UNIVERSITAT DE BARCELONA

Desintegración β doble

Alfred Molina Compte

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

FACULTAD DE FISICA

DESINTEGRACION BETA DOBLE

MEMORIA PRESENTADA POR

ALFREDO MOLINA COMPTE

PARA OPTAR AL GRADO DE

DOCTOR EN FISICA.

PEDRO PASCUAL DE SANS, Catedrático de Mecánica Teórica y Director del Departamento de Física Teórica de la Facultad de Física de la Universidad de Barcelona.

CERTIFICO: Que la presente memoria "Desintegración Beta Doble" ha sido realizada bajo mi dirección en el Departamento de Física Teórica de la Universidad de Barcelona por D. Alfredo Molina Compte y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Física.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presenta y apadrina ante la Facultad de Física de dicha Universidad la referida Tesis, firmando la presente en Barcelona, a veintisiete de Octubre de 1975

EL CATEDRATICO

Deseo en primer lugar dar las gracias al Prof. P.Pascual, bajo cuya dirección ha sido realizado este trabajo, por su ayuda y estímulo constante.

Las charlas y discusiones mantenidas con los demás miembros del Departamento sobre el tema tratado en este trabajo, y en especial a F.Benavent y J.M.Pons.

Quiero tambien agradecer al Centro de Calculo de la Universidad Politécnica de Barcelona haberme facilitado el uso de su ordenador.

Asi mismo he de citar la ayuda económica del Ministerio de Educación y Ciencia a traves de sus Becas de Investigación, y al G.I.F.T.

Conste por último mi gratitud a la Srta. Consuelo Marcos por su cuidadosa mecanografía.

INDICE

I. INTRODUCCION

En los procesos entre partículas elementales juegan un papel muy importante las leyes de conservación. Una ley de conservación, generalmente admitida, es la de los números leptónicos. Existen dos números cuánticos de esta clase, el muónico L_μ y el electrónico L_e. Para las partículas conocidas la asignación de estos números leptónicos es:

$L_e = +1$	e^-	ν_e
$L_e = -1$	e^+	$\bar{\nu}_e$
$L_e = 0$	Para el resto de partículas	
$L_\mu = +1$	μ^-	ν_μ
$L_\mu = -1$	μ^+	$\bar{\nu}_\mu$
$L_\mu = 0$	Para el resto de partículas	

La ley de conservación, usualmente aceptada, establece que para todas las reacciones entre partículas elementales la suma algebraica de L_e y la suma algebraica de L_μ se conservan por separado.

Otra ley de conservación, que aparece frecuentemente en la literatura, afirma que para todas las reacciones entre partículas se conservan $(-1)^{L_e}$ y $L_e + L_\mu$. Según esta ley son permitidas todas las reacciones que lo son por la anterior, así como otras, por ejemplo $\mu^+ \longrightarrow e^+ + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$

Si definimos r como

$$r = \frac{\Gamma(\mu^+ \longrightarrow e^+ + \bar{\nu}_e + \nu_\mu)}{\Gamma(\mu^+ \longrightarrow e^+ + \bar{\nu}_e + \nu_\mu) + \Gamma(\mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu)} \qquad (1.1)$$

la validez de la primera ley implica que $r = 0$ y la de la segunda que $r = 0.5$.

Recientemente se dispone de datos experimentales, basados en el estudio de la interacción de ν_e y $\bar{\nu}_e$, procedentes de la desintegración de $\mu^\pm$, con núcleos de acuerdo con los cuales $r < 0.25$ con un nivel de confianza del 90%, T. Eichten [EI 73]. Esto favorece la primera ley de conservación expuesta, y por tanto es la que consideramos valida en lo que sigue.

Algunas pruebas experimentales de la validez de esta ley son:

1) Ausencia de los modos de desintegración

$$\mu^\pm \longrightarrow e^\pm + \gamma \qquad \frac{\Gamma_{e\gamma}}{\Gamma_{e\nu\nu}} < 2.2 \; 10^{-8} \qquad (1.2)$$

$$\mu^\pm \longrightarrow e^\pm + e^+ + e^- \qquad \frac{\Gamma_{eee}}{\Gamma_{e\nu\nu}} < 6. \; 10^{-9} \qquad (1.3)$$

Un analisis exhaustivo de estos procesos se encuentra en el libro de R.E. Marshak [MA 69]

2) Ausencia de procesos $\nu_\mu + n \rightarrow p + e^-$ Danby [DA 62]

3) Ausencia de procesos $\bar{\nu}_e + {}^{37}Cl \rightarrow {}^{37}A + e^-$ R.Davis [DA 55]

4) El hecho de que la masa de los neutrinos se tome cero (los límites experimentales son $m_{\nu_e} < 60$ eV $m_{\nu_\mu} < 1.2$ MeV "Particle Data Group") a la vez que en el Lagrangiano fenomenológico débil aparezca el campo del neutrino en la forma $(1 + \gamma_5)\Psi_\nu$ permite asignar los números leptónicos como hemos hecho de forma que se conserven T.D. Lee [LE 65].
Por este motivo las medidas sobre la violación de la paridad nos daran información sobre la conservación del número leptónico.
De estas medidas se puede concluir que si en Lagrangiano débil el campo del neutrino apareciera en la forma $(1+\gamma_5)\Psi_\nu + \eta(1+\gamma_5)\Psi_\nu$ se tendría: $\eta \leq 0.1$ (Una compilación de datos junto con un análisis más detallado se encuentra en el libro de R.J.Blin-Stoyle [BL 73])

5) De los experimentos de desintegración beta doble.

Estos son los que van a ser objeto de estudio en esta tesis. En ellos un núcleo muy estable, (A,Z), se transforma en (A,Z+2) emitiendo dos electrones, o en (A,Z-2) emitiendo dos positrones, y se estudian los posibles procesos:

a) $(A,Z) \longrightarrow (A,Z \pm 2) + 2\,e^{\mp} + \left\{ \begin{matrix} 2\,\bar{\nu}_e \\ 2\,\nu_e \end{matrix} \right\}$

b) $(A,Z) \longrightarrow (A,Z \pm 2) + 2\,e^{\mp}$

implicando la existencia del segundo, que según veremos más adelante sería el más favorecido en ausencia de la ley de conservación de L_e, la violación de dicha ley.

Para ver cual de los dos procesos tiene lugar en la naturaleza se mide la vida media del núcleo inicial, o bien se estudia la distribución energética respecto a la suma de energías de los electrones.

Aunque se han realizado cálculos teóricos de la vida media y de la distribución energética en varias ocasiones H.Primakoff [PR 59], G.F. Dell'Antonio [DE 60] y E.Greuling [GR 60], los elementos de matriz nucleares, que aparecen en estos han sido siempre estimados de forma poco adecuada, lo cual puede introducir en los resultados finales errores del orden de un factor cien.

En este trabajo se evaluan cuidadosamente los elementos de matriz nucleares reduciendo muy considerablemente la imprecisión en los resultados finales. Por otra parte por primera vez se consideran posibles transiciones a estados excitados del núcleo final.

Debido a que la anchura aumenta considerablemente al crecer la diferencia de energías entre los estados nucleares inicial y final, se ha elegido el ^{48}Ca que tiene un salto energético de 5.28 MeV hasta el estado fundamental del ^{48}Ti.

En el capitulo 2 se estudian los procesos de desintegración beta doble sin neutrinos y con neutrinos para estados nucleares finales de spin-paridad 0^+, 1^+, 2^+ y 4^+. A continuación en el capitulo 3 se calculan los elementos de matriz nucleares usando para el ^{48}Ti las funciones de onda de McCullen et al. [MC 64]. En el capitulo 4 se dan las anchuras de los distintos procesos considerados así como la anchura diferencial en función de la suma de energías de los electrones finales para la desintegración beta doble con neutrinos. En el capitulo 5 se hace un pequeño resumen de técnicas y resultados experimentales.

2.- TEORIA DE LA DESINTEGRACION BETA DOBLE

I. Generalidades

La desintegración beta doble se describe usualmente como una desintegración débil en segundo orden [PR 59] [GR 60], aunque tambien se ha tratado como un proceso en primer orden [PO 68] utilizando una interacción parecida a la superdébil de Wolfenstein [WO 64].

En este trabajo se va a estudiar como un efecto en segundo orden en las interacciones débiles.

Si unicamente los procesos:

$$\left.\begin{array}{l} n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu} \\ p \longrightarrow n + e^+ + \nu \end{array}\right. \qquad a)$$

pudieran tener lugar dentro del núcleo el número leptónico se conservaría y la única desintegración beta doble permitida sería a traves de procesos tales como: $n + n \longrightarrow p + p + e^- + e^- + \bar{\nu} + \bar{\nu}$, pero si además fueran posible los procesos:

$$\left.\begin{array}{l} n \longrightarrow p + e^- + \nu \\ p \longrightarrow n + e^+ + \nu \end{array}\right. \qquad b)$$

que violan la mencionada ley de conservación podríamos tener una desintegración beta doble sin neutrinos a traves de procesos tales como: $n + n \longrightarrow p + p + e^- + e^-$.

Aun cuando el segundo tipo de procesos fuese poco importante frente a los primeros debido a la elección del Lagrangiano, conviene notar que pueden contribuir notablemente al valor de la anchura del proceso de desintegración beta doble pues el espacio fásico para los neutrinos en $(A,Z) \longrightarrow (A,Z+2) + e^- + e^-$ es mayor que el de $(A,Z) \longrightarrow (A,Z+2) + e^- + e^- + \bar{\nu} + \bar{\nu}$ en un factor aproximadamente 10^5 como veremos más adelante.

Resumiendo, la situación es la siguiente: si hay una pequeña parte del Lagrangiano que viola la conservación del número leptónico, debido al factor de amplificación del espacio fásico, será observable fácilmente al hacer una comprobación teórico-experimental de la vida media de los núcleos que presentan desintegración beta doble.

Evidentemente aun sería mejor el obtener experimentalmente $d\Gamma/d(E_1 + E_2)$ donde E_1 y E_2 son las energías de los electrones finales. Si se viola la conservación de L_e entonces esta distribución será una suma de distribuciones delta de Dirac centradas en las diferencias de energías entre el núcleo inicial y los estados finales posibles. En el supuesto que se conserve el número leptónico esperamos una distribución suave en torno a las semidiferencias de energías.

Aunque este experimento es muy difícil porque un núcleo en el que se pueda observar una desintegración beta doble ha de tener una vida media muy larga comparada con otros procesos nucleares. Solo se pueden observar este tipo de procesos en núcleos muy estables del tipo par-par.

Si mejorando las técnicas experimentales presentes se llega a realizar este último tipo de experiencia entonces la interpretación de los resultados posibles es:

a) Si se observa la desintegración beta doble sin neutrinos entonces no se conserva el número leptónico y las posibles alternativas son:

1) $\nu \neq \bar{\nu}$ con los procesos $n \to p + e^- + \nu$, $n \to p + e^- + \bar{\nu}$ posibles

2) $\nu = \bar{\nu}$ que en el caso se observarse la desintegración beta doble parece la hipótesis más simple y favorecería el que el neutrino fuera una partícula de Majorana.

b) Si en la desintegración beta doble se emiten dos neutrinos entonces las posibles alternativas son:

1) $\nu \neq \bar{\nu}$ y se puede definir un número leptónico que se conserve

2) $\nu = \bar{\nu}$ es decir se viola la conservación del número leptónico,

pero hay unas cancelaciones que hacen que la desintegración beta doble sin neutrinos sea mucho menos probable; por ejemplo un acoplo $(1 + \gamma_5)$ y que el neutrino tenga masa cero solo permite desintegraciones con dos neutrinos.

El caso 1) resulta más estético desde el punto de vista teórico si se emiten dos neutrinos, por lo tanto favorecería dentro de este punto de vista el tratar el neutrino como una partícula de Dirac o de Weil si solo se usan dos componentes.

II. Teoría de la desintegración beta doble sin neutrinos.

El Lagrangiano usual de las interacciones débiles no da lugar a estos procesos por lo que hemos de modificarlo y para empezar consideraremos el Lagrangiano más general que sea invariante bajo las transformaciones de Lorentz, hermítico, que conserve la carga eléctrica y el número bariónico y para simplificar que sea local, lineal en los campos de Dirac y sin derivadas. Pero en contra de lo que se suele hacer no consideraremos que se conserve el número leptónico.

Con estas hipótesis el Lagrangiano débil más general se escribe:

$$\mathcal{L} = \sum_\alpha \Big(C_\alpha \bar{\Psi}_p O_\alpha \Psi_n \bar{\Psi}_e O_\alpha \Psi_\nu + C'_\alpha \bar{\Psi}_p O_\alpha \Psi_n \bar{\Psi}_e O_\alpha \gamma_5 \Psi_\nu + D_\alpha \bar{\Psi}_p O_\alpha \Psi_n \bar{\Psi}_e O_\alpha \Psi_{\bar{\nu}} + D'_\alpha \bar{\Psi}_p O_\alpha \Psi_n \bar{\Psi}_e O_\alpha \gamma_5 \Psi_{\bar{\nu}} \Big) \qquad (2.1)$$

Con $= \{S,P,V,A,T\}$ y $O_S = I$, $O_P = \gamma_5$, $O_V = \gamma^\mu$, $O_A = i\gamma^\mu\gamma_5$, $O_T = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^{\mu\nu}$

La representación de las γ se ha elegido de acuerdo con [GA 67] y

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right) \tag{2.2}$$

Si se conserva el número leptónico $D_\alpha = D'_\alpha = 0$.

Para los campos del electrón y antineutrino cogemos el desarrollo:

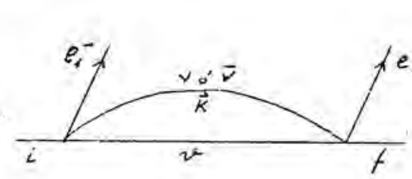
$$\psi_e = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{(2E)^{1/2}} \sum_{z=1,2} \left(u(\vec{k},z)\, e^{-i\vec{k}\vec{x}}\, b(\vec{k}) + v(\vec{k},z)\, e^{i\vec{k}\vec{x}}\, d^+(\vec{k}) \right) \tag{2.3}$$

$\psi_{\bar\nu} = C\bar\psi^T$ con $C = \gamma^0\gamma^2$ entonces

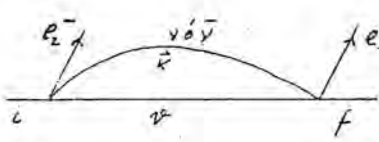
$$\psi_{\bar\nu} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{(2|\vec{k}|)^{1/2}} \sum_{z=1,2} \left(C\gamma^0 u^*(\vec{k},z)\, e^{i\vec{k}\vec{x}}\, b^+(\vec{k}) + C\gamma^0 v^*(\vec{k},z)\, e^{-i\vec{k}\vec{x}}\, d(\vec{k}) \right) \tag{2.4}$$

Usando teoría de perturbaciones hasta segundo orden tenemos para la anchura del proceso en que un núcleo va de un estado inicial dado (el fundamental) a todos los estados finales posibles:

$$\Gamma = \sum_f \Gamma_f = \sum_f \Big| \sum_\nu \int d^3k$$



$$- \sum_\nu \int d^3k$$



$$\Big|^2 \tag{2.5}$$

Nótese que hemos sumado sobre los estados finales posibles dado que esto es lo que se mide experimentalmente.

Haremos uso, para realizar este cálculo, de la aproximación de impulso y particularizaremos al caso de que conocemos el estado final para buscar las distintas anchuras parciales para luego sumar y obtener la anchura total. Con todo ello obtenemos para el élemento de la matriz de transición:

$$T = 2\pi\,\delta(E_i - E_f) \sum_{v,\vec{k}_\nu,\lambda_\nu} \left(\frac{\langle e_1^-, e_2^-, \Psi_f | \mathcal{L} | e_1^-, \nu\, \bar{\nu}\, \Psi_v \rangle \langle \Psi_v, e_1^-, \nu\, \bar{\nu} | \mathcal{L} | \Psi_i \rangle}{E_v - E_i + i\epsilon} - \right.$$

$$\left. - \frac{\langle e_1^-, e_2^-, \Psi_f | \mathcal{L} | e_2^-, \nu\, \bar{\nu}, \Psi_v \rangle \langle \Psi_v, e_2^-, \nu\, \bar{\nu} | \mathcal{L} | \Psi_i \rangle}{E_v - E_i + i\epsilon} \right) \qquad (2.6)$$

donde E_i, E_v y E_f son las energías de los estados inicial, intermedio y final respectivamente. Ψ_i, Ψ_v y Ψ_f son las funciones de onda nucleares, $\vec{k}_\nu$ es el momento del neutrino intermedio y λ_ν su helicidad.

Calculando la parte leptónica y sumando sobre las posibles polarizaciones de los neutrinos se obtiene:

$$T = \frac{2\pi\,\delta(E_i - E_f)}{(2\pi)^6\, 4\sqrt{E_1 E_2 |\vec{k}|^2}} \sum_{r,\vec{k}_r} \Big[\langle \Psi_f | \sum_{m=1}^{A} \tau_m^+ O_m^\alpha\, e^{-i(\vec{p}_2 - \vec{k})\vec{x}_m} | \Psi_r \rangle \cdot$$

$$\cdot \langle \Psi_r | \sum_{m=1}^{A} \tau_m^+ O_m^\beta\, e^{-i(\vec{p}_1 + \vec{k})\vec{x}_m} | \Psi_i \rangle \frac{(-\bar{u}_2 O_\alpha \not{k} C (I_{\alpha\beta} + J_{\alpha\beta}\gamma_5) O_\beta^T \bar{u}_1^T)}{E_r - E_i + i\epsilon} -$$

$$- \langle \Psi_f | \sum_{m=1}^{A} \tau_m^+ O_m^\alpha\, e^{-i(\vec{p}_1 - \vec{k})\vec{x}_m} | \Psi_r \rangle \langle \Psi_r | \sum_{n=1}^{A} \tau_n^+ O_n^\beta\, e^{-i(\vec{p}_2 + \vec{k})\vec{x}_n} | \Psi_i \rangle \cdot$$

$$\cdot \frac{(\bar{u}_1 O_\alpha \not{k} C (I_{\alpha\beta} + J_{\alpha\beta}\gamma_5) O_\beta^T \bar{u}_2^T)}{E_r - E_i + i\epsilon} \tag{2.7}$$

donde p_1, p_2 y k son los trimomentos de los electrones y del neutrino respectivamente. E_1, E_2 y $|\vec{k}|$ son las energías de los dos electrones y del neutrino intermedio respectivamente, x_m es la coordenada posición del nucleón m-esimo y τ^+ los operadores de isospín definidos como:

$$\begin{aligned} \tau^+ n &= p \\ \tau^+ p &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

y las constantes $I_{\alpha\beta}$ y $J_{\alpha\beta}$ son función unicamente de las constantes de acoplamiento y valen:

$$I_{\alpha\beta} = C_\alpha D_\beta - C'_\alpha D'_\beta + D_\alpha C_\beta - D'_\alpha C'_\beta \tag{2.9}$$

$$J_{\alpha\beta} = C_\alpha D'_\beta - C'_\alpha D_\beta + D_\alpha C'_\beta - D'_\alpha C_\beta \qquad (2.10)$$

Observemos que $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$ y $J_{\alpha\beta} = - J_{\beta\alpha}$

Busquemos T; despues de agrupar términos y cambiando de nombre algunos índices mudos se obtiene:

$$T = \frac{2\pi(\delta(E_i - E_f)}{(2\pi)^6 4\sqrt{E_1 E_2}|\vec{k}|^2} \sum_{v\,\vec{k}} \Big[\frac{\langle \Psi_f | \sum_{m=1}^{A} \tau_m^+ O_m^\alpha e^{-i(\vec{p}_2 - \vec{k})\vec{x}_m} | \Psi_v \rangle \langle \Psi_v | \sum_{m=1}^{A} \tau_m^+ O_m^\beta e^{-i(\vec{p}_1 + \vec{k})\vec{x}_m} | \Psi_i \rangle}{W_v + E_1 + |\vec{k}| - E_i + i\epsilon} - \frac{\langle \Psi_f | \sum_{m=1}^{A} \tau_m^+ O_m^\beta e^{-i(\vec{p}_1 - \vec{k})\vec{x}_m} | \Psi_v \rangle \langle \Psi_v | \sum_{m=1}^{A} \tau_m^+ O_m^\alpha e^{-i(\vec{p}_2 + \vec{k})\vec{x}_m} | \Psi_i \rangle}{W_v + E_2 + |\vec{k}| - E_i + i\epsilon} \Big] (-\bar{u}_2 O_\alpha \not{k} C (I_{\alpha\beta} + J_{\alpha\beta}\gamma_5) O_\beta^T \bar{u}_1^T) \qquad (2.11)$$

donde $W_v - E_i$ es la diferencia de energías entre el núcleo intermedio y el inicial.

Haciendo uso de la aproximación de cierre para los núcleos intermedios y llamando $\langle W_v - E_i \rangle$ al valor medio de $W_v - E_i$, se puede integrar respecto a los momentos de los neutrinos intermedios(apendice I) y asi obtenemos:

$$T = \frac{2\pi\,\delta(E_i - E_f)}{(2\pi)^6\, 2\sqrt{E_1 E_2}} \Big[(-\bar{u}_2 O_\alpha \gamma^0 C (I_{\alpha\beta} + J_{\alpha\beta}\gamma_5) O_\beta^T \bar{u}_1^T)\, \pi^2 (E_1 - E_2)$$

$$\langle \Psi_f | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ O_m^\alpha O_n^\beta e^{-i(\vec{p}_2 \vec{x}_m + \vec{p}_1 \vec{x}_n)} \frac{f(r,E)}{r} | \Psi_i \rangle - 2 i \pi^2 .$$

$$(-\bar{u}_2 O_\alpha \vec{\gamma}\, C (I_{\alpha\beta} + J_{\alpha\beta}\gamma_5) O_\beta^T \bar{u}_1^T) \langle \Psi_f | \sum_{mn} \tau_m^+ \tau_n^+ O_m^\alpha O_n^\beta e^{-i(\vec{p}_2 \vec{x}_m + \vec{p}_1 \vec{x}_n)}\, \vec{r}\, \frac{g(r,E)}{r^3} | \Psi_i \rangle \Big]$$

(2.12)

donde $f(r,E) = 1 - \frac{2}{\pi}(1-\gamma)(2\langle W_v - E_i\rangle + E_0) r + \frac{2}{\pi}\Big[(\langle W_v - E_i\rangle + E_1)^2$

$\ln((\langle W_v - E_i\rangle + E_1) r) - (\langle W_v - E_i\rangle + E_2)^2 \ln((\langle W_v - E_i\rangle + E_2) r)\Big] \frac{r}{E_1 - E_2} + \frac{r^2}{2}$

$\frac{(\langle W_v - E_i\rangle + E_2)^3 - (\langle W_v - E_i\rangle + E_1)^3}{E_1 - E_2}$ y (2.13)

$$g(r,E) = 1 - \frac{2\langle W_v - E_i\rangle + E_0}{\pi}\, r + \frac{(\langle W_v - E_i\rangle + E_1)^2 + (\langle W_v - E_i\rangle + E_2)^2}{4}\, r^2$$

(2.14)

Con $E_0 = E_i - W_f$ donde W_f es la energía del núcleo final

Como $|px| \ll 1$ desarrollaremos las exponenciales que aparecen en los elementos de matriz y mantendremos unicamente los dos primeros términos.

Al ser los núcleos inicial y final par-par tienen en su estado fundamental spin-paridad 0^+ y para el ^{48}Ti todas las funciones de onda que usamos para los estados excitados tambien tienen paridad positiva [MC 64-I]. Solo estudiaremos por lo tanto los elementos de matriz nucleares entre núcleos de paridades positivas.

Haremos además la aproximación no relativista dentro de los elementos de matriz nucleares por lo que los operadores O_α y O_β quedan reducidos de no ser nulos a la identidad, I, ó al operador de spin σ, que ambos tienen paridad positiva.

Con estas consideraciones se llega a:

$$T \doteq \frac{2\pi\delta(E_i - E_f)}{(2\pi)^4\, 2^3 \sqrt{E_1 E_2}} \Big[\langle J^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ O_m^\alpha O_n^\beta \frac{f(r,E)}{r} | 0^+ \rangle$$

$$(-\bar{u}_2 O_\alpha \gamma^0 C (I_{\alpha\beta} + J_{\alpha\beta}\gamma_5) O_\beta^T \bar{u}_1^T)(E_2 - E_1) - \langle J^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ O_m^\alpha O_n^\beta (\vec{p}\vec{r} + \vec{P}\vec{R}) \frac{g(r,E)}{r^3} \vec{r} | 0^+ \rangle$$

$$\cdot\, (-\bar{u}_2 O_\alpha \gamma C (I_{\alpha\beta} + J_{\alpha\beta}\gamma_5) O_\beta^T \bar{u}_1^T) \Big] \qquad (2.15)$$

donde $\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$, $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, $\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_n$ y $\vec{R} = \vec{r}_m + \vec{r}_n$

Usaremos la notación:

$$M_{\alpha\beta} = \langle J^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ O_n^\alpha O_n^\beta \, f(r,E)/r \, | 0^+ \rangle \tag{2.16}$$

$$N_{\alpha\beta} = \langle J^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ O_n^\alpha O_n^\beta \, (\vec{p}\,\vec{r} + \vec{P}\vec{R}) \, \vec{r} \, \frac{g(r,E)}{r^3} | 0^+ \rangle \tag{2.17}$$

Como hacemos un tratamiento no relativista para los nucleones tenemos dentro de los elementos de matriz nucleares:

$$O_V = \mathbb{1}, \; O_A = \sigma_\ell, \; O_p = 0, \; O_S = \mathbb{1}, \; O_T = \sigma_\ell \tag{2.18}$$

y en la parte débil

$$O_V = \gamma^0, \; O_A = -\gamma^\ell \gamma_5, \; O_p = 0; \; O_S = \mathbb{1}, \; O_T = \sigma_{ik} = \Sigma^\ell \tag{2.19}$$

donde

$$\sigma_{ik} = \frac{i}{2} \epsilon^{\ell ik} \gamma_i \gamma_k \tag{2.20}$$

teniendo esto en cuenta

$$M_{VV} = M_{SS} = M_{SV} = M_{VS} = \langle J^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{f(r,E)}{r} | 0^+ \rangle \tag{2.21}$$

$$N_{VV}= N_{SS}= N_{SV}= N_{VS}= \langle J^{+}| \sum_{mn} \tau_n^{-} \tau_m^{+} (\vec{r}\vec{p}+\vec{R}\vec{P}) \vec{r}\, \frac{g(r,E)}{r^{3}} |0^{+}\rangle \quad (2.22)$$

$$M_{AA}= M_{AT}= M_{TA}= M_{TT}= \langle J^{+}| \sum_{mn} \tau_n^{+} \tau_m^{-} \sigma_{m\ell}\, \sigma_{nk} \frac{f(r,E)}{r} |0^{+}\rangle \quad (2.23)$$

$$N_{AA}= N_{AT}= N_{TA}= N_{TT}= \langle J^{+}| \sum_{mn} \tau_n^{+} \tau_m^{+} \sigma_{m\ell}\, \sigma_{nk} (\vec{p}\vec{r}+\vec{P}\vec{R})\, \vec{r}\, \frac{g(r,E)}{r^{3}} |0^{+}\rangle \quad (2.24)$$

$$M_{AV}= M_{AS}= M_{TS}= M_{TV}= \langle J^{+}| \sum_{mn} \tau_n^{+} \tau_m^{+} \sigma_{m\ell} \frac{f(r,E)}{r} |0^{+}\rangle \quad (2.25)$$

$$N_{AV}= N_{AS}= N_{TS}= N_{TV}= \langle J^{+}| \sum_{mn} \tau_n^{+} \tau_m^{+} \sigma_{m\ell}\, \vec{r}\, (\vec{p}\vec{r}+\vec{P}\vec{R}) \frac{g(r,E)}{r^{3}} |0^{+}\rangle \quad (2.26)$$

$$M_{SA}= M_{VA}= M_{ST}= M_{VT}= \langle J^{+}| \sum_{mn} \tau_n^{+} \tau_m^{+} \sigma_{mk} \frac{f(r,E)}{r} |0^{+}\rangle \quad (2.27)$$

$$N_{SA}= N_{VA}= N_{ST}= N_{VT}= \langle J^{+}| \sum_{mn} \tau_n^{+} \tau_m^{+} \sigma_{mk} (\vec{p}\vec{r}+\vec{P}\vec{R})\, \vec{r}\, \frac{g(r,E)}{r^{3}} |0^{+}\rangle \quad (2.28)$$

Sustituyendo esto en el elemento de la matriz de transición además de usar para la parte débil los operadores(2.19) obtenemos:

$$T = \frac{2\pi\,\delta(E_i - E_f)}{(2\pi)^4\, 2^3 \sqrt{E_1 E_2}} \Big[M_{VV}\big(-\bar{u}_2 \gamma^0 C \bar{u}_1^T\big)(I_{SS} - I_{VV})(E_2 - E_1) - N_{VV}\big((I_{SS} + I_{VV})\cdot$$

$$\big(-\bar{u}_2 \vec{\gamma} C \bar{u}_1^T\big) - 2\bar{u}_2 \gamma^0 \vec{\gamma}(I_{VS} + J_{VS}\gamma_5) C \bar{u}_1^T\big) + M_{AA}(E_2 - E_1)\cdot\big(-\bar{u}_2 \gamma^e \gamma^0 \gamma^k C \bar{u}_1^T\big)\cdot$$

$$\cdot(I_{AA} - I_{TT}) - N_{AA}\big(-\bar{u}_2 \gamma_e^e \vec{\gamma}\gamma^k C \bar{u}_1^T (I_{AA} + I_{TT}) + 2\bar{u}_2 \gamma^e \vec{\gamma}\gamma^k \gamma^0 (I_{AT} + J_{AT}\gamma_5) C \bar{u}_1^T\big) -$$

$$- N_{AV}\big(4i\,\bar{u}_2 \Sigma^i \gamma^0 C \bar{u}_1^T (J_{TS} + J_{VA})\big) + M_{AV}(E_2 - E_1)\, 2\big(\bar{u}_2 \gamma^e \gamma_5 \gamma^0 (I_{SA} - I_{VT})$$

$$C \bar{u}_1^T + \bar{u}_2 \gamma^e \gamma^0 (J_{SA} + J_{VT}) C \bar{u}_1^T - \bar{u}_2 \gamma^e (J_{VA} + J_{ST}) C \bar{u}_1^T\big) \qquad (2.29)$$

II.a Desintegración beta doble sin neutrinos con un estado nuclear final de spin-paridad 0^+.

En los elementos de matriz nucleares hemos de quedarnos con la parte de momento angular cero cuando se descompongan los operadores que en ellos intervienen en suma de operadores tensoriales irreducibles.

El operador que aparece en (2.21) ya es un escalar, llamaremos A al elemento de matriz correspondiente.

$$M_{VV} = \langle 0^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{f(r\varepsilon)}{r} | 0^+ \rangle \equiv A \qquad (2.30)$$

En (2.22) hemos de construir el escalar correspondiente

$$N_{VV} = \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{r^k r^e}{r^3} g(r\,E) | 0^+ \rangle p^k + \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{R^k r^e}{r^3} g(r\,E) | 0^+ \rangle P^k \tag{2.31}$$

por tanto

$$N_{VV} = \frac{1}{3} B \delta_{ke} \, p^k + \frac{1}{3} B' \delta_{ke} P^k \tag{2.32}$$

Contrayendo con $\delta_{k\ell}$ se obtiene

$$B = \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{g(r,E)}{r} | 0^+ \rangle \tag{2.33}$$

$$B' = \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{r}_m^{\,2} - \vec{r}_n^{\,2}) \frac{g(r,E)}{r^3} | 0^+ \rangle = 0 \tag{2.34}$$

Del mismo modo para (2.23)

$$M_{AA} = \frac{1}{3} C \delta_{ke} \tag{2.35}$$

Contrayendo con $\delta_{k\ell}$

$$C = \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_m \cdot \vec{\sigma}_n) \frac{f(r,E)}{r} | 0^+ \rangle \tag{2.36}$$

Para (2.24)

$$N_{AA} = \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ \sigma_{me} \sigma_{nk} r^i r^j \frac{g(r,E)}{r^3} | 0^+ \rangle p^i + \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ \sigma_{me} \sigma_{nk} r^j R^i$$

$$\frac{g(r,E)}{r^3} | 0^+ \rangle P^i = (d_1 \delta_{ek} \delta_{ij} + d_2 \delta_{ei} \delta_{kj} + d_3 \delta_{ej} \delta_{ki}) p^i + (d_1' \delta_{ek} \delta_{ij} +$$

$$+ d_2' \delta_{ei} \delta_{kj} + d_3' \delta_{ej} \delta_{ki}) P^i \qquad (2.37)$$

Es inmediato ver que $d_2 = d_3$ y $d_1' = 0$; contrayendo como en casos anteriores se obtiene:

$$d_1 = \frac{1}{30} \left(4 \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_m^+ \tau_n^+ (\vec{\sigma}_m \cdot \vec{\sigma}_n) \frac{g(r,E)}{r} | 0^+ \rangle - 2 \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_m^+ \tau_n^+ (\vec{\sigma}_m \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_n \cdot \vec{r}) \frac{g(r,E)}{r^3} | 0^+ \rangle \right) \qquad (2.38)$$

$$d_2 = d_3 = \frac{1}{30} \left(3 \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_m \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_n \cdot \vec{r}) \frac{g(r,E)}{r^3} | 0^+ \rangle - \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_m \cdot \vec{\sigma}_n) \frac{g(r,E)}{r} | 0^+ \rangle \right) \qquad (2.39)$$

$$d_2' = - d_3' = \frac{1}{6} \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_m \cdot \vec{R})(\vec{\sigma}_n \cdot \vec{r}) \frac{g(r,E)}{r^3} | 0^+ \rangle \qquad (2.40)$$

En(2.25) y (2.27) se tiene

$$M_{AV} = M_{VA} = 0 \tag{2.41}$$

En (2.26)

$$N_{AV} = \langle 0^+ | \sum_{mm} \tau_n^+ \tau_m^+ \sigma_m^e r^k r^i \frac{g(r,E)}{r^3} | 0^+ \rangle p^i + \langle 0^+ | \sum_{mm} \tau_n^+ \tau_m^+ \sigma_m^e r^k R^i \frac{g(r,E)}{r^3} | 0^+ \rangle P^i =$$

$$= \frac{1}{6} E \epsilon^{ike} P^i + E' \epsilon^{ike} p^i \tag{2.42}$$

$$E = \langle 0^+ | \sum_{mm} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{R} \times \vec{r}) \cdot \vec{\sigma}_m \frac{g(r\,E)}{r^3} | 0^+ \rangle \tag{2.43}$$

evidentemente $\quad E' = 0 \qquad (2.44)$

Para(2.28) cambiando m por n se obtiene lo mismo que para (2.26) cambiado de signo

$$N_{VA} = - N_{AV} \tag{2.45}$$

Realizando la contracción de estos elementos de matriz nucleares con la parte débil como se indica en (2.29) y cambiando términos obtenemos:

$$T = \frac{2\pi \delta (E_i - E_f)}{(2\pi)^4 \; 2^3 \sqrt{E_1 E_2}} \Big[- \bar{u}_2 \gamma^0 C \bar{u}_1^T (E_2 - E_1)(I_{SS} - I_{VV}) A + \bar{u}_2 \vec{\gamma} C \bar{u}_1^T \cdot \vec{p} (I_{SS} + I_{VV}) \frac{B}{3} +$$

$$+ \bar{u}_2 \gamma^0 \vec{\gamma} C \bar{u}_1^T \vec{p} \, I_{VS} \, \frac{2}{3} B + \bar{u}_2 \gamma^0 C \bar{u}_1^T (E_2 - E_1)(I_{TT} - I_{AA}) C + \frac{2}{3} B \, J_{VS}.$$

$$\cdot\, \bar{u}_2 \gamma^0 \vec{\gamma} \gamma_5 C \bar{u}_1^T \vec{p} + \bar{u}_2 \gamma^0 \vec{\gamma} \gamma_5 C \bar{u}_1^T \cdot \vec{p}\, J_{AT}\, \frac{2}{3} D + \bar{u}_2 \vec{\gamma} C \bar{u}_1^T \cdot \vec{p}\, (I_{AA} + I_{TT}) \frac{D}{3} +$$

$$+ \bar{u}_2 \gamma^0 \vec{\gamma} \gamma_5 C \bar{u}_1^T \cdot \vec{p}\, I_{AT}\, \frac{2}{3} D - i \bar{u}_2 \vec{\Sigma} \gamma^0 C \bar{u}_1^T \cdot \vec{P} (J_{TS} + J_{VA}) \frac{2}{3} E \Big]$$

(2.46)

Donde se ha llamado D a la siguiente combinación de elementos de matriz nucleares:

$$D = \langle 0^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_m) \frac{g(r,E)}{r} | 0^+ \rangle - 2 \langle 0^+ | \sum_{nm} \tau_m^+ \tau_n^+ (\vec{\sigma}_m \cdot \vec{r}) (\vec{\sigma}_n \cdot \vec{r}) \frac{g(r,E)}{r^3} | 0^+ \rangle$$

(2.47)

Calculando ahora la suma sobre polarizaciones del producto T T $^+$ (apendice II) se obtiene

$$T T^+ = \frac{2\pi\, \delta(E_i - E_f)}{(2\pi)^8\, 4 E_1 E_2} \Big[|A|^2 \Big| \frac{I_{SS} - I_{VV}}{2} \Big|^2 f_4 + |B|^2 \Big(\Big| \frac{I_{SS} + I_{VV}}{2} \Big|^2 f_1 +$$

$$+ |I_{VS}|^2 f_2 + |J_{VS}|^2 f_3 + \frac{2}{3} f_5\, Re \Big(\frac{I_{SS} + I_{VV}}{2} \Big) I_{SV}^* \Big) + \frac{2}{3} Re\, AB^* \Big(f_6$$

$$\Big(\frac{I_{SS} - I_{VV}}{2} \Big) \Big(\frac{I_{SS} + I_{VV}}{2} \Big)^* + \Big(\frac{I_{SS} - I_{VV}}{2} \Big) I_{SV}^* f_7 + |C|^2 \Big| \frac{I_{AA} - I_{TT}}{2} \Big|^2 f_4 +$$

$$|D|^2\left\{\left|\frac{I_{AA}+I_{TT}}{2}\right|^2 f_1 + |I_{AT}|^2 f_2 + |J_{AT}|^2 f_3 + \frac{2}{3} Re\left(\frac{I_{AA}+I_{TT}}{2}\right) I_{AT}^* f_5\right\} +$$

$$+\frac{2}{3} Re\, C D^* \left\{\left(\frac{I_{AA}-I_{TT}}{2}\right)\left(\frac{I_{AA}+I_{TT}}{2}\right)^* f_6 + \left(\frac{I_{AA}-I_{TT}}{2}\right) I_{AT}^* f_7\right\} + 2 Re\, AC^* f_4$$

$$\left(\frac{I_{SS}-I_{VV}}{2}\right)\left(\frac{I_{AA}-I_{TT}}{2}\right)^* + \frac{2}{3} Re\, CB^* \left\{\left(\frac{I_{AA}-I_{TT}}{2}\right)\left(\frac{I_{SS}+I_{VV}}{2}\right)^* f_6 + \left(\frac{I_{AA}-I_{TT}}{2}\right) I_{SV}^* f_7\right\} +$$

$$+\frac{2}{3} Re\, AD^* \left\{\left(\frac{I_{SS}-I_{VV}}{2}\right) I_{AT}^* f_7 + \left(\frac{I_{SS}-I_{VV}}{2}\right)\left(\frac{I_{AA}+I_{TT}}{2}\right)^* f_6\right\} + 2 Re\, BD^*$$

$$\left\{ I_{VS} I_{AT}^* f_2 + J_{VS} J_{AT}^* f_3 + \left(\frac{I_{SS}+I_{VV}}{2}\right)\left(\frac{I_{AA}+I_{TT}}{2}\right)^* f_1 + \frac{1}{3} f_5 \left(I_{AT}^*\right.\right.$$

$$\left.\left(\frac{I_{SS}+I_{VV}}{2}\right) + I_{SV}\left(\frac{I_{AA}+I_{TT}}{2}\right)^*\right\} + \left|J_{TS}+J_{VA}\right|^2 |E|^2 f_8 + \frac{2}{9} f_4$$

$$\left. Im\left[E^*(J_{TS}+J_{VA})^*(J_{VS}\, B + J_{AT}\, D)\right]\right] \qquad (2.48)$$

Donde las funciones f_i son:

$$f_1 = \frac{1}{9}\left\{(\vec{p}_1^{\,2}+\vec{p}_2^{\,2})(E_1E_2+m_0^2) - 2\vec{p}_1^{\,2}\vec{p}_2^{\,2} + \vec{p}_1\vec{p}_2(\vec{p}_1^{\,2}+\vec{p}_2^{\,2} - 2E_1E_2 - 2m^2)\right\}$$

(2.49)

$$f_2 = \frac{1}{9}\left\{ (\vec{p}_1^{\,2} + \vec{p}_2^{\,2})(E_1 E_2 + m^2) + 2\vec{p}_1^{\,2}\vec{p}_2^{\,2} - \vec{p}_1\vec{p}_2\left(p_1^2 + p_2^2 + 2E_1E_2 + 2m^2\right)\right\} \tag{2.50}$$

$$f_3 = \frac{1}{9}\left\{ (\vec{p}_1^{\,2} + \vec{p}_2^{\,2})(E_1 E_2 - m^2) + 2\vec{p}_1^{\,2}\vec{p}_2^{\,2} - \vec{p}_1\vec{p}_2\left(\vec{p}_1^{\,2} + \vec{p}_2^{\,2} + 2E_1E_2 - 2m^2\right)\right\} \tag{2.51}$$

$$f_4 = (E_1 - E_2)^2 (E_1 E_2 + \vec{p}_1\vec{p}_2 - m^2) \tag{2.52}$$

$$f_5 = \frac{1}{3}(E_1 + E_2)(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2 m \tag{2.53}$$

$$f_6 = (E_2 - E_1)(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\cdot(E_2\vec{p}_1 + E_1\vec{p}_2) \tag{2.54}$$

$$f_7 = m(E_2 - E_1)(\vec{p}_1^{\,2} - \vec{p}_2^{\,2}) \tag{2.55}$$

$$f_8 = \frac{1}{9}\left\{ (\vec{p}_1^{\,2} + \vec{p}_2^{\,2})(E_1 E_2 - m^2) + 2(\vec{p}_1^{\,2}\vec{p}_2^{\,2} + \vec{p}_1\vec{p}_2\left(\vec{p}_1^{\,2} + \vec{p}_2^{\,2} + 2E_1E_2 - 2m^2\right)\right\} \tag{2.56}$$

Una formula parecida a(2.48)se puede encontrar en [PR 59] y para poderlas comparar se han de tomar los elementos de matriz nucleares:

$$A = B = \langle 0^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{1}{r} | 0^+ \rangle \tag{2.57}$$

$$C = D = \langle 0^+ | \sum_{mn} \frac{\vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_m}{r} \tau_n^+ \tau_m^+ | 0^+ \rangle \tag{2.58}$$

$$E = 0 \tag{2.59}$$

y a pesar de ello no coinciden. Por otra parte si no hubieramos tenido en cuenta g y f y las hubieramos aproximado por 1 como hacen[GR 60] y [PR 59] entonces hubiéramos obtenido la misma expresión(2.48) pero con

$$A = B = \langle 0^+ | \sum_{mn} \frac{\tau_n^+ \tau_m^+}{r} | 0^+ \rangle \tag{2.60}$$

$$C = \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{(\vec{\sigma}_n \vec{\sigma}_m)}{r} | 0^+ \rangle \tag{2.61}$$

$$D = C - 2 \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{(\vec{\sigma}_n \vec{r})(\vec{\sigma}_m \vec{r})}{r^3} | 0^+ \rangle \tag{2.62}$$

$$E = \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_n^+ \frac{(\vec{R} \times \vec{r})}{r^3} \cdot \vec{\sigma}_m | 0^+ \rangle \tag{2.63}$$

Hasta aqui se ha hecho el cálculo con toda generalidad, sin tener en cuenta que los resultados que se obtengan a partir del Lagrangiano usado deben estar de acuerdo con los datos experimentales. A partir de ahora haremos una simplificación importante fijándonos en que un Lagrangiano que además de conservar el número leptónico este de acuerdo con los resultados experimentales es

$$\mathcal{L} = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_p \gamma_\mu (1+\lambda\gamma_5) \Psi_n \bar{\Psi}_e \gamma^\mu (1+\gamma_5) \Psi_\nu \tag{2.64}$$

si bien, de acuerdo con los datos experimentales, no puede descartarse el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = G \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \bar{\Psi}_p \gamma^\mu (1+\lambda\gamma_5) \Psi_n \bar{\Psi}_e \gamma_\mu (1+\delta\gamma_5)(\Psi_{\bar{\nu}} + \Psi_\nu) \quad (2.65)$$

siendo los límites experimentales para δ , si no tenemos en cuenta los experimentos de desintegración beta doble, $0.82 \leq \delta \leq 1.22$, [BL 73]

Notese que cuando $\delta = 1$ da lo mismo que en el Lagrangiano aparezca Ψ_ν que $\Psi_\nu + \Psi_{\bar{\nu}}$ ya que con un neutrino de masa cero el operador $(1+\gamma_5)$ proyecta el campo del antineutrino anulándolo.

Si tomamos el Lagrangiano (2.65) las constantes introducidas en (2.1) quedan: $C_\alpha = 0$ para α distinto de A,V y $D_\alpha = 0$ si $\alpha \neq A, V$

y las únicas distintas de cero son: C_V, C_A, C'_V, C'_A, D'_V, D'_A, D_V y D_A y verifican las relaciones

$$C_V = D_V \qquad C_A = D_A \qquad C'_V = D'_V \qquad C'_A = D'_A$$

$$C'_A = -\lambda C_V \qquad C'_V = \delta C_V \qquad C_A = -\lambda\delta C_V \qquad C_V = G \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \quad (2.66)$$

Lo que implica para las constantes $I_{\alpha\beta}$ y $J_{\alpha\beta}$

$$I_{VV} = 2G^2 \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \quad (2.67)$$

$$I_{AA} = 2G^2 \frac{\delta^2-1}{\delta^2+1} \lambda^2 = -\lambda^2 I_{VV} \quad (2.68)$$

$$J_{VA} = 2G^2 \frac{\delta^2 - 1}{1+\delta^2} \lambda = -\lambda I_{VV}$$

$$J_{AV} = -J_{VA} = \lambda I_{VV} \tag{2.69}$$

y el resto son nulas.

Con ello la expresión (2.48) queda simplificada notablemente

$$TT^* = \frac{2\pi\delta(E_i - E_f)}{(2\pi)^8 \, 4E_1E_2} \; G^4 \; \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \Big\{ |A|^2 f_4 + |B|^2 f_1 - \frac{2}{3} Re(AB^*) f_6 +$$

$$+ \lambda^4 |C|^2 f_4 + |D|^2 \lambda^4 f_1 + \frac{2}{3} \lambda^4 Re(CD^*) f_6 + 2\lambda^2 Re(AC^*) f_4 - \frac{2}{3} \lambda^2 f_6$$

$$Re(CB^*) + \frac{2}{3} \lambda^2 Re(AD^*) f_6 - 2\lambda^2 Re(BD^*) f_1 + 4\lambda^2 |E|^2 f_8 \Big\}$$

(2.70)

Hallemos la expresión que nos dará la anchura del proceso, para ello definimos Z :

$$TT^* \equiv \frac{\delta(E_i - E_f)}{(4\pi)^2 E_1 E_2} \; Z(E_1, E_2, \vec{p}_1 \vec{p}_2) \tag{2.71}$$

entonces

$$\Gamma = \int TT^* d^3p_1 \, d^3p_2 = \int dE_1 \sqrt{(E_1^2 - m^2)((E_0 - E_1)^2 - m^2)} \; Z(E_1, E_0 - E_1, 0)$$

(2.72)

Con lo que las funciones f_i quedan:

$$f_1 \to h_1 = \frac{1}{9}\left\{-4E_1^4 + 8E_1^3E_0 + E_1^2(-5E_0^2 + 8m^2) + E_1(-8E_0m^2 + E_0^3) + 3E_0^2m^2 - 4m^4\right\} \tag{2.73}$$

$$f_4 \to h_2 = -4E_1^4 + 8E_0E_1^3 + E_1^2(-4m^2 - 5E_0^2) + E_1(4E_0m^2 + E_0^3) - m^2E_0^2 \tag{2.74}$$

$$f_6 \to h_3 = 4E_1^4 - 8E_1^3E_0 + E_1^2(-4m^2 + 5E_0^2) + E_1(4E_0m^2 - E_0^3) - m^2E_0^2 \tag{2.75}$$

$$f_8 \to h_4 = \frac{1}{9}\left\{-E_1^2(E_0^2 + 4m^2) + E_1(E_0^3 + 4E_0m^2) - 3E_0^2m^2 + 4m^4\right\} \tag{2.76}$$

Asi pues la anchura, Γ, vendrá dada por

$$\Gamma = \int_{m_e}^{E_0 - m} dE_1 \sqrt{(E_1^2 - m^2)((E_0 - E_1)^2 - m^2)} \left\{|A|^2h_2 + |B|^2h_1 - \frac{2}{3}Re(AB^*)h_3 + \lambda^4|C|^2h_2 + \right.$$

$$+ \lambda^4|D|^2h_1 + \frac{2}{3}\lambda^4 Re(CD^*)h_3 + 2\lambda^2 Re(AC^*)h_2 - \frac{2}{3}\lambda^2 Re(CB)^*h_3 + \frac{2}{3}\lambda^2 Re(AD)^*h_3 -$$

$$\left. - 2\lambda^2 Re(BD^*)h_1 + 4\lambda^2|E|^2h_1\right\} \frac{1}{(2\Pi)^5} G^4 \left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2 \tag{2.77}$$

además A, B, C, D y E son tambien funciones de la energía E_1; A y C a traves de la dependencia que tiene la función f (2.13) y B,D y E a traves de la dependencia que tiene la función g (2.14).

Descompondremos los elementos de matriz nucleares A,B,C,D y E del siguiente modo:

$$A = A_1 + A_2 \wp_2 + A_3 \wp_3 \tag{2.78}$$

$$B = B_1 + B_2 \wp_1 \tag{2.79}$$

$$C = C_1 + C_2 \wp_2 + C_3 \wp_3 \tag{2.80}$$

$$D = D_1 + D_2 \wp_1 \tag{2.81}$$

$$E = E_1 + E_2 \wp_1 \tag{2.82}$$

donde la dependencia en la energía E_1 está en las funciones $\wp_1$, $\wp_2$ y $\wp_3$ (A I,9),(A I,10) y (A I,19)

Con ello (2.77) queda

$$\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^5} G^4 \left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2 \int_m^{E_0 - m} dE_1 \sqrt{(E_1^2 - m^2)((E_0 - E_1)^2 - m^2)} \Big\{ h_2 (|A_1|^2 + \lambda^4 |C_1|^2 + 2\lambda^2 Re\, A_1 C_1^*) +$$

$$+ h_2 \rho_2^2 (|A_2|^2 + \lambda^4 |C_2|^2 + 2\lambda^2 Re(A_2 C_2^*)) + h_2 \rho_3^2 (|A_3|^2 + \lambda^4 |C_3|^2 + 2\lambda^2 Re(A_3 C_3^*)) + 2 h_2 \rho_2 Re($$

$$(A_1 A_2^* + \lambda^4 C_1 C_2^* + \lambda^2 (A_1 C_2^* + A_2 C_1^*)) + 2 h_2 \rho_3 Re(A_1 A_3^* + \lambda^4 C_1 C_3^* + \lambda^2 (C_1^* A_3 + A_1 C_3^*)) +$$

$$+ 2 h_2 \rho_2 \rho_3 Re(A_2 A_3^* + \lambda^4 C_2 C_3^* + \lambda^2 (A_2 C_3^* + A_3 C_2^*)) + h_1 (|B_1|^2 + \lambda^4 |D_1|^2 - 2\lambda^2 Re\, B_1 D_1^*) + h_1 \rho_1^2$$

$$(|B_2|^2 + \lambda^4 |D_2|^2 - 2\lambda^2 Re\, B_2 D_2^*) + 2 h_1 \rho_1 Re(B_1 B_2^* + \lambda^4 D_1 D_2^* - \lambda^2 (B_1 D_2^* + B_2 D_1^*)) - \frac{2}{3} h_3$$

$$Re(A_1 B_1^* - \lambda^2 A_1 D_1^* + \lambda^2 C_1 B_1^* - \lambda^4 C_1 D_1^*) - \frac{2}{3} h_3 \rho_2 Re(A_2 B_1^* - \lambda^2 A_2 D_1^* + \lambda^2 C_2 B_1^* - \lambda^4 C_2 D_1^*) -$$

$$- \frac{2}{3} h_3 \rho_3 Re(A_3 B_1^* - \lambda^2 A_3 D_1^* + \lambda^2 C_3 B_1^* - \lambda^4 C_3 D_1^*) - \frac{2}{3} h_3 \rho_1 Re(A_1 B_2^* - \lambda^2 A_1 D_2^* + \lambda^2 C_1 B_2^* - \lambda^4 C_1 D_2^*) -$$

$$- \frac{2}{3} h_3 \rho_1 \rho_2 Re(A_2 B_2^* - \lambda^2 A_2 D_2^* + \lambda^2 C_2 B_2^* - \lambda^4 C_2 D_2^*) - \frac{2}{3} h_3 \rho_1 \rho_3 Re(A_3 B_2^* - \lambda^2 A_3 D_2^* +$$

$$+ \lambda^2 C_3 B_2^* - \lambda^4 C_3 D_2^*) + 4\lambda^2 h_4 (|E_1|^2 + \rho_1^2 |E_2|^2 + 2 Re\, E_1 E_2^* \rho_1) \Big\} \qquad (2.83)$$

Las integrales para la energía se realizan numericamente y para un valor de E_o = 5.283 MeV, que es la diferencia de energías entre los estados fundamentales de los núcleos ^{48}Ca y ^{48}Ti [N.D.S. 70] obtenemos para estas los valores dados en la Tabla I.

II.b Desintegración beta doble sin neutrinos con un estado nuclear final de spin distinto de cero.

Hemos de calcular la expresión (2.29) para el caso de un núcleo final con spin distinto de cero, concretamente estaremos interesados en los casos de spin-paridad $J^p = 1^+$, 2^+ y 4^+.

Para la parte débil del elemento de matriz de transición (2.29) usando las relaciones:

$$\gamma^e \gamma^k = -\delta_{ek} - i\epsilon_{eki} \Sigma^i \tag{2.84}$$

$$\gamma^e \gamma^i \gamma^k = -\delta_{ei} \gamma^k + \delta_{ke} \gamma^i - \delta_{ki} \gamma^e + i\epsilon_{eik} \gamma^0 \gamma_5 \tag{2.85}$$

se puede escribir del siguiente modo:

$$\bar{u}_2 \gamma^e \gamma^k \gamma^0 C \bar{u}_1^T = -\delta_{ek} W_0 + i\epsilon_{eki} W_5^i \tag{2.86}$$

$$-\bar{u}_2 \gamma^e \gamma^i \gamma^k C \bar{u}_1^T = \delta_{ei} W^k - \delta_{ke} W^i + \delta_{ki} W^e + i\epsilon_{eik} V_5 \tag{2.87}$$

$$\bar{u}_2 \Sigma^i \gamma^0 C \bar{u}_1^T = -W_5^i \tag{2.88}$$

Las definiciones de $W_0, \vec{W}, \vec{W}_5$ y V_5 estan dadas respectivamente en (A II,1), (A II,2), (A II,3) y (A II,4)

Con lo cual el elemento de la matriz de transición para spin distinto de cero queda:

$$T = \frac{2\pi\,\delta(E_i - E_f)}{(2\pi)^4\, 2^3 \sqrt{E_1 E_2}} \Big[N_{VV}\, \vec{W}\, I_{VV} + i(E_2 - E_1)\, M_{AA}\, \epsilon_{eki}\, W_5^i\, I_{AA} - N_{AA}\, I_{AA}$$

$$(\delta_{ei} W^k - \delta_{ke} W^i + \delta_{ki} W^e) + 4i\, N_{AV}\, \vec{W}_5\, J_{VA} - 2(E_2 - E_1)\, M_{AV}\, \vec{W}\, J_{VA} \Big]$$

(2.89)

<u>Estado final de spin paridad 1^+</u>

Cuando el estado final es de spin paridad 1^+ se obtiene para(2.89) , una vez eliminados los elementos de matriz nucleares que son antisimétricos respecto al intercambio de m por n, la siguiente expresión:

$$T = \frac{2\pi\,\delta(E_i - E_f)}{(2\pi)^4\, 2^3 \sqrt{E_1 E_2}} \Big[2 E_3^k W^k J_{AV} (E_2 - E_1) - 2 E_1^{ki} p^i W^k I_{AA} +$$

$$+ i\, I_{AA}\, V_5\, E_2^i P^i + 2 J_{AV} W_0\, p^i E_1^i - 2i\, J_{AV}\, W_5^k\, E_4^{ki} P^i \Big] \qquad (2.90)$$

donde se han definido

$$E_1^{kj} = \langle 1^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_m \vec{r})\, \sigma_n^k r^j \frac{g}{r^3} | 0^+ \rangle \tag{2.91}$$

$$E_2^{j} = \langle 1^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ ((\vec{\sigma}_n \times \vec{\sigma}_m) \cdot \vec{r}) R^j \frac{g}{r^3} | 0^+ \rangle \tag{2.92}$$

$$E_3^{k} = \langle 1^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ \sigma_m^k \frac{f}{r} | 0^+ \rangle \tag{2.93}$$

$$E_4^{kj} = \langle 1^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_m \times \vec{r})^k R^j \frac{g}{r^3} | 0^+ \rangle \tag{2.94}$$

$$E_5^{k} = \langle 1^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_m \vec{r})\, r^k \frac{g}{r^3} | 0^+ \rangle \tag{2.95}$$

Se ha de buscar la suma sobre las polarizaciones de los electrones y el cálculo de las trazas correspondientes se encuentra en el Apendice II Luego se ha de sumar sobre la proyección del momento angular del núcleo final e integrar sobre los momentos de los electrones

$$\Gamma = \sum_{\lambda M} \int d^3p_1\, d^3p_2\, T T^* \tag{2.96}$$

donde λ es la polarización del electrón y M la proyección del momento angular total del núcleo final, con todo ello se obtiene para la anchura la siguiente expresión

$$\Gamma = \frac{1}{12}\frac{1}{(2\pi)^5}\sum_M \int \delta(E_0-E_1-E_2)\, dE_1\, dE_2\, |\vec{p}_1||\vec{p}_2| \Big[12\, |J_{AV}|^2 (E_2-E_1)^2 E_3^j E_3^{j*}$$

$$(E_1E_2+m^2) + 2|I_{AA}|^2 \big((E_1E_2+m^2)(E_1^2+E_2^2-2m^2) + \frac{4}{3}(E_1^2-m^2)(E_2^2-m^2)\big) E_1^{ki}(E_1^{ki*}-E_1^{ik*}) +$$

$$+ 2|J_{AV}|^2\big((E_1E_2+m^2)(E_1^2+E_2^2-2m^2) + \frac{2}{3}(E_1^2-m^2)(E_2^2-m^2)\big) E_4^{ki}(E_4^{ki*}-E_4^{ik*}) +$$

$$+ |I_{AA}|^2 E_2^i E_2^{i*}\big((E_1E_2+m^2)(E_1^2+E_2^2-2m^2) + 2(E_1^2-m^2)(E_2^2-m^2)\big) + 4|J_{AV}|^2 E_5^i E_5^{i*}$$

$$\big((E_1E_2-m^2)(E_1^2+E_2^2-2m^2) - 2(E_1^2-m^2)(E_2^2-m^2)\big) - \epsilon_{ijk}\, 4\, |J_{AV}|^2 (E_2-E_1)\, 2\mathrm{Re}\, E_3^k E_4^{ji*}$$

$$(E_2(E_1^2-m^2) - E_1(E_2^2-m^2)) - \frac{4}{3}\epsilon_{ijk}(E_1^2-m^2)(E_2^2-m^2)\, 2\mathrm{Re}\, E_1^{kj}E_2^{i*} + 2|J_{AV}|^2$$

$$(E_2-E_1)(E_2(E_1^2-m^2) - E_1(E_2^2-m^2))\, 2\mathrm{Re}\, E_3^k E_5^{k*} - \frac{8}{3}|J_{AV}|^2 \epsilon_{ijk}(E_1^2-m^2)(E_2^2-m^2)$$

$$2\mathrm{Re}\, E_4^{kj}E_5^{i*}\Big] \qquad (2.97)$$

La integración para d E_2 se realiza con la delta de conservación de la energía y al igual que en el caso de spin-paridad 0^+ hay una dependencia explícita en la energía E_1 y dependencia implícita en E_1^{ki}, E_2^i, E_4^{ki} y E_5^i a traves de la función g y en E_3^i a traves de la función f ; escribamos pues

$$E_1 = E_1' + E_1'' \varphi_1 \tag{2.98}$$

$$E_2 = E_2' + E_2'' \varphi_1 \tag{2.99}$$

$$E_3 = E_3' + E_3'' \varphi_2 + E_3''' \varphi_3 \tag{2.100}$$

$$E_4 = E_4' + E_4'' \varphi_1 \tag{2.101}$$

$$E_5 = E_5' + E_5'' \varphi_1 \tag{2.102}$$

donde φ_1, φ_2 y φ_3 estan definidos en el Apendice I y llevan la dependencia energética.

En el capitulo 3 veremos que los únicos elementos de matriz nucleares distintos de cero son E_3 y E_5 con lo cual tenemos para la anchura:

$$\Gamma = 4\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2 \frac{\lambda^2}{3} \frac{G^4}{(2\pi)^5} \sum_M \int_m^{E_0-m} dE_1 \sqrt{(E_1^2-m^2)((E_0-E_1)^2-m^2)} \Big\{ h_5 E_3^j E_3^{j*} + h_6 E_5^i E_5^{i*} -$$

$$- h_6 \, \mathrm{Re}\left(E_3^k E_5^{k*}\right)\Big\} \tag{2.103}$$

donde

$$h_5 = 3(E_0 - 2E_1)^2 \left(E_1(E_0 - E_1) + m^2\right) \tag{2.104}$$

$$h_6 = \left(E_1(E_0 - E_1) - m^2\right)\left(E_1^2 + (E_0 - E_1)^2 - 2m^2\right) - 2\left(E_1^2 - m^2\right)\left((E_1 - E_0)^2 - m^2\right) \tag{2.105}$$

Se han de calcular ahora las integrales que aparecen en la anchura y dado que utilizamos las funciones de onda de McCullen et al. [MC 64-II] $E_0 = 1.45$ MeV. Los resultados pàra estas integrales vienen dados en la Tabla II.

Estado final de spin-paridad 2^+

Cuando el estado final es de spin-paridad 2^+ la expresión (2.89) quedará reducida a:

$$T = \frac{2\pi\,\delta(E_i - E_f)}{(2\pi)^4\, 2^3 \sqrt{E_1 E_2}} \left[I_{AA} \left(\frac{I_3^{kj}}{2} - I_2^{kj} \right) p_j A^k - i\, I_{AV} I_4^{kj} P^j B^k + \frac{1}{2} I_{VV} I_1^{kj} p^j A^k \right] \tag{2.106}$$

donde

$$I_1^{kj} = \langle 2^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ \, r^k r^j \frac{g}{r^3} | 0^+ \rangle \tag{2.107}$$

$$I_2^{kj} = \langle 2^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_m \cdot \vec{r})\, \sigma_n^k r^j \frac{g}{r^3} | 0^+ \rangle \tag{2.108}$$

$$I_3^{kj} = \langle 2^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_m)\, r^k r^j \frac{g}{r^3} | 0^+ \rangle \tag{2.109}$$

$$I_4^{kj} = \langle 2^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_m \times \vec{r})^k R^j \frac{g}{r^3} | 0^+ \rangle \tag{2.110}$$

Ahora al igual que en casos anteriores se ha de calcular

$$\Gamma = \sum_{\lambda M} \int d^3p_1\, d^3p_2\; T T^+ \tag{2.111}$$

$$\Gamma = \frac{1}{12}\frac{1}{(2\pi)^5}\sum_{\mu}\int dE_1\,|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\Big[\,|I_{AA}|^2\Big\{\big[(E_1E_2+m^2)(E_1^2+E_2^2-2m^2)+2(E_1^2-m^2)$$

$$(E_2^2-m^2)\big](I_3-2I_2)^{kj}(I_3-2I_2)^{kj*}-\frac{2}{3}(E_1^2-m^2)(E_2^2-m^2)(I_3-2I_2)^{kj}(I_3-2I_2)^{jk*}\Big\}+$$

$$+\,2\mathrm{Re}\,I_{AA}I_{VV}^{*}\Big\{(E_1E_2+m^2)(E_1^2+E_2^2-2m^2)+\frac{4}{3}(E_1^2-m^2)(E_2^2-m^2)\Big\}(I_3-2I_2)^{kj}I_1^{kj*}+$$

$$+\,|I_{VV}|^2\Big\{(E_1E_2+m^2)(E_1^2+E_2^2-2m^2)+\frac{4}{3}(E_1^2-m^2)(E_2^2-m^2)\Big\}I_1^{kj}I_1^{kj*}+4|J_{AV}|^2\cdot$$

$$\Big\{I_4^{kj}I_4^{kj*}\big[(E_1E_2-m^2)(E_1^2+E_2^2-2m^2)-2(E_1^2-m^2)(E_2^2-m^2)\big]+\frac{1}{3}I_4^{kj}I_4^{jk*}(E_1^2-m^2)$$

$$(E_2^2-m^2)\Big\}\Big]\,dE_2\,\delta(E_0-E_1-E_2) \qquad (2.112)$$

Se ha de tener en cuenta que los elementos de matriz nucleares al estar calculados entre J = 0 y J = 2 solo contribuirán en su parte simétrica y por tanto podemos hacer uso de que $I_i^{kj}=I_i^{jk}$ con lo cual tenemos:

$$\Gamma = \frac{1}{3}\frac{G^4}{(2\pi)^5}\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2\sum_m\int dE_1\sqrt{(E_1^2-m^2)((E_0-E_1)^2-m^2)}\Big[\lambda^4h_7\,(I_3-2I_2)^{kj}$$

$$(I_3-2I_2)^{kj*}-\lambda^2h_2\,(I_3-I_2)^{kj}I_1^{kj*}+h_1\,I_1^{kj}I_1^{kj*}+4\lambda^2h_8\,I_4^{kj}I_4^{kj*}\Big]$$

$$(2.113)$$

donde

$$h_7 = [E_1(E_0-E_1)+m^2][E_1^2+(E_0-E_1)^2-2m^2] + \frac{4}{3}[E_1^2-m^2][(E_0-E_1)^2-m^2] \qquad (2.114)$$

$$h_8 = [E_1(E_0-E_1)+m^2][E_1^2+(E_0-E_1)^2-2m^2] - 2[E_1^2-m^2][(E_0-E_1)^2-m^2] \qquad (2.115)$$

Para integrar(2.113) se ha de tener en cuenta la dependencia energética de la función g

$$I_i = I_i' + I_i'' \varphi_1 \qquad (2.116)$$

$$I_i I_j^* = I_i' I_j'^* + \varphi_1 (I_i' I_j''^* + I_i'' I_j'^*) + \varphi_1^2 I_i'' I_j''^* \qquad (2.117)$$

Con lo cual se pueden calcular las integrales para la energía teniendo en cuenta que los valores de E_o vienen dados en [MC 64-II] y para $J^P = 2^+$ tenemos $E_o = 3.26$ y $E_o = 1.31$ y para estos valores las integrales estan tabuladas en las Tablas III y IV respectivamente.

Estado final de spin-paridad 4^+

Como con las expresiones(2.21),(2.22),(2.23),(2.24),(2.25),(2.26),(2.27) y (2.28) no se puede construir un tensor irreducible de spin 4 en esta aproximación esta transición está prohibida.

TABLA I

$\langle W_v - E_i \rangle$ \ $\phi(E_1)$	h_1	$h_1 p_1$	$h_1 p_1^2$	h_2	$h_2 p_2$	$h_2 p_2^2$	$h_2 p_3$	$h_2 p_3^2$	$h_2 p_2 p_3$
5	69	0.005	$0.4\ 10^{-4}$	404	50	6	− 0.9	$2\ 10^{-3}$	− 0.1
10	69	0.14	$0.3\ 10^{-3}$	404	98	24	−2.5	$1.5\ 10^{-2}$	− 0.6
15	69	0.28	$0.1\ 10^{-2}$	404	152	58	−4.9	$5.7\ 10^{-2}$	−1.8

$\langle W_v - E_i \rangle$ \ $\phi(E_1)$	h_3	$h_3 p_1$	$h_3 p_2$	$h_3 p_3$	$h_3 p_1 p_2$	$h_3 p_1 p_3$	h_4	$h_4 p_1$	$h_4 p_1^2$
5	− 451	− 0.35	− 56.4	1	− 0.04	$0.8\ 10^{-3}$	351	0.3	$0.2\ 10^{-3}$
10	− 451	− 0.94	−111.6	4.6	− 0.2	$0.6\ 10^{-2}$	351	0.7	$0.15\ 10^{-2}$
15	− 451	− 1.8	−172.8	5.4	− 0.7	$0.2\ 10^{-1}$	351	1.4	$0.6\ 10^{-2}$

Valores de las integrales $\int_m^{\bar{E}-m} dE_1 \sqrt{(E_1^2-m^2)((E_0-E_1)^2-m^2)}\ \phi(E_1)$ para distintas funciones $\phi(E_1)$ y para distintos valores medios de la diferencia de energías entre núcleo intermedio e inicial.

TABLA II

$\phi(E_i)$ / $\langle W_v - E_i \rangle$	h_5	$h_5 p_2$	$h_5 p_2^2$	$h_5 p_3$	$h_5 p_3^2$	$h_5 p_2 p_3$	h_6	$h_6 p_1$	$h_6 p_1^2$	$h_6 p_2$	$h_6 p_3$	$h_6 p_1 p_2$	$h_6 p_1 p_3$
5	$9\ 10^{-3}$	$8\ 10^{-4}$	$7\ 10^{-5}$	$-1\ 10^{-5}$	$2\ 10^{-8}$	$-1\ 10^{-6}$	$3\ 10^{-3}$	$1\ 10^{-6}$	$6\ 10^{-10}$	$3\ 10^{-4}$	$-4\ 10^{-6}$	$1\ 10^{-7}$	$-2\ 10^{-9}$
10	$9\ 10^{-3}$	$2\ 10^{-3}$	$4\ 10^{-4}$	$-4\ 10^{-5}$	$2\ 10^{-7}$	$-8\ 10^{-6}$	$3\ 10^{-3}$	$5\ 10^{-6}$	$7\ 10^{-9}$	$6\ 10^{-4}$	$-1\ 10^{-5}$	$9\ 10^{-7}$	$-2\ 10^{-8}$
15	$9\ 10^{-3}$	$3\ 10^{-3}$	$1\ 10^{-3}$	$-9\ 10^{-5}$	$9\ 10^{-7}$	$-3\ 10^{-5}$	$3\ 10^{-3}$	$1\ 10^{-5}$	$3\ 10^{-8}$	$1\ 10^{-3}$	$-3\ 10^{-5}$	$3\ 10^{-6}$	$-1\ 10^{-7}$

Analogamente a la Tabla I

TABLA III

$\phi(E_i)$ / $\langle W_v - E_i \rangle$	h_7	$h_7 p_1$	$h_7 p_1^2$	h_8	$h_8 p_1$	$h_8 p_1^2$
5	79.2085	0.04498	$0.2556\ 10^{-5}$	16.9407	$0.9659\ 10^{-2}$	$0.5508\ 10^{-5}$
10	79.2085	0.1378	$0.2399\ 10^{-3}$	16.9407	$0.2952\ 10^{-1}$	$0.5144\ 10^{-4}$
15	79.2085	0.2815	$0.1001\ 10^{-2}$	16.9407	$0.6026\ 10^{-1}$	$0.2143\ 10^{-3}$

Analogamente a la Tabla I

TABLA IV

$\phi(E_i)$ / $(W_\nu - E_i)$	h_7	$h_7\,\phi_1$	$h_7\,\phi_1^2$	$h_7\,\phi$	$h_8\,\phi_1$	$h_8\,\phi_1^2$
5	$1\ 10^{-2}$	$4\ 10^{-6}$	$2\ 10^{-9}$	$8\ 10^{-4}$	$3\ 10^{-7}$	$1\ 10^{-10}$
10	$1\ 10^{-2}$	$2\ 10^{-5}$	$2\ 10^{-8}$	$8\ 10^{-4}$	$1\ 10^{-6}$	$2\ 10^{-9}$
15	$1\ 10^{-2}$	$3\ 10^{-5}$	$1\ 10^{-7}$	$8\ 10^{-4}$	$3\ 10^{-6}$	$8\ 10^{-9}$

Analogamente a la Tabla I

III. Teoria de la desintegración beta doble con neutrinos

Cuando la desintegración beta doble sin neutrinos está prohibida o bien muy deprimida es de esperar que se de la desintegración beta doble con neutrinos ya que es una transición permitida por el Lagrangiano que usualmente se acepta para las interacciones débiles

$$\mathcal{L} = \frac{G}{\sqrt{2}}\, \bar{\psi}_p \gamma^\mu (1+\lambda\gamma_5)\psi_n\, \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1+\gamma_5)\psi_\nu \qquad (2.118)$$

Un cálculo perturbativo análogo al del beta doble sin neutrinos junto con las siguientes observaciones:

a) Hacemos uso de todas las aproximaciones realizadas en el cálculo de la anchura para la desintegración beta doble sin neutrinos excepto evidentemente las realizadas al integrar para los momentos de los neutrinos intermedios.

b) Núcleo inicial y final tienen la misma paridad.

c) Hemos de sumar para las permutaciones de neutrinos y electrones finales.

nos permite escribir:

$$T = \frac{2\pi\delta(E_i-E_f)G^2}{(2\pi)^6\, 4\sqrt{E_1E_2|\vec{k}_1||\vec{k}_2|}} \Big\{ K\Big[A_2\, \bar{u}_2\gamma^0(1+\gamma_5)v_2\, \bar{u}_1\gamma^0(1+\gamma_5)v_1 + \lambda^2 C_2^{ki}\, \bar{u}_2\gamma^k(1+\gamma_5)v_2\, \bar{u}_1\gamma^i(1+\gamma_5)v_1\Big] + L\Big[-A_2\, \bar{u}_1\gamma^0(1+\gamma_5)v_2\, \bar{u}_2\gamma^0(1+\gamma_5)v_1 - \lambda^2 C_2^{ki}\, \bar{u}_1\gamma^k(1+\gamma_5)v_2\, \bar{u}_2\gamma^i(1+\gamma_5)v_1\Big]\Big\} \tag{2.119}$$

donde

$$C_2^{ki} = \langle \Psi_f | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ \sigma_n^k \sigma_m^i | \Psi_i \rangle \tag{2.120}$$

$$A_2 = \langle \Psi_f | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ | \Psi_i \rangle \tag{2.121}$$

$$K = \frac{1}{\langle W_\nu - E_i \rangle + E_1 + |\vec{k}_1|} + \frac{1}{\langle W_\nu - E_i \rangle + E_2 + |\vec{k}_2|} \tag{2.122}$$

$$L = \frac{1}{\langle W_\nu - E_i \rangle + E_1 + |\vec{k}_2|} + \frac{1}{\langle W_\nu - E_i \rangle + E_2 + |\vec{k}_1|} \tag{2.123}$$

$W_\nu - E_i$ es la diferencia entre las energias del núcleo intermedio e inicial, indicando $\langle W_\nu - E_i \rangle$ un valor medio para los distintos núcleos intermedios posibles.

III.a <u>Desintegración beta doble con neutrinos con un estado nuclear final de spin-paridad 0^+.</u>

En este caso dentro de los elementos de matriz nucleares quedará solo la parte correspondiente a spin cero despues de desarrollarlos en suma de operadores tensoriales irreducibles; es decir

$$C_2^{\kappa i} = \frac{1}{3} \langle 0^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_m) | 0^+ \rangle \delta^{\kappa i} \equiv \frac{1}{3} C_2 \delta^{\kappa i} \tag{2.124}$$

Busquemos ahora la anchura

$$\Gamma = \sum_{\lambda \lambda'} \int T T^+ d^3 p_1 \, d^3 p_2 \, d^3 k_1 \, d^3 k_2 \tag{2.125}$$

Primero realizaremos la suma sobre polarizaciones de los electrones y neutrinos donde omitiremos ya los términos en los que aparezcan los productos escalares $(\vec{p}_1 \vec{k}_1)$, $(\vec{p}_1 \vec{k}_2)$, $(\vec{p}_2 \vec{k}_1)$, $(\vec{p}_2 \vec{k}_2)$ y $(\vec{k}_1 \vec{k}_2)$ que no contribuiran cuando integremos sobre los ángulos de los neutrinos con lo cual se llega a:

$$\sum_{\lambda \lambda'} \int T T^+ d\Omega(\hat{k}_1) \, d\Omega(\hat{k}_2) = 2\pi \delta(E_i - E_f) \frac{4 G^4}{(2\pi)^{10}} \Bigg\{ |A_2|^2 (K^2 + L^2 - KL) \left(1 + \frac{\vec{p}_1 \vec{p}_2}{E_1 E_2}\right) +$$

$$+ \frac{\lambda^4}{3} |C_2|^2 \left[(K^2 + L^2) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\vec{p}_1 \vec{p}_2}{E_1 E_2}\right) + KL \left(1 - \frac{5}{3} \frac{\vec{p}_1 \vec{p}_2}{E_1 E_2}\right) \right] + \frac{\lambda^2}{3} 2 \mathrm{Re}\, A_2 C_2^*$$

$$\left[(K^2 + L^2) \frac{\vec{p}_1 \vec{p}_2}{E_1 E_2} - 3 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\vec{p}_1 \vec{p}_2}{E_1 E_2}\right) KL \right] \Bigg\} \tag{2.126}$$

Esta formula se puede comparar con la obtenida en [PR 59]; aunque dichos autores toman $\lambda = 1$ y además no les aparece uno de los términos.

Una vez realizada la integral sobre los ángulos de los electrones y la de la energía del neutrino obtenemos:

$$d^3\Gamma = \frac{16 G^4}{(2\pi)^7} K_1^2 (E - E_1 - E_2 - K_1)^2 \sqrt{E_1^2 - m^2} \sqrt{E_2^2 - m^2}\, E_1 E_2$$

$$\left[(K^2 + L^2 - KL) |A_2|^2 + \frac{\lambda^4}{9} (K^2 + L^2 + KL) |C_2|^2 - \lambda^2 KL\, 2 Re A_2 C_2^* \right] dK_1\, dE_1\, dE_2$$

(2.127)

Como veremos en el capitulo 3 el elemento de matriz nuclear A_2 vale cero por lo que solo calcularemos una de las integraciones triples que aparecen en (2.128)

$$I = \frac{1}{3} \frac{2^4}{(2\pi)^7} \int_{2m}^{E_0} d(E_1 + E_2) \int_0^{E_1 + E_2 - 1.022} d(E_1 - E_2) \int_0^{E_0 - E_1 - E_2} dK_1\, K_1^2 (E - E_1 - E_2 - K_1)^2 \cdot$$

$$\sqrt{E_1^2 - m^2} \sqrt{E_2^2 - m^2}\, E_1 E_2 (K^2 + L^2 + KL) \qquad (2.128)$$

y $dI/d(E_1+E_2)$ en función de $(E_1 + E_2)$. Los resultados de estas integraciones numéricas se dan en la Tabla V.

TABLA V

$dI/d(E_1+E_2)$ / E_1+E_2	$\langle W_\nu - E_i \rangle = 5$	$\langle W_\nu - E_i \rangle = 10$	$\langle W_\nu - E_i \rangle = 15$
1.0366	$3.87\ 10^{-9}$	$1.4\ 10^{-9}$	$7.11\ 10^{-10}$
1.0988	$9.63\ 10^{-8}$	$3.47\ 10^{-8}$	$1.77\ 10^{-8}$
1.2090	$6.15\ 10^{-7}$	$2.22\ 10^{-7}$	$1.13\ 10^{-7}$
1.3648	$2.26\ 10^{-6}$	$8.17\ 10^{-7}$	$4.18\ 10^{-7}$
1.5624	$6.03\ 10^{-6}$	$2.18\ 10^{-6}$	$1.11\ 10^{-6}$
1.7974	$1.26\ 10^{-5}$	$4.56\ 10^{-6}$	$2.33\ 10^{-6}$
2.0641	$2.15\ 10^{-5}$	$7.79\ 10^{-6}$	$3.99\ 10^{-6}$
2.3563	$3.05\ 10^{-5}$	$1.11\ 10^{-5}$	$5.66\ 10^{-6}$
2.6672	$3.62\ 10^{-5}$	$1.31\ 10^{-5}$	$6.72\ 10^{-6}$
2.9895	$3.60\ 10^{-5}$	$1.30\ 10^{-5}$	$6.67\ 10^{-6}$
3.3155	$2.97\ 10^{-5}$	$1.08\ 10^{-5}$	$5.51\ 10^{-6}$
3.6378	$2.02\ 10^{-5}$	$7.29\ 10^{-6}$	$3.73\ 10^{-6}$
3.9487	$1.1\ 10^{-5}$	$3.98\ 10^{-6}$	$2.04\ 10^{-6}$
4.2409	$4.68\ 10^{-6}$	$1.69\ 10^{-6}$	$8.65\ 10^{-7}$
4.5076	$1.48\ 10^{-6}$	$5.32\ 10^{-7}$	$2.72\ 10^{-7}$
4.7425	$3.18\ 10^{-7}$	$1.14\ 10^{-7}$	$5.85\ 10^{-8}$
4.9402	$4.05\ 10^{-8}$	$1.45\ 10^{-8}$	$7.43\ 10^{-9}$
5.0960	$2.3\ 10^{-9}$	$8.25\ 10^{-10}$	$4.22\ 10^{-10}$
5.2062	$3.01\ 10^{-11}$	$1.2\ 10^{-11}$	$5.42\ 10^{-12}$
5.2684	$7.83\ 10^{-15}$	$3.01\ 10^{-15}$	$1.2\ 10^{-15}$
I	$6.47\ 10^{-5}$	$2.34\ 10^{-5}$	$1.2\ 10^{-5}$

III.b Desintegración beta doble con neutrinos con un estado nuclear final de spin distinto de cero.

Vamos a considerar estados nucleares finales de spin-paridad $J^P = 1^+, 2^+$ y 4^+, que son los únicos que contribuyen [MC 64-I].

Ni los estados de spin-paridad 1^+, ni los de 4^+ contribuyen en esta aproximación ya que no podemos construir dentro de los elementos de matriz nucleares C_2^{ki} y A_L ningun tensor irreducible de spin 1 ó 4.

Calculemos por tanto el elemento de la matriz de transición para un estado nuclear final de spin-paridad 2^+, a partir de (2.119) obtenemos:

$$T = \frac{2\pi\delta(E_i - E_f)}{(2\pi)^6\, 4\sqrt{E_1 E_2 K_1 K_2}} \; \frac{G^2}{2} \lambda^2 C_2^{ki} \Big[\bar{u}_2 \gamma^k (1+\gamma_5) v_2 \, \bar{u}_1 \gamma^i (1+\gamma_5) v_1 \, K -$$

$$- \bar{u}_1 \gamma^k (1+\gamma_5) v_2 \, \bar{u}_2 \gamma^i (1+\gamma_5) v_1 \, L \Big] \qquad (2.129)$$

Calculemos ahora la anchura

$$\Gamma = \sum_{\lambda\lambda'} \int T T' \, d^3K_1 \, d^3K_2 \, d^3p_1 \, d^3p_2 \qquad (2.130)$$

Sumando sobre polarizaciones e integrando la parte angular se obtiene:

$$\Gamma = \frac{16\, G^4}{(2\pi)^7}\, \lambda^4\, C_2^{\kappa e}\, C_2^{\kappa e +} \int dE_1\, dE_2\, d|\vec{K}_1|\, \vec{K}_1^{\,2} (E - E_1 - E_2 - |\vec{K}_1|)^2$$

$$E_1 E_2 \sqrt{E_1^2 - m^2} \sqrt{E_2^2 - m^2}\, (K^2 + L^2 - 2KL) \qquad (2.131)$$

La integración numérica de:

$$I = \frac{16}{(2\pi)^7} \int d(E_1 + E_2)\, d(E_1 - E_2)\, dK_1\, \vec{K}_1^{\,2} (E - E_1 - E_2 - |\vec{K}_1|)^2 \sqrt{E_1^2 - m^2}$$

$$\sqrt{E_2^2 - m^2}\; E_1 E_2\, (K^2 + L^2 - 2KL) \qquad dI/d(E_1 + E_2)$$

(2.132)

viene dada en las Tablas VI y VII para los estados excitados de energía 2.0226 y 3.9699 respectivamente [MC 64-I]

TABLA VI

E_1+E_2 \ $dI/d(E_1+E_2)$	$\langle W_v - E_i \rangle = 5$	$\langle W_v - E_i \rangle = 10$	$\langle W_v - E_i \rangle = 15$
1.0297	$4.28\ 10^{-19}$	$1.41\ 10^{-20}$	$1.68\ 10^{-21}$
1.0623	$2.11\ 10^{-16}$	$7.05\ 10^{-18}$	$8.13\ 10^{-19}$
1.1202	$6.5\ 11^{-15}$	$2.17\ 10^{-16}$	$2.55\ 10^{-17}$
1.2020	$6.5\ 10^{-14}$	$2.17\ 10^{-15}$	$2.49\ 10^{-16}$
1.3059	$3.31\ 10^{-13}$	$1.08\ 10^{-14}$	$1.30\ 10^{-15}$
1.4293	$1.08\ 10^{-12}$	$3.63\ 10^{-14}$	$4.23\ 10^{-15}$
1.5693	$2.49\ 10^{-12}$	$8.13\ 10^{-14}$	$9.76\ 10^{-15}$
1.7228	$4.22\ 10^{-12}$	$1.41\ 10^{-13}$	$1.68\ 10^{-14}$
1.8861	$5.42\ 10^{-12}$	$1.84\ 10^{-13}$	$2.17\ 10^{-14}$
2.0554	$5.42\ 10^{-12}$	$1.84\ 10^{-13}$	$2.17\ 10^{-14}$
2.2266	$4.12\ 10^{-12}$	$1.41\ 10^{-13}$	$1.63\ 10^{-14}$
2.3959	$2.39\ 10^{-12}$	$8.13\ 10^{-14}$	$9.22\ 10^{-15}$
2.5592	$9.76\ 10^{-13}$	$3.36\ 10^{-14}$	$3.90\ 10^{-15}$
2.7127	$2.98\ 10^{-13}$	$9.76\ 10^{-15}$	$1.19\ 10^{-15}$
2.8527	$5.96\ 10^{-14}$	$1.95\ 10^{-15}$	$2.28\ 10^{-16}$
2.9761	$6.5\ 10^{-15}$	$2.28\ 10^{-16}$	$2.60\ 10^{-17}$
3.08	$3.74\ 10^{-16}$	$1.25\ 10^{-17}$	$1.41\ 10^{-18}$
3.1618	$6.5\ 10^{-18}$	$2.22\ 10^{-19}$	$2.60\ 10^{-20}$
3.2197	$1.52\ 10^{-20}$	$5.1\ 10^{-22}$	$5.96\ 10^{-23}$
3.2523	$1.52\ 10^{-25}$	$5.04\ 10^{-27}$	$5.96\ 10^{-28}$
I	$4.39\ 10^{-12}$	$1.46\ 10^{-13}$	$1.73\ 10^{-14}$

TABLA VII

E_1+E_2 \ $dI/d(E_1+E_2)$	$\langle W_\nu - E_i \rangle = 5$	$\langle W_\nu - E_i \rangle = 10$	$\langle W_\nu - E_i \rangle = 15$
1.023	$4.93\ 10^{-28}$	$1.14\ 10^{-29}$	$1.14\ 10^{-30}$
1.0272	$1.36\ 10^{-25}$	$3.04\ 10^{-27}$	$2.98\ 10^{-28}$
1.0346	$2.93\ 10^{-24}$	$6.5\ 10^{-26}$	$6.5\ 10^{-27}$
1.0452	$2.22\ 20^{-23}$	$5.04\ 10^{-25}$	$4.99\ 10^{-26}$
1.0585	$9.22\ 10^{-23}$	$2.06\ 10^{-24}$	$2.06\ 10^{-25}$
1.0744	$2.44\ 10^{-22}$	$5.42\ 10^{-24}$	$5.42\ 10^{-15}$
1.0924	$4.66\ 10^{-22}$	$1.03\ 10^{-25}$	$1.03\ 10^{-24}$
1.1122	$6.61\ 10^{-22}$	$1.46\ 10^{-23}$	$1.46\ 10^{-24}$
1.1332	$7.16\ 10^{-22}$	$1.63\ 10^{-23}$	$1.57\ 10^{-24}$
1.155	$6.02\ 10^{-22}$	$1.36\ 10^{-23}$	$1.36\ 10^{-24}$
1.177	$3.96\ 10^{-22}$	$8.67\ 10^{-24}$	$8.67\ 10^{-25}$
1.198	$2.01\ 10^{-22}$	$4.45\ 10^{-24}$	$4.45\ 10^{-25}$
1.2198	$7.6\ 10^{-23}$	$1.62\ 10^{-24}$	$1.68\ 10^{-25}$
1.2396	$2.01\ 10^{-23}$	$4.5\ 10^{-25}$	$4.5\ 10^{-26}$
1.2576	$3.63\ 10^{-24}$	$8.13\ 10^{-26}$	$8.13\ 10^{-27}$
1.2735	$3.85\ 10^{-25}$	$8.67\ 10^{-27}$	$8.67\ 10^{-28}$
1.2868	$2.01\ 10^{-26}$	$4.45\ 10^{-28}$	$4.45\ 10^{-29}$
1.2974	$3.42\ 10^{-28}$	$7.59\ 10^{-30}$	$7.59\ 10^{-31}$
1.3048	$7.59\ 10^{-31}$	$1.68\ 10^{-32}$	$1.68\ 10^{-33}$
1.309	$7.59\ 10^{-36}$	$1.68\ 10^{-37}$	$1.68\ 10^{-38}$
I	$7.05\ 10^{-23}$	$1.63\ 10^{-24}$	$1.57\ 10^{-25}$

3. CALCULO DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ NUCLEARES

I. Generalidades

Se han de determinar los elementos de matriz nucleares para la desintegración beta doble en la que el núcleo inicial es el ^{48}Ca y el núcleo final el ^{48}Ti. El ^{48}Ca es un núcleo muy estable de doble capa cerrada, de spin-paridad 0^+ e isospin 4. El ^{48}Ti es un núcleo con spin-paridad 0^+ e isospín 2 en su estado fundamental.

Vamos a utilizar para el titanio las funciones de onda de McCullen, Bayman y Zamick [MC 64-I] obtenidas determinando la interacción nucleón-nucleón en la capa $1f^{7/2}$ de los niveles experimentales del ^{42}Sc como si fueran debidos a la configuración $(1f^{7/2})^2$.

Estas funciones de onda para el ^{48}Ti son del tipo:

$$\Psi(^{48}Ti) = \sum_{J,J'} \beta(J,J') \left[\Psi(j^2,J)\, \Psi(j^{-2},J') \right]^I_M \tag{3.1}$$

donde $\beta(J,J')$ viene dado en las Tablas [MC 64-I] y

$$\left[\Psi(j^2,J)\, \Psi(j^{-2},J') \right]^I_M = \sum_{\lambda\lambda'} C(J,J',I\,;\lambda,\lambda',M)\, \Psi(j^2,J,\lambda)\, \Psi(j^{-2},J',\lambda') \tag{3.2}$$

$C(J,J',I\,;\lambda,\lambda',M)$ son los coeficientes usuales de Condon y Shortley [CO 35] por tanto el elemento de matriz núclear que hemos de cálcular se escribirá

$$E.M = \sum_{J,J'} \beta(J,J') \langle [\Psi(j^{:}J)\Psi(j^{:}J')]^{I}_{M} | \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1\ldots 8}} f^{ij}{}^{K}_{\mu} | \Psi(j^{?},0,0) \rangle \tag{3.3}$$

En esta notación $\Psi(j^{?},0,0)$ el primer cero indica senioridad(seniority) y el segundo momento angular. K es el momento angular y μ su proyección.

Las funciones Ψ viene definidas como

$$\Psi_{1\ldots n}(j^{n}; v, J, \lambda) \equiv \sum_{m_1,\ldots,m_n} C^{vJ\lambda}_{(m_1,\ldots,m_n)} \frac{1}{(n!)^{1/2}} \det(m_1,\ldots,m_n) \tag{3.4}$$

de manera que $m_1 > m_2 > \ldots. > m_n$

$$\Psi_{1\ldots 2j+1-n}(j^{-n}, v, J, \lambda) \equiv (-1)^{J(-j)} \sum_{m_{2j+2-n}\ldots m_{2j+1}} C^{vJ-\lambda}_{(m_{2j+2-n},\ldots,m_{2j+1})} \frac{1}{((2j+1-n)!)^{1/2}} \det(m_1,\ldots m_{2j+1-n}) \tag{3.5}$$

donde $m_{2j+2-n} + m_{2j+1-n} + \ldots + m_{2j+1} = -\lambda$ y $m_1 > m_2 > \ldots. > m_{2j+1-n}$ es el conjunto complementario del $m_{2j+2-n}, \ldots., m_{2j+1}$.

El $(-1)^J$ se utiliza para n par y $(-1)^{J-j}$ para n impar.

De la definición se desprende que

$$\Psi(j^{-n}, v, J, \lambda) = \rho(v, J, \lambda)\, \Psi(j^{2j+1-n}, v, J, \lambda) \tag{3.6}$$

con $|\rho(v,J,\lambda)| = 1$

Veamos cuanto valen los coeficientes ρ ; para el caso en que estamos interesados n = 2 y por tanto tenemos:

$$\Psi_{1\ldots 8}\left(\tfrac{7}{2}^{8}, 0, 0\right) = \left(\frac{2!\,6!}{8!}\right)^{1/2} \sum_{v, J, \lambda} (2J+1)^{1/2}\, C(J\,J\,0, \lambda\, -\lambda\, 0)\, \Psi_{1\ldots 6}(j^{6} v\, J\, \lambda) \cdot \Psi_{78}(j^{2} v\, J\, -\lambda) \tag{3.7}$$

Si hubieramos desarrollado esta función de onda a partir de los coeficientes genealógicos (fractional parentage coefficients) [DES 63] tendríamos:

$$\Psi_{1\ldots 8}\left(\tfrac{7}{2}^{8}\, 0\, 0\right) = \sum_{v' v'' J \lambda} \left[j^{6} v' J\, j^{2} (J)\, 0 \,\|\, j^{8}\, 0\, 0 \right] \Psi_{1\ldots 6}(j^{6} v' J \lambda)\, \Psi_{78}(j^{2} v'' J\, -\lambda) \cdot$$

$$\cdot\, C(J\,J\,0, \lambda\, -\lambda\, 0) \tag{3.8}$$

Cuando J = 0 entonces v' = v" = 0 y cuando J = 2, 4 y 6 entonces v' = v" = 2.

Como los coeficientes genealógicos no dependen de λ , entonces $\rho(v, J)$

$$\left[j^{6}(vJ)\; j^{2}(J)\, 0 \,\|\, j^{8}\, 0\, 0 \right] = \rho(v, J) \sqrt{\frac{2J+1}{28}} \tag{3.9}$$

Hemos determinado estos coeficientes genealógicos haciendo uso de las Tablas [DES 63] y sus valores son:

$$\left[j^6(00)\, j^2(0)\, 0 \| j^8 0\, 0 \right] = \sqrt{\frac{1}{28}} \qquad \left[j^6(2\,2)\, j^2(2)\, 0 \| j^8 0\, 0 \right] = -\sqrt{\frac{5}{28}}$$

$$\left[j^6(24)\; j^2(4)\, 0 \| j^8 0\, 0 \right] = -\sqrt{\frac{9}{28}} \qquad \left[j^6(2\,6)\, j^2(6)\, 0 \| j^8 0\, 0 \right] = -\sqrt{\frac{13}{28}} \qquad (3.10)$$

El signo de $\left[j^2(2\ J)\ \frac{7}{2}\ \frac{7}{2} \mid j^3\ 1\ \frac{7}{2} \right]$ para J = 2, 4 y 6 en las Tablas [DES 63] y [ED 52] esta cambiado respecto al usado por nosotros [MC 64-II]

De lo cual se deduce $\alpha(v, J) = (-1)^{v/2}$ (3.11)

Con lo que tenemos para el elemento de matriz nuclear la siguiente expresión:

$$E.M. = \sum_{\substack{J, J', \lambda, \lambda' \\ v, J'', \lambda''}} \beta(J, J')\, \alpha(v, J)\, 8.7\; C(J, J', I; \lambda, \lambda'; M)\; C(J'', J'', 0; \lambda, \lambda'; M) \left[j^6(v'' J'')\, j^2(J'')\, 0 \| j^8\, 0, 0 \right]$$

$$\left\langle \Psi_{12}(j^2 v\, J \lambda)\, \Psi_{3 \ldots 8}(j^6 v\, J' \lambda') \right| O_{12} \left| \Psi_{12}(j^2 v''\, J'' \lambda'')\, \Psi_{3 \ldots 8}(j^6 v''\, J'' \lambda'') \right\rangle$$

(3.12)

Que tambien puede escribirse:

$$E.M. = \sum_{J, J', \lambda, \lambda'} \beta(J, J')\, (-1)^{\frac{v+v'}{2}}\, C(J, J', I; \lambda, \lambda', M)\, \sqrt{28}\, (-1)^{J' - \lambda'} \left\langle \Psi_{12}(j^2 v\, J \lambda) \right| O_{12}^{K} \left| \Psi_{12}(j^2 v'\, J' \, {-\lambda'}) \right\rangle$$

(3.13)

Donde $\lambda' = M - \lambda$ y O_{12} es simétrico respecto al intercambio de las partículas 1 y 2; finalmente obtenemos para el elemento de matriz nuclear:

$$E.M. = \sum_{JJ'\lambda\lambda'} \beta(J,J')(-1)^{\frac{v+v'}{2}} \sqrt{28} \; C(JJ'I;\lambda\lambda'M)(-1)^{J+J'-\lambda-\lambda'} \begin{pmatrix} J & K & J' \\ -\lambda & \mu & -\lambda' \end{pmatrix}$$

$$\cdot \langle \Psi_{12}(j^2 v J) \| O_{12}^{K} \| \Psi_{12}(j^2 v' J') \rangle =$$

$$= \sum_{JJ'} \delta(K,I)\,\delta(\mu,M)\,\beta(J,J')(-1)^{\frac{v+v'}{2}} \sqrt{28} \frac{1}{\sqrt{2K+1}} \langle \Psi_{12}(j^2 v J) \| O_{12}^{K} \| \Psi_{12}(j^2 v' J') \rangle$$

(3.14)

Para los operadores $O_{12}(\bar{r}, \bar{R}, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)^{K}_{\mu}$ en general podemos escribir

$$O_{12\,\mu}^{\;K} = \sum_{K',K'',K''',K''''} \left(O(\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2)^{K'}_{\mu'} \otimes \left(O(\bar{r})^{K'''}_{\mu'''} \otimes O(\bar{R})^{K''''}_{\mu''''} \right)^{K''}_{\mu''} \right)^{K}_{\mu} C(K',K'',K''',K'''',\mu',\mu'',\mu''',\mu'''')$$

(3.15)

Usando esta descomposición el elemento de matriz reducido queda:

$$\langle \Psi_{12}(j^2 v J) \| O_{12}^{K} \| \Psi_{12}(j^2 v J') \rangle = \sum_{\substack{K',K'',K''',K'''' \\ \mu',\mu'',\mu''',\mu''''}} C(K',K'',K''',K'''',\mu',\mu'',\mu''',\mu'''') \cdot Z^{6}$$

$$\sum_{\substack{S,S' \\ L,L'}} \sqrt{(2L+1)(2L'+1)(2S+1)(2S'+1)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S \\ 3 & 3 & L \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S' \\ 3 & 3 & L' \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & J' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S & L & J \\ S' & L' & J' \\ K' & K'' & K \end{Bmatrix}$$

$$\sqrt{(2k+1)(2J+1)(2J'+1)}\ \left(S\| O(\vec\sigma,\vec\tau)^{k'}\|S'\right) \sum_{\substack{n\ell N\lambda\\ n'\ell' N'\lambda'}} \langle n\ell N\lambda/0 3 0 3 L\rangle \langle n'\ell' N'\lambda'/0 3 0 3 L'\rangle$$

$$\sqrt{(2k''+1)(2L'+1)(2L+1)}\ \langle n\ell\| O(\vec r)^{k'''}\| n'\ell'\rangle \langle N\lambda\| O(\vec R)^{k''''}\| N'\lambda'\rangle \begin{Bmatrix} \ell & \lambda & L \\ \ell' & \lambda' & L' \\ k''' & k'''' & k'' \end{Bmatrix}$$

(3.16)

Donde se han utilizado los parentesis de Brody-Moshinsky [MO 67] $\langle n\ell N\lambda / n_1\ell_1 n_2\ell_2 L\rangle$

II. Elementos de matriz que aparecen en la desintegración beta doble sin neutrinos.

II.a Nucleo final de spin-paridad 0^+

Estos elementos de matriz son los que aparecen cuando se definen A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, E_1 y E_2 .

Recordemos que $\vec r = \vec r_m - \vec r_n$ y que hasta ahora las distancias vienen dadas en fermis y las energías en MeV. Para utilizar las Tablas de Brody-Moshinsky es necesario definir unas r y R adimensionales que en función de las antiguas quedan

$$r_{antigua} = \sqrt{2}\ \frac{\hbar c}{\sqrt{M\omega}}\ r_{nuevo} = a\ r_{nuevo} \quad ; \quad a = 2.634 \tag{3.17}$$

y una ecuación análoga para R con lo cual los elementos de matriz nucleares quedan

$$A_1 = \frac{1}{a} \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_m^- \tau_n^+ \frac{1}{r} | 0^+\rangle + \frac{2}{\pi} \frac{(2\langle W_f - E_i\rangle + E_0)}{197.33} \left(\gamma - 1 - \ln \frac{197.33}{a} \right).$$

$$\langle 0^+ | \sum_{n,m} \tau_n^+ \tau_m^+ | 0^+ \rangle + \frac{2}{\Pi} \; \frac{2\langle W_v - E_i \rangle + E_0}{197.33} \; \langle 0^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ \ln r | 0^+ \rangle \tag{3.18}$$

$$A_2 = \langle 0^+ | \sum_{m,n} \tau_n^+ \tau_m^+ | 0^+ \rangle \tag{3.19}$$

$$A_3 = a \langle 0^+ | \sum_{m,n} \tau_n^+ \tau_m^+ r | 0^+ \rangle \tag{3.20}$$

$$B_1 = \frac{1}{a} \langle 0^+ | \sum_{n,m} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{1}{r} | 0^+ \rangle - \frac{1}{\Pi} \; \frac{2\langle W_v - E_i \rangle + E_0}{197.33} \; \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ | 0^+ \rangle \tag{3.21}$$

$$B_2 = A_3 \tag{3.22}$$

$$C_1 = \frac{1}{a} \langle 0^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{(\vec{\sigma}_n \vec{\sigma}_m)}{r} | 0^+ \rangle + \frac{2}{\Pi} \; \frac{2\langle W_v - E_i \rangle + E_0}{197.33} \left(\gamma - 1 - \ln \frac{197.33}{a} \right)$$

$$\langle 0^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_n . \vec{\sigma}_m) | 0^+ \rangle + \frac{2}{\Pi} \; \frac{2\langle W_v - E_i \rangle + E_0}{197.33} \; \langle 0^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_n . \vec{\sigma}_m) \ln r | 0^+ \rangle \tag{3.23}$$

$$C_2 = \langle 0^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_n \vec{\sigma}_m) | 0^+ \rangle \tag{3.24}$$

$$C_3 = a \langle 0^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_n \vec{\sigma}_m) r | 0^+ \rangle \tag{3.25}$$

$$D_1 = \frac{1}{a} \Big(\langle 0^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{(\vec{\sigma}_n . \vec{\sigma}_m)}{r} | 0^+ \rangle - 2 \langle 0^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{(\vec{\sigma}_n \vec{r})(\vec{\sigma}_m . \vec{r})}{r^3} | 0^+ \rangle -$$

$$-\frac{1}{n}\;\frac{2\langle W_v-E_i\rangle+E_0}{197.33}\left(\langle 0^+|\sum_{nm}\tau_n^-\tau_m^-(\bar{\sigma}_n.\bar{\sigma}_m)|0^+\rangle-2\langle 0^+|\sum_{nm}\tau_n^+\tau_m^+\frac{(\bar{\sigma}_n\bar{r})(\bar{\sigma}_m\bar{r})}{r^2}|0^+\rangle\right) \tag{3.26}$$

$$D_2=a\left(\langle 0^+|\sum_{n,m}\tau_n^-\tau_m^+(\bar{\sigma}_n.\bar{\sigma}_m)\,r\,|0^+\rangle-2\langle 0^+|\sum_{nm}\tau_n^-\tau_m^-\frac{(\bar{\sigma}_n\bar{r})(\bar{\sigma}_m\bar{r})}{r}|0^+\rangle\right) \tag{3.27}$$

$$E_1=\frac{1}{a}\langle 0^+|\sum_{nm}\tau_n^+\tau_m^+\frac{(\bar{R}\times\bar{r}).\bar{\sigma}}{r^3}|0^+\rangle-\frac{2\langle W_v-E_i\rangle+E_0}{n.\,197.33}\langle 0^+|\sum_{nm}\tau_n^+\tau_m^+\frac{(\bar{R}\times\bar{r}).\bar{\sigma}}{r^2}|0^+\rangle \tag{3.28}$$

$$E_2=a\langle 0^+|\sum_{nm}\tau_n^+\tau_m^+\frac{(\bar{R}\times\bar{r}).\bar{\sigma}}{r}|0^+\rangle \tag{3.29}$$

Los elementos de matriz que se han de calcular son por lo tanto

$$R_i=\langle 0^+|\sum_{nm}\tau_n^+\tau_m^+\,a_i\,|0^+\rangle \tag{3.30}$$

R_i	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
a_i	1	$1/r$	r	$\ln r$	$\frac{\vec{\sigma}_n.\vec{\sigma}_m}{r}$	$\vec{\sigma}_n.\vec{\sigma}_m$	$(\vec{\sigma}_n.\vec{\sigma}_m)\,r$

R_i	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}
a_i	$(\vec{\sigma}_n.\vec{\sigma}_m)\ln r$	$\frac{(\vec{\sigma}_n\bar{r})(\vec{\sigma}_m\bar{r})}{r^3}$	$\frac{(\vec{\sigma}_n\bar{r})(\vec{\sigma}_m\bar{r})}{r^2}$	$\frac{(\vec{\sigma}_n\bar{r})(\vec{\sigma}_m\bar{r})}{r}$	$\frac{(\bar{R}\times\bar{r}).\vec{\sigma}_m}{r^3}$	$\frac{(\bar{R}\times\bar{r}).\vec{\sigma}_m}{r^2}$	$\frac{(\bar{R}\times\bar{r}).\vec{\sigma}_m}{r}$

El elemento de matriz R_0 a causa de la diferencia de isospines entre los estados fundamentales de los núcleos inicial y final se anula. Para el estado fundamental del ^{48}Ca $I = 4$ y para el estado fundamental del ^{48}Ti $I = 2$, además el operador que aparece en R_0 se puede escribir

$$\sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ = 4\,(T_x + i\,T_y)^2 \tag{3.31}$$

donde $T_x + i\,T_y$ es la componente +1 del operador de isospín total.

Ahora calcularemos R_1, R_2 y R_3 para todos ellos de (3.15) y (3.16) obtenemos:

$$\langle \psi_{12}(j^2 v J) \| V(r) \| \psi_{12}(j^2 v J) \rangle = \sum_{LS} 2^6 (2L+1) \sqrt{(2S+1)(2J+1)}\; A^2(S\,L\,J)\,(S\|1\|S)$$

$$\sum_{nlN\lambda} \langle nlN\lambda \,|\, 0303L \rangle^2 \frac{\langle nl\| V(r) \| nl \rangle}{\sqrt{2l+1}} \frac{\langle N\lambda \| 1 \| N\lambda \rangle}{\sqrt{2\lambda+1}} \tag{3.32}$$

donde $A(S\,L\,J) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S \\ 3 & 3 & L \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & J \end{Bmatrix}$; es decir es un coeficiente 9 J.

Bastará calcular los elementos de matriz reducidos:

$$(S\|1\|S) = \sqrt{2S+1} \tag{3.33}$$

$$\langle N\lambda \| \Omega \| N\lambda \rangle = \sqrt{2\lambda+1} \int_0^{\infty} R_{N\lambda}(R)\, R^{*}_{N\lambda}(R)\, R^2 dR = \sqrt{2\lambda+1} \tag{3.34}$$

$$\langle nl \| V(r) \| nl \rangle = \sqrt{2l+1} \int_0^{\infty} R_{nl}(r)\, R^{*}_{nl}(r)\, r^2 V(r)\, dr = \sqrt{2l+1} \sum_p B(nl, nl, p)\, I_p \tag{3.35}$$

donde B (n l, n l, p) se encuentra en las Tablas [MO 67] y

$$I_p = \frac{2}{\Gamma(p+3/2)} \int_0^{\infty} r^{2(p+1)} e^{-r^2} V(r)\, dr \tag{3.36}$$

se encuentran tabuladas en [GR 65] con todo ello se llega a

$$\langle \Psi_{12}(j^2 v J) \| V(r) \| \Psi_{12}(j^2 v J) \rangle = 2^6 \sum_{LS} (2L+1)(2S+1)\, A^2(S, L, J)$$

$$\sum_{nlN\lambda p} \langle nlN\lambda / 0303L \rangle^2\, B(nl, nl, p)\, I_p \tag{3.37}$$

La suma para n, l, N, λ y p para mostrar en un caso particular como se realiza este cálculo se encuentra en el Apendice III.

En la ecuación (3.14) son distintos de cero los coeficientes $\beta(J,J')$ [MG 64-I] para J= 0, 2, 4 y 6 y los valores de R_1, R_2 y R_3 estan tabulados en la Tabla VIII.

TABLA VIII

J / $\langle J \| O_{12} \| J \rangle$	0	2	4	6		$\sum_J \beta(J)\sqrt{2J}\langle J \| O_{12} \| J \rangle$
$\langle J \| \frac{1}{r} \| J \rangle$	0.77	1.46	1.78	2.10	R_1	– 0.54
$\langle J \| r \| J \rangle$	1.93	4.39	6.15	7.25	R_2	+ 0.20
$\langle J \| \ln r \| J \rangle$	0.52	1.27	1.87	2.30	R_3	+ 0.25

Calculemos R_4, R_5, R_6 y R_7 utilizando (3.15),(3.16),(3.34) y (3.35) tenemos

$$\langle \Psi_{12}(j^2 \nu J) \| \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 V(r) \| \Psi_{12}(j^2 \nu J) \rangle = \sum_{L S} 2^6 (2L+1) \sqrt{(2S+1)(2J+1)}\, A^2(S\, L\, J)$$

$$(S \| \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \| S) \sum_{n \ell N \Lambda p} \langle n\ell N \Lambda | 0 3 0 3\, L \rangle^2 B(n\ell, n\ell, p)\, I_p \tag{3.38}$$

El elemento de matriz reducido que aparece en (3.38) queda:

$$(S \| \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \| S) = -\sqrt{3}\,(S \| (\sigma_1 \otimes \sigma_2)^0 \| S) \tag{3.39}$$

con lo que bastará calcular

$$(S\|(\vec{\sigma}_1\otimes\vec{\sigma}_2)^{K'}\|S') = \sqrt{(2S+1)(2S'+1)(2K+1)}\begin{Bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S'\\ 1 & 1 & K'\end{Bmatrix}(\tfrac{1}{2}\|\sigma\|\tfrac{1}{2})^2 \tag{3.40}$$

y como

$$(\tfrac{1}{2}\|\sigma\|\tfrac{1}{2}) = \sqrt{6} \tag{3.41}$$

$$(S\|(\sigma_1\otimes\sigma_2)^{K'}\|S') = 6\sqrt{(2S+1)(2S'+1)(2K'+1)}\begin{Bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S'\\ 1 & 1 & K'\end{Bmatrix} \tag{3.42}$$

Si K' = 0

$$(S\|(\sigma_1\otimes\sigma_2)^{0}\|S') = \delta_{SS'}\,(-1)^S\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2S+1}} \tag{3.43}$$

Con lo cual se llega a:

$$\langle \Psi_{12}(j^2 v J)\|(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2)V(r)\|\Psi_{12}(j^2 v J)\rangle = \sum_{S,L} 3\cdot 2^6(-1)^{S+1}(2L+1)\;A^2(SLJ)$$

$$\sum_{n\ell N\lambda p}\langle n\ell N\lambda/0303L\rangle^2\;B(n\ell,n\ell,p)\;I_p \tag{3.44}$$

Los valores de R_4, R_5, R_6 y R_7 estan en la Tabla IX.

TABLA IX

$\langle J \Vert O_{12} \Vert J \rangle$ \ J	0	2	4	6		$\sum_J \beta(J)\sqrt{2J+1}\langle J \Vert O_{12} \Vert J\rangle$
$\langle J \Vert \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2}{r} \Vert J \rangle$	- 1.14	- 1.52	- 0.86	0.72	R_4	2.09
$\langle J \Vert \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \Vert J \rangle$	- 1.29	- 2.33	-1.41	1.55	R_5	0.95
$\langle J \Vert \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \, r \Vert J \rangle$	- 2.45	- 4.61	-3.24	3.21	R_6	1.35
$\langle J \Vert \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \, \ln r \Vert J \rangle$	- 0.64	- 1.40	- 0.92	1.10	R_7	- 0.08

Del mismo modo para R_8, R_9 y R_{10} tenemos

$$\langle \Psi_{12}(j^2 v J) \Vert (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}) V(r) \Vert \Psi_{12}(j^2 v J) \rangle = 3\, 2^6 \sum_{S,L,K'=0,2} A(S L J)\; A(S L' J)$$

$$(-1)^S \begin{Bmatrix} S & L & J \\ L' & S & K' \end{Bmatrix} (2S+1)\,(2L+1)\,(2L'+1)\sqrt{2J+1}\;(S \Vert (\sigma_1 \otimes \sigma_2)^{K'} \Vert S) \sum_{n \ell N \lambda} \langle n \ell N \lambda | 03 03 L \rangle$$

$$\langle n' \ell' N \lambda | 03 03 L' \rangle \langle n \ell \Vert (\vec{r} \times \vec{r})^{K'} V(r) \Vert n' \ell' \rangle \begin{Bmatrix} L & \ell & \lambda \\ \ell' & L' & K' \end{Bmatrix} \qquad (3.45)$$

Realizando la suma para K' obtenemos:

$$\langle \Psi_{12}(j^2 \nu J) \| (\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{r})(\bar{\sigma}_2 \cdot \bar{r})\, V(r) \| \Psi_{12}(j^2 \nu J) \rangle = 2^4 \cdot 3 \Big[\sum_{S,L} A^2(SLJ)\,(2L+1) \sum_{n\ell N \lambda\, p}$$

$$\langle n\ell N\lambda, 0303\, L\rangle^2\, B(n\ell, n\ell, p)\, I_p - \sum_{L,L'} A(1LJ)\, A(1L'J) \begin{Bmatrix} 1 & L & J \\ L' & 1 & 2 \end{Bmatrix} 10\sqrt{2}\,(2L+1)$$

$$(2L'+1) \sum_{n\ell n'\ell' N \lambda\, p} \langle n\ell N\lambda, 03\,03\, L\rangle \langle n'\ell' N\lambda, 03\,03\, L'\rangle \begin{Bmatrix} L & \ell & \lambda \\ \ell' & L' & 2 \end{Bmatrix} C(\ell 2 \ell'; 000)$$

$$\sqrt{2\ell+1}\;\; B(n\ell, n'\ell'; p)\, I_p \qquad (3.46)$$

Los elementos de matriz reducidos que hemos utilizado son:

De

$$(S \| (\bar{\sigma}_1 \otimes \bar{\sigma}_2)^2 \| S) = \delta_{S1}\, 2\sqrt{5} \qquad (3.47)$$

$$(n\ell \| (r \otimes r)^2\, V(r) \| n'\ell') = -\frac{1}{\sqrt{3}}\, \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{nn'} \sqrt{2\ell+1} \sum_{p} B(n\ell, n'\ell'; p)\, I_p \qquad (3.48)$$

$$\langle n\ell\|(r\otimes r)^2 V(r)\|n'\ell'\rangle = \sum_p \frac{\sqrt{10}}{3}\,(\ell 2\ell';000)\sqrt{2\ell+1}\; B(n\ell,n'\ell';p) \qquad (3.49)$$

Donde el nuevo I_p viene definido

$$I_p = \frac{2}{\Gamma(p+3/2)}\int_0^\infty dr\; e^{2(p+1)}\, e^{-r^2}\, V(r)\, dr \qquad (3.50)$$

y se encuentran tabuladas en [GR 65].

Los valores para R_8, R_9 y R_{10} estan en la Tabla X

TABLA X

J / $\langle J\|O_{12}\|J\rangle$	0	2	4	6		$\sum_J \beta(J)\sqrt{2J+1}\langle J\|O_{12}\|J\rangle$
$\langle J\|\frac{(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{r})}{r^3}\|J\rangle$	2.47	3.07	7.79	4.51	R_8	- 4.87
$\langle J\|\frac{(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{r})}{r^2}\|J\rangle$	3.25	4.98	13.85	- 6.62	R_9	- 3.06
$\langle J\|\frac{(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{r})(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{r})}{r}\|J\rangle$	6.26	9.92	31.30	- 36.79	R_{10}	- 2.91

Como en casos anteriores de (3.15) y (3.16) obtenemos para R_{11}, R_{12} y R_{13} :

$$\langle \psi_{12}(j'\nu J) \| V(r)\, \vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{R}\cdot\vec{r}) \| \psi_{12}(j'\nu J)\rangle = 3\sqrt{2}\, 2^7 i \sum_L (-1)^{L+1} (2L+1) \sqrt{2J+1}$$

$$A(0JJ)\, A(1LJ) \sum_{\substack{n\ell N\lambda \\ n'\ell'N'\lambda'}} \langle n\ell N\lambda / 0J0J L\rangle \langle n'\ell'N'\lambda' / 0J0J J\rangle \begin{Bmatrix} \ell & \lambda & L \\ \ell' & \lambda' & J \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$\langle n\ell \| V(r)\, \vec{r} \| n'\ell'\rangle \langle N\lambda \| \vec{R} \| N'\lambda'\rangle \qquad (3.51)$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\langle S \| \vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2 \| S'\rangle = \delta_{|S-S'|,1}\, 2\sqrt{3} \qquad (3.52)$$

Además como

$$\langle n\ell \| V(r)\, \vec{r} \| n'\ell'\rangle = (-1)^{\ell} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \begin{pmatrix} \ell & 1 & \ell' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^{\infty} dr\, r^3 V(r)\, R_{n\ell}(r)\, R_{n'\ell'}(r) \qquad (3.53)$$

$$\langle N\lambda \| \vec{R} \| N'\lambda'\rangle = (-1)^{\lambda} \sqrt{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^{\infty} dR\, R^3\, R_{N\lambda}(R)\, R_{N'\lambda'}(R) \qquad (3.54)$$

Llamaremos

$$B(n\ell, n'\ell') \equiv \int_0^\infty dr\, r^3\, V(r)\, R_{n\ell}(r)\, R_{n'\ell'}(r) \tag{3.55}$$

$$A(NL, N'L') \equiv \int_0^\infty dR\, R^3\, R_{NL}(R)\, R_{N'L'}(R) \tag{3.56}$$

Una vez realizadas las integraciones y las sumas correspondientes tenemos para R_{11}, R_{12} y R_{13} los valores de la Tabla XI

TABLA XI

$\langle J\Vert O_{12}\Vert J\rangle$ \ J	0	2	4	6		$\sum_J \beta(J)\sqrt{2J}\,\langle J\Vert O_{12}\Vert J\rangle$
$\langle J\Vert \vec{\sigma}_1\cdot\frac{(\vec{R}\times\vec{r})}{r^3}\Vert J\rangle$	1.08 i	-0.13 i	0.68 i	-0.72 i	R_{11}	- 5.36 i
$\langle J\Vert \vec{\sigma}_1\cdot\frac{(\vec{R}\times\vec{r})}{r^2}\Vert J\rangle$	0.48 i	-0.08 i	-0.36 i	-0.55 i	R_{12}	- 2.39 i
$\langle J\Vert \vec{\sigma}_1\cdot\frac{(\hat{R}\times\vec{r})}{r}\Vert J\rangle$	0.22 i	-0.08 i	0.18 i	-0.41 i	R_{13}	- 1.17 i

Ahora ya podemos calcular teniendo en cuenta (3.18),(3.19),(3.20), (3.21), (3.22), (3.23), (3.24), (3.25), (3.26), (3.27), (3.28) y (3.29) los elementos de matriz A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, E_1 y E_2 y sus valores vienen tabulados en la Tabla XII para valores medios de la diferencia de energías entre núcleo intermedio e inicial $\langle W_\nu - E_i\rangle$ = = 5, 10 y 15 MeV.

TABLA XII

$\langle W_v - E_i \rangle$ / E.M.	5	10	15
A_1	- 0.19	- 0.18	- 0.18
A_2	0	0	0
A_3	0.53	0.53	0.53
B_1	- 0.20	- 0.20	-0 .20
B_2	0.53	0.53	0.53
C_1	0.57	0.42	0.27
C_2	0.95	0.95	0.95
C_3	3.56	3.56	3.56
D_1	4.14	3.91	3.68
D_2	18.89	18.89	18.89
E_1	-1.92 i	-1.84 i	-1.76 i
E_2	-3.08 i	-3.08 i	-3.08 i

II.b Núcleo final de spin-paridad 1^+

Los elementos de matriz (2.98),(2.99),(2.100),(2.101) y (2.102) se pueden escribir teniendo en cuenta las definiciones de las funciones f y g y que los elementos de matriz que vamos a calcular son adimensionales (3.17) tenemos

$$E_1^{\prime kj} = \frac{1}{a} \langle 1^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_m \cdot \vec{r}) \sigma_n^k r^j \frac{1}{r^3} | 0^+ \rangle - \frac{1}{\Pi} \frac{2\langle W_0 - E_i \rangle + E_0}{197.33}$$

$$\langle 1^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_m \vec{r}) \frac{\sigma_n^k r^j}{r^2} | 0^+ \rangle \tag{3.57}$$

$$E_1^{\prime\prime kj} = a \langle 1^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ (\vec{\sigma}_m \vec{r}) \frac{\sigma_n^k r^j}{r} | 0^+ \rangle \tag{3.58}$$

y expresiones análogas para E_2^j, E_4^{kj} y E_5^k, para E_3^k obtenemos:

$$E_3^{\prime k} = \frac{1}{a} \langle 1^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{\sigma_m^k}{r} | 0^+ \rangle + \frac{2}{\Pi} \frac{2\langle W_0 - E_i \rangle + E_0}{197.33} \left(\gamma - 1 - \ln \frac{197.33}{a} \right)$$

$$\langle 1^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ \sigma_m^k | 0^+ \rangle + \frac{2}{\Pi} \frac{2\langle W_0 - E_i \rangle + E_0}{197.33} \langle 1^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ \sigma_m^k \ln r | 0^+ \rangle \tag{3.59}$$

$$E_3^{''k} = \langle 1^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ \sigma_m^k | 0^+ \rangle \tag{3.60}$$

$$E_3^{'''k} = a \langle 1^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ \sigma_m^k \, r | 0^+ \rangle \tag{3.61}$$

De estos operadores contribuirá solo la parte antisimetrica; para E_1^{kj} y E_4^{kj} tenemos

$$A^k B^j = \frac{1}{2}(A^k B^j + A^j B^k) + \frac{1}{2}(A^k B^j - A^j B^k) - \frac{1}{3} A^i B^i \delta^{kj} + \frac{1}{3} A^i B^i \delta^{kj} \tag{3.62}$$

En cuanto a las contracciones que aparecen en (2.103) hemos de tener en cuenta que:

$$\sum_{mj} \langle 1m | A^j | 00 \rangle \langle 1m | B^j | 00 \rangle^* = \sum_{m} \langle 1m | A_m^1 | 0 \rangle \langle 1m | B_m^1 | 0 \rangle^* \tag{3.63}$$

Los elementos de matriz que hemos de calcular son:

$$Q_i = \langle 1^+ | \sum_{nm} \tau_n^+ \tau_m^+ \, a_i | 0^+ \rangle \tag{3.64}$$

con a_i

Q_i	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
a_i	$(\vec{\sigma}_m \vec{r})\,\frac{\sigma_m^{k} r)}{r^3}$	$(\vec{\sigma}_m \vec{r})\,\frac{\sigma_m^{k} r)}{r^2}$	$(\vec{\sigma}_m \vec{r})\,\frac{\sigma_m^{k} r)}{r}$	$(\vec{\sigma}_m \times \vec{\sigma}_m).\frac{\vec{r}\,R)}{r^3}$	$(\vec{\sigma}_m \times \vec{\sigma}_m).\frac{\vec{r}\,R)}{r^2}$

Q_i	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9	Q_{10}	Q_{11}
a_i	$(\vec{\sigma}_m \times \vec{\sigma}_m).\frac{\vec{r}\,R)}{r}$	$\frac{\sigma_m^{k}}{r}$	σ_m^{k}	$\sigma_m^{k}\,ln\,r$	$\sigma_m^{k}\,r$	$(\vec{\sigma}_m \times \vec{r})^{k}\,\frac{R)}{r^3}$

Q_i	Q_{12}	Q_{13}	Q_{14}	Q_{15}	Q_{16}
a_i	$(\vec{\sigma}_m \times \vec{r})^{k}\,\frac{R)}{r^2}$	$(\vec{\sigma}_m \times \vec{r})^{k}\,\frac{R)}{r}$	$(\vec{\sigma}_m.\vec{r})\,\frac{r^{k}}{r^3}$	$(\vec{\sigma}_m.\vec{r})\,\frac{r^{k}}{r^2}$	$(\vec{\sigma}_m.\vec{r})\,\frac{r^{k}}{r}$

Para el calculo de Q_1, Q_2 y Q_3 teniendo en cuenta (3.16) tendremos

$$\langle \Psi_{12}(j^2 r J) \| (\vec{\sigma}_1.\vec{r})\,\sigma_2^{k} r) Y(\hat{r}) \| \Psi_{12}(j^2 r J) \rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{S L K' \\ S' L' K''}} 2^{k} \sqrt{3(2S+1)(2S'+1)}$$

$$(2L+1)(2L'+1)(2J+1)\, A(S L J)\, A(S' L' J') \langle S \| (\sigma_1 \otimes \sigma_2)^{K'} \| S' \rangle \sqrt{(2K'+1)(2K''+1)}$$

$$\begin{Bmatrix} S & L & J \\ S' & L' & J' \\ K' & K'' & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} K' & 1 & 1 \\ 1 & K'' & 1 \end{Bmatrix} (-1)^{L'+K''} \sum_{\substack{m\ell N\lambda \\ m'\ell'}} \langle m\ell N\lambda / 0 3 0 3 L\rangle \langle m'\ell' N\lambda / 0 3 0 3 L'\rangle$$

$$\begin{Bmatrix} L & \ell & \lambda \\ \ell' & L' & K'' \end{Bmatrix} (-1)^{\ell+\lambda} \langle m\ell \| (\vec{r}\otimes\vec{r})^{K''} V(r) \| m'\ell'\rangle \qquad (3.65)$$

Cuando K" = 0, debido a la presencia del coeficiente 6 J $\begin{Bmatrix} K' & 1 & 1 \\ 1 & K'' & 1 \end{Bmatrix}$, K' = 1 y como además aparece el coeficiente 9 J $\begin{Bmatrix} S & L & J \\ S' & L' & J' \\ 1 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$, L = L'. Si K' = 1 el elemento de matriz reducido $\langle S \| (\sigma_1 \otimes \sigma_2)^1 \| S'\rangle$ es cero a menos que S $\neq$ S' (3.42). Pero como los coeficientes 9 J A(S L J) y A(S' L J) requieren que S = S' para que ambos sean distintos de cero por lo tanto el término K" = 0 no contribuye. Cuando K" = 2 debido de nuevo a la presencia del coeficiente 6 J $\begin{Bmatrix} K' & 1 & 1 \\ 1 & K'' & 1 \end{Bmatrix}$, K' = 1 ó K'= 2. Si K'= 1 como en el caso anterior S $\neq$ S' lo que implica que L $\neq$ L'; luego las dos unicas posibilidades son L = J, L' = J $\pm$ 1 o bien L = J $\pm$ 1, L' = J pero como al permutar L y L' la expresión (3.65) cambia de signo ya que aparece un $(-1)^{L'}$ y el resto no cambia por tanto los términos L = J, L' = J $\pm$ 1 y L = J $\pm$ 1, L' = J tienen una contribución igual y opuesta. Para terminar de la suma para K' y K" solo queda el término K' = K" = 2, K' = 2 implica S = S' = 1 (3.42) ya que sino el elemento de matriz reducido $\langle S \| (\sigma_1 \otimes \sigma_2)^2 \| S'\rangle$ es cero además el coeficiente 9 J $\begin{Bmatrix} 1 & L & J \\ 1 & L & J \\ 2 & 2 & 1 \end{Bmatrix} = 0$ por lo que solo permanecen dos terminos el L = J + 1, L' = J − 1 y el L = J − 1, L' = J + 1 que son iguales excepto el signo del coeficiente 9 J, $\begin{Bmatrix} 1 & J+1 & J \\ 1 & J-1 & J \\ 2 & 2 & 1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 1 & J-1 & J \\ 1 & J+1 & J \\ 2 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$ y por tanto se anulan.

De ello se deduce que $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$.

Analogamente para los elementos de matriz nucleares Q_4, Q_5 y Q_6 tenemos:

$$\langle \Psi_{12}(j^2 r J) \| ((\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2) \cdot \vec{r}) R^J V(r) \| \Psi_{12}(j^2 r J) \rangle = \sum_{K'', L, L'} 2^2 \cdot 3 \, (2J+1)^2 \, A(0 J J) \cdot$$

$$\sqrt{6(2K''+1)} \, (-1)^{K''} \Big[(2L+1) \, A(1 L J) \begin{Bmatrix} 1 & L & J \\ 0 & J & J \\ 1 & K'' & 1 \end{Bmatrix} \sum_{\substack{m \ell N \lambda \\ m' \ell' N' \lambda'}} \langle m \ell N \lambda | 0 3 0 3 L \rangle$$

$$\langle m' \ell' N' \lambda' | 0 3 0 3 J \rangle \begin{Bmatrix} \ell & \lambda & L \\ \ell' & \lambda' & J \\ 1 & 1 & K'' \end{Bmatrix} \langle m \ell \| V(r) \, \vec{r} \| m' \ell' \rangle \langle N \lambda \| \vec{R} \| N' \lambda' \rangle + (2L'+1)$$

$$A(1 L' J) \begin{Bmatrix} 0 & J & J \\ 1 & L' & J \\ 1 & K'' & 1 \end{Bmatrix} \sum \langle m \ell N \lambda | 0 3 0 3 J \rangle \langle m' \ell' N' \lambda' | 0 3 0 3 L' \rangle \begin{Bmatrix} \ell & \lambda & J \\ \ell' & \lambda' & L' \\ 1 & 1 & K'' \end{Bmatrix} \langle m \ell \| \vec{r} \, V(r) \| m' \ell' \rangle$$

$$\langle N \lambda \| \vec{R} \| N' \lambda' \rangle \Big] \tag{3.66}$$

Donde hemos tenido en cuenta que

$$\langle S \| (\sigma_1 \otimes \sigma_2)^1 \| S' \rangle = \sqrt{6} \; \delta_{S, S' \pm 1} \tag{3.67}$$

Agrupando terminos convenientemente puede verse que el término en L y su análogo en L' dan la misma contribución cambiada de signo, por lo tanto $Q_4 = Q_5 = Q_6 = 0$.

Los elementos de matriz nucleares Q_7, Q_8, Q_9 y Q_{10} pueden escribirse como

$$\langle \Psi_{12}(j^2 v J) \| \sigma_1^{\kappa} V(r) \| \Psi_{12}(j^2 v J) \rangle = \frac{1}{2} \langle \Psi_{12}(j^2 v J) \| (\sigma_1 + \sigma_2)^{\kappa} \| \Psi_{12}(j^2 v J) \rangle \tag{3.68}$$

y como

$$\langle S' \| \sigma_1 + \sigma_2 \| S \rangle = 2\sqrt{6} \tag{3.69}$$

entonces

$$\langle \Psi_{12}(j^2 v J) \| \sigma_1^{\kappa} V(r) \| \Psi_{12}(j^2 v J) \rangle = -2^6 \, 3\sqrt{6} \, (2J+1) \sum_{L=J\pm 1} (2L+1) \begin{Bmatrix} 1 & J & L \\ J & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$\sum_{n\ell N\lambda} \langle n\ell N\lambda | 0303L \rangle^2 \frac{\langle n\ell \| V(r) \| n\ell \rangle}{\sqrt{2\ell+1}} \tag{3.70}$$

los valores de Q_7, Q_8, Q_9 y Q_{10} vienen dados en la Tabla XIII

TABLA XIII

$\langle J \Vert O_{12} \Vert J\rangle$ \ J	2	4	6		$\sum_J \beta(J)\sqrt{\frac{2J}{3}}\langle J\Vert O_{12}\Vert J\rangle$
$\langle J\Vert \frac{\sigma_1^\kappa}{r}\Vert J\rangle$	0.55	1.13	1.89	Q_7	0.24
$\langle J\Vert \sigma_1^\kappa\Vert J\rangle$	0.78	1.92	3.34	Q_8	-3.10^{-5}
$\langle J\Vert \sigma_1^\kappa \ln r\Vert J\rangle$	0.39	1.17	2.13	Q_9	-0.24
$\langle J\Vert \sigma_1^\kappa\, r\Vert J\rangle$	1.56	3.84	6.73	Q_{10}	-0.02

Los elementos de matriz nucleares Q_{11}, Q_{12} y Q_{13} teniendo en cuenta (3.15) y (3.16) pueden escribirse:

$$
\begin{aligned}
&\langle \Psi_{12}(j^2\nu J)\Vert (\vec\sigma_1\times\vec r)^\kappa R\, V(r)\Vert \Psi_{12}(j^2\nu J)\rangle = -2^6\, 3\,(2J+1)^{3/2} A(0,JJ)\sum_{K''}\sqrt{2K''+1}\,\Big[\\
&\sum_L (2L+1)A(1LJ)(-1)^L\begin{Bmatrix} J & L & 1\\ K'' & 1 & J\end{Bmatrix}\sum_{\substack{n\ell N\lambda\\ n'\ell'N'\lambda'}}\langle n\ell N\lambda|0303L\rangle\langle n'\ell'N'\lambda'|0303J\rangle\\
&\begin{Bmatrix}\ell & \lambda & L\\ \ell' & \lambda' & J\\ 1 & 1 & K''\end{Bmatrix}\langle n\ell\Vert \vec r\, V(r)\Vert n'\ell'\rangle\langle N\lambda\Vert\vec R\Vert N'\lambda'\rangle + \sum_{L'}(2L'+1)A(1L'J)\begin{Bmatrix}J & L' & 1\\ K'' & 1 & J\end{Bmatrix}(-1)^{K''+1}\\
&\sum_{\substack{n\ell N\lambda\\ n'\ell'N'\lambda'}}\langle n\ell N\lambda|0303J\rangle\langle n'\ell'N'\lambda'|0303L'\rangle\begin{Bmatrix}\ell & \lambda & L'\\ \ell' & \lambda' & J\\ 1 & 1 & K''\end{Bmatrix}\langle n\ell\Vert\vec r\, V(r)\Vert n'\ell'\rangle\langle N\lambda\Vert\vec R\Vert N'\lambda'\rangle\Big]
\end{aligned}
$$

(3.71)

y al igual que Q_4, Q_5 y Q_6 dan cero.

Para terminar con los elementos de matriz que aparecen en la desintegración beta doble sin neutrinos con un estado final de spin-paridad 1^+ calcularemos Q_{14}, Q_{15} y Q_{16}, teniendo en cuenta (3.15) y (3.16) podemos escribir:

$$\langle \Psi_{12}(j^2 v J) \| (\vec{\sigma}_1 \vec{r})\, r^{\kappa} V(r) \| \Psi_{12}(j^2 v J) \rangle = \sqrt{6}\, 2^{\kappa} \Big[-\frac{1}{3} \sum_{L} A^2(1LJ)(-1)^L$$

$$\begin{Bmatrix} J & 1 & L \\ 1 & J & 1 \end{Bmatrix} \sum_{n\ell N\lambda} \langle n\ell N\lambda / 0303L \rangle^2 B(n\ell, n\ell, p)\, I_p + \frac{5\sqrt{2}}{3} \sum_{LL'} A(1LJ)$$

$$A(1L'J) \begin{Bmatrix} 1 & L & J \\ 1 & L' & J \\ 1 & 2 & 1 \end{Bmatrix} (2L+1)(2L'+1)(-1)^{L'} \sum_{\substack{n\ell N\lambda \\ n'\ell'}} \begin{Bmatrix} L & \ell & \lambda \\ \ell' & L' & 2 \end{Bmatrix} \sqrt{(2\ell+1)}\, C(\ell 2 \ell'; 000)$$

$$B(n\ell, n'\ell', p)\, I_p \langle n\ell N\lambda / 0303L \rangle \langle n'\ell' N\lambda / 0303L' \rangle \Big] \tag{3.72}$$

Donde I_p viene definido en (3.50).

En la Tabla XIV se encuentran los valores de Q_{14}, Q_{15} y Q_{16}

TABLA XIV

J / $\langle J \Vert O_{12} \Vert J \rangle$	2	4	6		$\sum_J \beta(J) \sqrt{\frac{2J}{3}} \langle J \Vert O_{12} \Vert J \rangle$
$\langle J \Vert (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r}) \frac{r^k}{r^3} \Vert J \rangle$	0.04	0.04	0.01	Q_{14}	0.08
$\langle J \Vert (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r}) \frac{r^k}{r^2} \Vert J \rangle$	0.08	0.08	0.09	Q_{15}	0.13
$\langle J \Vert (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r}) \frac{r^k}{r} \Vert J \rangle$	0.17	0.16	0.30	Q_{16}	0.29

Los elementos de matriz (3.57), (3.58), (3.59), (3.60) y (3.61) que son distintos de cero viene tabulados en la Tabla XV

TABLA XV

$\langle W_r - E_i \rangle$ / E.M.	5	10	15
E_3'	0.084	0.076	0.068
E_3''	-3.10^{-5}	-3.10^{-5}	-3.10^{-5}
E_3'''	-0.063	-0.063	-0.063
E_5'	0.028	0.025	0.023
E_5''	0.773	0.773	0.773

II.c Nucleo final de spin-paridad 2^+

En el cálculo de la vida media en la desintegración beta doble sin neutrinos cuando el spin-paridad del nucleo final es 2^+ (2.116) aparecen los siguientes elementos de matriz:

$$I_1^{\prime(k)} = \frac{1}{a} \langle 2^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{r^k r)}{r^3} | 0^+ \rangle - \frac{1}{\Pi} \frac{2 \langle W_\nu - E_i \rangle + E_0}{197.33}$$

$$\cdot \langle 2^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{r^k r)}{r^2} | 0^+ \rangle \qquad (3.73)$$

$$I_1^{\prime\prime(k)} = a \langle 2^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ \frac{r^k r)}{r} | 0^+ \rangle \qquad (3.74)$$

y expresiones análogas para I_2, I_3 e I_4 .

Los elementos de matriz que se han de calcular son por lo tanto:

$$P_i = \langle 2^+ | \sum_{mn} \tau_n^+ \tau_m^+ a_i | 0^+ \rangle \qquad (3.75)$$

donde a_i esta tabulada a continuación

P_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
a_i	$\frac{r^k r)}{r^3}$	$\frac{r^k r)}{r^2}$	$\frac{r^k r)}{r}$	$(\vec\sigma_1 \vec r)\frac{\sigma_2^k r)}{r^3}$	$(\vec\sigma_1 \vec r)\frac{\sigma_2^k r)}{r^2}$	$(\vec\sigma_1 \vec r)\frac{\sigma_2^k r)}{r}$

P_i	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
a_i	$(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)\, \frac{r^k r^j}{r^3}$	$(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)\, \frac{r^k r^j}{r^2}$	$(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)\, \frac{r^k r^j}{r}$	$\frac{(\vec{\sigma}_1 \times \vec{r})^k R^j}{r^3}$	$\frac{(\vec{\sigma}_1 \times \vec{r})^k R^j}{r^2}$	$\frac{(\vec{\sigma}_1 \times \vec{r})^k R^j}{r}$

Teniendo en cuenta que solo contribuye la parte simétrica y sin traza del operador que en ellos aparece y que

$$\frac{1}{6} \sum_m \langle 2m | A^2_m | 00 \rangle \langle 2m | B^2_m | 00 \rangle^* = \sum_{m,i,j} \langle 2m | A^{ij} | 00 \rangle \langle 2m | B^{ij} | 00 \rangle^*$$

(3.76)

donde A y B son operadores simetrico y sin traza por lo tanto solo necesitaremos encontrar los elementos de matriz

$$\langle 2m | A^2_m | 0\, 0 \rangle \quad \text{y} \quad \langle 2m | B^2_m | 0\, 0 \rangle^* \tag{3.77}$$

Calcularemos en primer lugar P_1, P_2 y P_3, de (3.15) y (3.16) se deduce

$$\langle \Psi_{12}(j^2 v J) \| r^k r^j V(r) \| \Psi_{12}(j^2 v' J') \rangle = 2^6 \sqrt{6}\, \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \Big[\frac{1}{2}$$

$$\begin{Bmatrix} 3 & 3 & J \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 & 3 & J' \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \sum_{\substack{m\ell N\lambda \\ m'\ell' N'\lambda'}} \langle m\ell N\lambda | 0303J \rangle \langle m'\ell' N'\lambda' | 0303J' \rangle \begin{Bmatrix} J & \ell & \lambda \\ \ell' & J' & 2 \end{Bmatrix} .$$

$$\langle ne\|(\bar r\otimes\bar r)^2 V(r)\|n'e'\rangle + \sum_{\substack{L=J\pm1\\ L'=J\pm1}} (2L+1)(2L'+1)\, A(1LJ)\, A(1L'J')(-3) \begin{Bmatrix} L & J & 1 \\ J' & L' & 2 \end{Bmatrix} \cdot$$

$$\sum_{\substack{neN\lambda\\ n'e'N'\lambda'}} \langle neN\lambda|03\,03L\rangle \langle n'e'N'\lambda'|03\,03L'\rangle \begin{Bmatrix} L & e & \lambda \\ e' & L' & 2 \end{Bmatrix} \langle ne\|(\bar r\otimes\bar r)^2 V(r)\|n'e'\rangle$$

(3.78)

Los valores para P_1, P_2 y P_3 se encuentran en la Tabla XVI

TABLA XVI

J,J' / $\langle J\|O_{12}\|J'\rangle$	0,2	2,2	2,4	4,4	4,6	6,6		$\sum_{J,J'} \beta(J,J')(-1)^{\frac{J-J'}{2}}\sqrt{\frac{2\pi}{5}}\langle J\|O_{12}\|J'\rangle$ $E_0 = 3.26$	$E_0 = 1.31$
$\langle J\|\frac{r^k r}{r^3}\|J'\rangle$	−0.49	0.53	−0.30	0.17	−0.05	−0.03	P_1	− 2.23	0.18
$\langle J\|\frac{r^k r}{r^2}\|J'\rangle$	−0.91	0.90	−0.95	0.23	−0.52	−0.28	P_2	− 4.46	1.12
$\langle J\|\frac{r^k r}{r}\|J'\rangle$	−1.84	1.93	−2.72	0.38	−1.92	−0.95	P_3	−10.04	3.40

Los valores de $\langle J\|O_{12}\|J'\rangle$ y de $\langle J'\|O_{12}\|J\rangle$ aunque no esté explicitado coinciden.

A continuación hemos de calcular P_4, P_5 y P_6

$$\langle \Psi_{12}(j^2 v J)\| r^k r\, V(r)\| \Psi_{12}(j^2 v' J')\rangle = -\sqrt{2}\; 3\; 2^6 \sum_{k'k''} \begin{Bmatrix} 1 & k' & 1 \\ k'' & 1 & 2 \end{Bmatrix} (-1)^{k'+1}\sqrt{2k'+1}$$

$$\sqrt{(2k''+1)(2S+1)(2S'+1)(2J+1)(2J'+1)}\,(2L+1)(2L'+1)\sqrt{5}\,A(SLJ)\,A(S'L'J')$$

$$\begin{Bmatrix} S & L & J \\ S' & L' & J' \\ k' & k'' & 2 \end{Bmatrix} \langle S\|(\vec{\sigma}_1\otimes\vec{\sigma}_2)^{k'}\|S'\rangle \sum_{\substack{n\ell N\lambda \\ n'\ell'N'\lambda'}} \langle n\ell N\lambda|0303L\rangle\langle n'\ell'N'\lambda'|0303L'\rangle$$

$$\langle n\ell\| V(r)(\vec{r}\otimes\vec{r})^{k''}\|n'\ell'\rangle\,(-1)^{L'}\begin{Bmatrix} \ell & \lambda & L \\ L' & k'' & \ell' \end{Bmatrix} \qquad (3.79)$$

Con lo que obtenemos para P_4, P_5 y P_6 los valores explicitados en la Tabla XVII

TABLA XVII

J,J' / $\langle J\|O_{12}\|J'\rangle$	0,2	2,2	2,4	4,4	4,6	6,6		$\sum_{J,J'}\beta(J,J')(-1)^{\frac{J+J'}{2}}\sqrt{\frac{28}{5}}\langle J\|O_{12}\|J'\rangle$ $E_0 = 3.26$	$E_0 = 1.31$
$\langle J\|(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{r})\frac{\sigma_2^{*}(r)}{r^2}\|J'\rangle$	- 1.33	1.03	-0.98	1.06	-0.55	1.32	P_4	- 5.51	1.64
$\langle J\|(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{r})\frac{\sigma_2^{*}(r)}{r^2}\|J'\rangle$	- 2.18	1.32	-2.08	1.78	-1.23	1.89	P_5	- 9.07	4.22
$\langle J\|(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{r})\frac{\sigma_2^{*}(r)}{r}\|J'\rangle$	- 4.37	3.25	-4.31	3.51	-3.05	3.04	P_6	-19.09	7.57

Los valores de $\langle J\| O_{12}\| J'\rangle$ y de $\langle J'\| O_{12}\| J\rangle$ coinciden.

Analogamente el calculo de P_7, P_8 y P_9 teniendo en cuenta (3.15) y (3.16) nos da

$$\langle \Psi_{12}(j^2 v J)\| (\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2)\, r^k r\, V(r) \| \Psi_{12}(j^2 v' J')\rangle = -2^L 3\sqrt{6} \sum_{S,L,L'} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)}\,(2L+1)$$

$$(2L'+1) \begin{Bmatrix} L & J & S \\ J' & L' & 2 \end{Bmatrix} A(SLJ)\, A(S'L'J') \sum_{\substack{n\ell N\Lambda \\ n'\ell' N'\Lambda'}} \langle n\ell N\Lambda | 0303L\rangle \langle n'\ell' N'\Lambda' | 0303L'\rangle$$

$$\begin{Bmatrix} L & \ell & \Lambda \\ \ell' & L' & 2 \end{Bmatrix} \langle n\ell \| (\vec{r}\otimes\vec{r})^2\, V(r) \| n'\ell'\rangle \qquad (3.80)$$

Los valores obtenidos para P_7, P_8 y P_9 se encuentran explicitados en la Tabla XVIII

TABLA XVIII

J, J' / $\langle J\|O_{12}\|J'\rangle$	0, 2	2, 2	2, 4	4, 4	4, 6	6, 6		$\sum_{J,J'} \beta(J,J')(-1)^{\frac{J+J'}{2}}\sqrt{\frac{2\beta}{\gamma}}\langle J\|O_{12}\|J'\rangle$ $E_0 = 3.26$	$E_0 = 1.31$
$\langle J\|(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2)\frac{r^k r}{r^3}\|J'\rangle$	2.72	0.22	0.13	0.58	-0.12	0.65	P_7	7.14	- 2.90
$\langle J\|(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2)\frac{r^k r}{r^2}\|J'\rangle$	- 0.09	0.95	0.53	0.81	-0.25	0.65	P_8	- 0.60	- 2.29
$\langle J\|(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2)\frac{r^k r}{r^2}\|J'\rangle$	- 0.11	1.60	1.75	1.65	-0.69	0.54	P_9	0.15	- 5.42

Los valores de $\langle J\|O_{12}\|J'\rangle$ y de $\langle J'\|O_{12}\|J\rangle$ coinciden

Para finalizar con los elementos de matriz que aparecen cuando el nucleo final tiene spin-paridad 2^+ obtendremos P_{10}, P_{11} y P_{12}; igual que en casos anteriores se tiene

$$\langle \Psi_{12}(j^2 v J) \| (\vec{\sigma}_1 \times \vec{r})^k R^{J/(r)} \| \Psi_{12}\, (j^2 v' J') \rangle = - i \sqrt{2 \cdot 5}\ 3 \cdot 2^6 \sum_{S,L,S',L'} 3\,(2L+1)(2L'+1)$$

$$A(SLJ)\, A(S'L'J') \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \begin{Bmatrix} S & L & J \\ S' & L' & J' \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix} \sum_{\substack{m e N \lambda \\ m' e' N' \lambda'}} \langle m e N \lambda / 0 S 0 S L \rangle \langle m' e' N' \lambda' / 0 S 0 S L' \rangle$$

$$\langle m e \| \vec{r}\, Y(r) \| m' e' \rangle \langle N \lambda \| \vec{R} \| N' \lambda' \rangle \begin{Bmatrix} e & \lambda & L \\ e' & \lambda' & L' \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} + 5\,(2L+1)(2L'+1)\ A(SLJ)\ A(S'L'J')$$

$$\sqrt{(2J+1)(2J'-1)} \begin{Bmatrix} S & L & J \\ S' & L' & J' \\ 1 & 2 & 2 \end{Bmatrix} \sum_{\substack{m e N \lambda \\ m' e' N' \lambda'}} \langle m e N \lambda / 0 S 0 S L \rangle \langle m' e' N' \lambda' / 0 S 0 S L' \rangle \langle m e \| \vec{r}\, Y(r) \| m' e' \rangle$$

$$\langle N \lambda \| \vec{R} \| N' \lambda' \rangle \begin{Bmatrix} e & \lambda & L \\ e' & \lambda' & L' \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix} \qquad (3.81)$$

Los valores de P_{10}, P_{11} y P_{12} se encuentran tabulados en la Tabla XIX. Los valores de $\langle J \| \theta_{12} \| J' \rangle$ y los de $\langle J \| O_{12} \| J' \rangle$ son iguales aunque no esté explicitado.

En las Tablas XX y XXI se encuentran los valores de los elemento de matriz I_i' e I_i'' para $E_o = 3.26$ y $E_o = 1.31$ respectivamente.

TABLA XIX

J, J' / $\langle J \| O_{12} \| J' \rangle$	$0,2$	$2,2$	$2,4$	$4,4$	$4,6$	$6,6$		$\sum_{J,J'} \beta(J,J')(-1)^{\frac{J+J'}{2}} \sqrt{\frac{2J}{5}} \langle J \| O_{12} \| J' \rangle$ $E_0 = 3.26$	$E_0 = 1.31$
$\langle J \| (\vec{\sigma}_1 \times \vec{r})^K \frac{R^j}{r^3} \| J' \rangle$	0.54 i	0.16 i	0.74 i	-2.78 i	0.44 i	-1.00 i	P_{10}	1.34 i	-3.43 i
$\langle J \| (\vec{\sigma}_1 \times \vec{r})^K \frac{R^j}{r^2} \| J' \rangle$	- 0.02 i	0.63 i	0.59 i	-2.47 i	0.67 i	-1.25 i	P_{11}	-0.84 i	-3.24 i
$\langle J \| (\vec{\sigma}_1 \times \vec{r})^K \frac{R^j}{r} \| J' \rangle$	-0.28 i	0.98 i	0.53 i	-3.35 i	1.26 i	-2.19 i	P_{12}	-2.26 i	-3.79 i

TABLA XX

$\langle W_v - E_i \rangle$ / E.M.	5	10	15
I_1'	- 0.75	- 0.68	- 0.61
I_1''	-26.43	-26.43	-26.43
$(I_3 - 2 I_2)'$	6.52	6.24	5.95
$(I_3 - 2 I_2)''$	100.94	100.94	100.94
I_4'	0.53 i	0.54 i	0.55 i
I_4''	-5.96 i	-5.96 i	-5.96 i

TABLA XXI

$(W_0 - E_i)$ / E.M.	5	10	15
I_1'	0.05	0.03	0.001
I_1''	8.97	8.97	8.97
$(I_3 - 2I_2)'$	-2.15	-1.98	-1.80
$(I_3 - 2I_2)''$	-54.63	-54.63	-54.63
I_4'	-1.21 i	-1.16 i	-1.10 i
I_4''	-9.98 i	-9.98 i	-9.98 i

III. Elementos de matriz que aparecen en la desintegración beta doble con neutrinos.

III.a Núcleo final de spin-paridad 0^+

Cuando el spin-paridad del núcleo final es 0^+ los únicos elementos de matriz que aparecen son A_2 (2.121) y C_2 (2.124) y ya estan calculados y tabulados en la Tabla XII.

III.b Núcleo final de spin-paridad 2^+

Cuando el spin-paridad del núcleo final es 2^+ el único elemento de matriz que aparece es C_2

Como en casos anteriores tendremos que calcular

$$\langle \Psi_{12}(j^2 v J) \| (\sigma_1^x \sigma_2^i)^2 \| \Psi_{12}(j^2 v' J') \rangle = \frac{1}{2} \langle \Psi_{12}(j^2 v J) \| (\sigma_1^x \sigma_2^i + \sigma_1^i \sigma_2^x) \| \Psi_{12}(j^2 v' J') \rangle \qquad (3.82)$$

o lo que es lo mismo

$$\sqrt{6} \langle \Psi_{12}(j^2 v J) \| (\sigma_1 \otimes \sigma_2)^2 \| \Psi_{12}(j^2 v' J') \rangle = 3 \cdot 2^3 \sqrt{5} \sum_L (2L+1) A(1LJ) A(1L'J') \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \begin{Bmatrix} J & 1 & L \\ 1 & J' & 2 \end{Bmatrix} \qquad (3.83)$$

Con lo cual obtenemos los valores para C_2 y estan tabulados en la Tabla XXII para $E_0 = 3.26$ y $E_0 = 1.31$

TABLA XXII

J, J' / $\langle J \| O_{12} \| J' \rangle$	0,2	2,2	2,4	4,4	4,6	6,6		$\sum_{JJ'} \beta(JJ')(-1)^{\frac{J+J'}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{5}} \langle J \| O_{12} \| J' \rangle$ $E_0 = 3.26$	$E_0 = 1.31$
$\langle J \| \sigma_1^i \sigma_2^x \| J' \rangle$	- 2.05	-2.75	-2.75	4.23	-2.23	6.37	C_2	-10.43	3.65

4. RESULTADOS

Para calcular las anchuras bastará sustituir las integrales tabuladas en las Tablas I, II, III, IV, V, VI y VII y los elementos de matriz que aparecen en las Tablas XII, XV, XX y XXI más el elemento de matriz C_2 (Tabla XII) y los dos elementos de matriz C_2 (Tabla XXII) en las ecuaciones (2.83), (2.103), (2.113), (2.113), (2.127), (2.131) y (2.131) respectivamente. El valor de las mismas depende del promedio de la diferencia de energías entre el núcleo inicial y el intermedio, ya que hemos empleado la aproximación de cierre, y viene dado en la Tabla XXIII.

Si en la aproximación de cierre hubiesemos tomado las funciones $f = g = 1$ (2.60) , (2.61) , (2.62) y (2.63) para la desintegración beta doble sin neutrinos y con un estado final nuclear de spin-paridad 0^+ hubieramos obtenido para la anchura un valor

$$\Gamma_{f=g=1} ({}^{48}Ca \rightarrow {}^{48}Ti (0^+, 0) + 2e^-) = 8.8 \; 10^{-40} \left(\frac{1+\delta^2}{1-\delta^2} \right)^2 MeV$$

Las anchuras diferenciales en función de la suma de energías de los electrones para la desintegración beta doble con neutrinos para un nucleo final de spin-paridad 0^+ vienen dadas en la figura I. Para encontrarlas se ha multiplicado la Tabla V por el elemento de matriz nuclear $|C_2|^2$ y por $G^4 \lambda^4$.

Las anchuras totales seran en MeV:

$\langle W_v - E_i \rangle$	5	10	15
$\Gamma(\sin \bar{\nu})$	$9.2 \; 10^{-40} \left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \right)^2$	$8.7 \; 10^{-40} \left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \right)^2$	$8 \; 10^{-40} \left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} \right)^2$
$\Gamma(\mathrm{con}\ \bar{\nu})$	$2.6 \; 10^{-48}$	$0.96 \; 10^{-48}$	$0.49 \; 10^{-48}$

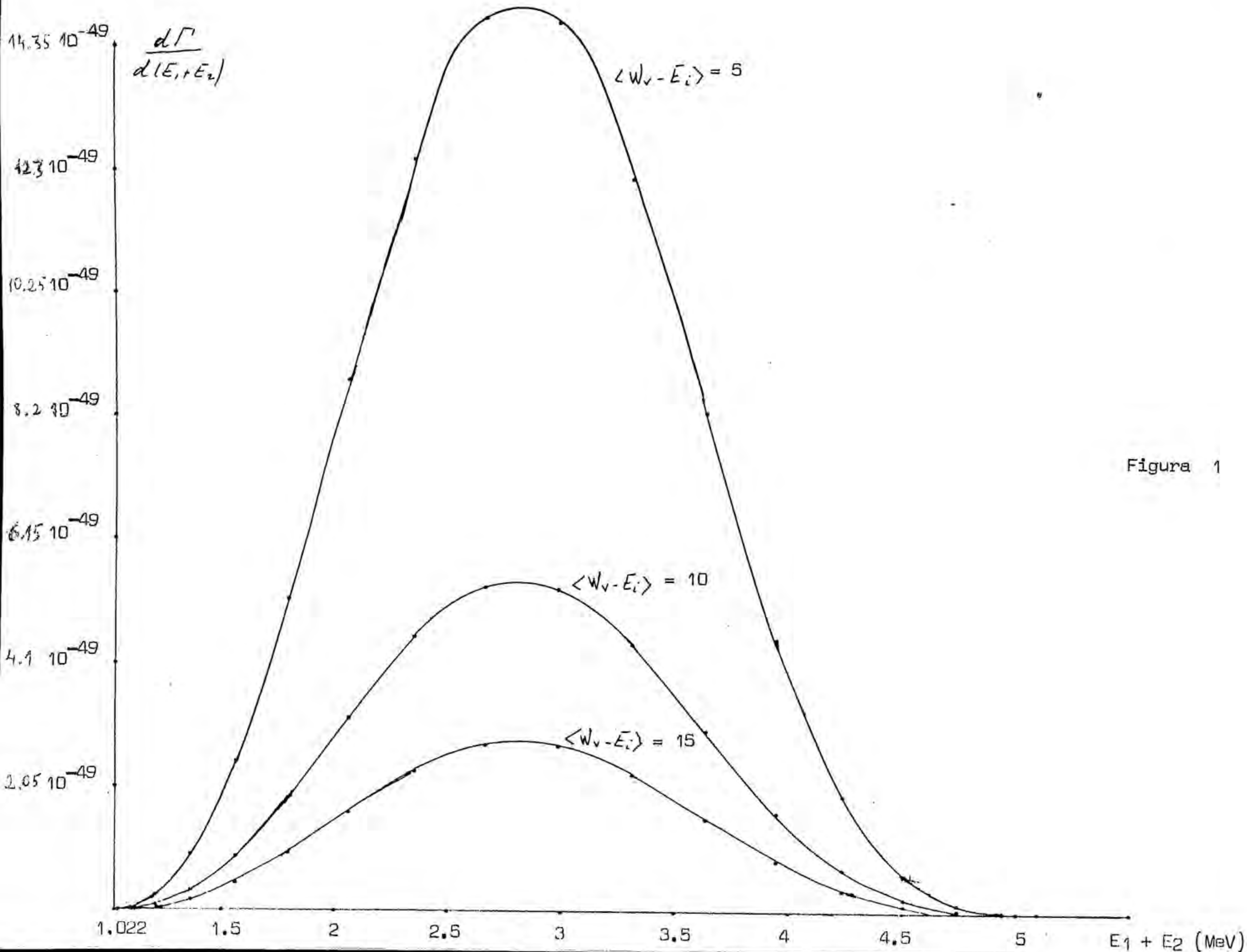
Con lo cual tenemos para la vida media en años:

$\langle W_r - E_i \rangle$	5	10	15
$T_{\frac{1}{2}}(\sin\bar{\nu})$	$0.16\ 10^{11} \left(\frac{1+\delta^2}{1-\delta^2}\right)^2$	$0.16\ 10^{11} \left(\frac{1+\delta^2}{1-\delta^2}\right)^2$	$0.17\ 10^{11} \left(\frac{1+\delta^2}{1-\delta^2}\right)^2$
$T_{\frac{1}{2}}(\mathrm{cm}\,\bar{\nu})$	$0.55\ 10^{19}$	$1.51\ 10^{19}$	$2.94\ 10^{19}$

TABLA XXIII

$\vert f\rangle$ \ $\langle W_v - E_i\rangle$	5	10	15
$^{48}Ti(0^+,0) + 2e^-$	$7\ 10^{-40}\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2$	$6.6\ 10^{-40}\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2$	$5.9\ 10^{-40}\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2$
$^{48}Ti(1^+, 3.83) + 2e^-$	$2.6\ 10^{-47}\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2$	$2.2\ 10^{-47}\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2$	$1.8\ 10^{-47}\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2$
$^{48}Ti(2^+,2.0226) + 2e^-$	$2.2\ 10^{-40}\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2$	$2.1\ 10^{-40}\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2$	$2\ 10^{-40}\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2$
$^{48}Ti(2^+,3.9699) + 2e^-$	$3\ 10^{-45}\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2$	$2.8\ 10^{-45}\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2$	$2.5\ 10^{-45}\left(\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2$
$^{48}Ti(0^+,0) + 2e^- + 2\bar{\nu}$	$2.6\ 10^{-48}$	$0.96\ 10^{-48}$	$0.49\ 10^{-48}$
$^{48}Ti(2^+,2.0226) + 2e^- + 2\bar{\nu}$	$2.28\ 10^{-53}$	$0.95\ 10^{-55}$	$0.11\ 10^{-55}$
$^{48}Ti(2^+,3.9699) + 2e^- + 2\bar{\nu}$	$0.56\ 10^{-65}$	$0.13\ 10^{-66}$	$0.12\ 10^{-67}$

Anchura en MeV, Γ, para los procesos $^{48}Ca \longrightarrow \vert f\rangle$ para distintos valores medios de la diferencia de energías entre núcleo intermedio e inicial.



$\frac{d\Gamma}{d(E_1+E_2)}$
14.35 10^-49
12.3 10^-49
10.25 10^-49
8.2 10^-49
6.15 10^-49
4.1 10^-49
2.05 10^-49
$\langle W_\nu - E_i \rangle = 5$
$\langle W_\nu - E_i \rangle = 10$
$\langle W_\nu - E_i \rangle = 15$
1.022
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
$E_1 + E_2$ (MeV)

Figura 1

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

El problema experimental es siempre el mismo: la actividad muy baja de estos núcleos. Esta puede en parte mejorarse aumentando la cantidad de material a examinar y reduciendo al máximo el fondo producido por radioactividad natural y por radiación cosmica.

Los experimentos hasta ahora relizados se pueden agrupar fundamentalmente en tres categorias:

a) Detección del núcleo final en una muestra del inicial, por ejemplo realizando espectroscopia de masas.

b) Detección en una cámara de niebla o una emulsión fotográfica de trazas $e^{\pm}$ $e^{\pm}$, que se origina en un punto común.

c) Detección mediante contadores de las coincidencias temporales $e^{\pm}$ $e^{\pm}$.

Con el método a) solo se puede obtener la vida media mientras que con los otros dos podemos obtener además la distribución energética de los electrones emitidos.

Es importante señalar que en ningún caso que conozcamos se ha intentado saber cual es el estado del núcleo final, con lo que en realidad se mide la probabilidad de que vaya a cualquier estado del nucleo final, mientras que un defecto general de los cálculos teóricos es el de suponer que el núcleo final se encuentra en el estado fundamental.

El único caso en el que se ha podido observar la desintegración beta doble es un experimento de espectroscopia de masas [KI 67],[KI 68] en minerales de selenio y telurio de edad conocida. Se obtiene para los procesos $^{82}Se \rightarrow {}^{82}Kr + 2e^- + ?$ y $^{130}Te \rightarrow {}^{130}Xe + 2e^- + ?$ unas vidas medias de respectivamente $10^{19.1 \pm 0.3}$ años y $10^{21.34 \pm 0.12}$ años. Tambien, y por el mismo método [TA 66] se obtuvo para la vida media del ^{128}Te, en el proceso $^{128}Te \rightarrow {}^{128}Xe + 2\,e^- + ?$, una vida media $T_{\frac{1}{2}} > 10^{23.3}$ años aunque solo ha sido medida en una ocasión y los mismos autores lo presentan como dudoso.

Aunque los experimentos de tipo a) no permiten decidir si en la desintegración beta doble se emiten o no neutrinos, lo que si hacen es dar un límite para los parámetros que se pueden elegir en el caso de que el número leptónico se viole (hay que tener en cuenta que no se puede coger el Lagrangiano débil usual de forma que el número leptó nico se conserve).

Resumamos brevemente la situación experimental para el proceso $^{48}Ca \rightarrow {}^{48}Ti + 2e^- + ?$.

Ya en 1952 [FR 52] por detección de ^{48}Ti en muestras de ^{48}Ca obtuvo como cota para la vida media $T_{\frac{1}{2}} > 7\ 10^{16}$ años.

Un experimento que causó muchas controversias fué el de McCarthy [MC 53] y [MC 55] que detectó coincidencias e^- e^- mediante contadores y obtuvo un valor para la vida media $T_{\frac{1}{2}} = 1.6\ 10^{17}$ años, pero algún tiempo más tarde [AW 56] con exactamente el mismo dispositivo experimental pero reduciendo de un modo considerable el fondo, debido fundamentalmente a la radiación cósmica, obtuvo $T_{\frac{1}{2}} > 2\ 10^{18}$ años valor confirmado posteriormente en [DO 56].

Más recientemente y usando las mismas técnicas experimentales [LA 65] dió para la vida media los límites $T_{\frac{1}{2}}$ (sin $\bar{\nu}$) $> 5\ 10^{19}$ años y $T_{\frac{1}{2}}$ (con $\bar{\nu}$) $> 3\ 10^{18}$ años y en 1966 [MA 66] $T_{\frac{1}{2}}$ (sin $\bar{\nu}$) $> 5\ 10^{20}$ años y $T_{\frac{1}{2}}$ (con $\bar{\nu}$) $> 5\ 10^{18}$ años.

La última cota que conocemos es la de Bardin et al. [BA 70] que usando una cámara de niebla para detectar los electrones dan para la vida media $T_{\frac{1}{2}}$ (sin $\bar{\nu}$) $> 2\ 10^{21}$ años y $T_{\frac{1}{2}}$ (con $\bar{\nu}$) $> 3.6\ 10^{19}$ años.

Como se puede ver experimentalmente no ha cesado de aumentar la cota inferior.

Este último año, en Irvine, Reines et al. estan realizando otro experimento con ^{48}Ca del que esperan obtener resultados dentro de unos meses.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos calculado dentro de la aproximación de impulso la anchura de los procesos:

1) $^{48}Ca \rightarrow {}^{48}Ti\ (0^+,0) + 2\ e^-$

2) $^{48}Ca \rightarrow {}^{48}Ti\ (1^+,3.83) + 2\ e^-$

3) $^{48}Ca \rightarrow {}^{48}Ti\ (2^+,2.0226) + 2\ e^-$

4) $^{48}Ca \rightarrow {}^{48}Ti\ (2^+,3.9699) + 2\ e^-$

5) $^{48}Ca \rightarrow {}^{48}Ti\ (0^+,0) + 2\ e^- + 2\ \bar{\nu}$

6) $^{48}Ca \rightarrow {}^{48}Ti\ (2^+,2.0226) + 2\ e^- + 2\ \bar{\nu}$

7) $^{48}Ca \rightarrow {}^{48}Ti\ (2^+,3.9699) + 2\ e^- + 2\ \bar{\nu}$

Hemos utilizado tambien la aproximación de cierre para los estados intermedios al igual que en las referencias [PR 59],[GR 60] y [DE 60]. Las diferencias entre estos trabajos y el nuestro son:

a) En [PR 59],[GR 60] y [DE 60] se consideran solo los procesos 1) y 5). Los procesos en los que el núcleo final tiene spin distinto de cero no contribuyen apreciablemente a la vida media debido a que la parte cinemática y débil son muy pequeñas aunque los elementos de matriz nucleares sean comparables. Primakoff y Rosen [PR 59] señalan la necesidad de tener en cuenta estos canales aunque luego en su cálculo no los consideren, sin dar para ello ningun argumento. En cambio para el proceso 5) Meichsner [ME 59] los tiene en cuenta (su cálculo está realizado sin la aproximación de impulso lo cual dificulta la comparación de su cálculo con el nuestro).

b) En nuestra aproximación de cierre para los procesos 1), 2), 3) y 4) se introducen las funciones f y g (2.13) y (2.14) en cambio en las referencias anteriores y para el proceso 1) se toman estas funciones iguales a 1. Los resultados son sensibles a estas funciones.

c) Hemos cogido $m_{\bar{\nu}} = 0$ a diferencia de [GR 60] y la constante C_s (2.1) igual a cero a diferencia de [PR 59].

d) Debido a la introducción de las funciones f y g, en el cálculo aparecen bastantes más elementos de matriz nucleares que en [PR 59], [GR 60] y [DE 60].

No nos hemos conformado con una estimación de los mismos, evaluandolos cuidadosmanete empleando las funciones de onda para el ^{48}Ti de McCullen et al. [MC 64-I].
En una etapa intermedia de nuestro cálculo aparecen los elementos de matriz núcleares R_1 (3.30) y R_4 (3.30) que [PR 59] y [DE 60] estiman $R_1^2 = R_4^2 = 5.26\ fm^{-2}$ en cambio en nuestro cálculo $R_1^2 = 0.04\ fm^{-2}$ y $R_4^2 = 0.63\ fm^{-2}$. Otro elemento de matriz núclear evaluado es R_8 (3.30) que en [DE 60] se toma igual a los otros dos y para el cual hemos obtenido $R_8^2 = 20.2\ fm^{-2}$. Para el elemento de matriz R_5 (3.30) estos autores toman $R_5^2 = 10^{-2}$ cuando nosotros hemos obtenido $R_5^2 = 0.909$. A continuación, en la Tabla XXIV, pueden compararse los resultados obtenidos, para la vida media del ^{48}Ca, por estos autores y los obtenidos por nosotros.

TABLA XXIV

REFERENCIA	$T_{\frac{1}{2}}$ (sin ν) años	$T_{\frac{1}{2}}$ (con ν) años
[PR 59]	$3\ 10^{15 \pm 2}$	$4\ 10^{20 \pm 2}$
[DE 60]	$2.6\ 10^{15 \pm 2}$	$8\ 10^{19 \pm 2}$
[GR 60]	$1\ 10^{20 \pm 1}$	$2\ 10^{19 \pm 1}$
este trabajo	$0.16 \pm 0.05\ 10^{11} \left(\frac{1+\delta^2}{1-\delta^2}\right)^2$	$1.51\ 10^{19 \pm \frac{1}{2}}$

Los errores se han estimado como debidos fundamentalmente a las aproximaciones realizadas, impulso, cierre, elección de la función de ondas para el ^{48}Ti etc. y en los trabajos citados se atribuyen principalmente a la incertidumbre de sus elementos de matriz nucleares.

Hemos de comparar tambien nuestros resultados con los últimos resultados experimentales . Por lo que sabemos la última cota experimental es la dada por Bardin et al. [BA 70] que dan para la vida media del ^{48}Ca cuando no se emiten neutrinos, $T_{\frac{1}{2}} > 2\ 10^{21}$ años, lo cual implica que $|\delta - 1| < 3\ 10^{-6}$ con lo que se mejora extraordinariamente el limite obtenido sin tener en cuenta los experimentos de desintegración beta doble. La cota que estos autores dan para la vida media de la desintegración beta doble con neutrinos es $T_{\frac{1}{2}} > 3.6\ 10^{19}$ años a comparar con el valor obtenido por nosotros $T_{\frac{1}{2}} = 1.51\ 10^{19 \pm \frac{1}{2}}$; lo cual nos indica que en el experimento que estan realizando Reines et al. se obtendrá la vida media por poco que mejoren los resultados experimentales anteriores.

APENDICE I

En el cálculo del elemento de matriz de transición para la desintegración beta doble sin neutrinos (2.11) aparecen unas integraciones sobre los momentos de los neutrinos intermedios cuyos cálculos se realizan en este apéndice.

La primera integración que aparece puede escribirse

$$I_{|\vec{k}|} = \int \frac{d^3k}{2} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_m-\vec{x}_n)}}{|\vec{k}|+a} - \int \frac{d^3k}{2} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_m-\vec{x}_n)}}{|\vec{k}|+b} \tag{AI.1}$$

donde

$$a = \langle W_\nu - E_i \rangle + E_1 \qquad b = \langle W_\nu - E_i \rangle + E_2 \tag{AI.2}$$

una vez realizada la integración obtenemos para la misma

$$I_{|\vec{k}|} = -\frac{2\Omega}{r}\Big(a\,\big(\cos ar\,\big(\tfrac{\Omega}{2} - Si\,ar\big) + sen\,ar\,Ci\,ar\big) - b\,\big(\cos br\,\big(\tfrac{\Omega}{2} - Si\,br\big)$$

$$+ sen\,br\,Ci\,br\big)\Big) \tag{AI.3}$$

donde Ci y Si estan definidas en [AB 64] comparando con los valores exactos para estas funciones y sus desarrollos se ve que una buena aproximación, con un error menor de un 10%, en el caso más desfavorable para los valores de nuestros argumentos (para r,a y b grandes) es

$$I_{|\vec{k}|} \simeq -\frac{\Pi^2}{r}(a-b)\Big[1-\frac{2}{\Pi}(1-\gamma)(a+b)r+\frac{2}{\Pi}(a^2\ln ar-b^2\ln br)\frac{r}{a-b}-$$

$$-\frac{1}{2}\;\frac{a(ar)^2-b(br)^2}{a-b}\Big] \qquad \text{(AI.4)}$$

Sustituyendo a y b por su valor y tomando $E_2 = E_0 - E_1$ despues de integrar la delta de conservación de la energía $\delta(E_i - E_f)$ tendremos para la integral:

$$I_{|\vec{k}|} = \frac{\Pi^2}{r}(E_0 - 2E_1)\, f(r, E_1) \qquad \text{(AI.5)}$$

donde

$$f(r,E_1) = 1 + \frac{2}{\Pi}(\gamma - 1 - \ln 197.33)\,\frac{2\langle W_v - E_i\rangle + E_0}{197.33}\, r + \frac{2}{\Pi}\,\frac{2\langle W_v + E_i\rangle + E_0}{197.33}$$

$$r\ln r + \frac{2}{\Pi}\left(\frac{(\langle W_v - E_i\rangle + E_0 - E_1)^2 \ln(\langle W_v - E_i\rangle + E_0 - E_1)}{197.33\quad(E_0 - 2E_1)} - (\langle W_v - E_i\rangle + E_1)^2 \cdot\right.$$

$$\left.\frac{\ln\langle W_v - E_i\rangle + E_1}{197.33\,(E_0 - 2E_1)}\right) r - \frac{1}{2}\,\frac{E_0^2 - E_1(E_0 - E_1) + 3\langle W_v - E_i\rangle(E_0 + \langle W_v - E_i\rangle)}{197.33^2}\, r^2$$

$$\text{(AI.6)}$$

Donde las energías vienen dadas en MeV y las distancias en fermis. La función f puede escribirse:

$$f(r, E_1) = c(r) + r\,f_2(E_1) + r^2 f_3(E_1) \tag{AI.7}$$

de donde quedan definidas las funciones c, f_2 y f_3

$$c(r) = 1 + \frac{2}{\pi}\left(\gamma - 1 - \ln 197.33\right)\frac{2\langle W_\nu - E_i\rangle + E_0}{197.33}\, r + \frac{2}{\pi}\,\frac{2\langle W_\nu - E_i\rangle + E_0}{197.33}\, r \ln r \tag{AI.8}$$

$$f_2(E_1) = \frac{2}{\pi}\,\frac{(\langle W_\nu - E_i\rangle + E_0 - E_1)^2 \ln(\langle W_\nu - E_i\rangle + E_0 - E_1) - (\langle W_\nu - E_i\rangle + E_1)^2 \ln(\langle W_\nu - E_i\rangle + E_1)}{197.33^2\,(E_0 - 2E_1)} \tag{AI.9}$$

$$f_3(E_1) = -\frac{1}{2}\;\frac{E_0^2 - E_1(E_0 - E_1) + 3\langle W_\nu - E_i\rangle(E_0 + \langle W_\nu - E_i\rangle)}{197.33^2} \tag{AI.10}$$

La otra integración para los momentos de los neutrinos es:

$$I_{\vec{k}} = -\int \frac{d^3k}{2|\vec{k}|}\,\vec{k}\,\frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_m - \vec{x}_n)}}{|\vec{k}| + a} - \int \frac{d^3k}{2k}\,\frac{\vec{k}\,e^{i\vec{k}(\vec{x}_m - \vec{x}_n)}}{|\vec{k}| + b} = -(A+B)\frac{\vec{r}}{r^2} \tag{AI.11}$$

donde

$$-(A+B) = -\int \frac{d^3k}{2k}\,(\vec{k}\,\vec{r})\left(\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{|\vec{k}| + a} + \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{|\vec{k}| + b}\right) \tag{AI.12}$$

una vez realizada la integración tenemos:

$$-(A+B) = -2\pi i\left\{-2\pi\delta(r) + \frac{1}{r}\left[\mathrm{Ci}\,ar\,(\mathrm{sen}\,ar - ar\cos ar) - \mathrm{Si}\,ar\,(ar\,\mathrm{sen}\,ar + \cos ar) + \frac{\pi}{2}(ar\,\mathrm{sen}\,ar + \cos ar) + \mathrm{Ci}\,br\,(\mathrm{sen}\,br - br\cos br) - \mathrm{Si}\,br\,(br\,\mathrm{sen}\,br + \cos br) + \frac{\pi}{2}(br\,\mathrm{sen}\,br + \cos br)\right]\right\} \qquad \text{(AI. 13)}$$

Para esta función podemos tomar, para nuestros argumentos, la aproximación

$$-(A+B) = -\frac{2\pi^2 i}{r}\left[-2r\delta(r) + 1 - \frac{ar+br}{\pi} + \frac{(ar)^2+(br)^2}{4}\right. \qquad \text{(AI. 14)}$$

con un error en el peor de los casos de un 10%.

El término en el que aparece $\delta(r)$ como los nucleones son distintos no contribuye y tengo finalmente

$$I_{\vec{k}} = -2\pi^2 i\,\frac{\vec{r}}{r^3}\left[1 - \frac{ar+br}{\pi} + \frac{(ar)^2+(br)^2}{4}\right. \qquad \text{(AI. 15)}$$

Ahora, tomando las energías en MeV y las distancias en fermis, sustituyendo a y b por sus valores y tomando $E_2 = E_o - E_1$ como se debe hacer despues de la integración de la delta de conservación, tenemos:

$$I_{\vec{k}} = -2\pi^2 i \frac{\vec{r}}{r^3}\left[1 - \frac{2\langle W_v - E_i\rangle + E_o}{197.33.\pi} r + \frac{(\langle W_v - E_i\rangle + E_1)^2 + (\langle W_v - E_i\rangle + E_o - E_1)^2}{4.\ 197.33^2} r^2\right]$$

(AI.16)

que se puede escribir:

$$I_{\vec{k}} = -2\pi^2 i \frac{\vec{r}}{r^3}\left[\alpha(r) + \beta_1(E_1) r^2\right] \qquad \text{(AI.17)}$$

donde quedan definidas las funciones α y β_1 como

$$\alpha(r) = 1 - \frac{2\langle W_v - E_i\rangle + E_o}{\pi.\ 197.33} r \qquad \text{(AI.18)}$$

$$\beta_1(E_1) = \frac{(\langle W_v - E_i\rangle + E_1)^2 + (\langle W_v - E_i\rangle + E_o - E_1)^2}{4.\ 197.33^2} \qquad \text{(AI.19)}$$

APENDICE II

En este apendice se calcularan las trazas que aparecen en la anchura de los procesos considerados (2.46), (2.96), (2.111), (2.125) y (2.130).

Definiendo

$$W_0 = \bar{u}_2 \gamma^0 C \bar{u}_1^T \tag{AII.1}$$

$$\vec{W} = \bar{u}_2 \vec{\gamma} C \bar{u}_1^T \tag{AII.2}$$

$$\vec{W}_5 = \bar{u}_2 \vec{\gamma} \gamma_5 C \bar{u}_1^T \tag{AII.3}$$

$$V_5 = \bar{u}_2 \gamma_5 \gamma^0 C \bar{u}_1^T \tag{AII.4}$$

$$\vec{V} = \bar{u}_2 \gamma^0 \vec{\gamma} C \bar{u}_1^T \tag{AII.5}$$

$$\vec{V}_5 = \bar{u}_2 \gamma^0 \vec{\gamma} \gamma_5 C \bar{u}_1^T \tag{AII.6}$$

Se tiene para las trazas las siguientes expresiones:

$$\sum_{\lambda} W_0 W_0^+ = Tr\left[(\not{p}_2 + m) \gamma^0 (\not{p}_1 - m) \gamma^0 \right] = 4 (E_1 E_2 + \vec{p}_1 \vec{p}_2 - m^2) \tag{AII.7}$$

$$\sum_{\lambda} W_0 V^{e+} = - Tr \left[(\not{p}_2 + m) \gamma^0 (\not{p}_1 - m) \gamma^0 \gamma^e \right] = 4m (p_1^e + p_2^e) \tag{AII.8}$$

$$\sum_{\lambda} W_0 W^{\ell +} = - Tr\left[(\not p_2 + m)\gamma^0(\not p_1 - m)\gamma^\ell\right] = 4\left(E_2 p_1^\ell + E_1 p_2^\ell\right) \tag{AII.9}$$

$$\sum_{\lambda} W_0 \vec{V}_5^{+} = - Tr\left[(\not p_2 + m)\gamma^0(\not p_1 - m)\gamma^0\gamma_5\vec{\gamma}\right] = 0 \tag{AII.10}$$

$$\sum_{\lambda} W_5^{\ell} W_0^{+} = Tr\left[(\not p_2 + m)\gamma^\ell\gamma_5(\not p_1 - m)\gamma^0\right] = 4i\, p_{2\mu} p_{1\nu}\, \epsilon^{\mu\ell\nu 0} \tag{AII.11}$$

$$\sum_{\lambda} W^{\kappa} W^{\ell +} = Tr\left[(\not p_2 + m)\gamma^\kappa(\not p_1 - m)\gamma^\ell\right] = 4\left(p_2^\kappa p_1^\ell - g^{\kappa\ell}(E_2E_1 - \vec{p}_1\vec{p}_2) + p_2^\ell p_1^\kappa - g^{\kappa\ell} m^2\right) \tag{AII.12}$$

$$\sum_{\lambda} W^{\kappa} V^{\ell +} = Tr\left[(\not p_2 + m)\gamma^\kappa(\not p_1 - m)\gamma^\ell\gamma^0\right] = -4m\left(E_1 + E_2\right) g^{\kappa\ell} \tag{AII.13}$$

$$\sum_{\lambda} W^{\kappa} V_5^{\ell +} = Tr\left[(\not p_2 + m)\gamma^\kappa(\not p_1 - m)\gamma_5\gamma^0\gamma^\ell\right] = 4im\, \epsilon_{\eta\nu\rho\sigma}(p_1 + p_2)^\eta g^{\nu\kappa} g^{\rho\ell} g^{\sigma 0} \tag{AII.14}$$

$$\sum_{\lambda} W^{\kappa} W_5^{\ell +} = - Tr\left[(\not p_2 + m)\gamma^\kappa(\not p_1 - m)\gamma_5\gamma^i\right] = -2i\epsilon^{ij\ell}\left[E_2\left(g^{\kappa\ell} p_1^j - g^{\kappa j} p_1^\ell\right) + \right.$$

$$\left. + E_1\left(g^{\kappa j} p_2^\ell - g^{\kappa\ell} p_2^j\right)\right] \tag{AII.15}$$

$$\sum_{\lambda} V^{\kappa} V^{\ell +} = Tr\left[(\not p_2 + m)\gamma^0\gamma^\kappa(\not p_1 - m)\gamma^\ell\gamma^0\right] = 4\left(-p_2^\kappa p_1^\ell - g^{\kappa\ell}(E_2E_1 + \vec{p}_2\vec{p}_1) - p_2^\ell p_1^\kappa - g^{\kappa\ell} m^2\right) \tag{AII.16}$$

$$\sum_{\lambda} V^{\kappa} V_5^{\ell +} = Tr\left[(\not p_2 + m)\gamma^0\gamma^\kappa(\not p_1 - m)\gamma_5\gamma^0\gamma^\ell\right] = 4i\, \epsilon_{\eta\rho}{}^{\kappa\ell}\, p_2^\eta p_1'^\rho \quad \text{donde } p_1' = (E_1, \vec{p}_1) \tag{AII.17}$$

$$\sum_{\lambda} V^{\kappa} W_5^{\ell +} = -\mathrm{Tr}\left[(\not p_2+m)\gamma^0\gamma^{\kappa}(\not p_1-m)\gamma_5\gamma^{\ell}\right] = -2im\,\epsilon_{\ell i n}\left((p_1-p_2)^i g^{\kappa n}+(p_2-p_1)^n g^{\kappa\ell}\right)$$

(AII.18)

$$\sum_{\lambda} V_5^{\kappa} V_5^{\ell +} = \mathrm{Tr}\left[(\not p_2+m)\gamma^0\gamma^{\kappa}\gamma_5(\not p_1-m)\gamma_5\gamma^0\gamma^{\ell}\right] = 4(-p_2^{\kappa}p_1^{\ell}-p_1^{\kappa}p_2^{\ell}+g^{\kappa\ell}m^2-g^{\kappa\ell}(E_2E_1+\vec p_2\vec p_1))$$

(AII.19)

$$\sum_{\lambda} V_5^{\kappa} W_5^{\ell} = -\mathrm{Tr}\left[(\not p_2+m)\gamma^0\gamma^{\kappa}\gamma_5(\not p_1-m)\gamma_5\gamma^{\ell}\right] = -4m(E_2-E_1)\delta_{\kappa\ell}$$

(AII.20)

$$\sum_{\lambda} W_5^{\kappa} W_5^{\ell +} = \mathrm{Tr}\left[(\not p_2+m)\gamma_5\gamma^{\kappa}(\not p_1-m)\gamma_5\gamma^{\ell}\right] = 4(p_2^{\kappa}p_1^{\ell}+p_2^{\ell}p_1^{\kappa}-(E_2E_1-\vec p_2\vec p_1-m^2)g^{\kappa\ell})$$

(AII.21)

$$\sum_{\lambda} W^{\kappa} V_5^{+} = \mathrm{Tr}\left[(\not p_2+m)\gamma^{\kappa}(m-\not p_1)\gamma^0\gamma_5\right] = 4i\,p_2^i p_1^j \epsilon_{ji\kappa} \qquad \text{(AII.22)}$$

$$\sum_{\lambda} W_5^{\kappa} V_5^{+} = -\mathrm{Tr}\left[(\not p_2+m)\gamma^{\kappa}(\not p_1+m)\gamma^0\right] = -4(p_2^{\kappa}E_1+p_1^{\kappa}E_2) \qquad \text{(AII.23)}$$

$$\sum_{\lambda} V_5 V_5^{+} = -\mathrm{Tr}\left[(\not p_2+m)\gamma^0(\not p_1+m)\gamma^0\right] = 4(E_1E_2+\not p_1\not p_2+m^2) \qquad \text{(AII.24)}$$

$$\sum_{\lambda} V_5 W_0^{+} = \mathrm{Tr}\left[(\not p_2+m)\gamma_5\gamma^0(\not p_1-m)\gamma^0\right] = 0 \qquad \text{(AII.25)}$$

APENDICE III

En este apendice, a título de ejemplo, se calculará la suma para n, l, N, λ y p de la formula (3.37) usando los coeficientes de Brody y Moshinsky [MO 67] y las integrales I_p [GR 60]. Esto se hará para los distintos valores del momento angular orbital total de los nucleones, L.

$L = 0$

$m\lambda N\lambda$	$\langle me N\lambda \mid 03030\rangle^2$	$B(m\ell, m\ell, 0)$	$B(m\ell, m\ell, 1)$	$B(m\ell, m\ell, 2)$	$B(m\ell, m\ell, 3)$	$B(m\ell, m\ell, 4)$	$B(m\ell, m\ell, 5)$	$B(m\ell, m\ell, 6)$
0030	0.05	0.05						
0212	0.1			0.1				
1020	0.35	0.525	- 1.05	0.875				
1202	0.1			0.35	- 0.7	0.45		
2010	0.35	0.65625	- 2.625	5.6875	- 6.125	2.75625		
3000	0.05	0.10937	- 0.65625	2.29687	- 4.8125	6.10312	- 4.33125	1.34062
$A_p = \sum_{meN\lambda} \langle meN\lambda \mid 03030\rangle^2 B(m\ell, m\ell, p)$		1.34062	- 4.33125	9.30937	-11.6375	9.30937	- 4.33125	1.34062

$\sum_p A_p I_p(\frac{1}{r}) = 0.83289$ $\qquad$ $\sum_p A_p I_p(1) = 1$ $\qquad$ $\sum_p A_p I_p(r) = 1.9125$ $\qquad$ $\sum_p A_p I_p(\ln r) = 0.5076$

$L = 1$

$n\ell N\lambda$	$\langle n\ell N\lambda \vert 03031\rangle^2$	$B(n\ell, n\ell, 0)$	$B(n\ell, n\ell, 1)$	$B(n\ell, n\ell, 2)$	$B(n\ell, n\ell, 3)$	$B(n\ell, n\ell, 4)$	$B(n\ell, n\ell, 5)$	$B(n\ell, n\ell, 6)$
0121	0.2		0.2					
0303	0.04				0.04			
1111	0.56		1.4	− 2.8	1.96			
2101	0.2		0.875	− 3.5	6.65	− 6.3	2.475	
$A_p = \sum_{n\ell N\lambda} \langle n\ell N\lambda \vert 03031\rangle^2 B(n\ell, n\ell, p)$		0	2.475	− 6.3	8.65	− 6.3	2.475	0

$\sum_p A_p I_p\left(\frac{1}{r}\right) = 0.6754$ $\quad \sum_p A_p I_p(1) = 1$ $\quad \sum_p A_p I_p(r) = 1.9404$ $\quad \sum_p A_p I_p(\ln 2) = 0.5280$

$L = 2$

$n\ell N\lambda$	$\langle n\ell N\lambda / 03\,03\,2 \rangle^2$	$B(n\ell, n\ell, 0)$	$B(n\ell, n\ell, 1)$	$B(n\ell, n\ell, 2)$	$B(n\ell, n\ell, 3)$	$B(n\ell, n\ell, 4)$	$B(n\ell, n\ell, 5)$	$B(n\ell, n\ell, 6)$
0022	0.02	0.02						
0204	0.00171			0.00171				
0212	0.27429			0.27429				
0220	0.084			0.084				
0402	0.00171					0.00171		
1012	0.12	0.18	− 0.36	0.3				
1202	0.27429			0.96	− 1.92	1.23429		
1210	0.12			0.42	− 0.84	0.54		
2002	0.084	0.1575	− 0.63	1.365	− 1.47	0.6615		
0200	0.02			0.1575	− 0.63	1.125	− 0.99	0.3575
$A_p = \sum_{n\ell N\lambda} \langle n\ell N\lambda / 03\,03\,2 \rangle^2 B(n\ell, n\ell, p)$		0.3575	− 0.99	3.5625	− 4.86	3.5625	− 0.99	0.3575

$\sum_p A_p\, I_p(\frac{1}{r}) = 0.654$ $\qquad \sum_p A_p\, I_p(1) = 1$ $\qquad \sum_p A_p\, I_p(r) = 1.9722$ $\qquad \sum_p A_p\, I_p(\ln 2) = 0.5859$

$L = 3$

$n\ell N\lambda$	$\langle n\ell N\lambda \vert 03\,03\,3\rangle^2$	$B(n\ell, n\ell, 0)$	$B(n\ell, n\ell, 1)$	$B(n\ell, n\ell, 2)$	$B(n\ell, n\ell, 3)$	$B(n\ell, n\ell, 4)$	$B(n\ell, n\ell, 5)$	$B(n\ell, n\ell, 6)$
0113	0.15		0.15					
0303	0.16				0.16			
0311	0.27				0.27			
1103	0.27		0.675	− 1.35	0.945			
1301	0.15				0.675	− 1.35	0.825	
$A_p = \sum_{n\ell N\lambda} \langle n\ell N\lambda \vert 03\,03\,3\rangle^2 B(n\ell, n\ell, p)$		0	0.825	− 1.35	2.050	− 1.35	0.825	0

$\sum_p A_p I_p\left(\frac{1}{r}\right) = 0.5905$ $\qquad \sum_p A_p I_p(1) = 1$ $\qquad \sum_p A_p I_p(r) = 2.002$ $\qquad \sum_p A_p I_p(\ell n\, 2) = 0.6151$

$L = 4$

$n\ell N\lambda$	$\langle n\ell N\lambda / 0 3 0 3 4\rangle^2$	$B(n\ell, n\ell, 0)$	$B(n\ell, n\ell, 1)$	$B(n\ell, n\ell, 2)$	$B(n\ell, n\ell, 3)$	$B(n\ell, n\ell, 4)$	$B(n\ell, n\ell, 5)$	$B(n\ell, n\ell, 6)$
0014	0.0375	0.0375						
0204	0.28571			0.28571				
0212	0.03929			0.03929				
0402	0.28571					0.28571		
0410	0.1375					0.1375		
1004	0.13751	0.20625	− 0.4125	0.34375				
1202	0.03929			0.1375	− 0.275	0.17679		
1400	0.0375					0.20625	− 0.4125	0.24375
$\sum_{n\ell N\lambda} \langle n\ell N\lambda / 0 3 0 3 4\rangle^2 B(n\ell, n\ell, p)$		0.24375	− 0.4125	0.80625	− 0.275	0.80625	− 0.4125	0.24375

$\sum_p A_p I_p\left(\frac{1}{r}\right) = 0.5996$ $\quad \sum_p A_p I_p(1) = 1$ $\quad \sum_p A_p I_p\left(\frac{r}{r}\right) = 2.0175$ $\quad \sum_p A_p I_p(\ln r) = 0.6388$

$L = 5$

$n\ell N\lambda$	$\langle n\ell N\lambda / 03035 \rangle^2$	$B(n\ell, n\ell, 0)$	$B(n\ell, n\ell, 1)$	$B(n\ell, n\ell, 2)$	$B(n\ell, n\ell, 3)$	$B(n\ell, n\ell, 4)$	$B(n\ell, n\ell, 5)$	$B(n\ell, n\ell, 6)$
0105	0.37491		0.37491					
0303	0.25				0.25			
0501	0.37491						0.37491	
$A_p = \sum_{n\ell N\lambda} \langle n\ell N\lambda / 03035 \rangle^2 B(n\ell, n\ell, p)$		0	0.37491	0	0.25	0	0.37491	0

$\sum_p A_p I_p\left(\frac{1}{r}\right) = 0.5673$ $\quad \sum_p A_p I_p(1) = 1$ $\quad \sum_p A_p I_p(r) = 2.0176$ $\quad \sum_p A_p I_p(\ln r) = 0.6384$

$L = 6$

$n\ell N\lambda$	$\langle n\ell N\lambda \vert 03036\rangle^2$	$B(n\ell, n\ell, 0)$	$B(n\ell, n\ell, 1)$	$B(n\ell, n\ell, 2)$	$B(n\ell, n\ell, 3)$	$B(n\ell, n\ell, 4)$	$B(n\ell, n\ell, 5)$	$B(n\ell, n\ell, 6)$
0006	0.3125	0.3125						
0204	0.1875			0.1875				
0402	0.1875					0.1875		
0600	0.3125							0.3125
$A_p = \sum_{n\ell N\lambda} \langle n\ell N\lambda \vert 03036\rangle^2 B(n\ell, n\ell, p)$		0.3125	0	0.1875	0	0.1875	0	0.3125

$\sum A_p \bar{I}_p(\frac{1}{r}) = 0.6717$ $\quad \sum_p A_p I_p(1) = 1$ $\quad \sum_p A_p I_p(r) = 1.9627$ $\quad \sum_p A_p I_p(\ln r) = 0.5643$

BIBLIOGRAFIA

[AB 65] M.ABRAMOWITZ y I.A.STEGUN, "Handbook of Mathematical Function" Dover Publications New York (1965)

[AW 56] M.AWSCHALON, Phys. Rev. 101, 1041 (1956)

[BA 70] R.K.BARDIN, P.J.GOLLON, J.B.ULLMAN y C.S.WU, Nuclear Physics 158 A, 337 (1970)

[BL 73] R.J.BLIN-STOYLE, "Fundamental Interaction and the Nucleus" North-Holland (1973)

[CO 35] E.U.CONDON, G.H.SHORTLEY, "The theory of Atomic Spectra". Cambridge University Press (1935).

[DA 62] DANBY et al., Phys. Rev.Lett. 9, 36 (1962)

[DA 55] R.DAVIS, Phys. Rev. 97, 766 (1955)

[DE 60] G.F.DELL'ANTONIO y E.FIORINI Supp. N.C. 1, 130 (1960)

[DES 63] A.de-SHALIT e I.TALMI, "Nuclear Shell Theory" Academic Press (1963)

[DO 56] E.I.DOBROKHOTOV, B.R.LAZARENKO y S.V.LUK'YANOV, Doklady Akad. Nauk, SSSR 110, 556 (1956)

[ED 52] A.R.EDMONDS y B.H.FLOWERS, Proc. Roy. Soc. 214 A, 515 (1952)

[EI 73] T.EITCHEN, Phys. Lett. 46 B, 281 (1973)

[FR 52] J.H.FREMLIN y M.C.WALTERS, Proc. Phys. Soc. London 65 A, 911 (1952)

[GA 67] A.GALINDO y P,PASCUAL, "β and μ decays" J.E.N. 186-DF/ I 57 (1967)

[GR 60] E.GREULING y R.C.WHITTEN, Ann. of Phys. 11, 510 (1960)

[GR 65] W.GROBNER Y N.HOFREITER, "Integraltafel zweiter teil bestimmte integrale" (1966).

[KI 67] T.KIRSTEN, J.GENTNER y D.A.SCHAEFFER, Zeits. Phys. 202, 273 (1967)

[KI 68] T.KIRSTEN, E.NORTON, O.A.SCHAEFFER y R.W.STOENNER, Phys.Rev. Lett. 20, 1300 (1968)

[LA 65] V.R.LAZARENKO, S.YU y S.V.LUK'YANOU, Jetp 22, 521 (1965)

[LE 65] T.D.LEE y G.S.WU, Ann. Review of Nuc. Science 15, (1965)

[MA 69] R.E.MARSHAK, RIAZUDDIN Y C.P.RYAN, "Theory of weak interaction in particle physics", John Wiley and Sons (1969)

[MA 66] E.MATEOSIAN y M.GOLDHABER, Phys. Rev. 146, 810 (1966)

[MC 53] J.A.McCARTHY, Phys. Rev. 90, 853 (1953)

[MC 55] J.A.McCARTHY, Phys. Rev. 97, 1234 (1956)

[MC 64-I] J.O.McCULLEN, B.F.BAYMAN y L.ZAMICK (NYO 9891) Princenton University University.

[MC 64-II] J.O.McCULLEN, B.F.BAYMAN y L.ZAMICK, Phys. Rev. 134 B, 515 (1964)

[ME 59] L.MEICHSNER, Phys. Rev. 117, 489 (1959)

[MO 67] M.MOSHINSKY y T.A.BRODY, "Table of transformation brackets" Gordon and Breach (1967)

[NDS 70] Nuclear Data Sheets B Vol.4 Numbers 3-4 July 1970 Academic Press

[PO 68] B.PONTECORVO Phys. Lett. 26 B, 630 (1968)

[PR 59] H.PRIMAKOFF y S.P.ROSEN, R.P.Ph 22, 121 (1959)

[PR 69-I] H.PRIMAKOFF y S.P.ROSEN, Phys. Rev. 184, 1925 (1969)

[PR 69-II] H.PRIMAKOFF y D.H.SHARP, Phys. Rev. Lett. 23, 501 (1969)

[TA 66] N.TAKAOKA y K.OGATA, Zeits. Naturf. 21a, 84 (1966)

[WO 64] L.WOLFENSTEIN , Phys. Rev. Lett. 13, 138 (1964)