Universitat Jaume I

Escuela de Doctorado

Espacios de funciones continuas con valores difusos

DOCTORANDA:
Delia Sanchis Minguez

DIRECTORES:
Dr. Juan J. Font Ferrandis
Dr. Manuel Sanchis López

Castellón de la Plana, marzo 2019

Programa de doctorado en Ciencias

Escuela de Doctorado de la Universitat Jaume I

Espacios de funciones continuas con valores difusos

Memoria presentada por Delia Sanchis Minguez para optar al grado de doctora por la Universitat Jaume I

DOCTORANDA:
Delia Sanchis Minguez

DIRECTORES:
Dr. Juan J. Font Ferrandis
Dr. Manuel Sanchis López

Castellón de la Plana, marzo 2019

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a los Profesores **Manuel Sanchis López**, Catedrático de Universidad de Análisis Matemático, y **Juan José Font Ferrandis**, Profesor Titular de Universidad de Análisis Matemático, del Departamento de Matemáticas de la Universitat Jaume I de Castellón, por haber depositado su confianza en mi y por su inestimable aportación científica y humana, sin la cual no hubiese sido posible la realización de esta memoria.

Es también mi deseo agradecer al Departamento de Matemáticas de la Universitat Jaume I de Castellón la ayuda de todo tipo que he recibido en la elaboración de este trabajo.

A mi familia.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Existen datos que no tienen una definición precisa, como por ejemplo, “ser joven”, “temperatura alta”, “estatura media”, “estar cerca de”, etc. En 1965, y como posible solución a estos problemas, el profesor Lofti Zadeh, de la Universidad de California, en Berkeley, introdujo, en un artículo titulado “Fuzzy Sets”, los conjuntos difusos (o borrosos) como una extensión de los conjuntos clásicos, mediante los cuales podemos manipular información que tiene un alto grado de incertidumbre. En dicho artículo, L. Zadeh presenta unos conjuntos sin límites precisos, los cuales, según él, juegan un papel importante en el reconocimiento de formas, interpretación de significados, y especialmente en la abstracción, la esencia del proceso del razonamiento humano.

Así pues, los conjuntos difusos son una generalización de los conjuntos clásicos que nos permiten describir nociones imprecisas. De este modo, la pertenencia de un elemento a un conjunto pasa a ser cuantificada mediante un "grado de pertenencia". Dicho grado toma un valor en el intervalo [0,1]; si este grado toma el valor 0 significa que el elemento no pertenece al conjunto, si es 1 pertenece al conjunto y si es otro valor del intervalo (0,1), pertenece con cierto grado al conjunto. En lugar del intervalo [0,1], también se suelen considerar otros conjuntos ordenados más generales. Actualmente, los conjuntos difusos se utilizan en multitud de campos como, por ejemplo, en ciencias de la computación, en control inteligente, en teoría de la decisión, etc.([81]).

En [17], D. Dubois y H. Prade introdujeron un tipo particular de conjuntos difusos que generalizan el concepto de número real: *los números difusos*, que denotaremos por $\mathbb{E}^1$ (en el Capítulo 3 pueden encontrarse las definiciones formales de los conceptos utilizados en esta introducción). Desde entonces, los fundamentos del Análisis Difuso se han desarrollado alrededor de los números difusos de forma análoga a como se desarrolló la teoría del Análisis Real alrededor de los números reales. En 1986, R. Goetschel y W. Voxman ([32]) establecieron una caracterización de los números difusos basada en los llamados λ-cortes, la cual ha impulsado enormemente el desarrollo del Análisis Difuso.

Así pues, el espacio de los números difusos, $\mathbb{E}^1$, ha recibido mucha atención en la literatura recientemente y, en particular, el estudio de las propiedades topológicas inducidas, básicamente, por las distintas métricas con las que se puede dotar a $\mathbb{E}^1$. De entre ellas, la más estudiada es la métrica supremo, d_∞. De hecho, se sabe que dicha métrica es invariante por traslaciones y que $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ es completo y no es ni separable ni localmente compacto ([40]). También se ha probado una versión del Teorema de Bolzano-Weierstrass en

$(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ ([22]) sobre las condiciones que debe cumplir una sucesión para que posea una subsucesión convergente. Cabe destacar que en ([22, Theorem 2.4]) se dio una caracterización incorrecta de los subconjuntos compactos de $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ que fue corregida en [24].

El espacio de los números difusos también se puede dotar de otras métricas, como por ejemplo, la métrica endográfica ([19],[34]) y la métrica de Skorokhod ([43]). Entre otros resultados, cabe mencionar que $\mathbb{E}^1$ dotado de la métrica endográfica es separable pero no completo ([19]); si lo dotamos de la métrica de Skorokhod, el espacio topológico resultante es separable y topológicamente completo ([43]). También es interesante comentar que los subespacios compactos de $\mathbb{E}^1$ han sido caracterizados para estas dos métricas ([19], [43]).

Una alternativa a las topologías inducidas en $\mathbb{E}^1$ por las métricas que acabamos de mencionar es la topología de la convergencia de nivel, τ_l, basada en los λ-cortes. Se ha demostrado que $(\mathbb{E}^1, \tau_l)$ es un espacio de Hausdorff, primer numerable ([20]), separable y de Lindelöf [24]. Se sabe que dotado de su uniformidad natural, es decir, la uniformidad puntual, el espacio uniforme resultante no es un espacio uniforme completo. Una descripción de su compleción se puede encontrar en [24]. Cabe destacar también que los subconjuntos compactos admiten una caracterización sencilla en este contexto ([24, Theorem 2.3]) y que en [21] se da una condición necesaria y suficiente para que una red de números difusos sea convergente en la topología de la convergencia de nivel, τ_l, la cual facilita su comparación con la d_∞-convergencia.

Al igual que sucede en el Análisis Real ([31]), las funciones difusas, es decir, las funciones de la forma $f : X \longrightarrow \mathbb{E}^1$, donde X es un espacio topológico, forman el núcleo central de la teoría ([11],[48]). La principal diferencia de este tipo de funciones respecto a la funciones que toman valores reales es el hecho de que los números difusos no forman un espacio vectorial, lo cual condiciona todos los resultados y, sobre todo, las demostraciones. El estudio de las funciones difusas se ha desarrollado, principalmente, alrededor de varias lineas de investigación:

- El estudio de los diferentes conceptos de diferenciabilidad de funciones difusas y sus aplicaciones a los problemas de optimización difusa ([33], [69]).
- Las ecuaciones diferenciales difusas, que han resultado ser la forma natural de modelizar problemas físicos y de ingeniería en contextos donde los parámetros son imprecisos o incompletos, lo que suele ser lo habitual ([7], [44]).
- En relación con los puntos anteriores, la introducción de una definición consistente del concepto de integral difusa ([54], [57], [77], [82]).
- Las propiedades topológicas del espacio de las funciones difusas continuas dotado de distintas topologías ([22]).
- El problema de la aproximación de funciones difusas continuas, básicamente utilizando la capacidad aproximativa de las redes neuronales difusas ([35], [52]).

Puesto que esta memoria se centra en los dos últimos puntos, vamos a describir brevemente el .^es^tado del arte"de ambos.

La literatura en cuanto a las propiedades topológicas de los espacios de funciones difusas es muy reducida. De hecho, básicamente sólo se han estudiado problemas tipo Arzelà-Ascoli en este contexto. En concreto, Fang y Xue ([22]) presentan una caracterización de los subconjuntos compactos del espacio $C(K, (\mathbb{E}^1, d_\infty))$, K un espacio compacto métrico, dotado de la métrica supremo D. Desafortunadamente, esta caracterización no es correcta porque se basa, como hemos comentado antes, en una descripción errónea de los subconjuntos compactos de $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$. En ese mismo artículo también se prueba que $(C(K, (\mathbb{E}^1, d_\infty)), D)$ es un espacio métrico completo. También se han estudiado ciertas propiedades del espacio $C(K, (\mathbb{E}^1, d_\infty))$ dotado de la topología puntual, donde en este caso K es un espacio topológico de Tychonoff ([40]).

Por otra parte, la Teoría de la Aproximación es una rama del Análisis Matemático que estudia los métodos que permiten aproximar ciertas funciones por otras más simples o manejables y analiza los errores que se cometen en dichas aproximaciones. Sus orígenes se remontan a los trabajos de P.L. Chebyshev y K. Weierstrass en el siglo XIX sobre la aproximación de funciones continuas por polinomios, que completó M.H. Stone a principios del siglo pasado en lo que se conoce como Teorema de Stone-Weierstrass. Desde entonces la teoría se ha desarrollado enormemente y de ello se han aprovechado numerosos ámbitos de la ciencia. Dentro de este contexto, pero más recientemente, la capacidad aproximativa de las redes neuronales en el caso real ha sido estudiada exhaustivamente por muchos autores desde finales de los años ochenta ([23],[42],[49]). En términos generales, las redes neuronales se implementan en todas las situaciones donde surgen problemas de previsión, clasificación y control, y son particularmente útiles en muchos campos, como las finanzas, la medicina, la ingeniería mecánica, la geología, la informática, etc. Además, dado que la naturaleza y el cerebro humano son inherentemente difusos en sus características, es natural pensar que la incorporación de las redes neuronales al contexto difuso puede tener la capacidad de procesar información difusa gracias a sus habilidades de aprendizaje, las cuales están estrechamente relacionadas con sus capacidades de aproximación ([52]).

Sin embargo, en 1994, Buckley y Hayashi ([10]) estudiaron la capacidad de aproximación de las redes neuronales difusas y probaron que, a diferencia del caso real, las redes neuronales difusas regulares (RFNN) de tres capas no aproximan uniformemente todas las funciones difusas continuas $f : \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{E}^1, d_\infty)$. De hecho, en 2000, Liu [51] demostró que las RFNN de tres capas ni siquiera pueden aproximar las funciones continuas crecientes difusas. Poco después, el propio Liu ([52]) probó que las RFNN de cuatro capas sí aproximan uniformemente las funciones difusas d_∞-continuas siempre que la red neuronal utilice una función de activación sigmoidal. Más recientemente, Huang y Wu también han probado resultados similares para funciones difusas que son continuas respecto a la topología de la convergencia de nivel ([36]).

En esta tesis ahondamos en estos dos aspectos de los espacios de funciones difusas que acabamos de describir. Es decir, por una parte analizamos ciertas propiedades topológicas de dichos espacios de funciones como, por ejemplo, su completitud, metrizabilidad y compacidad. Por otra parte, estudiamos la aproximación de funciones difusas continuas, no solo utilizando redes neuronales, sino probando resultados más generales, tipo Stone-Weierstrass.

La estructura de la memoria es la siguiente. En el Capítulo 2 recordamos los conceptos topológicos básicos para facilitar la comprensión de la tesis.

El Capítulo 3 está dedicado a introducir las definiciones rigurosas de los concepto difusos que se utilizan en el resto de capítulos. Lo dividimos en dos partes. En la primera introducimos los conjuntos difusos; damos su definición y explicamos en qué consisten las funciones de pertenencia. También enunciamos algunas operaciones básicas de este tipo de conjuntos. La segunda parte está dedicada a la herramienta básica de esta memoria: los números difusos; vemos su definición y presentamos algunas de sus propiedades. También enunciamos el teorema de representación de Goetschel y Voxman, junto con un ejemplo para facilitar su comprensión, y estudiamos la métrica más utilizada en el espacio de los números difusos, es decir, la métrica supremo. El capítulo termina con la introducción de la topología de la convergencia de nivel, esto es, una topología alternativa a las inducidas en $\mathbb{E}^1$ por la métricas comentadas anteriormente.

En el Capítulo 4 presentamos los primeros resultados de esta tesis. Concretamente abordamos tres aspectos importantes de los espacios de funciones difusas que son continuas respecto a la métrica supremo cuando están dotados de las topologías más habituales en este contexto. Estudiaremos su completitud, su metrizabilidad (para el caso clásico, véase [2]) y su compacidad. Como acabamos de comentar, solo el último concepto, que está claramente relacionado con el teorema de Ascoli, parece haber recibido cierta atención en la literatura difusa (ver, por ejemplo, [22], [71]). El prototipo de tal resultado en el Análisis Clásico fue probado por Ascoli en [6] y, de forma independiente, por Arzelà, quien reconoció la prioridad de Ascoli en [5]. Hoy en día, los teoremas del tipo Ascoli abarcan el estudio de la compacidad (relativa) de una familia de funciones dotadas de varias topologías y su literatura, en el caso clásico, es extensa. Las aplicaciones de estos resultados son numerosas en diferentes contextos, sobre todo, en el de las ecuaciones diferenciales.

Los conceptos clave en nuestro enfoque son los *subconjuntos acotados* de un espacio topológico y los α_f*-espacios*. Por ese motivo, en el segundo apartado de este capítulo obtenemos una caracterización difusa de los subconjuntos acotados y de los α_f-espacios, y señalamos cómo aparecen dichos espacios de una manera natural al considerar la completitud de los espacios $C(X,(\mathbb{E}^1,d_\infty))$, X un espacio topológico, equipado con la topología τ_α de la convergencia uniforme en los miembros de un recubrimiento α de subconjuntos acotados de X. En el apartado 4, establecemos un criterio explícito para que $C_{\tau_\alpha}(X,(\mathbb{E}^1,d_\infty))$ sea metrizable. Finalmente, en el apartado 5 abordamos el teorema de Ascoli difuso para espacios $C(X,(\mathbb{E}^1,d_\infty))$. Como consecuencia de nuestros resultados mostramos que $C(X,(\mathbb{E}^1,d_\infty))$ dotado con la topología de la convergencia uniforme satisface el teorema de Ascoli difuso si, y solo si, X es pseudocompacto. Este resultado corrije [22, Theorem 4.2] y generaliza el teorema de Ascoli difuso a un marco más amplio. También presentamos un resultado similar para funciones difusas que son continuas respecto a la topología de la convergencia de nivel.

Por otra parte, los Capítulos 5 y 6 están dedicados al estudio de problemas de aproximación en los espacios de funciones difusas continuas. En primer lugar (Capítulo 5) presentamos una adaptación del Teorema de Stone-Weierstrass al contexto difuso. Con este fin, introducimos el concepto de *envolvente convexa funcional* de un conjunto de funciones difusas y lo utilizamos para dar una demostración constructiva de un resultado tipo Stone-Weierstrass para funciones difusas continuas. También estudiamos la existencia de familias de funciones difusas continuas que interpolan cualquier conjunto finito de puntos y que, además, son densas. Cabe destacar que estos resultados se prueban para funciones difusas que son continuas tanto respecto a la métrica supremo como respecto a la topología de la convergencia de nivel.

En el Capítulo 6, se aplican los resultados del capítulo anterior para probar la capacidad aproximativa de la redes neuronales difusas activadas por funciones muy generales. También se introducen las llamadas funciones radiales que son una herramienta importante en la teoría de la aproximación, aunque todavía no se habían utilizado en un contexto difuso. De hecho, el término “función radial” apareció en el artículo [53] que trata sobre un problema de aproximación en la tomografía computarizada. También surgen naturalmente en varios campos, como en el de las ecuaciones en derivadas parciales y en el de las redes neuronales ([50]).

En el último capítulo resumimos los principales resultados obtenidos en esta memoria y, a partir de ellos, proponemos posibles futuras líneas de investigación.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Definiciones previas y resultados clásicos

Sea X un conjunto no vacío. Una familia τ de subconjuntos de X se dice que es una *topología* en X si

1. X y el conjunto vacío, $\emptyset$, pertenecen a τ.

2. La unión de cualquier número (finito o infinito) de conjuntos en τ pertenece a τ.

3. La intersección de dos conjuntos cualesquiera en τ pertenece a τ.

Al par (X, τ) se le llama *espacio topológico*. Los miembros de τ se dice que son *conjuntos abiertos*.

Diremos que un subconjunto A de X es *cerrado* en (X, τ) si $X \setminus A$ es abierto en (X, τ).

Sea A un subconjunto de un espacio topológico (X, τ). Llamaremos *clausura de* A a la intersección de todos los cerrados que contienen a A y lo denotaremos como clA.

Sea A un subconjunto de un espacio topológico (X, τ). Entonces se dice que A es *denso* en X si $clA = X$.

Se dice que un espacio topológico es *separable* si contiene un subconjunto denso y numerable.

Decimos que una función $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es *continua* cuando $f^{-1}(B)$ es abierto en (X, τ) si B es abierto en (Y, τ').

$f|_A$ representa la restricción de una función f a un subconjunto A de X.

Se dice que una función $f : A \to Y$ con $A \subseteq X$ admite una *extensión continua a* X (o que se extiende continuamente a X) si existe una función continua $g : X \to Y$ tal que $g\,|_A = f$, es decir, la restricción de g al subconjunto A coincide con f.

Sea I un conjunto y $\{O_i : i \in I\}$, una familia de subconjuntos de X. Sea A un subconjunto de X. Entonces se dice que dicha familia es un *recubrimiento de* A si $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$. Si cada O_i, $i \in I$, es un conjunto abierto en (X, τ), entonces se dice que es un recubrimiento abierto de A.

Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ) se dice que es *compacto* si cada recubrimiento abierto de A tiene un subrecubrimiento finito.

Sea I un conjunto no vacío y $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos. La topología para $\prod X_\alpha$ que tiene como subbase la colección:

$$S_\pi = \{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \in \tau_\alpha, \alpha \in I\}$$

se llama topología producto o topología de Tychonoff para $\prod X_\alpha$ y la denotamos como τ_π. Al espacio topológico $(\prod X_\alpha, \tau_\pi)$ se le llama *espacio producto.*

TEOREMA 2.1.1 (Teorema de Tychonoff) El producto de espacios compactos es compacto y todo subconjunto cerrado incluido en un espacio compacto es compacto.

DEFINICIÓN 2.1.2 *Sean (X, τ) y (Y, τ_1) dos espacios topológicos. Entonces se dice que son homeomorfos si existe una función $f : X \to Y$ que tiene las siguientes propiedades:*

- *f es inyectiva (es decir, $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$).*
- *f es sobreyectiva (es decir, para todo $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $f(x) = y$).*
- *f y f^{-1} son continuas.*

En ese caso, se dice que la función f es un homeomorfismo entre (X, τ) y (Y, τ_1) y escribiremos $(X, \tau) \cong (Y, \tau_1)$.

Un espacio topológico (X, τ) se dice que es *pseudocompacto* si cada función continua $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ está acotada.

Un espacio topológico (X, τ) se dice que es de *Hausdorff* si dado cualquier par de puntos distintos a, b en X, existen dos conjuntos abiertos U y V tales que $a \in U, b \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces se dice que (X, τ) es *completamente regular* si para cada $x \in X$ y cada conjunto abierto $U \ni x$, existe una función continua $f : (X, \tau) \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in X \setminus U$.
Un espacio completamente regular y de Hausdorff se dice que es un *espacio de Tychonoff*.

A partir de ahora un espacio topológico (X, τ) lo designaremos simplemente por X si no es necesario hacer mención expresa de la topología τ. Asímismo la palabra espacio designará un espacio topológico.

Si α es un recubrimiento de un espacio X, decimos que una función

$$f : X \to Y$$

es α_f*-continua* si la restricción de f a cada miembro de α se puede extender a una función continua en X.

Sea α un recubrimiento formado por conjuntos acotados. Decimos que X es *hemi-*α*-acotado* si hay una familia numerable $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \alpha$ tal que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, y cualquier $A \in \alpha$ es un subconjunto de una unión finita $A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup \cdots A_{n_k}$ de elementos de $\mathcal{A}$.

Una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos de un espacio topológico X se dice que es *localmente finita* si para cada punto x en X existe un entorno N_x de x tal que N_x intersecta como mucho a una subfamilia finita de $\mathcal{S}$.

DEFINICIÓN 2.1.3 *Una uniformidad en un conjunto X es una familia no vacía $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $X \times X$ tal que:*

1. *Cada miembro de $\mathcal{U}$ contiene la diagonal.*
2. *Si $U \in \mathcal{U}$, entonces $U^{-1} \in \mathcal{U}$, donde $U^{-1} = \{(y,x)$ tales que $(x,y) \in \mathcal{U}\}$.*
3. *Si $U \in \mathcal{U}$, entonces hay un $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subseteq U$.*
4. *Si $U \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{U}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{U}$.*
5. *Si $U \in \mathcal{U}$ y $U \subseteq V \subseteq X \times X$, entonces $V \in \mathcal{U}$.*

El par $(X,\mathcal{U})$ se llama espacio uniforme y cada miembro de $\mathcal{U}$ se llama un entorno de la diagonal o una banda de la uniformidad.

Toda uniformidad $\mathcal{U}$ en un conjunto X define una topología en X. De hecho, para cada $x \in X$, sea $U_x = \{y \in X : (x,y) \in U\}$. La familia $\{U_x : x \in X\}$ define una *base de entornos en x* para una topología $\tau_{\mathcal{U}}$, es decir, un subconjunto T de X es abierto en la topología $\tau_{\mathcal{U}}$ si, y solo si, para cada $x \in T$ existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $U_x \subseteq T$.

Un espacio topológico (X,τ) es uniformizable si existe una uniformidad $\mathcal{U}$ en X tal que la topología $\tau_{\mathcal{U}}$ inducida por $\mathcal{U}$ coincide con τ.

Un *conjunto dirigido* I es un conjunto ordenado tal que si $\alpha, \beta \in I$, entonces existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha, \beta \leq \gamma$.

Una aplicación ϕ de I en un conjunto X se denomina *red* y se denota por $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, donde $x_\alpha = \phi(\alpha)$.

Dado un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$, se dice que una red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es *de Cauchy* si para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $\gamma_0 \in I$ tal que $(x_\alpha, x_\beta) \in U$ para todo $\alpha, \beta \geq \gamma_0$.

Una *sucesión* es un tipo particular de red, concretamente cuando $I = \mathbb{N}$.

Dado un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$, se dice que una red *converge a x* en $\tau_\mathcal{U}$ si para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $\gamma_0 \in I$ tal que $(x_\alpha, x) \in U$ para todo $\alpha \geq \gamma_0$.

Diremos que un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es completo si toda red de Cauchy es convergente en $\tau_\mathcal{U}$.

2.1.1. Espacios métricos

DEFINICIÓN 2.1.4 *Sea X un conjunto no vacío y d una función real definida en $X \times X$ tal que para $a, b \in X$:*

1. *$d(a,b) \geq 0$ y $d(a,b) = 0$ si, y solo si, $a = b$.*
2. *$d(a,b) = d(b,a)$.*
3. *$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$, (desigualdad triangular) para todo a, b y c en X.*

Entonces d se dice que es una métrica en X y (X, d) se denomina espacio métrico. Si 1) pasa a ser 1') $d(a, b) \geq 0$ y $d(a, a) = 0$, entonces diremos que d es una pseudométrica en X y (X, d) se denomina espacio pseudométrico.

Todo espacio métrico (X, d) define una uniformidad $\mathcal{U}_d$. En particular sus bandas son

$$U_\varepsilon = \{(x, y) : d(x, y) < \varepsilon\},$$

con $\varepsilon > 0$.

Un espacio (X, τ) se dice que es *metrizable* si existe una métrica d en el conjunto X con la propiedad de que τ es la topología inducida por $\mathcal{U}_d$ o equivalentemente, por la métrica d.

La siguiente propiedad es una propiedad importante de los espacios uniformes.

TEOREMA 2.1.5 *([18, Theorem 8.1.21]) Todo espacio uniforme con una base numerable es metrizable.*

Un espacio métrico (X, d) es completo si lo es para la uniformidad $\mathcal{U}_d$. Dado que una sucesión es un caso particular de red, los resultados de la sección anterior se traducen de la siguiente manera:

Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X, d) se dice que es *de Cauchy* si dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo, n_0, tal que para todos los enteros $m, n \geq n_0$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Además, *converge* a $x \in X$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $d(x, x_n) < \varepsilon$ y lo denotaremos como $x_n \to x$.

PROPIEDAD 2.1.6 *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* (X, d)*. Si existe un punto* $x_0 \in X$ *tal que la sucesión converge a* x_0*, es decir,* $x_n \to x_0$*, entonces es una sucesión de Cauchy.*

Un subconjunto A de un espacio (pseudo)métrico (X, d) es *precompacto* si para todo $\varepsilon > 0$, hay un subconjunto finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$ donde, como es usual, $B_\varepsilon(x_i)$ representa la bola de centro x_i y radio ε. Si $A = X$, entonces se dice que el espacio (pseudo)métrico es precompacto o, simplemente, que la (pseudo)métrica d es precompacta.

TEOREMA 2.1.7 *([18]) En un espacio métrico completo, la clausura de un subespacio precompacto es compacta.*

Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos. Entonces, se dice que (X, d_1) es *isométrico* a (Y, d_2) si existe una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que para todo x_1 y x_2 en X, $d_1(x_1, x_2) = d_2(f(x_1), f(x_2))$. Diremos que f es una *isometría.*

Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos y f una función de X en Y. Sea $Z = f(X)$, y d_3 la métrica inducida en Z por d_2. Si $f : (X, d_1) \to (Z, d_3)$ es una isometría, entonces (X, d_1) se dice que está *isométricamente sumergido* en (Y, d_2).

2.2. Topologías en espacios de funciones

En esta memoria $F(X, (Y, d))$ denotará el conjunto de las funciones definidas entre un espacio X y un espacio métrico (Y, d). Para un recubrimiento α de X, denotaremos por τ_α la topología de la convergencia uniforme en los miembros de α. Es un hecho conocido que $((F(X,(Y,d)),\tau_\alpha)$ es un espacio de Tychonoff. Además, la familia de todos los subconjuntos de $F(X,(Y,d)) \times F(X,(Y,d))$ de la forma

$$U(A,\varepsilon) = \left\{ (f,g) \in F(X,(Y,d)) \times (F(X,(Y,d)) \, : \, \sup_{a\in A} d(f(a),g(a)) < \varepsilon \right\},$$

para todo $A \in \alpha$ y todo $\varepsilon > 0$ es una subbase para una uniformidad $\mathcal{U}_\alpha$ en $F(X,(Y,d))$ que induce la topología τ_α.

Cuando el recubrimiento α consiste en los conjuntos de la forma $\{x\}$ con $x \in X$ se obtiene la topología τ_p de la convergencia puntual. Si el recubrimiento es $\alpha = \{X\}$ se obtiene la topología τ_u de la convergencia uniforme. Por último, obtenemos la topología compacto-abierta, τ_{co}, si α es el recubrimiento formado por los subconjuntos compactos de X.

Capítulo 3

Conjuntos y números difusos

Los conjuntos difusos son una generalización de los conjuntos clásicos que nos permiten describir nociones imprecisas. De este modo, la pertenencia de un elemento a un conjunto pasa a ser cuantificada mediante un "grado de pertenencia". Dicho grado toma un valor en el intervalo [0,1]; si este grado toma el valor 0 significa que el elemento no pertenece al conjunto, si es 1 pertenece al conjunto y si es otro valor del intervalo (0,1), pertenece con cierto grado al conjunto.

En [17], D. Dubois y H. Prade introdujeron un tipo particular de conjuntos difusos que generalizan el concepto de número real: los números difusos. Desde entonces, se han desarrollado los fundamentos del Análisis Difuso alrededor de los números difusos de forma análoga a como se desarrolló la teoría del Análisis Real alrededor de los números reales.

3.1. Conjuntos difusos

3.1.1. Introducción

Sabemos que un conjunto es una colección de objetos bien especificados que poseen una propiedad común. Recordemos que se puede definir de diversas formas:

- Por enumeración de los elementos que lo componen. Para un conjunto E finito, de n elementos, tendríamos, por ejemplo, la siguiente representación: $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
- Por descripción analítica de una propiedad que caracterice a todos los miembros del conjunto. Por ejemplo, $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 7\}$.
- Usando la función característica (también llamada función de pertenencia) para definir sus elementos. Si llamamos $\mu_A : U \to \{0, 1\}$ a dicha función de pertenencia, siendo U el conjunto universal de posibles valores que puede tomar nuestra variable x, tendremos que,

  $$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

  Así, un conjunto A está completamente definido por el conjunto de pares:

  $$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in U, \mu_A(x) \in \{0, 1\}\}.$$

EJEMPLO 3.1.1 Si $U = \{a, e, i, o, u\}$ es el conjunto de las vocales del alfabeto y $A = \{a, i, u\}$ un subconjunto del mismo, podríamos representarlos en la siguiente forma:

$$U = \{(a, 1), (e, 1), (i, 1), (o, 1), (u, 1)\}$$

$$A = \{(a, 1), (e, 0), (i, 1), (o, 0), (u, 1)\}$$

Para un conjunto difuso, sin embargo, la cuestión de pertenencia de un elemento al conjunto no es un problema de "todo o nada", sino que puede haber diferentes grados de pertenencia. La función de pertenencia puede tomar cualquier valor en el intervalo real [0,1].

DEFINICIÓN 3.1.2 *Un conjunto difuso A se define como una función de pertenencia $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$ que enlaza o empareja los elementos de un dominio o universo de discurso U con elementos del intervalo $[0, 1]$ y queda definido como:*

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in U, \mu_A(x) \in [0, 1]\}.$$

Así, cualquier elemento x en U tiene grado de pertenencia $\mu_A(x) \in [0, 1]$.

EJEMPLO 3.1.3 Supóngase que alguien quiere describir la clase de *animales terrestres veloces*. Algunos animales pertenecen definitivamente a esta clase, como el guepardo o la gacela, mientras otros, como la tortuga o la araña, no pertenecen. Pero existe otro grupo de animales para los que es difícil determinar si son veloces o no. Utilizando notación difusa, el conjunto difuso para los animales *veloces* sería

$$\{(Guepardo, 1), (Avestruz, 0.9), (Liebre, 0.8), (Gacela, 0.7), (Gato, 0.4), ...\},$$

es decir, la liebre pertenece con grado de 0.8 a la clase de animales *veloces*, la gacela con grado de 0.7 y el gato con grado de 0.4.

Si se supone que C es un conjunto clásico finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, Zadeh propuso una notación más conveniente para conjuntos difusos. Así, otra forma de escribir el conjunto de los animales *veloces* del ejemplo 3.1.3 sería:

$$1/Guepardo + 0.9/Avestruz + 0.8/Liebre + 0.7/Gacela + 0.4/Gato$$

Es decir, se puede describir un conjunto difuso finito como sigue:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + ... + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

donde el símbolo de división no es más que un separador de los conjuntos de cada par de elementos del conjunto, y el sumatorio es la operación de unión entre todos los elementos del conjunto. Cuando U no es numerable, se escribe la ecuación anterior como:

$$A = \int_U \frac{\mu_A(x)}{x}.$$

EJEMPLO 3.1.4 La figura 3.1 muestra algunos conjuntos difusos definidos en el universo de discurso Edad. Concretamente, se representan las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos "joven", "maduro", "viejo".

Se puede ver que los conjuntos difusos se superponen, de manera que un individuo podría tener un grado de pertenencia en dos conjuntos: "joven" y "maduro", indicando que posee cualidades asociadas a ambos conjuntos. Por ejemplo, una persona con 35 años tiene un grado de pertenencia 0.5 para el conjunto "joven" y 0.5 para el conjunto "maduro".

Algunos conceptos relacionados con los conjuntos difusos son:

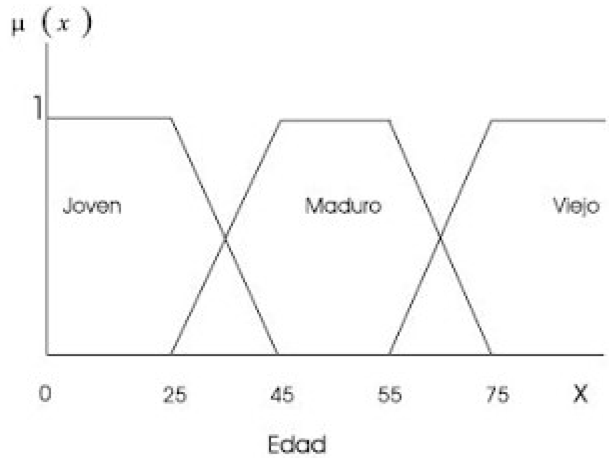

Figura 3.1: Ejemplo de conjuntos difusos

DEFINICIÓN 3.1.5 *Un conjunto difuso A es convexo (en sentido difuso) si*

$$\mu_A(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq min(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

para todo $x, y \in U$ *y para todo* $\alpha \in [0,1]$.

DEFINICIÓN 3.1.6 *Dado un número* $\lambda \in [0,1]$ *y un conjunto difuso A, definimos el* λ*-corte de A como el conjunto clásico* A_λ *que tiene la siguiente función de pertenencia:*

$$\mu_{A_\lambda}(x) = \begin{cases} 1 & \textit{cuando } \mu_A(x) \geq \lambda, \\ 0 & \textit{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

En definitiva, el λ*-corte se compone de aquellos elementos cuyo grado de pertenencia supera o iguala el umbral* λ*.*

3.1.2. Funciones de pertenencia

Lógicamente, la gráfica de una función de pertenencia asociada a un conjunto difuso puede tomar formas muy variadas. Las más comunes son las siguientes:

1. Forma singleton

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a, \\ 0 & \text{si } x \neq a. \end{cases}$$

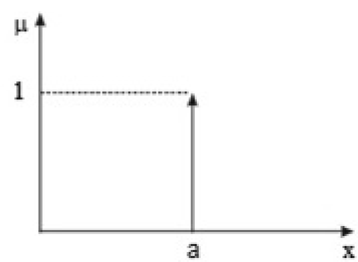

Figura 3.2: Ejemplo forma singleton

2. Forma triangular

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a, \\ (x-a)/(m-a) & \text{si } x \in (a, m], \\ (b-x)/(b-m) & \text{si } x \in (m, b), \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

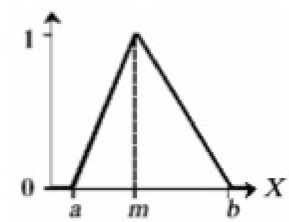

Figura 3.3: Ejemplo forma triangular

3. Forma S

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a, \\ 2\{(x-a)/(b-a)\}^2 & \text{si } x \in (a, m], \\ 1 - 2\{(x-a)/(b-a)\}^2 & \text{si } x \in (m, b), \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

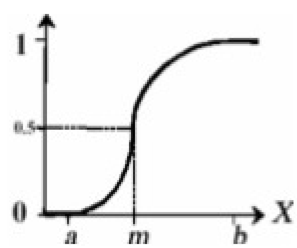

Figura 3.4: Ejemplo forma S

4. Forma trapezoidal

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x \le a) \text{ o } (x \ge d), \\ (x-a)/(b-a) & \text{si } x \in (a,b], \\ 1 & \text{si } x \in (b,c), \\ (d-x)/(d-c) & \text{si } x \in (b,d). \end{cases}$$

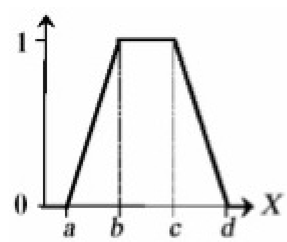

Figura 3.5: Ejemplo forma trapezoidal

3.1.3. Operaciones básicas con conjuntos difusos

Las operaciones más usadas en el contexto de los conjuntos difusos son las siguientes:

- *Intersección*: La intersección de dos conjuntos, A y B, es el conjunto difuso definido por la función de pertenencia

$$\mu_{A\cap B}(x) = \text{mín}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

- *Unión*: La unión de dos conjuntos difusos, A y B, es el conjunto difuso definido por la función de pertenencia

$$\mu_{A\cup B}(x) = \text{máx}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

- *El conjunto complementario*: El conjunto complementario de A se denota por $\overline{A}$, y es el conjunto difuso definido por la función de pertenencia

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

EJEMPLO 3.1.7 En la Figura 3.6 se observa un conjunto difuso A cuya función de pertenencia es trapezoidal entre 5 y 8 (rojo), y otro triangular B entorno al 4 (verde) y la intersección de ambos conjuntos difusos (el resultado es la gráfica de color azul):

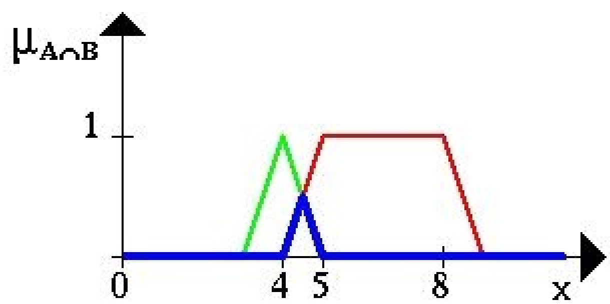

Figura 3.6: Ejemplo de intersección

La figura 3.7 muestra la unión de ambos conjuntos difusos (el resultado es la gráfica de color azul):

La figura 3.8 muestra la negación del conjunto difuso A (el resultado es la gráfica de color azul):

3.2. Números difusos

Introduciremos a continuación un caso particular de conjunto difuso llamado número difuso, que es una extensión del concepto de número real y la principal herramienta de esta memoria. Recordemos que $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales y $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales.

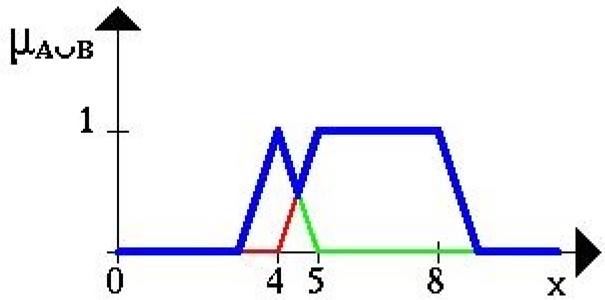

Figura 3.7: Ejemplo de unión

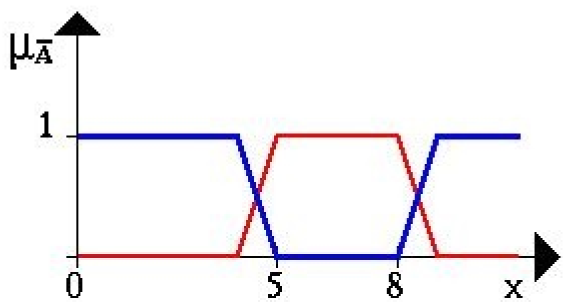

Figura 3.8: Ejemplo de negación

Los números difusos proporcionan herramientas formalizadas para manejar cantidades no precisas. De hecho, son conjuntos difusos en la recta real y fueron introducidos en 1978 por Dubois y Prade ([17]), quienes también definieron sus operaciones básicas.

3.2.1. Definiciones básicas

A partir de ahora, nuestro universo es el conjunto de los números reales y consideramos conjuntos difusos reales, es decir, aquellos cuya función de pertenencia es de la forma:

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1].$$

Denotamos por $F(\mathbb{R})$ la familia de todos los conjuntos difusos de $\mathbb{R}$.

Los **conjuntos λ-cortes**, ya definidos anteriormente, los representaremos en este contexto por $[u]^\lambda$, es decir, sea $u \in F(\mathbb{R})$ y $\lambda \in [0, 1]$, el conjunto λ-corte de u se define de la siguiente forma:

$$[u]^\lambda := \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \lambda\}, \qquad \lambda \in]0, 1],$$

donde $u(x)$ es el grado de pertenencia.

El **soporte** de un conjunto difuso, que representaremos en este contexto por $[u]^0$, se define como:

$$[u]^0 := \overline{\bigcup_{\lambda \in]0,1]} [u]^\lambda} = cl_{\mathbb{R}}\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}.$$

Es decir, el soporte es la clausura de los puntos donde la función u no toma el valor 0. Hay que tener en cuenta que no tomamos $[u]^0$ como $\{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq 0\}$ porque este último conjunto equivale a todo $\mathbb{R}$, es decir, $\{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq 0\} = \mathbb{R}$.

Definimos el **conjunto de los números difusos**, $\mathbb{E}^1$, como el subconjunto de elementos u de $F(\mathbb{R})$ que satisfacen las siguientes propiedades ([17]):

1. u es *normal*, es decir, existe al menos un $x_0 \in \mathbb{R}$ donde $u(x_0) = 1$.

2. u es *convexo* (en sentido difuso), es decir,

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \text{mín}\{u(x), u(y)\}$$

para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$.

3. u es *semicontinua superiormente*, es decir, $[u]^\lambda$ es un conjunto cerrado para todo λ.

4. $[u]^0$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

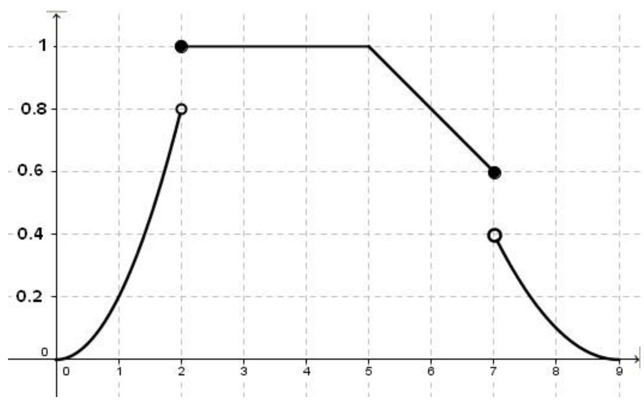

Figura 3.9: Ejemplo de número difuso

Por la condición de que la función de pertenencia sea semicontinua superiormente podemos considerar los números reales $\mathbb{R}$ como un caso particular de los números difusos definiendo $\widetilde{r}$ como:

$$\widetilde{r}(t) = \begin{cases} 1 & t = r \\ 0 & t \neq r \end{cases}$$

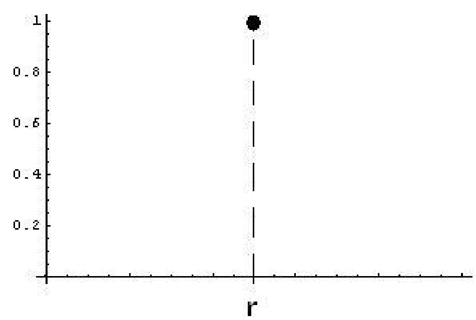

Figura 3.10: Ejemplo de número real, expresado de forma difusa

para todo $r \in \mathbb{R}$.

Es conocido que, para cada número difuso u, $[u]^\lambda$ es un subconjunto compacto y conexo de $\mathbb{R}$ ([14]). Por lo tanto, es un intervalo compacto para cualquier $\lambda \in [0,1]$ y podemos escribir $[u]^\lambda$ como:

$$[u]^\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)].$$

Como veremos en la subsección 3.2.3, un número difuso queda caracterizado por sus λ-cortes.

3.2.2. Aritmética difusa y sus propiedades

Es importante, para las aplicaciones de los números difusos, tener la posibilidad de realizar cálculos aritméticos con ellos. Debido al teorema de caracterización de Goetschel-Voxman, que presentaremos a continuación, la forma más habitual de operar con ellos es la aritmética de intervalos ([17]). Así pues, si tenemos $I = [a,b]$ y $J = [c,d]$ dos intervalos cerrados y acotados de números reales, entonces:

- $[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$.
- $[a,b] \cdot [c,d] = [\text{mín}(ac, ad, bc, bd), \text{máx}(ac, ad, bc, bd)]$.
- $[a,b]/[c,d] = [a,b] \cdot [1/d, 1/c]$, donde $d, c \neq 0$.
- $\lambda([a,b]) = [\lambda a, \lambda b]$ para todo $\lambda > 0$.

Si u y v son dos números difusos, para $0 \leq \lambda \leq 1$, designamos sus λ-cortes por $[u]^\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$ y $[v]^\lambda = [v^-(\lambda), v^+(\lambda)]$. Entonces podemos operar con ellos como sigue:

- Si $p = u + v$, entonces

  $$[p]^\lambda = [u^-(\lambda) + v^-(\lambda), u^+(\lambda) + v^+(\lambda)],$$

  para $0 \leq \lambda \leq 1$.

- Si $r = u \cdot v$, entonces

  $$[r]^\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)] \cdot [v^-(\lambda), v^+(\lambda)],$$

  para $0 \leq \lambda \leq 1$.

- Si $s = u/v$, entonces

  $$[s]^\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)] \cdot [1/v^+(\lambda), 1/v^-(\lambda)],$$

  para $0 \leq \lambda \leq 1$, asumiendo que el cero no pertenece a $[v]^0$.

Las propiedades de la aritmética de intervalos nos permiten concluir la siguiente proposición cuya demostración es rutinaria:

PROPOSICIÓN 3.2.1 *La suma de los números difusos y el producto de un número difuso por un número real positivo satisfacen las siguientes propiedades:*

1. Conmutativa*:* $u + v = v + u$ *para todo* $u, v \in \mathbb{E}^1$*.*
2. Asociativa*:* $u + (v + w) = (u + v) + w$ *para todo* $u, v, w \in \mathbb{E}^1$*.*
3. Elemento neutro*:* $u + \widetilde{0} = u$ *para todo* $u \in \mathbb{E}^1$*.*
4. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ *para todo* $u \in \mathbb{E}^1$ *y para todo* $\lambda, \mu > 0$*.*
5. $0 \cdot u = \widetilde{0}$ *para todo* $u \in \mathbb{E}^1$*.*
6. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ *para todo* $u, v \in \mathbb{E}^1$ *y para todo* $\lambda > 0$*.*
7. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ *para todo* $u \in \mathbb{E}^1$ *y para todo* $\lambda, \mu > 0$*.*

DEFINICIÓN 3.2.2 *Un cono es un conjunto no vacío $\mathcal{C}$ tal que a cada par de elementos K y L de $\mathcal{C}$ le corresponde un elemento $K + L$, llamado suma de K y L, de forma que la suma es conmutativa y asociativa, y existe en $\mathcal{C}$ un único elemento 0, llamado vértice de $\mathcal{C}$, tal que $K + 0 = K$, para cada $K \in \mathcal{C}$. Además, para cada par λ y K, donde $\lambda \geq 0$ es un número real no negativo y $K \in \mathcal{C}$, corresponde un elemento λK, llamado el producto de λ y K, de tal forma que la multiplicación es: (a)asociativa: $\lambda(\mu K) = (\lambda\mu)K$; (b) $1 \cdot K = K$ y (c) $0 \cdot K = 0$ para cada $K \in \mathcal{C}$; y además verifica las propiedades distributivas: (a) $\lambda(K + L) = \lambda K + \lambda L$, y (b) $(\lambda + \mu)K = \lambda K + \mu K$, para cada $K, L \in \mathcal{C}$ y $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$.*

Recordemos que un subconjunto A de $\mathcal{C}$ se denomina convexo si contiene las combinaciones convexas de cada par de sus elementos, donde, como es usual, dados dos puntos $x, y \in A$, la combinación convexa de x, y se define como $\lambda x+(1-\lambda)y$ para todo $\lambda \in [0,1]$. Dado un subconjunto A de $\mathcal{C}$, se define su envoltura convexa (cerrada) como el mínimo conjunto convexo (cerrado) que lo contiene. La envoltura convexa de A la denotaremos por $conv(A)$ y la envoltura convexa cerrada por $\overline{conv}(A)$ .Si $\mathcal{C}$ es convexo, diremos que se trata de un cono convexo.

Como consecuencia de la Proposición 3.2.1, podemos concluir inmediatamente el siguiente resultado.

COROLARIO 3.2.3 $(\mathbb{E}^1, +, \cdot)$ *tiene estructura de cono convexo.*

3.2.3. Teorema de representación de Goetschel y Voxman

A continuación enunciamos el teorema de representación de Goetschel y Voxman, una herramienta muy importante dentro de la teoría de números difusos pues nos permite hacer demostraciones en este campo utilizando solo propiedades intrínsecas, es decir, sin necesidad de utilizar estructuras externas como, por ejemplo, espacios de Banach, hiperespacios, etc. ([14]).

TEOREMA 3.2.4 (Teorema de representación de Goetschel y Voxman ([32])) *Si* $u \in \mathbb{E}^1$ *y* $[u]^\lambda := [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$, $\lambda \in [0,1]$, *entonces el par de funciones* $u^-(\lambda)$ *y* $u^+(\lambda)$ *tiene las siguientes propiedades:*

1. *$u^-(\lambda)$ es una función acotada, no decreciente y continua por la izquierda en el intervalo $]0,1]$;*
2. *$u^+(\lambda)$ es una función acotada, no creciente y continua por la izquierda definida en el intervalo $]0,1]$;*
3. *$u^-(\lambda)$ y $u^+(\lambda)$ son funciones continuas por la derecha en $\lambda = 0$;*
4. *$u^-(1) \leq u^+(1)$.*

Recíprocamente, si un par de funciones $\alpha(\lambda)$ y $\beta(\lambda)$ de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ satisfacen las condiciones anteriores $(1)-(4)$, entonces existe un único $u \in \mathbb{E}^1$ tal que $[u]^\lambda = [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$ para cada $\lambda \in [0,1]$.

El teorema anterior relaciona el estudio de los números difusos con el estudio de funciones monótonas. En este contexto, pueden ser de interés las técnicas desarrolladas en [28, 62].

NOTA 3.2.5 *Sean $u, v \in \mathbb{E}^1$ y $k \in \mathbb{R}^+$. Definimos $u + v := [u^-(\lambda), u^+(\lambda)] + [v^-(\lambda), v^+(\lambda)]$ y $ku := k[u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$. Se sabe que $\mathbb{E}^1$ dotado con estas dos operaciones naturales no es un espacio vectorial. De hecho $(\mathbb{E}^1, +)$ no es un grupo porque hay elementos que no tienen opuesto ([32]).*

EJEMPLO 3.2.6 Sea $u(x)$ un número difuso definido de la siguiente forma:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [0,1], \\ 1 & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2} & x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

cuya gráfica es:

A continuación consideremos algunos de sus $\lambda - cortes$ para algunos valores de λ:

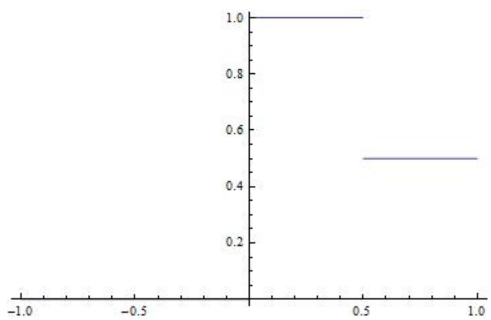

Figura 3.11: Función u(x)

$$
\begin{aligned}
[u]^{\frac{1}{4}} &= \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \tfrac{1}{4}\} = [0,1],\\
[u]^{\frac{1}{5}} &= \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \tfrac{1}{5}\} = [0,1],\\
[u]^{\frac{1}{6}} &= \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \tfrac{1}{6}\} = [0,1],\\
[u]^{\frac{3}{4}} &= \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \tfrac{3}{4}\} = [0,\tfrac{1}{2}].
\end{aligned}
$$

Puede comprobarse que en este caso las funciones $u^-(\lambda)$ y $u^+(\lambda)$ resultan ser de la siguiente forma:

$$
u^-(\lambda) = 0,\ u^+(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2} & \lambda \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}
$$

3.2.4. La métrica supremo en $\mathbb{E}^1$

Vamos a considerar en $\mathbb{E}^1$ la siguiente métrica:

DEFINICIÓN 3.2.7 *Para $u, v \in \mathbb{E}^1$, definimos*

$$
d_\infty(u,v) = \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{\mid u^-(\lambda) - v^-(\lambda) \mid, \mid u^+(\lambda) - v^+(\lambda) \mid\} =
$$

$$= \sup_{\lambda\in[0,1]} d_H([u]^\lambda, [v]^\lambda).$$

donde d_H representa la métrica de Hausdorff.

Es rutinario comprobar que d_∞ es una métrica en $\mathbb{E}^1$ y se denomina *métrica supremo*. Además, $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ es un espacio métrico completo ([16],[15]).

Obsérvese que, por la definición de d_∞, $\mathbb{R}$ dotado de la topología euclídea puede ser topológicamente identificado con el subespacio cerrado

$$\tilde{R} = \{\, \tilde{x} \,:\, x \in \mathbb{R} \,\}$$

de $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ donde $\tilde{x}^+(\lambda) = \tilde{x}^-(\lambda) = x$ para todo $\lambda \in [0,1]$. Como espacio métrico, siempre consideraremos $\mathbb{E}^1$ equipado con la métrica d_∞.

De la definición anterior se deduce que una sucesión u_n en $\mathbb{E}^1$ converge a u si, y solo si, $u_n^+(\lambda)$ converge a $u^+(\lambda)$ uniformemente y $u_n^-(\lambda)$ converge a $u^-(\lambda)$ uniformemente. Es decir, la convergencia en $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ es equivalente a la convergencia uniforme de los extremos de los intervalos de nivel.

TEOREMA 3.2.8 *([25, Proposition 2.3]) La métrica d_∞ satisface las siguientes propiedades:*

1. $d_\infty(\sum_{i=1}^m u_i, \sum_{i=1}^m v_i) \leq \sum_{i=1}^m d_\infty(u_i, v_i)$ *donde u_i, v_i son números difusos y* $i = 1, ..., m$.
2. $d_\infty(ku, kv) = kd_\infty(u, v)$ *donde u y v son números difusos cualesquiera y* $k > 0$.
3. $d_\infty(ku, \mu u) \leq\mid k - \mu \mid d_\infty(u, \widetilde{0})$, *donde $u \in \mathbb{E}^1$, $k \geq 0$ y $\mu \geq 0$.*
4. $d_\infty(ku, \mu v) \leq\mid k - \mu \mid d_\infty(u, \widetilde{0}) + \mu d_\infty(u, v)$, *donde $u, v \in \mathbb{E}^1$, $k \geq 0$ and* $\mu \geq 0$.

Demostración.

1.) Dados $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{E}^1$, resulta que

$$d_\infty(u_1 + u_2, v_1 + v_2) =$$

$$= \sup_{\lambda\in[0,1]} \text{máx}\{\mid u_1^-(\lambda)+u_2^-(\lambda)-v_1^-(\lambda)-v_2^-(\lambda) \mid, \mid u_1^+(\lambda)+u_2^+(\lambda)-v_1^+(\lambda)-v_2^+(\lambda) \mid\}.$$

Como

$$\mid u_1^-(\lambda) + u_2^-(\lambda) - v_1^-(\lambda) - v_2^-(\lambda) \mid\leq\mid u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda) \mid + \mid u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda) \mid$$

y

$$\mid u_1^+(\lambda) + u_2^+(\lambda) - v_1^+(\lambda) - v_2^+(\lambda) \mid\leq\mid u_1^+(\lambda) - v_1^+(\lambda) \mid + \mid u_2^+(\lambda) - v_2^+(\lambda) \mid,$$

tenemos que

$$\sup_{\lambda\in[0,1]} \text{máx}\{\mid u_1^-(\lambda)+u_2^-(\lambda)-v_1^-(\lambda)-v_2^-(\lambda) \mid, \mid u_1^+(\lambda)+u_2^+(\lambda)-v_1^+(\lambda)-v_2^+(\lambda) \mid\} \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda\in[0,1]} \text{máx}\{\mid u_1^-(\lambda)-v_1^-(\lambda) \mid + \mid u_2^-(\lambda)-v_2^-(\lambda) \mid, \mid u_1^+(\lambda)-v_1^+(\lambda) \mid + \mid u_2^+(\lambda)-v_2^+(\lambda) \mid\}.$$

Por otra parte,

$$d_\infty(u_1, v_1) + d_\infty(u_2, v_2) = \sup_{\lambda\in[0,1]} \text{máx}\{\mid u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda) \mid, \mid u_1^+(\lambda) - v_1^+(\lambda) \mid\}+$$

$$+ \sup_{\lambda\in[0,1]} \text{máx}\{\mid u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda) \mid, \mid u_2^+(\lambda) - v_2^+(\lambda) \mid\}.$$

Por comodidad vamos a renombrar algunas expresiones:

$$\alpha_1 := |\ u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda)\ | + |\ u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda)\ |,$$
$$\alpha_2 := |\ u_1^+(\lambda) - v_1^+(\lambda)\ | + |\ u_2^+(\lambda) - v_2^+(\lambda)\ |,$$
$$\alpha_3 := \text{máx}\{|\ u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda)\ |, |\ u_1^+(\lambda) - v_1^+(\lambda)\ |\},$$
$$\alpha_4 := \text{máx}\{|\ u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda)\ |, |\ u_2^+(\lambda) - v_2^+(\lambda)\ |\}.$$

Entonces si α_1 es el más grande de los α_i para todo $i = 1, ..., 4$, y éste se alcanza cuando $|\ u_1^-(\lambda) - v_1^-(\lambda)\ |$ y $|\ u_2^-(\lambda) - v_2^-(\lambda)\ |$ alcanzan sus valores máximos, entonces $\alpha_1 \leq \alpha_3 + \alpha_4$. El mismo razonamiento es válido si α_2 es el más grande de los α_i para todo $i = 1, ..., 4$.

Así podemos concluir que

$$d_\infty(u_1 + u_2, v_1 + v_2) \leq d_\infty(u_1, v_1) + d_\infty(u_2, v_2).$$

Por lo tanto, el resultado es cierto para $m = 2$. El resultado para un m arbitrario se deduce del resultado anterior y del hecho de que la suma de dos números difusos es un número difuso.

2.) Por la definición, tenemos que

$$d_\infty(ku, kv) = \sup_{\lambda\in[0,1]} \text{máx}\{|\ ku^-(\lambda) - kv^-(\lambda)\ |, |\ ku^+(\lambda) - kv^+(\lambda)\ |\} =$$

$$= \sup_{\lambda\in[0,1]} \text{máx}\{|\ k\ ||\ u^-(\lambda) - v^-(\lambda)\ |, |\ k\ ||\ u^+(\lambda) - v^+(\lambda)\ |\}.$$

Como k es un número positivo, podemos omitir el valor absoluto y obtenemos

$$\sup_{\lambda\in[0,1]} \text{máx}\{k\ |\ u^-(\lambda) - v^-(\lambda)\ |, k\ |\ u^+(\lambda) - v^+(\lambda)\ |\} = kd_\infty(u, v).$$

Para demostrar (3), supondremos que $\mu < k$.

Primero reescribimos ku y μu como

$$ku = (\mu + (k - \mu))u = \mu u + (k - \mu)u$$

y

$$\mu u = \mu u + (k - \mu)\widetilde{0}.$$

Por (1), sabemos que

$$d_\infty(ku, \mu u) \leq d_\infty(\mu u, \mu u) + d_\infty((k - \mu)u, (k - \mu)\widetilde{0}) =\mid k - \mu \mid d_\infty(u, \widetilde{0}).$$

Para demostrar (4), utilizaremos la desigualdad triangular:

$$d_\infty(ku, \mu v) \leq d_\infty(ku, \mu u) + d_\infty(\mu u, \mu v).$$

Por (3), sabemos que

$$d_\infty(ku, \mu u) \leq\mid k - \mu \mid d_\infty(u, \widetilde{0}).$$

Además, por (2) podemos escribir

$$d_\infty(\mu u, \mu v) = \mu d_\infty(u, v).$$

A partir de las desigualdades anteriores obtenemos la propiedad (4):

$$d_\infty(ku, \mu v) \leq\mid k - \mu \mid d_\infty(u, \widetilde{0}) + \mu d_\infty(u, v).$$

□

PROPOSICIÓN 3.2.9 [22, Lemma 2.2] *Sea U un subconjunto de $\mathbb{E}^1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *U está uniformemente acotado, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que $\max\{|u^-(0)|, |u^+(0)|\} \leq C$ para todo $u \in U$.*
2. *Las familias de funciones $\{u^+(\cdot) \mid u \in U\}$ y $\{u^-(\cdot) \mid u \in U\}$ están uniformemente acotadas en $[0, 1]$.*
3. *U está d_∞-acotado, es decir, existe un $L > 0$ tal que $d_\infty(u, \tilde{0}) \leq L$ para todo $u \in U$.*

Denotaremos por $C(K, \mathbb{E}^1)$ el espacio de las funciones continuas definidas entre un espacio compacto de Hausdorff K y el espacio métrico de los números difusos $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$. En $C(K, \mathbb{E}^1)$ consideraremos la siguiente métrica:

$$D(f, g) = \sup_{t \in K} d_\infty(f(t), g(t)),$$

la cual induce la topología de convergencia uniforme en $C(K, \mathbb{E}^1)$.

PROPOSICIÓN 3.2.10 ([25]) *Sea $\phi \in C(K, \mathbb{R}^+)$, es decir, una función continua que toma valores en los números reales positivos, y $f \in C(K, \mathbb{E}^1)$. Entonces la función $k \mapsto \phi(k) f(k)$, $k \in K$, pertenece a $C(K, \mathbb{E}^1)$.*

Demostración.
Veamos primero que la función producto, $\phi(k) f(k)$, está bien definida; en efecto, como $\mathbb{E}^1$ es un cono, $\phi(k) \cdot f(k) \in \mathbb{E}^1$ porque $\phi(k) > 0$ y $f(k) \in \mathbb{E}^1$ para todo $k \in K$.

Ahora vamos a ver que la función producto es continua. Sea $s, t \in K$. Por la Proposición 3.2.8 (4) tenemos que

$$d_\infty(\phi(t)\cdot f(t), \phi(s)\cdot f(s)) \leq \mid \phi(t)-\phi(s) \mid (d_\infty(f(t),0)+\phi(s)d_\infty(f(t),f(s))).$$

Puesto que ϕ y f son funciones continuas, el resultado se deduce de que toda función continua definida en un espacio compacto está acotada. □

3.2.5. Topología de la convergencia de nivel en $\mathbb{E}^1$

El espacio $\mathbb{E}^1$ generalmente está dotado de la topología inducida por ciertas métricas, principalmente por la métrica supremo d_∞. En [45], los autores introdujeron una nueva topología, τ_ℓ, en $\mathbb{E}^1$ basada en la siguiente convergencia:

DEFINICIÓN 3.2.11 *Diremos que la red $\{u_k\}_{k\in D} \subset \mathbb{E}^1$ converge en la topología de nivel τ_ℓ a $u \in \mathbb{E}^1$ si $\lim_k d_H([u_k]^\lambda, [u]^\lambda) = 0$ para cualquier $\lambda \in [0,1]$. Equivalentemente, la red $\{u_k\}_{k\in D} \subset \mathbb{E}^1$ τ_ℓ-converge a $u \in \mathbb{E}^1$ si, y solo si, $\lim_k u_k^+(\lambda) = u^+(\lambda)$ y $\lim_k u_k^-(\lambda) = u^-(\lambda)$ para cada $\lambda \in [0,1]$.*

Como hemos comentado anteriormente $\{u_k\}_{k\in D} \subset \mathbb{E}^1$ d_∞-converge a $u \in \mathbb{E}^1$ si, y solo si, $\lim_k u_k^+$ converge uniformemente a u^+ y $\lim_k u_k^-$ converge uniformemente a u^-. Así, la d_∞-convergencia implica la convergencia de nivel. Lo contrario no es cierto como se demuestra en [78, Example 2.1].

En [20], [21] y [24], los autores estudian la topología τ_ℓ y, entre otras propiedades, demuestran que $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ es de Hausdorff, separable, un espacio de Baire y primer numerable. Además, una base local para $u \in \mathbb{E}^1$ en τ_ℓ es de la forma

$$U(u, \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}, \epsilon) := \{v \in \mathbb{E}^1 : \{d_H([v]^{\lambda_j}, [u]^{\lambda_j})\} < \epsilon,\ j = 1, ..., n\} =$$

$$= \{v \in \mathbb{E}^1 : \max_{1 \leq i \leq n} \{|v^+(\lambda_i) - u^+(\lambda_i)|, |v^-(\lambda_i) - u^-(\lambda_i)|\} < \epsilon,\ i = 1, ..., n\},$$

para todo conjunto finito $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset [0,1]$ y $\epsilon > 0$.

Por medio del teorema de representación de Goetschel-Voxman, podemos considerar $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ como un subespacio del espacio producto $\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}$ (que se puede identificar con $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{[0,1]}$ de manera canónica). De hecho, la correspondencia $u \in \mathbb{E}^1 \to (u^-, u^+)$ define un homeomorfismo de $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ en $(\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}, \tau_p)$, donde τ_p denota la topología de la convergencia puntual.

Sea X un espacio topológico. Puesto que $\tau_{d_\infty} \leq \tau_\ell$, $C(X, (\mathbb{E}^1, d_\infty))$ es un subespacio (propio) de $C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ (véase [21, pag 429]). Si dotamos a $C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ con la topología compacto-abierta, τ_{co}, una base local de $f_0 \in C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ esta formada por los conjuntos de la forma

$$V(f_0, K, \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}, \epsilon) :=$$

$$= \{f \in C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell)) : d_H([f_0(x)]^{\lambda_j}, [f(x)]^{\lambda_j}) < \varepsilon \text{ para todo } x \in K, j = 1, ..., n\}$$

para un subconjunto compacto K del espacio X, y un conjunto finito $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset [0,1]$ y $\epsilon > 0$.

Capítulo 4

Completitud, metrizabilidad y compacidad en espacios de funciones difusas continuas

En este capítulo abordamos tres aspectos importantes de los espacios de funciones difusas continuas cuando están dotados de las topologías más habituales. Concretamente, estudiaremos la completitud, la metrizabilidad y la compacidad en este contexto. Solo el último concepto, relacionado con el teorema de Ascoli, parece haber recibido cierta atención en la literatura difusa (véase, por ejemplo, [22], [71]). Hoy en día, los teoremas del tipo Ascoli abarcan el estudio de la compacidad de una familia de funciones dotadas de varias topologías y su literatura es extensa en el caso clásico.

Así pues, en [22, Theorem 4.2], Fang y Xue prueban una versión difusa del teorema de Ascoli que caracteriza los subconjuntos compactos del espacio $C(K, (\mathbb{E}^1, d_\infty))$ de todas las funciones difusas continuas definidas en un espacio métrico compacto K dotado con la topología de la convergencia uniforme. Lamentablemente, esta versión no es correcta ya que, como se indica en [28], se basa en una caracterización incorrecta ([22, Theorem 2.4]) de los subconjuntos compactos de $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$. En la sección 4.4, corregimos [22, Theorem 4.2] ampliando el teorema de Ascoli difuso a un marco más general. Los conceptos clave en nuestro enfoque son los *subconjuntos acotados* de un espacio topológico y los *α_f-espacios*. Por lo tanto, previamente, en la sección 4.2 obtenemos una caracterización difusa de los subconjuntos acotados y de los α_f-espacios, y señalamos cómo aparecen dichos espacios de una manera natural al considerar la completitud del espacio $C(X, (\mathbb{E}^1, d_\infty))$ (X un espacio de Tychonoff) equipado con la topología τ_α de la convergencia uniforme sobre un recubrimiento α de X formado por subconjuntos acotados de X. En la sección 4.3 establecemos un criterio explícito para que $C_{\tau_\alpha}(X, (\mathbb{E}^1, d_\infty))$ sea metrizable. En la sección 4.4 abordamos el teorema de Ascoli difuso para espacios $C(X, (\mathbb{E}^1, d_\infty))$. Como consecuencia de nuestros resultados mostramos que $C(X, (\mathbb{E}^1, d_\infty))$ dotado con la topología de la convergencia uniforme satisface el teorema de Ascoli difuso si, y solo si, X es pseudocompacto. Finalmente, en la sección 4.5 se da una versión del teorema de Ascoli para el espacio $C_{\tau_{co}}(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$, donde τ_{co} denota la topología compacto-abierta.

4.1. Preliminares y notación

A lo largo de este capítulo, X representará un espacio de Tychonoff, es decir, un espacio de Hausdorff completamente regular. Se dice que un subconjunto B de un espacio X es *acotado* (en X) si cada función real continua en X está acotada en B o, de manera equivalente, cada sucesión localmente finita $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos abiertos, disjuntos dos a dos, que cortan a B es finita. Un espacio acotado en sí mismo se llama *pseudocompacto*. Dado un espacio X, denotaremos por β a la familia de todos los subconjuntos acotados de X. Recopilaciones de los resultados más importantes sobre conjuntos acotados y de los problemas abiertos en este campo pueden encontrarse en [74] y [75].
Si α es un recubrimiento de un espacio X, decimos que una función f de X en un espacio Y es α_f-continua si la restricción de f a cada miembro de α se puede extender a una función continua en X. Un espacio X se llama α_f*-espacio* si cada función real α_f-continua en X es continua. Esta clase de espacios tiene amplias aplicaciones; entre otras podemos citar la teoría de las proyecciones z-cerradas ([58]) y las álgebras de funciones continuas ([9]).

Para $\alpha \subseteq \beta$, los espacios localmente pseudocompactos (todo punto tiene un entorno pseudocompacto) y los k_r-espacios (espacios X donde una función real es continua siempre que su restricción a todo subconjunto compacto de X es continua) son ejemplos de α_f-espacios. En particular, los espacios localmente compactos son α_f*-espacios.* También los son los espacios primer numerable (y, como consecuencia, los espacios metrizables).

Recordemos que $F(X, \mathbb{E}^1)$ representa el conjunto de todas las funciones definidas de un espacio X en $\mathbb{E}^1$. Para un recubrimiento α de X, denotamos por τ_α la topología de la convergencia uniforme sobre los elementos de α. Sabemos que $((F(X,\mathbb{E}^1),\tau_\alpha)$ es un espacio de Tychonoff. De hecho, la familia de todos los subconjuntos de $F(X,\mathbb{E}^1)\times F(X,\mathbb{E}^1)$ de la forma

$$U(A,\varepsilon)=\left\{(f,g)\in F(X,\mathbb{E}^1)\times(F(X,\mathbb{E}^1)\,:\,\sup_{a\in A}d_\infty(f(a),g(a))<\varepsilon\right\},$$

para todo $A\in\alpha$ y todo $\varepsilon>0$, es una subbase para una uniformidad $\mathcal{U}_\alpha$ en $F(X,\mathbb{E}^1)$ que induce la topología τ_α.

Observemos que tomando α como el recubrimiento $\{x\}_{x\in X}$ de X (equivalentemente, el recubrimiento de todos sus subconjuntos finitos) se obtiene τ_p, la topología de la convergencia puntual. El artículo [40] cubre una amplia variedad de temas sobre $C(X,\mathbb{E}^1)$ dotado con la topología τ_p. Si $\alpha=\{X\}$, entonces obtenemos la topología, τ_u, de la convergencia uniforme en X. Recordemos que el recubrimiento k de todos los subconjuntos compactos de un espacio topológico X induce la denominada topología compacto-abierta en $C(X,\mathbb{E}^1)$, denotada por τ_{co}. Vale la pena señalar que la topología de la convergencia puntual en $F(X,\mathbb{E}^1)$ coincide con la topología producto en $(\mathbb{E}^1)^X$. Esto equivale a considerar τ_p en $C(X,\mathbb{E}^1)$ cuando X está equipado con la topología discreta.
En este capítulo $\mathbb{E}^1$ denotará el espacio métrico $(\mathbb{E}^1,d_\infty)$ salvo indicación en contra.

4.2. Completitud de $C_{\tau_\alpha}(X,(\mathbb{E}^1,d_\infty))$

En la primera parte de esta sección demostraremos que las nociones de subconjunto acotado y de α_f-espacio ($\alpha\subseteq\beta$) pueden caracterizarse por medio de funciones difusas continuas. En la segunda parte demostraremos que los α_f-espacios aparecen de forma natural cuando estudiamos la completitud de $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$. Se puede hacer una afirmación similar sobre la metrizabilidad de $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$ como veremos en la siguiente sección.

Recordemos que un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es *precompacto* si para todo $\varepsilon > 0$, hay un subconjunto finito $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$ donde, como es usual, $B_\varepsilon(x_i)$ representa la bola de centro x_i y radio ε. Un resultado bien conocido sobre espacios métricos nos dice que un espacio métrico X es compacto si, y solo si, X es precompacto y completo. Dado que la propiedad de ser acotado es equivalente a ser precompacto para los subconjuntos de $\mathbb{R}$, podemos reemplazar *acotado* por *precompacto* en la definición de subconjunto acotado. En esta dirección, probaremos a continuación una caracterización difusa de los subconjuntos acotados (Teorema 4.2.1). Para demostrarlo, y en alguno de los resultados posteriores, necesitaremos el concepto de *compleción de Dieudonné* ([4]) y de *realcompactación de Hewitt*([31]). Se dice que un espacio X es topológicamente completo si X es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto de espacios métricos. Es sabido que para todo espacio X existe, salvo homeomorfismos que dejen a X fijo punto a punto, un único espacio topológicamente completo γX en el que X es denso y M-sumergible, es decir, en el que X es denso y toda función continua f de X en un espacio topológicamente completo Y admite una extensión continua a γX. El espacio γX se denomina la *compleción de Dieudonné* de X. Lógicamente, X y γX coinciden si, y solo si, X es un espacio topológicamente completo. Un resultado básico de la teoría de los espacios topológicamente completos establece que todo espacio métrico completo (en particular, $\mathbb{R}$ dotado de la topología usual y $\mathbb{E}^1$) es Dieudonné completo.

Un espacio X es realcompacto si X es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto $\prod_{s\in S} X_s$ donde cada X_s es una copia de $\mathbb{R}$. Es sabido que para todo espacio X existe, salvo homeomorfismos que dejen a X fijo punto a punto, un único espacio realcompacto υX en el que X es denso y C-sumergible, es decir, en el que X es denso y toda función continua f de X en $\mathbb{R}$ admite una extensión continua a υX. El espacio υX se denomina *la realcompactación de Hewitt* de X. Lógicamente, X y υX coinciden si, y solo si, X es un espacio realcompacto. De la definiciones anteriores se deduce que todo espacio Dieudonné completo es realcompacto. El recíproco es cierto si el cardinal de X es no medible. En particular, puesto que el cardinal de $\mathbb{E}^1$ es el continuo, $\mathbb{E}^1$ es realcompacto. Un tratamiento en profundidad de la compleción de Dieudonné y de la realcompactación de Hewitt puede encontrarse en [12].

Es importante el hecho de que los subconjuntos acotados pueden caracterizarse mediante la compleción de Dieudonné y la realcompactación de Hewitt. En efecto, un subconjunto A de un espacio X es acotado en X si, y solo si,

$$\mathrm{cl}_{\gamma X} A = \mathrm{cl}_{\upsilon X} A = \mathrm{cl}_{\beta X} A$$

donde βX denota la compactación de Stone-Čech de X, es decir, el elemento maximal en el semiretículo de todas las compactaciones de X (véase [75, Teorema 4.2.4]. En particular, $cl_{\gamma X} A$ es compacto.

TEOREMA 4.2.1 *Para un subconjunto B de un espacio X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *B es acotado en X.*

2. *Para cada función continua $f\colon X \to \mathbb{E}^1$, $f(B)$ es precompacto.*

Demostración.
(2)$\Longrightarrow$(1) se deduce del hecho de que los subconjuntos precompactos de $\mathbb{R}$ son precompactos en $\mathbb{E}^1$.
Para probar (1)$\Longrightarrow$(2), notemos que, como $\mathbb{E}^1$ es realcompacto, $\mathbb{E}^1$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado T de un producto de la forma $\mathbb{R}^S$. Ahora, si $f\colon X \to \mathbb{E}^1$ es una función continua, podemos considerar el subconjunto acotado $(\pi_s \circ f)(B)$ para todo $s \in S$ donde π_s denota la proyección s-ésima. Entonces $\mathrm{cl}_{\mathbb{E}^1} f(B) = \mathrm{cl}_T f(B)$ es un subconjunto cerrado del conjunto compacto $\prod_{s\in S} \mathrm{cl}_{\mathbb{R}} \left(\pi_s \circ f)\right)(B)$ y, consecuentemente, $\mathrm{cl}_{\mathbb{E}^1} f(B)$ es compacto. Así, $f(B)$ es precompacto. $\square$

TEOREMA 4.2.2 *Si $\alpha \subseteq \beta$, entonces los siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es un α_f-espacio.*
2. *Toda función α_f-continua de X en $\mathbb{E}^1$ es continua.*

Demostración.
(1)$\Longrightarrow$(2) es un caso particular de [8, Lemma 8] y se obtiene fácilmente aplicando el hecho de que todo espacio de Tychonoff es un subespacio de un producto de rectas reales. Así, solo necesitamos demostrar (2)$\Longrightarrow$(1). Con este fin, es suficiente aplicar que si $f\colon X \to \mathbb{R}$ es una función α_f-continua, entonces f puede ser considerada como una función α_f-continua de X en $\mathbb{E}^1$ porque $\mathbb{R}$ es un subespacio (cerrado) de $\mathbb{E}^1$. $\square$

Pasemos ahora al estudio de la completitud de $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$. Empezamos por un sencillo lema. Escribimos $\tau_1 \geq \tau_2$ si la topologia τ_1 es más fina que la topología τ_2.

LEMA 4.2.3 *Sea X un espacio. Si $\tau \geq \tau_p$, entonces $C_\tau(X, \mathbb{R})$ está sumergido topológicamente como un subespacio cerrado de $C_\tau(X, \mathbb{E}^1)$.*

Demostración. Al ser $\mathbb{R}$ cerrado en $\mathbb{E}^1$, $C_{\tau_p}(X, \mathbb{R})$ es cerrado en $C_{\tau_p}(X, \mathbb{E}^1)$.

Sea i la función identidad de $C_\tau(X, \mathbb{E}^1)$ en $C_{\tau_p}(X, \mathbb{E}^1)$. Como $\tau \geq \tau_p$, entonces i es una función continua. Entonces $i^{-1}(C(X, \mathbb{R})) = C(X, \mathbb{R})$ es un subespacio cerrado de $C_\tau(X, \mathbb{E}^1)$. □

Sabemos que, para un espacio arbitrario X, $C_{\tau_u}(X, (M, d))$ es completo siempre que el espacio métrico (M, d) lo sea también (véase, por ejemplo, [18, Exercise 8.3.C.(a)]). Aplicaremos este resultado en el siguiente

TEOREMA 4.2.4 *Dado un espacio arbitrario X, $C_{\tau_u}(X, \mathbb{E}^1)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración.
Como el espacio $\mathbb{E}^1$ es completo [15], la completitud de $C_{\tau_u}(X, \mathbb{E}^1)$ se deduce del comentario anterior. Por otro lado, sabemos que los entornos de la diagonal

$$\left\{ (f, g) \in C(X, \mathbb{E}^1) \times C(X, \mathbb{E}^1) \,:\, \sup_{x \in X} d_\infty(f(x), g(x)) < 1/n \right\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, forman una subbase numerable para la uniformidad de $C_{\tau_u}(X, \mathbb{E}^1)$. Por lo tanto, $C_{\tau_u}(X, \mathbb{E}^1)$ es metrizable. □

Ahora comentaremos un resultado que juega un papel fundamental en la caracterización de la compleción de $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$. Recordemos que $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ puede sumergirse en un espacio de Banach $(E, \|\,.\,\|)$ de tal forma que la inmersión $j : \mathbb{E}^1 \longrightarrow E$ preserva las combinaciones convexas, es decir, j satisface las siguientes propiedades: (1) $d_\infty(u, v) = \|j(u) - j(v)\|$ para todo $u, v \in \mathbb{E}^1$, y (2) $j(\lambda u + (1 - \lambda)v) = \lambda j(u) + (1 - \lambda)j(v)$ para todo $u, v \in \mathbb{E}^1$ y todo $\lambda \in [0, 1]$. Además, $j(\mathbb{E}^1)$ es un cono cerrado de $(E, \|\,.\,\|)$ con vértice en 0 (véase [15, Section 8.1]).

Los siguientes lemas serán utilizados en la demostración del Teorema 4.2.7.

LEMA 4.2.5 [76, Teorem 2.8] *Para un subconjunto A de un espacio X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Toda pseudométrica d en A que induce una topología separable en A se extiende a una pseudométrica continua en X.*
2. *A es C-sumergible en X.*

Recordemos que un espacio vectorial topológico V es un espacio de Fréchet si es un espacio métrico, completo y localmente convexo. En particular, todo espacio de Banach, es un espacio de Fréchet.

LEMA 4.2.6 [1, Teorem 2.3] *Sea A un subconjunto de un espacio X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Toda pseudométrica d en A que induce una topología separable en A se extiende a una pseudométrica continua en X.*
2. *Toda función continua de A en un espacio de Fréchet cuya imagen es separable se extiende a una función continua en X.*

TEOREMA 4.2.7 *Sea A un subconjunto de X. Entonces son equivalentes:*

1. *A es un subconjunto C-sumergible en X.*
2. *Toda función continua difusa f en A con rango separable tiene una extensión continua F a X. Además $F(X)$ está incluida en la envoltura convexa cerrada de $f(A)$.*

Demostración.
(2)$\Longrightarrow$(1) se deduce del hecho de que $\mathbb{R}$ es un subconjunto cerrado convexo de $\mathbb{E}^1$. Para ver (1)$\Longrightarrow$(2), consideremos j la inmersión isométrica de $\mathbb{E}^1$ en un espacio de Banach $(E, \|\,.\,\|)$ donde j satisface las propiedades comentadas anteriormente. Desde ahora, identificaremos $\mathbb{E}^1$ con $j(\mathbb{E}^1)$. Así, podemos considerar f como una función de A en la envoltura convexa cerrada (por tanto, completa) $\overline{conv}(f(A))$ de $f(A)$ en $(E, \|\,.\,\|)$. Como $\mathbb{E}^1$ es un cono (completo), tenemos que $\overline{conv}(f(A)) \subset \mathbb{E}^1$. Como A es un subconjunto C-sumergido en X, por el Lema 4.2.5, toda pseudométrica continua d en A que induce una topología separable se extiende a una pseudométrica continua en X. Así que podemos aplicar el Lema 4.2.6 para concluir que f puede extenderse continuamente a F. Es obvio que $F(X) \subset \overline{conv}(f(A))$. $\square$

OBSERVACIÓN 4.2.8 Un argumento similar al usado en el teorema anterior nos permite caracterizar los subconjuntos $C^\star$-sumergido (un subconjunto A de un espacio X es $C^\star$-sumergidos en X si toda función real, continua y acotada en A se extiende a una función continua en X). Para ello, basta aplicar los resultados de [1, 76] sobre pseudométricas precompactas para obtener el siguiente resultado: para un subconjunto A de X, son equivalentes las siguientes afirmaciones: (1) A es $C^\star$-sumergible en X, y (2) toda función continua difusa f en A con rango precompacto tiene una extensión continua F a todo X; además, $F(X)$ está incluido en la envoltura cerrada convexa de $f(A)$.

El resultado principal de esta sección muestra la relación entre los α_f-espacios y la compleción de $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$. Primero vamos a recordar que, dado un espacio X, una familia $\alpha \subseteq \beta$ es una *bornología* si satisface las siguientes condiciones:

1. α es un recubrimiento de X;

2. Si A y B pertenecen a α, entonces existe $C \in \alpha$ tal que A y B están incluidos en C.

En realidad, cualquier recubrimiento α de X genera una bornología $\widehat{\alpha}$ tomando uniones finitas de elementos de α y, además, teniendo en cuenta la definición de subbase de una uniformidad, las uniformidades inducidas en $C(X, \mathbb{E}^1)$, por α y por $\widehat{\alpha}$ coinciden.

TEOREMA 4.2.9 *Sea $\alpha \subseteq \beta$ una bornología en un espacio X. Entonces $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$ es completo si, y solo si, X es un α_f-espacio.*

Demostración.
Supongamos que X es un α_f-espacio y consideramos una red de Cauchy $\{f_i\}_{i\in I}$ en $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$. Puesto que $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ es un espacio métrico completo, todo elemento f_i tiene una extensión continua, f_i^γ, a γX. Por el Teorema 4.2.4, para cada subconjunto B en α, la red $\{f_i^\gamma|_{\mathrm{cl}_{\gamma X} B}\}_{i\in I}$ converge uniformemente a una función $f_B \in C(\mathrm{cl}_{\gamma X} B, \mathbb{E}^1)$. Sea g una función de X en

$(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ definida por la regla $g|_B = f_B$ cuando B es un subconjunto acotado de X que está en α. Como α es una bornología, un argumento estándar muestra que g está bien definida. En efecto, si $x \in A \cap B$, con A y B subconjuntos acotados de X en la familia α, entonces existe un subconjunto acotado $C \in \alpha$ tal que $A \cup B \subseteq C$. Aplicando que $f|_C$ es el límite uniforme de $\{f_i^\gamma|_{\mathrm{cl} C}\}_{i \in I}$, se tiene

$$f|_C(x) = f|_A(x) = f|_B(x)$$

sin más que aplicar que C contiene a A y a B. Esto prueba que g está bien definida.
Además, como cada subconjunto compacto de un espacio topológico es C-sumergible, por el Teorema 4.2.7 la restricción de g a cada subconjunto $B \in \alpha$ admite una extensión continua a γX. Por tanto, g es α_f-continua. Como X es un α_f-espacio, g es continua. Es claro que g es el límite de la red $\{f_i\}_{i \in I}$ en $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$. Así, el espacio de funciones $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$ es completo.

Supongamos ahora que $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$ es completo. Sea f una función difusa α_f-continua en X y consideramos el conjunto $\{\, B \subset X \,:\, B \in \alpha \,\}$ dirigido por inclusión. Definimos una red $\{f_B\}_{B \in \alpha}$ donde f_B es la extensión continua de $f|_B$ a X. Es evidente que la red $\{f_B\}_{B \in \alpha}$ converge a f en $F_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$. La completitud de $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$ implica que f es una función continua. Así, X es un α_f-espacio. $\square$

Como consecuencia del teorema anterior, se obtienen las siguientes caracterizaciones que abarcan los casos más importantes por sus aplicaciones al Análisis Funcional Difuso.

COROLARIO 4.2.10 *$C_{\tau_\beta}(X, \mathbb{E}^1)$ es completo si, y solo si, X es un β_f-*

espacio.

2. *$C_{\tau_{co}}(X, \mathbb{E}^1)$ es completo si, y solo si, X es un k_r-espacio.*

3. *$C_{\tau_p}(X, \mathbb{E}^1)$ es completo si, y solo si, X es discreto.*

4.3. Metrizabilidad de $C_{\tau_\alpha}(X, (\mathbb{E}^1, d_\infty))$

En esta sección abordamos la cuestión de la metrizabilidad del espacio $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$. Concretamente, presentamos un criterio explícito para que $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$ sea metrizable. Sea $\alpha \subseteq \beta$ un recubrimiento de un espacio X. Decimos que X es *hemi-α-acotado* si existe una familia numerable $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \alpha$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, y cualquier $A \in \alpha$ es un subconjunto de una unión finita $A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup \cdots A_{n_k}$ de elementos de $\mathcal{A}$. Los espacios hemi-β-acotados (respectivamente, hemi-k-acotados) son normalmente llamados espacios hemiacotados (respectivamente, hemicompactos). Dado un espacio X, denotamos por $\bar{\mathbf{0}}$ la función de X en $\mathbb{E}^1$ definida como $\bar{\mathbf{0}}(x) = \widetilde{0}$ para todo $x \in X$.

TEOREMA 4.3.1 *Sea $\alpha \subseteq \beta$ un recubrimiento de un espacio X. Si todo elemento de α es un conjunto cerrado, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es un espacio hemi-α-acotado.*

2. *$C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$ es metrizable.*

3. *$C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$ es primer numerable.*

4. *La función $\bar{\mathbf{0}}$ tiene una base numerable de entornos en $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$.*

Demostración.

(1)$\Longrightarrow$(2) Sea una familia numerable $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \alpha$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, y cualquier $A \in \alpha$ es un subconjunto de una unión finita $A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup \cdots A_{n_k}$ de elementos de $\mathcal{A}$. Entonces la familia

$$\mathcal{B} = \{\cup(A_n, 1/k) : n, k \in \mathbb{N}\}$$

es una subbase numerable para la uniformidad $\mathcal{U}_\alpha$. Por lo tanto, $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$ es metrizable.

(2)$\Longrightarrow$(3) y (3)$\Longrightarrow$(4) son triviales. Para ver (4)$\Longrightarrow$(1), definimos el conjunto

$$V(A, \varepsilon) := \left\{ f \in C(X, \mathbb{E}^1) : \sup_{x\in A} d_\infty(0, f(x)) < \varepsilon \right\}$$

con $A \in \alpha$ y $\varepsilon > 0$, y consideramos una familia numerable

$$\mathcal{B} = \{(V(A_n, \varepsilon_n) : n \in \mathbb{N}\}$$

tal que las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$ formen una base de entornos de $\bar{\mathbf{0}}$.

Ahora fijamos $A \in \alpha$. Dado un entorno $V(A, \frac{1}{2})$ de $\bar{\mathbf{0}}$, existen

$$\{V(A_{n_1}, \varepsilon_{n_1}), V(A_{n_2}, \varepsilon_{n_2}), \ldots, V(A_{n_k}, \varepsilon_{n_k})\}$$

tal que

$$V(A_{n_1}, \varepsilon_{n_1}) \cap V(A_{n_2}, \varepsilon_{n_2}) \cap \ldots \cap V(A_{n_k}, \varepsilon_{n_k}) \subset V(A, 1/2).$$

Veamos que $A \subseteq A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup \cdots \cup A_{n_k}$. Supongamos lo contrario, es decir, asumamos que existe $x \in A \setminus (A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup \cdots \cup A_{n_k})$. Como el conjunto

$A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup A_{n_k}$ es cerrado, por [40, Proposition 3.5]) existe $f \in C(X, \mathbb{E}^1)$ tal que $f(x) = \widetilde{1}$ y $f|_{A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup A_{n_k}} = \widetilde{0}$. Entonces $f \in V(A_{n_1}, \varepsilon_{n_1}) \cap V(A_{n_2}, \varepsilon_{n_2}) \cap \ldots \cap V(A_{n_k}, \varepsilon_{n_k})$ pero $f \notin V(A, 1/2)$, lo cual es una contradicción.

Además, como para cualquier $x \in X$, existe $A \in \alpha$ que contiene x, el argumento anterior demuestra que existe $A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots, A_{n_k}$ con $A \subset A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup \cdots \cup A_{n_k}$. Así, la familia $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento de X. Acabamos de demostrar que hay una familia numerable $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \alpha$ tal que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, y cualquier $A \in \alpha$ es un subconjunto de una unión finita $A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup \cdots A_{n_k}$ de elementos de $\mathcal{A}$. Esto completa la prueba. $\square$

OBSERVACIÓN 4.3.2 (1) La condición de que los elementos del recubrimiento α sean cerrados no es tan restrictiva como pueda parecer. En efecto, si $\alpha \subseteq \beta$ es un recubrimiento de X, entonces podemos considerar el recubrimiento $\widehat{\alpha} \subseteq \beta$ definido como

$$\widehat{\alpha} = \{\mathrm{cl}_X A : A \in \alpha\}.$$

Entonces los espacios de funciones $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$ y $C_{\tau_{\widehat{\alpha}}}(X, \mathbb{E}^1)$ son isomorfos uniformemente.

(2) Para el espacio de funciones $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{R})$, la equivalencia de (2) y (4) es una consecuencia del teorema de Birkhoff-Kakutani, el cual establece que un grupo topológico G es metrizable si, y solo si, es de Hausdorff y el elemento neutro admite una base de entornos numerable. Sin embargo, cabe resaltar que $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$ no es un grupo topológico y, consecuentemente, el teorema de Birkhoff-Kakutani no se puede aplicar en este contexto.

Como en el caso del teorema 5.2.9, se obtiene el siguiente corolario:

COROLARIO 4.3.3 *$C_{\tau_\beta}(X, \mathbb{E}^1)$ es metrizable si, y solo si, X es hemiacotado.*

2. $C_{\tau_{co}}(X, \mathbb{E}^1)$ es metrizable si, y solo si, X es hemicompacto.

3. $C_{\tau_p}(X, \mathbb{E}^1)$ es metrizable si, y solo si, X es numerable.

4.4. α_f-espacios y el teorema de Ascoli en $C_{\tau_\alpha}(X, (\mathbb{E}^1, d_\infty))$

Dado un espacio métrico o un espacio uniforme, Y, un teorema *tipo Ascoli* caracteriza la compacidad en un espacio de funciones continuas $C(X, Y)$ en términos de equicontinuidad y de ciertas condiciones *naturales*. Por ejemplo, el teorema clásico de Ascoli se ocupa de los subconjuntos compactos en el espacio $C([0, 1])$ de todas las funciones reales continuas en el intervalo unidad dotado con la topología uniforme. Establece que un subconjunto F de $C([0, 1])$ es compacto si, y solo si, F es cerrado, acotado y equicontinuo. Puesto que el clásico teorema de Heine-Borel establece que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si, y solo si, éste es cerrado y acotado, el teorema de Ascoli puede ser visto como equivalente en $C([0, 1])$ al teorema de Heine-Borel. Recordemos que, en contraste con el teorema de Heine-Borel, en espacios vectoriales normados de dimensión infinita, los conjuntos cerrados y acotados pueden no ser compactos: basta recordar el teorema clásico de Riesz que nos dice que un espacio normado es de dimensión finita si, y solo si, la bola unidad es compacta. Por tanto, la equicontinuidad es fundamental en el teorema de Ascoli.

En el ámbito de los espacios de funciones difusas, estudiaremos el teorema de Ascoli en el espíritu comentado en el párrafo anterior, es decir, mediante condiciones de equicontinuidad y alguna condición extra. La idea clave es la conexión entre los α_f-espacios y la compacidad en $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$. Como consecuencia de nuestros resultados, caracterizaremos cuándo $C_{\tau_u}(X, \mathbb{E}^1)$ satisface el teorema de Ascoli difuso. Nuestro enfoque se basa en la relación entre la función exponencial y el teorema de Ascoli tal y como se desarrolla en [59].

Primero recordaremos algunos conceptos necesarios en nuestro desarrollo del tema. Dado un espacio X y un espacio métrico (Y, d), una familia de funciones $\{ f_i \}_{i \in I} \subset F(X, Y)$ se llama *equicontinua* si para cada $x \in X$ y cada $\varepsilon > 0$, hay un entorno V de x tal que $d(f_i(y), f_i(x)) < \varepsilon$ para todo $y \in V$ y todo $i \in I$. En este caso, si (X, d') es también un espacio métrico, la familia $\{ f_i \}_{i \in I} \subset F(X, Y)$ se dice que es *uniformemente equicontinua* si para cada $\varepsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ tal que $d(f_i(y), f_i(x)) < \varepsilon$ para todo $i \in I$ siempre que $d'(x, y) < \delta$. Es un hecho bien conocido que, en un espacio métrico compacto, la equicontinuidad es equivalente a la equicontinuidad uniforme.

Un subconjunto $U \subset \mathbb{E}^1$ tal que las familias

$$\left\{ u^+(-) \, : \, u \in U \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ u^-(-) \, : \, u \in U \right\}$$

son uniformemente equicontinuas en $]0, 1]$ se denomina $]0, 1]$-uniformemente equicontinuo.

La motivación para los resultados de esta sección es la siguiente versión difusa del teorema clásico de Ascoli establecido por Fang y Xue.

TEOREMA 4.4.1 ([22, Theorem 4.2]) *Si K es un espacio métrico compacto, entonces un subconjunto cerrado F de $C_{\tau_u}(K, \mathbb{E}^1)$ es compacto si, y solo si, se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Para cada $k \in K$, el conjunto $\{ f(k) : f \in F \}$ es d_∞-acotado, es decir, está contenido en una bola de centro $\widetilde{0}$ en el espacio métrico $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$.*

2. *F es equicontinua en K.*

3. *Para cada $k \in K$, el conjunto $\{ f(k) : f \in F \}$ es $]0,1]$-uniformemente equicontinuo, es decir, F es puntualmente $]0,1]$-uniformemente equicontinuo.*

Desafortunadamente este teorema se basa en una caracterización incorrecta ([22, Theorem 2.4]) de los subconjuntos compactos de $\mathbb{E}^1$, como se señala en [28]. Para proporcionar una caracterización correcta de los compactos de $\mathbb{E}^1$, debemos introducir varios conceptos. Dada una función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(\lambda_0+)$ denota, si existe, el límite de f cuando λ tiende a λ_0 por la derecha.

DEFINICIÓN 4.4.2 *Sea $\{ f_i \}_{i\in I}$ una familia de funciones definidas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Dado $\lambda_0 \in [0,1[$ tal que $f_i(\lambda_0+)$ existe para todo $i \in I$, diremos que la familia $\{ f_i \}_{i\in I}$ es* casi-equicontinua por la derecha *en λ_0 si, para cada $\varepsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ tal que $|f_i(\lambda) - f_i(\lambda_0+)| < \varepsilon$ para todo $i \in I$ cuando $\lambda \in]\lambda_0, \lambda_0 + \delta[$.*

De forma análoga a la definición anterior, diremos que una familia de funciones $\{ f_i \}_{i\in I}$ de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ es *equicontinua por la izquierda* en un punto $\lambda_0 \in]0,1]$ si, para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $i \in I$, hay un $\delta > 0$ tal que $|f_i(\lambda) - f_i(\lambda_0)| < \varepsilon$ cuando $\lambda \in]\lambda_0 - \delta, \lambda_0]$. La familia $\{f_i\}_{i\in I}$ se llama *equicontinua por la izquierda* (resp. casi-equicontinua por la derecha) si ésta es equicontinua por la izquierda (resp. casi-equicontinua por la derecha) en cada punto de $]0,1]$ (respectivamente, en cada punto de $[0,1[$).

A partir de las definiciones anteriores, diremos que un subconjunto $U \subset \mathbb{E}^1$ es *equicontinuo a ambos lados* si las familias

$$\{ u^+(-) \,:\, u \in U \} \quad \text{y} \quad \{ u^-(-) \,:\, u \in U \}$$

son casi-equicontinuas por la derecha y equicontinuas por la izquierda.

DEFINICIÓN 4.4.3 *Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $F(X, \mathbb{E}^1)$ se dice que es puntualmente equicontinuo a ambos lados si, para todo $x \in X$, $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es equicontinuo a ambos lados.*

Recordemos que un subconjunto A de $\mathbb{E}^1$ es d_∞-acotado si está contenido en una bola de centro el origen de $\mathbb{E}^1$.

DEFINICIÓN 4.4.4 *Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $F(X, \mathbb{E}^1)$ se dice que es puntualmente d_∞-acotado si, para todo $x \in X$, $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es d_∞-acotado en $\mathbb{E}^1$.*

Si τ es una topología en $C(X, \mathbb{E}^1)$, entonces se dice que $(X, \mathbb{E}^1, \tau)$ satisface el *teorema débil de Ascoli difuso* si cada subconjunto de $C(X, \mathbb{E}^1)$ τ-cerrado, puntualmente d_∞-acotado, equicontinuo y puntualmente equicontinuo a ambos lados es τ-compacto. Si, además, cada subconjunto τ-compacto es τ-cerrado, puntualmente d_∞-acotado, equicontinuo y puntualmente equicontinuo a ambos lados, entonces se dice que $(X, \mathbb{E}^1, \tau)$ satisface el *teorema de Ascoli difuso*.

El objetivo de esta sección es establecer versiones difusas del teorema (débil) de Ascoli para topologías de la convergencia uniforme en los miembros de un recubrimiento de un espacio X. Antes necesitamos probar varios resultados previos.

PROPOSICIÓN 4.4.5 *Si $U \subset \mathbb{E}^1$ es equicontinuo a ambos lados, entonces también lo es $\mathrm{cl}_{\mathbb{E}^1} U$.*

Demostración.

Fijamos $\lambda_0 \in \,]0,1]$. Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ tal que, para todo $u \in U$, $|u^+(\lambda) - u^+(\lambda_0)| < \varepsilon/3$ cuando $\lambda \in \,]\lambda_0 - \delta, \lambda_0]$. Ahora, si $v \in \mathrm{cl}_{\mathbb{E}^1} U$, podemos elegir $u \in U$ con

$$\sup_{\lambda \in]0,1]} \left| v^+(\lambda) - u^+(\lambda) \right| < \varepsilon.$$

Entonces, si $\lambda \in \,]\lambda_0 - \delta, \lambda_0]$, tenemos

$$\begin{aligned} \left| v^+(\lambda) - v^+(\lambda_0) \right| \leq & \left| v^+(\lambda) - u^+(\lambda) \right| \\ & + \left| u^+(\lambda) - u^+(\lambda_0) \right| + \left| u^+(\lambda_0) - v^+(\lambda_0) \right| < 7\varepsilon/3. \end{aligned}$$

Por tanto, $\{\, v^+(-) \,:\, v \in \mathrm{cl}_{\mathbb{E}^1} U \,\}$ es equicontinua por la izquierda en cada $\lambda_0 \in \,]0,1]$. El mismo argumento demuestra que la familia $\{\, v^-(-) \,:\, v \in \mathrm{cl}_{\mathbb{E}^1} U \,\}$ es también equicontinua por la izquierda en cada $\lambda_0 \in \,]0,1]$ y que ambas familias son casi-equicontinuas por la derecha. Esto completa la prueba. $\square$

Por [28, Theorem 3.3] se tiene que un conjunto cerrado K de $\mathbb{E}^1$ es compacto si, y solo si, satisface las dos propiedades siguientes: (1) K es d_∞-acotado, y (2) K es equicontinuo a ambos lados. Este resultado permite caracterizar los subconjuntos precompactos de $\mathbb{E}^1$.

TEOREMA 4.4.6 *Un subconjunto $F \subseteq \mathbb{E}^1$ es precompacto si, y solo si, se satisfacen las dos condiciones siguientes:*

1. *F es d_∞-acotado, y*
2. *F es equicontinua a ambos lados.*

Demostración.

Suponemos que F es precompacto. Como $\mathbb{E}^1$ es completo, $\mathrm{cl}_{\mathbb{E}^1} F$ es compacto. Por lo tanto, por [28, Theorem 3.3], $\mathrm{cl}_{\mathbb{E}^1} F$ es d_∞-acotado y, equicontinua a ambos lados. Consecuentemente, también F satisface estas dos propiedades.
Para probar el recíproco, observemos que, al ser F d_∞-acotado, entonces también lo es $\mathrm{cl}_{\mathbb{E}^1} F$. Además, por la Proposición 4.4.5, $\mathrm{cl}_{\mathbb{E}^1} F$ es equicontinuo a ambos lados. Ahora el resultado es consecuencia de [28, Theorem 3.3]. $\square$

TEOREMA 4.4.7 *Para todo espacio X, la τ_p-clausura de un subconjunto $\mathcal{F}$ de $(\mathbb{E}^1)^X$ es un conjunto compacto si, y solo si, se satisfacen las siguientes dos condiciones:*

1. *$\mathcal{F}$ está puntualmente d_∞-acotado, es decir, para todo $f \in \mathcal{F}$ y todo $x \in X$, el conjunto $\{f(x) : x \in X\}$ es d_∞-acotado.*
2. *$\mathcal{F}$ es puntualmente equicontinuo a ambos lados.*

Demostración.

Si $\mathcal{F}$ satisface las condiciones (1) y (2), entonces también lo hace $\mathrm{cl}_{\tau_p}\mathcal{F}$; en efecto, la condición (1) es evidente y la condición (2) se sigue de la Proposición 4.4.5. Por lo tanto, podemos asumir que $\mathcal{F}$ es τ_p-cerrado. Consideramos ahora $\mathcal{F}$ como un subconjunto de

$$\prod_{x\in X} \mathrm{cl}_{\mathbb{E}^1} \{f(x) : f \in \mathcal{F}\} \subset (\mathbb{E}^1)^X.$$

Entonces $\mathcal{F}$ es un subconjunto τ_p-cerrado de $\prod_{x\in X} \mathrm{cl}_{\mathbb{E}^1} \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ el cual es τ_p-compacto ya que cada $\mathrm{cl}_{\mathbb{E}^1} \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es compacto por el Teorema 4.4.6. Por tanto, $\mathcal{F}$ es τ_p-compacto.

Si $\mathcal{F} \subset (\mathbb{E}^1)^X$ es τ_p-compacto, entonces, ya que la proyección $\pi_x \colon \mathcal{F} \to \mathbb{E}^1$ definida, para todo $x \in X$, como $\pi_x(f) = f(x)$, es continua, concluimos que $\{ f(x) : f \in \mathcal{F} \}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{E}^1$. Ahora, para obtener el resultado deseado, es suficiente aplicar el Theorema 4.4.6 para cada $x \in X$.

$\square$

Dados tres espacios topológicos X, Y, Z, a la función $\mu\colon F(X \times Y, Z) \to F(X, F(Y, Z))$ definida por la relación $\mu f(x)(y) = f(x, y)$ se le denomina *función exponencial* . La restricción de esta función a subespacios también se denotará por μ. Los siguientes resultados serán útiles para el resto de esta sección. Si α es un recubrimiento de Y y k es el recubrimiento de los subconjuntos compactos de X, entonces $k \times \alpha$ denota el recubrimiento de $X \times Y$,

$$k \times \alpha = \{A \times B : A \in k,\ B \in \alpha\}.$$

Los cuatro resultados siguientes son fundamentales para obtener los resultados principales de esta sección.

TEOREMA 4.4.8 [67, Proposition 2.2] *Si K es un espacio compacto e Y es un α_f-espacio con $\alpha \subseteq \beta$, entonces $K \times Y$ es un $(k \times \alpha)_f$-espacio.*

TEOREMA 4.4.9 *Sea K un espacio compacto y α un recubrimiento de un espacio Y con $\alpha \subseteq \beta$. Si Y es un α_f-espacio, entonces*

$$\mu^{-1}\left(C(K, C_{\tau_\alpha}(Y, \mathbb{E}^1)\right) \subseteq C(K \times Y, \mathbb{E}^1).$$

Demostración.
Por el Teorema 4.4.8, es suficiente demostrar que si $f \in \mu^{-1}\left(C(K, C_{\tau_\alpha}(Y, \mathbb{E}^1)\right)$, entonces $f|_{K\times A}$ tiene una extensión continua a $K \times Y$ para todo $A \in \alpha$. Para probarlo, sea $g \in C(K, C_{\tau_\alpha}(Y, \mathbb{E}^1))$. Como $\mathbb{E}^1$ es un espacio métrico completo, existe, para todo $x \in K$, una extensión continua $g(x)^\gamma$ de $g(x)$ a la compleción de Dieudonné γY de Y.

Ahora, para cada $A \in \alpha$, consideramos la función g_A de K en $C_{\tau_u}(\mathrm{cl}_{\gamma Y} A, \mathbb{E}^1)$ definida como

$$g_A(x) = g(x)^\gamma|_{\mathrm{cl}_{\gamma Y} A}, \;\; x \in K.$$

La continuidad de g implica que g_A es continua y, consecuentemente, $\mu^{-1}(g_A) \in C(K \times \mathrm{cl}_{\gamma Y} A)$ para todo $A \in \alpha$. Como $K \times \mathrm{cl}_{\gamma Y} A$ es compacto, $\mu^{-1}(g_A)$ tiene una extensión continua a $K \times \gamma Y$ para todo $A \in \alpha$. El resultado ahora se sigue del hecho de que $\mu^{-1}(g_A)$ y $\mu^{-1}(g)$ coinciden cuando se restringen a $K \times A$.

□

TEOREMA 4.4.10 [73, Theorem 3.2] *Sea K un espacio compacto y sea $\alpha \subseteq \beta$ un recubrimiento de un espacio X. Si X es un α_f-espacio, entonces*

$$\mu(C(K \times X, \mathbb{E}^1)) = C(K, C_{\tau_\beta}(X, \mathbb{E}^1)).$$

TEOREMA 4.4.11 *Sea K un espacio compacto y sea $\alpha \subseteq \beta$ un recubrimiento de un espacio X. Si X es un α_f-espacio, entonces $\mu(C(K\times X,\mathbb{E}^1)) = C(K, C_{\tau_\alpha}(X,\mathbb{E}^1))$.*

Demostración.
Como la topologia τ_α es menos fina que la topología τ_β, el Teorema 4.4.10 implica la inclusión $\mu(C(K\times X,\mathbb{E}^1)) \subseteq C(K, C_{\tau_\alpha}(X,\mathbb{E}^1))$.

Finalmente, la inclusión demostrada en el Teorema 4.4.9 completa la demostración. □

Ahora estamos preparados para caracterizar aquellos $(X,\mathbb{E}^1,\tau_\alpha)$ que satisfacen el teorema débil de Ascoli difuso. Recordemos que si α es un recubrimiento de un espacio X, entonces $\tau_\alpha \geq \tau_p$ en $C(X,\mathbb{E}^1)$. Por otra parte, recordemos que para todo espacio compacto K, se verifica la igualdad

$$\gamma(K\times X) = K\times \gamma X$$

para todo espacio X ([56, Theorem 5.1]).

TEOREMA 4.4.12 *Sea X un espacio topológico. Si α es un recubrimiento de X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\alpha \subseteq \beta$.
2. *Para cada espacio compacto (infinito) K, se tiene la siguiente inclusión:*

$$\mu(C(K\times X,\mathbb{E}^1)) \subseteq C(K, C_{\tau_\alpha}(X,\mathbb{E}^1)).$$

3. $(X,\mathbb{E}^1,\tau_\alpha)$ *satisface el teorema débil de Ascoli difuso.*

Demostración.

(1)$\Longrightarrow$(2) Sea K un espacio compacto y consideramos una función continua difusa f definida en $K \times X$. Como $\mathbb{E}^1$ es un espacio métrico completo, f admite una extensión continua f^γ a $\gamma(K \times X) = K \times \gamma X$. Para cada $B \in \alpha$, $\mathrm{cl}_{\gamma X} B$ es compacto y, por el Teorema 4.4.11,

$$\mu(f^\gamma|_{K \times \mathrm{cl}_{\gamma(X)} B}) \in C(K, C_{\tau_u}(\mathrm{cl}_{\gamma(X)} B, \mathbb{E}^1))$$

lo cual implica $\mu(f) \in C(K, C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1))$. Por tanto, se satisface la condición (2).

(2)$\Longrightarrow$(3) Sea K un subconjunto de $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$ τ_α-cerrado, d_∞-acotado, equicontinuo y puntualmente equicontinuo a ambos lados. Por el Teorema 4.4.7, $\mathrm{cl}_{\tau_p} K$ es compacto. Por otra parte, al ser una familia de funciones de K en $\mathbb{E}^1$ equicontinua, su clausura $\mathrm{cl}_{\tau_p} K$ en la topología de la convergencia puntual es también equicontinua.([46, Theorem 7.14]) Ahora, al ser $\mathrm{cl}_{\tau_p} K$ equicontinua, la topología puntual en $\mathrm{cl}_{\tau_p} K$ es conjuntamente continua ([46, Theorem 7.15]) y, por tanto, la función evaluación

$$\begin{aligned} e\colon \mathrm{cl}_{\tau_p} K \times X &\to \mathbb{E}^1 \\ (f, x) &\to f(x) \end{aligned}$$

es una función continua. Por la condición (2), la función $\mu(e)\colon \mathrm{cl}_{\tau_p} K \to C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$ es continua. Sabemos que, como e es la función evaluación, $\mu(e)$ es la función inclusión. Por tanto, $\mathrm{cl}_{\tau_p} K$ es τ_α-compacto. Teniendo en cuenta que K es un subconjunto τ_α-cerrado de $\mathrm{cl}_{\tau_p} K$, tenemos que K es τ_α-compacto.

(3)$\Longrightarrow$(1) Suponemos que existe $B \in \alpha$ que no está acotado. Por lo tanto, podemos encontrar una sucesión infinita localmente finita $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$

de abiertos disjuntos dos a dos que corta a B. Ahora elegimos una sucesión $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathbb{E}^1$ tal que $d_\infty(0, v_n) > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, fijamos $x_n \in U_n \cap B$. Puesto que todo punto de X se puede separar por una función continua difusa de un cerrado al que no pertenece ([40, Proposición 3.5]), existe una función $f_n \in C(X, \mathbb{E}^1)$ que satisface $f_n(x_n) = v_n$ y $f_n|_{X \setminus U_n} = 0$. A continuación, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función g_n sobre X definida como

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Al ser la sucesión $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ localmente finita, la función g_n es continua para todo $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión $\mathcal{B} = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge en $C_{\tau_p}(X, \mathbb{E}^1)$. Este último hecho implica que $\mathcal{B}$ es un subconjunto τ_p-compacto. Como τ_α es más fina que τ_p, la τ_α-clausura de $\mathcal{B}$ está contenida en su τ_p-clausura. Por tanto, por el Teorema 4.4.7, la τ_α-clausura de $\mathcal{B}$ es puntualmente d_∞-acotada, y es puntualmente equicontinua a ambos lados. Demostraremos ahora que $\mathcal{B}$ es equicontinua. Para esto, fijamos $x \in X$ y consideramos dos casos:

Caso 1. $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$.
Al ser la sucesión $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ localmente finita, podemos elegir un conjunto no vacío abierto V con $x \in V$ tal que $V \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \emptyset$; esto implica que

$$d_\infty(g_n(y), g_n(x)) = 0$$

para todo $y \in V$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso 2. Hay una $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_n$.

Sea $\varepsilon > 0$. Consideramos el conjunto abierto $V = U_n \cap f_n^{-1}(B_\varepsilon(f_n(x))$. Entonces, para todo $y \in V$, tenemos que

$$d_\infty(g_k(y), g_k(x)) < \varepsilon$$

para todo $k \geq n$.

El Caso 1, junto con el Caso 2, demuestra que $\mathcal{B}$ es equicontinua en x. Como x es un punto arbitrario de X, entonces la familia $\mathcal{B}$ es equicontinua en X. Como $\tau_\alpha \geq \tau_p$, el Teorema 7.14 de [46], ya comentado anteriormente, nos dice que la τ_α-clausura de $\mathcal{B}$ es también equicontinua. Concluiremos la prueba demostrando que $\mathcal{B}$ no es relativamente compacto en $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$. En efecto, sabemos que $g_s(x_j) = 0$ y $g_k(x_j) = v_j$ cuando $s < j < k$ y, consecuentemente, por la elección de la sucesión $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$, tenemos que $d_\infty(g_s(x_j), g_k(x_j)) > 1$ cuando $s < j < k$. Por tanto, $\mathcal{B}$ no es relativamente compacto en $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$.

□

A continuación, para ilustrar las nociones que se están discutiendo, proporcionaremos un ejemplo de un espacio de funciones que satisface el teorema débil de Ascoli difuso pero no el teorema de Ascoli difuso. Recordemos que una función $f\colon X \times Y \to Z$ se dice que es *separadamente continua* si $f|_{X\times\{y\}}$ y $f|_{\{x\}\times Y}$ son continuas para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$. Según un resultado de Reznichenko ([70]), toda función continua real definida en el producto $X \times Y$ de dos espacios pseudocompactos puede ser extendida a una función separadamente continua (no necesariamente continua) definida en $\beta X \times \beta Y$ donde, como es habitual, βM denota la compactificación de Stone-Čech de un espacio M.

EJEMPLO 4.4.13 Escojamos un espacio producto $K \times X$ con K compacto de forma que exista una función difusa separadamente continua (pero no continua) f en $K \times X$. Por el Teorema 4.4.12, $C_{\tau_p}(X, \mathbb{E}^1)$ satisface el teorema débil de Ascoli difuso. Demostraremos que $C_{\tau_p}(X, \mathbb{E}^1)$ no satisface el teorema de Ascoli difuso. Primero probaremos que $\mu(f) \in C(K, C_{\tau_p}(X, \mathbb{E}^1))$. En efecto, si la función f es continua en $\{k\} \times X$ para todo $k \in K$, la función $\mu(f)(k) \in C(X, \mathbb{E}^1)$ para todo $k \in K$. Ahora, para ver que $\mu(f)$ es continua en cualquier punto $k \in K$, consideremos una red $(k_\delta)_{\delta \in D}$ que converja a $k \in K$. Como $f|_{K \times \{x\}}$ es continua para todo $x \in X$, tenemos que $(f(k_\delta, x))$ converge a $f(k, x)$ para todo $x \in X$. Por tanto, $\mu(f)$ es continua.

Supongamos ahora que $C_{\tau_p}(X, \mathbb{E}^1)$ satisface el teorema de Ascoli difuso. Entonces el conjunto compacto $\mu(f)(K)$ es equicontinuo. Al igual que en el Teorema 4.4.12, podemos aplicar [46, Theorem 7.15] para obtener que la función evaluación

$$\begin{array}{rcl} e\colon \mu(f)(K) \times X & \to & \mathbb{E}^1 \\ (h, x) & \to & h(x) \end{array}$$

$(h \in \mu(f)(K),\, x \in X)$ es continua. Por tanto, $f = e \circ (\mu(f) \times \mathrm{id}_X)$ es continua, lo que es una contradicción. Por lo tanto $C_{\tau_p}(X, \mathbb{E}^1)$ no satisface el teorema de Ascoli difuso.

En relación al teorema de Ascoli difuso, se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 4.4.14 *Sea $\alpha \subseteq \beta$ un recubrimiento de un espacio X. Si X es un α_f-espacio, entonces $(X, \mathbb{E}^1, \tau_\alpha)$ satisface el teorema de Ascoli difuso.*

Demostración.

Por el Teorema 4.4.12, solo necesitamos probar que un subconjunto compacto K de $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$ es τ_α-cerrado, puntualmente d_∞-acotado, equicontinuo y puntualmente equicontinuo a ambos lados. Consideremos la función inclusión (continua) i de K en $C_{\tau_\alpha}(X, \mathbb{E}^1)$. Por el Teorema 4.4.11, la función evaluación $\mu^{-1}(i)$ es continua. Puesto que $\tau_\alpha \geq \tau_p$, por [46, Theorem 7.19, Theorem 7.20], K es equicontinuo. Ahora, al ser K τ_p-compacto, K es puntualmente d_∞-acotado y puntualmente equicontinuo a ambos lados por el Teorema 4.4.6. Esto completa la prueba. $\square$

COROLARIO 4.4.15 *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Si X es un β_f-espacio, entonces $(X, \mathbb{E}^1, \tau_\beta)$ satisface el teorema de Ascoli difuso.*
2. *Si X es un k_r-espacio, entonces $(X, \mathbb{E}^1, \tau_{co})$ satisface el teorema de Ascoli difuso.*

El corolario anterior tiene varias aplicaciones. Dos de ellas se detallan a continuación. Aunque un producto arbitrario de grupos pseudocompactos es un grupo pseudocompacto (ver [13]), es un hecho conocido que un producto arbitrario de grupos localmente pseudocompactos no es necesariamente localmente pseudocompacto. Sin embargo, un producto arbitrario de grupos localmente pseudocompactos es un b_f-grupo, es decir, un grupo topológico cuyo espacio subyacente es un b_f-espacio (ver [73, Theorem 4.3]). Por tanto, tenemos que

COROLARIO 4.4.16 *Si G es un producto arbitrario de grupos localmente pseudocompactos, entonces $(G, \mathbb{E}^1, \tau_\beta)$ satisface el teorema de Ascoli difuso.*

El producto de dos k_r-espacios no tiene necesariamente que ser un k_r-espacio (véase [39]). No obstante hay varios casos interesantes donde un producto arbitrario de k_r-espacios es también un k_r-espacio. Por ejemplo, si X_α es un k_r-espacio pseudocompacto para todo $\alpha \in I$, entonces también lo es $X = \prod_{\alpha\in} X_\alpha$ ([60, Theorem 4.2]. Este hecho nos permite afirmar lo siguiente:

COROLARIO 4.4.17 *Si X es un producto arbitrario de espacios k_r-pseudocompactos, entonces $(X, \mathbb{E}^1, \tau_{co})$ satisface el teorema de Ascoli difuso.*

Para el caso importante de la convergencia uniforme, tenemos:

COROLARIO 4.4.18 *Para un espacio X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es pseudocompacto.*
2. *$(X, \mathbb{E}^1, \tau_u)$ satisface el teorema débil de Ascoli difuso.*
3. *$(X, \mathbb{E}^1, \tau_u)$ satisface el teorema de Ascoli difuso.*

Demostración.
Por el Teorema 4.4.12, es evidente que (1) y (2) son equivalentes y que (3)$\Longrightarrow$(1). Finalmente, (1)$\Longrightarrow$(3) se deduce del Teorema 4.4.14. $\square$

Como una consecuencia del resultado anterior, se tiene el siguiente corolario que puede tener interés en sí mismo y que corrige [22, Theorem 4.2].

COROLARIO 4.4.19 *Si K es un espacio métrico compacto, entonces $(K, \mathbb{E}^1, \tau_u)$ satisface el teorema de Ascoli difuso.*

4.5. Un teorema de Ascoli para $C_{\tau_{co}}(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$.

En los apartados anteriores hemos considerado $\mathbb{E}^1$ dotado de la topología inducida por la métrica supremo, d_∞. Dedicaremos este último apartado a la demostración de un teorema tipo Ascoli para el espacio $C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$, equipado con la topología compacto-abierta cuando X es un k-espacio, es decir, un espacio tal que un subconjunto A de X es cerrado en X si, y solo si, $A \cap K$ es cerrado en K para todo subconjunto compacto K de X.

Con este fin, empezamos la sección probando una caracterización de los subespacios compactos de $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$. Dado un subconjunto F de $C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$, escribiremos $F[x] := \{f(x) : f \in F\}$ para cada $x \in X$. Recordemos que $A \subset \mathbb{E}^1$ está *uniformemente acotado* si existe una constante $C > 0$ tal que $\max\{|u^-(0)|, |u^+(0)|\} \leq C$ para todo $u \in A$.

Por otra parte, gracias al teorema de caracterización de Goetschel-Voxman (Teorema 3.2.4), podemos considerar $\mathbb{E}^1$ como un subespacio del espacio producto $\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}$ (o de manera equivalente, del espacio producto$(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{[0,1]}$). Por tanto, diremos que un subconjunto A de $\mathbb{E}^1$ es *puntualmente cerrado* si es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}$.

TEOREMA 4.5.1 *Un subconjunto K de $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ es compacto si, y solo si, K es puntualmente cerrado y está uniformemente acotado.*

Demostración.
Suponemos que K es un subconjunto compacto de $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$. Entonces K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}$ y, en consecuencia, K es puntualmente cerrado y está puntualmente acotado, lo cual implica que K es puntualmente cerrado y uniformemente acotado.

En sentido contrario, si $K \subset \mathbb{E}^1$ está uniformemente acotado, K está puntualmente acotado. Así, al asumir también que K es puntualmente cerrado, K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{[0,1]} \times \mathbb{R}^{[0,1]}$ y al ser la compacidad una propiedad topológica absoluta, K es un subconjunto compacto de $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$. $\square$

A continuación introducimos el concepto de *equicontinuidad eventual* en un contexto difuso:

DEFINICIÓN 4.5.2 *Un subconjunto F de $C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ se dice que es* eventualmente equicontinuo *si para cualquier $x_0 \in X$, $u \in \mathbb{E}^1$, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset [0,1]$ y $\epsilon > 0$, existe un entorno abierto V de x_0 y $\{\beta_1, ..., \beta_m\} \subset [0,1]$ tal que si $f \in F$ y*

$$\max_{1 \le i \le m} \{|f(x_0)^+(\beta_i) - u^+(\beta_i)|, |f(x_0)^-(\beta_i) - u^-(\beta_i)|\} < \epsilon,$$

entonces

$$\max_{1 \le i \le n} \{|f(x)^+(\alpha_i) - u^+(\alpha_i)|, |f(x)^-(\alpha_i) - u^-(\alpha_i)|\} < \epsilon$$

para todo $x \in V$.

Para la demostració del teorema de Ascoli, necesitaremos el siguiente resultado, conocido como Teorema de Wallace.

TEOREMA 4.5.3 [18, Teorema 3.2.10] *If A_s es un subconjunto compacto de un espacio topológico X_s, entonces para todo subconjunto abierto W del producto cartesiano $\prod_{s \in S} X_s$ que contiene al conjunto $\prod_{s \in S} A_s$ existen subconjuntos abiertos $U_s \subset X_s$ tal que $U_s \neq X_s$ solo para una cantidad finita de índices $s \in S$ and $\prod_{s \in S} A_s \subset \prod_{s \in S} U_s \subset W$.*

TEOREMA 4.5.4 *Sea X un k-espacio. Si $F \subset C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$, entonces F es compacto si, y solo si, se satisfacen las siguientes condiciones*

1. *F es cerrado.*
2. *Para cualquier $x \in X$, $F[x]$ es puntualmente cerrado y uniformemente acotado.*
3. *F es eventualmente equicontinuo.*

Demostración.

Necesidad. Asumimos que F es compacto en la topología compacto-abierta de $C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$.

1) F es cerrado porque $C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ es un espacio de Hausdorff, al serlo $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ ([20, Theorem 2.1]).

2) Es evidente que, para todo $x \in X$, la función $L_x : C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell)) \longrightarrow (\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ definida como $L_x(f) := f(x)$ es continua. Por tanto, como F es compacto, entonces $L_x(F) = F[x]$ es compacto en $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ para cada $x \in X$. Por el Teorema 4.5.1, $F[x]$ es, para cualquier $x \in X$, puntualmente cerrado y uniformemente acotado.

3) Fijamos $x_0 \in X$, $u \in \mathbb{E}^1$, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset [0,1]$ y $\epsilon > 0$. Sea $\{\beta_1, ..., \beta_m\} \subset [0,1]$ tal que $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subseteq \{\beta_1, ..., \beta_m\}$. Sea $F' \subseteq F$ tal que

$$\max_{1 \le i \le m} \{|f(x_0)^+(\beta_i) - u^+(\beta_i)|, |f(x_0)^-(\beta_i) - u^-(\beta_i)|\} \le \epsilon,$$

para todo $f \in F'$. Es evidente que F' es cerrado y, consecuentemente, es compacto. Vamos a considerar la función $L(f, x) := f(x)$ definida de $F \times X$ en $\mathbb{E}^1$. Por [46, Teorema 7.5], la función L es continua en $F \times K$ para todo subconjunto compacto K de X. Como el producto de un espacio compacto y un k-espacio es un k-espacio, ([18, Theorem 3.3.27]), la función L es continua y, por tanto,

$$L(F'\times\{x_0\}) \subset U := \{v \in \mathbb{E}^1 : \max_{1\leq i\leq n}\{|v^+(\alpha_i)-u^+(\alpha_i)|, |v^-(\alpha_i)-u^-(\alpha_i)|\} < \epsilon\},$$

lo cual quiere decir que el subconjunto compacto $F' \times \{x_0\}$ está incluido en $L^{-1}(V)$. Por el Teorema 4.5.3, existe un entorno abierto, V, de x_0 tal que $f(x) \in U$ para todo $f \in F'$ y todo $x \in V$. Es decir,

$$\max_{1\leq i\leq n}\{|f(x)^+(\alpha_i) - u^+(\alpha_i)|, |f(x)^-(\alpha_i) - u^-(\alpha_i)|\} < \epsilon.$$

Suficiencia. Primero vamos a comprobar que $\bar{F}$, la clausura de F en la topología de la convergencia puntual es también eventualmente equicontinua. Fijamos $x_0 \in X$, $u \in \mathbb{E}^1$, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset [0, 1]$ y $\epsilon > 0$. Entonces, por la equicontinuidad eventual de F, existe un entorno V de x_0 y $\{\beta_1, ..., \beta_m\} \subset [0, 1]$ tal que si $f \in F$ y

$$\max_{1\leq i\leq m}\{|f(x_0)^+(\beta_i) - u^+(\beta_i)|, |f(x_0)^-(\beta_i) - u^-(\beta_i)|\} < \epsilon,$$

entonces

$$\max_{1\leq i\leq n}\{|f(x)^+(\alpha_i) - u^+(\alpha_i)|, |f(x)^-(\alpha_i) - u^-(\alpha_i)|\} < \epsilon$$

para todo $x \in V$. Tomamos $g \in \bar{F}$ tal que

$$\max_{1\leq i\leq m}\{|g(x_0)^+(\beta_i) - u^+(\beta_i)|, |g(x_0)^-(\beta_i) - u^-(\beta_i)|\} < \epsilon.$$

Tenemos que comprobar

$$\max_{1\leq i\leq n}\{|g(x)^+(\alpha_i) - u^+(\alpha_i)|, |g(x)^-(\alpha_i) - u^-(\alpha_i)|\} < \epsilon$$

para todo $x \in V$. Con esta finalidad, elegimos una red $\{g_\lambda\}_{\lambda \in I}$ en F que converge puntualmente a g. Por lo tanto, eventualmente,

$$\max_{1 \leq i \leq m} \{|g_\lambda(x_0)^+(\beta_i) - u^+(\beta_i)|, |g_\lambda(x_0)^-(\beta_i) - u^-(\beta_i)|\} < \epsilon.$$

Consecuentemente, por la equicontinuidad eventual de F,

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{|g_\lambda(x)^+(\alpha_i) - u^+(\alpha_i)|, |g_\lambda(x)^-(\alpha_i) - u^-(\alpha_i)|\} < \epsilon$$

para todo $x \in V$, como queríamos probar.

Como en el caso de la necesidad, consideramos $L(f, x) := f(x)$ definida de $\bar{F} \times X$ en $\mathbb{E}^1$. Veamos que L es continua. Con esta finalidad, fijamos $x_0 \in X$, $u \in \mathbb{E}^1$, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset [0, 1]$ y $\epsilon > 0$. Como $\bar{F}$ es eventualmente equicontinuo, existe un entorno abierto V de x_0 y $\{\beta_1, ..., \beta_m\} \subset [0, 1]$ tal que si $f \in W := \{f \in \bar{F} : \max_{1 \leq i \leq m}\{|f(x_0)^+(\beta_i) - u^+(\beta_i)|, |f(x_0)^-(\beta_i) - u^-(\beta_i)|\} < \epsilon\}$, entonces $L(W \times V) \subset U$, donde

$$U := \{v \in \mathbb{E}^1 : \max_{1 \leq i \leq n}\{|v^+(\alpha_i) - u^+(\alpha_i)|, |v^-(\alpha_i) - u^-(\alpha_i)|\} < \epsilon\}.$$

Ya que también está claro que W es abierto en $\bar{F}$ y U un abierto en $(\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$, entonces L es continua.

De forma similar, por la equicontinuidad eventual de $\bar{F}$, podemos deducir que si $f \in \bar{F}$, entonces $f \in C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$.

Ahora vamos a comprobar que la clausura de F en la topología de la convergencia puntual, $\bar{F}$, coincide con la clausura de F en la topología compacto-abierta, $\mathrm{cl}(F)$. Es suficiente comprobar, en este contexto, que la topología de la convergencia puntual es más fina que la topología compacto-abierta ($\tau_p \leq \tau_{co}$).

Es bien sabido que dado un subconjunto compacto K de X, $u_0 \in \mathbb{E}^1$, y $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset [0,1]$, el conjunto $B(K, \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}, u_0)$ dado por

$$\{g \in \bar{F} : \max_{1 \leq i \leq n} \{|g(x)^+(\alpha_i) - u_0^+(\alpha_i)|, |g(x)^-(\alpha_i) - u_0^-(\alpha_i)|\} < \epsilon \text{ for all } x \in K\}$$

es miembro de una subbase para la topología compacto-abierta en $C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$.

Fijamos $f \in B(K, \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}, u_0)$. Entonces $\{f\} \times K$ es compacto en $\bar{F} \times X$ y pertenece a $L^{-1}(U)$, donde

$$U := \{v \in \mathbb{E}^1 : \max_{1 \leq i \leq n} \{|v^+(\alpha_i) - u_0^+(\alpha_i)|, |v^-(\alpha_i) - u_0^-(\alpha_i)|\} < \epsilon\}.$$

Dado que L es continua, se tiene que $L^{-1}(U)$ es abierto. Por lo tanto, por el Teorema 4.5.3, existe un entorno abierto, N, de f en la topología de la convergencia puntual tal que $N \times K \in L^{-1}(U)$, lo que quiere decir que $N \subset B(K, \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}, u_0)$. Esto significa que la topología de la convergencia puntual es más fina que la topología compacto-abierta.

Finalmente, afirmamos que $cl(F)$ es compacto en la topología compacto-abierta. En realidad, comprobaremos que es compacto en la topología de la convergencia puntual, pues ya hemos comprobado que ambas topologías coinciden en $\bar{F} = cl(F)$. Con este fin, podemos considerar $\bar{F}$ como un subconjunto cerrado del producto $\prod_{x \in X}\{\overline{F[x]}\}$. Por el Teorema de Tychonoff's, $\prod_{x \in X}\{\overline{F[x]}\}$ es compacto en la topología de la convergencia puntual ya que, por el Teorema 4.5.1, $F[x]$ es compacto para cada $x \in X$. Entonces, $\bar{F}$ es compacto en la topología compacto-abierta y, puesto que por hipótesis, F es cerrado en esta topología, entonces F es compacto en la topología compacto-abierta, como queríamos probar.

Capítulo 5

Aproximación de funciones difusas continuas: Teoremas tipo Stone-Weierstrass

En este capítulo nos centramos en el estudio de las condiciones bajo las cuales una función difusa continua (con respecto a la métrica supremo o la topología de la convergencia de nivel) definida en un espacio compacto de Hausdorff, K, puede ser aproximada por determinadas funciones difusas con cualquier grado de precisión. Más concretamente, y en base a las ideas de R.I. Jewett ([41]) y J.B. Prolla ([66]), proporcionamos un conjunto de condiciones suficientes en un subespacio del espacio de las funciones difusas para que sea denso, es decir, un resultado tipo Stone-Weierstrass. El célebre teorema de Stone-Weierstrass es uno de los resultados más importantes en el Análisis Clásico puesto que desempeña un papel clave en el desarrollo de la teoría de la aproximación general y, en particular, es la esencia de las capacidades de aproximación de las redes neuronales. También obtenemos un resultado similar para interpolar familias de funciones difusas continuas en el sentido de que la aproximación uniforme también puede exigir una coincidencia exacta en una determinada cantidad finita de puntos.

5.1. Una versión difusa del teorema de Stone-Weierstrass con la topología de la convergencia uniforme

Comenzaremos este apartado introduciendo un concepto esencial para obtener nuestro teorema principal (Teorema 5.1.7). Recordemos que $\mathbb{E}^1$ denotará el espacio métrico $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ salvo indicación en contra. En este apartado K representará a un espacio compacto de Hausdorff.

DEFINICIÓN 5.1.1 *Dado un subconjunto no vacío W de $C(K, \mathbb{E}^1)$, definimos el subconjunto del espacio de funciones $C(K, [0,1])$ como:*

$$Conv(W) = \{\varphi \in C(K, [0,1]) : \varphi f + (1-\varphi) g \in W \;\; para \;\; todo \;\; f, g \in W\}.$$

PROPOSICIÓN 5.1.2 *Sea W un subconjunto no vacío de $C(K, \mathbb{E}^1)$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *$\phi \in Conv(W)$ implica que $1 - \phi \in Conv(W)$.*
2. *Si $\phi, \varphi \in Conv(W)$, entonces $\phi \cdot \varphi \in Conv(W)$.*
3. *Si ϕ pertenece a la clausura uniforme de $Conv(W)$, entonces $1 - \phi$ también pertenece.*

4. *Si ϕ, φ pertenecen a la clausura uniforme de $Conv(W)$, entonces $\phi{\cdot}\varphi$ también pertenece.*

Demostración.
(1) es evidente. Para probar (2), vamos a suponer que ϕ, $\varphi \in Conv(W)$. La identidad

$$1 - \phi \cdot \varphi = (1 - \phi) + \phi(1 - \varphi)$$

implica que, para cada par $f, g \in W$,

$$(\phi \cdot \varphi)f + (1 - \phi \cdot \varphi)g = \phi[\varphi f + (1 - \varphi)g] + (1 - \phi)g,$$

y, por lo tanto, $\phi \cdot \varphi \in Conv(W)$.

Para demostrar (3), supongamos que ϕ pertenece a la clausura uniforme de $Conv(W)$. Entonces existe una sucesión $\{\phi_n\} \subset Conv(W)$ que converge uniformemente a ϕ. En consecuencia, $\{1 - \phi_n\}$, que está contenido en $Conv(W)$ por (1), converge uniformemente a $1 - \phi$.

El apartado (4) se demuestra de forma similar.

□

DEFINICIÓN 5.1.3 *Diremos que $M \subset C(K, [0, 1])$ separa los puntos de K si dados $s, t \in K$ con $s \neq t$, entonces existe $\phi \in M$ tal que $\phi(s) \neq \phi(t)$.*

Enunciaremos a continuación dos lemas técnicos que utilizaremos en las siguientes demostraciones:

LEMA 5.1.4 [66, Lemma 1] Sea $0 < a < b < 1$ y $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Existe un polinomio $p(x) = (1 - x^m)^n$, tal que:

1. $p(x) > 1 - \delta$ para todo $0 \leq x \leq a$.

2. $p(x) < \delta$ para todo $b \leq x \leq 1$.

LEMA 5.1.5 [66, Lemma 2] Sea $W \subseteq C(K, \mathbb{E}^1)$. El máximo de dos elementos de $Conv(W)$ está en la clausura uniforme de $Conv(W)$.

LEMA 5.1.6 *Sea $W \subseteq C(K, \mathbb{E}^1)$. Si $Conv(W)$ separa los puntos de K, entonces, dado un $x_0 \in K$ y un entorno abierto N de x_0, existe un entorno U de x_0 contenido en N tal que para todo $0 < \delta < \frac{1}{2}$, existe un $\varphi \in Conv(W)$ tal que:*

1. *$\varphi(t) > 1 - \delta$, para todo $t \in U$.*
2. *$\varphi(t) < \delta$, para todo $t \notin N$.*

Demostración.
Sea H el complemento de N en K. Para cada $t \in H$, como $Conv(W)$ separa los puntos de K por hipótesis, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe un $\varphi_t \in Conv(W)$ tal que $\varphi_t(t) < \varphi_t(x_0)$.

Elegimos dos números reales a y b tales que: $\varphi_t(t) < a < b < \varphi_t(x_0)$. Entonces tomando $\delta = \frac{1}{4}$ en el Lema 5.1.4, podemos encontrar un polinomio $p_t(x) = (1 - x^m)^n$ tal que $p_t(x) < \frac{1}{4}$ para $b \leq x \leq 1$, y $p_t(x) > \frac{3}{4}$ para $0 \leq x \leq a$. Por lo tanto, $p_t(\varphi_t(x_0)) < \frac{1}{4}$ y $p_t(\varphi_t(t)) > \frac{3}{4}$.

Para cada $t \in H$ podemos definir $U(t) = \{s \in K : p_t(\varphi_t(s)) > \frac{3}{4}\}$, que es claramente un entorno abierto de t. Como H es compacto por ser un subespacio cerrado dentro de un espacio compacto, existen $t_1, ..., t_m \in H$ tales que: $H \subset U(t_1) \cup U(t_2) \cup ... \cup U(t_m)$. Para cada $i = 1, ..., m$ y todo $s \in K$

definimos

$$\varphi_i(s) = p_{t_i}(\varphi_{t_i}(s)).$$

Veamos que $\varphi_i \in Conv(W)$, para todo $i = 1, ..., m$. De hecho, se tiene que $p_{t_i}(\varphi_{t_i}(s)) = (1 - [\varphi_{t_i}(s)]^m)^n$ y puesto que $\varphi_{t_i}(s) \in Conv(W)$, por las propiedades (1) y (2) de la Proposición 5.1.2, deducimos que $p_{t_i}(\varphi_{t_i}(s))$ también pertenece a $Conv(W)$.

Vamos a definir $\psi(s) = \text{máx}(\varphi_1(s), ..., \varphi_m(s))$, $s \in K$. Por el Lema 5.1.5 podemos decir que la función ψ pertenece a la clausura uniforme de $Conv(W)$. Fijémonos en que $\psi(x_0) < \frac{1}{4}$ y $\psi(t) > \frac{3}{4}$, para todo $t \in H$ por las propiedades de los polinomios $p_t(x)$. Definimos $U = \{s \in S; \psi(s) < \frac{1}{4}\}$. Claramente, U es un entorno abierto de x_0 en K. De hecho U está contenido en N. En efecto, si $t \in U$ y $t \notin N$, entonces $t \in H$ y, por lo tanto, $\psi(t) > \frac{3}{4}$, es decir, t no puede estar en U.

Tomemos un $\delta \in \mathbb{R}$ que satisfaga $0 < \delta < \frac{1}{2}$ y sea p el polinomio definido en el Lema 5.1.4, aplicado a $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$ y $\delta/2$. Definimos $\eta = p(\psi(s))$, para $s \in K$. Por las propiedades (3) y (4) de la Proposición 5.1.2, la función η también pertenece a la clausura uniforme de $Conv(W)$.

Si $t \in U$, entonces $\eta(t) > 1 - \delta/2$ por construcción. Si $t \notin N$, entonces $t \in H$ y $\eta(t) < \delta/2$ ya que $\psi(t) > \frac{3}{4}$.

Por estar η en la clausura uniforme de $Conv(W)$, dado $\frac{\delta}{2}$, existe $\varphi \in Conv(W)$ tal que $\| \varphi - \eta \|_\infty = \sup_{t \in K} | \varphi(t) - \eta(t) | < \delta/2$. Así pues hemos encontrado un $\varphi \in Conv(W)$ que satisface las propiedades (1) y (2) del enunciado del lema, lo que completa la prueba.

$\square$

Con toda la información de que disponemos ya podemos enunciar y demostrar una versión del teorema de Stone-Weierstrass para funciones difusas continuas. Recordemos que en $C(K, \mathbb{E}^1)$ consideraremos la métrica

$$D(f, g) = \sup_{t \in K} d_\infty(f(t), g(t)),$$

la cual induce la topología de convergencia uniforme en $C(K, \mathbb{E}^1)$.

TEOREMA 5.1.7 *Sea W un subconjunto no vacío de $C(K, \mathbb{E}^1)$ y asumamos que $Conv(W)$ separa puntos. Si $f \in C(K, \mathbb{E}^1)$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe, para cada $x \in K$, $g_x \in W$ tal que $d_\infty(f(x), g_x(x)) < \varepsilon$, entonces W es denso en $(C(K, \mathbb{E}^1), D)$.*

Demostración.
Fijamos $\varepsilon > 0$ y $f \in C(K, \mathbb{E}^1)$. Nuestro objetivo es encontrar $g \in W$ tal que $D(f, g) < \varepsilon$. Para cada $x \in K$ y $0 < \varepsilon(x) < \varepsilon$, vamos a definir $N(x) = \{t \in K : d_\infty(f(t), g_x(t)) < \varepsilon(x) < \varepsilon\}$, el cual es un entorno abierto de x. Elijamos otro entorno abierto de x, $U(x)$, que satisfaga las propiedades del Lema 5.1.6.

Fijamos $x_1 \in K$ arbitrario, y sea S el complemento de $N(x_1)$ en K. Por compacidad de S, hay un conjunto finito $\{x_2, \ldots, x_m\} \subset S$ tal que $S \subset U(x_2) \cup \ldots \cup U(x_m)$. Elegimos $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tal que $\delta Q m < \varepsilon - \varepsilon'$, donde $\varepsilon' = \max\{\varepsilon(x_i) : 1 \leq i \leq m\}$ y $Q = \max\{D(f, g_{x_i}) : 1 \leq i \leq m\}$.

Por el Lema 5.1.6, existen $\phi_2, \cdots, \phi_m \in Conv(W)$ tales que para todo $i = 2, \dots, m$:

1. $\phi_i(t) > 1 - \delta$, para todo $t \in U(x_i)$; (1)

2. $0 \leq \phi_i(t) < \delta, \quad si \;\; t \notin N(x_i)$. (2)

Definimos las funciones

$$\begin{aligned}
&\psi_2 = \phi_2,\\
&\psi_3 = (1-\phi_2)\phi_3,\\
&\vdots\\
&\psi_m = (1-\phi_2)(1-\phi_3)\cdots(1-\phi_{m-1})\phi_m.
\end{aligned}$$

Es evidente que $\psi_i \in Conv(W)$ para todo $i = 2, \dots, m$.

Ahora vamos a comprobar que

$$\psi_2 + \ldots + \psi_j = 1 - (1-\phi_2)(1-\phi_3)\cdots(1-\phi_j),$$

para $j = 2, \dots, m$. Parece claro que

$$\psi_2 + \psi_3 = \phi_2 + (1-\phi_2)\phi_3 = 1 - (1-\phi_2)\cdot(1-\phi_3).$$

Procediendo por inducción, asumiremos que el resultado es cierto para cierto subíndice $j \in \{4, ..., m-1\}$, y vamos a comprobar la igualdad

$$\psi_2 + \ldots + \psi_j + \psi_{j+1} = 1 - (1-\phi_2)(1-\phi_3)\cdots(1-\phi_j)(1-\phi_{j+1}).$$

Así pues,

$$\psi_2+\ldots+\psi_j+\psi_{j+1} = 1-(1-\phi_2)(1-\phi_3)\cdots(1-\phi_j)+(1-\phi_2)(1-\phi_3)\cdots(1-\phi_j)\phi_{j+1} =$$

$$= 1 - (1-\phi_2)(1-\phi_3)\cdots(1-\phi_j)(1-\phi_{j+1}),$$

como queríamos comprobar. Finalmente definamos la función $\psi_1 := (1-\phi_2)\cdots(1-\phi_m)$ que pertenece a $Conv(W)$ y satisface $\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_m = 1$.

Por otro lado, vamos a probar que

$$\psi_i(t) < \delta \text{ for all } t \notin N(x_i),\ i = 1,\ldots,m. \tag{5.1}$$

En efecto, si $i \geq 2$, entonces $\psi_i(t) \leq \phi_i(t)$ por definición, lo cual quiere decir que $\psi_i(t) < \delta$ para todo $t \notin N(x_i)$, por (2).

Si $t \notin N(x_1)$, tenemos que $t \in S$. Por lo tanto, $t \in U(x_j)$ para algún $j = 2,\ldots,m$. Por (1), tenemos que $1-\phi_j(t) < \delta$ y entonces

$$\psi_1(t) = (1-\phi_j(t))\prod_{i\neq j}(1-\phi_i(t)) < \delta.$$

Sea

$$g := \psi_1 g_1 + \psi_2 g_2 + \ldots + \psi_m g_m,$$

donde g_i representa g_{x_i} para $i = 1,\ldots,m$. Sustituyendo las ψ_m por su definición, observamos que

$$g = \phi_2 g_2+(1-\phi_2)[\phi_3 g_3+(1-\phi_3)[\phi_4 g_4+\cdots+(1-\phi_{m-1})[\phi_m g_m+(1-\phi_m)g_1]\cdots]].$$

Por tanto, $g \in W$ ya que $\phi_i \in Conv(W)$ para $i = 2,...,m$ (ver Definición 5.1.2). Por la Proposición 3.2.8, sabemos que, dado $x_0 \in K$,

$$d_\infty(f(x_0), g(x_0)) = d_\infty\left(\sum_{i=1}^m \psi_i(x_0)f(x_0), \sum_{i=1}^m \psi_i(x_0)g_i(x_0)\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x_0) d_\infty(f(x_0), g_i(x_0)).$$

Sea $I = \{1 \leq i \leq m; x_0 \in N(x_i)\}$ y $J = \{1 \leq i \leq m; x_0 \notin N(x_i)\}$. Entonces, para todo $i \in I$ tenemos que

$$\psi_i(x_0) d_\infty(f(x_0), g_i(x_0)) \leq \psi_i(x_0)\varepsilon'. \tag{5.2}$$

y, para todo $i \in J$, la desigualdad (5.1) produce

$$\psi_i(x_0) d_\infty(f(x_0), g_i(x_0)) \leq \delta Q.$$

De estas dos desigualdades, deducimos

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_i(x_0) d_\infty(f(x_0), g_i(x_0)) \leq \sum_{i \in I} \psi_i(x_0)\varepsilon' + \sum_{i \in J} \delta Q \leq \varepsilon' + \delta Q m < \varepsilon.$$

Finalmente, reuniendo toda la información y como x_0 es arbitrario en K, concluimos que $d_\infty(f(x), g(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in K$, lo cual conduce a $D(f, g) \leq \varepsilon$, como queríamos demostrar. $\square$

DEFINICIÓN 5.1.8 *Dado $u \in \mathbb{E}^1$, escribiremos $\widehat{u}$ para denotar la función en $C(K, \mathbb{E}^1)$ que toma el valor constante u.*

Si asumimos que W contiene a las funciones constantes, entonces podemos obtener una versión mejorada del Teorema 5.1.7:

COROLARIO 5.1.9 *Sea W un subconjunto no vacío $C(K, \mathbb{E}^1)$ que contiene a las funciones constantes. Si además asumimos que $Conv(W)$ separa puntos, entonces W es denso en $(C(K, \mathbb{E}^1), D)$.*

Demostración.
Dados $f \in C(K, \mathbb{E}^1)$ y $\varepsilon > 0$, podemos tomar, para cada $x \in K$, $g_x := \widehat{f(x)}$. En este caso $d_\infty(f(x), g_x(x)) = 0$ y el resultado se sigue del Teorema 5.1.7.
$\square$

Si consideramos $W = C(K, \mathbb{E}^1$ entonces se obtiene el siguiente resultado:

COROLARIO 5.1.10 *Sea $f \in C(K, \mathbb{E}^1)$. Entonces, existen una cantidad finita de funciones $\psi_i \in C(K, [0,1])$ y $u_i \in \mathbb{E}^1$, $i = 1, ..., m$, tales que*

$$D(f, \psi_1 \widehat{u_1} + ... + \psi_m \widehat{u_m}) < \varepsilon.$$

Demostración.
Es evidente que $Conv(C(K, \mathbb{E}^1)) = C(K, [0,1])$, que claramente separa los puntos de K. Para concluir la prueba, basta en la definición de la función g de la demostración del Teorema 5.1.7, tomar $g_{x_i} := \widehat{f(x_i)}$ para $i = 1, ..., m$.
$\square$

DEFINICIÓN 5.1.11 *Un subconjunto $A \subset C(K, \mathbb{E}^1)$ se dice que es una* familia interpoladora *si, dado un subconjunto finito $K' \subset K$ y una función $f \in C(K, \mathbb{E}^1)$, existe $g \in A$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in K'$.*

TEOREMA 5.1.12 *Sea $A \subset C(K, \mathbb{E}^1)$ una familia interpoladora tal que $Conv(A)$ separa los puntos de K. Entonces, para cada $f \in C(K, \mathbb{E}^1)$, cada $\varepsilon > 0$ y cada subconjunto finito $K' \subset K$, existe $g \in A$ tal que $D(f, g) < \varepsilon$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in K'$. En particular, A es denso en $(C(K, \mathbb{E}^1), D)$.*

Demostración.
Fijamos $f_0 \in C(K, \mathbb{E}^1)$ y definimos $W = \{g \in A : f_0(x) = g(x) \text{ para todo } x \in K'\}$, el cual no es vacío por ser A una familia interpoladora.

Vamos a ver que $Conv(A) \subseteq Conv(W)$. Sea $f, g \in W$. Tenemos que comprobar que $\varphi f + (1-\varphi)g \in W$ para algún $\varphi \in Conv(A)$. Es evidente que $\varphi f + (1-\varphi)g \in A$. Además $\varphi(x)f(x) + (1-\varphi(x))g(x) = \varphi(x)f_0(x) + (1-\varphi)f_0(x) = f_0(x)$ para todo $x \in K'$, y consecuentemente, $\varphi f + (1-\varphi)g \in W$.

Para cada $x \in K$, consideramos el conjunto finito $K' \cup \{x\}$. Como A es una familia interpoladora para $C(K, \mathbb{E}^1)$, entonces existe $g_x \in A$ tal que $f(t) = g_x(t)$ para todo $t \in K' \cup \{x\}$. En particular, $f(t) = g_x(t)$ para todo $t \in K'$. Por lo tanto, $g_x \in W$. Por otro lado $f(x) = g_x(x)$ implica que $d_\infty(f(x), g_x(x)) < \varepsilon$. Por el Teorema 5.1.7, existe $g \in W \subseteq A$ tal que $D(f, g) < \varepsilon$ y $g(t) = f(t)$ para todo $t \in K'$. $\square$

5.2. Una versión difusa del teorema de Stone-Weierstrass con la topología de la convergencia de nivel.

La topología de la convergencia de nivel, τ_ℓ, se introdujo en [45] y, gracias a la caracterización de Goetschel-Voxman de los números difusos, se ha convertido en una alternativa natural a las métricas habituales (d_∞, endográfica, ...) usadas en $\mathbb{E}^1$. De hecho, el espacio de las funciones difusas τ_ℓ-continuas es estrictamente mayor que el espacio de funciones difusas d_∞-continuas. Además, parece ser que el uso de la topología compacto-abierta también es una novedad en este contexto.

En primer lugar recordaremos el conocido Lema de Uryshon ([18]):

LEMA 5.2.1 . *Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff, y sean $K, F \subset X$ dos conjuntos disjuntos, con K compacto, y F cerrado. Entonces existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f \equiv 1$ en K y f se anula en F.*

Como en el apartado 5.1, dado $u \in \mathbb{E}^1$, escribiremos $\widehat{u}$ para denotar las funciones en $C(X, \mathbb{E}^1)$ que toman el valor constante u.

Ahora podemos probar una versión del teorema de Stone-Weierstrass para $C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ equipado con la topología compacto-abierta, τ_{co}:

TEOREMA 5.2.2 *Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff. Sea $\mathcal{H}$ un subespacio de $C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ que contiene las combinaciones finitas de la forma $\psi_1\widehat{u_1} + ... + \psi_m\widehat{u_m}$, donde $\psi_i \in C(X, [0,1])$ y $u_i \in \mathbb{E}^1$, $i = 1, ..., m$. Entonces $\mathcal{H}$ es denso en $(C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell)), \tau_{co})$.*

Demostración.
Fijamos $\varepsilon > 0$, un conjunto finito $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset [0,1]$, un subconjunto compacto $K \subset X$ y $f_0 \in C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$.

Para cada $x \in X$ y $0 < \varepsilon(x) < \varepsilon$, definimos

$$N(x) = \{t \in X : d_H([f_0(t)]^{\lambda_j}, [f_0(x)]^{\lambda_j}) < \varepsilon(x) < \varepsilon, j = 1, ..., n\},$$

que es un entorno abierto de x ya que $f_0 \in C(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$. Como X es localmente compacto, podemos encontrar un entorno relativamente compacto de x, $V(x)$, tal que $clV(x) \subset N(x)$. Por el Lema de Uryshon (Lema 5.2.1), existe una función continua $f_x : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f_x \equiv 1$ en $clV(x)$ y f_x se anula en $X \setminus N(x)$.

Elegimos $x_1 \in K$. Por la compacidad de $X \setminus N(x_1) \cap K$, podemos encontrar un conjunto finito $\{x_2, \ldots, x_m\} \subset X \setminus N(x_1) \cap K$ tal que $(X \setminus N(x_1) \cap K \subset V(x_2)) \cup \ldots \cup V(x_m)$.

Definimos $\varepsilon' = \text{máx}\{\varepsilon(x_i) : 1 \leq i \leq m\}$ y las siguientes funciones:

$\psi_2 = f_{x_2}$,

$\psi_3 = (1 - f_{x_2})f_{x_3}$,

$\vdots$

$\psi_m = (1 - f_{x_2})(1 - f_{x_3}) \cdots (1 - f_{x_{m-1}})f_{x_m}$.

A continuación afirmamos que

$$\psi_2 + \ldots + \psi_j = 1 - (1 - f_{x_2})(1 - f_{x_3}) \cdots (1 - f_{x_j}),$$

$j = 2, \ldots, m$.
En efecto, es claro que

$$\psi_2 + \psi_3 = f_{x_2} + (1 - f_{x_2})f_{x_3} = 1 - (1 - f_{x_2}) \cdot (1 - f_{x_3}).$$

Procedemos por inducción. Asumimos que el resultado es cierto para un cierto $j \in \{4, ..., m-1\}$ y vamos a comprobar que

$$\psi_2 + \ldots + \psi_j + \psi_{j+1} = 1 - (1 - f_{x_2})(1 - f_{x_3}) \cdots (1 - f_{x_j})(1 - f_{x_{j+1}}).$$

Esto es,

$$\psi_2 + \ldots + \psi_j + \psi_{j+1} = 1 - (1 - f_{x_2})(1 - f_{x_3}) \cdots (1 - f_{x_j}) + (1 - f_{x_2})(1 - f_{x_3}) \cdots (1 - f_{x_j})f_{x_{j+1}} =$$

$$= 1 - (1 - f_{x_2})(1 - f_{x_3}) \cdots (1 - f_{x_j})(1 - f_{x_{j+1}}),$$

como queríamos comprobar.

Finalmente, podemos definir $\psi_1 := (1 - f_{x_2}) \cdots (1 - f_{x_m})$. Como consecuencia, tenemos que

$$\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_m \equiv 1.$$

Por otro lado necesitamos que

$$\psi_i(t) = 0 \ \text{ para todo } t \notin N(x_i), \ i = 1, \ldots, m. \tag{5.3}$$

En efecto, si $i \geq 2$, el resultado es claro por construcción.
Si $t \notin N(x_1)$, entonces $t \in V(x_j)$ para algún $j = 2, \ldots, m$. Por lo tanto $f_{x_j}(t) = 1$ y en consecuencia

$$\psi_1(t) = (1 - f_{x_j}(t)) \prod_{i \neq j} (1 - f_{x_i}(t)) = 0.$$

Vamos a definir

$$g := \psi_1 \widehat{f_0(x_1)} + \psi_2 \widehat{f_0(x_2)} + \ldots + \psi_m \widehat{f_0(x_m)} \in \mathcal{H}. \tag{5.4}$$

A continuación, dado $x_0 \in K$ y por las propiedades de la métrica de Hausdorff (ver, e.g., [15]), concluimos

$$d_H([f_0(x_0)]^{\lambda_j}, [(\psi_1 \widehat{f_0(x_1)} + ... + \psi_m \widehat{f_0(x_m)})(x_0)]^{\lambda_j}) =$$

$$d_H\left(\left[\sum_{i=1}^m \psi_i(x_0) f_0(x_0) \right]^{\lambda_j}, \left[(\psi_1 \widehat{f_0(x_1)} + ... + \psi_m \widehat{f_0(x_m)})(x_0) \right]^{\lambda_j} \right) \leq$$

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_i(x_0) d_H([f_0(x_0)]^{\lambda_j}, [\widehat{f_0(x_i)}]^{\lambda_j}).$$

para $j = 1, ..., n$.

Sea $I = \{1 \leq i \leq m : x_0 \in N(x_i)\}$ y $J = \{1 \leq i \leq m : x_0 \notin N(x_i)\}$. Entonces, para todo $i \in I$, tenemos

$$\psi_i(x_0) d_H([f_0(x_0)]^{\lambda_j}, [\widehat{f_0(x_i)}]^{\lambda_j}) \leq \psi_i(x_0)\varepsilon'$$

para $j = 1, ..., n$ y, para todo $i \in J$, entonces (5.3) da lugar a

$$\psi_i(x_0) d_H([f_0(x_0)]^{\lambda_j}, [\widehat{f_0(x_i)}]^{\lambda_j}) = 0$$

para $j = 1, ..., n$. Por lo tanto, deducimos

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_i(x_0) d_H([f_0(x_0)]^{\lambda_j}, [\widehat{f_0(x_i)}]^{\lambda_j}) \leq \sum_{i \in I} \psi_i(x_0)\varepsilon' < \varepsilon$$

para $j = 1, ..., n$. Como x_0 es arbitrario en K, concluimos que $g \in V(f_0, K, \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}, \epsilon)$.
$\square$

5.3. Ejemplo

Terminamos esta capítulo con un ejemplo numérico para ilustrar el razonamiento que hemos utilizado en el resultado principal (Teorema 5.2.2) de la sección anterior:

Sea $X = [0, 1[$ y definamos una función continua $f_0 : [0, 1[\longrightarrow (\mathbb{E}^1, \tau_\ell)$ como sigue:

$$f_0(0)(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

y $f_0(t)(x) = x^{\frac{1}{t}}$ para $0 \leq x \leq 1$ y $t \in]0,1[$. Por lo tanto, deducimos que

$$[f_0(0)]^\lambda = \begin{cases} \{1\} & 0 < \lambda \leq 1 \\ [0,1] & \lambda = 0 \end{cases}$$

y para $t \in]0,1[$,

$$[f_0(t)]^\lambda = \begin{cases} [\lambda^t, 1] & 0 < \lambda \leq 1 \\ [0,1] & \lambda = 0. \end{cases}$$

Fijamos $\epsilon = 0.1$ y $\lambda_1 = 0.5$. Si tomamos $t \in]0,1[$, entonces

$$N(t) = \{s \in X : |0.5^t - 0.5^s| < 0.1\}.$$

Si consideramos $t_i = 0.1i - 0.05$ para $i = 1, 2, ..., 10$, entonces es evidente que $[0,1[\subset \cup_{i=1}^{10} N(t_i)$.

Definamos las siguientes funciones trapezoidales para $i = 2, ..., 10$:

$$f_i(t) = \begin{cases} 20t - (2i-3) & 0.1i - 0.15 < t < 0.1i - 0.1 \\ 1 & 0.1i - 0.1 \leq t \leq 0.1i \\ -20t + (2i+1) & 0.1i < t < 0.1i + 0.05 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

A partir de estas funciones podemos construir a continuación las siguientes, que también resultan ser trapezoidales:

$\psi_2 := f_{x_2}$,

$\psi_3 := (1 - f_{x_2})f_{x_3}$,

$\vdots$

$\psi_{10} := (1 - f_{x_2})(1 - f_{x_3}) \cdots (1 - f_{x_9}) f_{x_{10}}$. Es decir,

$$\psi_3(t) = \begin{cases} 20t - 4 & 0.2 < t < 0.25 \\ 1 & 0.25 \leq t \leq 0.3 \\ -20t + 7 & 0.3 < t < 0.35 \\ 0 & \textit{de otra manera} \end{cases}$$

y por tanto

$$\psi_2(t) + \psi_3(t) = \begin{cases} 20t - 1 & 0.05 < t < 0.1 \\ 1 & 0.1 \leq t \leq 0.3 \\ -20t + 7 & 0.3 < t < 0.35 \\ 0 & \textit{de otra manera} \end{cases}$$

Del mismo modo, obtendríamos

$$\psi_2(t) + ... + \psi_{10}(t) = \begin{cases} 20t - 1 & 0.05 < t < 0.1 \\ 1 & 0.1 \leq t < 1 \\ 0 & \textit{de otra manera} \end{cases}$$

Finalmente, definamos $\psi_1(t) := 1 - (\psi_2(t) + ... + \psi_{10}(t))$, que resulta

$$\psi_1 = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 0.05 \\ -20t + 2 & 0.05 \leq t \leq 0.1 \\ 0 & \textit{de otra manera} \end{cases}$$

También es evidente que el soporte de cada ψ_i se encuentra en $N(t_i)$, $i = 1, 2, ..., 10$. Finalmente definimos

$$g := \psi_1 \widehat{f_0(0.05)} + \psi_2 \widehat{f_0(0.15)} + \ldots + \psi_{10} \widehat{f_0(0.95)}. \tag{5.5}$$

Fijamos $t_0 \in [0, 1[$. Entonces, como $\sum_{i=1}^{10} \psi_i(t_0) = 1$, concluimos

$$d_H([f_0(t_0)]^{0.5}, [(\psi_1 \widehat{f_0(0.05)} + ... + \psi_{10}\widehat{f_0(0.95)})(t_0)]^{0.5}) =$$

$$d_H\left(\left[\sum_{i=1}^{10}\psi_i(t_0)f_0(t_0)\right]^{0.5}, \left[(\psi_1\widehat{f_0(0.05)} + ... + \psi_{10}\widehat{f_0(0.95)})(t_0)\right]^{0.5}\right) \leq$$

$$\psi_1(t_0)d_H([f_0(t_0)]^{0.5}, [f_0(0.05)]^{0.5}) + ... + \psi_{10}(t_0)d_H([f_0(t_0)]^{0.5}, [f_0(0.95)]^{0.5}) =$$

$$= \psi_1(t_0)|0.5^{t_0} - 0.5^{0.05}| + ... + \psi_{10}(t_0)|0.5^{t_0} - 0.5^{0.95}|.$$

Puesto que t_0 pertenece al soporte de, como máximo, dos funciones ψ_i y sabemos que tales soportes se encuentran contenidas en sus respectivas $N(t_i)$, deducimos que

$$d_H([f_0(t_0)]^{0.5}, [(\psi_1\widehat{f_0(0.05)} + ... + \psi_{10}\widehat{f_0(0.95)})(t_0)]^{0.5}) \leq 0.1.$$

Como consecuencia, ya que t_0 es arbitrario, resulta $g \in V(f_0, \lambda_1, \epsilon)$ con $\epsilon = 0.1$ y $\lambda_1 = 0.5$.

Capítulo 6

Aproximación de funciones difusas continuas mediante redes neuronales

En el contexto difuso, la mayoría de los resultados relacionados con la aproximación de funciones se basan en las capacidades de aproximación de las redes neuronales difusas (véase, por ejemplo, [52], [37], [38] y [25]) que resultan ser diferentes de las capacidades aproximativas de las redes neuronales clásicas como se ha comentado en la introducción de esta memoria. Se sabe que las redes neuronales son particularmente útiles en muchos campos, como las finanzas, la medicina, la ingeniería mecánica, la geología, la informática, etc. En términos generales, las redes neuronales se implementan en todas las situaciones donde surgen problemas de previsión, clasificación y control. Además, dado que la naturaleza y el cerebro humano son inherentemente difusos en sus características, es natural pensar que las redes neuronales difusas tienen la capacidad de procesar información difusa gracias a sus habilidades de aprendizaje (que están estrechamente relacionadas con sus capacidades de aproximación). En relación con esto, las llamadas funciones *radiales* también son una herramienta importante en la teoría de la aproximación, aunque todavía no se han utilizado en un contexto difuso. De hecho, el término "función radial" apareció por primera vez en el artículo [53] que trata un problema de aproximación en la tomografía computarizada. También surgen naturalmente en varios campos, como, por ejemplo, en la resolución aproximada de ecuaciones en derivadas parciales ([50]).

6.1. Aproximación mediante redes neuronales de funciones difusas continuas con la topología de la convergencia uniforme

Como consecuencia de los resultados del capítulo anterior, demostramos que las redes neuronales regulares de cuatro capas que toman valores difusos pueden aproximar cualquier función difusa continua definida en un subespacio compacto de $\mathbb{R}^n$.

Primero recordemos (véase, por ejemplo, [37], [52]) que las redes neuronales regulares de cuatro capas que toman valores difusos (RFNNs de cuatro capas) están definidas por

$$H(x) = \sum_{i=1}^{m} u_i \left(\sum_{j=1}^{s} w_{ij} \cdot \sigma(x \cdot a_j + \theta_j) \right)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, donde $u_i \in \mathbb{E}^1$, los coeficientes w_{ij}, los pesos a_j y los umbrales θ_j son números reales y $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representa la función de activación en la capa oculta. Esto es, $H(x)$ es una función que asigna a cada valor real un número difuso. En [52], el autor demostró que, aunque las RFNNs de tres capas no pueden aproximar el conjunto de todas las funciones $C(\mathbb{R}, \mathbb{E}^1)$, las RFNNs de cuatro capas sí pueden aproximar. Para ello Liu, utilizó funciones de activación no constantes continuas y acotadas o sigmoidales para lograr dicha propiedad de aproximación de las RFNNs de cuatro capas. Recordemos que una función sigmoidal es una aplicación $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ tal que $\lim_{t\to+\infty} \sigma(t) = 1$ y $\lim_{t\to-\infty} \sigma(t) = 0$.

En esta sección utilizaremos RFNNs de cuatro capas donde tanto la variable x como los pesos a_j pertenecen a $\mathbb{R}^n$. Dada una función de activación σ, denotamos el conjunto de dichas RFNNs difusas de cuatro capas por $\mathcal{H}(\sigma)$.

Mostraremos, gracias a los resultados del capítulo anterior, que los elementos de $\mathcal{H}(\sigma)$ pueden aproximar cualquier función difusa continua definida en un subespacio compacto de $\mathbb{R}^n$ siempre que σ sea una función continua no polinomial.

TEOREMA 6.1.1 *Asumamos que $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua no polinomial y que K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Entonces, dado cualquier $f \in C(K, \mathbb{E}^1)$ y $\varepsilon > 0$, existe una red neuronal $H \in \mathcal{H}(\sigma)$ tal que $D(f, H) < \varepsilon$.*

Demostración.
Por el Corolario 5.1.10, existe una cantidad finita de funciones $\psi_i \in C(K, [0, 1])$ y $u_i \in \mathbb{E}^1$, $i = 1, ..., m$, tal que

$$D(f, \psi_1 \widehat{u_1} + ... + \psi_m \widehat{u_m}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, por el resultado principal de ([49, Theorem 1]), sabemos que para cada ψ_i, $i = 1, ..., m$, existe $w_{ij}, \theta_j \in \mathbb{R}$ y $a_j \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\left|\psi_i(x) - \sum_{j=1}^{s} w_{ij} \cdot \sigma(x \cdot a_j + \theta_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2m \cdot d_\infty(u_i, 0)},$$

para todo $x \in K$. Por lo tanto

$$D\left(\left(\sum_{j=1}^{s} w_{ij} \cdot \sigma(x \cdot a_j + \theta_j)\right) \widehat{u_i},\ \psi_i(x) \cdot \widehat{u_i}\right) =$$

$$= \sup_{x \in K} d_\infty\left(\left(\sum_{j=1}^{s} w_{ij} \cdot \sigma(x \cdot a_j + \theta_j)\right) u_i,\ \psi_i(x) \cdot u_i\right) =$$

$$= \sup_{x \in K}\left|\psi_i(x) - \left(\sum_{j=1}^{s} w_{ij} \cdot \sigma(x \cdot a_j + \theta_j)\right)\right| \sup_{\lambda \in [0,1]} \text{máx}\{\mid u_i^-(\lambda) \mid, \mid u_i^+(\lambda) \mid\} =$$

$$= \sup_{x \in K}\left|\psi_i(x) - \left(\sum_{j=1}^{s} w_{ij} \cdot \sigma(x \cdot a_j + \theta_j)\right)\right| d_\infty(u_i, 0) < \frac{\varepsilon}{2m},$$

que claramente da lugar a

$$D\left(f,\ \sum_{i=1}^{m} u_i \left(\sum_{j=1}^{s} w_{ij} \cdot \sigma((\cdot)a_j + \theta_j)\right)\right) < \varepsilon.$$

$\square$

6.2. Aproximación mediante redes neuronales difusas y sumas de funciones radiales difusas con la topología de la convergencia de nivel.

En primer lugar, demostraremos, apoyándonos en los resultados del capítulo anterior, que $\mathcal{H}(\sigma)$ es denso en $C(\mathbb{R}^n, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ dotado de la topología compacto-abierta siempre que la función de activación σ sea una función continua no polinomial o una sigmoidal acotada (no necesariamente continua) .

TEOREMA 6.2.1 *Asumamos que $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua no polinomial o una función sigmoidal acotada (no necesariamente continua). Entonces $\mathcal{H}(\sigma)$ es denso en $C_{\tau_{co}}(\mathbb{R}^n, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$.*

Demostración

Sea $f_0 \in C_{\tau_{co}}(\mathbb{R}^n, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ y tomemos un entorno de f_0,

$$V(f_0, K, \{\lambda_1, ..., \lambda_q\}, \epsilon).$$

Por el Teorema 5.2.2, existe una cantidad finita de funciones $\psi_i \in C(K, [0,1])$ y $u_i \in \mathbb{E}^1$, $i = 1, ..., m$, tales que

$$d_H([f_0(\mathbf{x})]^{\lambda_j}, [(\psi_1 \widehat{u_1} + ... + \psi_m \widehat{u_m})(\mathbf{x})]^{\lambda_j}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $\mathbf{x} \in K$ y para $j = 1, ..., q$.

Por otro lado, por [49, Theorem 1] y [42, III], sabemos que para cada ψ_i, $i = 1, ..., m$, existen $w_{il}, \theta_{il} \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{a_{il}} \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\left| \psi_i(\mathbf{x}) - \sum_{l=1}^{s_i} w_{il} \cdot \sigma(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a_{il}} + \theta_{il}) \right| < \frac{\varepsilon}{2m \cdot d_\infty(u_i, 0)},$$

para todo $\mathbf{x} \in K$. Por lo tanto

$$d_H \left(\left[\left(\sum_{l=1}^{s_i} w_{il} \cdot \sigma(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a_{il}} + \theta_{il}) \right) \widehat{u_i}(\mathbf{x}) \right]^{\lambda_j}, \ [\phi_i(\mathbf{x}) \cdot \widehat{u_i}(\mathbf{x})]^{\lambda_j} \right) =$$

$$= \left| \phi_i(\mathbf{x}) - \left(\sum_{l=1}^{s_i} w_{il} \cdot \sigma(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a_{il}} + \theta_{il}) \right) \right| d_H([u_i]^{\lambda_j}, 0) \leq$$

$$\leq \left| \phi_i(\mathbf{x}) - \left(\sum_{l=1}^{s_i} w_{il} \cdot \sigma(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a_{il}} + \theta_{il}) \right) \right| d_\infty(u_i, 0) < \frac{\varepsilon}{2m},$$

para todo $\mathbf{x} \in K$, $i = 1, ..., m$ y $j = 1, ..., q$. Como consecuencia,

$$d_H \left([f_0(\mathbf{x})]^{\lambda_j}, \left[\sum_{i=1}^{m} u_i \left(\sum_{l=1}^{s_i} w_{il} \cdot \sigma(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a_{il}} + \theta_{il}) \right) (\mathbf{x}) \right]^{\lambda_j} \right) < \varepsilon$$

para todo $\mathbf{x} \in K$ y para $j = 1, ..., q$.

$\square$

En la segunda parte de este capítulo, recordemos que las funciones radiales son funciones multivariantes de la forma $g(a_1x_1 + ... + a_nx_n)$ donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ es una dirección fija ([49]). Para un subconjunto A de $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, podemos definir $\mathcal{R}(A)$ como la siguiente envoltura lineal:

$$\mathcal{R}(A) = < \{g(a_1x_1 + ... + a_nx_n) : g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), (a_1, ..., a_n) \in A\} > .$$

Podemos adaptar estas funciones al contexto difuso de la siguiente manera: sea $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^1, A)$ el espacio formado por las sumas de las funciones radiales difusas de la forma

$$H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} u_i \left(\sum_{l=1}^{s_i} g_{il}(\mathbf{a_{il}} \cdot \mathbf{x}) \right)$$

para cada $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{a_{il}} = (a_{il}^1, ..., a_{il}^n) \in A$, donde $u_i \in \mathbb{E}^1$.

TEOREMA 6.2.2 $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^1, A)$ *es denso en* $C_{\tau_{co}}(\mathbb{R}^n, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ *si* $\mathcal{R}(A)$ *contiene todos los polinomios.*

Demostración.

Como en la demostración del Teorema 6.2.1, dado $f_0 \in C_{\tau_{co}}(\mathbb{R}^n, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ y un entorno de f_0, $V(f_0, K, \{\lambda_1, ..., \lambda_q\}, \epsilon)$, existe una cantidad finita de funciones $\psi_i \in C(K, [0,1])$ y $u_i \in \mathbb{E}^1$, $i = 1, ..., m$, tales que

$$d_H([f_0(\mathbf{x})]^{\lambda_j}, [(\psi_1 \widehat{u_1} + ... + \psi_m \widehat{u_m})(\mathbf{x})]^{\lambda_j}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $\mathbf{x} \in K$ y para $j = 1, ..., q$. Por [50], podemos encontrar, para cada ψ_i, $i = 1, ..., m$, $\mathbf{a_{il}} \in A$ y $g_{il} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tales que

$$\left| \psi_i(\mathbf{x}) - \sum_{l=1}^{s_i} g_{il}(\mathbf{a_{il}} \cdot \mathbf{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{2m \cdot d_\infty(u_i, 0)},$$

para todo $\mathbf{x} \in K$. Por tanto

$$d_H \left(\left[\left(\sum_{l=1}^{s_i} g_{il}(\mathbf{a_{il}} \cdot \mathbf{x}) \right) \widehat{u_i}(\mathbf{x}) \right]^{\lambda_j}, \ [\phi_i(\mathbf{x}) \cdot \widehat{u_i}(\mathbf{x})]^{\lambda_j} \right) =$$

$$= \left| \phi_i(\mathbf{x}) - \left(\sum_{l=1}^{s_i} g_{il}(\mathbf{a_{il}} \cdot \mathbf{x}) \right) \right| d_H([u_i]^{\lambda_j}, 0) \leq$$

$$\leq \left| \phi_i(\mathbf{x}) - \left(\sum_{l=1}^{s_i} g_{il}(\mathbf{a_{il}} \cdot \mathbf{x}) \right) \right| d_\infty(u_i, 0) < \frac{\varepsilon}{2m},$$

para todo $\mathbf{x} \in K$, $i = 1, ..., m$ and $j = 1, ..., q$. Como consecuencia,

$$d_H \left([f_0(\mathbf{x})]^{\lambda_j}, \left[\sum_{i=1}^{m} u_i \left(\sum_{l=1}^{s_i} g_{il}(\mathbf{a_{il}} \cdot \mathbf{x}) \right) (\mathbf{x}) \right]^{\lambda_j} \right) < \varepsilon$$

para todo $\mathbf{x} \in K$ y para $j = 1, ..., q$.

$\square$

OBSERVACIÓN 6.2.3 De acuerdo con [50], el teorema anterior puede reescribirse como sigue: $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}^1, A)$ es denso en $C_{\tau_{co}}(\mathbb{R}^n, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ si ningún polinomio homogéneo distinto de cero se anula en A.

Capítulo 7

Conclusiones y futuras líneas de investigación

En este último capítulo se resumen los resultados presentados en esta tesis y se describen algunas posibles líneas de investigación que se derivan de ellos.

El objeto principal de estudio de esta memoria ha sido el espacio de la funciones continuas $C(X, \mathbb{E}^1)$ definidas entre un espacio topológico X y el espacio de los números difusos $\mathbb{E}^1$ dotado este de dos topologías: la que induce la métrica supremo y la topología de la convergencia de nivel. Por su parte, en dicho espacio de funciones se han considerado las topologías τ_α inducidas por la convergencia uniforme sobre diversos recubrimientos α de X.

En la primera parte de esta memoria, hemos caracterizado la compleción del espacio $C_{\tau_\alpha}(X, (\mathbb{E}^1, d_\infty))$ basándonos en los α_f-espacios y en los subconjuntos acotados. A continuación, caracterizamos la metrizabilidad de

$C_{\tau_\alpha}(X, (\mathbb{E}^1, d_\infty))$ a partir de la hemi-α-compacidad de X. Para terminar esta parte, probamos varios teoremas tipo Ascoli para espacios de funciones $C_{\tau_\alpha}(X, (\mathbb{E}^1, d_\infty))$ y $C_{co}(X, (\mathbb{E}^1, \tau_\ell))$ ([26]).

A la vista de estos resultados, cabe preguntarse si podemos caracterizar la completitud y la metrizabilidad de $C_{\tau_\alpha}(X, (\mathbb{E}^1, \tau))$ de forma similar cuando asumimos que τ es la topología inducida por la métrica endográfica, la de Skorokhod o la topología de la convergencia de nivel. Además sería interesante estudiar si se pueden obtener resultados tipo Ascoli para dicho espacio de funciones si τ es la topología inducida por las dos métricas anteriores, o incluso si $\tau = \tau_\ell$ y $\tau_\alpha \neq \tau_{co}$. También, como en el caso escalar, podría analizarse la posibilidad de aplicar estos teoremas para probar la existencia y unicidad de problemas de valor inicial con ecuaciones diferenciales difusas.

En la segunda parte de esta memoria, hemos obtenido varios resultados de aproximación, tipo Stone-Weierstrass, en un contexto difuso. Concretamente, hemos probado la densidad de ciertos subespacios de $C(X, \mathbb{E}^1)$ para, en primer lugar, el caso X compacto de Hausdorff, $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ y la métrica D ([25]), y en segundo lugar, para el caso X localmente compacto de Hausdorff, $(\mathbb{E}^1, \tau_l)$ y la topología compacto-abierta ([27]). Apoyándonos en estos resultados, hemos demostrado que las redes neuronales con dos capas ocultas que toman valores difusos son aproximadores universales si consideramos funciones de activación no polinomiales. También hemos introducido en este contexto difuso el uso de funciones radiales como alternativa a las redes neuronales.

A partir de estos resultados, sería interesante saber si se pueden extender dichas propiedades aproximativas en $C(X, \mathbb{E}^1)$ cuando dotamos a $\mathbb{E}^1$ de las topologías inducidas por otras métricas, como la endográfica o la de Skorokhod. Por otra parte, estos resultados sobre aproximación de funciones difusas podrían ser útiles en varios campos como, por ejemplo, en Teoría de la Decisión o en Control Inteligente. En ambos campos, y en sus vertientes difusas, la herramienta fundamental son las denominadas funciones de utilidad difusas, las cuales no son siempre fáciles de describir o manejar. En consecuencia, la posibilidad de obtener una aproximación de las mismas podría facilitar su aplicación.

Bibliografía

[1] R.A. Alò and L.I. Sennett, *Extending Linear Space-Valued Functions*, Math. Ann. **191** (1971), 79–86.

[2] R. Arens, *A topology for spaces of transformations*, Ann. Math. **47** (1946) 480–495.

[3] A.V. Arkhangels'kii, *Function spaces in the topology of pointwise convergence and compact sets*, Russian Math. Surveys **39** (1984), 9–56.

[4] A.V. Arkhangels'kii, *When the Dieudonné completion of a topological group is a paracompact p-space*, Topology Proc. **25** (2000), 1–15.

[5] C. Arzelà, *Sull' integrabilita della equazioni differenziali ordinarie*, Mem. Accad. Bologna **5** (1895–1896) no. 5, 257–270.

[6] G. Ascoli, *Le curve limite di una varietà data di curve*, Mem. Accad. Lincei **18** (1883) no. 3, 521–586.

[7] B. Bede and S. Gal, *Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems **151** (2005), 581–599.

[8] J.L. Blasco and M. Sanchis, *On the product of two b_f-spaces*, Acta Math. Hungar. **62** (1993) no. 1-2, 111–118.

[9] H. Buchwalter, *Produit topologique, produit tensoriel et c-repletion*, Actes du Colloque d'Analyse Fonctionnelle de Bordeaux (Univ. Bordeaux, 1971), pp. 51–71. Bull. Soc. Math. France, Mem. No. 31–32, Soc. Math. France, Paris, 1972 (in French).

[10] J. Buckley and Y. Hayasi, *Can fuzzy neural nets approximate continuous fuzzy functions?* Fuzzy Sets and Systems **61** (1994), no. 1, 43–51.

[11] S.L. Chang and L.A. Zadeh, *On fuzzy mapping and control*, IEEE Trans. Systems Man Cybernet. **2** (1972), 30–34.

[12] W.W. Comfort and S. Negrepontis, *Continuous Pseudometrics*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **14** (Marcel Dekker, Inc., New York, 1975).

[13] W.W. Comfort and K.A. Ross, *Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups*, Pacific J. Math. **16** (1966), 483–496.

[14] P. Diamond and P. Kloeden, *Characterization of compact subsets of fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems **29** (1989) 341–348.

[15] P. Diamond and P. Kloeden, *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications*, World Scientific, Singapore, 1994.

[16] P. Diamond and P. Kloeden, *Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis.* Fundamentals of fuzzy sets, 583641, Handb. Fuzzy Sets Ser., **7**, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2000.

[17] D. Dubois and H. Prade, *Operations on fuzzy numbers*, International Journal of Systems Science, **9** (1978), 613–626.

[18] R. Engelking, *General topology.* Translated from the Polish by the author. Second edition. Sigma Series in Pure Mathematics, **6**. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[19] T. Fan and L. Fan, *On the completion of fuzzy number space with respect to endograph metric* , Fifth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery **1** (2008) 362–366.

[20] J-X. Fang and H. Huang, *Some properties of the level convergence topology on fuzzy number space* $\mathbb{E}^n$, Fuzzy Sets and Systems **140** (2003), 509–517.

[21] J-X. Fang and H. Huang, *On the level convergence of a sequence of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems **147** (2004), 417–435.

[22] J-X. Fang and Q-Y. Xue, *Some properties of the space of fuzzy-valued continuous functions on a compact set*, Fuzzy Sets and Systems **160** (2009), 1620–1631.

[23] T. Feuring and W. Lippe, *The fuzzy neural network approximation lemma*, Fuzzy Sets and Systems **102** (1999), no.2, 227–236.

[24] J.J. Font, A. Miralles and M. Sanchis, *On the Fuzzy Number Space with the Level Convergence Topology*, J. Funct. Spaces Appl., Volume 2012, Article ID 326417, 11 pages.

[25] J.J. Font, D. Sanchis and M. Sanchis, *A version of the Stone-Weierstrass theorem in fuzzy analysis*. J. Nonlinear Sci. Appl. **10** (2017), 4275–4283.

[26] J.J. Font, D. Sanchis and M. Sanchis, *Completeness, metrizability and compactness in spaces of fuzzy-number-valued functions*. Fuzzy Sets and Systems. **353** (2018), 124–136.

[27] J.J. Font, D. Sanchis and M. Sanchis, *Constructive approximation of level continuous fuzzy functions*. Aceptado para su publicacion en Journal of Intelligent and Fuzzy Systems.

[28] J.J. Font and M. Sanchis, *Sequentially compact subsets and monotone functions: An application to fuzzy theory*, Topology Appl. **192** (2015), 113–122.

[29] T.E. Gantner, *Extensions of uniformly continuous pseudometrics*, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1968), 147–157.

[30] B.M. Ghil, S.Y. Joo and Y.K. Kim, *A characterization of compact subset of fuzzy number space*, Fuzzy Sets and Systems **123** (2001), 191–195.

[31] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*. Reprint of the 1960 edition. Graduate Texts in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[32] R. Goetschel and W. Voxman, *Elementary fuzzy calculus*, Fuzzy Sets and Systems **18** (1986), 31–42.

[33] S. Hai, Z. Gong and H. Li, *Generalized differentiability for n-dimensional fuzzy-number-valued functions and fuzzy optimization*, Inf. Sci. **374** (2016), 151–163.

[34] H. Huang, *Characterizations of endograph metric and* Γ*-convergence on fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems **250** (2018), 55–84.

[35] H. Huang, C. Wu, *Approximation capabilities of multilayer fuzzy neural networks on the set of fuzzy-valued functions*, Information Sciences, **179** (2009), 2762–2773.

[36] H. Huang and C. Wu, *Approximation of level fuzzy-valued functions by multilayer regular fuzzy neural networks*, Math. Comp. Model. **49** (2009), 1311–1318.

[37] H. Huang and C. Wu, *Approximation of fuzzy functions by regular fuzzy neural networks*, Fuzzy Sets and Systems **177** (2011), 60–79.

[38] H. Huang and C. Wu, *Approximation of fuzzy-valued functions by regular fuzzy neural networks and the accuracy analysis*, Soft Comput., **18** (2014), 2525–2540.

[39] M. Hušek, *Products of quotients and of* k'*-spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae **12** (1971), 61–68.

[40] D.R. Jardon and M. Sanchis, *Pointwise convergence topology and function spaces in Fuzzy Analysis*, Iranian J. Fuzzy Syst. **15** (2) (2018), 1–21.

[41] R.I. Jewett, *A variation on the Stone-Weierstrass theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 690–693.

[42] L.K. Jones, *Constructive Approximations for Neural Networks by Sigmoidal Functions*, Proc. IEEE, **78** (1990), 1586–1589.

[43] S.Y. Joo and Y.K. Kim, *The Skorokhod topology on space of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems **111** (2000), 497–501.

[44] O. Kaleva, *Fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems **24** (1987), 301–317.

[45] O. Kaleva and S. Seikkla, *On fuzzy metric space*, Fuzzy Sets and Systems **12** (1984), 215–229.

[46] J. Kelley, *General topology*. Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.]. Graduate Texts in Mathematics, **27**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975.

[47] J.S. Kwon and H.T. Shim, *Remark on lacunary statistical convergence of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems **123** (2001), 85–88.

[48] B.S. Lee and S.J. Cho, *A fixed point theorem for contractive-type fuzzy mappings*, Fuzzy Sets and Systems **61** (1994) no. 3, 309–312.

[49] M. Leshno, V.Y. Lin, A. Pinkus and S. Schocken, *Multilayer feedforward networks with a nonpolynomial activation function can approximate any function*, Neural Networks **6** (1993), 861–867.

[50] V.Y. Lin and A. Pinkus, *Fundamentality of ridge functions*, J. Approx. Th., **99** (1999), 68–94.

[51] P. Liu *Analyses of regular fuzzy neural networks for approximation capabilities*, Fuzzy Sets Systems **114** (2000), 329–338.

[52] P. Liu, *Universal approximations of continuous fuzzy-valued functions by multi-layer regular fuzzy neural networks*, Fuzzy Sets and Systems **119** (2001), 313–320.

[53] B.F. Logan and L.A. Shepp *Optimal reconstruction of a function from its projections*, Duke Math. J., **42** (1975), 645–659.

[54] M. Matloka, *On fuzzy integral*, Proc. Polish Symp., Interval and Fuzzy Math., Poznan (1986) 163–170.

[55] J. M. Medina, M. A. Vila y O. Pons, *GEFRED. A Generalized Model of Fuzzy Relational Databases*, Information Sciences, **76**, 1-2, pp 87-109. (1994)

[56] K. Morita, *Topological completions and M-spaces*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A **10** (1970), 271–288.

[57] S. Nanda, *On integration of fuzzy mappings*, Fuzzy Sets and Systems **32** (1989), 95–101.

[58] N. Noble, *A note on z-closed projections*, Proc. Amer. Math. Soc. **23** 1969, 73–76.

[59] N. Noble, *Ascoli theorems and the exponential map*, Trans. Amer. Math. Soc. **143** (1969), 393–411.

[60] N. Noble, *The continuity of functions on Cartesian products*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 187–198.

[61] F. Nuray, *Lacunary statistical convergence of sequences of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems **99** (1998), 353–355.

[62] D.S. Okhezing, *Study of families of monotone continuous functions on Tychonoff spaces*, Journal of Mathematical Sciences, **144**, (2007) 4152–4183.

[63] J.Y. Park and J.U. Jeong, *Fixed point theorems for fuzzy mappings*, Fuzzy Sets and Systems **87** (1997) no. 1, 111–116.

[64] E. Popa, *Morphisms of H-cones*, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat **29** (1983), no 2, 53–62.

[65] E. Popa, *Morphisms of H-cones II*, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat **29** (1983), no 1, 3–12.

[66] J. B. Prolla, *On the Weierstrass-Stone Theorem*, Journal of Aproximation Theory **78** (1994), 299–313.

[67] R. Pupier, *Topological completion of a product*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **19** (1974), 925–933.

[68] M.L. Puri and D.A. Ralescu, *The concept of normality for fuzzy random variables*, Ann. Probab. **13** (1985), 1373–1379.

[69] M.L. Puri and D.A. Ralescu, *Differential for fuzzy functions*, J. Math. Anal. Appl. **91** (1893), 552–558.

[70] E.A. Reznichenko, *Extension of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups.* Topology Appl. **59** (1994), no. 3, 233–244.

[71] R. Rodríguez-López, *Monotone method for fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems **159** (2008), 2047–2076.

[72] H. Román-Flores and Y. Chalco-Cano, *Some chaotic properties of Zadeh's extensions*, Chaos, Solitons and Fractals, **35** (2008), 452–459.

[73] M. Sanchis, *Continuous functions on locally pseudocompact groups*, Topology Appl. **86** no. 1 (1998), 5–23.

[74] M. Sanchis, *Problems on bounded subsets*, Questions Answers Gen. Topology **28** (2010) no. 1, 65–79.

[75] M. Sanchis, *Bounded Subsets of Tychonoff spaces: A Survey of Results and Problems* , In: M. Hruák, Á. Tamariz-Mascarúa and M. Tkachenko (eds.) Pseudocompact Topological Spaces: A survey of Classic and New Results with Open Problems, pp. 107 – 150. Developments in Mathematics, Vol. 55, Springer (2018).

[76] H.L. Shapiro, *Extensions of pseudometrics*, Canad. J. Math. **18** (1966), 981–998.

[77] C. Wu and Z. Gong, *On Henstock integral of fuzzy-number-valued functions (I)*, Fuzzy Sets and Systems **120** (2001), 523–532.

[78] C.-x Wu and G.-x Wang, *Convergence of sequence of fuzzy numbers and fixed point theorems for increasing fuzzy mappings and applications*, Fuzzy Sets and Systems **130** (2002), 383–390.

[79] C.X. Wu and C. Wu, *The supremum and infimum of the set of fuzzy numbers and its application*, J. Math. Anal. Appl. **210** (1997) no. 2, 499–511.

[80] C.X. Wu and C. Wu, *Some note on the supremum and infimum of the set of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems **103** (1999), 183–187.

[81] H. Ying, *Fuzzy Control and modeling: Analytical foundations and applications*, IEEE Press Series on Biological Engineering, 2000.

[82] G.Q. Zhang, *The convergence for a sequence of fuzzy integrals of fuzzy number-valued functions on the fuzzy set*, Fuzzy Sets and Systems **59** (1993) no. 1, 43–57.

Índice de figuras