance between the mask and the rotating disk, and N is the first resolution of the generated periodic signal. According to this first embodiment, only the positive part of the sinusoidal function is considered, that is, the shape of the mask slots follows a function corresponding to the positive part of the sinusoidal function.

According to a second embodiment, the calculation of the shape of the mask slots is performed by considering the effects of diffraction occurring in the rotating disk. In this particular case by using the following equation $(H * Kd * F)(t) = c(d) + A(d)\sin Nt$, in which the positive and the negative parts of the sinusoidal function are considered. In the equation,

Kd is the Helmholtz kernel, and convolution with Kd is what mathematically describes the effect of diffraction, $c(d)$ is a constant which depends on the distance d between the mask and the rotating disk taking into account the diffraction effects, $A(d)$ is the amplitude which depends on the distance d between the mask and the disk, and N is the first resolution of the generated periodic signal. $A(d)$ may oscillate between 0 and a maximum value A_{max} as the distance d increases.

Preferably, the shape of the mask slots is lower than the rectangular shape of the disk slots. Moreover, the light source preferably is monochromatic. The light source, in an embodiment, comprises either a light-emitting diode or a laser diode. In other embodiments, the light source comprises different light emitting diodes or laser diodes of a specific wavelength.

According to a second aspect, present invention provides a mask for an optical incremental encoder in which said mask characteristically comprises a plurality of mask slots with a particular shape calculated by performing a Fourier transform on a convolution equation between a function H and a function F equaling a pure sinusoidal signal. The function H defines the shape of a plurality of slots included in the periphery of a rotating disk of the optical incremental encoder, positioned perpendicular to a rotating axis, fixed to the latter, and rotating at a same velocity, and the function F defines the shape of the mask slots. The rotating disk when rotates produces a diffraction effect. The shape of the mask slots can be calculated either ignoring or considering the diffraction effects occurring in the rotating disk.

According to a third aspect, present invention also provides a method to calculate the shape of mask slots of an optical incremental encoder, comprising, as known in the field:

- emitting, by a light source, a light beam, said light beam being collimated by a lens and reaching a rotating disk producing a diffraction effect, said rotating disk being positioned perpendicular to a rotating axis, fixed to the latter, and rotating at a same velocity, said rotating disk having a first part in the periphery thereof comprising a plurality of disk slots having a rectangular shape allowing light to go through and a second part not allowing the light to go through;

- receiving, by a mask positioned at a certain distance after the rotating disk and comprising a plurality of mask slots with a particular shape the light diffracted by the rotating disk;

- generating, by an optoelectronic unit, a periodic signal with a given first resolution using an amount of light reaching the optoelectronic unit, said amount of light being dependent on the rotation of the rotating disk; and

- converting, by the optoelectronic unit, said generated periodic signal into an electronic pulse which is processed to obtain a final output with a given second resolution, said final output being used to calculate the speed of the rotating axis.

5 Unlike the proposals known in the field, in the proposed method the shape of the mask slots are calculated by performing a Fourier transform on a convolution equation between a function H and a function F , either ignoring or considering the effects of diffraction occurring in the rotating disk, so that said generated periodic signal being a pure sinusoidal signal. The function H defines the rectangular shape of the disk slots whereas the function F defines the shape of the mask slots.

10 As said before, the shape of the mask slots may be calculated either ignoring or considering the effects of diffractions occurring in the rotating disk. When such effects are ignored, the following equation $(F * H)(t) = \int F(x) H(x - t) dx = c(1 + \sin Nt)$ is used, in which only the positive part of a sinusoidal function is considered. On the contrary, when the effects are considered, the following equation $(H * Kd * F)(t) = c(d) + A(d) \sin Nt$ is used, in which
15 the positive and the negative parts of the sinusoidal function are considered.

According to the proposed method, the emitting of the light beam includes emitting the light beam from a light-emitting diode or a laser diode.

Brief Description of the Drawings

20 The previous and other advantages and features will be more fully understood from the following detailed description of embodiments, with reference to the attached figures, which must be considered in an illustrative and non-limiting manner, in which:

Fig. 1 is a basic scheme of an optical incremental encoder.

Fig. 2 illustrates an example of a train of rectangular impulses and its translate.

Fig. 3 is an example of rectangular slots in a mask.

25 Fig. 4 is an example of a zero overlap.

Fig. 5 is an example of a maximum overlap.

Fig. 6 illustrates an example of a train of triangular impulses.

Fig. 7 illustrates an example of a pure sinusoidal signal.

Fig. 8 illustrates the function F obtained by keeping just the positive part of the sinusoidal function.

Figs. 9-11, illustrate the convolution performed in the first solution. Fig. 9 illustrates the convolution between the disk H and the F 18 given in Fig. 8; Fig. 10 illustrates the convolution with no overlap; and Fig. 11 illustrates the convolution with maximum overlap.

Fig.12 illustrates the mask given by the first solution.

Fig. 13 illustrates the convolution performed by the second solution.

Fig. 14 illustrates the sinusoidal signal $S(t)$ given by the second solution.

Detailed Description of Preferred Embodiments

10 The proposed invention provides an optical incremental encoder, a mask of an optical incremental encoder and a method to calculate the shape of mask slots of an optical incremental encoder.

The proposed optical incremental encoder, such as the one shown in Fig. 1, comprises mask slots 7 having a shape calculated by performing a Fourier transform on a convolution equation between a function H , defining the rectangular shape of the disk slots 2 of the rotating disk 1 and a function F , defining the shape of the mask slots 7, either ignoring or considering the effects of diffraction occurring in the rotating disk 1. Consequently, the sinusoidal signal $S(t)$ being a pure sinusoidal signal. To achieve the latter, present invention provides two possible embodiments, or solutions.

20 According to a first embodiment, or first solution, namely ignoring the effects of diffraction, present invention approach is based on a mathematical analysis of the following equation $(F * H)(t) = \int F(x) H(x - t)dx = c(1 + \sin Nt)$ using the Fourier transform, which is the preferable tool to deal with convolution equations. Present invention analysis reveals moreover that this shape is unique, up to trivial modifications.

25 It turns out to be the right shape is given by the function F obtained by keeping just the positive part of a sinusoidal function as shown in Fig. 8, with some number of impulses 14. Fig. 9, 10 and 11 illustrate the convolution in this case. Again, the amount of light intensity captured by the optoelectronic unit 8 is proportional to the common area 15 determined by $H(x - t)$ and $F(x)$ in Fig. 9, but in this case does not change linearly. When there is no overlap at all between the slots of the rotating disk 1 and the mask 6 (Fig. 10) this area is

30

zero and $S(0) = 0$. When the overlap is perfect (Fig. 11) the value of S is maximum. In between, the relevant point is that it changes not linearly as before, but as a sinusoidal function. Altogether, the final output is a pure sinusoidal signal, as desired.

Fig. 12 shows a mask 6 with slots 7 having this shape. The slots 7 have been duplicated symmetrically with respect the horizontal axes to increase intensity.

According to a second embodiment, or second solution, when light diffracts in a screen with apertures (slots) given by a function H , it is well-known in diffraction theory that the light disturbance I_d at a distance d from the screen is given by the convolution of H with a Helmholtz kernel K_d , $I_d = H * K_d$. It is also well-know that in case H is periodic, the intensity I_d is up to constants equal to H when d is an integer multiple of the so-called Talbot distance. This means that when the distance 17 between the rotating disk 1 and the mask fulfills that condition, the model described above, ignoring the diffraction, is accurate. As a consequence, the first solution provided in the first embodiment will have the desired effect of a pure sinusoidal signal $S(t)$ for some values of the critical distance 17.

However, encoders often work in situations exposed to high pressures, vibrations, etc., that might perturb the value of the distance 17. When this occurs the model used in the first embodiment ceases to be accurate and as a consequence, the resulting signal $S(t)$ obtained using the first solution is no longer an exact sinusoidal function. To solve the latter, in the second embodiment, the shape of the slots 7 in the mask 6 are determined by considering that the function H must be changed to $H * K_d$ if diffraction effects are taken into account. So, in this second embodiment, the equation of function F modeling the slots 7 satisfies:

$$(H * K_d * F)(t) = c(d) + A(d) \sin Nt$$

The solution turns out to be the function F consisting in a finite number of impulses 18, as in Fig. 13, in the shape of a shifted sinusoidal, $F(x) = 1 + \sin Nt$. The signal $S(t)$ generated when the mask 6 is given by this second solution is the sinusoidal signal 19 in Fig.14.

The light source 4 of the proposed optical incremental encoder, in any of the described solutions, is preferably monochromatic. Besides, the light source 4 can be a light-emitting diode (LED) or a laser. Both the LED and the laser may work at different wavelengths. Moreover, preferably, the shape of the mask slots 7 is lower than the rectangular shape 2 of the disk slots.

The scope of the present invention is defined in the following set of claims.

Claims

1. An optical incremental encoder, comprising:
- a rotating disk (1) positioned perpendicular to a rotating axis, fixed to the latter, and rotating at a same velocity, said rotating disk (1) having a first part in the periphery thereof comprising a plurality of disk slots (2) having a rectangular shape allowing light to go through and a second part not allowing the light to go through;
- a light source (4) configured to emit a light beam (3), said light beam being collimated by a lens (5) and reaching the rotating disk (1) producing a diffraction effect in the rectangular disk slots (2);
- a mask (6), positioned at a certain distance (17) after the rotating disk (1), comprising a plurality of mask slots (7) with a particular shape and configured to receive the light diffracted by the rotating disk (1); and
- an optoelectronic unit (8), positioned after the mask (6), and configured to:
- generate a periodic signal with a given first resolution using an amount of light reaching the optoelectronic unit (8), said amount of light being dependent on the rotation of the rotating disk (1); and
- convert said generated periodic signal into an electronic pulse which is processed to obtain a final output with a given second resolution,
- characterized in that** the shape of the mask slots (7) being calculated by performing a Fourier transform on a convolution equation between a function H and a function F , either ignoring or considering the effects of diffraction occurring in the rotating disk (1), so that said generated periodic signal being a pure sinusoidal signal,
- where the function H defines the rectangular shape of the disk slots (2) and the function F defines the shape of the mask slots (7).
2. The encoder of claim 1, wherein said calculation of the shape of the mask slots (7) being performed by ignoring the effects of diffraction occurring in the rotating disk (1) and by using the following equation $(F * H)(t) = \int F(x) H(x - t) dx = c(1 + \sin Nt)$, in which only the positive part of a sinusoidal function is considered,
- where c is a constant, and N is the first resolution of the generated periodic signal.
3. The encoder of claim 1, wherein said calculation of the shape of the mask slots (7) being performed by considering the effects of diffraction occurring in the rotating disk (1) and by using the following equation: $(H * Kd * F)(t) = c(d) + A(d) \sin Nt$, in which the positive and the negative parts of a sinusoidal function are considered,

where $c(d)$ is a constant which depends on the distance between the mask (6) and the rotating disk (1) taking into account the diffraction effects, $A(d)$ is the amplitude which depends on the distance between the mask (6) and the disk (1), and N is the first resolution of the generated periodic signal.

5 4. The encoder of claims 1 to 3, wherein the shape of the mask slots (7) being lower than the rectangular shape of the disk slots (2).

5. The encoder of claim 1, wherein the optoelectronic unit (8) includes a set of photodiodes.

6. The encoder of claim 1, wherein the light source (4) being monochromatic and including a light-emitting diode or a laser diode.

10 7. The encoder of claim 1, wherein the light source (4) comprising different light emitting diodes or laser diodes of a specific wavelength.

8. The encoder of claim 1, wherein the lens (5) includes a convergent lens.

9. A mask for an optical incremental encoder, said mask (6) comprising a plurality of mask slots (7) with a particular shape, **characterized in that** the shape of the mask slots (7) being calculated by performing a Fourier transform on a convolution equation between a function H

15 and a function F equaling a pure sinusoidal signal,
wherein the function H defines a shape of a plurality of slots (2) included in the periphery of a rotating disk (1) positioned perpendicular to a rotating axis, fixed to the latter, rotating at a same velocity, and producing a diffraction effect in the slots (2) when a light beam (3)

20 reaches the rotating disk (1);
wherein the shape of the mask slots (7) being calculated either ignoring or considering the effects of diffraction occurring in the rotating disk (1); and
wherein the function F defines the shape of the mask slots (7).

10. The mask of claim 9, wherein:

25 the shape of the mask slots (7) being calculated by ignoring the effects of diffraction occurring in the rotating disk (1) and by using the following equation $(F * H)(t) = \int F(x) H(x - t) dx = c(1 + \sin Nt)$, in which only the positive part of a sinusoidal function is considered, where c is a constant, and N is the first resolution of the generated periodic signal; or

30 the shape of the mask slots (7) being calculated by considering the effects of diffraction occurring in the rotating disk (1) and by using the following equation: $(H * Kd *$

$F(t) = c(d) + A(d) \sin Nt$, in which the positive and the negative parts of a sinusoidal function are considered, where $c(d)$ is a constant which depends on the distance between the mask (6) and the rotating disk (1) taking into account the diffraction effects, $A(d)$ is the amplitude which depends on the distance between the mask (6) and the disk (1), and N is the first resolution of the generated periodic signal.

11. A method to calculate the shape of mask slots of an optical incremental encoder, comprising:

emitting, by a light source (4), a light beam (3), said light beam being collimated by a lens (5) and reaching a rotating disk (1) producing a diffraction effect, said rotating disk (1) being positioned perpendicular to a rotating axis, fixed to the latter, and rotating at a same velocity, said rotating disk (1) having a first part in the periphery thereof comprising a plurality of disk slots (2) having a rectangular shape allowing light to go through and a second part not allowing the light to go through;

receiving, by a mask (6) positioned at a certain distance (17) after the rotating disk (1) and comprising a plurality of mask slots (7) with a particular shape, the light diffracted by the rotating disk (1); and

generating, by an optoelectronic unit (8), a periodic signal with a given first resolution using an amount of light reaching the optoelectronic unit (8), said amount of light being dependent on the rotation of the rotating disk (1); and

converting, by the optoelectronic unit (8), said generated periodic signal into an electronic pulse which is processed to obtain a final output with a given second resolution, said final output being used to calculate the speed of the rotating axis,

characterized in that the shape of the mask slots (7) being calculated by performing a Fourier transform on a convolution equation between a function H and a function F , either ignoring or considering the effects of diffraction occurring in the rotating disk (1), so that said generated periodic signal being a pure sinusoidal signal,

where the function H defines the rectangular shape of the disk slots (2) and the function F defines the shape of the mask slots (7).

12. The method of claim 11, wherein said calculation of the shape of the mask slots (7) being performed by ignoring the effects of diffraction occurring in the rotating disk (1) and by using the following equation $(F * H)(t) = \int F(x) H(x - t) dx = c(1 + \sin Nt)$, in which only the positive part of a sinusoidal function is considered,

where c is a constant, and N is the first resolution of the generated periodic signal.

13. The method of claim 11, wherein said calculation of the shape of the mask slots (7) being performed by considering the effects of diffraction occurring in the rotating disk (1) and by using the following equation $(H * Kd * F)(t) = c(d) + A(d) \sin Nt$, in which the positive and the negative parts of a sinusoidal function are considered,
- 5 where $c(d)$ is a constant which depends on the distance between the mask (6) and the rotating disk (1) taking into account the diffraction effects, $A(d)$ is the amplitude which depends on the distance between the mask (6) and the disk (1), and N is the first resolution of the generated periodic signal.
14. The method of any of previous claims 11 to 13, wherein the emitting of the light beam (3)
- 10 includes emitting the light beam (3) from a light-emitting diode or a laser diode.
15. The method of any of previous claims 11 to 14, wherein the generating of the periodic signal including generating the periodic signal from a set of photodiodes.

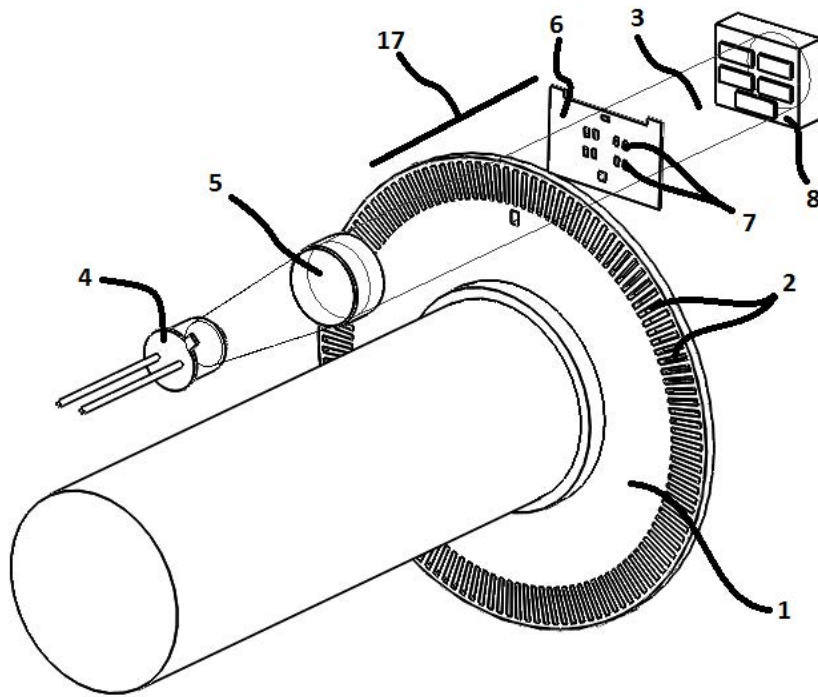


Fig. 1

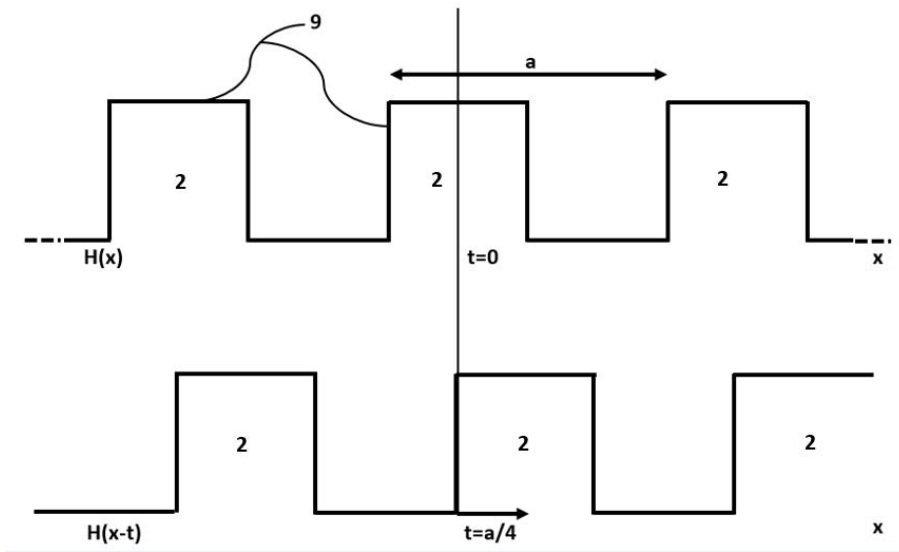


Fig. 2

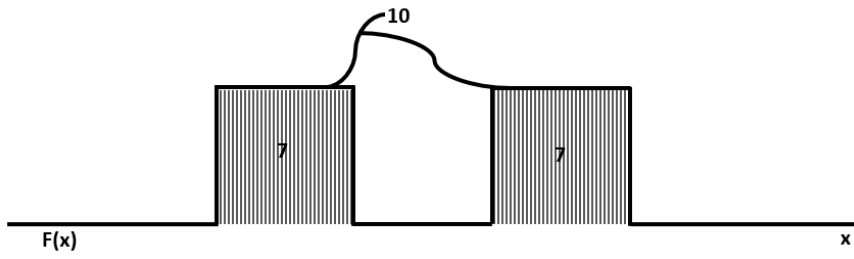


Fig. 3

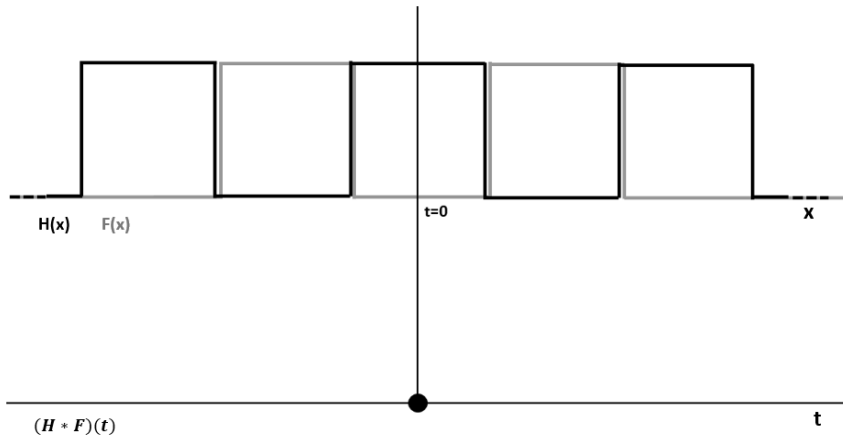


Fig. 4

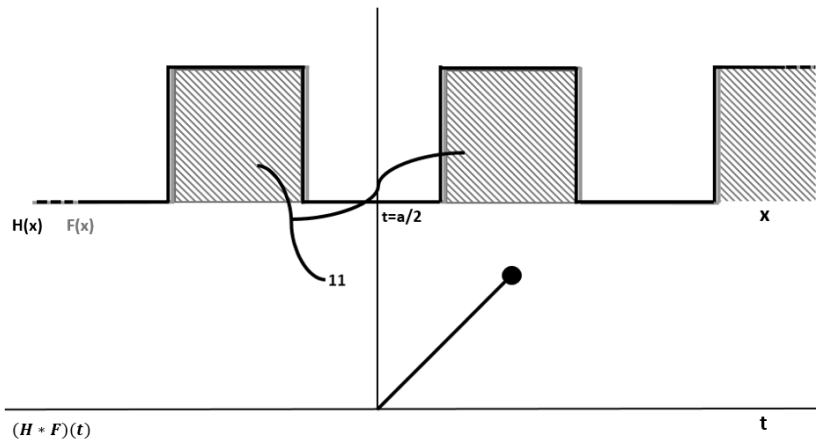


Fig. 5

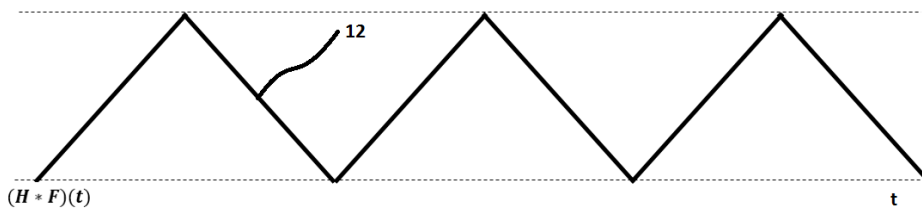


Fig. 6

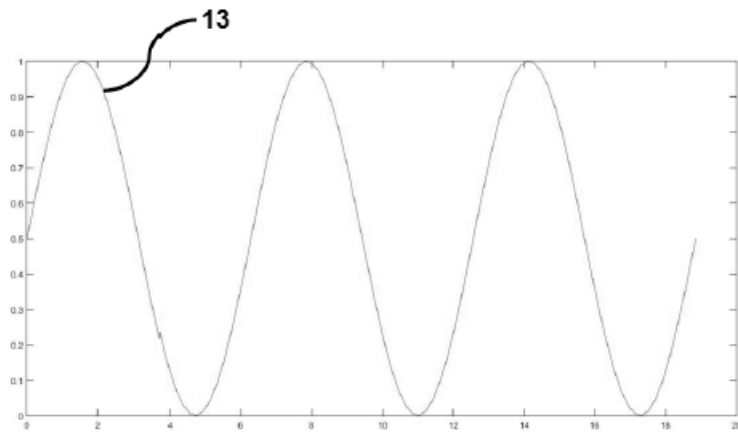


Fig. 7

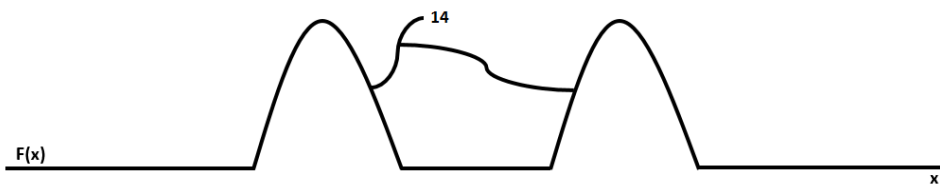


Fig. 8

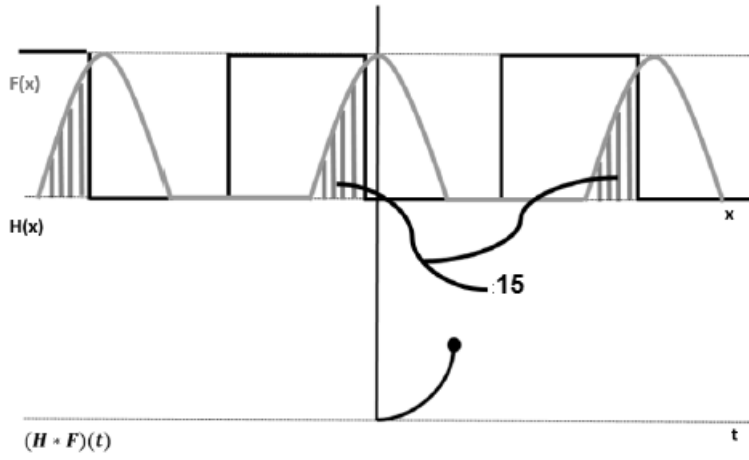


Fig. 9

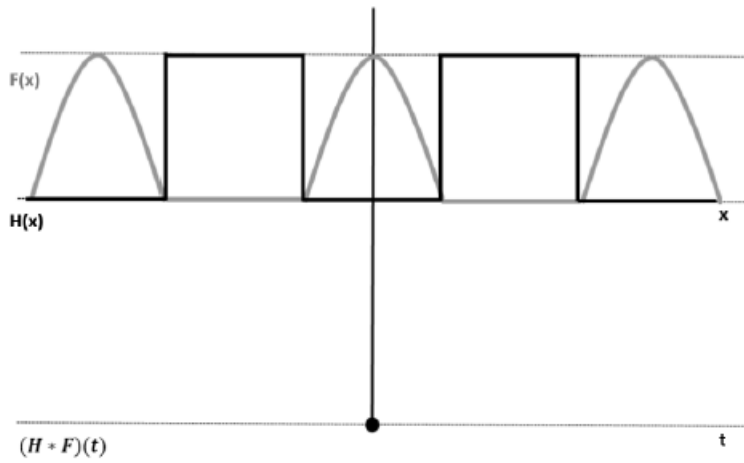


Fig. 10

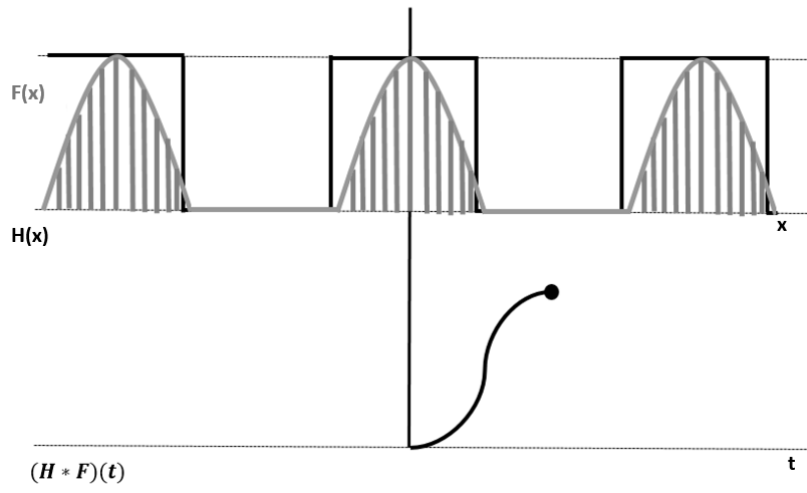


Fig. 11

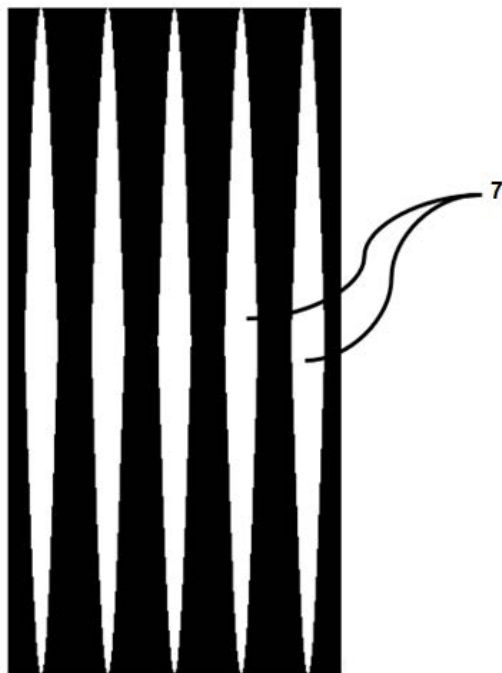


Fig. 12

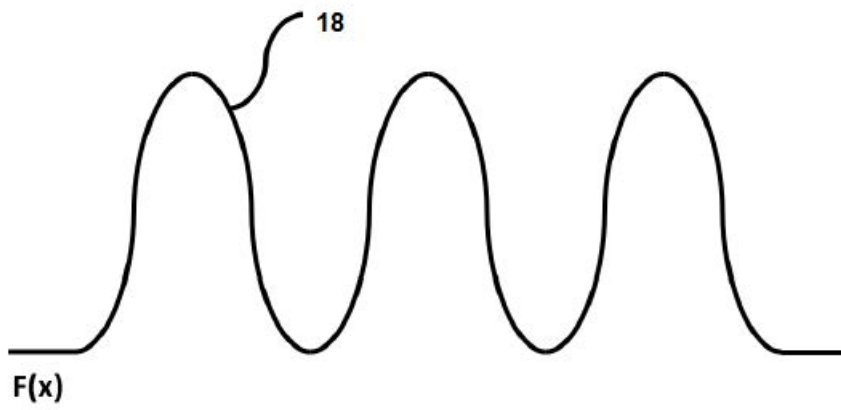


Fig. 13

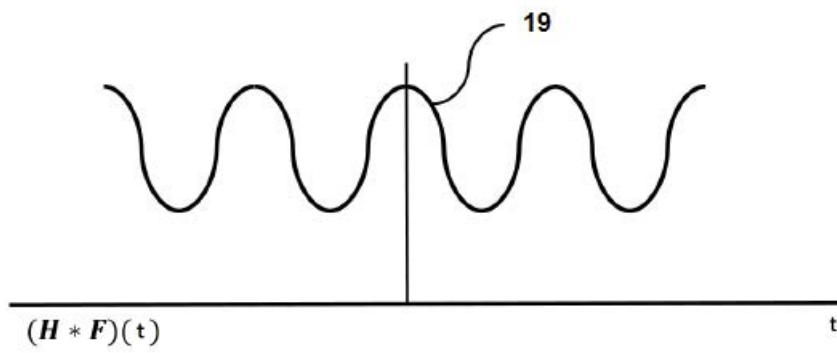


Fig. 14

Abstract

An optical incremental encoder, a mask for an optical incremental encoder and a method to calculate the shape of mask slots of an optical incremental encoder

The optical incremental encoder comprises a rotating disk (1) comprising a plurality of disk slots (2) having a rectangular shape; a light source (4) configured to emit a light beam (3), reaching the rotating disk (1) producing a diffraction effect in the rectangular disk slots (2); a mask (6), positioned at a certain distance (17) after the rotating disk (1), comprising a plurality of mask slots (7) with a particular shape and configured to receive the light diffracted by the rotating disk (1); and an optoelectronic unit (8), wherein the shape of the mask slots (7) being calculated by performing a Fourier transform on a convolution between functions H and F, either ignoring or considering the effects of diffraction occurring in the disk (1), so said signal (S) being a pure sinusoidal signal, where H defines the shape of the slots (2) and F defines the shape of the slots (7).

RESUMEN

Un encoder incremental óptico, una máscara para un encoder incremental óptico y un método para calcular la forma de las ranuras de una máscara de un encoder incremental óptico.

5 El encoder incremental óptico comprende un disco (1) giratorio que comprende una pluralidad de ranuras (2) del disco que tienen una forma rectangular; una fuente (4) de luz configurada para emitir un haz (3) de luz, alcanzando el disco (1) giratorio produciendo un efecto de difracción en las ranuras (2) del disco rectangulares; una máscara (6), colocada a cierta distancia (17) después del disco (1) giratorio, comprendiendo una pluralidad de ranuras (7) de la máscara con una forma particular y configuradas para recibir la luz difractada por el disco (1) giratorio; y una unidad (8) optoelectrónica, en donde la forma de las ranuras (7) de la máscara se calcula realizando una transformada de Fourier en una convolución entre las funciones H y F, bien ignorando o bien considerando los efectos de difracción que ocurren en el disco (1), de modo que dicha señal (S) es una señal sinusoidal pura, donde H define la forma de las ranuras (2) y F define la forma de las ranuras (7).

Bibliografía

- [1] Hohner Automáticos S.L. <http://www.encoderhohner.com/es/>.
- [2] Hans Walcher. *Position sensing: angle and distance measurement for engineers*. Elsevier, 2014.
- [3] Hohner Automáticos S.L. <http://www.encoderhohner.com/es/cat/potenciometros-es/>.
- [4] Hohner Automáticos S.L. <http://www.encoderhohner.com/es/cat/inclinometros-es/>.
- [5] David G Alciatore. *Introduction to mechatronics and measurement systems*, chapter 9, pages 383–386. Tata McGraw-Hill Education, 2007.
- [6] Joseph M Geary. *Introduction to wavefront sensors*, volume 18, chapter 5, pages 75–77. Spie Press, 1995.
- [7] Phidgets Inc. https://www.phidgets.com/docs/Encoder_Primer.
- [8] Hohner Automáticos S.L. <http://www.encoderhohner.com/es/product/serie-10-8/>.
- [9] AMAC. ASICs. Mikrosensoren. <http://www.amac-chemnitz.de/Produkte/Interpolation/GC-AIP40/>.
- [10] Quantum Devices, Inc. <http://www.quantumdev.com/air-gap-in-high-resolution-optical-encoders/>.
- [11] Joseph W Goodman. *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers, 2005.
- [12] Apostolos Dimitromanolakis. *Analysis of the Golomb ruler and the Sidon set problems and determination of large near-optimal Golomb rulers*. Citeseer, 2002.
- [13] Luis Gerardo de la Fraga, Ponciano Rodríguez Montero, and Svetlana Mansurova. Localización de una autoimagen en el efecto talbot para una rejilla binaria.
- [14] Centre de Recerca Matemàtica. <http://www.crm.cat>.

-
- [15] Walter Rudin. *Análisis funcional*, chapter 7, pages 179–180. Reverté, 1979.
- [16] Gustavo López Velázquez. *Teoría de Distribuciones. Funciones Generalizadas*, chapter 2, pages 49–56. UDG, 2002.
- [17] David Gilbarg and Neil S Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. springer, 2001.
- [18] Arthur Erdelyi, Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger, and Francesco G Tricomi. *Tables of Integral Transforms: Vol.: 2*, page 9. McGraw-Hill Book Company, Incorporated, 1954.
- [19] Antonio Rogalski. *Infrared detectors*, chapter 9. CRC press, 2010.
- [20] Emily H Moore and Harriet Suzanne Katcher Pollatsek. *Difference sets: Connecting algebra, combinatorics, and geometry*, volume 67, chapter 4, pages 45–58. American Mathematical Soc., 2013.
- [21] IBM. <http://www.research.ibm.com/people/s/shearer/grtab.html>.
- [22] Paul Erdős and Pál Turán. On a problem of sidon in additive number theory, and on some related problems. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(4):212–215, 1941.
- [23] James Singer. A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, 43(3):377–385, 1938.
- [24] Imre Z Ruzsa. Solving a linear equation in a set of integers i. *Acta Arithmetica*, 65(3):259–282, 1993.
- [25] Timothy Joseph Galvin. *A Study of the Transistor Schmitt Trigger Circuit*. University of Wisconsin–Madison, 1959.
- [26] Hohner Automáticos S.L. <http://www.encoderhohner.com/es/product/serie-smrs64s-7/>.
- [27] iC-Haus GmbH. http://www.ichaus.de/upload/pdf/WP7en_High-Precision_Interpolation_140124.pdf.
- [28] Joaquim Bruna and Julià Cufí. *Anàlisi complexa*, volume 49, chapter 12, page 469. Univ. Autònoma de Barcelona, 2008.
- [29] Elias M Stein. *Harmonic Analysis (PMS-43), Volume 43: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.(PMS-43)*. Princeton University Press, 1993.

-
- [30] Daniel Thomae, Oliver Sandfuchs, and Robert Brunner. Quantitative analysis of imperfect frequency multiplying in fractional talbot planes and its effect on high-frequency-grating lithography. *JOSA A*, 31(7):1436–1444, 2014.
- [31] C Sidney Burrus. *Fast Fourier transforms*, chapter 2. Lulu. com, 2008.
- [32] Thorlabs, Inc. <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=HL6358MG>.
- [33] Thorlabs, Inc. <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=L405P20>.
- [34] Stanley Electric Co., LTD. <http://www.stanley-components.com/en/product/detail.html?pid=THB3801C>.
- [35] Thorlabs, Inc. <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=A220TM>.
- [36] Thorlabs, Inc. <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=LD2297>.
- [37] Thorlabs, Inc. <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=LB1471>.
- [38] Thorlabs, Inc. https://www.thorlabs.com/navigation.cfm?guide_id=2002.
- [39] Thorlabs, Inc. <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=XR25C/M>.
- [40] Pericles S Theocaris. *Moiré Fringes in Strain Analysis: The Commonwealth and International Library: Applied Mechanics Division*, chapter 1, pages 1–18. Elsevier, 2016.
- [41] Thorlabs, Inc. <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=PY005/M#ad-image-0>.