Localización y conservación de estructuras en homotopía estable

Javier J. Gutiérrez Marín

Localización y conservación de estructuras en homotopía estable

Javier J. Gutiérrez Marín

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Localización y conservación de estructuras en homotopía estable

Javier J. Gutiérrez Marín

Memoria presentada para optar al grado de
Doctor en Matemáticas

Departament d'Àlgebra i Geometria
Universitat de Barcelona

Barcelona, mayo de 2004

CERTIFICO que la presente memoria ha sido realizada por Javier J. Gutiérrez Marín bajo mi dirección.

Barcelona, mayo de 2004

Dr. Carles Casacuberta Vergés

Índice general

Introducción iii

1. Preliminares **1**
- 1.1. Homotopía estable . . . 1
- 1.2. La categoría homotópica estable . . . 4
- 1.3. Modelos para la categoría homotópica estable . . . 12
- 1.4. Axiomática de la categoría homotópica estable . . . 15

2. Localización en categorías de modelos simpliciales **21**
- 2.1. Categorías de modelos simpliciales . . . 22
- 2.2. Objetos pequeños y categorías localmente presentables . . . 27
- 2.3. Construcción de f-localizaciones . . . 29

3. Funtores de localización en homotopía estable **39**
- 3.1. Espectros de funciones . . . 39
- 3.2. Propiedades de los funtores de localización . . . 43
- 3.3. Nulificaciones . . . 50
- 3.4. Localizaciones en conjuntos de primos . . . 52

4. Conservación de estructuras **57**
- 4.1. Espectros anillo y espectros módulo . . . 58
- 4.2. Localización de espectros anillo y espectros módulo . . . 61
- 4.3. Módulos sobre espectros de Eilenberg–Mac Lane . . . 65
- 4.4. Localización de GEMs estables . . . 71

5. Localización homológica de espectros de Eilenberg–Mac Lane **73**
- 5.1. Localizaciones homológicas . . . 74
- 5.2. Tipos de aciclicidad y localización de módulos . . . 76
- 5.3. Algunos ejemplos . . . 81

5.4. Funtores de localización *smashing* 86
5.5. Localizaciones cohomológicas 88

6. Localización homotópica de espectros de Eilenberg–Mac Lane 91
6.1. Espectros de Eilenberg–Mac Lane f-locales 92
6.2. Algunos ejemplos. Localizaciones de $H\mathbb{Z}$ 97
6.3. Espectros anillo sólidos y rígidos 101
6.4. Espectros de Eilenberg–Mac Lane reducidos 105

7. Categorías de módulos estrictos y homotópicos 107
7.1. Mónadas y la categoría de Eilenberg–Moore 108
7.2. Categorías estables de E-módulos 110
7.3. Módulos homotópicos y categorías derivadas 112
7.4. Una equivalencia de categorías 118
7.5. Localización homotópica de módulos estrictos 120

8. Opéradas y localización 123
8.1. Categorías de modelos de opéradas 124
8.2. Álgebras sobre opéradas 126
8.3. Localización de álgebras sobre opéradas 129
8.4. Aplicaciones 131

Bibliografía 133

Índice alfabético 141

Introducción

La localización es una técnica bien conocida en álgebra conmutativa y geometría algebraica. La construcción de anillos de fracciones y el proceso asociado de localización de módulos permiten reducir el estudio global de ciertas propiedades referentes a un cierto anillo a un estudio local que involucra anillos más sencillos. Muchas de las propiedades formales de las localizaciones de módulos son compartidas por otras transformaciones de parecida naturaleza definidas en otros contextos. Este hecho condujo a una axiomatización del concepto de funtor de localización en categorías arbitrarias, con una terminología similar a la del álgebra, o con otros nombres [BW85], [GZ67], [Mac71].

La implementación de la localización en topología algebraica tuvo sus raíces en los trabajos de Serre [Ser53] y Adams [Ada61], y se empezó a formalizar gracias a las contribuciones de Sullivan [Sul70], [Sul74] y Quillen [Qui69], principalmente. Las localizaciones de tipos de homotopía han sido estudiadas de manera particularmente extensa en el caso de localización en primos [BK72a], [HMR75]. Las localizaciones homológicas generalizan la localización en primos y fueron la vía principal de transporte a la homotopía estable [Bou75], [Bou79a], [Bou79b], [Rav84], así como la herramienta principal para el cálculo de los grupos de homotopía estables de las esferas durante muchos años [DHS88], [HS98], [Mah67], [Rav86].

En las dos últimas décadas ha ido aumentando cada vez más el uso de técnicas del álgebra conmutativa en homotopía estable (véase [GM95], [EKMM97]). La teoría de homotopía estable se centra en el estudio de los espectros y captura una parte esencial de las propiedades homotópicas de los espacios, prescindiendo de los fenómenos peculiares que se dan en dimensiones concretas. La categoría de homotopía estable es una categoría aditiva triangulada, lo cual acerca mucho su estudio al de las categorías derivadas de anillos.

Desde la década de 1960 se han venido utilizando los espectros de Adams–Boardman [Ada74], [Boa64] como modelos para la homotopía estable, aunque los modelos de Bousfield–Friedlander [BF78] se adaptan mejor al formalismo de la teoría de categorías de modelos de Quillen. El producto *smash* de espectros en la categoría de Adams–Boardman es conmutativo y asociativo salvo homotopía, pero no lo es en la categoría subyacente de espectros. La construcción de una categoría de espectros con un producto *smash* estrictamente asociativo, conmutativo y con unidad ha sido uno de los problemas importantes de la teoría de homotopía estable, pese a que durante algunos años se pensó que una tal categoría no podía existir [Lew91]. La solución a este problema se obtuvo recientemente con la aparición de dos nuevas categorías de modelos para la homotopía estable: la categoría de S-módulos [EKMM97] y la categoría de espectros simétricos [HSS00]. Estas nuevas categorías permiten trasladar fielmente diversas técnicas y construcciones del álgebra conmutativa a la categoría estable, y trabajar con "espectros anillo" y "espectros módulo" de la misma manera que con sus análogos algebraicos. Por ejemplo, la categoría derivada de un anillo R con unidad es equivalente a la categoría homotópica de espectros módulo sobre el espectro anillo HR de la homología ordinaria con coeficientes en R.

Uno de los resultados centrales de esta memoria establece que, bajo hipótesis apropiadas, los funtores de localización en la categoría homotópica estable transforman espectros anillo en espectros anillo, y espectros módulo sobre un anillo en espectros módulo sobre el mismo espectro anillo (o incluso sobre el localizado de ese espectro).

Estos y otros resultados recientes en teoría de localización tratan de la conservación de estructuras bajo la acción de las localizaciones. Dado un objeto X con una determinada propiedad o estructura y un funtor de localización L, se estudia si LX posee o no la misma propiedad o estructura. Existe una gran cantidad de estructuras que se conservan bajo el efecto de las localizaciones (véase [Bas03], [Cas94], [Cas00]). Por ejemplo, la clase de los espacios que escinden como productos de espacios de Eilenberg–Mac Lane, también llamados GEMs, se conserva cuando aplicamos un funtor de localización, y lo mismo ocurre con los H-espacios o los espacios de lazos.

Algunas de estas estructuras que se conservan bajo localizaciones pueden incluirse dentro del marco más general de álgebras sobre opéradas. Las opéradas son objetos que codifican estructuras algebraicas. Fueron utilizadas a principios de los 70 como herramientas en teoría de homotopía para el estudio de los espacios de lazos iterados [BV73], [May72]. El estudio de las opéradas en categorías monoidales simétricas ha permitido importantes aplicaciones en álgebra, topología y física [BM03], [GNPR04], [Laa03], [Man01], [Mar96], [MSS02].

Localización homotópica

La localización con respecto a una aplicación continua f fue desarrollada por Bousfield [Bou94], [Bou97] y Farjoun [Far96] principalmente. Se trata de una construcción universal en la categoría homotópica de los espacios (CW-complejos o conjuntos simpliciales) que convierte a f en una equivalencia homotópica. Los funtores de f-localización incluyen como casos particulares transformaciones idempotentes ya conocidas, como las localizaciones homológicas, la construcción *plus* de Quillen, las secciones de Postnikov, o las localizaciones en conjuntos de primos. La teoría de f-localización tuvo importantes repercusiones en el estudio de torres cromáticas inestables, teoría K y clases de Bousfield, entre otros conceptos.

En [Bou96], Bousfield aplica el lenguaje de localización con respecto a una aplicación a la homotopía estable, en un intento de relacionar la periodicidad estable con la inestable. Como consecuencia, aparecen nuevas transformaciones idempotentes, que generalizan las localizaciones homológicas estables y otras construcciones clásicas en la categoría de los espectros como las secciones de Postnikov o las localizaciones en conjuntos de primos.

En su forma más general, la noción de localización homotópica con respecto a un morfismo f puede definirse en cualquier categoría de modelos $\mathcal{C}$ que sea simplicial. Los ejemplos de categorías de modelos simpliciales incluyen tanto la homotopía inestable (conjuntos simpliciales) como la homotopía estable (espectros simétricos [HSS00]). Sin embargo, para poder asegurar la existencia de estos funtores de f-localización para cualquier morfismo f es necesario suponer algunas hipótesis adicionales sobre la categoría $\mathcal{C}$.

La construcción del funtor de f-localización utiliza de manera crucial el *small object argument* de Quillen [Hir03, 10.5], que permite realizar factorizaciones funtoriales en categorías de modelos. Las ideas para esta construcción de f-localizaciones en categorías de modelos simpliciales aparecen ya en [Bou77]. En [Far96], Farjoun construye la f-localización en las categorías de CW-complejos y conjuntos simpliciales. Más recientemente, la completa monografía de Hirschhorn [Hir03] demuestra la existencia de f-localizaciones en una clase más amplia de categorías (categorías celulares), que incluyen las categorías de espacios topológicos Hausdorff compactamente generados y conjuntos simpliciales, ambas con y sin punto base, y la categoría de espectros simétricos.

Anillos y módulos en homotopía estable

La categoría homotópica estable es una categoría monoidal simétrica, con un producto *smash* asociativo y conmutativo salvo homotopía. Un espectro anillo en sentido clásico es un objeto monoide en la categoría homotópica estable. Así, un espectro anillo E es un espectro dotado de dos aplicaciones $\mu\colon E \wedge E \longrightarrow E$ y $\eta\colon S \longrightarrow E$, donde S es el espectro de las esferas, que juega el papel de la unidad de la categoría monoidal. Estas dos aplicaciones se llaman producto y unidad de E respectivamente y verifican condiciones de asociatividad y unidad dadas por la conmutatividad salvo homotopía de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} E \wedge E \wedge E \arrow[r, "1\wedge\mu"] \arrow[d, "\mu\wedge 1"'] & E \wedge E \arrow[d, "\mu"] \\ E \wedge E \arrow[r, "\mu"'] & E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \wedge E \arrow[r, "\eta\wedge 1"] \arrow[dr, equal] & E \wedge E \arrow[d, "\mu"] & E \wedge S \arrow[l, "1\wedge\eta"'] \arrow[dl, equal] \\ & E. & \end{tikzcd}$$

Los espectros módulo sobre un espectro anillo se definen análogamente como los módulos sobre monoides en la categoría homotópica estable. De esta manera, si E es un espectro anillo, un espectro módulo sobre E o un E-módulo es un espectro M junto con una aplicación $m\colon E \wedge M \longrightarrow M$ tal que los siguientes diagramas conmutan salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} E \wedge E \wedge M \arrow[r, "1\wedge m"] \arrow[d, "\mu\wedge 1"'] & E \wedge M \arrow[d, "m"] \\ E \wedge M \arrow[r, "m"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \wedge M \arrow[r, "\eta\wedge 1"] \arrow[dr, equal] & E \wedge M \arrow[d, "m"] \\ & M. \end{tikzcd}$$

La categoría de los E-módulos homotópicos, E-*hmod*, se define como la categoría de Eilenberg–Moore asociada a la mónada $(E \wedge -, \eta \wedge 1, \mu \wedge 1)$ en la categoría homotópica estable.

Las primeras categorías de modelos para la homotopía estable dotadas de un producto *smash* estrictamente asociativo y conmutativo fueron la categoría de los S-módulos [EKMM97] y la categoría de los espectros simétricos [HSS00]. Estas dos categorías permiten definir estructuras de espectros anillo y espectros módulo tanto en la propia categoría de modelos (estructuras "estrictas") como en la categoría de homotopía (estructuras "homotópicas"). Las estructuras de espectro anillo estricto y espectro módulo estricto se definen igual que sus análogas homotópicas, con la excepción de que los diagramas conmutan estrictamente, no sólo salvo homotopía. Si tomamos como modelo la categoría de los espectros simétricos Sp^{Σ}, dado un espectro anillo E, la categoría de los E-módulos estrictos, E-mod, es la categoría de Eilenberg–Moore asociada a la mónada $(E \wedge -, \eta \wedge 1, \mu \wedge 1)$ en Sp^{Σ}.

En esta memoria se estudia el efecto de los funtores de f-localización sobre las estructuras de espectro anillo y espectro módulo homotópicos, y se demuestra que esas estructuras se conservan para una amplia clase de funtores bajo ciertas hipótesis de conectividad. Como consecuencia, se obtienen resultados sobre conservación de estructuras de GEMs estables, análogos a los que se obtienen en el caso inestable [Far96]. Los GEMs estables están caracterizados por ser exactamente los módulos homotópicos sobre el espectro $H\mathbb{Z}$ de la teoría de homología ordinaria.

También se analiza la relación que existe entre la categoría de los E-módulos homotópicos E-*hmod* y la categoría homotópica de los E-módulos estrictos $Ho(E\text{-}mod)$. En algunos casos, por ejemplo si $E = H\mathbb{Z}$, estas dos categorías son equivalentes.

Diversos ejemplos muestran que las localizaciones no sólo conservan las estructuras homotópicas de anillo, sino también las estrictas. Para el estudio de la conservación de anillos estrictos es necesario analizar el caso más general de conservación de estructuras de álgebras sobre opéradas. En una categoría de modelos monoidal y simétrica en la cual tenga sentido la definición de opéradas, los monoides están caracterizados por ser las álgebras sobre una opérada Ass. La categoría de las opéradas puede dotarse de una estructura de categoría de modelos en muchos casos [BM03], por ejemplo cuando trabajamos con opéradas de conjuntos simpliciales. Así, si definimos como A_∞ la opérada obtenida tomando una resolución cofibrante de la opérada Ass en la categoría de conjuntos simpliciales, los A_∞-espacios son los espacios de lazos, y en la categoría de espectros simétricos (que está enriquecida en conjuntos simpliciales) los A_∞-espectros son los espectros anillo estrictos, también llamados espectros anillo A_∞. Veremos que los funtores de localización conservan estructuras de álgebras sobre opéradas cofibrantes bajo ciertas condiciones, lo cual tiene como consecuencia la conservación de espectros anillo estrictos.

Contenido del trabajo y resultados principales

El primer capítulo de la memoria sirve de introducción a la teoría de homotopía estable. En él se describe la evolución de la homotopía estable y sus propiedades, desde el modelo de Spanier–Whitehead de 1953 [SW53], pasando por la categoría clásica de Adams–Boardman [Ada74], [Boa64], hasta los modelos más actuales como son la categoría de los S-módulos [EKMM97], la categoría de los espectros simétricos [HSS00], o el tratamiento axiomático de [HPS97].

Recordaremos los conceptos más importantes de la categoría homotópica estable de Adams–Boardman [Ada74], que usaremos en la mayor parte de esta memoria. Nos centraremos sobre todo en sus elementos básicos: la noción de espectro, el producto *smash* y las teorías de homología y cohomología.

La categoría de los S-módulos y la de los espectros simétricos son categorías de modelos para la homotopía estable con un producto *smash* asociativo, conmutativo y unitario en sentido estricto. La categoría de los espectros simétricos, de la que también recordaremos brevemente las definiciones más importantes, será la que utilizaremos cuando necesitemos trabajar específicamente en una categoría de modelos.

Las propiedades básicas de la categoría de homotopía estable son compartidas por otras categorías, sobre todo algebraicas. Recordaremos estas propiedades comunes, que se describen en [Mar83] y de forma axiomática en [HPS97], y que incluyen entre otras las de categoría triangulada o categoría monoidal simétrica. Estos conceptos se utilizarán en posteriores capítulos de la memoria.

El segundo capítulo se dedica a estudiar los funtores de f-localización en categorías de modelos simpliciales. Se recuerdan las definiciones de categoría de modelos de Quillen [Qui67], [Hov99], categoría simplicial y otros conceptos como categoría de modelos propia o categoría localmente presentable.

La existencia de funtores de f-localización para cualquier aplicación f está garantizada cuando la categoría de modelos en la que trabajamos tiene buenas propiedades. Estas propiedades incluyen ser una categoría simplicial, cofibrantemente generada, propia por la izquierda y localmente presentable. La construcción de estos funtores se basa en el *small object argument* de Quillen [Hir03, 10.5] y las ideas de esta construcción ya aparecen en un artículo de Bousfield [Bou77], aunque de hecho se remontan al trabajo de Gabriel–Zisman [GZ67].

En la memoria se desarrolla con detalle esta construcción para las categorías que satisfacen las condiciones anteriores. Estas categorías incluyen, por ejemplo, la categoría de conjuntos simpliciales, y en el caso de la homotopía estable, la categoría de espectros simétricos. De esta manera, se construye un funtor de f-localización $L_f\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ que invierte de manera universal la aplicación f. Este funtor es idempotente en la cateogoría homotópica y conserva equivalencias débiles.

El funtor L_f permite dotar a la categoría $\mathcal{C}$ de una nueva estructura de categoría de modelos $L_f\mathcal{C}$, en la que las equivalencias débiles son las f-equivalencias, es decir, las aplicaciones g tales que $L_f g$ es una equivalencia débil, y las cofibraciones de $L_f\mathcal{C}$ son las mismas que las de la estructura de modelos original de $\mathcal{C}$. De este modo, una f-localización de un objeto en $\mathcal{C}$ es exactamente una aproximación fibrante a ese objeto en la categoría de modelos localizada.

En el capítulo 3 se consideran funtores de f-localización en la categoría homotópica estable. Tomando como categoría de modelos la de los espectros simétricos, sabemos que existe cualquier funtor de f-localización en esta categoría, el cual a su vez da lugar a un funtor de f-localización al pasar a la categoría homotópica. Siguiendo [Bou96], los conceptos de espectro f-local y f-equivalencia se definen utilizando el recubridor conectivo $F^c(-,-)$ del espectro de funciones $F(-,-)$, puesto que sus grupos de homotopía coinciden con los del conjunto simplicial $\mathrm{Map}(-,-)$ de la categoría de espectros simétricos. El hecho de utilizar el recubridor conectivo $F^c(-,-)$ juega un papel clave en el estudio de la interacción de las f-localizaciones estables con el funtor suspensión.

Dada una aplicación de espectros f-locales, su fibra homotópica también es f-local. De ahí se deduce que la clase de los espectros f-locales está cerrada por desuspensiones y la clase de las f-equivalencias está cerrada por suspensiones. Este hecho pone de manifiesto la importancia del estudio de la relación entre la f-localización y la suspensión. Para cada espectro X hay una aplicación natural

$$\Sigma L_f X \longrightarrow L_f \Sigma X.$$

Diremos que L_f conmuta con la suspensión o que es un funtor exacto (o triangulado en el sentido de [Nee01]) si esta aplicación es una equivalencia homotópica para todo X. Esta clase de funtores tienen buenas propiedades de clausura de espectros f-locales y f-equivalencias por suspensiones y desuspensiones arbitrarias y de conservación de cofibraciones. Demostraremos el siguiente teorema que caracteriza estos funtores:

Teorema. *Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una aplicación de espectros. Son equivalentes:*

i) $\Sigma L_f X \simeq L_f \Sigma X$ *para todo espectro* X.

ii) $\Sigma^k L_f X \simeq L_f \Sigma^k X$ *para todo espectro* X *y todo* $k \in \mathbb{Z}$.

iii) *Si* E *es un espectro* f*-local, entonces* $\Sigma^k E$ *es* f*-local para todo* $k \in \mathbb{Z}$.

iv) *Si* g *es una* f*-equivalencia, entonces* $\Sigma^k g$ *es una* f*-equivalencia para todo* $k \in \mathbb{Z}$.

v) $L_f X \simeq L_{\Sigma^k f} X$ *para todo espectro* X *y para todo* $k \in \mathbb{Z}$.

vi) *La aplicación* $F(B,E) \longrightarrow F(A,E)$ *inducida por* f *es una equivalencia homotópica para todo espectro* E *que sea* f*-local.*

vii) *Si* E *es* f*-local, entonces* $F(X,E)$ *es* f*-local para todo espectro* X.

viii) *Si* $g\colon X \longrightarrow Y$ *y* $h\colon M \longrightarrow N$ *son* f*-equivalencias arbitrarias, entonces* $g \wedge h\colon X \wedge M \longrightarrow Y \wedge N$ *es una* f*-equivalencia.*

ix) *Si* $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ *es una cofibración de espectros, entonces* $L_f X \longrightarrow L_f Y \longrightarrow L_f Z$ *también es una cofibración.*

Hay otra clase de funtores importantes que casi conmutan con la suspensión, y que definimos como funtores de localización cuasi-exactos. Son aquellos que tienen la propiedad de que, dada una cofibración de espectros $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ en la cual X y Z son f-locales, entonces Y también lo es. Estos funtores casi conservan cofibraciones; de hecho, demostraremos que si el funtor de localización es cuasi-exacto, entonces conserva todas las cofibraciones cuya cofibra es f-local.

El primer ejemplo que aparece de funtores que no conmutan con la suspensión son las secciones de Postnikov. Las secciones de Postnikov son un caso particular de funtores de nulificación, que son f-localizaciones en las que la aplicación f es de la forma $f\colon A \longrightarrow *$ para algún espectro A. El funtor de nulificación con respecto a A se denotará P_A. Cuando $A = \Sigma^{k+1}S$, el funtor de nulificación que se obtiene es la k-ésima sección de Postnikov. Las nulificaciones son ejemplos de funtores de localización cuasi-exactos.

La relación entre los funtores de f-localización y las nulificaciones es muy estrecha. Si C es la cofibra de la aplicación f, siempre tenemos una transformación natural de funtores

$$P_C \longrightarrow L_f.$$

Demostraremos que cuando el funtor L_f conmuta con la suspensión, esta transformación natural es una equivalencia. De hecho, L_f conmuta con la suspensión si y sólo si P_C conmuta con la suspensión.

La localización de espectros en conjuntos de primos se define análogamente a la localización en primos de espacios y grupos. Si P es un conjunto de primos y X es un espectro, la P-localización de X es la aplicación

$$1 \wedge \eta\colon X \simeq X \wedge S \longrightarrow X \wedge M\mathbb{Z}_P,$$

donde $M\mathbb{Z}_P$ es un espectro de Moore para el anillo de los enteros P-localizados y η es la aplicación inducida por la unidad en $\mathbb{Z}_P$. La localización en primos en un caso particular de f-localización. Los espectros P-locales son precisamente aquellos cuyos grupos de homotopía son $\mathbb{Z}_P$-módulos.

En el capítulo 4 se describe cómo afecta a las estructuras de espectro anillo y espectro módulo la acción de un funtor de localización en la categoría homotópica estable. Demostraremos que, cuando el funtor de localización conmuta con la suspensión, conserva las estructuras de espectro anillo y espectro módulo.

Teorema. *Si un funtor de localización L_f conmuta con la suspensión, entonces se cumple lo siguiente:*

i) *Si E es un espectro anillo, entonces el espectro L_fE adquiere una única estructura de espectro anillo tal que la aplicación de localización $l_E\colon E \longrightarrow L_fE$ es una aplicación de anillos. Si además E es conmutativo, entonces también lo es L_fE.*

ii) *Si M es un espectro E-módulo, entonces el espectro L_fM adquiere una única estructura de E-módulo tal que la aplicación de localización $l_M\colon M \longrightarrow L_fM$ es una aplicación de E-módulos. Además L_fM admite una única estructura de L_fE-módulo que extiende la estructura de E-módulo.*

Los funtores de localización que no conmutan con la suspensión no conservan en general estas estructuras. Un contraejemplo nos lo proporciona el espectro $K(n)$ de las teorías K de Morava. El espectro $K(n)$ es un espectro anillo y sin embargo su sección de Postnikov en el nivel cero $K(n)_{(0)}$ no admite estructura de espectro anillo. Considerando $K(n)$ como un módulo sobre sí mismo se demuestra también que $K(n)_{(0)}$ no puede tener estructura de $K(n)$-módulo.

Esta falta de conservación de estructuras de los funtores de localización que no conmutan con la suspensión puede solucionarse si añadimos algunas condiciones de conectividad.

Teorema. *Si L_f es un funtor de localización cualquiera, entonces se cumple lo siguiente:*

i) *Si E es un espectro anillo conectivo y L_fE es conectivo, entonces el espectro L_fE adquiere una única estructura de espectro anillo tal que la aplicación de localización $l_E\colon E \longrightarrow L_fE$ es una aplicación de anillos. Si además E es conmutativo, entonces también lo es el espectro L_fE.*

ii) *Si M es un espectro E-módulo, donde E es un espectro anillo conectivo, entonces el espectro L_fM adquiere una única estructura de E-módulo tal que la aplicación de localización $l_M\colon M \longrightarrow L_fM$ es una aplicación de E-módulos. Además si L_fE también es conectivo, L_fM admite una única estructura de L_fE-módulo que extiende la estructura de E-módulo.*

Como consecuencia de este teorema se puede derivar la conservación de otras estructuras, como los GEMs estables. Los GEMs estables se definen como los espectros E tales que

$$E \simeq \bigvee_{k\in\mathbb{Z}} \Sigma^k HA_k.$$

Cuando los A_k son todos R-módulos, se dice que E es un R-GEM estable. Esta propiedad de escisión de los R-GEMs estables nos permite caracterizarlos precisamente como los espectros módulo sobre el espectro anillo HR. De este modo, el teorema anterior junto con el hecho de que HR es un espectro conectivo nos permiten probar lo siguiente:

Teorema. *Sea R un anillo con unidad y f una aplicación cualquiera. Si E es un R-GEM estable, entonces L_fE también es un R-GEM estable y la aplicación de localización $l_E\colon E \longrightarrow L_fE$ es una aplicación de HR-módulos.*

En el caso más sencillo de que el GEM estable esté formado por un único espectro de Eilenberg–Mac Lane, demostramos un resultado análogo al del caso inestable [Bou82], [Far96] sobre los grupos de homotopía de su localización.

Teorema. *Sea G un grupo abeliano y sea $k \in \mathbb{Z}$. Entonces tenemos una equivalencia*

$$L_f\Sigma^kHG \simeq \Sigma^kHG_1 \vee \Sigma^{k+1}HG_2$$

como $H\mathbb{Z}$-módulos, para ciertos grupos abelianos G_1 y G_2. Si G es un R-módulo, entonces G_1 y G_2 también lo son.

Así, la localización de un GEM estable puede ser obtenida a partir de las localizaciones de los espectros de Eilenberg–Mac Lane que lo forman, es decir, si $E \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^kHA_k$, entonces $L_fE \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}}L_f\Sigma^kHA_k$.

Los dos siguiente capítulos tratan sobre la localización de espectros de Eilenberg–Mac Lane. En el capítulo 5 nos centraremos en el caso particular de las localizaciones homológicas. Estas localizaciones fueron iniciadas por Adams en [Ada73] para espacios topológicos. Bousfield desarrolló posteriormente esta teoría y demostró su existencia para espacios [Bou75] y espectros [Bou79a].

Los funtores de localización homológica son casos particulares de funtores de f-localización que invierten de manera universal las equivalencias respecto a una teoría de homología dada. Dado un espectro E, se denota por L_E el funtor de localización homológica con respecto a E. En [Bou79a] se estudian las localizaciones L_EX cuando los espectros E y X son ambos conectivos. El mismo problema para el caso de espacios de Eilenberg–Mac Lane fue tratado por Bousfield en [Bou82]. En este capítulo, nosotros estudiamos la localización homológica $L_E HG$ para cualquier grupo abeliano G y cualquier espectro E, no sólo los conectivos, y veremos que esta localización va a venir determinada por el hecho de que los espectros $H\mathbb{Z}/p$ y $H\mathbb{Q}$ sean o no acíclicos con respecto a E. Como todo funtor de localización homológica conmuta con la suspensión, podemos extender nuestros resultados a localizaciones homológicas de HR-módulos.

Presentaremos algunos cálculos explícitos de localizaciones con respecto a teorías de homología concretas. Demostraremos, por ejemplo, que la localización con respecto a teoría K o con respecto a un espectro de Johnson–Wilson $E(n)$ de cualquier HR-módulo es la racionalización. En el caso de localizaciones de espectros de Eilenberg–Mac Lane, determinamos exactamente todas las posibles localizaciones homológicas para diferentes grupos abelianos. Estas localizaciones se determinan a partir de las condiciones de aciclicidad de los espectros $H\mathbb{Q}$ y $H\mathbb{Z}/p$ con respecto a E y del conjunto de primos para los cuales el grupo abeliano G no es únicamente p-divisible.

Teorema. *Sean $A_p = \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)$, $B_p = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)$ y sea P el conjunto de primos p tales que $H\mathbb{Z}/p$ no es E-acíclico y G no es únicamente p-divisible. Dado un espectro cualquiera E y un grupo abeliano G tenemos lo siguiente:*

i) *Si $H\mathbb{Q}$ es E-acíclico, entonces $L_E HG \simeq \prod_{p\in P}(HA_p \vee \Sigma HB_p)$.*

ii) *Si $H\mathbb{Q}$ no es E-acíclico, tenemos una cofibración*

$$L_E HG \to H(G\otimes\mathbb{Q}) \vee \prod_{p\in P}(HA_p \vee \Sigma HB_p) \to M\mathbb{Q} \wedge \prod_{p\in P}(HA_p \vee \Sigma HB_p).$$

La tabla siguiente muestra los cálculos obtenidos de todas las posibles localizaciones homológicas de espectros de Eilenberg–Mac Lane para varios grupos abelianos, dependiendo de las condiciones de E-aciclicidad de los espectros $H\mathbb{Q}$ y $H\mathbb{Z}/p$. Las columnas corresponden, comenzando por la izquierda, a los casos $E\mathbb{Q} = 0$ y $E \wedge H\mathbb{Z}/p = 0$ para todo p; $E\mathbb{Q} \neq 0$ y $E \wedge H\mathbb{Z}/p = 0$ para todo p; $E\mathbb{Q} = 0$ y $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$ para todo $p \in P$; y $E\mathbb{Q} \neq 0$ y $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$ para todo $p \in P$.

$L_E H\mathbb{Z}$	0	$H\mathbb{Q}$	$\prod_{p\in P} H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\mathbb{Z}_P$
$L_E H\mathbb{Z}/p^k$	0	0	$H\mathbb{Z}/p^k$	$H\mathbb{Z}/p^k$
$L_E H\mathbb{Q}$	0	$H\mathbb{Q}$	0	$H\mathbb{Q}$
$L_E H\mathbb{Z}_R$	0	$H\mathbb{Q}$	$\prod_{p\in P\cap R} H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\mathbb{Z}_{P\cap R}$
$L_E H\mathbb{Z}/p^\infty$	0	0	$\Sigma H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\mathbb{Z}/p^\infty$
$L_E H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	0	$H\widehat{\mathbb{Q}}_p$	$H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\widehat{\mathbb{Z}}_p$

En todos estos ejemplos, el único de los grupos abelianos cuya localización del espectro de Eilenberg–Mac Lane asociado tiene un posible grupo de homotopía en dimensión 1 es $\mathbb{Z}/p^\infty$. Este grupo tiene la propiedad de ser un grupo abeliano divisible. Para grupos abelianos reducidos, probaremos el siguiente resultado, que demostraremos también en el capítulo siguiente de forma más general para un funtor de f-localización cualquiera.

Teorema. *Si G es un grupo abeliano reducido y E es un espectro cualquiera, entonces $L_E HG \simeq HA$ para cierto grupo abeliano A.*

Utilizando este teorema y la descomposición de cualquier grupo abeliano como una suma directa de un grupo divisible y otro reducido, deducimos que si en un grupo abeliano G no aparece $\mathbb{Z}/p^\infty$ como sumando directo para ningún primo p, o bien $L_E H\mathbb{Z}/p^\infty$ es 0 o $H\mathbb{Z}/p^\infty$, entonces $L_E HG$ tiene un solo grupo de homotopía en dimensión 0.

La última parte de este capítulo se dedica a un caso especial de localizaciones homológicas, los funtores de localización *smashing*. Estos funtores están caracterizados por el hecho de que la localización de cualquier espectro se obtiene haciendo el producto *smash* con la localización del espectro de las esferas, es decir, $LX \simeq X \wedge LS$ para todo espectro X. Todos los funtores de localización *smashing* son localizaciones homológicas $L = L_E$, donde $E = LS$. También se dice que un espectro E es *smashing* cuando el funtor L_E es *smashing* [Rav84]. Los espectros K y $E(n)$ son *smashing* para todo n [DHS88]. Para esta clase de funtores demostraremos que la homología de LS esta concentrada en dimensión cero. Esto contrasta con el hecho de que la homotopía de LS puede ser no acotada; por ejemplo, $L_K S$ tiene infinitos grupos de homotopía no nulos en dimensiones positivas y negativas [Rav84].

Teorema. *Si L es un funtor de localización* smashing*, entonces se cumple que $(H\mathbb{Z})_k(LS)$ es 0 si $k \neq 0$ y es un subanillo de los racionales si $k = 0$.*

Cuando $(H\mathbb{Z})_0(LS)$ es exactamente $\mathbb{Q}$, veremos que el funtor L es o bien la racionalización, o bien LS tiene infinitos grupos de homotopía no nulos en dimensiones negativas. Este hecho proporciona una nueva demostración de que $L_K S$ y $L_{E(n)}S$ no están acotados inferiormente.

En el capítulo 6 se desarrolla el caso general de f-localizaciones de espectros de Eilenberg–Mac Lane. El caso inestable ha sido tratado con anterioridad en [Far96] y [CRT00]. Nuestros resultados extienden algunos de los resultados aparecidos en estos trabajos a la categoría homotópica estable. Hemos demostrado anteriormente que la localización de una suspensión de un espectro de Eilenberg–Mac Lane, $\Sigma^k HG$, tiene como máximo dos grupos de homotopía no triviales en dimensiones k y $k+1$. Probaremos que estos dos grupos de homotopía satisfacen ciertas condiciones en relación con el grupo G. En concreto, si $A = \pi_k(L_f HG)$ y $B = \pi_{k+1}(L_f HG)$, entonces

$$\mathrm{Hom}(A, A) \cong \mathrm{Hom}(G, A) \quad \text{y} \quad \mathrm{Hom}(A, B) \cong \mathrm{Hom}(G, B).$$

En algunos casos concretos, por ejemplo cuando G es un grupo abeliano libre o G es $\mathbb{Z}/p^k$, veremos que el segundo de estos grupos de homotopía es nulo. Estudiaremos las f-localizaciones del espectro HG cuando G es un grupo abeliano finitamente generado y, en particular, cuáles son todas los posibles localizaciones del espectro $H\mathbb{Z}$.

Teorema. *La localización del espectro $\Sigma^k H\mathbb{Z}$ tiene como máximo un grupo de homotopía no trivial, es decir, $L\Sigma^k H\mathbb{Z} \simeq \Sigma^k HA$. Si $A \neq 0$, entonces A cumple que la aplicación $\mathrm{Hom}(A, A) \longrightarrow A$ definida por $\varphi \mapsto \varphi(1_A)$ es un isomorfismo de grupos.*

Los grupos abelianos A con la propiedad anterior adquieren estructura de anillo y se llaman *anillos rígidos*. La terminología de anillos rígidos fue utilizada por primera vez en [CRT00] para describir las f-localizaciones de la esfera S^1. Sin embargo, este tipo de anillos ya había sido estudiado anteriormente con el nombre de E-anillos en otros contextos [Sch73]. Los anillos rígidos incluyen, entre otros, los subanillos de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/n$, los enteros p-ádicos y todos los anillos sólidos en el sentido de Bousfield–Kan [BK72b]. Aunque existen anillos rígidos de cardinalidad arbitrariamente grande [DMV87], hay grupos como $\mathbb{Z}/p^\infty$ o $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ que no admiten una estructura de anillo rígido. Por lo tanto, no existe ningún funtor de localización tal que $\pi_k(L\Sigma^k H\mathbb{Z})$

sea $\mathbb{Z}/p^\infty$ o $\widehat{\mathbb{Q}}_p$. Para cada anillo rígido A, la aplicación $f\colon S \longrightarrow MA$, inducida por la unidad de A, da lugar a un funtor de f-localización tal que $L_f H\mathbb{Z} \simeq HA$. Esto nos permite demostrar el siguiente resultado:

Teorema. *Hay una clase propia de funtores de f-localización no equivalentes en la categoría homotópica estable.*

Este hecho contrasta con la existencia de sólo un conjunto de clases de Bousfield [DP01] y por tanto sólo un conjunto de localizaciones homológicas no equivalentes.

El otro resultado importante de este capítulo es la generalización del teorema sobre localizaciones homológicas de espectros de Eilenberg–Mac Lane con grupo de homotopía reducido que vimos en el capítulo 5. Aquí demostramos ese teorema para funtores de f-localización en general.

Teorema. *Si G es un grupo abeliano reducido y f es una aplicación cualquiera, entonces $L_f\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA$, para algún grupo abeliano A y para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Como consecuencia, si $\mathbb{Z}/p^\infty$ no aparece como sumando directo de un grupo abeliano G para todo primo p, su localización $L_f\Sigma^k HG$ tiene como máximo un grupo de homotopía no trivial en dimensión k para cualquier funtor de localización L_f.

En el capítulo 7 estudiamos la relación que existe entre las categorías de espectros módulo homotópicos y las categorías de espectros módulo estrictos. En el capítulo 3 hemos trabajado con anillos y módulos homotópicos, que son los monoides y los módulos sobre monoides respectivamente en la categoría homotópica estable. Los anillos y módulos estrictos se definen de igual manera, pero en la categoría de modelos. Para ello necesitamos una categoría de modelos para la homotopía estable que tenga un producto *smash* estrictamente asociativo y conmutativo, como la categoría de los espectros simétricos [HSS00]. Una vez definidos los módulos homotópicos y los estrictos sobre un espectro anillo E, se considera en cada caso la categoría de Eilenberg–Moore asociada a la mónada definida por el funtor $X \mapsto E \wedge X$. Cuando consideramos esta mónada en la categoría homotópica estable, su categoría de Eilenberg–Moore asociada es la categoría de los E-módulos homotópicos, *E-hmod*. Cuando la consideramos en la categoría de espectros simétricos, la categoría de Eilenberg–Moore asociada es la categoría de E-módulos estrictos, *E-mod*, que tiene también estructura de categoría de modelos.

Las categorías de módulos estrictos tienen mejores propiedades que las de módulos homotópicos. Por ejemplo, la fibra de una aplicación de módulos estrictos vuelve a ser un módulo estricto, mientras que este resultado es falso en el caso de módulos homotópicos [May98]. Estudiaremos la relación entre la categoría de los E-módulos homotópicos y la categoría homotópica de los E-módulos estrictos en el caso $E = HR$ para un anillo R con unidad. La categoría HR-*mod* es equivalente en el sentido de Quillen a la categoría de complejos de cadenas no acotados de R-módulos [Rob87], [SS03]. Las categorías HR-*hmod* y $Ho(HR\text{-}mod)$ no son equivalentes en general, aunque en algunos casos, por ejemplo cuando $R = \mathbb{Z}$, sí que existe una equivalencia entre dichas categorías. Veremos cómo esta equivalencia depende de la dimensión global del anillo R.

Teorema. *Si R es un cuerpo o un subanillo de $\mathbb{Q}$, entonces hay una equivalencia de categorías entre $Ho(HR\text{-}mod)$ y HR-hmod.*

Todos los módulos considerados en la memoria serán módulos por la izquierda.

Por último, en el capítulo 8 tratamos sobre la conservación por funtores de localización de estructuras definidas como álgebras sobre opéradas en una categoría de modelos simplicial y monoidal simétrica. Estas estructuras incluyen los espectros anillo estrictos y los espacios de lazos, entre otras. Recordaremos las definiciones de opéradas y álgebras sobre opéradas en categorías monoidales y algunos ejemplos. Veremos cómo dotar de una estructura de categoría de modelos a la categoría de las opéradas, tal como se describe en [BM03], y cómo definir álgebras sobre opéradas simpliciales en la categoría de espectros simétricos o en cualquier categoría enriquecida en conjuntos simpliciales.

En una categoría de modelos monoidal y simétrica en la cual tenga sentido la definición de opéradas, los monoides están caracterizados por ser las álgebras sobre una opérada $\mathcal{A}ss$. La opérada A_∞ se define a partir de una resolución cofibrante de la opérada $\mathcal{A}ss$ en la categoría de opéradas de conjuntos simpliciales. Las álgebras sobre esta opérada A_∞ en la categoría de espacios (conjuntos simpliciales) son precisamente los espacios de lazos. En la categoría de espectros simétricos (que está enriquecida en conjuntos simpliciales) las álgebras sobre A_∞ son los espectros anillo estrictos, también llamados espectros anillo A_∞. El principal resultado de este capítulo es el siguiente teorema de conservación de álgebras sobre opéradas cofibrantes.

Teorema. *Sea $\mathcal{O}$ una opérada cofibrante en conjuntos simpliciales y sea $\mathcal{S}$ una categoría de modelos simplicial y monoidal. Sea L un funtor de localización homotópica en $\mathcal{S}$. Supongamos que X es un objeto cofibrante de $\mathcal{S}$ y además un álgebra sobre $\mathcal{O}$, y que la aplicación natural*

$$\mathrm{Map}((LX)^{\odot n}, LX) \longrightarrow \mathrm{Map}(X^{\odot n}, LX)$$

es una equivalencia débil de conjuntos simpliciales para todo n. Entonces LX es un álgebra sobre $\mathcal{O}$ y la aplicación de localización $l\colon X \to LX$ es un morfismo de álgebras sobre $\mathcal{O}$.

Las dos aplicaciones principales de este teorema se dan en la categoría de conjuntos simpliciales y en la categoría de espectros simétricos. En la categoría de conjuntos simpliciales, cualquier funtor de localización satisface las condiciones del teorema, ya que, la localización conmuta con productos finitos en esta categoría. Por lo tanto, la localización de un espacio de lazos es homotópicante equivalente a un espacio de lazos. Este hecho fue demostrado con otros métodos en [Bou96], [Far96, 3.A.3] o [Baz01].

En la categoría de espectros simétricos, dado un espectro anillo X, la aplicación

$$X \wedge \ldots \wedge X \longrightarrow LX \wedge \ldots \wedge LX$$

induce una equivalencia débil de conjuntos simpliciales

$$\mathrm{Map}(LX \wedge \ldots \wedge LX, LX) \simeq \mathrm{Map}(X \wedge \ldots \wedge X, LX)$$

cuando el funtor L conmuta con la suspensión o cuando X y LX son ambos conectivos. En los dos casos, la localización de un espectro anillo (estricto) es homotópicamente equivalente a un espectro anillo (estricto). La condición de conectividad es necesaria, ya que como hemos visto en un ejemplo anterior, la sección de Postnikov de nivel cero del espectro anillo $K(n)$ de la n-ésima teoría K de Morava no es ni siquiera un espectro anillo homotópico.

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a Carles Casacuberta, que un día hace ya cinco años aceptó convertirse en director de tesis de un estudiante de doctorado que venía de Logroño. Durante todo este tiempo he aprendido y disfrutado de las matemáticas con él, pero también me ha enseñado muchas otras cosas que no están en los libros. Tanto en el terreno profesional como en el personal he contado siempre con su apoyo. Su constante ayuda, dedicación y paciencia han hecho posible esta memoria.

Quisiera agradecer también a todas las personas que han colaborado de alguna manera en la consecución de este trabajo. A John Greenlees por darme la oportunidad de pasar dos meses en el Isaac Newton Institute de Cambridge. Las conversaciones mantenidas con él y con Stefan Schwede me permitieron desarrollar y completar las ideas del capítulo 7 de la memoria. A Gustavo Granja, Mark Hovey y Neil Strickland por sus observaciones y nuevos enfoques. También a A. K. Bousfield por sus valiosas sugerencias y comentarios sobre los capítulos 5 y 6 de la memoria. A Ieke Moerdijk, Pepijn van der Laan y Jeff Smith, cuyas aportaciones fueron fundamentales para terminar el último capítulo de este trabajo.

Agradecer el apoyo en todo momento de los miembros del Grupo de Topología Algebraica de la Universitat Autònoma de Barcelona, en especial de Gemma, por todos los momentos compartidos, y de Ramón.

También me gustaría agradecer a todo el Departament d'Àlgebra i Geometria de la Universitat de Barcelona, del que ahora formo parte, por su cálida acogida.

No podría olvidarme de mis profesores de carrera de Logroño: Ignacio, Tere y Luis Javier. Gracias a ellos tuve la oportunidad de poder venir a Barcelona a realizar mis estudios de doctorado, que concluyen con esta memoria.

Por último, dar las gracias a mi familia, a mis padres y a mi hermana, que siempre han estado ahí en los momentos más difíciles, y sobre todo a Elena. A ellos en especial va dedicada esta tesis.

Javier J. Gutiérrez Marín
Barcelona, mayo de 2004

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Homotopía estable

Un fenómeno *estable* en topología algebraica es algo que ocurre independientemente de la dimensión cuando ésta es suficientemente grande. Un claro ejemplo de fenómeno estable y que se puede considerar como uno de los puntos de partida de la homotopía estable es el teorema de la suspensión de Freudenthal [Fre37], en el que se demuestra que dados dos CW-complejos de dimensión finita X e Y, la aplicación inducida por el funtor suspensión

$$[X, Y] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma X, \Sigma Y]$$

entre las clases de homotopía de aplicaciones continuas es una biyección si $\dim X < 2|Y| - 2$, donde $|Y|$ denota el grado de conectividad de Y, es decir, $|Y| = \text{mín}\{k \mid [\Sigma^k S, Y] \neq 0\}$. Por lo tanto, la sucesión

$$[X, Y] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma X, \Sigma Y] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma^2 X, \Sigma^2 Y] \longrightarrow \cdots$$

se estabiliza en algún momento. El teorema de la suspensión de Freudenthal tiene como consecuencia que los grupos de homotopía de las esferas son estables cuando la dimensión es suficientemente alta. Más concretamente, el homomorfismo de grupos

$$\pi_{n+k}(S^n) \longrightarrow \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$$

es un isomorfismo cuando $n > k + 1$.

A partir del estudio de estos fenómenos estables, surge la idea de construir una categoría homotópica en la cual desaparezcan estos problemas dependientes de la dimensión, es decir, en la cual el funtor suspensión sea invertible.

El primer intento de categoría para la homotopía estable fue la construida por Spanier y Whitehead en 1953 [SW53]. Los objetos de esta categoría son pares (X, n), donde X es un CW-complejo y $n \in \mathbb{Z}$, y los morfismos entre dos objetos (X, n) e (Y, m) se definen como

$$\{(X, n), (Y, m)\} = \operatorname*{colím}_{k \to +\infty} [\Sigma^{k+n} X, \Sigma^{k+m} Y].$$

Dos objetos (X, n) e (Y, m) son equivalentes si y sólo si $\Sigma^{k+n}X$ y $\Sigma^{k+m}Y$ son equivalentes para un k suficientemente grande. Podemos definir dos funtores de suspensión: uno formal $\sigma(X, n) = (X, n + 1)$ y otro geométrico $\Sigma(X, n) = (\Sigma X, n)$. Estos dos funtores son equivalentes, es decir, para todo objeto (X, n) hay una equivalencia natural $\sigma(X, n) \simeq \Sigma(X, n)$. El teorema de la suspensión de Freudenthal siempre es cierto en la categoría de Spanier y Whitehead, independientemente de la dimensión, esto es, la aplicación natural

$$\{(X, n), (Y, m)\} \longrightarrow \{\Sigma(X, n), \Sigma(Y, m)\}$$

es un isomorfismo para cualquiera (X, n) e (Y, m). Esta categoría tiene buenas propiedades, pues es aditiva y monoidal, con un producto *smash* $\wedge$ definido por

$$(X, n) \wedge (Y, m) = (X \wedge Y, n + m).$$

Pero presenta también algunos problemas. El principal es que no cumple el teorema de representabilidad de Brown. Hay teorías de cohomología que no están representadas por ningún objeto de esta categoría.

Después de la categoría de Spanier y Whitehead, el siguiente paso en la construcción de la categoría estable viene marcado por el concepto de espectro. Los espectros son los objetos de la categoría homotópica estable. La primera noción de espectro se debe a Lima [Lim59]. Un espectro se define como una sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de espacios (conjuntos simpliciales o CW-complejos) con punto base, junto con aplicaciones de estructura

$$\varepsilon_n \colon \Sigma E_n \longrightarrow E_{n+1}$$

cuyas propiedades generalizan el estudio de las propiedades homotópicas estables de los espacios. De alguna manera, un espectro trata de contener toda la información posible de un espacio y sus suspensiones.

A lo largo de los años 60 y tras la publicación de algunos trabajos, entre otros de Brown [Bro63], Puppe [Pup62] y Whitehead [Whi62a], [Whi62b], se fijan cuáles deben ser las principales características de la categoría homotópica estable. Esta categoría ha de reunir los siguientes requisitos:

- Tener productos y coproductos arbitrarios.
- Cualquier teoría de cohomología debe ser representable (teorema de representabilidad de Brown).
- Tener un producto *smash* asociativo, conmutativo y unitario (es por tanto una categoría monoidal).
- Ser una categoría triangulada.

La primera construcción de una categoría que comprendiera todas estas propiedades fue llevada a cabo por Boardman en 1964 en su tesis doctoral [Boa64]. A partir de entonces, se llevaron a cabo varios refinamientos de la construcción original de Boardman. Quizá el más estudiado y el que hoy día se tiene como referencia básica de la categoría homotópica estable es el de Adams [Ada74], que describiremos en la sección 1.2.

El punto débil de la categoría de Adams–Boardman es el de la construcción del producto *smash*. En esta categoría el producto *smash* de espectros es asociativo y conmutativo únicamente salvo homotopía. Es decir la categoría de espectros no es monoidal simétrica (aunque sí lo es su categoría homotópica asociada). Esto hace que objetos que se definen utilizando el producto *smash*, como pueden ser los espectros anillo y los espectros módulo, sean objetos que tienen sentido únicamente en la categoría homotópica.

Este problema llevó a reformular las características de una buena categoría de espectros, que son las siguientes (las definiciones se recuerdan con detalle en las secciones 1.4 y 2.1):

- Estructura de categoría de modelos.
- Tensorizada y cotensorizada sobre conjuntos simpliciales (o espacios topológicos).
- Monoidal, simétrica y cerrada.
- Su categoría homotópica, obtenida invirtiendo las equivalencias débiles, debe ser equivalente a la de Adams–Boardman.

La construcción de una categoría de espectros con un producto *smash* estrictamente asociativo, conmutativo y con unidad ha sido uno de los problemas importantes dentro de la teoría de homotopía estable. La solución a este problema no se produjo hasta 30 años después, con la aparición de dos nuevas categorías para modelar la homotopía estable. Estas nuevas categorías son la categoría de los S-módulos [EKMM97], que recoge las ideas de Peter May y varios coautores, y la categoría de los espectros simétricos [HSS00], debida principalmente a Jeff Smith.

Ambas categorías poseen un producto *smash* asociativo, conmutativo y con unidad. Además están dotadas de una estructura de categoría de modelos en el sentido de Quillen. La categoría de espectros simétricos es técnicamente más simple que la de los S-módulos, aunque cada una de ellas tiene sus ventajas dependiendo de las aplicaciones. Sin embargo, sus categorías homotópicas asociadas son equivalentes a la categoría de Adams–Boardman.

1.2. La categoría homotópica estable

La referencia básica para la categoría homotópica estable de los espectros es la desarrollada por Adams en [Ada74]; también puede encontrarse una descripción de esta categoría en [Rud98] o [Swi75]. En esta sección vamos a describir esta categoría, centrándonos en las definiciones y construcciones básicas, el producto *smash* de espectros y las teorías de homología y cohomología generalizadas. Las demostraciones de los teoremas pueden encontrarse principalmente en [Ada74].

Definiciones y propiedades básicas

Definición 1.2.1. Un *espectro* E es una sucesión $\{E_n, \varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de CW-complejos E_n con punto base y aplicaciones $\varepsilon_n\colon \Sigma E_n \longrightarrow E_{n+1}$, donde ΣE_n es la suspensión reducida de E_n, es decir, $\Sigma E_n = S^1 \wedge E_n$. A estos espectros se les llama *CW-espectros*. Un *subespectro* de un espectro E es un espectro $\{F_n, \tau_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que F_n es un CW-subcomplejo de E_n con punto base y $\tau_n\colon \Sigma F_{n+1} \longrightarrow F_n$ es la restricción de ε_n a ΣF_{n+1}.

Si las aplicaciones ε_n son equivalencias débiles para un n suficientemente grande, entonces se dice que el espectro es un Σ-*espectro* o un *espectro* *suspensión*. Si las aplicaciones adjuntas a las aplicaciones de estructura $\varepsilon'_n \colon E_n \longrightarrow \Omega E_{n+1}$ son equivalencias débiles para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces se dice que E es un Ω-*espectro*.

Ejemplo 1.2.2. Dado un CW-complejo X, podemos asociarle un espectro $\Sigma^\infty X$ del siguiente modo:

$$(\Sigma^\infty X)_n = \begin{cases} \Sigma^n X & \text{si } n \geq 0, \\ * & \text{si } n < 0, \end{cases}$$

donde cada ε_n es la identidad. El espectro $\Sigma^\infty X$ se llama *espectro suspensión de* X. Un caso particular importante es el del *espectro de las esferas* $\Sigma^\infty S^0$, que denotaremos simplemente por S.

Ejemplo 1.2.3. Dado un grupo abeliano A, podemos construir un Ω-espectro HA, que llamaremos *espectro de Eilenberg–Mac Lane* asociado a A, del siguiente modo:

$$(HA)_n = \begin{cases} K(A,n) & \text{si } n \geq 0, \\ * & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Las aplicaciones ε'_n son equivalencias débiles, ya que $\Omega K(A, n+1) \simeq K(A,n)$ y $\Omega K(A,0) = *$.

Una propiedad importante de los espectros es que podemos suspenderlos y desuspenderlos tantas veces como sea necesario. Dado un espectro E y un entero k, definimos un nuevo espectro $\Sigma^k E$, donde $(\Sigma^k E)_n = E_{n+k}$ y la aplicación $\Sigma(\Sigma^k E)_n \longrightarrow (\Sigma^k E)_{n+1}$ es ε_{n+k}.

Los grupos de homotopía de un espectro son los grupos de homotopía estables. Para un espectro dado E, tenemos la siguiente sucesión de homomorfismos

$$\pi_{n+k}(E_n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{n+k+1}(\Sigma E_n) \xrightarrow{(\varepsilon_n)_*} \pi_{n+k+1}(E_{n+1}) \longrightarrow \cdots .$$

Se define el k-ésimo grupo de homotopía, $\pi_k(E)$, como el límite directo de este diagrama:

$$\pi_k(E) = \lim_{n \to +\infty} \pi_{n+k}(E_n).$$

Ejemplo 1.2.4. En el caso del espectro de Eilenberg-Mac Lane HA, tenemos que

$$\pi_k(HA) = \lim_{n \to +\infty} \pi_{n+k}(K(A,n)) = \begin{cases} A & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Para cada CW-complejo, los grupos de homotopía del espectro $\Sigma^\infty X$ se llaman grupos de homotopía estable de X:

$$\pi_k(\Sigma^\infty X) = \lim_{n\to+\infty} \pi_{n+k}(\Sigma^n X) = \pi_k^s(X).$$

Una vez que tenemos los objetos de la categoría homotópica estable, pasamos a describir cuáles son los morfismos.

Definición 1.2.5. Sean (E_n, ε_n) y (F_n, τ_n) dos espectros. Una *función* entre espectros $f\colon E \longrightarrow F$ es una familia de aplicaciones celulares que preservan el punto base $f_n\colon E_n \longrightarrow F_n$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Sigma E_n \arrow[r, "\Sigma f_n"] \arrow[d, "\varepsilon_n"'] & \Sigma F_n \arrow[d, "\tau_n"] \\ E_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"'] & F_{n+1} \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.2.6. Una *celda* de un espectro E es una sucesión

$$(e, \Sigma e, \ldots, \Sigma^k e, \ldots),$$

donde e es una celda de algún E_n, de tal manera que e no es la suspensión de ninguna celda de E_{n-1}. Un subespectro F de un espectro E se dice *cofinal* en E si cada celda de E va a parar en algún momento a F, es decir, para cada celda de E_n existe un m tal que $\Sigma^m e$ está contenido en F_{n+m}.

Definición 1.2.7. Sean E y F dos espectros. Consideremos el conjunto $\mathcal{S}$ de todos los pares (E', f') tales que $E' \subset E$ es un subespectro cofinal y $f'\colon E' \longrightarrow F$ es una función. Definimos en $\mathcal{S}$ la siguiente relación de equivalencia: $(f', E') \sim (f'', E'')$ si y sólo si existe un par (E''', f''') donde $E''' \subset E' \cap E''$, E''' es cofinal y $f' \mid E''' = f''' = f'' \mid E'''$. Llamamos *aplicación* de espectros de E a F a cada una de estas clases de equivalencia.

El siguiente paso será definir cuál es la categoría homotópica de los espectros. Para poder definir homotopías entre aplicaciones de espectros, tenemos que definir primero el producto *smash* de un espectro con un espacio. Si (E_n, ε_n) es un espectro y X es un CW-complejo, definimos el espectro $E \wedge X$ como $(E \wedge X)_n = E_n \wedge X$. Las aplicaciones de estructura serán $\widetilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_n \wedge 1$.

Definición 1.2.8. Dos aplicaciones de espectros $f_0, f_1 \colon E \longrightarrow F$ se dicen *homótopas* y se denota $f_0 \simeq f_1$, si existe una aplicación $H \colon E \wedge I^+ \longrightarrow F$ tal que $h \circ i_0 = f_0$ y $h \circ i_1 = f_1$, donde $i_0, i_1 \colon E \longrightarrow E \wedge I^+$ son las aplicaciones inducidas por las inclusiones de 0 y 1 en I^+ respectivamente.

La relación de homotopía entre aplicaciones es una relación de equivalencia. El conjunto de clases de equivalencia de aplicaciones $f \colon E \longrightarrow F$ se denota por $[E, F]$. Una de las propiedades fundamentales de la categoría homotópica estable es que la suspensión da lugar a una biyección natural $[E, F] \cong [\Sigma E, \Sigma F]$. Esta biyección implica entre otras cosas que el conjunto $[E, F]$ es un grupo abeliano para cada E y F.

Definición 1.2.9. La *categoría homotópica estable de los espectros* es la categoría que tiene por objetos los espectros y por morfismos las clases de homotopía de aplicaciones de espectros.

Podemos dar una definición equivalente de los grupos de homotopía de un espectro usando las clases de homotopía, $\pi_r(E) = [\Sigma^r S, E]$. Todos los grupos de homotopía de un espectro son grupos abelianos.

Definición 1.2.10. Un espectro E se dice *conectivo* si $\pi_i(E) = 0$ para $i < 0$. A veces también se utiliza el término *n-conexo* para un espectro E tal que $\pi_k(E) = 0$ si $k \leq n$. Así, un espectro conectivo es un espectro (-1)-conexo.

Definición 1.2.11. Dado un espectro E, una *torre de Postnikov* de E es un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & E_{(n+2)} \arrow[r] & E_{(n+1)} \arrow[r] & E_{(n)} \arrow[r] & E_{(n-1)} \arrow[r] & E_{(n-2)} \arrow[r] & \cdots \\
 & & & E \arrow[ull, "\tau_{n+2}"] \arrow[ul, "\tau_{n+1}"] \arrow[u, "\tau_n"] \arrow[ur, "\tau_{n-1}"'] \arrow[urr, "\tau_{n-2}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

tal que, para cada $k \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

i) $\pi_i(E_{(k)}) = 0$ para todo $i > k$.

ii) La aplicación $(\tau_i)_* \colon \pi_i(E) \longrightarrow \pi_i(E_{(k)})$ es un isomorfismo para $i \leq k$.

El espectro $E_{(n)}$ se llama la *n-ésima sección de Postnikov* de E. Para todo espectro E existe una torre de Postnikov, que se construye inductivamente y en la cual cada $E_{(k)}$ está determinado por E salvo equivalencia [Rud98, teorema 4.13].

Definición 1.2.12. Dada una aplicación de espectros $f\colon E \longrightarrow F$, diremos que la sucesión

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{i} Cf$$

es una *sucesión fibra-cofibra estricta* o una *cofibración estricta*, donde el espectro Cf es el cono de la aplicación f, que se define tomando el cono en cada f_n. Una sucesión de la forma

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

se dice que es una *sucesión fibra-cofibra*, un *triángulo exacto* o una *cofibración* si existe una aplicación $f\colon E \longrightarrow F$ y un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[d, "\gamma"'] \\ E \arrow[r, "f"'] & F \arrow[r, "i"'] & Cf \end{tikzcd}$$

que es conmutativo salvo homotopía, donde α, β y γ son equivalencias homotópicas. Por simplicidad, utilizaremos el término cofibración para referirnos a las sucesiones fibra-cofibra. Así, si $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ es una cofibración, X y Z denotarán respectivamente la fibra y la cofibra de la cofibración.

Cada cofibración $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ se puede prolongar hacia la derecha y hacia la izquierda indefinidamente, originando una sucesión

$$\cdots \longrightarrow \Sigma^{-1}Y \xrightarrow{\Sigma^{-1}g} \Sigma^{-1}Z \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \longrightarrow \cdots$$

que da lugar a dos sucesiones exactas [Ada74, III, proposiciones 3.9 y 3.10].

Teorema 1.2.13. *La cofibración $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ da lugar a dos sucesiones exactas de grupos abelianos*

$$\cdots \longleftarrow [\Sigma^{-1}Z, E] \longleftarrow [X, E] \xleftarrow{f^*} [Y, E] \xleftarrow{g^*} [Z, E] \longleftarrow [\Sigma X, E] \longleftarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow [E, \Sigma^{-1}Z] \longrightarrow [E, X] \xrightarrow{f_*} [E, Y] \xrightarrow{g_*} [E, Z] \longrightarrow [E, \Sigma X] \longrightarrow \cdots$$

para cada espectro E. □

Cuando trabajamos con CW-complejos, la primera de estas sucesiones es similar a la sucesión exacta asociada con una cofibración $f\colon X \longrightarrow Y$ con cofibra Z, y la segunda es similar a la sucesión exacta asociada a una fibración $f\colon X \longrightarrow Y$ con fibra $\Sigma^{-1}Z$. En la categoría homotópica estable desaparece la distinción entre fibraciones y cofibraciones.

El producto *smash* de espectros

Anteriormente hemos definido el producto *smash* de un espectro con un CW-complejo. Se puede construir un producto *smash* entre espectros que generalice este caso. La construcción de este producto *smash* es bastante técnica. La idea intuitiva es la siguiente: dados dos espectros E y F, definir $E \wedge F$ como $\lim_{n,m\to+\infty} E_n \wedge F_m$. Más concretamente, si $E \wedge F = P$, entonces se define $P_k = E_{n(k)} \wedge Y_{m(k)}$ de tal manera que $k = n(k)+m(k)$ y $n(k)$ y $m(k)$ tienden a infinito cuando k tiende a infinito. Una descripción detallada de esta construcción se encuentra en [Ada74, III, §4].

Lo que sí vamos a describir con detalle son las propiedades fundamentales de este producto *smash*, que son además las propiedades que debe tener un producto *smash* en cualquier categoría estable:

- Es un funtor covariante en cada una de sus dos componentes.

- Hay equivalencias homotópicas naturales:

$$\begin{aligned} a_{(E,F,G)}\colon (E \wedge F) \wedge G &\longrightarrow E \wedge (F \wedge G), \\ \tau_{(E,F)}\colon E \wedge F &\longrightarrow F \wedge E, \\ l\colon S \wedge E &\longrightarrow E, \\ r\colon E \wedge S &\longrightarrow E, \\ \Sigma_{(E,F)}\colon \Sigma E \wedge F &\longrightarrow \Sigma(E \wedge F). \end{aligned}$$

- Sea $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espectros y sean $i_\alpha\colon E_\alpha \longrightarrow \vee_{\alpha\in I} E_\alpha$ las correspondientes inclusiones. Entonces la aplicación natural

$$\vee_{\alpha\in I}(E_\alpha \wedge F) \longrightarrow (\vee_{\alpha\in I} E_\alpha) \wedge F$$

dada por las aplicaciones $i_\alpha \vee 1$ es una equivalencia homotópica.

- Los siguientes diagramas que relacionan las equivalencias homotópicas naturales a, τ, l, y r conmutan salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} ((E \wedge F) \wedge G) \wedge H \arrow[r, "a"] \arrow[d, equal] & (E \wedge F) \wedge (G \wedge H) \arrow[r, "a"] & E \wedge (F \wedge (G \wedge H)) \\ ((E \wedge F) \wedge G) \wedge H \arrow[r, "a\wedge 1"] & (E \wedge (F \wedge G)) \wedge H \arrow[r, "a"] & E \wedge ((F \wedge G) \wedge H), \arrow[u, "1\wedge a"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(E \wedge F) \wedge G \arrow[r, "\tau\wedge 1"] \arrow[d, "a"'] & (F \wedge E) \wedge G \arrow[r, "a"] & F \wedge (E \wedge G) \arrow[d, "1\wedge\tau"] \\
E \wedge (F \wedge G) \arrow[r, "\tau"] & (F \wedge G) \wedge E \arrow[r, "a"] & F \wedge (G \wedge E),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
E \wedge F \arrow[r, equal] \arrow[d, "\tau"'] & E \wedge F \\
F \wedge E \arrow[r, equal] & F \wedge E, \arrow[u, "\tau"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S \wedge S \arrow[r, "1"] \arrow[d, equal] & S \wedge S \arrow[d, equal] \\
S \wedge S \arrow[r, "\tau"] & S \wedge S,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(S \wedge E) \wedge F \arrow[r, "a"] \arrow[d, "l\wedge 1"'] & S \wedge (E \wedge F) \arrow[d, "l"] \\
E \wedge F \arrow[r, equal] & E \wedge F,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(E \wedge F) \wedge S \arrow[r, "a"] \arrow[d, "r"'] & E \wedge (F \wedge S) \arrow[d, "1\wedge r"] \\
E \wedge F \arrow[r, equal] & E \wedge F,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(E \wedge S) \wedge F \arrow[r, "a"] \arrow[d, "r\wedge 1"'] & E \wedge (S \wedge F) \arrow[d, "1\wedge l"] \\
E \wedge F \arrow[r, equal] & E \wedge F,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S \wedge E \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "l"'] & E \wedge S \arrow[d, "r"] \\
E \arrow[r, equal] & E.
\end{tikzcd}$$

Dados dos espectros Y y Z, el funtor $[- \wedge Y, Z]$ es un funtor representable por el teorema de representabilidad de Brown. Por lo tanto, existe un espectro que denotamos por $F(Y, Z)$, único salvo homotopía, que cumple

$$[X \wedge Y, Z] \cong [X, F(Y, Z)]$$

y al que llamamos el *espectro de funciones*. El funtor $F(Y, -)$ es un adjunto por la derecha del funtor $- \wedge Y$.

Homología y cohomología

Dado un espectro E y un entero k, definimos la E-homología y la E-cohomología respectivamente de otro espectro X de la siguiente manera

$$E_k(X) = \pi_k(E \wedge X) = [\Sigma^k S, E \wedge X],$$
$$E^k(X) = \pi_{-k}(F(X, E)) = [X, \Sigma^k E].$$

El espectro de Eilenberg–Mac Lane HG da lugar a la homología y cohomología ordinarias con coeficientes en G. El espectro S de las esferas da lugar también a una teoría de homología y cohomología, llamadas homotopía y cohomotopía estable.

Para cada grupo abeliano G, existe un espectro MG, único salvo homotopía con las siguientes propiedades:

- $\pi_i(MG) = 0$ para $i < 0$.
- $\pi_0(MG) \cong G \cong (H\mathbb{Z})_0(MG)$.
- $(H\mathbb{Z})_i(MG) = 0$ para $i \neq 0$.

El espectro MG se llama *espectro de Moore* asociado al grupo abeliano G. El teorema de Hurewicz [Rud98, II.4.6] relaciona los grupos de homotopía de un espectro conectivo con sus grupos de homología.

Teorema 1.2.14. *Sea $\alpha\colon S \longrightarrow E$ una aplicación que induce isomorfismo en π_0 y sea X un espectro. Si $\pi_i(X) = 0$ para $i < n$, entonces $E_i(X) = 0$ para $i < n$ y la aplicación*

$$\alpha_* = (\alpha \wedge 1)_*\colon \pi_k(X) \longrightarrow E_k(X)$$

es un isomorfismo para $k = n$ y un epimorfismo para $k = n+1$. □

Corolario 1.2.15. *Si $f\colon X \longrightarrow Y$ es una aplicación entre espectros conectivos tal que $(H\mathbb{Z})_k(f)\colon (H\mathbb{Z})_k(X) \longrightarrow (H\mathbb{Z})_k(Y)$ es un isomorfismo para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces f es una equivalencia homotópica.* □

Para cada espectro X tenemos un homomorfismo

$$h = (\iota \wedge 1)_*\colon \pi_k(X) \longrightarrow (H\mathbb{Z})_k(X),$$

donde $\iota\colon S \longrightarrow H\mathbb{Z}$ corresponde a la unidad en $\pi_0(H\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. El homomorfismo h se llama homomorfismo de Hurewicz.

En la categoría homotópica estable también hay un teorema de coeficientes universales que relaciona la homología y cohomología con coeficientes con la homología entera [Rud98, II.4.9] y una fórmula de Künneth para la homología del producto *smash* de dos espectros [Mar83, 6.2, proposición 7].

Teorema 1.2.16. *Para cada espectro E y cada grupo abeliano G tenemos dos sucesiones exactas cortas de grupos abelianos*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}((H\mathbb{Z})_{n-1}(E), G) \longrightarrow (HG)^n(E) \longrightarrow \mathrm{Hom}((H\mathbb{Z})_n(E), G) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow (H\mathbb{Z})_n(E) \otimes G \longrightarrow (HG)_n(E) \longrightarrow \mathrm{Tor}((H\mathbb{Z})_{n-1}(E), G) \longrightarrow 0,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. □

En particular, $\pi_0(HB \wedge HA) = (HB)_0(HA) \cong A \otimes B$ y $[HA, HB] = (HB)^0(HA) \cong \mathrm{Hom}(A, B)$ para cualesquiera grupos abelianos A, B.

Teorema 1.2.17. *Dados dos espectros E y F cualesquiera, tenemos una sucesión exacta corta de grupos abelianos*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} (H\mathbb{Z})_i(E) \otimes (H\mathbb{Z})_j(F) \longrightarrow (H\mathbb{Z})_n(E \wedge F)$$
$$\longrightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}((H\mathbb{Z})_i(E), (H\mathbb{Z})_j(F)) \longrightarrow 0,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. □

Este teorema es válido también si sustituimos $\mathbb{Z}$ por cualquier anillo R que sea un dominio de ideales principales, cambiando $\otimes$ y Tor por $\otimes_R$ y Tor_R respectivamente.

1.3. Modelos para la categoría homotópica estable

La categoría de espectros simétricos [HSS00] proporciona la construcción más simple de una categoría de espectros dotada de un producto *smash* estricto, esto es, un producto *smash* asociativo y conmutativo antes de pasar a la categoría homotópica. Con este producto *smash*, esta categoría es simétrica y monoidal, y esto permite una buena definición de espectros anillo (monoides en la categoría), espectros módulo (módulos sobre monoides en la categoría) y sus respectivas categorías homotópicas. Denotaremos esta categoría por Sp^Σ.

Un *espectro simétrico* es una sucesión de conjuntos simpliciales con punto base $\{X_n\}_{n\geq 0}$ junto con aplicaciones de estructura

$$\sigma\colon S^1 \wedge X_n \longrightarrow X_{n+1}$$

que preservan el punto base y una acción por la izquierda del grupo simétrico Σ_n sobre X_n para cada n. Además la composición

$$\sigma^k = \sigma \circ (S^1 \wedge \sigma) \circ \cdots \circ (S^{k-1} \wedge \sigma)\colon S^k \wedge X_n \longrightarrow X_{n+k}$$

dada por las aplicaciones $S^i \wedge S^1 \wedge X_{n+k-i+1} \xrightarrow{S^i \wedge \sigma} S^1 \wedge X_{n+k-i}$ es $\Sigma_k \times \Sigma_n$-equivariante para $k \geq 1$ y $n \geq 0$. Un *morfismo de espectros simétricos*

$f\colon X \longrightarrow Y$ es una sucesión de aplicaciones $f_n\colon X_n \longrightarrow Y_n$ que conservan el punto base tal que cada f_n es Σ_n-equivariante y el diagrama

$$\begin{tikzcd} S^1 \wedge X_n \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "1\wedge f_n"'] & X_{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\ S^1 \wedge Y_n \arrow[r, "\sigma"'] & Y_{n+1} \end{tikzcd}$$

es conmutativo para cada $n \geq 0$.

Es posible dotar a esta categoría de una estructura de categoría de modelos simplicial [HSS00, §3 y §5] (véase la definición de categoría de modelos en la sección 2.1). Se define el conjunto simplicial

$$\mathrm{Map}_{Sp^\Sigma}(X,Y) = Sp^\Sigma(X \wedge \Delta[n]_+, Y).$$

Prolongando los funtores de conjuntos simpliciales $(-)^K$ y $- \wedge K$ según [HSS00, definición 1.2.9], se definen los espectros simétricos X^K y $X \otimes K$ para todo espectro simétrico X y todo conjunto simplicial K. Esto nos da la estructura simplicial en Sp^Σ. Se definen también las siguientes clases de morfismos en Sp^Σ:

- **Equivalencias estables**: Una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$ es una equivalencia estable si la aplicación

$$E^0 f\colon E^0(Y) \longrightarrow E^0(X)$$

  es un isomorfismo para todo Ω-espectro inyectivo E (véase [HSS00, definición 3.1.1]).

- **Cofibraciones estables**: Una aplicación f es una cofibración estable si tiene la propiedad de elevación por la izquierda con respecto a todas las aplicaciones $g\colon X \longrightarrow Y$ tales que $g_n\colon X_n \longrightarrow Y_n$ es una fibración trivial de conjuntos simpliciales para todo n.

- **Fibraciones estables**: Una aplicación f es una fibración estable si tiene la propiedad de elevación por la derecha con respecto a todas las aplicaciones $g\colon X \longrightarrow Y$ tales que $g_n\colon X_n \longrightarrow Y_n$ es una cofibración trivial de conjuntos simpliciales para todo n.

La categoría de espectros simétricos con las equivalencias estables como equivalencias débiles, las cofibraciones estables como cofibraciones y las fibraciones estables como fibraciones tiene estructura de categoría de modelos [HSS00, sección 3.4].

Teorema 1.3.1. *La categoría de espectros simétricos es una categoría de modelos simplicial, monoidal y simétrica, cuya categoría homotópica es equivalente a la de Adams–Boardman.* □

La categoría de los S-módulos de Peter May [EKMM97] fue la primera categoría de modelos para la homotopía estable con un verdadero producto *smash* estricto. Los S-módulos se definen a partir de espectros indizados no por los enteros, sino por el conjunto de subespacios de dimensión finita de un espacio con un producto real interno $U \cong \mathbb{R}^\infty$. Así, un espectro E asigna a cada subespacio de dimensión finita V de U un espacio con punto base EV, junto con aplicaciones (adjuntas) de estructura

$$\tilde{\sigma}_{V,W} \colon EV \xrightarrow{\cong} \Omega^{W \setminus V} EW$$

cuando $V \subset U$. El espacio $W \setminus V$ es el complemento ortogonal de V en W, y $\Omega^W X$ es el espacio de aplicaciones $\mathrm{Map}(S^W, X)$ que conservan el punto base, donde S^W es la compactificación por un punto de W. Además, las aplicaciones $\tilde{\sigma}_{V,W}$ deben ser homeomorfismos. Un morfismo de espectros $f \colon E \longrightarrow E'$ es una sucesión de aplicaciones que conservan el punto base $f_V \colon EV \longrightarrow E'V$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
EV \arrow[r, "f_V"] \arrow[d, "\tilde{\sigma}_{V,W}"'] & E'V \arrow[d, "\tilde{\sigma}'_{V,W}"] \\
\Omega^{W \setminus V} EW \arrow[r, "\Omega^{W \setminus V} f_W"'] & \Omega^{W \setminus V} E'W.
\end{tikzcd}$$

La categoría de los S-módulos también es una categoría con una estructura de modelos, monoidal y simétrica [EKMM97, VII.4] y su categoría homotópica es equivalente a la de Adams–Boardman. No describiremos aquí la estructura de categoría de modelos de los S-módulos, ya que en el resto de la memoria utilizaremos únicamente la categoría de espectros simétricos cuando necesitemos trabajar específicamente en una categoría de modelos.

Aunque son de naturaleza bastante distinta, es posible establecer un funtor simétrico y monoidal entre la categoría de los S-módulos y la categoría de espectros simétricos que induce equivalencias entre las respectivas categorías homotópicas de espectros anillo y espectros módulo [Sch01].

1.4. Axiomática de la categoría homotópica estable

Las propiedades formales de la categoría homotópica estable de los espectros de Adams y Boardman son compartidas por una clase de categorías que se llaman *categorías homotópicas estables*. Estas propiedades comunes se describen en [Mar83] y [HPS97], donde se da un tratamiento axiomático de estas categorías. Esencialmente, una categoría homotópica estable es una categoría triangulada monoidal y cerrada, junto con un conjunto de generadores que satisfacen la dualidad de Spanier–Whitehead. La categoría homotópica de los espectros de Adams y Boardman es el prototipo de categoría homotópica estable, pero hay otros ejemplos tanto topológicos como algebraicos, como veremos al final de esta sección.

Comenzaremos recordando las definiciones de las estructuras básicas de una categoría homotópica estable: es una categoría triangulada y monoidal. Las definiciones y propiedades más importantes sobre categorías trianguladas pueden encontrarse en el libro de Neeman [Nee01]. Las categorías monoidales están desarrolladas por ejemplo en [Mac71].

Definición 1.4.1. Una *triangulación* en una categoría aditiva $\mathcal{C}$ consiste en un funtor aditivo $\Sigma\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ junto con una colección de diagramas Δ, que llamaremos *triángulos exactos* o *cofibraciones*, de la forma

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

y tales que

i) Cualquier diagrama isomorfo a un diagrama de Δ está en Δ.

ii) El diagrama $0 \longrightarrow X \xrightarrow{1} X \longrightarrow 0$ está en Δ para todo X de $\mathcal{C}$.

iii) Si el diagrama $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ está en Δ, también lo está el diagrama $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y$.

iv) Dada una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$, existe un diagrama de la forma $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ que está en Δ.

v) Si tenemos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, dotted, "h"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"] \\
U \arrow[r] & V \arrow[r] & W \arrow[r] & \Sigma U
\end{tikzcd}$$

en el cual las dos filas están en Δ, entonces existe una aplicación (que no es única) $h\colon Z \longrightarrow W$ que hace que todo el diagrama conmute.

vi) Se cumple el axioma del octaedro de Verdier. Supongamos que tenemos aplicaciones $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ y triángulos exactos

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow U \longrightarrow \Sigma X,$$
$$X \xrightarrow{g\circ f} Z \longrightarrow V \longrightarrow \Sigma X,$$
$$Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow W \longrightarrow \Sigma Y.$$

Entonces podemos completarlos a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & U \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "1"] \\
X \arrow[r, "g\circ f"'] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r, "1"] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\Sigma X \arrow[r, "\Sigma f"] & \Sigma Y \arrow[r] & \Sigma U \arrow[r] & \Sigma^2 X,
\end{tikzcd}$$

donde la primera y la segunda fila y la segunda columna son los triángulos exactos dados, y cada fila y cada columna del diagrama es un triángulo exacto.

Una *categoría triangulada* $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva junto con una triangulación. Esta definición de categoría triangulada es la que aparece en [Mar83] o [Nee01] y es equivalente a la definición de Verdier [Ver77].

Dado un triángulo exacto o cofibración de la forma

$$\Sigma^{-1}Z \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z$$

llamaremos a Z la *cofibra* de f y a $\Sigma^{-1}Z$ la *fibra* de f. Si Z es la cofibra de f, nos referiremos a menudo a la sucesión $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z$ como una cofibración.

Un funtor $L\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ decimos que es un funtor *exacto* o *triangulado* cuando conmuta con el funtor Σ, es decir si hay un isomorfismo natural

$$L\Sigma X \longrightarrow \Sigma L X$$

para todo X de $\mathcal{C}$. Un funtor aditivo $H\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}b$ donde $\mathcal{A}b$ es la categoría de grupos abelianos se dice *exacto* si transforma triángulos exactos en sucesiones exactas de grupos. Un *funtor cohomológico* es un funtor exacto contravariante $H\colon \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ que envía coproductos a productos. Por ejemplo, el funtor $\mathcal{C}(-,Y)$ es un funtor cohomológico para todo Y de $\mathcal{C}$. Un funtor cohomológico H se dice *representable* si existe un objeto Y de $\mathcal{C}$ y un isomorfismo natural de funtores entre H y $\mathcal{C}(-,Y)$.

Una subcategoría $\mathcal{D}$ de una categoría triangulada $\mathcal{C}$ se dice que es una *subcategoría localizante* si está cerrada por triángulos exactos, coproductos y retractos, es decir:

i) Si $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ es un triángulo exacto en el cual entre X, Y y Z dos de ellos están en $\mathcal{D}$, el tercero también lo está.

ii) Cualquier coproducto de objetos de $\mathcal{D}$ está en $\mathcal{D}$.

iii) Si Y es un objeto de $\mathcal{D}$ y tenemos aplicaciones $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} X$ con $p \circ i = 1$, entonces X está en $\mathcal{D}$.

Definición 1.4.2. Una *categoría monoidal simétrica* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, S, a, r, l, c)$ es una categoría $\mathcal{C}$ junto con un bifuntor covariante $- \otimes -\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, un objeto S de $\mathcal{C}$, al que llamaremos unidad, e isomorfismos naturales

$$a_{X,Y,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \longrightarrow X \otimes (Y \otimes Z),$$
$$r_X\colon X \otimes S \longrightarrow X, \qquad l_X\colon S \otimes X \longrightarrow X,$$
$$c_{X,Y}\colon X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X,$$

para X, Y y Z de $\mathcal{C}$ cualesquiera, que cumplen ciertos axiomas de coherencia que vienen dados por la conmutatividad de los siguientes diagramas para X, Y, Z y W de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[r, "a"] \arrow[d, "a\otimes 1"'] & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[r, "a"] & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[rr, "a"'] & & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W), \arrow[u, "1\otimes a"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c\otimes 1"'] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "c"] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[d, "a"] \\
(Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "a"'] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[r, "1\otimes c"'] & Y \otimes (Z \otimes X),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes S) \otimes Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "r\otimes 1"'] & X \otimes (S \otimes Y) \arrow[dl, "1\otimes l"] \\
X \otimes Y, &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "c"] \arrow[d, "1"'] & Y \otimes X \arrow[dl, "c"] \\
X \otimes Y. &
\end{tikzcd}$$

Una categoría monoidal simétrica se dice que es *cerrada* si, para todo objeto Y de $\mathcal{C}$, el funtor $-\otimes Y : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tiene un adjunto por la derecha. Este adjunto lo denotaremos por $\operatorname{Hom}(Y,-)$ o $F(Y,-)$ y lo llamaremos *Hom interno* u *objeto de funciones interno*. Esta adjunción nos da una biyección

$$\mathcal{C}(X \otimes Y, Z) \cong \mathcal{C}(X, \operatorname{Hom}(Y, Z)) \tag{1.1}$$

para X, Y y Z de $\mathcal{C}$ cualesquiera.

Sea ahora $\mathcal{C}$ una categoría triangulada, monoidal simétrica y cerrada. Diremos que la estructura monoidal de $\mathcal{C}$ y la triangulación son compatibles cuando:

i) El producto $\otimes$ conserva suspensiones, es decir, hay una equivalencia natural

$$e_{X,Y} : \Sigma X \otimes Y \longrightarrow \Sigma(X \otimes Y)$$

para todos los X e Y de $\mathcal{C}$, tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\Sigma X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "e\otimes 1"] \arrow[d, "a"'] & \Sigma(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "e"] & \Sigma((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[d, "\Sigma a"] \\
\Sigma X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[rr, "e"'] & & \Sigma(X \otimes (Y \otimes Z)).
\end{tikzcd}$$

A partir de esta equivalencia podemos construir isomorfismos

$$\operatorname{Hom}(\Sigma X, Y) \simeq \Sigma^{-1} \operatorname{Hom}(X, Y) \text{ y } \operatorname{Hom}(X, \Sigma Y) \simeq \Sigma \operatorname{Hom}(X, Y)$$

para todos los X e Y de $\mathcal{C}$.

ii) El producto $\otimes$ es exacto. Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ es un triángulo exacto y W es un objeto de $\mathcal{C}$, entonces

$$X \otimes W \xrightarrow{f\otimes 1} Y \otimes W \xrightarrow{g\otimes 1} Z \otimes W \xrightarrow{h\otimes 1} \Sigma(X \otimes W)$$

es un triángulo exacto.

iii) El funtor $\operatorname{Hom}(X, Y)$ es exacto en la segunda variable (en el sentido del apartado anterior) y es exacto en la primera variable salvo el signo. Supongamos que $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ es un triángulo exacto. Entonces, para todo objeto W de $\mathcal{C}$, el diagrama

$$\Sigma^{-1}\operatorname{Hom}(X, W) \longrightarrow \operatorname{Hom}(Z, W) \longrightarrow \operatorname{Hom}(Y, W) \longrightarrow \operatorname{Hom}(X, W),$$

donde las aplicaciones son $-\operatorname{Hom}(h, 1)$, $\operatorname{Hom}(g, 1)$ y $\operatorname{Hom}(f, 1)$ respectivamente, es un triángulo exacto.

iv) Para $i, j \in \mathbb{Z}$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^i S \otimes \Sigma^j S \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "c"'] & \Sigma^{i+j} S \arrow[d, "(-1)^{ij}"] \\
\Sigma^j S \otimes \Sigma^i S \arrow[r, "\simeq"'] & \Sigma^{i+j} S.
\end{tikzcd}$$

Un objeto X de una categoría $\mathcal{C}$ aditiva monoidal simétrica y cerrada se dice que es *fuertemente dualizable* si la aplicación natural

$$\operatorname{Hom}(X, S) \otimes Y \longrightarrow \operatorname{Hom}(X, Y)$$

es un isomorfismo para todo Y de $\mathcal{C}$.

Ahora ya podemos presentar los axiomas de una categoría homotópica estable en el sentido de Hovey–Palmieri–Strickland [HPS97].

Definición 1.4.3. Una *categoría homotópica estable* es una categoría $\mathcal{C}$ con la siguiente estructura:

i) Una triangulación en $\mathcal{C}$.

ii) Una estructura de categoría monoidal simétrica y cerrada compatible con la triangulación.

iii) Un conjunto $\mathcal{G}$ de objetos fuertemente dualizables, de tal manera que la única subcategoría localizante de $\mathcal{C}$ que contiene a $\mathcal{G}$ es $\mathcal{C}$.

iv) Existen coproductos arbitrarios en $\mathcal{C}$.

v) Todo funtor cohomológico en $\mathcal{C}$ es representable.

Ejemplo 1.4.4. A continuación veremos algunos ejemplos de categorías homotópicas estables [HPS97, ejemplo 1.2.3].

i) La categoría homotópica de los espectros es el prototipo de categoría homotópica estable. En esta categoría el funtor Σ es la suspensión, los triángulos exactos son las cofibraciones y el producto $\otimes$ es el producto *smash* de espectros $\wedge$. Los objetos $\mathrm{Hom}(-,-)$, que en esta categoría se denotan por $F(-,-)$, se obtienen como adjuntos del producto *smash* por representabilidad de Brown. El conjunto $\mathcal{G}$ está formado por el espectro de las esferas S, que es la unidad de la categoría monoidal.

ii) La categoría derivada $\mathcal{D}(R)$ de un anillo conmutativo con unidad R. Esta categoría se define como la categoría homotópica de la categoría de complejos de cadenas no acotados de R-módulos. Tenemos un funtor Σ que viene dado por la traslación de índices en el complejo de cadenas. La categoría $\mathcal{D}(R)$ es triangulada, el producto $\otimes$ cuya unidad es R es derivado del producto tensorial de R-módulos y los objetos $\mathrm{Hom}(-,-)$ son derivados del Hom entre R-módulos.

iii) Otros ejemplos son la categoría de espectros con una acción de G, donde G es un grupo de Lie compacto, la categoría de complejos de cocadenas inyectivos sobre un álgebra de Hopf conmutativa, la categoría derivada de E-módulos, donde E es una S-álgebra conmutativa en el sentido de [EKMM97] o la categoría de espectros locales con respecto a un funtor de localización homológico.

Capítulo 2

Localización en categorías de modelos simpliciales

La noción de localización con respecto a un morfismo f puede definirse en cualquier categoría $\mathcal{C}$ que tenga una estructura de categoría de modelos simplicial. Sin embargo, para asegurar la existencia de estos funtores de f-localización hay que añadir algunas hipótesis adicionales a la categoría $\mathcal{C}$. En este capítulo veremos cuáles son esas condiciones y demostraremos la existencia de un funtor de localización L_f en cualquier categoría de modelos simplicial que las cumpla.

La construcción de este funtor utiliza como base el *small object argument* de Quillen [Hir03, 10.5], y es similar a la que se realiza para demostrar la existencia de localizaciones en los casos de las categorías de CW-complejos o conjuntos simpliciales [Far96], [Hir03]. Utilizando el *small object argument* podemos factorizar de manera funtorial la aplicación $X \longrightarrow *$ mediante una cofibración trivial $l_X \colon X \longrightarrow L_f X$, que será la aplicación de f-localización, seguida de una fibración. Análogamente, la aplicación $\emptyset \longrightarrow X$ puede factorizarse por una cofibración seguida de una fibración trivial. Estas dos factorizaciones forman parte de una nueva estructura de modelos $L_f\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$, que se llama *estructura de modelos localizada*, en la que las equivalencias débiles son las aplicaciones que el funtor de f-localización transforma en equivalencias débiles y las cofibraciones son las mismas que las de $\mathcal{C}$.

Comenzaremos el capítulo con las definiciones y resultados básicos de categorías de modelos simpliciales. La definición de categoría de modelos aparece por primera vez en [Qui67]. Las monografías [Hov99], [Hir03] y

[DHKS04] proporcionan un tratamiento más moderno y completo sobre categorías de modelos y sus propiedades. En la segunda sección trataremos sobre objetos pequeños y categorías localmente presentables [AR94]. Estos conceptos forman parte de las condiciones necesarias sobre la categoría $\mathcal{C}$ para que existan las f-localizaciones, que construiremos explícitamente en la última parte del capítulo.

2.1. Categorías de modelos simpliciales

Trabajaremos con la definición de categoría de modelos que aparece en [Hov99] o [Hir03]. Esta definición es ligeramente más fuerte que la definición clásica de Quillen de categoría de modelos cerrada, ya que supone que la categoría es completa y cocompleta, es decir, contiene todos los límites y colímites pequeños (no sólo los finitos) y además se exige que la factorización de los morfismos sea funtorial (véase axioma (M5)).

Definición 2.1.1. Una *categoría de modelos* es una categoría $\mathcal{C}$ junto con tres clases de morfismos (que llamaremos equivalencias débiles, fibraciones y cofibraciones), que cumplen los siguientes cinco axiomas:

(M1) $\mathcal{C}$ está cerrada por límites y colímites pequeños, es decir, para toda categoría pequeña I y todo funtor $F\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ existen $\lim_I F$ y $\operatorname{colím}_I F$ en $\mathcal{C}$. También se dice que $\mathcal{C}$ es *completa* y *cocompleta*.

(M2) Si f y g son morfismos de $\mathcal{C}$ tales que $g \circ f$ está definido y entre f, g y $g \circ f$ dos de ellos son equivalencias débiles, entonces el tercero también lo es.

(M3) Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"'] \\ B \arrow[r, "i'"'] & Y \arrow[r, "r'"'] & B \end{tikzcd}$$

en el cual $r \circ i = 1_A$ y $r' \circ i' = 1_B$ (en este caso decimos que f es un *retracto* de g), si g es una equivalencia débil, una fibración o una cofibración, también lo es f.

(M4) Si tenemos un diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

donde i es una cofibración y p es una fibración, entonces si i o p es además una equivalencia débil, existe una elevación (representada por la flecha discontinua) que hace conmutativo todo el diagrama.

(M5) Cualquier morfismo f de $\mathcal{C}$ admite dos factorizaciones funtoriales:

- $f = p \circ i$, donde i es una cofibración y p es una fibración y una equivalencia débil,
- $f = q \circ j$, donde q es una fibración y j es una cofibración y una equivalencia débil.

Decimos que un morfismo f es una *fibración (cofibración) trivial* si es una fibración (cofibración) y una equivalencia débil. Un objeto X de $\mathcal{C}$ es *fibrante* si la aplicación de X al objeto final $X \longrightarrow *$ es una fibración. Dualmente, X es *cofibrante* cuando la aplicación del objeto inicial a él mismo $\emptyset \longrightarrow X$ es una cofibración.

Definición 2.1.2. Si $i\colon A \longrightarrow B$ y $p\colon X \longrightarrow Y$ son dos morfismos para los cuales existe la elevación (flecha discontinua) en todo diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y, \end{tikzcd}$$

entonces decimos que

- i tiene la *propiedad de elevación a izquierda* respecto a p;
- p tiene la *propiedad de elevación a derecha* respecto a i.

De los axiomas de la definición de categoría de modelos se deduce que conociendo dos de las tres clases de morfismos equivalencias débiles, fibraciones y cofibraciones, podemos determinar la tercera [Hir03, proposiciones 7.2.3 y 7.2.6].

Proposición 2.1.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos.*

i) *Una aplicación es una cofibración (cofibración trivial) si y sólo si tiene la propiedad de elevación a izquierda con respecto a todas las fibraciones triviales (fibraciones).*

ii) *Una aplicación es una fibración (fibración trivial) si y sólo si tiene la propiedad de elevación a derecha con respecto a todas la cofibraciones triviales (cofibraciones).*

iii) *Una aplicación es una equivalencia débil si y sólo si se puede factorizar como una cofibración trivial seguida de una fibración trivial.* □

Una categoría $\mathcal{C}$ se dice que es *cofibrantemente generada* si las fibraciones son detectadas por un conjunto de cofibraciones triviales, es decir, existe un conjunto J de cofibraciones triviales en $\mathcal{C}$ tales que una aplicación es una fibración si y sólo si tiene la propiedad de elevación a derecha con respecto a todos los elementos de J. Los elementos de J se llaman *cofibraciones triviales generadoras.*

La siguiente proposición muestra algunas propiedades de clausura de las clases de fibraciones y cofibraciones [Hir03, proposiciones 7.2.4 y 7.2.5].

Proposición 2.1.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos.*

i) *Las clases de fibraciones y cofibraciones están cerradas por composición.*

ii) *Las clases de fibraciones y fibraciones triviales están cerradas por productos.*

iii) *Las clases de cofibraciones y cofibraciones triviales están cerradas por coproductos.* □

Una categoría simplicial es una categoría $\mathcal{C}$ enriquecida en conjuntos simpliciales, es decir, para cada par de objetos X e Y de $\mathcal{C}$, tenemos un conjunto simplicial $\mathrm{Map}(X,Y)$ cuyos vértices corresponden a los morfismos en $\mathcal{C}$ entre X e Y. Una categoría de modelos simplicial $\mathcal{C}$ es una categoría simplicial que también es categoría de modelos, junto con construcciones naturales de objetos $X \otimes K$ y X^K en $\mathcal{C}$, donde X es un objeto de $\mathcal{C}$ y K es un conjunto simplicial, que cumplen unos ciertos axiomas.

Definición 2.1.5. Una *categoría simplicial* $\mathcal{C}$ es una categoría tal que

i) Para cada par de objetos X e Y de $\mathcal{C}$ tenemos un conjunto simplicial, que denotaremos por $\mathrm{Map}(X,Y)$.

ii) Para cada tres objetos X, Y y Z de $\mathcal{C}$ hay una aplicación

$$c_{X,Y,Z}\colon\ \mathrm{Map}(Y,Z)\times\mathrm{Map}(X,Y)\longrightarrow\mathrm{Map}(X,Z)$$

tal que el siguiente diagrama conmuta para X, Y, Z y W de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Map}(Y,Z)\times\mathrm{Map}(X,Y))\times\mathrm{Map}(W,X) \arrow[r, "c_{X,Y,Z}\times 1"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(W,X) \arrow[dd, "c_{W,X,Z}"] \\
\mathrm{Map}(Y,Z)\times(\mathrm{Map}(X,Y)\times\mathrm{Map}(W,X)) \arrow[d, "1\times c_{W,X,Y}"'] & \\
\mathrm{Map}(Y,Z)\times\mathrm{Map}(W,Y) \arrow[r, "c_{W,Y,Z}"'] & \mathrm{Map}(W,Z).
\end{tikzcd}$$

iii) Para cada objeto X de $\mathcal{C}$, hay una aplicación de conjuntos simpliciales $i_X\colon *\longrightarrow\mathrm{Map}(X,X)$ que hace que los siguientes diagramas conmuten para todo X e Y de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
*\times\mathrm{Map}(X,Y) \arrow[r, "i_Y\times 1"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Map}(Y,Y)\times\mathrm{Map}(X,Y) \arrow[dl, "c_{X,Y,Y}"] \\
\mathrm{Map}(X,Y), &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(X,Y)\times * \arrow[r, "1\times i_X"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Map}(X,Y)\times\mathrm{Map}(X,X) \arrow[dl, "c_{X,X,Y}"] \\
\mathrm{Map}(X,Y). &
\end{tikzcd}$$

iv) Para cada par de objetos X e Y de $\mathcal{C}$, hay un isomorfismo

$$\mathrm{Map}(X,Y)_0\cong\mathcal{C}(X,Y).$$

Definición 2.1.6. Una *categoría de modelos simplicial* es una categoría simplicial que también es categoría de modelos y que satisface los dos axiomas siguientes:

(M6) Para cada par de objetos X e Y de $\mathcal{C}$ y para todo conjunto simplicial K, existen objetos $X \otimes K$ e Y^K de $\mathcal{C}$ tales que tenemos las siguientes equivalencias naturales de conjuntos simpliciales:

$$\mathrm{Map}(X \otimes K, Y) \cong \mathrm{Map}(K, \mathrm{Map}(X, Y)) \cong \mathrm{Map}(X, Y^K).$$

(M7) Si $i\colon A \longrightarrow B$ y $p\colon X \longrightarrow Y$ son una cofibración y una fibración en $\mathcal{C}$ respectivamente, entonces la aplicación de conjuntos simpliciales

$$\mathrm{Map}(B, X) \longrightarrow \mathrm{Map}(A, X) \times_{\mathrm{Map}(A,Y)} \mathrm{Map}(B, Y)$$

es una fibración, que es trivial si i o p es una equivalencia débil.

El isomorfismo de conjuntos simpliciales de (M6) da lugar en grado cero a una biyección natural de conjuntos

$$\mathcal{C}(X \otimes K, Y) \cong s\mathcal{S}ets(K, \mathrm{Map}(X, Y)) \cong \mathcal{C}(X, Y^K). \tag{2.1}$$

Una categoría de modelos se dice que es *propia* si las equivalencias débiles se preservan por *pushouts* y *pullbacks* a través de fibraciones y cofibraciones respectivamente.

Definición 2.1.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos.

i) Decimos que $\mathcal{C}$ es *propia por la izquierda* si dado cualquier diagrama de *pushout*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

en el que f es una equivalencia débil y h es una cofibración, entonces g es una equivalencia débil.

ii) Decimos que $\mathcal{C}$ es *propia por la derecha* si dado cualquier diagrama de *pullback*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

en el que g es una equivalencia débil y k es una fibración, entonces f es una equivalencia débil.

2.2. Objetos pequeños y categorías localmente presentables

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos cocompleta y λ un ordinal. Una λ-*sucesión* en $\mathcal{C}$ es un funtor $E\colon \lambda \longrightarrow \mathcal{C}$, es decir, un diagrama en $\mathcal{C}$

$$E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_\beta \longrightarrow \cdots \qquad (\beta < \lambda)$$

tal que para cada ordinal límite $\gamma < \lambda$ la aplicación inducida

$$\operatorname{colím}_{\beta<\gamma} E_\beta \longrightarrow E_\gamma$$

es un isomorfismo. La composición de la λ-sucesión se define como la aplicación natural

$$E_0 \longrightarrow \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta.$$

Definición 2.2.1. Sea κ un cardinal. Un objeto X de $\mathcal{C}$ es κ-*pequeño* si para todo cardinal regular $\lambda \geq \kappa$ y toda λ-sucesión

$$E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_\beta \longrightarrow \cdots \qquad (\beta < \lambda)$$

en $\mathcal{C}$, la aplicación natural de conjuntos

$$\operatorname{colím}_{\beta<\lambda} \mathcal{C}(X, E_\beta) \longrightarrow \mathcal{C}(X, \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta)$$

es una biyección. También se dice que el funtor $\mathcal{C}(X, -)$ conserva colímites de longitud $\lambda \geq \kappa$. Un objeto es *pequeño* si es κ-pequeño para algún cardinal κ.

Esta definición es equivalente a decir que si un objeto X es κ-pequeño, entonces para todo cardinal regular $\lambda \geq \kappa$, cualquier aplicación $f\colon X \longrightarrow \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta$ factoriza a través de E_α para algún $\alpha < \lambda$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "g"'] & \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta \\
& E_\alpha. \arrow[u, "i_\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Esta factorización es además única en el sentido de que si existen g y g' tales que $f = i_\alpha \circ g = i_\alpha \circ g'$, entonces existe $\alpha' \geq \alpha$ tal que

$$E(\alpha \to \alpha') \circ g = E(\alpha \to \alpha') \circ g'.$$

El concepto de objeto pequeño es un caso particular de objeto presentable. Los objetos presentables aparecen en el estudio de las categorías localmente presentables, en las que como veremos todo objeto es pequeño. Estas categorías fueron definidas por Gabriel y Ulmer en [GU71]. La monografía de Adámek y Rosický [AR94] es también una referencia básica.

Sea κ un cardinal regular. Un conjunto de índices I es un *conjunto κ-dirigido* si todo subconjunto de I de cardinalidad menor que κ tiene una cota superior.

Definición 2.2.2. Sea κ un cardinal regular. Un objeto X de $\mathcal{C}$ es *κ-presentable* si el funtor $\mathcal{C}(X,-)$ conserva colímites sobre conjuntos de índices que sean κ-dirigidos.

Observar que si X es κ-dirigido, entonces también es κ'-dirigido para cualquier cardinal regular $\kappa' \geq \kappa$.

Lema 2.2.3. *Sea κ un cardinal regular. Entonces κ es un conjunto λ-dirigido para todo cardinal regular $\lambda \leq \kappa$.*

Demostración. Sea λ un cardinal regular que cumple que $\lambda \leq \kappa$, y sea $J \subset \kappa$ tal que $\mathrm{card}(J) < \lambda$. Para cada $j \in J$, sea $\kappa_j = \mathrm{card}\{i \in \kappa \mid i \leq j\}$. Entonces, $\kappa_j < \kappa$ para todo $j \in J$ y $\kappa \neq \cup_{j \in J} \kappa_j$ ya que κ es un cardinal regular. Por lo tanto existe un $i_0 \in \kappa$ tal que $i_0 > j$ para todo $j \in J$. $\square$

Este lema implica en particular que todo cardinal regular κ es un conjunto κ-dirigido y por lo tanto, todo objeto κ-presentable es κ-pequeño. El recíproco no es cierto en general.

Definición 2.2.4. Una categoría $\mathcal{C}$ se llama *localmente κ-presentable* si existe un conjunto $\mathcal{A}$ de objetos κ-presentables de $\mathcal{C}$ tales que cualquier objeto de la categoría es el colímite sobre un conjunto κ-dirigido de elementos de $\mathcal{A}$. Una categoría es *localmente presentable* si es localmente κ-presentable para algún cardinal regular κ.

Proposición 2.2.5. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría localmente presentable, entonces todo objeto de $\mathcal{C}$ es pequeño.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C}$ sea localmente κ-presentable y sea $\mathcal{A}$ el conjunto de objetos κ-presentables asociado a $\mathcal{C}$. En particular, los elementos de $\mathcal{A}$ son κ-pequeños, como consecuencia del lema 2.2.3. Si $X \notin \mathcal{A}$, entonces $X = \operatorname{colím}_{i \in I} D_i$, donde I es un conjunto κ-dirigido y cada D_i es κ-presentable, y en particular κ-pequeño. Sea $\mu = \operatorname{card}(I)$. Veamos que X es ν-pequeño, donde $\nu > \operatorname{máx}(\kappa, \mu)$. Sea λ un cardinal regular tal que $\lambda \geq \nu$ y $E\colon \lambda \longrightarrow \mathcal{C}$ una λ-sucesión. Dada una aplicación $f\colon X \longrightarrow \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta$ cualquiera, como D_i es κ-pequeño y $\lambda > \kappa$, la composición $d_i \circ f$ factoriza a través de algún E_{α_i}:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta \\ D_i \arrow[u, "d_i"] \arrow[r, dotted] & E_{\alpha_i}. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Sea ahora $\alpha = \sup\{\alpha_i \mid i \in I\}$. Este supremo existe y además $E_\alpha \neq \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta$, ya que $\operatorname{card}\{\alpha_i \mid i \in I\} \leq \mu$. Para todo $i \in I$, la composición $d_i \circ f$ factoriza entonces a través de un único E_α:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta \\ D_i \arrow[u, "d_i"] \arrow[r, dotted] & E_{\alpha}. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Tenemos, por tanto, para cada $i \in I$ una aplicación $D_i \longrightarrow E_\alpha$, lo cual nos da por la propiedad universal del colímite una aplicación

$$X = \operatorname{colím}_{i \in I} D_i \longrightarrow E_\alpha,$$

y por lo tanto X es ν-pequeño. □

2.3. Construcción de f-localizaciones

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos simplicial. Una *localización homotópica* es un funtor $L\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ junto con una transformación natural $l\colon \operatorname{Id} \longrightarrow L$ que conserva equivalencias débiles, toma valores fibrantes y la aplicación $l_X\colon X \longrightarrow LX$ es una cofibración tal que para cada X que sea cofibrante y cada Y, el morfismo

$$\operatorname{Map}(LX, LY) \longrightarrow \operatorname{Map}(X, LY)$$

inducido por l_X es una equivalencia débil de conjuntos simpliciales. Los funtores de f-localización son un caso particular de localizaciones homotópicas;

de hecho, salvo ciertas hipótesis de teoría de conjuntos, todas las localizaciones homotópicas son f-localizaciones para alguna aplicación f. Este resultado, demostrado en la categoría de grupos en [CS01] y en la categoría de conjuntos simpliciales en [CSS04], puede generalizarse a localizaciones homotópicas en una categoría de modelos simplicial cualquiera [CC04].

La existencia de f-localizaciones para toda aplicación f y para todo objeto de una categoría $\mathcal{C}$ está garantizada cuando la categoría $\mathcal{C}$ es simplicial y cumple ciertas hipótesis. La herramienta principal para probar la existencia de funtores de localización es el *small object argument* (véanse [Qui67], [Hir03, 10.5]), que nos permite construir factorizaciones funtoriales en categorías de modelos. La siguiente construcción está basada en ideas de [Bou77] y [Hir03].

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos simplicial y sea $f\colon A \longrightarrow B$ una cofibración entre objetos cofibrantes. Supondremos las siguientes hipótesis adicionales sobre la categoría $\mathcal{C}$ para poder construir la f-localización:

i) $\mathcal{C}$ es propia por la izquierda.

ii) $\mathcal{C}$ es cofibrantemente generada. Denotaremos por J el conjunto de cofibraciones triviales generadoras.

iii) Los objetos A, $\Delta[n] \otimes A \coprod_{\partial\Delta[n]\otimes A} \partial\Delta[n] \otimes B$ y todos los dominios de elementos de J son pequeños.

La hipótesis iii) se cumple por ejemplo si la categoría $\mathcal{C}$ es localmente presentable (véase proposición 2.2.5). Comenzaremos con la definición de f-localización en una categoría de modelos simplicial.

Definición 2.3.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos simplicial y sean X un objeto de $\mathcal{C}$ y $f\colon A \longrightarrow B$ una cofibración entre objetos cofibrantes.

i) X es *f-local* si es fibrante y la aplicación inducida

$$\mathrm{Map}(B, X) \longrightarrow \mathrm{Map}(A, X)$$

es una equivalencia débil de conjuntos simpliciales.

ii) Una aplicación $g\colon X \longrightarrow Y$ es una *f-equivalencia* si existe una aproximación cofibrante $\widetilde{g}\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ de g tal que la aplicación inducida

$$\mathrm{Map}(\widetilde{Y}, Z) \longrightarrow \mathrm{Map}(\widetilde{X}, Z)$$

es una equivalencia débil de conjuntos simpliciales, para todo objeto Z que sea f-local.

Dado un objeto X de $\mathcal{C}$, una *f-localización* de X se define como un morfismo $X \longrightarrow L_f X$ que es una f-equivalencia y donde el objeto $L_f X$ es f-local.

Los siguientes resultados muestran algunas de las propiedades de clausura de los objetos f-locales y las f-equivalencias con respecto a retractos y a límites y colímites homotópicos.

Lema 2.3.2. *Dado un objeto X de $\mathcal{C}$, si X es f-local y $Y \longrightarrow X$ es una aplicación con una inversa homotópica por la izquierda, entonces Y es f-local.*

Demostración. Podemos factorizar la aplicación $Y \longrightarrow X$ como una cofibración $Y \longrightarrow Z$ seguida de una fibración trivial $Z \longrightarrow X$, por (M5). Así pues, como ocurre en [Hir03, proposición 1.2.5], la aplicación de conjuntos simpliciales inducida

$$\mathrm{Map}(f, Y)\colon\ \mathrm{Map}(B, X) \longrightarrow \mathrm{Map}(A, X)$$

es un retracto de $\mathrm{Map}(f, Z)$ y por lo tanto es una equivalencia débil de conjuntos simpliciales. □

Lema 2.3.3. *Todo límite homotópico de objetos f-locales es f-local.*

Demostración. Sea I una categoría pequeña y $D\colon I \longrightarrow \mathcal{C}$ un diagrama en $\mathcal{C}$ tal que D_i es f-local para todo $i \in I$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathrm{Map}(B, \operatorname{hol\acute{i}m}_{i\in I} D_i) &\simeq \operatorname{hol\acute{i}m}_{i\in I} \mathrm{Map}(B, D_i)\\ &\simeq \operatorname{hol\acute{i}m}_{i\in I} \mathrm{Map}(A, D_i) \simeq \mathrm{Map}(B, \operatorname{hol\acute{i}m}_{i\in I} D_i)\end{aligned}$$

y por tanto $\operatorname{hol\acute{i}m}_{i\in I} D_i$ es f-local. □

Observación 2.3.4. De manera análoga podemos demostrar que todo colímite homotópico de f-equivalencias es una f-equivalencia, y que todo retracto homotópico de una f-equivalencia vuelve a ser una f-equivalencia.

Vamos a demostrar la existencia de f-localizaciones en cualquier categoría de modelos simplicial que cumpla las hipótesis anteriores. Dado un objeto X de $\mathcal{C}$, necesitaremos construir un objeto L_fX que sea f-local junto con una f-equivalencia $X \longrightarrow L_fX$. La construcción será de carácter funtorial.

En primer lugar, el objeto L_fX ha de ser f-local, por lo tanto fibrante, es decir, la aplicación $L_fX \longrightarrow *$ tendrá la propiedad de elevación a derecha con respecto a todas las aplicaciones de J (conjunto de cofibraciones triviales generadoras). El axioma (M7) implica que si L_fX es fibrante, entonces la aplicación inducida

$$\mathrm{Map}(B, L_fX) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Map}(A, L_fX)$$

es una fibración de conjuntos simpliciales. Por lo tanto, si L_fX es fibrante, entonces es f-local si y sólo si f^* es una fibración trivial de conjuntos simpliciales, es decir, tiene la propiedad de elevación a derecha respecto a la familia de inclusiones $\partial\Delta[n] \longrightarrow \Delta[n]$ para todo $n \geq 0$:

$$\begin{tikzcd} \partial\Delta[n] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Map}(B, L_fX) \arrow[d, "f^*"] \\ \Delta[n] \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \mathrm{Map}(A, L_fX). \end{tikzcd}$$

El isomorfismo $s\mathcal{S}ets(K, \mathrm{Map}(Y, Z)) \cong \mathcal{C}(K \otimes Y, Z)$ de (2.1), para todo conjunto simplicial X y para Y, Z objetos de $\mathcal{C}$, transforma el diagrama anterior en el siguiente:

$$\begin{tikzcd} \Delta[n] \otimes A \coprod_{\partial\Delta[n]\otimes A} \partial\Delta[n] \otimes B \arrow[r] \arrow[d] & L_fX \arrow[d] \\ \Delta[n] \otimes B \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & *. \end{tikzcd}$$

De este modo podemos obtener una caracterización de los objetos f-locales.

Proposición 2.3.5. *Un objeto X de $\mathcal{C}$ es f-local si sólo si la aplicación $X \longrightarrow *$ tiene la propiedad de elevación a derecha con respecto a las dos familias de morfismos siguientes:*

i) J=*{cofibraciones triviales generadoras}*.

ii) $I = \left\{\Delta[n] \otimes A \coprod_{\partial\Delta[n]\otimes A} \partial\Delta[n] \otimes B \longrightarrow \Delta[n] \otimes B,\ n \geq 0\right\}$. $\square$

Observar que los elementos de I son cofibraciones. Dado un morfismo g en I, la existencia de una elevación a izquierda de g con respecto a cualquier fibración trivial $X \longrightarrow Y$,

$$\begin{tikzcd} \Delta[n] \otimes A \coprod_{\partial\Delta[n]\otimes A} \partial\Delta[n] \otimes B \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d] \\ \Delta[n] \otimes B \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y, \end{tikzcd}$$

es equivalente por la biyección (2.1) a que exista una elevación en el siguiente diagrama de conjuntos simpliciales:

$$\begin{tikzcd} \partial\Delta[n] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Map}(B, X) \arrow[d] \\ \Delta[n] \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \mathrm{Map}(A, X) \times_{\mathrm{Map}(A,Y)} \mathrm{Map}(B, Y). \end{tikzcd}$$

Esta elevación siempre existe ya que el morfismo de la derecha es una fibración trivial por (M7) y el morfismo $\partial\Delta[n] \longrightarrow \Delta[n]$ es una cofibración de conjuntos simpliciales.

Sea $K = I \cup J$. Elegimos ahora un cardinal λ tal que todos los dominios de morfismos del conjunto K sean λ-pequeños (basta con elegir λ como el mínimo cardinal que cumple que estos dominios son λ-pequeños). Supongamos que $K = \{A_i \longrightarrow B_i,\ i \in \mathcal{I}\}$. Sea $E_0 = X$ y construimos el siguiente *pushout*, donde el coproducto varía sobre todos los posibles morfismos de A_i a E_0 para cada $i \in \mathcal{I}$:

$$\begin{tikzcd} \coprod A_i \arrow[r] \arrow[d] & E_0 \arrow[d] \\ \coprod B_i \arrow[r] & E_1. \end{tikzcd}$$

De esta manera obtenemos el objeto E_1. Procedemos ahora inductivamente; E_{n+1} se obtiene a partir de E_n mediante el *pushout*

$$\begin{tikzcd} \coprod A_i \arrow[r] \arrow[d] & E_n \arrow[d] \\ \coprod B_i \arrow[r] & E_{n+1}, \end{tikzcd}$$

donde ahora el coproducto varía sobre todos los posibles morfismos de A_i a E_n para cada $i \in \mathcal{I}$. Si γ es un ordinal límite, entonces $E_\gamma = \operatorname{colím}_{\beta<\gamma} E_\beta$.

Tenemos así una λ-sucesión

$$E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_\beta \longrightarrow \cdots \qquad (\beta < \lambda)$$

y definimos la localización

$$L_f X = \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta .$$

La composición de la λ-sucesión $E_0 = X \longrightarrow L_f X = \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta$ es la aplicación de localización.

Cada una de las aplicaciones $E_n \longrightarrow E_{n+1}$ es una cofibración, ya que es el *pushout* de un coproducto de cofibraciones. Tenemos de este modo una λ-sucesión de cofibraciones

$$X = E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_\beta \longrightarrow \cdots$$

cuya composición $X = E_0 \longrightarrow \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta = L_f X$ es una cofibración.

En la construcción de $L_f X$ hemos utilizado el *small object argument* de Quillen, en el cual se realizan sucesivos *pushouts* y colímites. Es, por tanto, una construcción funtorial. De este modo podemos definir el funtor de f-localización

$$L_f \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

que asigna a cada X el objeto $L_f X$ construido anteriormente.

Para completar la construcción de la f-localización nos falta comprobar que el objeto $L_f X$ es, en efecto, f-local para todo X y que la aplicación $X \longrightarrow L_f X = \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta$ es una f-equivalencia.

Lema 2.3.6. *El objeto $L_f X$ definido anteriormente es f-local.*

Demostración. Por la proposición 2.3.5 basta con comprobar que la aplicación $L_f X \longrightarrow *$ tiene la propiedad de elevación a derecha con respecto a todos los elementos de la clase de aplicaciones K. Dada una aplicación $A_i \longrightarrow B_i$ de K, debemos ver que existe la elevación

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r] \arrow[d] & L_f X \arrow[d] \\ B_i \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & *. \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Como $L_f X = \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta$ y cada A_i es λ-pequeño, la aplicación natural

$$\operatorname{colím}_{\beta<\lambda} \mathcal{C}(A_i, E_\beta) \longrightarrow \mathcal{C}(A_i, \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta)$$

es una biyección. Por lo tanto, la aplicación $A_i \longrightarrow L_f X$ factoriza a través de $E_\beta \longrightarrow L_f X$ para algún $\beta < \lambda$ y tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dotted] & L_f X \\ B_i \arrow[r, dotted] & E_\beta \arrow[u] \end{tikzcd}$$

La aplicación $B_i \longrightarrow E_\beta$ existe por construcción de los E_β, y por composición con la aplicación $E_\beta \longrightarrow L_f X$, define la elevación en el diagrama (2.2). $\square$

Todas las aplicaciones de K son f-equivalencias. Sea g una aplicación de K. Si g pertenece al conjunto J, entonces $g\colon A_i \longrightarrow B_i$ es una cofibración trivial. Denotemos por $\widetilde{g}\colon \widetilde{A}_i \longrightarrow \widetilde{B}_i$ una aproximación cofibrante de g. Podemos elegir $\widetilde{g}$ de manera que sea también una cofibración trivial [Hir03, proposición 8.1.23]. Utilizando ahora el axioma (M7), obtenemos que la aplicación natural

$$\operatorname{Map}(\widetilde{B}_i, X) \longrightarrow \operatorname{Map}(\widetilde{A}_i, X)$$

es una equivalencia débil de conjuntos simpliciales para todo objeto X que sea fibrante, en particular para todo X que sea f-local, y así g es una f-equivalencia. Si g pertenece a la clase I, entonces es de la forma

$$g\colon A \otimes \Delta[n] \coprod_{A\otimes\partial\Delta[n]} B \otimes \partial\Delta[n] \longrightarrow B \otimes \Delta[n].$$

Las aplicaciones $A \otimes \partial\Delta[n] \longrightarrow B \otimes \partial\Delta[n]$ y $A \otimes \Delta[n] \longrightarrow B \otimes \Delta[n]$ son ambas f-equivalencias ya que f es una cofibración entre objetos cofibrantes y tanto $\partial\Delta[n]$ como $\Delta[n]$ son conjuntos simpliciales cofibrantes. El *pushout* de una f-equivalencia que es una cofibración entre objetos cofibrantes vuelve a ser una f-equivalencia ya que, por hipótesis, la categoría $\mathcal{C}$ es propia por la izquierda (véase [Hir03, lema 3.2.10]). El siguiente diagrama de *pushout*

$$\begin{tikzcd} A \otimes \partial\Delta[n] \arrow[r] \arrow[d, "f\otimes 1"'] & A \otimes \Delta[n] \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\ B \otimes \partial\Delta[n] \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & A \otimes \Delta[n] \coprod_{A\otimes\partial\Delta[n]} B \otimes \partial\Delta[n] \arrow[dr, "g"] & \\ & & B_i \end{tikzcd}$$

implica que la aplicación g es también una f-equivalencia, ya que es composión de f-equivalencias.

Lema 2.3.7. *La aplicación $X \longrightarrow L_f X$ es una f-equivalencia.*

Demostración. Cada aplicación $E_\beta \longrightarrow E_{\beta+1}$ es una f-equivalencia, ya que es el *pushout* de una aplicación que es una cofibración y una f-equivalencia y la categoría $\mathcal{C}$ es propia por la izquierda (véase [Hir03, lema 3.2.10]). Consideremos ahora la siguiente λ-sucesión de cofibraciones y f-equivalencias:

$$X = E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_\beta \longrightarrow \cdots$$

Por la proposición 17.9.4 de [Hir03], podemos encontrar otra λ-sucesión de cofibraciones junto con una aplicación de λ-sucesiones

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{E}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{E}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{E}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \widetilde{E}_\beta \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
E_0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_\beta \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

tal que:

i) Cada aplicación vertical $\widetilde{E}_\beta \longrightarrow E_\beta$ es una aproximación cofibrante de E_β.

ii) Cada aplicación $\widetilde{E}_\beta \longrightarrow \widetilde{E}_{\beta+1}$ es una cofibración.

iii) La aplicación $\operatorname{colím}_{\beta<\lambda} \widetilde{E}_\beta \longrightarrow \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta$ es una aproximación cofibrante de $\operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta$.

Sea Z un objeto f-local. Como cada aplicación $E_\beta \longrightarrow E_{\beta+1}$ es una f-equivalencia y cada $\widetilde{E}_\beta \longrightarrow \widetilde{E}_{\beta+1}$ es una cofibración, la aplicación

$$\operatorname{Map}(\widetilde{E}_{\beta+1}, Z) \longrightarrow \operatorname{Map}(\widetilde{E}_\beta, Z)$$

es una fibración trivial. De este modo,

$$\operatorname{Map}(\widetilde{E}_0, Z) \longleftarrow \operatorname{Map}(\widetilde{E}_1, Z) \longleftarrow \cdots \longleftarrow \operatorname{Map}(\widetilde{E}_\beta, Z) \longleftarrow \cdots$$

es una torre de fibraciones triviales de conjuntos simpliciales. Por lo tanto la composición

$$\operatorname{Map}(\operatorname{colím}_{\beta<\lambda} \widetilde{E}_\beta, Z) \longrightarrow \lim_{\beta<\lambda} \operatorname{Map}(\widetilde{E}_\beta, Z) \longrightarrow \operatorname{Map}(\widetilde{E}_0, Z)$$

es una equivalencia débil y la aplicación $X \longrightarrow L_f X = \operatorname{colím}_{\beta<\lambda} E_\beta$ es una f-equivalencia. $\square$

Partiendo de una categoría de modelos simplicial, hemos construido a partir de una cofibración $f\colon A \longrightarrow B$ entre objetos cofibrantes un funtor L_f que asigna a cada objeto X de $\mathcal{C}$ una f-localización $l_X\colon X \longrightarrow L_fX$.

El siguiente teorema recoge las hipótesis sobre la categoría $\mathcal{C}$ para la existencia de funtores de f-localización para cualquier aplicación f.

Teorema 2.3.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de modelos simplicial, cofibrantemente generada y localmente presentable, y sea $f\colon A \longrightarrow B$ una cofibración entre objetos cofibrantes. Entonces existe un funtor de f-localización en $\mathcal{C}$.* $\square$

La hipótesis de que f sea una cofibración puede debilitarse partiendo del hecho de que si f no es cofibración, se empieza aproximándola por una cofibración. Las condiciones del teorema anterior las satisfacen las categorías de conjuntos simpliciales o espectros simétricos, entre otras.

La existencia del funtor de f-localización permite definir nuevas estructuras de modelos en la categoría $\mathcal{C}$. Si definimos ahora las equivalencias débiles como las aplicaciones g tales que L_fg es una equivalencia débil y mantenemos las cofibraciones, tenemos una nueva estructura de modelos en $\mathcal{C}$, que se denota por $L_f\mathcal{C}$ y se llama *estructura de modelos localizada*. Utilizando la aplicación de f-localización podemos obtener una factorización funtorial de la aplicación $X \longrightarrow *$ como una fibración trivial seguida de una cofibración:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, tail, "l_X", "\sim"'] & & * \\ & L_fX. \arrow[ur, two heads] & \end{tikzcd}$$

Recordar que L_fX es fibrante y la aplicación l_X es una cofibración. Utilizando el *small object argument* de manera análoga a la construcción de L_fX, podemos construir un funtor CW_f junto con una transformación natural $c\colon CW_f \longrightarrow \mathrm{Id}$ que toma valores cofibrantes y tal que, para todo X, la aplicación $c_X\colon CW_fX \longrightarrow X$ es una fibración. Esto nos permite conseguir una factorización funtorial de la aplicación $\emptyset \longrightarrow X$ como una fibración seguida de una cofibración trivial:

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[rr, tail] \arrow[dr, tail] & & X \\ & CW_fX. \arrow[ur, two heads, "c_X", "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

Estas factorizaciones corresponden a las factorizaciones funtoriales de las aplicaciones $X \longrightarrow *$ y $\emptyset \longrightarrow X$ en $L_f\mathcal{C}$. Cada aplicación f proporciona una nueva estructura de modelos en $\mathcal{C}$. Dado un objeto X, las aplicaciones l_X y c_X corresponden respectivamente a una aproximación fibrante y a una aproximación cofibrante de X en la categoría de modelos localizada.

Este resultado se cumple también en categorías de modelos celulares en el sentido de [Hir03, definición 12.1.1]. El teorema 4.1.1 de [Hir03] demuestra la existencia de f-localizaciones en este tipo de categorías.

Capítulo 3

Funtores de localización en homotopía estable

En este capítulo vamos a describir cuáles son las principales propiedades de los funtores de localización en la categoría homotópica de los espectros. En el capítulo 2 se muestra cómo construir la f-localización en una categoría $\mathcal{C}$ para cualquier aplicación f y cualquier objeto X, siempre que $\mathcal{C}$ sea una categoría de modelos simplicial que verifique ciertas hipótesis adicionales, que aparecen en el teorema 2.3.8. Estas hipótesis incluyen que la categoría sea propia por la izquierda, cofibrantemente generada y localmente presentable.

Para construir funtores de localización en la categoría homotópica estable, tomamos como base la categoría de espectros simétricos sobre conjuntos simpliciales [HSS00] o la categoría de Bousfield–Friedlander [BF78]. Ambas categorías satisfacen las condiciones del teorema 2.3.8 arriba mencionadas. Las categorías homotópicas asociadas a estas categorías de modelos son equivalentes a la categoría homotópica estable de Adams–Boardman.

3.1. Espectros de funciones

En la categoría de espectros simétricos, dados dos espectros X e Y tales que X es cofibrante e Y es fibrante, el conjunto simplicial $\mathrm{Map}(X,Y)$ es un espacio de lazos infinito, y para cualquier elección de punto base, sus grupos de homotopía verifican que

$$\pi_k(\mathrm{Map}(X,Y),*) \cong [\Sigma^k X, Y] \cong \pi_k(F(X,Y)) \quad \text{para } k \geq 0,$$

donde $F(X,Y)$ es el espectro de funciones de X a Y, obtenido por representabilidad de Brown a partir del funtor $[-\wedge X, Y]$. El funtor $F(X,-)$ es un adjunto por la derecha del funtor $X \wedge -$, por tanto para todo X, Y, Z se cumple que $[X \wedge Y, Z] \cong [X, F(Y,Z)]$. Los grupos de homotopía del conjunto simplicial $\mathrm{Map}(X,Y)$ son isomorfos a los del recubridor conectivo $F^c(X,Y)$ del espectro de funciones de X a Y, que utilizaremos para definir la localización. El *recubridor conectivo* X^c de un espectro X es un espectro (-1)-conexo que tiene los mismos grupos de homotopía que X en dimensión mayor o igual que cero, es decir,

$$\pi_i(X^c) = \begin{cases} \pi_i(X) & \text{si } i \geq 0 \\ 0 & \text{si } i < 0. \end{cases}$$

A partir de ahora trabajaremos con espectros de funciones (derivados) en la categoría homotópica estable, que denotaremos por Ho^s, sin hacer referencia a la categoría de modelos elegida.

Definición 3.1.1. Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una aplicación de espectros.

- Un espectro X se dice *f-local* si la aplicación f induce una equivalencia homotópica $F^c(B,X) \simeq F^c(A,X)$, donde $F^c(-,-)$ es el recubridor conectivo del espectro de funciones.

- Una aplicación $g\colon X \longrightarrow Y$ es una *f-equivalencia* si g induce una equivalencia homotópica $F^c(Y,Z) \simeq F^c(X,Z)$ para todo espectro Z que sea f-local.

- Una *f-localización* de un espectro X es una aplicación $l_X\colon X \longrightarrow L_fX$ tal que l_X es una f-equivalencia y L_fX es un espectro f-local.

Para cada aplicación f, cada espectro X tiene asociada una f-localización L_fX, y esta asociación que a cada X le hace corresponder L_fX se construye como un funtor homotópico en la categoría de los espectros, como se explica en sección 2.3 del capítulo 2.

La aplicación de localización $l_X\colon X \longrightarrow L_fX$ tiene dos propiedades universales en Ho^s que la caracterizan:

i) La aplicación $l_X\colon X \longrightarrow L_fX$ es *inicial* entre todas las aplicaciones de X a espectros f-locales, es decir, si $g\colon X \longrightarrow Y$ es una aplicación de espectros donde Y es f-local, entonces existe una única aplicación $h\colon L_fX \longrightarrow Y$ tal que $g \simeq h \circ l_X$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "g"'] & L_fX \arrow[dl, dotted, "h"] \\ Y & \end{tikzcd} .$$

ii) La aplicación $l_X\colon X \longrightarrow L_fX$ es *final* entre todas las f-equivalencias cuyo dominio es X, es decir, si $g\colon X \longrightarrow Y$ es una f-equivalencia, entonces existe una única aplicación $h\colon Y \longrightarrow L_fX$ tal que $l_X \simeq h \circ g$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "g"'] & L_fX \\ Y \arrow[ur, dotted, "h"'] & \end{tikzcd} .$$

Para demostrar la primera de las propiedades, sea Y un espectro f-local. Entonces, utilizando que l_X es una f-equivalencia, tenemos

$$\begin{aligned}[X,Y] &\cong \pi_0(F(X,Y)) \cong \pi_0(F^c(X,Y)) \cong \pi_0(F^c(L_fX,Y)) \\ &\cong \pi_0(F(L_fX,Y)) \cong [L_fX,Y].\end{aligned}$$

La segunda se demuestra análogamente. Si $g\colon X \longrightarrow Y$ es una f-equivalencia, entonces

$$\begin{aligned}[X,L_fX] &\cong \pi_0(F(X,L_fX)) \cong \pi_0(F^c(X,L_fX)) \cong \pi_0(F^c(Y,L_fX)) \\ &\cong \pi_0(F(Y,L_fX)) \cong [Y,L_fX].\end{aligned}$$

Cualquiera de estas dos propiedades universales nos garantiza que si tenemos un espectro Y que es f-local y una aplicación $X \longrightarrow Y$ que es una f-equivalencia, entonces $Y \simeq L_fX$.

Corolario 3.1.2. *Para una aplicación f dada, el funtor de localización L_f es único salvo homotopía.* □

Los espectros X que son f-locales son precisamente aquellos que cumplen que $X \simeq L_fX$. En efecto, si X es f-local, aplicando la primera de las propiedades universales a la aplicación identidad en X, obtenemos que existe una única aplicación $h\colon L_fX \longrightarrow X$ tal que $h \circ l_X \simeq 1_X$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, equal] & L_fX \arrow[dl, dotted, "h"] \\ X. & \end{tikzcd}$$

Utilizando un razonamiento análogo se prueba que las aplicaciones $X \longrightarrow Y$ tales que $L_fX \longrightarrow L_fY$ es una equivalencia homotópica son exactamente las f-equivalencias. Si $g\colon X \longrightarrow Y$ es una f-equivalencia, la composición $l_Y \circ g$ es una f-equivalencia. Utilizando ahora la segunda de las propiedades universales de la localización, existe una única aplicación $h\colon L_fY \longrightarrow L_fX$ tal que $h \circ l_Y \circ g \simeq l_X$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "g"'] & L_fX \\ Y \arrow[r, "l_Y"'] & L_fY. \arrow[u, dotted, "h"'] \end{tikzcd}$$

Los espectros f-locales o las aplicaciones que son f-equivalencias caracterizan los funtores de localización en el sentido de que dados dos funtores L_f y L_g, ambos coinciden si y sólo si la clase de espectros f-locales coincide con la clase de espectros g-locales, o bien, la clase de f-equivalencias coincide con la de g-equivalencias. Cuando decimos que L_f y L_g coinciden significa que $L_fX \simeq L_gX$ para todo espectro X.

Un funtor *idempotente* en una categoría $\mathcal{C}$ es un endofuntor L junto con una transformación natural $l\colon \mathrm{Id} \longrightarrow L$ tal que $Ll = lL$ y $Ll\colon L \longrightarrow L^2$ es un isomorfismo.

Proposición 3.1.3. *El funtor de localización L_f es idempotente en la categoría homotópica estable.*

Demostración. La aplicación de localización $l_X\colon X \longrightarrow L_fX$ define una transformación natural $l\colon \mathrm{Id} \longrightarrow L_f$. Por tanto, el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía por naturalidad

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "l_X"'] & L_fX \arrow[d, "L_fl_X"] \\ L_fX \arrow[r, "l_{L_fX}"'] & L_fL_fX, \end{tikzcd}$$

es decir, $l_{L_fX} \circ l_X \simeq L_f l_X \circ l_X$ para cada espectro X. Utilizando la propiedad universal de la localización esto implica que $l_{L_fX} \simeq L_f l_X$. Para cada espectro X, tomamos ahora la aplicación identidad en L_fX y sea μ_X la única aplicación que cierra el diagrama

$$\begin{tikzcd} L_fX \arrow[r, "l_{L_fX}"] \arrow[d, "1"'] & L_fL_fX \arrow[dl, dotted, "\mu_X"] \\ L_fX. & \end{tikzcd}$$

Tenemos que $\mu_X \circ l_{L_fX}$ es la identidad en L_fX. De la propiedad universal de la localización también se deduce que $l_{L_fX} \circ \mu_X$ es la identidad en L_fL_fX. Así pues, l_{L_fX} es un isomorfismo en la categoría homotópica de los espectros y por tanto el funtor L_f es idempotente. □

3.2. Propiedades de los funtores de localización

El funtor suspensión juega un papel fundamental en la teoría de homotopía estable. También es un funtor importante en la teoría de f-localizaciones de espectros. En esta sección estudiaremos de qué manera y en qué casos la localización L_fX de un espectro determina o puede ser determinada por la de sus suspensiones $L_f\Sigma^kX$ con $k \in \mathbb{Z}$. En general no tiene porque haber ninguna relación entre estas localizaciones; de hecho, los espectros f-locales y las f-equivalencias no son cerrados por suspensiones y desuspensiones arbitrarias en general.

Proposición 3.2.1. *Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una aplicación de espectros. Sean $X \to Y \to Z$ y $E \to F \to G$ dos cofibraciones de espectros y sean g, h e i aplicaciones tales que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[d, "i"'] \\ E \arrow[r] & F \arrow[r] & G. \end{tikzcd}$$

Entonces:

i) *Si Y y Z son f-locales, también lo es X.*

ii) *Si g y h son f-equivalencias, también lo es i.*

Demostración. Basta con aplicar las definiciones y utilizar la sucesión exacta larga asociada a cada cofibración de espectros. En el caso del primer apartado, la sucesión $X \to Y \to Z$ da lugar al siguiente diagrama de grupos abelianos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & {[\Sigma B, Y]} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & {[\Sigma B, Z]} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & {[B, X]} \arrow[r] \arrow[d] & {[B, Y]} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & {[B, Z]} \arrow[d, "\cong"'] \\
\cdots \arrow[r] & {[\Sigma A, Y]} \arrow[r] & {[\Sigma A, Z]} \arrow[r] & {[A, X]} \arrow[r] & {[A, Y]} \arrow[r] & {[A, Z]}.
\end{tikzcd}$$

Como Y y Z son f-locales por hipótesis, el lema de los cinco implica que hay un isomorfismo $[\Sigma^k B, X] \cong [\Sigma^k A, X]$ para todo $k \geq 0$. Por lo tanto $F^c(B, X) \simeq F^c(A, X)$ y así X es f-local. Para demostrar la segunda parte, sea ahora C un espectro f-local. Las sucesiones exactas asociadas a las sucesiones $X \to Y \to Z$ y $E \to F \to G$ dan lugar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[X, C]} & {[Y, C]} \arrow[l] & {[Z, C]} \arrow[l] & {[\Sigma X, C]} \arrow[l] & {[\Sigma Y, C]} \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\
{[E, C]} \arrow[u, "\cong"] & {[F, C]} \arrow[l] \arrow[u, "\cong"] & {[G, C]} \arrow[l] \arrow[u] & {[\Sigma E, C]} \arrow[l] \arrow[u, "\cong"] & {[\Sigma F, C]} \arrow[l] \arrow[u, "\cong"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Como g y h son f-equivalencias, aplicando de nuevo el lema de los cinco, tenemos un isomorfismo $[\Sigma^k Z, C] \cong [\Sigma^k G, C]$ para todo $k \geq 0$. Esto nos da una equivalencia $F^c(Z, C) \simeq F^c(G, C)$ para todo C que sea f-local, y por lo tanto i es una f-equivalencia. $\square$

Observación 3.2.2. Esta proposición puede verse como un caso particular del lema 2.3.3. La fibra homotópica de una aplicación es un caso particular de límite homotópico, y la aplicación del segundo apartado es un colímite homotópico de f-equivalencias.

Corolario 3.2.3. *Sea f una aplicación de espectros.*

i) *Si E es un espectro f-local, entonces también lo es el espectro $\Sigma^{-k} E$ para $k \geq 0$.*

ii) *Si $g \colon X \longrightarrow Y$ es una f-equivalencia, también lo es $\Sigma^k g$ para $k \geq 0$.*

Demostración. Si E es f-local, podemos aplicar el primer apartado de la proposición 3.2.1 a la sucesión

$$\Sigma^{-1}E \longrightarrow * \longrightarrow E$$

De esta manera obtenemos que $\Sigma^{-1}E$ es f-local. Podemos reiterar ahora el proceso y de este modo vemos que $\Sigma^{-k}E$ es f-local para todo $k \geq 0$. En el caso de que g sea una f-equivalencia, basta aplicar el segundo apartado de la proposición 3.2.1 al diagrama de sucesiones

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & * \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma g"'] \\ Y \arrow[r] & * \arrow[r] & \Sigma Y \end{tikzcd}$$

para obtener que Σg es una f-equivalencia. Reiterando el proceso tenemos que $\Sigma^k g$ es una f-equivalencia para todo $k \geq 0$. $\square$

Debido a que $F^c(B, E) \simeq F^c(\Sigma^k B, \Sigma^k E)$ para todo B, E y $k \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que si E es un espectro f-local, entonces $\Sigma^k E$ es $\Sigma^k f$-local para todo $k \in \mathbb{Z}$ y lo mismo para f-equivalencias, es decir, si g es una f-equivalencia, entonces $\Sigma^k g$ es una $\Sigma^k f$-equivalencia para todo $k \in \mathbb{Z}$. A partir de este hecho podemos deducir el siguiente resultado.

Proposición 3.2.4. *Para cualquier aplicación de espectros f y cualquier espectro X tenemos una equivalencia homotópica*

$$L_f \Sigma^{-k} X \simeq \Sigma^{-k} L_{\Sigma^k f} X,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$

Demostración. La aplicación de localización $l\colon X \longrightarrow L_{\Sigma^k f} X$ es una $\Sigma^k f$-equivalencia, por tanto $\Sigma^{-k} l$ es una f-equivalencia. Además, $\Sigma^{-k} L_{\Sigma^k f} X$ es f-local ya que $L_{\Sigma^k f} X$ es $\Sigma^k f$-local. El resultado es consecuencia del corolario 3.1.2. $\square$

Proposición 3.2.5. *Sea $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ una cofibración de espectros, y sea L_f un funtor de localización cualquiera. Si $L_f X$ es contráctil, entonces la aplicación $Y \longrightarrow Z$ es una f-equivalencia.*

Demostración. Consideremos la sucesión exacta larga de grupos abelianos

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma X, E] \longrightarrow [Z, E] \longrightarrow [Y, E] \longrightarrow [X, E] \longrightarrow \cdots$$

asociada a la sucesión $X \to Y \to Z$ para cualquier espectro E. Si E es f-local, entonces $[\Sigma^k X, E] = 0$ para todo $k \geq 0$, por la segunda parte del corolario 3.2.3, ya que como $L_f X$ es contráctil, la aplicación $X \longrightarrow *$ es una f-equivalencia. Así pues, $[\Sigma^k Z, E] \cong [\Sigma^k Y, E]$ para todo $k \geq 0$ y para todo espectro E que sea f-local, y esto implica que $Y \longrightarrow Z$ es una f-equivalencia. $\square$

El funtor de localización es un funtor aditivo en Ho^s. Dados dos espectros cualesquiera X e Y, tenemos una equivalencia natural

$$L_f X \vee L_f Y \simeq L_f(X \vee Y),$$

ya que el coproducto $l_X \vee l_Y \colon X \vee Y \longrightarrow L_f X \vee L_f Y$ es una f-equivalencia y $L_f X \vee L_f Y$ es un producto de espectros f-locales y, por tanto, f-local.

Como consecuencia del corolario 3.2.3, para cualquier aplicación f y cualquier espectro X tenemos una aplicación natural

$$\Sigma L_f X \longrightarrow L_f \Sigma X. \tag{3.1}$$

Cuando esta aplicación natural es una equivalencia homotópica decimos que el funtor L_f *conmuta con la suspensión*. Así pues, el funtor L_f conmuta con la suspensión si y sólo si $\Sigma L_f X \simeq L_f \Sigma X$, ya que en este caso $\Sigma L_f X$ es f-local, y entonces la aplicación (3.1) es una f-equivalencia entre espectros f-locales.

Trabajar con funtores de localización que conmutan con la suspensión tiene sus ventajas con respecto a los que no tienen esta propiedad. Para esta clase de funtores los espectros f-locales y las f-equivalencias sí que están cerradas por suspensiones y desuspensiones arbitrarias, y además preservan cofibraciones de espectros.

Teorema 3.2.6. *Sea $f \colon A \longrightarrow B$ una aplicación de espectros. Son equivalentes:*

i) $\Sigma L_f X \simeq L_f \Sigma X$ *para todo espectro* X.

ii) $\Sigma^k L_f X \simeq L_f \Sigma^k X$ *para todo espectro* X *y todo* $k \in \mathbb{Z}$.

iii) *Si E es un espectro f-local, entonces $\Sigma^k E$ también es f-local para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

iv) *Si g es una f-equivalencia, entonces $\Sigma^k g$ es también una f-equivalencia para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

v) *$L_f X \simeq L_{\Sigma^k f} X$ para todo espectro X y todo $k \in \mathbb{Z}$.*

vi) *La aplicación $F(B, E) \longrightarrow F(A, E)$ inducida por f es una equivalencia homotópica para todo espectro f-local E.*

vii) *Si E es f-local y X es cualquier espectro, entonces $F(X, E)$ es f-local.*

viii) *Si $g\colon X \longrightarrow Y$ y $h\colon M \longrightarrow N$ son f-equivalencias arbitrarias, entonces la aplicación $g \wedge h\colon X \wedge M \longrightarrow Y \wedge N$ también es una f-equivalencia.*

ix) *Si $X \to Y \to Z$ es una cofibración de espectros, entonces $L_f X \to L_f Y \to L_f Z$ también es una cofibración de espectros.*

Demostración. Los enunciados i) y ii) son equivalentes y ii) implica iii). Observar que iii) implica que $\Sigma L_f X$ es f-local para todo X y por tanto se cumple i) ya que (3.1) es una f-equivalencia. Utilizando las definiciones se puede ver directamente que iii) y iv) son equivalentes. A partir de iv) se deduce que para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, la aplicación $\Sigma^k f$ es una f-equivalencia y f es una $\Sigma^k f$-equivalencia. Esto nos dice que la clase de espectros f-locales y la clase de espectros $\Sigma^k f$-locales coinciden, lo cual implica v). Ahora v) junto con la proposición 3.2.4 implica ii).

El enunciado vi) es equivalente a afirmar que f induce una equivalencia

$$F^c(B, \Sigma^k E) \simeq F^c(A, \Sigma^k E)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, y por tanto se deduce a partir de iii). Para demostrar vii), hemos de comprobar que

$$F^c(B, F(X, E)) \simeq F^c(A, F(X, E)),$$

lo cual es equivalente a que $F^c(X, F(B, E)) \simeq F^c(X, F(A, E))$, y esto se deduce de vi). El apartado viii) se demuestra a partir de vii) tomando un espectro f-local E cualquiera y observando que

$$\begin{aligned} F^c(Y \wedge N, E) &\simeq F^c(Y, F(N, E)) \simeq F^c(X, F(N, E)) \\ &\simeq F^c(N, F(X, E)) \simeq F^c(M, F(X, E)) \simeq F^c(X \wedge M, E). \end{aligned}$$

Ahora iv) se deduce a partir de viii) haciendo el producto *smash* de g con la identidad en $\Sigma^k S$, para $k \in \mathbb{Z}$. Tenemos por tanto que los apartados i) a viii) son todos equivalentes entre sí.

Para obtener ix) a partir de i), dada una cofibración $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$, consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Sigma^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d] \\ L_f\Sigma^{-1}Z \arrow[r] & L_fX \arrow[r] & C \arrow[r] & \Sigma L_f\Sigma^{-1}Z \arrow[r] & \Sigma L_fX, \end{tikzcd}$$

donde C es la cofibra de la aplicación $L_f\Sigma^{-1}Z \longrightarrow L_fX$. Aplicando i) tenemos que $\Sigma L_f\Sigma^{-1}Z \simeq L_fZ$ y $\Sigma L_fX \simeq L_f\Sigma X$. Así pues, todas las aplicaciones verticales excepto quizás $Y \longrightarrow C$ son f-equivalencias. El lema de los cinco implica que $Y \longrightarrow C$ es también una f-equivalencia y C es f-local. Por lo tanto $C \simeq L_fY$. Finalmente, para ver que ix) implica i) utilizamos la cofibración $X \longrightarrow * \longrightarrow \Sigma X$, para cada X. □

Observación 3.2.7. Aunque nosotros nos centramos en el estudio de funtores de f-localización en la categoría homotópica estable, el teorema anterior tiene una aplicación más general. La equivalencia entre los apartados i) a vi) es válida para cualquier funtor exacto en una categoría triangulada $\mathcal{C}$, sustituyendo $F(X,Y)$ por el conjunto de morfismos $\mathcal{C}(X,Y)$ entre X e Y en $\mathcal{C}$. El resto de los apartados utilizan para su demostración propiedades del producto *smash* de espectros, propias de la categoría estable.

Hemos vistos que sólo los funtores que conmutan con la suspensión preservan cualquier cofibración de espectros. Dado un funtor de localización cualquiera y una cofibración, podemos obtener otra cofibración localizando únicamente la fibra. Esta construcción que describiremos a continuación recibe el nombre de *localización fibra a fibra*.

Proposición 3.2.8. *Si $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ es una cofibración de espectros, entonces existe otra cofibración de espectros $L_fX \longrightarrow \overline{Y} \longrightarrow Z$ y una aplicación $Y \longrightarrow \overline{Y}$ que es una f-equivalencia.*

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, "l_X"'] & Y \arrow[r] & Z \arrow[d, equal] \\
\Sigma^{-1}Z \arrow[r] & L_f X & & Z
\end{tikzcd}$$

Sea $\overline{Y}$ la cofibra de la composición $\Sigma^{-1}Z \longrightarrow X \xrightarrow{l_X} L_f X$. La aplicación inducida $Y \longrightarrow \overline{Y}$ es una f-equivalencia, por el segundo apartado de la proposición 3.2.1. $\square$

También es posible mezclar la localización fibra a fibra con la localización con respecto a la suspensión de una aplicación.

Proposición 3.2.9. *Si $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ es una cofibración de espectros, entonces existe otra cofibración de espectros $L_f X \longrightarrow \overline{Y} \longrightarrow L_{\Sigma f} Z$ y una aplicación $Y \longrightarrow \overline{Y}$ que es una f-equivalencia.*

Demostración. Tenemos ahora el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}Z \arrow[r] \arrow[d, "l_{\Sigma^{-1}Z}"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "l_X"'] & Y \arrow[r] & Z \arrow[d, "l_Z"'] \\
L_f \Sigma^{-1}Z \arrow[r] & L_f X & & L_{\Sigma f} Z,
\end{tikzcd}$$

y definimos $\overline{Y}$ como la cofibra de $L_f \Sigma^{-1} Z \longrightarrow L_f X$. Tenemos así definida una aplicación $Y \longrightarrow \overline{Y}$ que es una f-equivalencia por el segundo apartado de la proposición 3.2.1. $\square$

Diremos que un funtor de f-localización es *cuasi-exacto* si dada una cofibración de espectros $X \to Y \to Z$ en la cual X y Z son f-locales, entonces Y también lo es. Esta clase de funtores tiene mejores propiedades de conservación de cofibraciones.

Proposición 3.2.10. *Sea $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ una cofibración de espectros donde Z es f-local. Si el funtor L_f es cuasi-exacto, entonces L_f preserva la cofibración.*

Demostración. Aplicando localización fibra a fibra (proposición 3.2.8) a la sucesión $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ y utilizando que L_f es cuasi-exacto, tenemos que $\overline{Y}$ es f-local, ya que Z lo es por hipótesis. Por lo tanto $L_f Y \simeq \overline{Y}$, y el funtor L_f conserva la cofibración. $\square$

3.3. Nulificaciones

Un caso particular importante de f-localizaciones es aquel en que la aplicación f es de la forma $f\colon A \longrightarrow *$. A estas f-localizaciones se les llama *nulificaciones*. En estos casos el funtor L_f se denota como P_A y se le denomina funtor de A-nulificación. Los espectros locales correspondientes se llaman *A-nulos* y las f-equivalencias reciben el nombre de *P_A-equivalencias*.

Definición 3.3.1. Sea A un espectro cualquiera.

i) Un espectro X se llama *A-nulo* si $F^c(A, X) \simeq *$.

ii) Una aplicación $g\colon X \longrightarrow Y$ es una *P_A-equivalencia* si g induce una equivalencia homotópica $F^c(Y, Z) \simeq F^c(X, Z)$ para todo espectro Z que sea A-nulo.

Un caso especial de nulificaciones se da cuando localizamos con respecto a la aplicación $f\colon \Sigma^k S \longrightarrow *$, donde S es el espectro de las esferas y $k \in \mathbb{Z}$. En este caso $P_{\Sigma^{k+1}S}E \simeq E_{(k)}$, donde $E_{(k)}$ es la k-ésima sección de Postnikov de E, es decir, $\pi_i(E_{(k)}) = 0$ para $i > k$ y hay una aplicación $E \longrightarrow E_{(k)}$ que induce isomorfismos en los grupos de homotopía de dimensión menor o igual que k (véase definición 1.2.11). Los espectros conectivos pueden verse entonces como aquellos espectros E tales que $P_S E = 0$. Esta caracterización nos permite demostrar el siguiente resultado:

Proposición 3.3.2. *Si $f\colon A \longrightarrow B$ es una aplicación de espectros con A y B conectivos, entonces el funtor de localización no cambia los grupos de homotopía en dimensiones negativas. En particular, si E es conectivo, entonces $L_f E$ también lo es.*

Demostración. Si A y B son conectivos, entonces $f\colon A \longrightarrow B$ es una P_S-equivalencia, ya que $P_S f = 0$. Por lo tanto, $F^c(B, Z) \simeq F^c(A, Z)$ para todo espectro Z que sea S-nulo. Esto implica que todo espectro S-nulo es f-local y así toda f-equivalencia es también una P_S-equivalencia. En particular, la aplicación de localización es una P_S-equivalencia. □

Para cualquier funtor de f-localización, dada una aplicación entre espectros f-locales, hemos visto en la proposición 3.2.1 que la fibra de esta aplicación también es f-local. En el caso de los funtores de nulificación se cumple además que son cuasi-exactos.

Lema 3.3.3. *Sea P_A el funtor de A-nulificación y sea $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ una cofibración de espectros. Si X y Z son A-nulos, entonces Y también es A-nulo.*

Demostración. Tenemos asociada a la cofibración una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma A, Y] \longrightarrow [\Sigma A, Z] \longrightarrow [A, X] \longrightarrow [A, Y] \longrightarrow [A, Z] \longrightarrow \cdots$$

Como X y Z son A-nulos, $[\Sigma^k A, X] \cong [\Sigma^k A, Z] = 0$ para todo $k \geq 0$, por lo que $[\Sigma^k A, Y] = 0$ para todo $k \geq 0$. □

Existe una estrecha relación entre un funtor de f-localización y la nulificación con respecto a la cofibra de f. Si $f\colon A \longrightarrow B$ es una aplicación de espectros y C es la cofibra de f, siempre hay una transformación natural de funtores

$$P_C \longrightarrow L_f$$

ya que todo espectro que es f-local es C-nulo. Del mismo modo, hay transformaciones naturales de funtores

$$L_{\Sigma f} \longrightarrow P_C \quad \text{y} \quad L_f \longrightarrow P_{\Sigma^{-1} C}$$

ya que todo espectro C-nulo es Σf-local y todo espectro $\Sigma^{-1}C$-nulo es f-local respectivamente. De esta manera tenemos asociada una torre de funtores de localización

$$\cdots \to P_{\Sigma C} \to L_{\Sigma f} \to P_C \to L_f \to P_{\Sigma^{-1} C} \to L_{\Sigma^{-1} f} \to P_{\Sigma^{-1} C} \to \cdots \qquad (3.2)$$

que converge por la izquierda al funtor identidad. Esta torre de localizaciones es similar a la que aparece en [CR97] en el caso de espacios topológicos.

Esta pequeña diferencia entre f-localización y nulificación desaparece cuando el funtor L_f conmuta con la suspensión. De hecho, un funtor de f-localización que conmuta con la suspensión es un funtor de nulificación.

Proposición 3.3.4. *Si el funtor de localización L_f conmuta con la suspensión, entonces la aplicación natural $P_C X \longrightarrow L_f X$, donde C es la cofibra de f, es una equivalencia homotópica para todo espectro X.*

Demostración. Tenemos transformaciones naturales $L_{\Sigma f} \longrightarrow P_C \longrightarrow L_f$ que corresponden a las respectivas inclusiones de clases de espectros locales. Como la composición $L_{\Sigma f} \longrightarrow L_f$ es una equivalencia por el apartado v) del teorema 3.2.6, también lo es la aplicación $P_C X \longrightarrow L_f X$, para todo espectro X. □

Proposición 3.3.5. *El funtor de localización L_f conmuta con la suspensión si y sólo si el funtor de nulificación P_C, donde C es la cofibra de f, conmuta con la suspensión.*

Demostración. Si $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow C$ es una cofibración de espectros, entonces $F(X,E) \longleftarrow F(Y,E) \longleftarrow F(C,E)$ es otra cofibración de espectros para todo espectro E. Esta nueva cofibración da lugar a una sucesión exacta larga de grupos de homotopía

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(F(Y,E)) \longrightarrow \pi_{n+1}(F(X,E)) \longrightarrow \pi_n(F(C,E)) \\ \longrightarrow \pi_n(F(Y,E)) \longrightarrow \pi_n(F(X,E)) \longrightarrow \pi_{n-1}(F(C,E)) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Por el apartado vi) del teorema 3.2.6, el funtor L_f conmuta con la suspensión si y sólo si $F(Y,E) \simeq F(X,E)$ para todo espectro E que sea f-local. Usando la sucesión exacta de homotopía, obtenemos que $\pi_n(F(C,E)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esto es equivalente a que $F(C,E) \simeq *$ y esto ocurre si y sólo si el funtor P_C conmuta con la suspensión, utilizando de nuevo el apartado vi) del teorema 3.2.6. □

Como ya hemos visto, todo funtor L_f que conmuta con la suspensión es un funtor de nulificación con respecto a la cofibra de f, pero no todos los funtores de nulificación conmutan con la suspensión. Las secciones de Postnikov, es decir, los funtores de nulificación $P_{\Sigma^k S}$, son un ejemplo de funtores de localización que no conmutan con la suspensión; de hecho, dado $k \in \mathbb{Z}$, si $\pi_k(E) \neq 0$, entonces $P_{\Sigma^{k+1}S}\Sigma E \not\simeq \Sigma P_{\Sigma^{k+1}S}E$.

Sin embargo, los funtores de nulificación tienen mejores propiedades de conservación cofibraciones que un funtor de f-localización cualquiera.

Corolario 3.3.6. *Sea $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ una cofibración de espectros y sea P_A el funtor de A-nulificación. Si Z es A-nulo, entonces el funtor P_A preserva la cofibración.*

Demostración. Los funtores de nulificación son cuasi-exactos, por el lema 3.3.3. Basta con aplicar ahora la proposición 3.2.10. □

3.4. Localizaciones en conjuntos de primos

La teoría de localización en conjuntos de primos en las categorías de espacios topológicos y grupos ha sido ampliamente estudiada durante la década de los años 70 [BK72a], [HMR75]. Dado un conjunto de números primos P (que puede ser vacío), un espacio simplemente conexo se dice que es P-local si todos sus grupos de homotopía son $\mathbb{Z}_P$-módulos, donde $\mathbb{Z}_P$ denota el anillo de los enteros localizados en P, esto es, $\mathbb{Z}_P$ es el subanillo de $\mathbb{Q}$ que contiene a $\mathbb{Z}$ y en el que son invertibles todos los primos que no pertenecen a P. Para cada espacio simplemente conexo X, existe una aplicación única salvo homotopía $X \longrightarrow X_P$ que induce un isomorfismo natural

$$\pi_k(X) \longrightarrow \pi_k(X) \otimes \mathbb{Z}_P$$

para todo $k \geq 2$. El espacio X_P es la localización de X en el conjunto de primos P, también llamado P-localización de X.

En la categoría de grupos abelianos, la P-localización de un grupo abeliano G viene definida por el homomorfismo de grupos

$$l_G \colon G \longrightarrow G \otimes \mathbb{Z}_P,$$

donde $l_G(g) = g \otimes 1$. El grupo G se dice que es P-local si l_G es un isomorfismo. Un homomorfismo de grupos abelianos $f \colon G \longrightarrow H$ se dice que P-localiza a G si existe un isomorfismo $h \colon G \otimes \mathbb{Z}_P \longrightarrow H$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "l_G"] \arrow[d, "f"'] & G \otimes \mathbb{Z}_P \arrow[dl, "h"] \\ H. & \end{tikzcd}$$

Lema 3.4.1. *Para cada grupo abeliano G, cada espectro X y todo $k \in \mathbb{Z}$, existe una sucesión exacta natural de grupos abelianos*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}(G, \pi_{k+1}(X)) \longrightarrow [\Sigma^k MG, X] \longrightarrow \operatorname{Hom}(G, \pi_k(X)) \longrightarrow 0$$

donde MG es el espectro de Moore asociado a G.

Demostración. Sea $\oplus_\alpha \mathbb{Z} \to \oplus_\beta \mathbb{Z} \to G$ una presentación libre del grupo G. Tenemos asociada una cofibración de espectros de Moore

$$\vee_\alpha \Sigma^k S \longrightarrow \vee_\beta \Sigma^k S \longrightarrow \Sigma^k MG \longrightarrow \vee_\alpha \Sigma^{k+1} S \longrightarrow \vee_\beta \Sigma^{k+1} S$$

que da la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(\oplus_\beta \mathbb{Z}, \pi_{k+1}(X)) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\oplus_\alpha \mathbb{Z}, \pi_{k+1}(X)) \longrightarrow [\Sigma^k MG, X] \\ \longrightarrow \operatorname{Hom}(\oplus_\beta \mathbb{Z}, \pi_k(X)) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\oplus_\alpha \mathbb{Z}, \pi_k(X)) \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

En el caso de la categoría homotópica estable, para cada espectro X, la *P-localización* de X se define como la aplicación natural

$$1 \wedge \eta \colon X \simeq X \wedge S \longrightarrow X \wedge M\mathbb{Z}_P,$$

donde $M\mathbb{Z}_P$ es el espectro de Moore asociado a $\mathbb{Z}_P$ y la aplicación $\eta \colon S \longrightarrow M\mathbb{Z}_P$ corresponde a la unidad de $\mathbb{Z}_P \cong \pi_0(M\mathbb{Z}_P)$. Un espectro X se dice que es *P-local* si la aplicación $1 \wedge \eta$ es una equivalencia. A menudo escribiremos X_P para denotar $X \wedge M\mathbb{Z}_P$.

Una de las consecuencias directas de la definición es que la P-localización de espectros es una localización homológica con respecto a la teoría de homología que define $M\mathbb{Z}_P$ (véase capítulo 5). Así pues, la P-localización conmuta con la suspensión. Otro hecho importante es que $S_P \simeq M\mathbb{Z}_P$ y por lo tanto

$$X_P \simeq X \wedge S_P$$

para todo espectro X. Esta propiedad nos dice que la P-localización de cualquier espectro X viene determinada por la P-localización del espectro de las esferas. Esta característica no es propia únicamente de la P-localización, sino que la comparten otros funtores de localización más generales, que llamaremos *funtores de localización smashing*. Para esta clase de funtores, la localización de cualquier espectro se obtiene haciendo el producto *smash* de dicho espectro con la localización de la esfera. Veremos más detalles sobre estos funtores de localización en la sección 5.4.

La P-localización de espectros P-localiza los grupos de homotopía y los grupos de homología. En efecto, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y cualquier espectro X tenemos un isomorfismo

$$\pi_k(X_P) \cong \pi_k(X) \otimes \pi_0(M\mathbb{Z}_P) \cong \pi_k(X) \otimes \mathbb{Z}_P.$$

A partir de este resultado se deduce un isomorfismo análogo para homología. Dados espectros X y E cualesquiera y para todo $k \in \mathbb{Z}$, tenemos un isomorfismo

$$E_k(X_P) \cong \pi_k(E \wedge X \wedge M\mathbb{Z}_P) \cong E_k(X) \otimes \mathbb{Z}_P.$$

Sin embargo, no sucede lo mismo en el caso de la cohomología. Aplicando el lema 3.4.1 tenemos el siguiente isomorfismo

$$\begin{aligned} E^k(X_P) \cong [X \wedge M\mathbb{Z}_P, \Sigma^k E] &\cong [M\mathbb{Z}_P, F(X, \Sigma^k E)] \\ &\cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_P, E^k(X)) \oplus \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_P, E^{k-1}(X)), \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ y cualesquiera espectros E y X.

La P-localización de espectros es un caso particular de f-localización. A continuación veremos cómo construir una aplicación f explícitamente. Supongamos que queremos localizar un espectro X en un conjunto de primos P. Para cada primo q que no está en el conjunto P tenemos una aplicación $S \xrightarrow{\times q} S$ que induce multiplicación por q en $\pi_0(S) \cong \mathbb{Z}$. Sea g el *wedge* de todas estas aplicaciones, una para cada q que no esté en P,

$$g\colon \vee_{q \notin P} S \longrightarrow \vee_{q \notin P} S.$$

Con esta definición de la aplicación g, un espectro es g-local si la aplicación inducida por g

$$F^c(\vee_{q \notin P} S, X) \longrightarrow F^c(\vee_{q \notin P} S, X)$$

es una equivalencia homotópica, es decir, si los grupos de homotopía $\pi_k(X)$ son $\mathbb{Z}_P$-módulos para todo $k \geq 0$.

Sea ahora la aplicación $f = \vee_{n<0} \Sigma^n g$ definida como el *wedge* de todas las desuspensiones de g. En este caso, un espectro es f-local si y sólo si todos sus grupos de homotopía son $\mathbb{Z}_P$-módulos. La aplicación de P-localización $X \longrightarrow X_P$ es una equivalencia (es decir, el espectro X es P-local) si y sólo si todos los grupos de homotopía de X son $\mathbb{Z}_P$-módulos. Así pues, el funtor L_f y el funtor de P-localización tienen los mismos espectros locales y por tanto son equivalentes.

Teorema 3.4.2. *Sea P un conjunto de primos y sea $g\colon \vee_{q \notin P} S \longrightarrow \vee_{q \notin P} S$ el* wedge *de todas las aplicaciones (una para cada q que no esté en P) que inducen multiplicación por q en $\pi_0(S)$, y consideremos la aplicación $f = \vee_{n<0} \Sigma^n g$. Entonces, $L_f X \simeq X_P$ para todo espectro X.* $\square$

Observar que en la construcción de la aplicación f no es necesario considerar todas las desuspensiones para $n < 0$; basta con tomar las desuspensiones a partir de un cierto $k \leq 0$. Así, si $f = \vee_{n<k} g$, donde $k \leq 0$, entonces también se cumple que $L_f X \simeq X_P$.

El funtor de P-localización es también equivalente a la nulificación con respecto a la cofibra de f, ya que la P-localización conmuta con la suspensión. En este caso, si C es la cofibra de f,

$$C \simeq \vee_{q \notin P, n<0} \Sigma^n M\mathbb{Z}/q.$$

También podemos considerar el funtor de nulificación con respecto a $M = \vee_{q \notin P} M\mathbb{Z}/q$, la cofibra de g. El funtor de nulificación correspondiente P_M

no conmuta con la suspensión, ya que L_g no conmuta con la suspensión, y no cambia los grupos de homotopía en dimensiones negativas por la proposición 3.3.2. Del lema 3.4.1 se sigue que los espectros M-nulos son aquellos espectros X tales que $\pi_k(X)$ es un $\mathbb{Z}_P$-módulo para todo $k > 0$ y $\pi_0(X)$ es libre de P'-torsión, donde P' denota el complementario del conjunto P. Por lo tanto, la nulificación con respecto a $\vee_{q \notin P} M\mathbb{Z}/q$ mata la P'-torsión en π_0 y P-localiza los grupos de homotopía en dimensiones positivas. En este caso, la torre de localización (3.2) asociada a la aplicación g nos da una sucesión de funtores de localización

$$\cdots \to P_{\Sigma M} \to L_{\Sigma g} \to P_M \to L_g \to P_{\Sigma^{-1}M} \to L_{\Sigma^{-1}g} \to P_{\Sigma^{-1}M} \to \cdots$$

que converge al funtor identidad por la izquierda y al funtor de P-localización por la derecha.

Capítulo 4

Conservación de estructuras

Existe una amplia cantidad de estructuras algebraicas que se conservan bajo la aplicación de funtores idempotentes en homotopía inestable y en otras categorías. Por ejemplo, la clase de los espacios que se expresan como un producto de espacios de Eilenberg–Mac Lane (también llamados GEMs) se conserva cuando aplicamos un funtor de localización con respecto a cualquier aplicación continua. En la categoría de grupos, los funtores idempotentes preservan los grupos abelianos, y otras estructuras como la de grupo nilpotente se conservan bajo la acción de localizaciones homológicas o localizaciones en conjuntos de primos. Una recopilación reciente de resultados sobre la preservación de estructuras por funtores idempotentes en la categoría de espacios topológicos y en la categoría de grupos puede encontrarse en [Cas00] y [Bas03].

En este capítulo estudiamos las estructuras de espectro anillo y espectro módulo en la categoría homotópica estable y su comportamiento respecto a los funtores de localización. En esta categoría, los espectros anillo se corresponden con los monoides y los espectros módulo con los módulos sobre monoides. Presentaremos resultados sobre la conservación de estructuras de espectro anillo y espectro módulo en la categoría homotópica estable y derivaremos algunas propiedades importantes. Demostraremos que los funtores de localización se comportan bien con respecto a estas estructuras cuando conmutan con la suspensión o si añadimos adecuadas hipótesis de conectividad. Por ejemplo, los funtores de localización conservan espectros módulo sobre espectros anillo conectivos.

Un caso importante de espectros módulo lo forman los espectros módulo sobre el espectro anillo de Eilenberg–Mac Lane HR, o HR-módulos, donde

R es un anillo con unidad. Veremos que estos espectros son precisamente los R-GEMs estables, es decir, espectros que escinden como un *wedge* de suspensiones de espectros de Eilenberg–Mac Lane cuyos grupos de homotopía son R-módulos. Como consecuencia, demostraremos que los funtores de localización preservan R-GEMs estables, análogamente a como ocurría en el caso inestable [Far96, 4.B.4].

4.1. Espectros anillo y espectros módulo

Aunque es posible trabajar con módulos y anillos estrictos gracias a las nuevas categorías de modelos para la homotopía estable, durante todo el capítulo trabajaremos con espectros anillo y espectros módulo en la categoría homotópica. En el capítulo 7 trataremos con más detalle la diferencia entre espectros módulo estrictos y homotópicos y sus categorías asociadas.

Trabajaremos en la categoría homotópica estable Ho^s. Los espectros anillo y los espectros módulo se definen en esta categoría como los monoides y los módulos sobre monoides respectivamente.

Definición 4.1.1. Un *espectro anillo* E es un espectro junto con dos aplicaciones $\mu\colon E\wedge E \longrightarrow E$ y $\eta\colon S \longrightarrow E$, que se llaman el *producto* y la *unidad* del anillo, tales que los siguientes diagramas conmutan salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} E\wedge E\wedge E \arrow[r, "1\wedge\mu"] \arrow[d, "\mu\wedge 1"'] & E\wedge E \arrow[d, "\mu"] \\ E\wedge E \arrow[r, "\mu"'] & E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E\wedge S \arrow[r, "1\wedge\eta"] \arrow[dr, equal] & E\wedge E \arrow[d, "\mu"] & S\wedge E \arrow[l, "\eta\wedge 1"'] \arrow[dl, equal] \\ & E. & \end{tikzcd}$$

A veces se denota el espectro anillo E por la terna (E,μ,η).

Un espectro anillo E se dice *conmutativo* si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} E\wedge E \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\mu"'] & & E\wedge E \arrow[dl, "\mu"] \\ & E, & \end{tikzcd}$$

donde τ es la aplicación *twist* (que permuta los dos factores).

Una aplicación $\varphi\colon (E,\mu,\eta) \to (E',\mu',\eta')$ de espectros anillo es una aplicación $\varphi\colon E \longrightarrow E'$ que es compatible con el producto y la unidad de los dos anillos, es decir, tal que los siguientes diagramas conmutan salvo homotopía:

$$
\begin{tikzcd}
E \wedge E \arrow[r, "\varphi\wedge\varphi"] \arrow[d, "\mu"'] & E' \wedge E' \arrow[d, "\mu'"] \\
E \arrow[r, "\varphi"'] & E'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& S \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta'"] & \\
E \arrow[rr, "\varphi"'] & & E.
\end{tikzcd}
$$

La categoría de espectros anillo (homotópicos) es la subcategoría de Ho^s cuyos objetos son los espectros anillo y cuyos morfismos son las aplicaciones de espectros anillo. Dado un espectro anillo podemos considerar los módulos sobre este anillo.

Definición 4.1.2. Dado un espectro anillo (E, μ, η), un *espectro módulo* (M, m) sobre E, o simplemente un E*-módulo*, es un espectro M junto con una aplicación $m\colon E \wedge M \to M$ tal que los siguientes diagramas conmutan salvo homotopía:

$$
\begin{tikzcd}
E \wedge E \wedge M \arrow[r, "\mu\wedge 1"] \arrow[d, "1\wedge m"'] & E \wedge M \arrow[d, "m"] \\
E \wedge M \arrow[r, "m"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S \wedge M \arrow[r, "\eta\wedge 1"] \arrow[dr, equal] & E \wedge M \arrow[d, "m"] \\
& M.
\end{tikzcd}
$$

Si M y N son dos E-módulos, una aplicación $\varphi\colon (M, m) \to (N, n)$ es una aplicación de E-módulos si es compatible con las aplicaciones de estructura m y n, es decir, si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$
\begin{tikzcd}
E \wedge M \arrow[r, "1\wedge\varphi"] \arrow[d, "m"'] & E \wedge N \arrow[d, "n"] \\
M \arrow[r, "\varphi"'] & N.
\end{tikzcd}
$$

La categoría de E-módulos (homotópicos) es la subcategoría de Ho^s cuyos objetos son los E-módulos y cuyos morfismos son las aplicaciones de E-módulos. Denotaremos esta categoría por E*-hmod*.

Ejemplo 4.1.3. Sea R un anillo (en el sentido algebraico) con unidad y M un R-módulo. Entonces el espectro de Eilenberg–Mac Lane HR asociado a R es un espectro anillo, que es conmutativo si R lo es, y el espectro HM es un HR-módulo. De hecho, las aplicaciones que definen las estructuras de espectro anillo y módulo vienen inducidas por la multiplicación y la unidad de R como anillo y la aplicación de estructura de M como R-módulo. Más concretamente, la multiplicación en R es un elemento de $\mathrm{Hom}(R \otimes R, R)$, que da lugar a una aplicación $\mu\colon HR \wedge HR \longrightarrow HR$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned}[HR \wedge HR, HR] &= (HR)^0(HR \wedge HR) \\ &\cong \mathrm{Hom}((H\mathbb{Z})_0(HR \wedge HR), R) = \mathrm{Hom}(R \otimes R, R).\end{aligned}$$

En la última igualdad utilizamos que $(H\mathbb{Z})_0(HR \wedge HR) = R \otimes R$. Este hecho se deduce utilizando que HR y $HR \wedge HR$ son espectros conectivos y aplicando el teorema 1.2.14 (teorema de Hurewicz). La unidad de R es un elemento de $\pi_0(HR)$ y por lo tanto da lugar a una aplicación $\eta\colon S \longrightarrow HR$. La terna (HR, μ, η) así definida es un espectro anillo. Los diagramas que definen la estructura de espectro anillo conmutan gracias al isomorfismo natural

$$[X, HR] \cong \mathrm{Hom}((H\mathbb{Z})_0(X), (H\mathbb{Z})_0(HR)),$$

que se deduce del teorema de coeficientes universales (teorema 1.2.16) y que es válido para todo espectro X que sea conectivo.

Para ver que HM es un HR-módulo se procede de la misma manera. Ahora la estructura de R-módulo de M viene dada por un elemento de $\mathrm{Hom}(R \otimes M, M)$ y éste da lugar a una aplicación $m\colon HR \wedge HR \longrightarrow HM$, ya que

$$\begin{aligned}[HR \wedge HM, HM] &= (HM)^0(HR \wedge HM) \\ &\cong \mathrm{Hom}((H\mathbb{Z})_0(HR \wedge HM), M) = \mathrm{Hom}(R \otimes M, M).\end{aligned}$$

Así pues, el par (HM, m) es un HR-módulo.

Observación 4.1.4. Del mismo modo que todo anillo es un grupo abeliano, el espectro HR es un $H\mathbb{Z}$-módulo para todo anillo R, vía la aplicación $H\mathbb{Z} \longrightarrow HR$ inducida por el morfismo $\mathbb{Z} \longrightarrow R$ que envía la unidad de $\mathbb{Z}$ a la unidad del anillo R.

Si M es un espectro E-módulo, entonces para cada espectro X el grupo abeliano graduado $[\Sigma^* X, M]$ es un $\pi_*(E)$-módulo. Para cada aplicación $\alpha \in \pi_i(E)$ y cada aplicación $f \in [\Sigma^j X, M]$ obtenemos otra aplicación en $[\Sigma^{i+j} X, M]$ componiendo con la aplicación de estructura de E-módulo de M de la siguiente manera:

$$\Sigma^{i+j} X \simeq \Sigma^i S \wedge \Sigma^j X \xrightarrow{\alpha \wedge f} E \wedge M \xrightarrow{m} M.$$

En particular, tomando $i = 0$ y $X = S$ obtenemos que, si M es un HR-módulo, entonces sus grupos de homotopía $\pi_k(M)$ son R-módulos para todo $k \in \mathbb{Z}$.

4.2. Localización de espectros anillo y espectros módulo

A continuación vamos a estudiar la interacción de los funtores de localización con las estructuras de anillo y de módulo. En el caso de funtores de f-localización que conmutan con la suspensión, la f-localización de un espectro anillo o módulo adquiere una estructura compatible de anillo o módulo respectivamente. Recordemos que el funtor L_f conmuta con la suspensión si $L_f\Sigma X \simeq \Sigma L_f X$ para todo espectro X (véase teorema 3.2.6).

En el resto de esta sección supondremos que f es una aplicación de espectros cualquiera y escribiremos L para denotar al funtor de localización L_f. Del mismo modo nos referiremos como espectros locales o espectros L-locales a los espectros f-locales, y como L-equivalencias a las f-equivalencias.

Teorema 4.2.1. *Si el funtor de localización L conmuta con la suspensión, entonces se cumple lo siguiente:*

i) *Si E es un espectro anillo, entonces el espectro LE adquiere una única estructura de espectro anillo tal que la aplicación de localización $l_E\colon E \longrightarrow LE$ es una aplicación de anillos. Si además E es conmutativo, entonces también lo es LE.*

ii) *Si M es un espectro E-módulo, entonces el espectro LM adquiere una única estructura de E-módulo tal que la aplicación de localización $l_M\colon M \longrightarrow LM$ es una aplicación de E-módulos. Además LM admite una única estructura de LE-módulo que extiende la estructura de E-módulo.*

Demostración. Para demostrar la primera parte necesitamos construir un producto y una unidad en LE. Como el espectro LE es local y el funtor de localización conmuta con la suspensión, por el teorema 3.2.6 tenemos una equivalencia homotópica

$$F(E, LE) \simeq F(LE, LE).$$

Esta equivalencia, junto con la propiedad de adjunción del producto *smash* da lugar a una sucesión de isomorfismos

$$\begin{aligned}[E \wedge E, LE] &\cong [E, F(E, LE)] \cong [E, F(LE, LE)] \\ &\cong [E \wedge LE, LE] \cong [LE, F(E, LE)] \cong [LE, F(LE, LE)] \\ &\cong [LE \wedge LE, LE].\end{aligned}$$

De este modo, si μ y η son el producto y la unidad respectivamente del espectro anillo E, la aplicación μ se extiende a una única aplicación

$$\overline{\mu}\colon LE \wedge LE \longrightarrow LE$$

que hace que el siguiente diagrama conmute salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} E \wedge E \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "l_E \wedge l_E"'] & E \arrow[d, "l_E"] \\ LE \wedge LE \arrow[r, dotted, "\overline{\mu}"'] & LE. \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

La unidad $\overline{\eta}$ de LE la definimos como la composición $l_E \circ \eta$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "l_E"] & LE \\ S. \arrow[u, "\eta"] \arrow[ur, dotted, "\overline{\eta}"'] & \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

El espectro LE junto con las aplicaciones $\overline{\mu}$ y $\overline{\eta}$ tiene estructura de espectro anillo. La conmutatividad de los diagramas que definen esta estructura para $\overline{\mu}$ y $\overline{\eta}$ se deducen de la conmutatividad de los diagramas para μ y η y de la propiedad universal del funtor de localización (utilizando la parte viii) del teorema 3.2.6). La conmutatividad de los diagramas (4.1) y (4.2) convierte a la aplicación de localización $l_E\colon E \longrightarrow LE$ en una aplicación de anillos.

La segunda parte se demuestra del mismo modo. Ahora necesitamos construir una aplicación $\overline{m}\colon E \wedge LM \longrightarrow LM$ que dote a LM de una estructura de E-módulo. Sea $m\colon E \wedge M \longrightarrow M$ la aplicación de estructura de E-módulo de M. Tenemos ahora una sucesión de isomorfismos

$$[E \wedge M, LM] \cong [E, F(M, LM)] \cong [E, F(LM, LM)] \cong [E \wedge LM, LM]. \tag{4.3}$$

De esta manera, la aplicación m se extiende a una única aplicación

$$\overline{m}\colon E \wedge LM \longrightarrow LM$$

que hace que el siguiente diagrama conmute salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} E \wedge M \arrow[r, "m"] \arrow[d, "1 \wedge l_M"'] & M \arrow[d, "l_M"] \\ E \wedge LM \arrow[r, dotted, "\overline{m}"'] & LM, \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

y así, $\overline{m}$ dota a LM de estructura de E-módulo. Como antes, la conmutatividad de los diagramas de estructura para $\overline{m}$ se sigue de la conmutatividad de los diagramas para m y la propiedad universal de la localización. La conmutatividad del diagrama (4.4) prueba que la aplicación de localización $l_M\colon M \longrightarrow LM$ es una aplicación de E-módulos.

Para dotar a LM con una estructura de LE-módulo basta con avanzar un paso más en los isomorfismos de (4.3):

$$[E \wedge LM, LM] \cong [LM, F(E, LM)] \cong [LM, F(LE, LM)] \cong [LM \wedge LE, LM].$$

Así, la aplicación $m\colon E \wedge M \longrightarrow M$ se extiende a una única aplicación $\widetilde{m}\colon LE \wedge LM \longrightarrow LM$ que hace que el siguiente diagrama conmute salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd}
E \wedge M \arrow[r, "m"] \arrow[d, "l_E \wedge l_M"'] & M \arrow[d, "l_M"] \\
LE \wedge LM \arrow[r, dotted, "\widetilde{m}"'] & LM,
\end{tikzcd}$$

dando a LM una estructura de LE-módulo. □

Los funtores de localización que no conmutan con la suspensión no conservan las estructuras de espectro anillo y espectro módulo en general, como veremos a continuación. El siguiente lema es útil para demostrar que ciertos espectros no admiten estructura de anillo o módulo.

Lema 4.2.2. *Sean E y F dos espectros anillo y sea M un espectro E-módulo. Si $F_0(E) = 0$, entonces $F_k(M) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Como E y F son espectros anillo, también lo es $E \wedge F$, tomando como producto y como unidad el *smash* de los productos y las unidades de E y F respectivamente. Por hipótesis $F_0(E) = 0$, que es equivalente a que $\pi_0(E \wedge F) = 0$; por lo tanto, la unidad $S \longrightarrow E \wedge F$ de $E \wedge F$ es nula y esto implica que $E \wedge F \simeq 0$. Si M es un E-módulo, entonces la composición

$$S \wedge M \xrightarrow{\eta \wedge 1} E \wedge M \xrightarrow{m} M,$$

donde η es la unidad de E y m es la aplicación de estructura de E-módulo de M, es una equivalencia homotópica. Si hacemos el producto *smash* de F con esta composición seguimos teniendo una equivalencia

$$S \wedge F \wedge M \longrightarrow E \wedge F \wedge M \longrightarrow F \wedge M,$$

y así obtenemos que $F \wedge M \simeq 0$, por lo que $F_i(M) = \pi_i(F \wedge M) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. $\square$

Ejemplo 4.2.3. El siguiente ejemplo muestra que la localización no conserva en general las estructuras de espectro anillo y espectro módulo. Dado un número natural n y un primo fijado p, denotaremos por $K(n)$ el espectro anillo correspondiente a la n-ésima teoría K de Morava referida al primo p. Consideremos ahora el funtor de localización correspondiente a la sección de Postnikov en el nivel cero. Dado un espectro X cualquiera, se denota por $X_{(0)}$ la sección de Postnikov en el nivel cero de X (véase definición 1.2.11). Este funtor es el funtor de f-localización con respecto a la aplicación $f\colon \Sigma S \longrightarrow *$. Al aplicarlo al espectro $K(n)$, tenemos que $(H\mathbb{Z}/p)_0(K(n)_{(0)}) = 0$ y $(H\mathbb{Z}/p)_i(K(n)_{(0)}) \neq 0$ para algún $i > 0$ (véase [Rud98, IX.7.27]). Por el lema 4.2.2, esto implica que $K(n)_{(0)}$ no puede tener estructura de espectro anillo.

Otra manera de ver este hecho es a partir de la cofibración

$$\Sigma^d k(n) \longrightarrow K(n) \longrightarrow K(n)_{(0)}, \tag{4.5}$$

donde $d = 2(p^n - 1)$ y $k(n)$, que es la cofibra de la aplicación de localización, denota el recubridor conectivo de $K(n)$. Supongamos que $K(n)_{(0)}$ fuese un espectro anillo. Entonces $K(n)_{(0)} \wedge H\mathbb{Z}/p$ también lo sería, ya que $H\mathbb{Z}/p$ lo es. Como $K(n) \wedge H\mathbb{Z}/p \simeq 0$, se sigue que $(H\mathbb{Z}/p)_0(K(n)_{(0)} = 0$. Por lo tanto, la unidad $S \longrightarrow K(n)_{(0)} \wedge H\mathbb{Z}/p$ de $K(n)_{(0)} \wedge H\mathbb{Z}/p$ sería nula, y esto implicaría que $K(n)_{(0)} \wedge H\mathbb{Z}/p \simeq 0$. Pero esto, junto con la sucesión (4.5), llevaría a una contradicción, ya que la cohomología módulo p de $k(n)$, es un cociente no nulo del álgebra de Steenrod (ver [Rud98, IX.7.17]).

El mismo argumento, considerando $K(n)$ como un módulo sobre sí mismo y utilizando que $(H\mathbb{Z}/p)_0(K(n)) = 0$ y el lema 4.2.2, prueba que $K(n)_{(0)}$ no tiene estructura de $K(n)$-módulo.

El hecho de que los funtores de localización que no conmutan con la suspensión no conserven en general las estructuras de espectro anillo y espectro módulo puede solucionarse imponiendo algunas condiciones de conectividad sobre los espectros que hagan que la adjunción

$$F^c(X \wedge Y, Z) \simeq F^c(X, F(Y, Z)),$$

en la que aparecen los recubridores conectivos del espectro de funciones, sea válida. Esto es cierto cuando el espectro X sea conectivo.

Teorema 4.2.4. *Si L es un funtor de localización cualquiera, entonces se cumple lo siguiente:*

i) *Si E es un espectro anillo conectivo y LE es conectivo, entonces el espectro LE adquiere una única estructura de espectro anillo tal que la aplicación de localización $l_E\colon E \longrightarrow LE$ es una aplicación de anillos. Si además E es conmutativo, entonces también lo es el espectro LE.*

ii) *Si M es un espectro E-módulo, donde E es un espectro anillo conectivo, entonces el espectro LM adquiere una única estructura de E-módulo tal que la aplicación de localización $l_M\colon M \longrightarrow LM$ es una aplicación de E-módulos. Además si LE también es conectivo, LM admite una única estructura de LE-módulo que extiende la estructura de E-módulo.*

Demostración. Si E es un espectro conectivo, tenemos las siguientes equivalencias

$$F^c(E, F^c(X,Y)) \simeq F^c(E, F(X,Y)) \simeq F^c(E \wedge X, Y)$$

para todo par de espectros X e Y, que dan lugar a una biyección

$$[E, F^c(X,Y)] \cong [E \wedge X, Y].$$

La demostración se completa siguiendo los mismos pasos que en la demostración del teorema 4.2.1 $\square$

Observación 4.2.5. La hipótesis de que LE sea conectivo en el teorema 4.2.4 se cumple automáticamente cuando los espectros E, A y B son conectivos, por la proposición 3.3.2 (A y B son los espectros que aparecen en la aplicación f que define el funtor de localización).

4.3. Módulos sobre espectros de Eilenberg–Mac Lane

En esta sección vamos a describir la estructura de los módulos sobre espectros anillo de Eilenberg–Mac Lane. Estos módulos van a venir caracterizados por ser precisamente aquellos módulos que escinden como un *wedge* de suspensiones de espectros de Eilenberg–Mac Lane. En el caso de espacios topológicos, aquellos espacios que escinden como un producto de espacios de Eilenberg–Mac Lane se llaman GEMs. Los espacios X con esta propiedad están caracterizados por ser retractos de $\mathrm{SP}^\infty X$, donde SP^∞ es el producto simétrico infinito de Dold–Thom [Far96, 4.B.2].

Dado un anillo R cualquiera con unidad, consideremos el espectro de Eilenberg–Mac Lane asociado HR. Como hemos visto anteriormente en el ejemplo 4.1.3, HR es un espectro anillo. Dado un espectro X cualquiera, podemos conseguir un espectro HR-módulo simplemente tomando $HR\wedge X$. Este hecho es más general, y se cumple para cualquier espectro anillo. Si E es un espectro anillo y X es un espectro cualquiera, entonces el producto *smash* $E \wedge X$ es un E-módulo vía la aplicación de estructura dada por

$$\mu \wedge 1\colon E \wedge E \wedge X \longrightarrow E \wedge X,$$

donde μ es el producto de E.

Para cualquier espectro anillo (E, μ, η), la terna $(E \wedge -, \eta \wedge 1, \mu \wedge 1)$ es una mónada en la categoría homotópica estable Ho^s. Las álgebras sobre esta mónada son los pares (M, m) donde M es un espectro y $m\colon E\wedge M \longrightarrow M$ es una aplicación que hace que ciertos diagramas conmuten salvo homotopía. Estos diagramas dotan a M con la estructura de un espectro E-módulo. Así, la categoría de álgebras, también llamada *categoría de Eilenberg–Moore*, asociada a la mónada $(E \wedge -, \eta \wedge 1, \mu \wedge 1)$, es la categoría de E-módulos que denotaremos *E-hmod*. El correspondiente grupo de aplicaciones de E-módulos de M a N en esta categoría lo denotaremos por $[M, N]_{E\text{-}hmod}$. Todos los detalles sobre mónadas y categorías de módulos se discuten en el capítulo 7. Ahora simplemente necesitamos utilizar el resultado de que toda mónada factoriza como un par de funtores adjuntos a través de su categoría de Eilenberg–Moore [Bor94, Ch.4]. En nuestro caso, este hecho nos proporciona el siguiente isomorfismo

Lema 4.3.1. *Sea E un espectro anillo. El funtor*

$$E \wedge -\colon Ho^s \longrightarrow E\text{-}hmod$$

que asigna a cada espectro X el espectro $E \wedge X$ es adjunto por la izquierda del funtor olvido E-hmod $\longrightarrow Ho^s$. Es decir, para todo espectro X y todo E-módulo M, hay un isomorfismo natural

$$[X, M] \cong [E \wedge X, M]_{E\text{-}hmod} \tag{4.6}$$

inducido por la unidad de E. □

Definición 4.3.2. Sea R un anillo con unidad. Un espectro E es un *R-GEM estable* si es equivalente a un *wedge* de suspensiones de espectros de Eilenberg–Mac Lane, es decir,

$$E \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k HA_k,$$

donde cada A_k es un R-módulo (y por lo tanto cada HA_k es un HR-módulo). Cuando $R = \mathbb{Z}$, los $\mathbb{Z}$-GEMs estables se llaman simplemente *GEMs estables*.

Vamos a estudiar en primer lugar el caso en que $R = \mathbb{Z}$. De la definición de GEM estable se sigue que si M es un GEM estable, entonces también es un $H\mathbb{Z}$-módulo, ya que es un *wedge* de espectros de Eilenberg–Mac Lane que son $H\mathbb{Z}$-módulos. El recíproco también es cierto.

Proposición 4.3.3. *Para cada $H\mathbb{Z}$-módulo M existe una aplicación de $H\mathbb{Z}$-módulos*

$$H\mathbb{Z} \wedge \left(\vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k MA_k\right) \xrightarrow{\alpha} M$$

que es una equivalencia homotópica, donde $A_k = \pi_k(M)$.

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, vamos a elegir una aplicación α_k de $[\Sigma^k MA_k, M]$ que vaya a parar a la identidad de $\operatorname{Hom}(A_k, A_k)$ vía la aplicación dada en la sucesión exacta del lema 3.4.1. Por el isomorfismo natural (4.6), cada α_k da lugar a una aplicación de $H\mathbb{Z}$-módulos

$$\widetilde{\alpha}_k \colon H\mathbb{Z} \wedge \Sigma^k MA_k \longrightarrow M$$

tal que $\widetilde{\alpha}_k = m\circ(1\wedge\alpha_k)$, donde m es la aplicación de estructura de M como $H\mathbb{Z}$-módulo. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd}
S \wedge \Sigma^k MA_k \arrow[r, "1\wedge\alpha_k"] \arrow[d, "\eta\wedge 1"'] & S \wedge M \arrow[d, "\eta\wedge 1"] \arrow[dr, equal] & \\
H\mathbb{Z} \wedge \Sigma^k MA_k \arrow[r, "1\wedge\alpha_k"'] & H\mathbb{Z} \wedge M \arrow[r, "m"'] & M.
\end{tikzcd}$$

Cada $\widetilde{\alpha}_k$ induce isomorfismo en π_k, ya que la aplicación $\eta\wedge 1$ de la izquierda del diagrama y la aplicación $1\wedge\alpha_k$ de la parte superior inducen isomorfismos en π_k (donde η es la unidad del espectro anillo $H\mathbb{Z}$). Por la propiedad universal del *wedge* podemos construir ahora una aplicación

$$\alpha \colon H\mathbb{Z} \wedge \left(\vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k MA_k\right) \longrightarrow M$$

tal que $\alpha \circ i_k = \widetilde{\alpha}_k$, donde i_k son las correspondientes inclusiones de cada $H\mathbb{Z} \wedge \Sigma^k HA_k$ en el *wedge*. Así pues, α induce isomorfismo en π_k para todo $k \in \mathbb{Z}$ y es por lo tanto una equivalencia homotópica. □

Corolario 4.3.4. *Un espectro X es un $H\mathbb{Z}$-módulo si y sólo si existe otro espectro Y tal que $X \simeq H\mathbb{Z} \wedge Y$.* □

Observación 4.3.5. La proposición 4.3.3 nos dice que los espectros $H\mathbb{Z}$-módulos son precisamente los GEMs estables, ya que $H\mathbb{Z} \wedge MG \simeq HG$ para cualquier grupo abeliano G y, por lo tanto, si M es un $H\mathbb{Z}$-módulo entonces $M \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}} \Sigma^k H(\pi_k(M))$. De igual manera, los HR-módulos y los R-GEMs estables son lo mismo, porque cada HR-módulo es un $H\mathbb{Z}$-módulo y los grupos de homotopía de un HR-módulo son R-módulos (ver observación 4.1.4).

Corolario 4.3.6. *Sean A y B dos grupos abelianos cualesquiera. Entonces*

$$\begin{gathered}[HA, HB]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod} \cong \operatorname{Hom}(A, B), \\ [HA, \Sigma HB]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod} \cong \operatorname{Ext}(A, B), \\ [HA, \Sigma^k HB]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod} = 0 \ \text{ si } k \neq 0, 1.\end{gathered}$$

Demostración. Para el espectro HA, la proposición 4.3.3 implica en particular que $H\mathbb{Z} \wedge MA \simeq HA$ como $H\mathbb{Z}$-módulos. Por el lema 4.3.1, tenemos un isomorfismo natural

$$[MA, \Sigma^k HB] \cong [HA, \Sigma^k HB]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod}.$$

El resultado se completa utilizando el lema 3.4.1 □

Además de la caracterización de los GEMs estables como $H\mathbb{Z}$-módulos, existen otras maneras indirectas de detectar cuándo un espectro es un GEM estable, que son consecuencia fundamentalmente del llamado *'Lema Clave' estable de Bousfield* [Bou96, lema 2.4], que se enuncia a continuación:

Lema 4.3.7. *Dados dos espectros X e Y cualesquiera, si $[\Sigma^k X, Y] = 0$ para todo $k \geq 1$, entonces*

$$[H\mathbb{Z} \wedge X, Y] \cong [X, Y] \quad y \quad [\Sigma^k H\mathbb{Z} \wedge X, Y] = 0$$

para todo $k \geq 1$.

Demostración. Sea C la cofibra de la aplicación $S \longrightarrow H\mathbb{Z}$ dada por la unidad del espectro anillo $H\mathbb{Z}$. Utilizando la sucesión exacta larga asociada a la cofibración $S \to H\mathbb{Z} \to C$, tenemos que $\pi_k(C) = 0$ si $k \leq 1$. Como $\pi_k(F(X,Y)) = [\Sigma^k X, Y] = 0$ si $k \geq 1$, entonces

$$[\Sigma^k C \wedge X, Y] = [\Sigma^k C, F(X,Y)] = 0 \quad \text{para todo } k \geq -1.$$

Ahora, a partir de la sucesión exacta

$$\begin{aligned}&[\Sigma^2 X, Y] \longrightarrow [\Sigma C \wedge X, Y] \longrightarrow [\Sigma H\mathbb{Z} \wedge X, Y] \longrightarrow [\Sigma X, Y]\\ &\quad \longrightarrow [C \wedge X, Y] \longrightarrow [H\mathbb{Z} \wedge X, Y] \longrightarrow [X,Y] \longrightarrow [\Sigma^{-1} C \wedge X, Y] \longrightarrow \cdots\end{aligned}$$

tenemos por tanto que $[H\mathbb{Z} \wedge X, Y] \cong [X,Y]$ y $[\Sigma^k H\mathbb{Z} \wedge X, Y] = 0$ para todo $k \geq 1$. □

Corolario 4.3.8. *Si $[\Sigma^k X, X] = 0$ para todo $k \geq 1$, entonces X tiene una estructura natural de GEM estable.*

Demostración. Por el lema 4.3.7, $[H\mathbb{Z} \wedge X, X] = [X,X]$. La identidad en $[X,X]$ nos da de forma natural una aplicación $m\colon H\mathbb{Z} \wedge X \longrightarrow X$ que da estructura de $H\mathbb{Z}$-módulo a X. □

También hay maneras de conseguir GEMs estables a partir de la localización de un espectro cualquiera. Sea f una aplicación de espectros y sea L_f el funtor de f-localización asociado.

Corolario 4.3.9. *Dado un espectro X cualquiera, si $L_f X = 0$ entonces $L_{\Sigma f} X$ es un GEM estable.*

Demostración. Como $\Sigma^{-k} L_{\Sigma f} X$ es f-local para todo $k \geq 1$ y $L_f L_{\Sigma f} X \simeq L_f X = 0$, entonces

$$[\Sigma^k L_{\Sigma f} X, L_{\Sigma f} X] \cong [L_{\Sigma f} X, \Sigma^{-k} L_{\Sigma f} X] = 0 \quad \text{para todo } k \geq 1.$$

Podemos aplicar por tanto a $L_{\Sigma f} X$ el corolario 4.3.8. □

Como ya hemos visto, los funtores de localización no preservan cofibraciones en general. Aquellos funtores que las conservan están caracterizados por la propiedad de conmutar con la suspensión (teorema 3.2.6). Pero hay una clase de funtores de localización que son los cuasi-exactos, que 'casi' conservan cofibraciones. De hecho, preservan aquellas cuya cofibra es local (véase proposición 3.2.10). Esta propiedad de casi conservación de cofibraciones puede medirse en términos de GEMs estables. Sea L_f un funtor de f-localización cualquiera y sea $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ una cofibración de espectros. La fibra de la aplicación natural

$$L_f X \longrightarrow \mathrm{fib}(L_f Y \longrightarrow L_f Z)$$

se llama *término de error* del funtor L_f asociado a la cofibración. Este término mide de alguna manera lo que le falta al funtor L_f para preservar la cofibración, es decir, si el término de error es nulo, entonces $L_f X \to L_f Y \to L_f Z$ es una cofibración.

Proposición 4.3.10. *Si L_f es un funtor de localización cuasi-exacto, entonces la fibra de la aplicación natural $L_{\Sigma f} X \longrightarrow L_f X$ es un GEM estable para todo espectro X.*

Demostración. Sea F la fibra de la aplicación $L_{\Sigma f} X \longrightarrow L_f X$. Como L_f es cuasi-exacto, si aplicamos el funtor a la sucesión $F \to L_{\Sigma f} X \to L_f X$ volvemos a obtener una cofibración por la proposición 3.2.10, ya que $L_f X$ es f-local. Ahora bien, como $L_f L_{\Sigma f} X \simeq L_f X$, entonces $L_f F = 0$ y así, por el corolario 4.3.9, $L_{\Sigma f} F$ es un GEM estable. Pero F es Σf-local, por lo tanto $F \simeq L_{\Sigma f} F$. □

Teorema 4.3.11. *Si L_f es un funtor cuasi-exacto, entonces el término de error de L_f asociado a cualquier cofibración es un GEM estable.*

Demostración. Sea $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ una cofibración de espectros y sea F su término de error asociado. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo, en el que las filas y columnas son cofibraciones:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d] & F_2 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \arrow[d] \\
L_f X \arrow[r] \arrow[d] & \overline{Y} \arrow[r] \arrow[d] & L_{\Sigma f} Z \arrow[d] \\
F_0 \arrow[r] & L_f Y \arrow[r] & L_f Z.
\end{tikzcd}$$

La segunda fila es la sucesión dada en la proposición 3.2.9. Los espectros F_0, F_1 y F_2 son las fibras de las correspondientes aplicaciones. Como el funtor L_f es cuasi-exacto, $\overline{Y} \simeq L_{\Sigma f} Y$. Los espectros F_1 y F_2 tienen estructura de GEM estable, por la proposición 4.3.10. Por lo tanto, también la tiene F, que es la fibra de la aplicación $F_2 \longrightarrow F_1$. □

4.4. Localización de GEMs estables

En esta sección vamos a ver como los R-GEMs estables se conservan bajo la acción de un funtor de f-localización. Estudiaremos el caso particular de la localización de la n-ésima suspensión de un espectro de Eilenberg–Mac Lane y veremos que dicha localización tiene como máximo dos grupos de homotopía no triviales en dimensiones n y $n+1$.

En lo que sigue, L denotará el funtor de localización L_f con respecto a una aplicación cualquiera f de espectros. Utilizando los resultados sobre localización de E-módulos de la sección 4.2, podemos demostrar el siguiente resultado sobre conservación de R-GEMs estables.

Teorema 4.4.1. *Sea R un anillo con unidad. Si E es un R-GEM estable, entonces LE también es un R-GEM estable y la aplicación de localización $l_E \colon E \longrightarrow LE$ es una aplicación de HR-módulos.*

Demostración. Un R-GEM estable es lo mismo que un HR-módulo y el espectro anillo HR es conectivo. Podemos aplicar por tanto el apartado ii) del teorema 4.2.4 para acabar la demostración. □

Este teorema nos dice que si $E \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k HA_k$ donde cada A_k es un R-módulo, entonces

$$LE \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k HG_k,$$

donde cada G_k vuelve a ser un R-módulo. De especial interés es el caso en el que el espectro E consiste únicamente en la n-ésima suspensión de un espectro de Eilenberg–Mac Lane, es decir, $E \simeq \Sigma^n HG$ con G un R-módulo y $n \in \mathbb{Z}$. Aplicando el teorema 4.4.1, sabemos que

$$L\Sigma^n HG \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k HG_k,$$

donde cada G_k es un R-módulo. De hecho, la mayor parte de los G_k son nulos, como veremos a continuación. Consideremos la siguiente sucesión de aplicaciones de $H\mathbb{Z}$-módulos (recordar que todo HR-módulo es un $H\mathbb{Z}$-módulo):

$$\Sigma^n HG \xrightarrow{l} L\Sigma^n HG \xrightarrow{\beta} \vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k HG_k \xrightarrow{p_i} \Sigma^i HG_i$$

donde l es la aplicación de localización, β es una inversa homotópica de la aplicación de la proposición 4.3.3 y p_i es la proyección en el i-ésimo factor.

Por el corolario 4.3.6 tenemos que

$$[\Sigma^n HG, \Sigma^i HG_i]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod} = 0$$

salvo que $i = n$ o $i = n+1$. La propiedad universal de la localización, junto con el hecho de que $\Sigma^i HG_i$ sea f-local porque es un retracto de $\vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k HG_k$ (véase lema 2.3.2), nos dice que $G_i = 0$ si $i \neq n$ o $i \neq n+1$. Así pues, la localización de la n-ésima suspensión de un espectro de Eilenberg–Mac Lane tiene como máximo dos grupos de homotopía no triviales.

Teorema 4.4.2. *Sea G un grupo abeliano y sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces tenemos una equivalencia*

$$L\Sigma^n HG \simeq \Sigma^n HG_1 \vee \Sigma^{n+1} HG_2$$

como $H\mathbb{Z}$-módulos, para ciertos grupos abelianos G_1 y G_2. Si G es un R-módulo, entonces G_1 y G_2 también lo son. $\square$.

Gracias al teorema 4.4.2 podemos describir la localización de cualquier HR-módulo en función de la localización de los espectros de Eilenberg–Mac Lane que lo forman.

Corolario 4.4.3. *Si $E \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k HA_k$, entonces $LE \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}} L\Sigma^k HA_k$.*

Demostración. El espectro $\vee_{k\in\mathbb{Z}} L\Sigma^k HA_k$ es f-local, ya que la aplicación natural

$$\bigvee_{k\in\mathbb{Z}} L\Sigma^k HA_k \longrightarrow \prod_{k\in\mathbb{Z}} L\Sigma^k HA_k$$

es una equivalencia homotópica y $\prod_{k\in\mathbb{Z}} L\Sigma^k HA_k$ es f-local. El teorema 4.4.2 nos asegura que para cada valor de k sólo un número finito de grupos de homotopía (de hecho son dos como máximo) son no nulos. La aplicación

$$\bigvee_{k\in\mathbb{Z}} \Sigma^k HA_k \longrightarrow \bigvee_{k\in\mathbb{Z}} L\Sigma^k HA_k$$

es una f-equivalencia porque es un *wedge* de f-equivalencias. El resultado se sigue de la unicidad homotópica de la localización. $\square$

En algunos casos, la localización de un espectro de Eilenberg–Mac Lane HG tiene un sólo grupo de homotopía, por ejemplo cuando G es un grupo libre. Este y otros resultados se describen con más detalle en el capítulo 6.

Capítulo 5

Localización homológica de espectros de Eilenberg–Mac Lane

Las localizaciones homológicas, también llamadas localizaciones de Bousfield, fueron definidas por primera vez por Adams [Ada73]. Bousfield desarrolló la teoría de localizaciones homológicas, demostrando la existencia de estos funtores primero en la categoría de espacios topológicos [Bou75] y posteriormente en la categoría de espectros [Bou79a]. Dado un espectro E, un funtor de localización homológica con respecto a E, que denotaremos por L_E, es un funtor idempotente que invierte de manera universal las equivalencias homológicas (con respecto a la teoría de homología dada por E) transformándolas en equivalencias homotópicas. Las localizaciones homológicas son un caso particular de f-localizaciones; de hecho, son nulificaciones, y además conmutan con la suspensión.

En [Bou79a] se estudia el caso de las localizaciones $L_E X$ cuando los espectros E y X son ambos conectivos. Estas localizaciones siempre son localizaciones en un conjunto de primos o compleciones en un conjunto de primos, que depende de los grupos de homotopía de E. Si alguno de los espectros E o X no es conectivo, los resultados que se obtienen son menos previsibles. Por ejemplo, si K denota el espectro de la teoría K compleja y S es el espectro de las esferas, entonces $L_K S$ tiene infinitos grupos de homotopía no nulos en dimensiones positivas y negativas (ver [Rav84, teorema 8.10]). Al final del capítulo veremos una demostración alternativa de este resultado, válida también para los espectros de Johnson–Wilson $E(n)$.

En este capítulo vamos a desarrollar un estudio de las localizaciones homológicas $L_E X$ en el caso en el que E sea un espectro cualquiera y X sea un HR-módulo, donde R es un anillo con unidad. Como caso particular, obtendremos información sobre localizaciones homológicas de espectros de Eilenberg–Mac Lane. Un estudio análogo había sido llevado a cabo por Bousfield en [Bou82] para espacios topológicos. Nuestros resultados traducen los obtenidos por Bousfield al caso de espectros.

En la primera sección recordaremos las definiciones y propiedades más importantes de las localizaciones homológicas. Después, veremos como la localización $L_E X$ de un HR-módulo X viene determinada por la localización de los espectros de Eilenberg–Mac Lane que lo forman y el conjunto de primos p para los cuales el espectro $H\mathbb{Z}/p$ no es acíclico con respecto a E. Desarrollaremos algunos cálculos explícitos de localizaciones con respecto a diferentes teorías de homología y algunos ejemplos de cálculos concretos de $L_E HG$ para diferentes grupos abelianos G.

Posteriormente veremos una aplicación a los funtores de localización *smashing*, que son un tipo concreto de localización homológica. Para estos funtores, la localización de un espectro se determina haciendo el producto *smash* de dicho espectro con la localización del espectro de las esferas. Demostraremos que para esta clase de funtores la localización de la esfera tiene un único grupo de homología entera, que es además un subanillo de los racionales.

Terminaremos el capítulo con una breve exposición sobre localizaciones cohomológicas. Estas localizaciones generalizan las localizaciones homológicas, pero su existencia continúa siendo un problema abierto [Hov95].

5.1. Localizaciones homológicas

Denotaremos por Ho^s la categoría homotópica estable. Las localizaciones homológicas fueron desarrolladas en la categoría homotópica estable por Bousfield en [Bou79a]. Cada espectro E en la categoría homotópica estable da lugar a una teoría de homología definida como $E_k(X) = \pi_k(E \wedge X)$ para cualquier espectro X y para todo $k \in \mathbb{Z}$. La localización homológica respecto de la teoría de homología E es un funtor que transforma de manera universal las equivalencias homológicas respecto a esta teoría de homología en equivalencias homotópicas.

Definición 5.1.1. Si E es un espectro, entonces:

i) Un espectro X es *E-acíclico* si $E_k(X) = \pi_k(E \wedge X) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Una aplicación de espectros $f\colon X \longrightarrow Y$ es una *E-equivalencia* si la aplicación inducida $f_k\colon E_k(X) \longrightarrow E_k(Y)$ es un isomorfismo para todo $k \in \mathbb{Z}$.

iii) Un espectro Z es *E-local* si cada E-equivalencia $f\colon X \longrightarrow Y$ induce una equivalencia homotópica $F(Y, Z) \simeq F(X, Z)$, o de manera equivalente, si $F(W, Z) = 0$ para todo espectro W que sea E-acíclico.

Una *E-localización* de un espectro X es una E-equivalencia

$$l_X\colon X \longrightarrow L_E X$$

donde $L_E X$ es un espectro E-local. La aplicación l_X se llama *aplicación de localización*.

Podemos asignar a cada espectro X una localización homológica $L_E X$ de manera funtorial. Denotaremos por L_E a este funtor, que llamaremos funtor de E-localización. Esta construcción es universal en el sentido de que la aplicación de localización es inicial en Ho^s entre las aplicaciones de X a espectros E-locales y es terminal entre todas las E-equivalencias con dominio X. Además, el funtor de localización es único salvo homotopía.

Definición 5.1.2. Dado un espectro E, llamamos *clase de Bousfield* de E y la denotamos por $\langle E \rangle$ a la clase de equivalencia formada por todos los espectros con los mismos espectros acíclicos que E.

Las clases de Bousfield clasifican los funtores de localización homológica. Dados dos espectros E y F, los funtores de E-localización y F-localización coinciden si y sólo si lo hacen sus clases de Bousfield, es decir, si y sólo si $\langle E \rangle = \langle F \rangle$.

La existencia de un funtor de E-localización para cada espectro E fue demostrada por Bousfield en [Bou79a, teorema 1.1], donde también se prueba que la localización homológica es un caso particular de f-localización; en concreto, es una nulificación [Bou79a, lema 1.14].

Teorema 5.1.3. *Dado un espectro E, existe otro espectro A tal que $L_E \simeq P_A$, donde P_A denota el funtor de A-nulificación.* □

5.2. Tipos de aciclicidad y localización de módulos

En esta sección vamos a estudiar cómo los tipos de E-aciclicidad del espectro de Eilenberg–Mac Lane $H\mathbb{Z}/p$ para cada primo p y del espectro $H\mathbb{Q}$ determinan la localización $L_{E\mathbb{Z}/p}X$ para cualquier espectro E y cualquier HR-módulo X. Esta localización dependerá de los primos p para los cuales $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$ y de si $E \wedge H\mathbb{Q} = 0$ o no.

Hemos visto que los HR-módulos son exactamente los R-GEMs estables (observación 4.3.5). Por tanto, si E es un HR-módulo, entonces

$$E \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k HA_k,$$

donde cada $A_k \cong \pi_k(E)$ es un R-módulo. En el caso de que $R = \mathbb{Z}$, los $H\mathbb{Z}$-módulos son los espectros de la forma $H\mathbb{Z} \wedge X$ (véase corolario 4.3.4. Cualquier HR-módulo es un $H\mathbb{Z}$-módulo a través de la aplicación $\mathbb{Z} \longrightarrow R$ que envía la unidad de $\mathbb{Z}$ a la unidad de R. El espectro de Eilenberg–Mac Lane HG es un HR-módulo si G es un R-módulo.

Dado un grupo abeliano G y un espectro E, denotamos $EG = E \wedge MG$, donde MG es el espectro de Moore asociado al grupo G. Un diagrama conmutativo de espectros de la forma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "i"'] & W \end{tikzcd}$$

es un *cuadrado aritmético* si existe una aplicación $j\colon W \longrightarrow \Sigma X$ tal que

$$X \xrightarrow{(f,h)} Y \vee Z \xrightarrow{(g,-i)} W \xrightarrow{j} \Sigma X$$

es una cofibración de espectros.

En [Bou79b], Bousfield demostró que dado cualquier espectro E, su clase de Bousfield escinde de la siguiente manera:

$$\langle E\rangle = \langle E\mathbb{Q}\rangle \vee \bigvee_{p\in\mathcal{P}} \langle E\mathbb{Z}/p\rangle, \tag{5.1}$$

donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de todos los números primos, es decir, un espectro es E-acíclico si y sólo si es $E\mathbb{Q}$-acíclico y $E\mathbb{Z}/p$-acíclico para todo primo p.

Esencialmente, este resultado nos dice que podemos recuperar la localización $L_E X$ a partir de la información en cada primo $L_{E\mathbb{Z}/p}X$ y del conocimiento de lo que ocurre racionalmente $L_{E\mathbb{Q}}X$, como muestra el siguiente cuadrado aritmético [Bou79a, proposición 2.9].

Teorema 5.2.1. *Dados dos espectros cualesquiera E y X tenemos un cuadrado aritmético*

$$\begin{tikzcd} L_E X \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{p\in\mathcal{P}} L_{E\mathbb{Z}/p}X \arrow[d] \\ L_{E\mathbb{Q}}X \arrow[r] & L_{E\mathbb{Q}}\left(\prod_{p\in\mathcal{P}} L_{E\mathbb{Z}/p}X\right), \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de todos los primos. □

En el caso racional, las $E\mathbb{Q}$-localizaciones están completamente determinadas en [Bou79a, proposición 2.8]. Para cualquier espectro E, la localización $L_{E\mathbb{Q}}$ es siempre la racionalización. Más concretamente, $L_{E\mathbb{Q}}X \simeq L_{M\mathbb{Q}}X \simeq X \wedge M\mathbb{Q}$ para cualesquiera espectros E y X.

Nosotros vamos a centrarnos en el cálculo de $L_{E\mathbb{Z}/p}X$ cuando X es un HR-módulo. Este cálculo va a depender de los tipos de E-aciclicidad para el espectro $H\mathbb{Z}/p$ en cada primo p. Observar que si $\Sigma^i H\mathbb{Z}/p$ es E-acíclico para algún $i \in \mathbb{Z}$ entonces $\Sigma^k H\mathbb{Z}/p$ es E-acíclico para todo $k \in \mathbb{Z}$, ya que la localización homológica conmuta con la suspensión.

Proposición 5.2.2. *Si $H\mathbb{Z}/p$ es E-acíclico, entonces $L_{E\mathbb{Z}/p}X = 0$ para cualquier HR-módulo X.*

Demostración. Basta con comprobar que $M\mathbb{Z}/p \wedge X$ es E-acíclico, ya que en ese caso $E\mathbb{Z}/p \wedge X \simeq E \wedge M\mathbb{Z}/p \wedge X = 0$. El espectro $M\mathbb{Z}/p \wedge X$ es $E\mathbb{Q}$-acíclico y $E\mathbb{Z}/q$-acíclico para $q \neq p$ trivialmente. Para $q = p$ tenemos que

$$M\mathbb{Z}/p \wedge X \wedge E\mathbb{Z}/p \simeq X' \wedge H\mathbb{Z} \wedge M\mathbb{Z}/p \wedge E\mathbb{Z}/p = 0$$

ya que X es en particular un $H\mathbb{Z}$-módulo y por tanto escinde como $H\mathbb{Z}\wedge X'$, y además $H\mathbb{Z}\wedge E\mathbb{Z}/p \simeq E\wedge H\mathbb{Z}/p = 0$. Utilizando ahora la descomposición de (5.1) tenemos que X es $E\mathbb{Z}/p$-acíclico. □

Lema 5.2.3. *Si $H\mathbb{Z}/p$ no es E-acíclico y $f\colon X \longrightarrow Y$ es una $E\mathbb{Z}/p$-equivalencia, entonces es una $H\mathbb{Z}/p$-equivalencia.*

Demostración. Como la localización homológica conmuta con la suspensión, si hacemos el producto *smash* de f con un espectro cualquiera continúa siendo una $E\mathbb{Z}/p$-equivalencia (véase teorema 3.2.6). En particular, si hacemos *smash* con el espectro $H\mathbb{Z}$, la aplicación f induce una equivalencia homotópica

$$E\mathbb{Z}/p \wedge H\mathbb{Z} \wedge X \simeq E\mathbb{Z}/p \wedge H\mathbb{Z} \wedge Y.$$

El espectro $E\mathbb{Z}/p \wedge H\mathbb{Z} \simeq E \wedge H\mathbb{Z}/p$ es un $H\mathbb{Z}/p$-módulo, por lo tanto sus grupos de homotopía son espacios vectoriales sobre $\mathbb{Z}/p$ y escinde como un *wedge* $\vee_{k\in I}\Sigma^k H\mathbb{Z}/p$ (en el conjunto de índices I puede haber enteros repetidos). Este *wedge* es no nulo ya que por hipótesis $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$. Así pues, f induce una equivalencia homotópica

$$\vee_{k\in I}\Sigma^k H\mathbb{Z}/p \wedge X \simeq \vee_{k\in I}\Sigma^k H\mathbb{Z}/p \wedge Y,$$

lo que convierte a f en una $H\mathbb{Z}/p$-equivalencia. □

El siguiente teorema nos permite calcular la localización $L_{E\mathbb{Z}/p}X$ para espectros conectivos o HR-módulos X en el caso en que el espectro $H\mathbb{Z}/p$ no sea E-acíclico.

Teorema 5.2.4. *Si $H\mathbb{Z}/p$ no es E-acíclico, entonces $L_{E\mathbb{Z}/p}X \simeq L_{M\mathbb{Z}/p}X$ para cualquier espectro X que sea conectivo o un HR-módulo.*

Demostración. Si X es un espectro conectivo entonces $L_{M\mathbb{Z}/p}X \simeq L_{H\mathbb{Z}/p}X$ (véase [Bou79a, teorema 3.1]). La aplicación $X \longrightarrow L_{M\mathbb{Z}/p}X \simeq L_{H\mathbb{Z}/p}X$ es una $M\mathbb{Z}/p$-equivalencia, y por tanto una $E\mathbb{Z}/p$-equivalencia. Además, el espectro $L_{H\mathbb{Z}/p}X$ es $E\mathbb{Z}/p$-local, ya que el lema 5.2.3 nos dice que todo espectro $H\mathbb{Z}/p$-local es $E\mathbb{Z}/p$-local. Si X es un HR-módulo, el resultado se sigue de lo anterior y de la proposición 5.2.6. □

Podemos calcular $L_{M\mathbb{Z}/p}X$ para cualquier espectro utilizando el siguiente resultado [Bou79a, proposición 2.5]:

Proposición 5.2.5. *Dado un espectro X cualquiera,*

$$L_{M\mathbb{Z}/p}X \simeq F(\Sigma^{-1}M\mathbb{Z}/p^\infty, X)$$

y tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \pi_k(X)) \to \pi_k(L_{M\mathbb{Z}/p}X) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \pi_{k-1}(X)) \to 0,$$

que escinde para todo $k \in \mathbb{Z}$. □

En el caso particular de que X sea un espectro de Eilenberg–Mac Lane HG, tenemos que $L_{M\mathbb{Z}/p}HG \simeq HA \vee \Sigma HB$, donde $A \cong \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)$ y $B \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)$.

La propiedad de escisión de los HR-módulos como un *wedge* de suspensiones de espectros de Eilenberg–Mac Lane, junto con el hecho de que las localizaciones homológicas conmutan con la suspensión, nos permite describir las localizaciones homológicas de un HR-módulo a partir de las localizaciones de los espectros de Eilenberg–Mac Lane que lo forman.

Proposición 5.2.6. *Si X es un HR-módulo tal que $X \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k HA_k$, entonces $L_E X \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k L_E HA_k$ para cualquier espectro E.*

Demostración. Como el funtor L_E conmuta con la suspensión, tenemos que $L_E\Sigma^k HA_k \simeq \Sigma^k L_E HA_k$. El resultado se deduce ahora del corolario 4.4.3. □

Por tanto, para el estudio de localizaciones homológicas de HR-módulos podemos restringirnos al caso particular de la localización de espectros de Eilenberg–Mac Lane $L_E HG$. Como hemos visto en el teorema 4.4.2, esta localización tendrá como máximo dos grupos de homotopía no triviales en dimensiones cero y uno. Gracias al cuadrado aritmético de Bousfield, para conocer $L_E HG$ es suficiente determinar $L_{E\mathbb{Z}/p}HG$ para todo primo p, ya que en el caso racional ya sabemos que $L_{E\mathbb{Q}}HG \simeq H(\mathbb{Q}\otimes G)$ para cualquier espectro E.

Un grupo abeliano G se dice que es *únicamente p-divisible* si para todo $g \in G$ existe un único $h \in G$ tal que $g = ph$. Esta condición es equivalente a decir que $\mathbb{Z}/p \otimes G = 0$ y $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/p, G) = 0$.

Lema 5.2.7. *Para cualquier espectro E, el grupo $\pi_k(E)$ es únicamente p-divisible para todo $k \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $E\mathbb{Z}/p = 0$.*

Demostración. El resultado se obtiene directamente utilizando la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p \otimes \pi_k(E) \longrightarrow \pi_k(E\mathbb{Z}/p) \longrightarrow \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/p, \pi_{k-1}(E)) \longrightarrow 0,$$

válida para todo $k \in \mathbb{Z}$. □

Como caso particular tenemos que el grupo abeliano $(H\mathbb{Z})_k(E)$ es únicamente p-divisible para todo $k \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $E \wedge H\mathbb{Z}/p = 0$. Observar también que si $\pi_k(E)$ es únicamente p-divisible, entonces $(H\mathbb{Z})_k(E)$ es únicamente p-divisible.

Proposición 5.2.8. *Si $H\mathbb{Z}/p$ no es E-acíclico, entonces $L_{E\mathbb{Z}/p}HG = 0$ si y sólo si G es únicamente p-divisible.*

Demostración. Si $L_{E\mathbb{Z}/p}HG = 0$, entonces $E \wedge H\mathbb{Z}/p \wedge MG = 0$. Como $E \wedge H\mathbb{Z}/p$ es un $H\mathbb{Z}/p$-módulo,

$$E \wedge H\mathbb{Z}/p \wedge MG \simeq \vee_{k\in I}\Sigma^k H\mathbb{Z}/p \wedge MG = 0.$$

Por lo tanto $H\mathbb{Z}/p \wedge MG \simeq M\mathbb{Z}/p \wedge HG = 0$ y G es únicamente p-divisible por el lema 5.2.7.

Por otro lado, si G es únicamente p-divisible, entonces $HG \wedge M\mathbb{Z}/p = 0$ por el lema 5.2.7. Por tanto $L_{E\mathbb{Z}/p}HG = 0$ □

El teorema 5.2.4 y la proposición 5.2.8 nos permiten calcular la localización $L_{E\mathbb{Z}/p}HG$ dependiendo de los tipos de E-aciclicidad de $H\mathbb{Z}/p$. Si $H\mathbb{Z}/p$ es E-acíclico, entonces $L_{E\mathbb{Z}/p}HG = 0$. En el caso en que $H\mathbb{Z}/p$ no sea E-acíclico, entonces $L_{E\mathbb{Z}/p}HG \simeq L_{M\mathbb{Z}/p}HG$ si G no es únicamente p-divisible y $L_{E\mathbb{Z}/p}HG = 0$ en otro caso. El cuadrado aritmético (5.2) en el caso en que $X = HG$ es el siguiente:

$$\begin{tikzcd} L_E HG \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{p\in P} L_{E\mathbb{Z}/p}HG \arrow[d] \\ H(G\otimes\mathbb{Q}) \arrow[r] & M\mathbb{Q} \wedge \left(\prod_{p\in P} L_{E\mathbb{Z}/p}HG\right) \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

donde P es el conjunto de los números primos p tales que $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$ y G no es únicamente p-divisible.

Teorema 5.2.9. *Sean $A_p = \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)$, $B_p = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)$ y sea P el conjunto de primos p tales que $H\mathbb{Z}/p$ no es E-acíclico y G no es únicamente p-divisible*

. Dado un espectro cualquiera E y un grupo abeliano G tenemos lo siguiente:

i) *Si $H\mathbb{Q}$ es E-acíclico, entonces*

$$L_E HG \simeq \prod_{p\in P}(HA_p \vee \Sigma HB_p).$$

ii) *Si $H\mathbb{Q}$ no es E-acíclico, entonces tenemos una cofibración de espectros*

$$L_E HG \to H(G \otimes \mathbb{Q}) \vee \prod_{p \in P} (HA_p \vee \Sigma HB_p) \to M\mathbb{Q} \wedge \prod_{p \in P} (HA_p \vee \Sigma HB_p).$$

Demostración. El resultado es consecuencia de las proposiciones 5.2.2, 5.2.8, el teorema 5.2.4 y el cuadrado aritmético (5.3). □

5.3. Algunos ejemplos

En esta sección vamos a ver cómo calcular la localización homológica de un espectro de Eilenberg–Mac Lane en algunos ejemplos concretos. En primer lugar vamos a calcular $L_E HG$ para algunas teorías de homología E no conectivas y cualquier grupo abeliano G.

Localización con respecto a la teoría K de Morava $K(n)$

Sea $n \geq 0$, p un primo fijado y $K(n)$ el espectro que representa la n-ésima teoría K de Morava relativa al primo p. Si $n = 0$, entonces $K(0) = H\mathbb{Q} = M\mathbb{Q}$ y por lo tanto $L_{K(0)} HG \simeq H(G \otimes \mathbb{Q})$. Para $n \geq 1$, tenemos que $\pi_*(K(n)) \cong \mathbb{Z}/p\,[v_n^{-1}, v_n]$, con $|v_n| = 2(p^n - 1)$. En este caso, $K(n) \wedge M\mathbb{Q} = 0$ y $H\mathbb{Z}/p$ es $K(n)$-acíclico para todo primo p, ya que $K(n) \wedge H\mathbb{Z}/p = 0$ para todo primo p (véase por ejemplo [Rav84, teorema 2.1]). Por lo tanto $L_{K(n)} HG = 0$ si $n \geq 1$.

Proposición 5.3.1. *Dado un HR-módulo cualquiera X, su localización con respecto a $K(n)$ es cero si $n > 0$ o es la racionalización si $n = 0$, es decir, $L_{K(0)} X \simeq X \wedge M\mathbb{Q}$.* □

Localización con respecto a la teoría de Johnson–Wilson $E(n)$

La clase de Bousfield de la teoría de homología $E(n)$ se descompone como un *wedge* de teorías K de Morava, $\langle E(n) \rangle = \vee_{i=0}^{n} \langle K(i) \rangle$ (véase [Rav84, teorema 2.1]); por lo tanto $L_{E(n)} HG \simeq L_{K(0)} HG \simeq H(G \otimes \mathbb{Q})$, ya que $L_{K(i)} HG = 0$ si $i \geq 1$.

Localización con respecto a teoría K

El espectro $H\mathbb{Z}/p$ es K-acíclico para todo primo p y $K\mathbb{Q} \neq 0$, por lo que $L_K HG \simeq H(G \otimes \mathbb{Q})$.

Proposición 5.3.2. *Dado un HR-módulo cualquiera, su localización con respecto a $E(n)$ o teoría K es la racionalización.* □

En los siguientes ejemplos calcularemos todas las posibles localizaciones homológicas de HG con respecto a E para algunos grupos abelianos G y algunas familias de grupos abelianos concretas. Para ello utilizaremos el teorema 5.2.9. Dado un espectro cualquiera E, y un grupo abeliano G, tenemos las siguientes cuatro condiciones, que nos determinarán la localización $L_E HG$ completamente:

- Condición I: $E\mathbb{Q} = 0$ y $E \wedge H\mathbb{Z}/p = 0$ para todo primo p.
- Condición II: $E\mathbb{Q} \neq 0$ y $E \wedge H\mathbb{Z}/p = 0$ para todo primo p.
- Condición III: $E\mathbb{Q} = 0$ y $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$ para todo p de un conjunto de primos P.
- Condición IV: $E\mathbb{Q} \neq 0$ y $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$ para todo p de un conjunto de primos P.

Localizaciones de $H\mathbb{Z}$

El grupo abeliano de los enteros no es únicamente p-divisible para ningún primo p. Si se cumple la condición II, entonces $L_E H\mathbb{Z} \simeq H\mathbb{Q}$. Por otro lado,

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}) \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p,$$

donde $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ es el anillo de los enteros p-ádicos. Si se cumple la condición III, entonces $L_E H\mathbb{Z} \simeq H(\prod_{p\in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p)$. Y si se cumple la condición IV, tomando π_0 en (5.3), tenemos el siguiente diagrama de *pullback* de grupos abelianos:

$$\begin{tikzcd}
\pi_0(L_E H\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{p\in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p \arrow[d] \\
\mathbb{Q} \arrow[r] & \mathbb{Q} \otimes \prod_{p\in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p
\end{tikzcd}$$

donde P es el conjuntos de primos tales que $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$. Por lo tanto, $L_E H\mathbb{Z} \simeq H\mathbb{Z}_P$.

Localizaciones de $H\mathbb{Z}/p^k$ con p primo

El grupo abeliano $\mathbb{Z}/p^k$ es únicamente q-divisible para todo $q \neq p$ y además $L_{E\mathbb{Q}} H\mathbb{Z}/p^k \simeq H(\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}/p^k) = 0$. También tenemos que

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}/p^k) = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}/p^k) = \mathbb{Z}/p^k.$$

Así pues, $L_E H\mathbb{Z}/p^k = 0$ si se cumple la condición II y $L_E H\mathbb{Z}/p^k \simeq H\mathbb{Z}/p^k$ si se cumple la condición III o la IV.

Localizaciones de $H\mathbb{Q}$

El grupo de los racionales es únicamente p-divisible para todo primo p, por tanto $L_{E\mathbb{Z}/p} H\mathbb{Q} = 0$. Si se cumple la condición III, entonces $L_E H\mathbb{Q} = 0$, y $L_E H\mathbb{Q} = H\mathbb{Q}$ si se satisface la condición II o la IV.

Localizaciones de $H\mathbb{Z}_R$ para un conjunto de primos R

Para todo primo $p \in R$ tenemos que

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}_R) = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}_R) = \widehat{\mathbb{Z}}_p.$$

De hecho, si G es un grupo abeliano libre de torsión, entonces se verifica que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, G) = 0$ y $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G) = 0$ si y sólo si G es p-divisible. Si se cumple la condición II, entonces $L_E H\mathbb{Z}_R \simeq H\mathbb{Q}$ porque $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_R \cong \mathbb{Q}$. Si se cumple la condición III, entonces $L_E H\mathbb{Z}_R \simeq H(\prod_{p \in R \cap P} \widehat{\mathbb{Z}}_p)$. Y si se cumple la condición IV, entonces $L_E H\mathbb{Z}_R \simeq H\mathbb{Z}_{R \cap P}$, donde P es el conjunto de todos los primos tales que $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$. Observar que este caso generaliza el caso de la localización de $H\mathbb{Z}$, cuando $R = \emptyset$, y el de la localización de $H\mathbb{Q}$, cuando R es el conjunto de todos los primos.

Localizaciones de $H\mathbb{Z}/p^\infty$

El grupo $\mathbb{Z}/p^\infty$ es únicamente q-divisible para todo primo $q \neq p$. En este caso, $L_{E\mathbb{Q}} H\mathbb{Z}/p^\infty = 0$ ya que $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}/p^\infty = 0$. Por otro lado,

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}/p^\infty) = \widehat{\mathbb{Z}}_p \quad \text{y} \quad \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}/p^\infty) = 0.$$

Así, si se cumple la condición II, entonces $L_E H\mathbb{Z}/p^\infty = 0$. Si se cumple la condición III, entonces $L_E H\mathbb{Z}/p^\infty \simeq \Sigma H\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Y si se cumple la condición IV, entonces por el teorema 5.2.9 tenemos una cofibración de espectros

$$L_E H\mathbb{Z}/p^\infty \to \Sigma H\widehat{\mathbb{Z}}_p \to \Sigma H\widehat{\mathbb{Q}}_p \to \Sigma H(\widehat{\mathbb{Q}}_p/\widehat{\mathbb{Z}}_p),$$

donde $\widehat{\mathbb{Q}}_p \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p \otimes \mathbb{Q}$ son los racionales p-ádicos. Por lo tanto $L_E H\mathbb{Z}/p^\infty \simeq H(\widehat{\mathbb{Q}}_p/\widehat{\mathbb{Z}}_p) \simeq H\mathbb{Z}/p^\infty$.

Localizaciones de $H\widehat{\mathbb{Z}}_p$

Basta con fijarnos en el primo p, porque $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ es únicamente q-divisible para todo primo $q \neq p$. En este caso tenemos que

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \widehat{\mathbb{Z}}_p) = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \widehat{\mathbb{Z}}_p) = \widehat{\mathbb{Z}}_p.$$

Si se cumple la condición II, entonces $L_E H\widehat{\mathbb{Z}}_p \simeq H\widehat{\mathbb{Q}}_p$. Y si se cumple la condición III o la IV, entonces $L_E H\widehat{\mathbb{Z}}_p \simeq H\widehat{\mathbb{Z}}_p$.

La siguiente tabla resume los resultados de las localizaciones obtenidas para los diferentes grupos anteriores. El conjunto P es el conjunto de primos p tales que $H\mathbb{Z}/p$ no es E-acíclico.

	Condición I	Condición II	Condición III	Condición IV
$L_E H\mathbb{Z}$	0	$H\mathbb{Q}$	$\prod_{p\in P} H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\mathbb{Z}_P$
$L_E H\mathbb{Z}/p^k$	0	0	$H\mathbb{Z}/p^k$	$H\mathbb{Z}/p^k$
$L_E H\mathbb{Q}$	0	$H\mathbb{Q}$	0	$H\mathbb{Q}$
$L_E H\mathbb{Z}_R$	0	$H\mathbb{Q}$	$\prod_{p\in P\cap R} H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\mathbb{Z}_{P\cap R}$
$L_E H\mathbb{Z}/p^\infty$	0	0	$\Sigma H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\mathbb{Z}/p^\infty$
$L_E H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	0	$H\widehat{\mathbb{Q}}_p$	$H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\widehat{\mathbb{Z}}_p$

Localización de HG cuando G es un grupo abeliano finitamente generado

Todo grupo abeliano finitamente generado G escinde como una suma directa finita $G \cong \oplus_{i=1}^n C_i$, donde cada C_i es o bien $\mathbb{Z}$, o bien $\mathbb{Z}/p^k$ para algún primo p y $k \geq 1$. Como $HG \simeq \vee_{i=1}^n HC_i$, entonces $L_E HG \simeq \vee_{i=1}^n L_E HC_i$ y la localización de cada HC_i se determina utilizando los resultados anteriores para la localización de $H\mathbb{Z}$ y $H\mathbb{Z}/p^k$.

Localización de HG cuando G es un grupo abeliano divisible

Todo grupo abeliano divisible escinde como una suma directa de copias de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}/p^\infty$ para varios primos p. Si G es un grupo abeliano divisible, entonces $G \cong R \oplus T$, donde $R = \oplus_i \mathbb{Q}$ y $T = \oplus_p(\oplus_{j_p}\mathbb{Z}/p^\infty)$. Por lo tanto $L_EHG \simeq L_EHR \vee L_EHT$. Como R es un retracto de $\prod_i \mathbb{Q}$, se tiene que $L_EHR \simeq HR$ o $L_EHR = 0$, dependiendo de si $H\mathbb{Q}$ es E-local o E-acíclico. La localización L_EHT puede determinarse utilizando la sucesión exacta de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_P \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \oplus_{p\in P}\mathbb{Z}/p^\infty \longrightarrow 0,$$

los resultados anteriores para la localización de $H\mathbb{Z}/p^\infty$ y $H\mathbb{Z}_P$ y la propiedad de la localización homológica de conservar cofibraciones.

Localización de HG cuando G es un grupo reducido

En todos los casos estudiados anteriormente excepto en el caso de $H\mathbb{Z}/p^\infty$ todas las localizaciones homológicas de HG tienen como máximo un sólo grupo de homotopía en dimensión cero. Esta propiedad no sólo la cumplen los grupos anteriores, sino que también se verifica cuando localizamos HG para cualquier grupo abeliano G que sea reducido. Un grupo abeliano G se dice que es *reducido* si no tiene subgrupos divisibles no triviales.

Teorema 5.3.3. *Si G es un grupo abeliano reducido y E es un espectro cualquiera, entonces $L_EHG \simeq HA$ para algún A.*

Demostración. Si G es reducido, entonces $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, G) = 0$. El resultado se deduce aplicando ahora el teorema 5.2.9. □

Dado un grupo abeliano cualquiera G, siempre lo podemos descomponer como $G_1 \oplus G_2$, donde G_1 es el subgrupo divisible maximal de G y G_2 es reducido. Por otro lado, G_1 escinde como una suma directa de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}/p^\infty$ para varios primos p. Por lo tanto, por el teorema 5.3.3 y los resultados anteriores sobre localizaciones homológicas de HG cuando G es abeliano divisible, la única posibilidad para que en la localización homológica de un espectro de Eilenberg–Mac Lane aparezca un grupo de homotopía en dimensión 1 es que $\mathbb{Z}/p^\infty$ aparezca como un factor de la descomposición del grupo G y que $L_EH\mathbb{Z}/p^\infty \neq 0$.

Corolario 5.3.4. *Si $\mathbb{Z}/p^\infty$ no es un sumando directo de G para ningún primo p, entonces para cualquier espectro E se cumple que $L_EHG \simeq HA$ para cierto grupo abeliano A.* □

5.4. Funtores de localización *smashing*

Un funtor de localización L es *smashing* cuando la localización de cualquier espectro viene determinada por la localización LS del espectro de las esferas. Más concretamente, L es *smashing* si la aplicación natural

$$1 \wedge l\colon X \longrightarrow X \wedge LS$$

es una localización para todo espectro X, donde $l\colon S \longrightarrow LS$ es la aplicación de localización del espectro de las esferas. También se dice que un espectro E es *smashing* cuando el funtor de localización L_E lo es [Rav84, definición 1.28]. Si el funtor L es *smashing*, entonces una aplicación $h\colon X \longrightarrow Y$ es una L-equivalencia si

$$X \wedge LS \xrightarrow{h\wedge 1} Y \wedge LS$$

es una equivalencia, es decir, si

$$(LS)_k(X) \cong (LS)_k(Y) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

De este modo podemos ver que toda localización *smashing* L es una localización homológica $L = L_E$, donde $E \simeq LS$ y por lo tanto conmuta con la suspensión. Además, el espectro LS es un espectro anillo conmutativo, por el teorema 4.2.1 y $LS \wedge LS \simeq LS$, porque la aplicación de multiplicación $LS \wedge LS \longrightarrow LS$ es inversa por la izquierda de la aplicación de localización $1 \wedge l\colon LS \longrightarrow LS \wedge LS$.

Recíprocamente, si E es un espectro anillo y la aplicación de multiplicación $E \wedge E \longrightarrow E$ es una equivalencia, entonces L_E es *smashing*. La aplicación

$$\eta \wedge 1\colon S \wedge X \longrightarrow E \wedge X,$$

donde η es la unidad de E, es una E-equivalencia ya que $E \wedge E \simeq E$ y $E \wedge X$ es E-local porque es un E-módulo. Por lo tanto, $E \simeq L_E S$ y $LX \simeq X \wedge L_E S$.

En [Rav84, proposición 1.27] se demuestra que un espectro E es *smashing* si y sólo si el funtor L_E conmuta con límites directos. Esto ocurre, por ejemplo, para el funtor de localización homológica con respecto al espectro de la teoría K o a los espectros de Johnson–Wilson $E(n)$ para cualquier n.

Teorema 5.4.1. *Si L es un funtor de localización smashing, entonces $(H\mathbb{Z})_k(LS) = 0$ si $k \neq 0$ y es cero o un subanillo de los racionales si $k = 0$.*

Demostración. Para todo $k \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$(H\mathbb{Z})_k(LS) \simeq \pi_k(H\mathbb{Z} \wedge LS) \cong \pi_k(LH\mathbb{Z}) \cong \pi_k(HA),$$

donde A es un subanillo de los racionales o un producto de enteros p-ádicos para varios primos, como hemos visto en la sección anterior. Por lo tanto, si $k \neq 0$, entonces $(H\mathbb{Z})_k(LS) = 0$. Como $LS \wedge LS \simeq LS$ por ser L *smashing*, el teorema de Künneth 1.2.17, implica que

$$(H\mathbb{Z})_0(LS) \otimes (H\mathbb{Z})_0(LS) \cong (H\mathbb{Z})_0(LS) \quad \text{y}$$
$$\mathrm{Tor}((H\mathbb{Z})_0(LS), (H\mathbb{Z})_0(LS)) = 0.$$

Así pues, el anillo A es libre de torsión y además cumple que $A \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong A$. Los anillos que cumplen esta última condición se llaman *anillos sólidos* [BK72b] y todos están clasificados. Según esta clasificación, la única posibilidad es que A sea un subanillo de los racionales. $\square$

Corolario 5.4.2. *Si L es un funtor de localización* smashing *que cumple que $(H\mathbb{Z})_0(LS) \cong \mathbb{Q}$, entonces o bien L es el funtor de localización homológica con respecto a $H\mathbb{Q}$, o LS tiene infinitos grupos de homotopía no nulos en dimensiones negativas.*

Demostración. Como $LH\mathbb{Z} \simeq H\mathbb{Q}$, entonces $LS \wedge H\mathbb{Q} \simeq H\mathbb{Q}$ es distinto de cero. Esto implica que $H\mathbb{Q}$ es L-local. Ahora, la unidad $S \longrightarrow H\mathbb{Q}$ factoriza a través de LS por la propiedad universal de la localización, dando lugar a una aplicación $LS \longrightarrow H\mathbb{Q}$ que es una equivalencia en homología $H\mathbb{Z}$, de acuerdo con el teorema anterior. Si LS está acotado, entonces por el corolario 1.2.15 tenemos que $LS \simeq H\mathbb{Q}$ y así $LX \simeq X \wedge LS \simeq X \wedge H\mathbb{Q}$ para todo X. $\square$

El anillo $H_0(LS)$ es $\mathbb{Q}$ por ejemplo si L es el funtor de localización homológica con respecto al espectro K o al espectro $E(n)$ para cualquier n. Para cada uno de estos dos casos, por la proposición 5.3.1, estas localizaciones homológicas son la racionalización sobre HR-módulos, y por lo tanto

$$L_K H\mathbb{Z} \simeq L_{E(n)} H\mathbb{Z} \simeq H\mathbb{Q}.$$

Observación 5.4.3. El resultado anterior proporciona una demostración sencilla del hecho que los espectros $L_K S$ y $L_{E(n)} S$ son no acotados (para el caso $L_K S$ ya había sido demostrado en [Rav84, Teoremas 8.10 y 8.15]).

5.5. Localizaciones cohomológicas

Hemos visto que cada espectro E en la categoría homotópica estable da lugar a una teoría de homología y una de cohomología:

$$E_k(X) = \pi_k(E \wedge X),$$
$$E^k(X) = \pi_{-k}(F(X, E))$$

para todo espectro X y todo $k \in \mathbb{Z}$. En la primera sección de este capítulo hemos visto cómo se describen las localizaciones con respecto a una teoría de homología. Análogamente a estas localizaciones pueden definirse las localizaciones con respecto a una teoría de cohomología [Bou79c], [Hov95]. Dado un espectro E, una localización cohomológica con respecto a E es una transformación idempotente que invierte precisamente las equivalencias cohomológicas con respecto a la teoría de cohomología dada por E.

Definición 5.5.1. Si E es un espectro, entonces:

i) Una aplicación de espectros $f\colon X \longrightarrow Y$ es una E^*-equivalencia si la aplicación inducida $f^k\colon E^k(Y) \longrightarrow E^k(X)$ es un isomorfismo para todo $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Un espectro X es E^*-acíclico si $E^k(X) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

iii) Un espectro Z es E^*-local si cada E^*-equivalencia $f\colon X \longrightarrow Y$ induce una equivalencia homotópica $F(Y, Z) \simeq F(X, Z)$, o equivalentemente, si $F(W, Z) = 0$ para todo espectro W que sea E^*-acíclico.

Una E^*-localización de un espectro X es una E^*-equivalencia

$$l_X\colon X \longrightarrow L_{E^*}X$$

donde $L_{E^*}X$ es un espectro E^*-local.

Las localizaciones homológicas son un caso particular de localización cohomológica. Dado un espectro E, los espectros E-acíclicos coinciden con los espectros $(IE)^*$-acíclicos, donde IE es el dual de Brown–Comenetz de E [Hov95, proposición 1.1]. Las localizaciones cohomológicas también conmutan con la suspensión. Sin embargo, la existencia de localizaciones cohomológicas para un espectro cualquiera sigue siendo un problema abierto.

Los artículos de Bousfield [Bou79c] y Hovey [Hov95] presentan algunos avances en esta dirección.

En [Bou79c], Bousfield demuestra que si un espectro E cumple que los grupos $\mathbb{Z}/p \otimes \pi_k(E)$ y $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/p, \pi_k(E))$ son finitos para todo $k \in \mathbb{Z}$ y para todo primo p, entonces existe la localización cohomológica con respecto a E. Para demostrar este resultado se construye otro espectro G de tal manera que las G-equivalencias sean las mismas que las E^*-equivalencias y por lo tanto la localización cohomológica con respecto a E sea una localización homológica (con respecto a G), que ya se sabe que existe.

En esta línea se encuentra también la conjetura de Hovey [Hov95]. Hovey define la clase cohomológica de Bousfield de un espectro E, que se denota por $\langle E^* \rangle$, como la clase de equivalencia formada por todos los espectros cuya teoría de cohomología posee los mismos acíclicos que E^*. Estas clases, de igual manera que ocurría con las clases de Bousfield homológicas (véase definición 5.1.2) clasifican los funtores de localización cohomológicos. Dados dos espectros E y F, entonces $L_{E^*}X = L_{F^*}X$ para todo X si y sólo si $\langle E^* \rangle = \langle F^* \rangle$.

Conjetura de Hovey. Dado un espectro E, existe otro espectro X tal que $\langle E^* \rangle = \langle X \rangle$.

Esta conjetura es equivalente a decir que toda localización cohomológica es homológica, y por tanto implicaría la existencia de las primeras.

Las localizaciones que conmutan con la suspensión comparten muchas de las propiedades de las localizaciones homológicas. Cabe preguntarse si toda localización que conmuta con la suspensión es una localización homológica. Si este resultado fuese cierto, implicaría en particular la conjetura de Hovey y la existencia de localizaciones cohomológicas. Este es un problema que aún sigue abierto.

Problema. Demostrar que toda localización que conmuta con la suspensión es una localización homológica.

Capítulo 6

Localización homotópica de espectros de Eilenberg–Mac Lane

La f-localización de la k-ésima suspensión del espectro de Eilenberg–Mac Lane $\Sigma^k HG$, donde G es un grupo abeliano cualquiera, es un GEM estable que tiene como máximo dos grupos de homotopía en dimensiones consecutivas k y $k+1$ (véase teorema 4.4.2). Vamos a demostrar en este capítulo que estos dos grupos de homotopía satisfacen ciertas condiciones en relación con G. Así, si $A = \pi_k(L_f \Sigma^k HG)$ y $B = \pi_{k+1}(L_f \Sigma^k HG)$, entonces

$$\operatorname{Hom}(A, A) \cong \operatorname{Hom}(G, A) \quad \text{y} \quad \operatorname{Hom}(A, B) \cong \operatorname{Hom}(G, B).$$

En algunos casos concretos, por ejemplo cuando G es un grupo abeliano libre o finitamente generado, el segundo de estos grupos de homotopía es nulo.

En este capítulo estudiaremos f-localizaciones de $\Sigma^k HG$ cuando G es finitamente generado y nos centraremos en el caso particular del espectro $\Sigma^k H\mathbb{Z}$. Para este espectro, describiremos todas sus posibles f-localizaciones y veremos que $L_f \Sigma^k H\mathbb{Z} \simeq \Sigma^k HA$ donde A es un anillo caracterizado por la propiedad de que la aplicación

$$\operatorname{Hom}(A, A) \longrightarrow A$$

definida por $\varphi \mapsto \varphi(1)$ es un isomorfismo. Los anillos con esta propiedad son anillos conmutativos, que se llaman *anillos rígidos*, y proporcionan una clase propia de funtores de f-localización no equivalentes. Todos los anillos rígidos se obtienen como f-localizaciones del espectro $H\mathbb{Z}$. La terminología de anillos rígidos aparece por primera vez en [CRT00] para describir las

f-localizaciones de la esfera S^1, aunque los anillos rígidos ya habían sido estudiados anteriormente en otros contextos con el nombre de E-anillos [Sch73].

Los conceptos algebraicos de anillo rígido y anillo sólido [BK72b], pueden definirse análogamente para espectros anillos. Demostraremos que los espectros anillo rígidos en este contexto resultan ser las f-localizaciones del espectro de las esferas, mientras que los espectros anillo sólidos son las localizaciones *smashing* del espectro de las esferas.

Veremos también que la localización de un espectro de Eilenberg–Mac Lane $\Sigma^k HG$ tiene como máximo un grupo de homotopía en dimensión k cuando el grupo G es abeliano reducido, es decir, cuando G no tiene ningún subgrupo divisible no trivial. Este resultado generaliza el análogo obtenido para localizaciones homológicas (véase teorema 5.3.3). Para un grupo abeliano cualquiera G, el hecho de que en la localización de $\Sigma^k HG$ aparezca o no un segundo grupo de homotopía dependerá únicamente de si el grupo de Prüfer $\mathbb{Z}/p^\infty$ aparece como un sumando directo de G.

6.1. Espectros de Eilenberg–Mac Lane f-locales

En esta sección vamos a presentar algunos resultados sobre espectros de Eilenberg–Mac Lane y f-localizaciones donde f es una aplicación arbitraria de espectros. Estudiaremos de qué forma el hecho de que el espectro $\Sigma^k HG$ sea f-local viene determinado porque lo sean los espectros $\Sigma^k H\mathbb{Q}$ y $\Sigma^k H\mathbb{Z}/p^n$ para cada primo p. Por simplicidad en la notación, nos centraremos el caso $k = 0$ (espectros de la forma HG), pero todos los resultados son válidos para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ ajustando los índices convenientemente.

Un morfismo cualquiera de grupos abelianos $g\colon A \longrightarrow B$ induce una aplicación de $H\mathbb{Z}$-módulos entre espectros de Eilenberg–Mac Lane

$$Hg\colon HA \longrightarrow HB$$

tal que $\pi_0(Hg) = g$, ya que $\operatorname{Hom}(A, B) \cong [HA, HB]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod}$. Su fibra es también un $H\mathbb{Z}$-módulo, que escinde del siguiente modo:

$$\operatorname{fib}(Hg) \simeq H(\operatorname{Ker} g) \vee \Sigma^{-1} H(\operatorname{Coker} g). \tag{6.1}$$

Este hecho nos permite demostrar el siguiente resultado.

Lema 6.1.1. *Si HG es un espectro f-local, entonces también lo son los espectros HG_1 y $\Sigma^{-1}HG_2$ donde $G_1 = \mathrm{Hom}(A,G)$ y $G_2 = \mathrm{Ext}(A,G)$ para cualquier grupo abeliano A.*

Demostración. Tomamos una resolución libre de A,

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

donde R y F son grupos abelianos libres. Esta resolución da lugar a una sucesión exacta de grupos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,G) \longrightarrow \mathrm{Ext}(A,G) \longrightarrow 0.$$

Como R y F son libres y HG es f-local, también lo son $H(\mathrm{Hom}(F,G))$ y $H(\mathrm{Hom}(R,G))$, ya que $\mathrm{Hom}(F,G)$ y $\mathrm{Hom}(R,G)$ son un productos directos de copias de G. Por lo tanto, la fibra de la aplicación

$$H(\mathrm{Hom}(F,G)) \longrightarrow H(\mathrm{Hom}(R,G)),$$

que es $H(\mathrm{Hom}(A,G)) \vee \Sigma^{-1}H(\mathrm{Ext}(A,G))$, también es f-local (ver proposición 3.2.1). Los espectros HG_1 y $\Sigma^{-1}HG_2$ son f-locales porque son retractos de la fibra. □

Un grupo abeliano G se dice que es de exponente finito si existe un natural n tal que $nG = 0$, es decir, para todo g de G se tiene que $ng = 0$. Un resultado clásico de teoría de grupos abelianos dice que si G es de exponente finito, entonces es suma directa de grupos cíclicos [Kap69]. Si G verifica que $p^nG = 0$ para algún primo p y algún natural n, entonces G es suma directa de grupos de la forma $\mathbb{Z}/p^j$, con $1 \leq j \leq n$. Cuando G cumple que $p^nG = 0$, el espectro $H\mathbb{Z}/p^n$ detecta los espectros HG que son f-locales.

Lema 6.1.2. *Si $H\mathbb{Z}/p^n$ es f-local, entonces HG es f-local para todo G tal que $p^nG = 0$.*

Demostración. Como G es isomorfo a una suma directa de grupos cíclicos $\mathbb{Z}/p^j$ con $0 \leq j \leq n$, podemos escribirlo como el núcleo de una aplicación (no exhaustiva)

$$g\colon \prod_I \mathbb{Z}/p^n \longrightarrow \prod_J \mathbb{Z}/p^n,$$

que da lugar a la siguiente cofibración de espectros, por (6.1):

$$HG \vee \Sigma^{-1}H(\mathrm{Coker}\, g) \longrightarrow \prod_I H\mathbb{Z}/p^n \longrightarrow \prod_J H\mathbb{Z}/p^n.$$

La fibra es f-local porque $H\mathbb{Z}/p^n$ lo es y el producto de f-locales es f-local. El espectro HG es f-local porque es un retracto de la fibra. $\square$

Dado un conjunto de primos J y un grupo abeliano G, se dice que G es Ext-J-*completo* si para todo $p \in J$ se tiene que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, G) = \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p, G) = 0$, o equivalentemente, $\mathbb{Z}/p \otimes G = \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/p, G) = 0$. El grupo G se llama Ext-*completo* si $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, G) = \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, G) = 0$.

Corolario 6.1.3. *Si $H\mathbb{Z}/p^n$ es f-local para todo n, entonces HA es f-local para todo grupo A que sea* Ext-*p-completo.*

Demostración. Para cada n, tenemos la cofibración de espectros

$$HA \xrightarrow{\times p^n} HA \longrightarrow H(A/p^nA)$$

que da lugar a la siguiente torre de cofibraciones

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, dotted] & \vdots \arrow[d, dotted] & \vdots \arrow[d, dotted] \\
HA \arrow[r, "\times p^3"] \arrow[d, "\times p"'] & HA \arrow[r] \arrow[d, "1"] & H(A/p^3A) \arrow[d] \\
HA \arrow[r, "\times p^2"] \arrow[d, "\times p"'] & HA \arrow[r] \arrow[d, "1"] & H(A/p^2A) \arrow[d] \\
HA \arrow[r, "\times p"] & HA \arrow[r] & H(A/pA).
\end{tikzcd}$$

Si tomamos el límite inverso de esta torre, obtenemos que

$$HA \simeq \mathrm{holím}_n\, H(A/p^nA).$$

El límite inverso de la columna de la izquierda es trivial, ya que A es Ext-p-completo (véase [BK72a, p.175]). Ahora HA es el límite inverso de espectros f-locales por el lema 6.1.2, y por lo tanto es f-local (véase lema 2.3.3). $\square$

Un grupo abeliano se dice racional si es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Estos grupos escinden como una suma directa de copias de $\mathbb{Q}$. Para grupos abelianos racionales se cumple el siguiente resultado.

Lema 6.1.4. *Si $H\mathbb{Q}$ es f-local, entonces HG es f-local para todo grupo abeliano racional G.*

Demostración. Como G es racional podemos escribirlo como el núcleo de una aplicación (no exhaustiva)

$$g\colon \prod_I \mathbb{Q} \longrightarrow \prod_J \mathbb{Q}.$$

Tenemos de este modo la siguiente sucesión de espectros, por (6.1):

$$HG \vee \Sigma^{-1} H(\operatorname{Coker} g) \longrightarrow \prod_I H\mathbb{Q} \longrightarrow \prod_J H\mathbb{Q}.$$

Como la fibra es f-local por serlo $H\mathbb{Q}$, el espectro HG también es f-local por ser un retracto de la fibra. □

Observar que si G es un grupo abeliano racional y HG es f-local, entonces $H\mathbb{Q}$ es f-local, ya que es un retracto de HG, puesto que G es isomorfo a una suma directa de copias de $\mathbb{Q}$.

Lema 6.1.5. *Sea P un conjunto de primos y supongamos que $H\mathbb{Q}$ y $H\mathbb{Z}/p^n$ son f-locales para todo $p \in P$ y para todo n. Entonces, HG es f-local para todo $\mathbb{Z}_P$-módulo G tal que* $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, G) = 0$ *para cada $p \in P$.*

Demostración. Si G es un $\mathbb{Z}_P$-módulo, entonces G es únicamente p-divisible para cada $p \notin P$. Por lo tanto la localización homológica $L_{M\mathbb{Z}/p}HG$ es cero para todo $p \notin P$, por la proposición 5.2.8. Aplicando el funtor de localización homológica L_S a HG, el teorema 5.2.1 nos da el siguiente cuadrado aritmético

$$\begin{tikzcd}
HG \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{p\in P} H(\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)) \arrow[d] \\
H(G \otimes \mathbb{Q}) \arrow[r] & M\mathbb{Q} \wedge \prod_{p\in P} H(\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)).
\end{tikzcd}$$

Los espectros de los vértices inferiores del cuadrado son f-locales por el lema 6.1.4, ya que su grupo de homotopía es abeliano racional. Lo mismo ocurre con el vértice superior derecho, aplicando el corolario 6.1.3, ya que es un producto de espectros de Eilenberg–Mac Lane cuyos grupos de homotopía son Ext-p-completos. Así pues, HG es f-local. □

Lema 6.1.6. *Si A es un grupo abeliano tal que $p^nA = p^{n+1}A$ para algún n, entonces $A \cong B \oplus C$ donde $p^nB = 0$ y C es p-divisible.*

Demostración. Tenemos la siguiente sucesión exacta corta de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow p^n A \longrightarrow A \longrightarrow A/p^n A \longrightarrow 0.$$

El grupo $p^n A$ es p-divisible y $A/p^n A$ es de exponente finito y por lo tanto isomorfo a una suma directa de copias de $\mathbb{Z}/p^i$ con $i \leq n$. Como $\operatorname{Ext}(A/p^n A, p^n A) = 0$, la sucesión exacta escinde y por lo tanto $A \cong A/p^n A \oplus p^n A$. $\square$

Lema 6.1.7. *Si A es un grupo abeliano que no es únicamente p-divisible y ΣHA es f-local, entonces HG es f-local para todo grupo G que sea* Ext*-p-completo.*

Demostración. Vamos a realizar la demostración distinguiendo varios casos posibles para el grupo abeliano A. Consideremos la sucesión de grupos dada por $\{p^i A\}_{i \geq 1}$. Si esta sucesión no se hace constante, es decir, $p^i A \ncong p^{i+1} A$ para cada $i \geq 1$, entonces tenemos la siguiente sucesión exacta

$$A \xrightarrow{\times p^i} A \longrightarrow A/p^i A$$

y además $A/p^i A \cong \oplus_{1 \leq j \leq i} \mathbb{Z}/p^j$ (observar que, en esta descomposición, siempre aparece al menos una copia de $\mathbb{Z}/p^i$, ya que si no, $p^j A/p^i A = 0$ para algún $j < i$, lo cual implicaría que $p^i A = p^j A$, que es una contradicción). Esta sucesión exacta induce una cofibración de espectros

$$\Sigma H(\operatorname{Ker}(\times p^i)) \vee H(\oplus_{1 \leq j \leq i} \mathbb{Z}/p^j) \longrightarrow \Sigma HA \longrightarrow \Sigma HA.$$

Como ΣHA es f-local por hipótesis, también lo es $H(\oplus_{1 \leq j \leq i} \mathbb{Z}/p^j)$ y por tanto $H\mathbb{Z}/p^i$, ya que es un retracto de la fibra de una aplicación entre espectros f-locales. Así pues, tenemos que para todo $i \geq 1$ el espectro $H\mathbb{Z}/p^i$ es f-local y podemos aplicar el corolario 6.1.3.

Si $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/p, A) \neq 0$, como ΣHA es f-local también lo es $\Sigma H\mathbb{Z}/p$ aplicando el lema 6.1.1, debido a que $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/p, A)$ escinde como una suma directa de copias de $\mathbb{Z}/p$. Ahora bien, también $H\mathbb{Z}/p$ es f-local puesto que es la desuspensión de un f-local, y procediendo como en la demostración del teorema 6.2.2, se tiene que $H\mathbb{Z}/p^i$ es f-local para todo $i \geq 1$. La demostración termina aplicando de nuevo el corolario 6.1.3.

Por último, vamos a suponer que existe un $i \geq 1$ tal que $p^i A = p^{i+1} A$ y además que $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/p, A) = 0$. En este caso, por el lema 6.1.6, tenemos que $A \cong B \oplus C$, donde $p^i B = 0$ y C es p-divisible. Como

$$\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/p, A) \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/p, B) \oplus \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/p, C)$$

y $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, A) = 0$, debe cumplirse que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, B) = 0$, lo cual nos lleva a una contradicción, pues $p^i B = 0$. □

Lema 6.1.8. *Dado un grupo abeliano A que no sea* Ext*-completo, si ΣHA es f-local, entonces $H\mathbb{Q}$ es f-local.*

Demostración. Si A no es Ext-completo, entonces o bien $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, A) \neq 0$ o bien $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, A) \neq 0$. Si $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, A) \neq 0$, entonces $\Sigma H(\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, A))$ es f-local, por el lema 6.1.2. Ahora bien, su desuspensión también es local y racional, por lo tanto $H\mathbb{Q}$ es f-local. El caso en que $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, A) \neq 0$ se demuestra de la misma manera. □

6.2. Algunos ejemplos. Localizaciones de $H\mathbb{Z}$

Dada una aplicación de espectros f arbitraria, denotaremos por L al funtor de f-localización. En el capítulo 4 hemos visto que la localización homotópica LE de un R-GEM estable E vuelve a ser un R-GEM estable. En el caso más sencillo, si $E \simeq \Sigma^k HG$ con G un R-módulo y $k \in \mathbb{Z}$, entonces el teorema 4.4.2 nos dice que LE tiene como máximo dos grupos de homotopía no nulos en dimensiones k y $k+1$, que también son R-módulos. En algunas ocasiones, el segundo grupo de homotopía que aparece es nulo y la localización de $\Sigma^k HG$ tiene un único grupo de homotopía en dimensión k.

Teorema 6.2.1. *Si G es un grupo abeliano libre y $k \in \mathbb{Z}$, entonces tenemos que $L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA$ para algún grupo abeliano A.*

Demostración. Por el teorema 4.4.2 sabemos que $L\Sigma^k HG$ tiene como máximo dos grupos de homotopía en dimensiones k y $k+1$. Supongamos que $L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA \vee \Sigma^{k+1} HB$. Por el corolario 4.3.6,

$$[\Sigma^k HG, \Sigma^{k+1} HB]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod} \cong \mathrm{Ext}(G, B).$$

Si G es un grupo libre, entonces $\mathrm{Ext}(G, B) = 0$ y en el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Sigma^k HG \arrow[r, "l"] \arrow[dr] & \Sigma^k HA \vee \Sigma^{k+1} HB \arrow[d, "p_2"] \\ & \Sigma^{k+1} HB, \end{tikzcd}$$

cuyas aplicaciones son morfismos de $H\mathbb{Z}$-módulos, la composición

$$p_2 \circ l \colon \Sigma^k HG \longrightarrow \Sigma^{k+1} HB$$

es homotópicamente nula. Además $\Sigma^{k+1}HB$ es f-local porque es un retracto de $L\Sigma^k HG$. Entonces, la propiedad universal de la localización nos asegura que $B = 0$. □

Teorema 6.2.2. *Si p es un número primo, n un entero positivo y $k \in \mathbb{Z}$, entonces $L\Sigma^k H\mathbb{Z}/p^n = 0$ o $L\Sigma^k H\mathbb{Z}/p^n \simeq \Sigma^k H\mathbb{Z}/p^i$ con $1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Supongamos por simplicidad que $k = 0$. Si $k \in \mathbb{Z}$, se procede de manera análoga. Comenzaremos considerando el caso $n = 1$. Por el teorema 4.4.2,

$$LH\mathbb{Z}/p \simeq HA_1 \vee \Sigma HA_2$$

donde A_1 y A_2 son $\mathbb{Z}/p$-módulos, y por tanto escinden como una suma directa de copias de $\mathbb{Z}/p$. Como desuspensiones y retractos de locales son locales, se sigue que, o bien $A_1 = A_2 = 0$, o bien $H\mathbb{Z}/p$ es f-local, en cuyo caso $LH\mathbb{Z}/p = H\mathbb{Z}/p$. Si $A_1 = A_2 = 0$ entonces $LH\mathbb{Z}/p = 0$ y las cofibraciones

$$H\mathbb{Z}/p \longrightarrow H\mathbb{Z}/p^r \longrightarrow H\mathbb{Z}/p^{r-1},$$

para todo $r \geq 2$, implican inductivamente que $LH\mathbb{Z}/p^r$ es contráctil para todo $r \geq 1$, por la proposición 3.2.5.

Sea ahora n un entero positivo y vamos a suponer que $H\mathbb{Z}/p$ es f-local. De nuevo, utilizando el teorema 4.4.2, podemos escribir

$$LH\mathbb{Z}/p^n \simeq HB_1 \vee \Sigma HB_2,$$

donde ahora B_1 y B_2 son $\mathbb{Z}/p^n$-módulos, es decir, grupos abelianos con exponente divisor de p^n. Por [Kap69], los grupos B_1 y B_2 son suma directa de subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}/p^j$, con $1 \leq j \leq n$. Si $B_2 = 0$, entonces $\mathrm{Hom}(B_1, B_1) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^n, B_1)$ por la propiedad universal de L. Esto fuerza que B_1 conste sólamente de un sumando y que además la aplicación $\mathbb{Z}/p^n \longrightarrow B_1$ sea exhaustiva (como en [Cas00, teorema 3.4]). Finalmente, supongamos que B_2 es distinto de cero y llegaremos a una contradicción. Sea m el menor número natural tal que $\mathbb{Z}/p^m$ es un sumando directo de B_2. Entonces, $\Sigma H\mathbb{Z}/p^m$ y por tanto $H\mathbb{Z}/p^m$ son f-locales. Ahora bien, las cofibraciones

$$H\mathbb{Z}/p^{(r+1)m} \longrightarrow H\mathbb{Z}/p^{rm} \longrightarrow \Sigma H\mathbb{Z}/p^m,$$

para todo $r \geq 1$, implican inductivamente que $H\mathbb{Z}/p^{rm}$ es f-local para todo $r \geq 1$, por la proposición 3.2.1. Elegimos pues un r tal que $rm > n$ y aplicando el lema 6.1.2 obtenemos que $H\mathbb{Z}/p^n$ es f-local, lo cual es una contradicción. □

Dado un grupo abeliano G finitamente generado, el teorema de clasificación de estos grupos nos dice que podemos expresar G como $\oplus_{i=1}^{n} G_i$ donde cada G_i es, o bien $\mathbb{Z}$, o bien $\mathbb{Z}/p^k$ para algún primo p y algún $k \geq 1$. Como el funtor de localización conmuta con productos finitos, si $G \cong \oplus_{i=1}^{n} G_i$, entonces aplicando los teoremas 6.2.1 y 6.2.2,

$$L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k H(\oplus_{i=1}^{n} A_i)$$

donde $A_i \cong \pi_k(L\Sigma^k HG_i)$.

Corolario 6.2.3. *Si G es un grupo abeliano finitamente generado y $k \in \mathbb{Z}$, entonces $L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA$, para algún grupo abeliano A.* □

La localización no conserva grupos abelianos finitamente generados, ya que algunos de los grupos que aparecen como grupos de homotopía de la localización de $H\mathbb{Z}$ no son finitamente generados, como por ejemplo $\mathbb{Q}$.

Si $L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA \vee \Sigma^{k+1} HB$, podemos obtener información sobre los dos grupos de homotopía A y B utilizando la propiedad universal de la localización. Como $\Sigma^k HA$ y $\Sigma^{k+1} HB$ son locales por ser retractos de locales, proyectando en cada uno de los factores tenemos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} \Sigma^k HG \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "p_1 \circ l"'] & \Sigma^k HA \vee \Sigma^{k+1} HB \arrow[d, "p_1"] \\ & \Sigma^k HA \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Sigma^k HG \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "p_2 \circ l"'] & \Sigma^k HA \vee \Sigma^{k+1} HB \arrow[d, "p_2"] \\ & \Sigma^{k+1} HB, \end{tikzcd}$$

que junto con la propiedad universal de la localización nos dan los siguientes isomorfismos:

$$[\Sigma^k HA, \Sigma^k HA] \times [\Sigma^{k+1} HB, \Sigma^k HA] \cong [\Sigma^k HG, \Sigma^k HA],$$
$$[\Sigma^k HA, \Sigma^{k+1} HB] \times [\Sigma^{k+1} HB, \Sigma^{k+1} HB] \cong [\Sigma^k HG, \Sigma^{k+1} HB].$$

Pero $[\Sigma^{k+1} HB, \Sigma^k HA] = 0$, ya que

$$[\Sigma^{k+1} HB, \Sigma^k HA] \cong (HA)^0(\Sigma HB) \cong \mathrm{Hom}(\pi_0(\Sigma HB), A) = 0,$$

y por tanto tenemos los siguientes isomorfismos de grupos abelianos:

$$\mathrm{Hom}(A, A) \cong \mathrm{Hom}(G, A),$$
$$\mathrm{Ext}(A, B) \oplus \mathrm{Hom}(B, B) \cong \mathrm{Ext}(G, B).$$

De manera análoga y utilizando el hecho de que $\Sigma^k HB$ también es local, pues es la desuspensión de un local, se tiene el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}(A, B) \cong \mathrm{Hom}(G, B).$$

El siguiente resultado reúne las tres propiedades anteriores sobre los dos grupos de homotopía de la localización de $\Sigma^k HG$.

Proposición 6.2.4. *Si $L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA \vee \Sigma^{k+1} HB$, entonces para todo $k \in \mathbb{Z}$ se cumple:*

i) $\mathrm{Hom}(A, A) \cong \mathrm{Hom}(G, A)$.

ii) $\mathrm{Hom}(A, B) \cong \mathrm{Hom}(G, B)$.

iii) $\mathrm{Ext}(A, B) \oplus \mathrm{Hom}(B, B) \cong \mathrm{Ext}(G, B)$. □

En el caso particular de la localización de $\Sigma^k H\mathbb{Z}$, sabemos que $B = 0$ por el teorema 6.2.1. El apartado i) de la proposición 6.2.4 nos dice que $\mathrm{Hom}(A, A) \cong A$, y este isomorfismo viene dado por la aplicación $\varphi \mapsto \varphi(1_A)$. La composición de morfismos en $\mathrm{Hom}(A, A)$ define una multiplicación en A para la cual 1_A es el elemento identidad. Así, si A es distinto de cero, entonces admite una estructura de anillo.

Definición 6.2.5. Un anillo con unidad se dice que es un *anillo rígido* si la aplicación evaluación $\mathrm{Hom}(A, A) \longrightarrow A$ dada por $\varphi \mapsto \varphi(1_A)$ es un isomorfismo.

Todos los anillos rígidos son conmutativos. Si A es un anillo rígido y $a \in A$, entonces los morfismos de $\mathrm{Hom}(A, A)$ definidos como

$$\varphi(r) = ra \quad \text{y} \quad \psi(r) = ar,$$

para todo $r \in A$, verifican que $\varphi(1_A) = \psi(1_A)$. Por lo tanto $ar = ra$ en A para todo $r \in A$.

La terminología de anillos rígidos fue utilizada por primera vez en [CRT00] para describir las f-localizaciones de la esfera S^1. Sin embargo, este tipo de anillos ya había sido estudiado anteriormente en otros contextos, con el nombre de E-anillos [Sch73]. Ejemplos de anillos rígidos son $\mathbb{Z}/n$, los subanillos de $\mathbb{Q}$ (incluyendo $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$) o el anillo de los enteros p-ádicos $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ para cualquier primo p. Hay otros muchos ejemplos, como los productos $\prod_{p\in P}\mathbb{Z}/p$ o $\prod_{p\in P}\widehat{\mathbb{Z}}_p$, donde P es un conjunto de primos. También son rígidos todos los anillos sólidos en el sentido de Bousfield–Kan [BK72b], es decir, los anillos R tales que la multiplicación $R\otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow R$ es un isomorfismo.

De hecho, existen anillos rígidos de cardinalidad arbitrariamente grande (véase [DMV87]). Sin embargo, hay grupos como el grupo de Prüfer (o grupo de las raíces p-ésimas de la unidad) $\mathbb{Z}/p^\infty$ o el cuerpo p-ádico $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ que no admiten una estructura de anillo rígido. Por tanto, no existe ningún funtor de localización tal que $\pi_k(L\Sigma^k H\mathbb{Z})$ sea $\mathbb{Z}/p^\infty$ o $\widehat{\mathbb{Q}}_p$.

Teorema 6.2.6. *Dado $k\in\mathbb{Z}$, la localización del espectro $\Sigma^k H\mathbb{Z}$ tiene como máximo un grupo de homotopía no trivial, es decir, $L\Sigma^k H\mathbb{Z}\simeq\Sigma^k HA$, y si $A\neq 0$, entonces A tiene estructura de anillo rígido.* □

Todos los anillos rígidos aparecen como f-localizaciones del espectro $H\mathbb{Z}$. Dado un anillo rígido A, sea $f\colon S\longrightarrow MA$ la aplicación de espectros inducida por la unidad de A (recordar que $[S,MA]\cong\pi_0(MA)=A$). Entonces $L_f H\mathbb{Z}\simeq HA$. El espectro HA es f-local ya que por el lema 3.4.1, $[\Sigma^k MA, HA]=\mathrm{Hom}(A,A)$ si $k=0$ y es nulo en otro caso; por lo tanto,

$$[\Sigma^k MA, HA]\cong[\Sigma^k S, HA]\quad \text{para todo } k\geq 0.$$

La aplicación $g\colon H\mathbb{Z}\longrightarrow HA$ obtenida haciendo el producto *smash* de f con la identidad en $H\mathbb{Z}$ es una f-equivalencia, porque $H\mathbb{Z}$ es conectivo. Observar que también para esta aplicación g se cumple que $L_g H\mathbb{Z}\simeq HA$.

Corolario 6.2.7. *Hay una clase propia de funtores de f-localización no equivalentes.*

Demostración. Hay una clase propia de anillos rígidos no isomorfos por [DMV87]. Para cada uno de estos anillos rígidos A, tenemos un funtor L_f asociado, donde $f\colon S\longrightarrow MA$, que cumple que $L_f H\mathbb{Z}\simeq HA$. □

6.3. Espectros anillo sólidos y rígidos

En álgebra, un anillo con unidad R se dice que es un anillo sólido en el sentido de [BK72b] si la multiplicación del anillo $\mu\colon R\otimes_{\mathbb{Z}} R\longrightarrow R$ es un isomorfismo. Algunos ejemplos de anillos sólidos son $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{Z}/n$. Sin embargo, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ o $\mathbb{R}$ no son sólidos. Los anillos sólidos están completamente clasificados [BK72b] y todos son conmutativos y numerables.

Dado un anillo cualquiera R con unidad, podemos definir un funtor de la categoría de grupos abelianos a la categoría de R-módulos

$$F\colon \mathcal{A}b \longrightarrow R\text{-}mod$$

dado por $F(A) = A \otimes_{\mathbb{Z}} R$ para todo grupo abeliano A. Este funtor F es adjunto por la izquierda del funtor olvido de R-módulos a $\mathbb{Z}$-módulos y proporciona por tanto un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B) \cong \mathrm{Hom}_R(A \otimes_{\mathbb{Z}} R, B)$$

para todo grupo abeliano A y todo R-módulo B. Cuando el anillo R es un anillo sólido, el funtor F es un funtor idempotente, ya que $A \otimes_{\mathbb{Z}} R \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong A \otimes_{\mathbb{Z}} R$. De hecho, esta propiedad caracteriza los anillos sólidos.

Proposición 6.3.1. *Un anillo R con unidad es sólido si y sólo si el funtor $F\colon \mathbb{Z}\text{-}mod \longrightarrow R\text{-}mod$ definido como $F(A) = A \otimes_{\mathbb{Z}} R$ es idempotente.*

Demostración. Si F es un funtor idempotente, tomando $A = \mathbb{Z}$ tenemos que

$$R \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} R \otimes_{\mathbb{Z}} R = F(F(\mathbb{Z})) \cong F(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong R$$

y por lo tanto $R \cong R \otimes_{\mathbb{Z}} R$. □

Cuando un anillo R es rígido (véase definición 6.2.5), la aplicación $\eta\colon \mathbb{Z} \longrightarrow R$ dada por $\eta(1) = 1_R$ tiene la siguiente propiedad universal: dada cualquier otra aplicación $g\colon \mathbb{Z} \longrightarrow R$ existe una única $h\colon R \longrightarrow R$ tal que $g = h \circ \eta$,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "g"'] & R \arrow[dl, dotted, "h"] \\ R. & \end{tikzcd}$$

Es decir, la aplicación η es una localización de $\mathbb{Z}$ en la categoría de grupos abelianos. Los anillos rígidos están caracterizados por esta propiedad.

Proposición 6.3.2. *Un anillo R con unidad es rígido si y sólo si la aplicación $\eta\colon \mathbb{Z} \longrightarrow R$ dada por $\eta(1) = 1_R$ es una localización de $\mathbb{Z}$ en la categoría de grupos abelianos.* □

Todo anillo sólido es un anillo rígido, ya que, si R es sólido, entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, R) \cong \mathrm{Hom}_R(R \otimes_{\mathbb{Z}} R, R) \cong \mathrm{Hom}_R(R, R) \cong R.$$

Análogamente a la definición algebraica de anillos sólidos y rígidos, podemos definir espectros anillo sólidos y espectros anillo rígidos. Las propiedades de estos espectros anillo son, como veremos, similares a las de sus análogos algebraicos.

Definición 6.3.3. Un espectro anillo E es un *espectro anillo sólido*, si la multiplicación $E \wedge E \longrightarrow E$ es una equivalencia homotópica.

Observar que todo espectro anillo sólido E es *smashing* (ver Sección 5.4) o dicho de otra manera, el funtor de localización homológica L_E es *smashing*. En este caso, $L_E = L_T$, donde $T = L_E S$ y el espetro T es un espectro anillo sólido [Rav84, proposición 1.27]. Los espectros anillos sólidos vienen caracterizados por la siguiente propiedad.

Proposición 6.3.4. *Un espectro anillo E es sólido si y sólo si el funtor $L\colon Ho^s \longrightarrow Ho^s$ definido como $LX = X \wedge E$ para todo espectro X es un funtor de localización.*

Demostración. Supongamos que E es sólido, entonces $L = L_E$, donde $E \simeq S \wedge E = LS$ ya que las L-equivalencias son precisamente las E-equivalencias. Recíprocamente, si L es un funtor de localización, $E = LS$ es local y por tanto $E \simeq LE = E \wedge E$. □

Definición 6.3.5. Un espectro anillo E es un *espectro anillo rígido* si la aplicación de evaluación $F^c(E, E) \longrightarrow E^c$ es una equivalencia homotópica.

Estos espectros rígidos vienen caracterizados por ser exactamente localizaciones del espectro de las esferas.

Proposición 6.3.6. *Un espectro anillo E es rígido si y sólo si la aplicación identidad del anillo $\eta\colon S \longrightarrow E$ es una localización de la esfera.*

Demostración. Si E es rígido, entonces $F^c(E, E) \simeq E^c \simeq F^c(S, E)$. De hecho, $L_\eta S \simeq E$ ya que η es una η-equivalencia y E es η-local. Recíprocamente, si E es local, también lo es $\Sigma^{-k}E$ para todo $k \geq 0$. Como η es una localización, la propiedad universal

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & E \arrow[dl, dotted] \\ \Sigma^{-k}E & \end{tikzcd}$$

implica que

$$[S, \Sigma^{-k}E] \cong [E, \Sigma^{-k}E] \quad \text{para todo } k \geq 0,$$

y así, $F^c(E, E) \simeq E^c$. □

Proposición 6.3.7. *Todo espectro anillo sólido es un espectro anillo rígido.*

Demostración. Si E es sólido, el funtor $LX = X \wedge E$ es una localización para todo espectro X. Tomando $X = S$ y utilizando la propiedad universal de la localización tenemos que $F(E, E) \simeq F(S, E) \simeq E$. □

Ejemplo 6.3.8. El espectro anillo $H\widehat{\mathbb{Z}}_p$ es rígido pero no sólido. Si fuese sólido, entonces $H\widehat{\mathbb{Z}}_p \wedge H\widehat{\mathbb{Z}}_p \simeq H\widehat{\mathbb{Z}}_p$, lo que a nivel de π_0 implicaría que $\widehat{\mathbb{Z}}_p \otimes \widehat{\mathbb{Z}}_p \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$, que no es cierto. En cambio, se cumple que $[S, H\widehat{\mathbb{Z}}_p] \cong [H\widehat{\mathbb{Z}}_p, H\widehat{\mathbb{Z}}_p]$ y $[\Sigma^k H\widehat{\mathbb{Z}}_p, H\widehat{\mathbb{Z}}_p] = 0$ para todo $k \geq 1$.

En homotopía inestable, todas las f-localizaciones de la esfera S^1 son espacios de Eilenberg–Mac Lane cuyo grupo de homotopía tiene la estructura de un anillo rígido [CRT00]. Todos los anillos rígidos aparecen de esta manera. El siguiente teorema muestra la relación entre las localizaciones de los espectros S y $H\mathbb{Z}$, y las estructuras de espectro anillo sólido y rígido.

Teorema 6.3.9. *Sea L_f un funtor de f-localización cualquiera. Entonces:*

i) *L_fS es un espectro anillo rígido y todos los espectros anillo rígidos aparecen de esta manera. Si L_f es un funtor de localización smashing, entonces L_fS es un espectro anillo sólido y todos los espectros anillo sólidos aparecen de esta manera.*

ii) *$L_fH\mathbb{Z} \simeq HA$ para algún grupo abeliano A que tiene estructura de anillo rígido y todos los anillos rígidos aparecen de esta manera. Si L_f es un funtor de localización smashing, entonces A es un subanillo de los racionales.*

Demostración. La primera parte es consecuencia de las proposiciones 6.3.4 y 6.3.6. La segunda es consecuencia de los teoremas 5.4.1 y 6.2.6.

□

6.4. Espectros de Eilenberg–Mac Lane reducidos

Un grupo abeliano A se dice que es *reducido* si no posee ningún subgrupo no trivial que sea divisible. Un espectro de Eilenberg–Mac Lane HG decimos que es reducido cuando G es reducido. Vamos a ver que la localización de espectros de Eilenberg–Mac Lane con grupo de homotopía reducido tiene también como máximo un solo grupo de homotopía no nulo.

Teorema 6.4.1. *Si G es un grupo abeliano reducido, entonces $L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA$, para algún grupo abeliano A y para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Por simplicidad, tomamos $k = 0$. Para el resto de casos se procede de igual manera. Supongamos que $LHG \simeq HA \vee \Sigma HB$ y sea P el conjunto de primos tales p que B no es únicamente p-divisible. Ya sabemos que ΣHB es local, porque es retracto de un local. Por el lema 6.1.7, los espectros $H(\prod_{p\in P} \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G))$ y $H\mathbb{Z}/p^k$ para todo $k < \infty$ y $p \in P$ son f-locales (observar que $H\mathbb{Z}/p^k$ es Ext-P-completo [BK72a, p.174]). Podemos distinguir ahora dos casos diferentes:

i) Supongamos que B es Ext-P-completo. Por la propiedad universal del funtor de localización L tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} HG \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "l'"'] & HA \vee \Sigma HB \arrow[d, dotted, "\varphi"] \\ & \widehat{HG}_P. \end{tikzcd}$$

donde l es la aplicación de localización dada por el funtor L y l' es la aplicación dada por el funtor de localización homológico con respecto a $M(\oplus_{p\in P}\mathbb{Z}/p)$. Observar que $\widehat{HG}_P \simeq H(\prod_{p\in P} \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G))$. Denotaremos $\widehat{G}_P = \prod_{p\in P} \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)$. Como ΣHB es L-local y también es $M(\oplus_{p\in P}\mathbb{Z}/p)$-local, aplicando las propiedades universales de la localización tenemos isomorfismos

$$[HG, \Sigma HB] \cong [HA \vee \Sigma HB, \Sigma HB] \quad \text{y}$$
$$[HG, \Sigma HB] \cong [H\widehat{G}_P, \Sigma HB],$$

que dan lugar a un isomorfismo

$$[HA \vee \Sigma HB, \Sigma HB] \cong [H\widehat{G}_P, \Sigma HB].$$

Por lo tanto, $[HB, HB] \cong \mathrm{Hom}(B, B) = 0$ y así $B = 0$.

ii) Supongamos que B no es Ext-P-completo. El lema 6.1.8 implica que $H\mathbb{Q}$ es L-local y por el lema 6.1.5, $H(G \otimes \mathbb{Z}_P)$ es también L-local. Procediendo ahora de igual manera que en el caso anterior pero siendo l' la localización homológica con respecto a $M\mathbb{Z}_P$ obtenemos que $B = 0$.

□

Todo grupo abeliano G escinde como una suma directa $G_1 \oplus G_2$, donde G_1 es un grupo abeliano divisible y G_2 es un grupo abeliano reducido. Por lo tanto, $LHG \simeq LHG_1 \vee LHG_2$. La parte de la localización correspondiente a HG_2 consta como máximo de un grupo de homotopía, como hemos visto en el teorema 6.4.1. El grupo G_1 a su vez lo podemos descomponer como una suma directa de copias de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}/p^\infty$ para varios primos p. La localización de un espectro de Eilenberg–Mac Lane racional vuelve a ser otro espectro de Eilenberg–Mac Lane racional; por lo tanto, la única posibilidad para que en la localización de un espectro de Eilenberg–Mac Lane LHG aparezca un grupo de homotopía no nulo en dimensión uno es que $\mathbb{Z}/p^\infty$ aparezca como sumando directo de G y que $LH\mathbb{Z}/p^\infty = \Sigma HB$ para algún grupo abeliano B distinto de cero.

Veamos un ejemplo concreto. Dado un $k < \infty$, sea $f\colon H\mathbb{Z}/p^\infty \longrightarrow \Sigma H\mathbb{Z}/p^k$ la aplicación de $H\mathbb{Z}$-módulos dada por la identidad en el grupo $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}/p^k)$. Como f es trivialmente una f-equivalencia y $\Sigma H\mathbb{Z}/p^k$ es f-local, entones $L_f H\mathbb{Z}/p^\infty \simeq \Sigma H\mathbb{Z}/p^k$. El mismo ejemplo cambiando $H\mathbb{Z}/p^k$ por $H\widehat{\mathbb{Z}}_p$ nos permite obtener una aplicación g tal que $L_g H\mathbb{Z}/p^\infty \simeq \Sigma H\widehat{\mathbb{Z}}_p$.

Corolario 6.4.2. *Sea G un grupo abeliano cualquiera y $k \in \mathbb{Z}$. Si $\mathbb{Z}/p^\infty$ no aparece como sumando directo de G para ningún primo p, entonces $L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA$ para algún grupo abeliano A.* □

Capítulo 7

Categorías de módulos estrictos y homotópicos

Los espectros anillo y los espectros módulo han sido clásicamente objetos definidos en la categoría homotópica estable, que como hemos visto en el capítulo 1, tiene un producto *smash* asociativo y conmutativo salvo homotopía. Las aplicaciones de estructura que definen los espectros anillo y los espectros módulo dan lugar a diagramas que conmutan salvo homotopía. Dado un espectro anillo E, los E-módulos en este contexto junto con las aplicaciones de E-módulos forman una categoría, que puede verse como la categoría de Eilenberg–Moore asociada a la mónada definida por el funtor $X \mapsto E \wedge X$. Llamaremos a esta categoría la categoría de los E-módulos homotópicos.

Sin embargo, la reciente aparición de las nuevas categorías de modelos para la homotopía estable, como los espectros simétricos [HSS00] o los S-módulos [EKMM97], dotadas de un producto *smash* estrictamente asociativo y conmutativo, han permitido definir espectros anillo estrictos (monoides en la categoría) y espectros módulo estrictos (módulos sobre monoides). Las aplicaciones de estructura para estos anillos y módulos estrictos dan lugar a diagramas que realmente conmutan en la categoría de modelos (sin necesidad de pasar a la categoría homotópica). Así, dado un espectro anillo estricto E, la categoría de los E-módulos estrictos tiene una estructura de categoría de modelos y podemos considerar también la categoría homotópica de los E-módulos estrictos.

Por lo tanto, para cada espectro anillo estricto E, tenemos definidas dos categorías que interesa comparar. Una es la categoría de los E-módulos homotópicos y la otra la categoría homotópica de los E-módulos estrictos.

Las categorías de los módulos estrictos tienen mejores propiedades que las categorías de los módulos homotópicos. La fibra de una aplicación de módulos estrictos es un módulo estricto, mientras que el mismo resultado es falso en el caso de los módulos homotópicos [May98]. Si R es un anillo con unidad y HR denota el correspondiente espectro de Eilenberg–Mac Lane, entonces la categoría de modelos de los HR-módulos estrictos es equivalente en el sentido de Quillen a la categoría de complejos de cadenas no acotados de R-módulos [Rob87], [SS03].

La categoría homotópica de los HR-módulos estrictos y la categoría de los HR-módulos homotópicos no son equivalentes en general. Sin embargo, hay algunos casos, por ejemplo cuando $R = \mathbb{Z}$, en los cuales hay una equivalencia entre dichas categorías.

En este capítulo estudiaremos estas dos categorías de módulos. En primer lugar veremos que las categorías de módulos pueden expresarse como categorías de Eilenberg–Moore asociadas a ciertas mónadas. Posteriormente daremos una condición suficiente sobre el anillo R para que exista una equivalencia de categorías en el caso de HR-módulos.

7.1. Mónadas y la categoría de Eilenberg–Moore

En esta sección vamos a recordar la definición general de mónada en una categoría, veremos cómo se define su categoría de álgebras asociada o categoría de Eilenberg–Moore, y algunos de los resultados básicos sobre esta categoría. Estos y otros resultados sobre mónadas pueden encontrarse en [Bor94, §4], [BW85, §3] o [Mac71, Cap. VI].

Definición 7.1.1. Dada una categoría $\mathcal{C}$, una *mónada* en $\mathcal{C}$ es una terna $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ donde $T\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ es un funtor y $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow T$ y $\mu\colon TT \longrightarrow T$ son dos transformaciones naturales tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, equal] & TT \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, equal] \\ & T & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TTT \arrow[r, "\mu T"] \arrow[d, "T\mu"'] & TT \arrow[d, "\mu"] \\ TT \arrow[r, "\mu"'] & T. \end{tikzcd}$$

Dada una mónada cualquiera, se definen las álgebras sobre esta mónada de la siguiente manera:

Definición 7.1.2. Sea $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ una mónada en $\mathcal{C}$. Un *álgebra sobre* $\mathbf{T}$ o una $\mathbf{T}$-*álgebra* es un par (M, m), donde $M \in \mathcal{C}$ y $m \colon TM \longrightarrow M$ es un morfismo que cumple que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[dr, equal] & TM \arrow[d, "m"] \\ & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TTM \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "Tm"'] & TM \arrow[d, "m"] \\ TM \arrow[r, "m"'] & M. \end{tikzcd}$$

Si (M, m) y (N, n) son dos $\mathbf{T}$-álgebras, entonces un *morfismo de* $\mathbf{T}$-*álgebras* $f \colon (M, m) \longrightarrow (N, n)$ es un morfismo $f \colon M \longrightarrow N$ en $\mathcal{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "m"'] & TN \arrow[d, "n"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N. \end{tikzcd}$$

Dada una mónada $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ en una categoría $\mathcal{C}$, denotaremos por $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ la categoría cuyos objetos son las $\mathbf{T}$-álgebras y cuyos morfismos son los morfismos de $\mathbf{T}$-álgebras. La categoría $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ de álgebras sobre $\mathbf{T}$ se llama *categoría de Eilenberg–Moore* asociada a $\mathbf{T}$.

Podemos definir un funtor olvido $U \colon \mathcal{C}^{\mathbf{T}} \longrightarrow \mathcal{C}$ de la categoría de $\mathbf{T}$-álgebras a $\mathcal{C}$ de la siguiente manera: $U(M, m) = M$ y $U(f) = f$. Este funtor así definido es un funtor fiel y además tiene un adjunto por la izquierda $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ definido como $F(M) = (TM, \mu_M)$ y $F(f) = T(f)$. La unidad de la adjunción es $\eta \colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow FU = T$ y la counidad $\varepsilon \colon UF \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}^{\mathbf{T}}}$ está definida como $\varepsilon_{(M,m)} = m$. Esta adjunción nos relaciona los morfismos en la categoría $\mathcal{C}$ con los morfismos en la categoría de $\mathbf{T}$-álgebras $\mathcal{C}^{\mathbf{T}}$ mediante la biyección

$$\mathcal{C}^{\mathbf{T}}((TX, \mu_X), (Y, m)) \cong \mathcal{C}(X, Y) \tag{7.1}$$

para todo objeto X de $\mathcal{C}$ y toda $\mathbf{T}$-álgebra (Y, m).

Definición 7.1.3. Dadas dos mónadas $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ y $\mathbf{S} = (S, \eta', \mu')$ en una categoría $\mathcal{C}$, un *morfismo de mónadas* $\mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{T}$ es una transformación natural $\lambda \colon S \longrightarrow T$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\lambda"] & T \\ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \arrow[u, "\eta'"] \arrow[ur, "\eta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \circ S \arrow[r, "\lambda\lambda"] \arrow[d, "\mu'"'] & T \circ T \arrow[d, "\mu"] \\ S \arrow[r, "\lambda"'] & T. \end{tikzcd}$$

Observación 7.1.4. Cualquier morfismo de mónadas $\lambda\colon S \longrightarrow T$ da lugar a un funtor fiel $Q\colon \mathcal{C}^{\mathbf{T}} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{S}}$ ya que toda $\mathbf{T}$-álgebra tiene estructura de $\mathbf{S}$-álgebra vía el morfismo λ. De este modo, el funtor Q se define como $Q(M,m) = (M, m \circ \lambda_M)$ y $Q(f) = f$. Este funtor está bien definido porque $(m \circ \lambda_M) \circ \eta'_M = m \circ \eta_M = 1_M$ y $(m \circ \lambda_M) \circ \mu_M = (m \circ \lambda_M) \circ S(m \circ \lambda_M)$. Por tanto $(M, m \circ \lambda_M)$ es una $\mathbf{S}$-álgebra. Además tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\mathbf{T}} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{C}^{\mathbf{S}} \arrow[dl, "F"] \\
\mathcal{C} &
\end{tikzcd}$$

donde F es el funtor olvido, que hemos visto anteriormente que era fiel. Así pues, Q también es fiel.

Ejemplo 7.1.5. Sea $\mathcal{A}b$ la categoría de grupos abelianos y sea R un anillo con unidad. El funtor $R \otimes -\colon \mathcal{A}b \longrightarrow \mathcal{A}b$ junto con el producto y la unidad de R es una mónada en la categoría de grupos abelianos. La categoría de Eilenberg–Moore asociada con esta mónada es la categoría de R-módulos.

7.2. Categorías estables de E-módulos

En esta sección vamos a describir, para un espectro anillo E, la categoría de los E-módulos estrictos y la de los E-módulos homotópicos como casos particulares de categorías de Eilenberg–Moore asociadas con mónadas. Trabajaremos en la categoría Sp^{Σ} de espectros simétricos [HSS00]. Esta categoría tiene un producto *smash* estrictamente asociativo y conmutativo, lo que nos permite definir anillos y módulos de la misma forma que los definíamos en la categoría homotópica.

Definición 7.2.1. Un *espectro anillo (estricto)* es un objeto $E \in Sp^{\Sigma}$ junto con dos morfismos $\mu\colon E \wedge E \longrightarrow E$ y $\eta\colon S \longrightarrow E$, donde S es el espectro de las esferas, de tal manera que los siguientes diagramas conmutan en la categoría Sp^{Σ}:

$$\begin{tikzcd}
E \wedge S \arrow[r, "\eta\wedge 1"] \arrow[dr, equal] & E \wedge E \arrow[d, "\mu"] & S \wedge E \arrow[l, "1\wedge\eta"'] \arrow[dl, equal] \\
& E &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E \wedge E \wedge E \arrow[r, "\mu\wedge 1"] \arrow[d, "1\wedge\mu"'] & E \wedge E \arrow[d, "\mu"] \\
E \wedge E \arrow[r, "\mu"'] & E.
\end{tikzcd} \tag{7.2}$$

El espectro anillo E es conmutativo si $\mu \circ \tau = \mu$, donde $\tau\colon E \wedge E \longrightarrow E \wedge E$ es la aplicación *twist*.

Dado un espectro anillo $E \in Sp^{\Sigma}$, un *espectro E-módulo (estricto)* es un par (M, m) con $M \in Sp^{\Sigma}$ y $m\colon E \wedge M \longrightarrow M$ tales que los siguientes diagramas conmutan en Sp^{Σ}:

$$\begin{tikzcd} S \wedge M \arrow[r, "\eta\wedge 1"] \arrow[dr, equal] & E \wedge M \arrow[d, "m"] \\ & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \wedge E \wedge M \arrow[r, "\mu\wedge 1"] \arrow[d, "1\wedge m"'] & E \wedge M \arrow[d, "m"] \\ E \wedge M \arrow[r, "m"'] & M. \end{tikzcd} \tag{7.3}$$

Ejemplo 7.2.2. Igual que ocurría en el caso de anillos y módulos homotópicos (ejemplo 4.1.3), si R es un anillo asociativo con unidad y M es un R-módulo, el espectro de Eilenberg–Mac Lane HR es un espectro anillo (estricto) y HM es un HR-módulo (estricto). Las aplicaciones de estructura de HR y HM vienen inducidas por el producto y la unidad de R, y por el homomorfismo de estructura de M como R-módulo.

Dados dos E-módulos (M, m) y (N, n), un morfismo de E-módulos $f\colon (M, m) \longrightarrow (N, n)$ es una aplicación $f\colon M \longrightarrow N$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} E \wedge M \arrow[r, "1\wedge f"] \arrow[d, "m"'] & E \wedge N \arrow[d, "n"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N. \end{tikzcd} \tag{7.4}$$

Dado un espectro anillo (E, η, μ) en Sp^{Σ}, podemos considerar el funtor $E \wedge -\colon Sp^{\Sigma} \longrightarrow Sp^{\Sigma}$. Este funtor envía cada espectro X a un espectro E-módulo $E \wedge X$. Las transformaciones naturales $\eta \wedge 1\colon \mathrm{Id}_{Sp^{\Sigma}} \longrightarrow E \wedge -$ y $\mu \wedge 1\colon E \wedge E \wedge - \longrightarrow E \wedge -$ forman una mónada en la categoría Sp^{Σ} por la conmutatividad de (7.2). La categoría de Eilenberg–Moore asociada a la mónada $(E \wedge -, \eta \wedge 1, \mu \wedge 1)$ es la categoría cuyos objetos son los E-módulos y cuyos morfismos son las aplicaciones de E-módulos. Denotaremos como *E-mod* a esta categoría y la llamaremos *categoría de espectros módulo estrictos*. Esta categoría admite una estructura de categoría de modelos en la que las equivalencias débiles y las fibraciones son las aplicaciones de E-módulos que son equivalencias débiles y fibraciones en la categoría subyacente Sp^{Σ} (véase [SS00], [SS03]). Si $Ho(E\text{-}mod)$ es la categoría homotópica asociada, y M y N son objetos de $Ho(E\text{-}mod)$, utilizaremos la notación $[M,N]_{E\text{-}mod}$ para referirnos al grupo de morfismos entre M y N en esta categoría. Así, (7.1) nos da una biyección

$$E\text{-}mod(E\wedge M,N)\cong Sp^{\Sigma}(M,N)$$

para cualesquiera E-módulos M y N. Esta biyección no induce en general una biyección en clases de homotopía de aplicaciones, como veremos en los Corolarios 7.3.6 y 7.3.7.

Ahora, dado un espectro anillo E en Sp^{Σ}, podemos considerar la mónada $(E\wedge -, \eta\wedge 1, \mu\wedge 1)$ pero en la categoría homotópica $Ho(Sp^{\Sigma})$. Llamaremos *categoría de E-módulos homotópicos* a la categoría de Eilenberg–Moore asociada a esta mónada y la denotaremos por $E\text{-}hmod$. Dados dos objetos M y N en $E\text{-}hmod$, denotaremos por $[M,N]_{E\text{-}hmod}$ al grupo de morfismos entre ellos en la categoría de Eilenberg–Moore. La biyección (7.1) nos dice cómo relacionar los morfismos de estas dos categorías, mediante el isomorfismo

$$[E\wedge M,N]_{E\text{-}hmod}\cong [M,N].$$

Observar que los objetos en $E\text{-}hmod$ son E-módulos en el sentido clásico, es decir, equipados con aplicaciones de estructura para las cuales los diagramas (7.2) y (7.3) conmutan salvo homotopía. Así pues, todo E-módulo estricto es en particular un E-módulo homotópico.

7.3. Módulos homotópicos y categorías derivadas

Las categorías $E\text{-}mod$ y $E\text{-}hmod$ definidas anteriormente son muy diferentes en general. En esta sección compararemos ambas en el caso en que E sea el espectro anillo HR para algún anillo con unidad R.

Sea R un anillo con unidad. La categoría derivada del anillo anillo R, que denotamos por $\mathcal{D}(R)$, es la categoría homotópica de $\mathrm{Ch}(R)$, la categoría de modelos de complejos de cadenas no acotados de R-módulos por la izquierda [Hov99, 2.3]. Las equivalencias débiles en $\mathrm{Ch}(R)$ son los cuasi-isomorfismos, es decir, las aplicaciones de complejos de cadenas que inducen isomorfismos en todos los grupos de homología. Si E es un R-módulo y $k\in\mathbb{Z}$, denotaremos por $E[k]$ al complejo de cadenas

$$\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow 0\longrightarrow E\longrightarrow 0\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots$$

donde E está situado en dimensión k. Dados dos R-módulos A y B, los morfismos entre $A[0]$ y $B[k]$ en la categoría $\mathcal{D}(R)$ se corresponden con el grupo $\mathrm{Ext}^k_R(A,B)$, es decir,

$$\mathcal{D}(R)(A[0],B[k]) \cong \mathrm{Ext}^k_R(A,B)$$

para cualesquiera R-módulos A y B; ver [Wei94, cap. 10] para una descripción detallada de la categoría derivada.

La *dimensión proyectiva* $pd(A)$ de un R-módulo A se define como el menor entero n tal que existe una resolución de A por R-módulos proyectivos P_i de la forma

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Si tal número entero no existe, diremos que $pd(A) = \infty$. La *dimensión global* de un anillo R se define como $gd(R) = \sup_{A\in R\text{-}mod}\{pd(A)\}$.

Ejemplo 7.3.1. Para el anillo de los números enteros, $gd(\mathbb{Z}) = 1$. Cualquier anillo que sea un domino de ideales principales tiene dimensión global menor o igual que uno. Sin embargo, para el anillo $\mathbb{Z}/4$ se tiene que $gd(\mathbb{Z}/4) = \infty$. En el caso de un anillo de polinomios en n variables, $gd(R[x_1,\ldots,x_n]) = gd(R) + n$.

Los anillos R tales que $gd(R) = 0$ se llaman *anillos semisimples*. Todos los cuerpos y los productos directos finitos de cuerpos son anillos semisimples. En general, $gd(R) = 0$ si y sólo si R es un producto directo finito de anillos de matrices sobre anillos de división, por el teorema de Wedderburn–Artin (véase [AF74, §13], por ejemplo). Así, si R es conmutativo, entonces $gd(R) = 0$ si y sólo si R es un producto directo finito de cuerpos.

Los grupos Ext^k_R están muy relacionados con la dimensión global del anillo R. Un resultado clásico de álgebra homológica establece que la dimensión global de un anillo R es k si y sólo si $\mathrm{Ext}^i_R(A,B) = 0$ para todo $i > k$ (véase por ejemplo [Wei94, teorema 4.1.2]).

Proposición 7.3.2. *Si $gd(R) = 1$, entonces cualquier complejo de cadenas de R-módulos*

$$\mathbf{C}\colon\ \cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{d_0} C_{-1} \longrightarrow \cdots$$

es cuasi-isomorfo, y por tanto equivalente en $\mathcal{D}(R)$, a $\oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathbf{A}_k$ donde cada complejo $\mathbf{A}_k$ es de la forma

$$\mathbf{A}_k\colon\ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow R_k \longrightarrow F_k \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

con F_k y R_k en dimensiones k y $k+1$ respectivamente, y tal que $H_k(\mathbf{A}_k) \cong H_k(\mathbf{C})$.

Demostración. Sea $R_k \xrightarrow{i_k} F_k \xrightarrow{p_k} H_k(\mathbf{C})$ una resolución proyectiva del k-ésimo grupo de homología $H_k(\mathbf{C})$ de $\mathbf{C}$. Definimos $\mathbf{A}_k$ como el complejo

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow R_k \longrightarrow F_k \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

con F_k en dimensión k y R_k en dimensión $k+1$. Ahora vamos a construir una aplicación entre $\oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathbf{A}_k$ y $\mathbf{C}$ que induzca isomorfismo en homología. Para cada k tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& & C_{k+1} \arrow[d, two heads] \\
& & \operatorname{Im} d_{k+1} \arrow[d, tail] \\
& & \operatorname{Ker} d_k \arrow[d, two heads, "\pi"] \\
R_k \arrow[r, tail, "i_k"'] \arrow[uuurr, dotted, bend left, "\exists \widetilde{q}_k"] \arrow[uurr, "\widetilde{p}_k \circ i_k"] & F_k \arrow[r, two heads, "p_k"'] \arrow[ur, dotted, "\exists \widetilde{p}_k"] & H_k(\mathbf{C}).
\end{tikzcd}$$

Como F_k es un módulo proyectivo y π es exhaustiva, existe una aplicación $\widetilde{p}_k \colon F_k \longrightarrow \operatorname{Ker} d_k \subset C_k$ que cierra el diagrama. La aplicación $\widetilde{p}_k \circ i_k$ está bien definida porque $\widetilde{p}_k \circ i_k \subset \operatorname{Ker} \pi = \operatorname{Im} d_{k+1}$. De nuevo, como R_k es proyectivo y la aplicación $C_{k+1} \to \operatorname{Im} d_{k+1}$ es exhaustiva, existe una aplicación $\widetilde{q}_k \colon R_k \longrightarrow C_{k+1}$ que cierra el diagrama. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ tenemos definidas aplicaciones $\widetilde{p}_k$ y $\widetilde{q}_k$ de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{k+1} \arrow[r] & C_k \arrow[r] & \cdots \\
& R_k \arrow[u, "\widetilde{q}_k"] \arrow[r] & F_k, \arrow[u, "\widetilde{p}_k"']
\end{tikzcd}$$

y esto induce una aplicación $\oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathbf{A}_k \longrightarrow \mathbf{C}$ que es un cuasi-isomorfismo. $\square$

Observación 7.3.3. Para un anillo R tal que $gd(R) = 0$, la proposición 7.3.2 es también cierta de manera más sencilla. En este caso, $\mathbf{C} \simeq \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathbf{A}_k$, donde $\mathbf{A}_k = H_k(\mathbf{C})[k]$ es el complejo de cadenas con $H_k(\mathbf{C})$ en dimensión k y cero en el resto.

Observar que la proposición 7.3.2 no se cumple cuando $gd(R) > 1$. Supongamos que $gd(R) = k > 1$ y consideremos un elemento ξ distinto de cero en $\mathrm{Ext}^k_R(M, N)$, donde M y N son R-módulos. Este elemento ξ se puede representar mediante una sucesión exacta de módulos

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

donde $E_1, \ldots, E_k$ son libres [Mac67, corolario III.6.5]. Tomemos ahora el complejo de cadenas

$$\mathbf{E}\colon\ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow E_k \longrightarrow E_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

con E_1 en dimensión 0. Este complejo tiene homología solamente en dimensiones 0 y $k-1$, $H_0(\mathbf{E}) \cong M$ y $H_{k-1}(\mathbf{E}) \cong N$. Pero si este complejo es cuasi-isomorfo a $M[0] \oplus N[k-1]$ entonces $\xi = 0$, puesto que, al ser $E_1, \ldots, E_k$ libres, existe un cuasi-isomorfismo del primer complejo al segundo y por tanto un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & E_k \arrow[r] \arrow[d] & E_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & E_2 \arrow[r] \arrow[d] & E_1 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d, "\cong"] \\
N \arrow[r, "1"'] & N \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "1"'] & M.
\end{tikzcd}$$

El siguiente resultado fue demostrado por primera vez en [Rob87]. Una generalización reciente puede verse en [SS03].

Teorema 7.3.4. *Dado un anillo R, hay una equivalencia de Quillen entre la categoría de modelos* $\mathrm{Ch}(R)$ *de complejos de cadenas no acotados de R-módulos y la categoría de modelos de los HR-módulos (estrictos). Esta equivalencia induce una equivalencia entre las respectivas categorías homotópicas $\mathcal{D}(R)$ y $Ho(HR\text{-}mod)$.* □

La categoría HR-*hmod* ya ha sido estudiada en el capítulo 4. Sus objetos son exactamente los R-GEMs estables. Un espectro $E \in Ho(Sp^\Sigma)$ es un R-GEM estable si $E \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}} \Sigma^k HA_k$ donde cada A_k es un R-módulo. Si $M, N \in HR$-*hmod* y $M \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}} \Sigma^k HA_k$ y $N \simeq \vee_{j\in\mathbb{Z}} \Sigma^k HB_j$, entonces

$$[M, N]_{HR\text{-}hmod} = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \prod_{j\in\mathbb{Z}} [HA, \Sigma^{j-k} HB]_{HR\text{-}hmod} \tag{7·5}$$

ya que la aplicación natural $\vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k HA_k \longrightarrow \prod_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k HA_k$ en este caso particular es una equivalencia. Así pues, el estudio de los morfismos en *HR-hmod* se reduce al estudio de $[HA, \Sigma^k HB]_{HR\text{-}hmod}$. En el caso $R = \mathbb{Z}$ recordamos el resultado obtenido en el corolario 4.3.6.

Proposición 7.3.5. *Para cualesquiera grupos abelianos A y B se cumple que*

$$\begin{aligned}&[HA, HB]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod} \cong \mathrm{Hom}(A, B)\\&[HA, \Sigma HB]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod} \cong \mathrm{Ext}(A, B)\\&[HA, \Sigma^k HB]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod} = 0 \textit{ si } k \neq 0, 1.\end{aligned}$$ □

Corolario 7.3.6. *Si $k \neq 0, 1$, entonces $[HA, \Sigma^k HB]_{HR\text{-}hmod} = 0$ para cualquier anillo R y cualesquiera R-módulos A y B.*

Demostración. La aplicación que envía la unidad de $\mathbb{Z}$ a la de R induce una transformación natural $H\mathbb{Z}\wedge - \longrightarrow HR\wedge -$ y un morfismo de mónadas. El resultado se deduce de la observación 7.1.4. □

Corolario 7.3.7. *No es posible establecer una equivalencia de categorías entre $Ho(HR\text{-}mod)$ y HR-hmod si $gd(R) > 1$.*

Demostración. Supongamos que existe una equivalencia de categorías entre $Ho(HR\text{-}mod)$ y *HR-hmod*. Entonces, para cualesquiera dos R-módulos A, B y para todo $k \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$[HA, \Sigma^k HB]_{HR\text{-}hmod} \cong [HA, \Sigma^k HB]_{HR\text{-}mod} \cong \mathrm{Ext}^k_R(A, B)$$

por el teorema 7.3.4. Pero $[HA, \Sigma^k HB]_{HR\text{-}hmod} = 0$ si $k \neq 0, 1$, por el corolario 7.3.6, y esto es una contradicción ya que $gd(R) > 1$. □

Discutiremos ahora $[HA, \Sigma^k HB]_{HR\text{-}hmod}$ en los casos $k = 0$ y $k = 1$ para cualquier anillo R. La siguiente proposición generaliza la proposición 7.3.5 para cualquier anillo R en el caso $k = 0$.

Proposición 7.3.8. *Para cualquier anillo R y cualesquiera R-módulos A y B tenemos que $[HA, HB]_{HR\text{-}hmod} \cong \mathrm{Hom}_R(A, B)$.*

Demostración. Sea una aplicación $f\colon HA \longrightarrow HB$. Los espectros HA y HB son HR-módulos ya que A y B son R-módulos. La aplicación f será un morfismo en la categoría HR-*hmod* si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} HR \wedge HA \arrow[r, "1\wedge f"] \arrow[d, "m_{HA}"'] & HR \wedge HB \arrow[d, "m_{HB}"] \\ HA \arrow[r, "f"'] & HB, \end{tikzcd}$$

donde m_{HA} y m_{HB} denotan las aplicaciones de estructura de HA y HB como HR-módulos respectivamente. Podemos definir una aplicación

$$\Phi\colon [HA, HB] \longrightarrow [HR \wedge HA, HB]$$

de la siguiente manera: $\Phi(f) = f \circ m_{HA} - m_{HB} \circ (1 \wedge f)$. De este modo, f será un morfismo en HR-*hmod* si y sólo si $f \in \operatorname{Ker}\Phi$. Pero $[HA, HB] \cong \operatorname{Hom}(A, B)$ y $[HR \wedge HA, HB] \cong \operatorname{Hom}(R \otimes A, B)$. La aplicación $f \in \operatorname{Ker}\Phi$ si y sólo si $f(ra) = rf(a)$ para todo $r \in R$ y $a \in A$, y esto es lo mismo que decir que $f \in \operatorname{Hom}_R(A, B)$. $\square$

El caso $k = 1$ es más complicado. Aunque podemos dar una descripción de $[HA, \Sigma HB]_{HR\text{-}hmod}$ como el núcleo de una aplicación

$$\Phi\colon [HA, \Sigma HB] \longrightarrow [HR \wedge HA, \Sigma HB],$$

como en la demostración de la proposición 7.3.8, y $[HA, \Sigma HB] \cong \operatorname{Ext}(A, B)$ y $[HR \wedge HA, \Sigma HB] = \operatorname{Ext}(R \otimes A, B)$, en general se tiene que

$$[HA, \Sigma HB]_{HR\text{-}hmod} \ncong \operatorname{Ext}_R(A, B).$$

Si fuese cierto que $[HA, \Sigma HB]_{HR\text{-}hmod} \cong \operatorname{Ext}_R(A, B)$ como era de esperar, entonces por la observación 7.1.4 y la proposición 7.3.5, tendríamos siempre una aplicación inyectiva

$$\operatorname{Ext}_R(A, B) \rightarrowtail \operatorname{Ext}(A, B)$$

para cualquier anillo R y cualesquiera R-módulos A y B, y esto no es cierto en general. El siguiente resultado muestra un contraejemplo para el anillo $\mathbb{Q}[x]$ cuya dimensión global es $gd(\mathbb{Q}[x]) = gd(\mathbb{Q}) + 1 = 1$.

Ejemplo 7.3.9. Sea $R = \mathbb{Q}[x]$, $A = \mathbb{Q}[x]/(x^n)$ y $B = \mathbb{Q}$. Entonces el grupo $\operatorname{Ext}_R(A, B)$ es distinto de 0 porque la sucesión exacta

$$\mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{Q}[x]/(x^{n+1}) \twoheadrightarrow \mathbb{Q}[x]/(x^n)$$

no escinde. Si existiese una escisión, entonces $x^n = 0$ en $\mathbb{Q}[x]/(x^{n+1})$, lo cual es una contradicción. Por otro lado, $\operatorname{Ext}(A, B) = 0$ como grupos abelianos, porque $\mathbb{Q}$ es divisible.

7.4. Una equivalencia de categorías

En esta sección vamos a estudiar para qué anillos R hay una equivalencia entre las categorías $Ho(HR\text{-}mod)$ y $HR\text{-}hmod$. Ya sabemos, por el corolario 7.3.7, que no existe tal equivalencia si la dimensión global del anillo es mayor estrictamente que uno. Por otro lado, tampoco todos los anillos de dimensión global uno van a verificar esta equivalencia, como se deduce del ejemplo 7.3.9. Sin embargo, existe una equivalencia de categorías si el anillo R tiene dimensión global cero o es un subanillo de los racionales.

Teorema 7.4.1. *Sea R un anillo conmutativo tal que $gd(R) \leq 1$. Entonces hay una equivalencia de categorías entre $Ho(HR\text{-}mod)$ y $HR\text{-}hmod$ si y sólo si $[HA, \Sigma HB]_{HR\text{-}hmod} \cong \operatorname{Ext}_R(A, B)$.*

Demostración. Supongamos que $[HA, \Sigma HB]_{HR\text{-}hmod} \cong \operatorname{Ext}_R(A, B)$. Vamos a construir un funtor $\Phi\colon HR\text{-}hmod \longrightarrow \mathcal{D}(R)$ que sea una equivalencia de categorías. Será suficiente con definir el funtor sobre los objetos de la forma $\Sigma^i HA$, ya que dado $M \in HR\text{-}hmod$ es equivalente a $\vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k HA_k$, y sobre los morfismos de la forma $f\colon HA \longrightarrow \Sigma^k HB$ para $k = 0$ y $k = 1$, gracias a la igualdad (7.5). Si Φ es una equivalencia de categorías, componiendo esta equivalencia con la del teorema 7.3.4 tendremos que $Ho(HR\text{-}mod) \simeq HR\text{-}hmod$. Vamos a considerar de forma separada los casos de dimensión global cero y uno.

- Caso $gd(R) = 0$. En este caso, $\operatorname{Ext}_R(A, B) = 0$ y, por hipótesis, $[HA, \Sigma HB]_{HR\text{-}hmod} = 0$. Definimos $\Phi(\Sigma^k HA) = A[k]$. De esta manera, si M en $HR\text{-}hmod$ es tal que $M \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k HA_k$, entonces $\Phi(M) = \prod_{k\in\mathbb{Z}} A_k[k]$. Así pues, para una aplicación $f\colon HA \longrightarrow HB$ definimos $\Phi(f) = \pi_0(f)$, la aplicación correspondiente entre $A[0]$ y $B[0]$. Ahora bien, Φ es un funtor fiel y pleno y además cada objeto de $\mathcal{D}(R)$ pertenece a la imagen del funtor Φ por la observación 7.3.3; por tanto, es una equivalencia de categorías.

- Caso $gd(R) = 1$. Definimos $\Phi(\Sigma^k HA) = \mathbf{P}_k(A)$ donde $\mathbf{P}_k(A)$ es el complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow R_k \longrightarrow F_k \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

  con F_k y R_k en dimensiones k y $k+1$ respectivamente, y $R_k \to F_k \to A$ una resolución proyectiva de A. Si $M \simeq \vee_{k\in\mathbb{Z}}\Sigma^k HA_k$, entonces $\Phi(M) = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{P}_k(A_k)$. Una aplicación $f \in [HA, HB]_{HR\text{-}hmod} \cong$

$\mathrm{Hom}_R(A,B)$ se eleva a una aplicación $\widetilde{f}$ entre las resoluciones proyectivas de A y B:

$$\begin{tikzcd} R_A \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & F_A \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ R_B \arrow[r] & F_B, \end{tikzcd}$$

y de esta manera a una aplicación del complejo $\mathbf{P}_0(A) = \Phi(HA)$ al complejo $\mathbf{P}_0(B) = \Phi(HB)$. Definimos $\Phi(f) = \widetilde{f}$.

Del mismo modo, una aplicación $g \in [HA, \Sigma HB]_{HR\text{-}hmod} \cong \mathrm{Ext}_R(A,B)$ se eleva a una aplicación $\widetilde{g}$ entre los complejos $\mathbf{P}_0(A) = \Phi(HA)$ y $\mathbf{P}_1(B) = \Phi(\Sigma HB)$:

$$\begin{tikzcd} & R_A \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{g}"] & F_A \\ R_B \arrow[r] & F_B & \end{tikzcd}$$

Definimos $\Phi(g) = \widetilde{g}$. El producto de Yoneda Y entre los grupos Ext_R^k

$$\mathrm{Ext}_R^i(B,C) \otimes \mathrm{Ext}_R^j(A,B) \xrightarrow{Y} \mathrm{Ext}_R^{i+j}(A,C)$$

convierte a Φ en un funtor. Este funtor es fiel y pleno y cada objeto de $\mathcal{D}(R)$ está en la imagen de Φ debido a la proposición 7.3.2; por lo tanto, es una equivalencia de categorías.

Recíprocamente, si existe una equivalencia entre la categoría HR-*hmod* y la categoría $Ho(HR\text{-}mod)$, entonces

$$[HA, \Sigma^k HB]_{HR\text{-}hmod} \cong [HA, \Sigma^k HB]_{HR\text{-}mod} \cong \mathrm{Ext}_R^k(A,B),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Los cuerpos y los anillos sólidos libres de torsión satisfacen las condiciones del teorema anterior. Si R es un cuerpo, y A y B son R-módulos, entonces

$$[HA, \Sigma HB]_{HR\text{-}hmod} \cong [\vee_i HR, \Sigma HB]_{HR\text{-}hmod} \cong \prod_i [S, \Sigma HB] = 0.$$

Un anillo R es *sólido* si la multiplicación induce un isomorfismo $R \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong R$, considerando el producto tensorial sobre $\mathbb{Z}$. Los anillos sólidos fueron descritos por primera vez en [BK72b]. Si R es sólido, entonces en particular

$R \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong A$ donde A es un R-módulo cualquiera. Esto implica que cuando R es sólido, dados dos R-módulos A y B, se cumple que

$$\mathrm{Hom}_R(A, B) \cong \mathrm{Hom}(A, B); \qquad \mathrm{Ext}_R(A, B) \cong \mathrm{Ext}(A, B).$$

Si R es libre de torsión, entonces $HR \wedge MA \simeq H(R \otimes A)$ para cualquier R-módulo A. Un anillo R que cumpla estas dos condiciones verifica que $[HA, \Sigma HB]_{HR\text{-}hmod} \cong \mathrm{Ext}_R(A, B)$.

Lema 7.4.2. *Si R es un anillo libre de tosión, sólido y de dimensión global uno, entonces R es un subanillo de los racionales.*

Demostración. La demostración se deduce a partir del teorema de clasificación de los anillos sólidos [BK72b]. □

Corolario 7.4.3. *Si R es un cuerpo o R es un subanillo de los racionales, entonces existe una equivalencia de categorías entre $Ho(HR\text{-}mod)$ y $HR\text{-}hmod$.* □

7.5. Localización homotópica de módulos estrictos

Vamos a recordar algunas de las definiciones y propiedades de la localización homotópica vistas en el capítulo 2. Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una cofibración entre objetos cofibrantes en la categoría Sp^{Σ} de espectros simétricos. Un espectro simétrico $X \in Sp^{\Sigma}$ se llama f-local si es fibrante y la fibración inducida de conjuntos simpliciales

$$\mathrm{Map}_{Sp^{\Sigma}}(B, X) \longrightarrow \mathrm{Map}_{Sp^{\Sigma}}(A, X)$$

es una equivalencia débil. Una aplicación $g\colon X \longrightarrow Y$ de espectros simétricos es una f-equivalencia si existe una aproximación cofibrante $\widetilde{g}\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ tal que la fibración inducida de conjuntos simpliciales

$$\mathrm{Map}_{Sp^{\Sigma}}(\widetilde{Y}, Z) \longrightarrow \mathrm{Map}_{Sp^{\Sigma}}(\widetilde{X}, Z)$$

es una equivalencia débil para cada espectro simétrico Z que sea f-local. Una f-localización de $X \in Sp^{\Sigma}$ es una f-equivalencia $l_X\colon X \longrightarrow L_f X$ tal que $L_f X$ es f-local. En la categoría homotópica $Ho(Sp^{\Sigma})$, la aplicación de localización l_X es inicial entre todas las aplicaciones que van de X a espectros simétricos f-locales, y es terminal entre las f-equivalencias que tienen X como dominio. La existencia de una f-localización, como ya hemos visto, está garantizada por el teorema 2.3.8, y es única salvo homotopía. La localización con respecto a una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ de espectros simétricos es un funtor homotópico idempotente en $Ho(Sp^{\Sigma})$.

Cuando trabajamos en la categoría homotópica $Ho(Sp^{\Sigma})$, la f-localización $L_f M$ de un E-módulo $M \in E$-*hmod* tiene una estructura de E-módulo compatible, suponiendo que el espectro anillo E es conectivo o que el funtor de localización L_f conmuta con la suspensión (véanse teoremas 4.2.1 y 4.2.4). Sin embargo, no sabemos en general si $L_f M$ es equivalente a un E-módulo estricto cuando M es un E-módulo estricto. Si $E = HR$, entonces cualquier localización de un HR-módulo estricto es equivalente a un HR-módulo homotópico para todo anillo R con unidad, ya que todo HR-módulo estricto es en particular homotópico y por tanto escinde como un *wedge* de suspensiones de espectros de Eilenberg–Mac Lane cuyos grupos de homotopía son R-módulos. Esto hace que el funtor canónico

$$Ho(HR\text{-}mod) \longrightarrow HR\text{-}hmod$$

sea esencialmente exhaustivo, es decir, que cualquier elemento de HR-*hmod* sea isomorfo a un elemento de la imagen del funtor. En general, para un espectro anillo E, la localización de un E-módulo estricto será equivalente a un E-módulo estricto siempre que el funtor

$$Ho(E\text{-}mod) \longrightarrow E\text{-}hmod$$

sea esencialmente exhaustivo.

En el caso de localizaciones de módulos homotópicos, los teoremas 4.2.1 y 4.2.4 nos dicen que la aplicación de localización es una aplicación de módulos homotópicos. El análogo para módulos estrictos no será cierto en general. Sin embargo, la equivalencia de categorías del corolario 7.4.3 nos permite demostrarlo en el caso de que $E = HR$, cuando R es un cuerpo o un subanillo de los racionales.

Teorema 7.5.1. *Si M es un HR-módulo estricto, entonces para cualquier f se cumple $L_f M \simeq N$, donde N es un HR-módulo estricto. Si R es un cuerpo o un subanillo de $\mathbb{Q}$, entonces la composición*

$$M \xrightarrow{l_M} L_f M \xrightarrow{\simeq} N$$

es homótopa a un morfismo de HR-módulos estrictos.

Demostración. Sabemos que el resultado es cierto para M en HR-$hmod$ porque HR es un espectro conectivo. Ahora podemos utilizar la equivalencia de categorías entre HR-$hmod$ y $Ho(HR\text{-}mod)$ que proporciona el teorema 7.4.1. □

Capítulo 8

Opéradas y localización

Los objetos monoide en la categoría de espacios topológicos o conjuntos simpliciales tienen el tipo de homotopía de espacios de lazos [BV73], [Sta63] y los espectros anillo clásicos pueden verse como los monoides en la categoría homotópica estable. Cada una de estas dos estructuras se conserva cuando le aplicamos un funtor de localización. En [Far96], Farjoun demuestra que toda localización de un H-espacio vuelve a ser un H-espacio, y que toda localización de un espacio de lazos es un espacio de lazos. Mientras que el primer resultado se demuestra utilizando únicamente la propiedad de la localización de conmutar con productos finitos, el segundo es más complicado de probar. En [Bou96], Bousfield da otro argumento alternativo para esta demostración.

En la categoría de homotopía estable, hemos visto en el capítulo 4 que los funtores de localización conservan las estructuras de espectro anillo en la categoría homotópica, bajo ciertas hipótesis de conectividad o cuando el funtor de localización conmuta con la suspensión (véanse teoremas 4.2.1 y 4.2.4). Las nuevas categorías de modelos para la homotopía estable, dotadas de un producto *smash* estrictamente asociativo y conmutativo, como la categoría de los espectros simétricos [HSS00] o la de los S-módulos [EKMM97], permiten definir espectros anillo estrictos. En este capítulo, probaremos que los espectros anillo estrictos se conservan por funtores de localización, bajo las mismas hipótesis anteriores.

Los espectros anillo estrictos, que son los monoides en una categoría de modelos para la homotopía estable, pueden verse como álgebras sobre la opérada $\mathcal{A}ss$, que se define como $\mathcal{A}ss(n) = S[\Sigma_n]$, donde S es la unidad de la categoría monoidal y la acción de Σ_n sobre cada $\mathcal{A}ss(n)$ es por composición.

Es posible dotar a la categoría de opéradas en conjuntos simpliciales de una estructura de categoría de modelos [BM03]. Si A_∞ es una resolución cofibrante de $\mathcal{A}ss$, entonces los espacios A_∞ son espacios del mismo tipo de homotopía que un espacio de lazos y los espectros A_∞, también llamados *espectros anillo* A_∞, son espectros homotópicamente equivalentes a un espectro anillo estricto. En [EKMM97] se demuestra con otros métodos que las localizaciones homológicas conservan los espectros anillo A_∞.

Motivados por la definición de estas estructuras como álgebras sobre opéradas, en este capítulo probaremos un resultado más general. Consideraremos localizaciones homotópicas en una categoría de modelos simplicial monoidal. Al ser la categoría simplicial, tiene sentido hablar de acciones de opéradas simpliciales y de álgebras sobre estas opéradas. Veremos que los funtores de localización homotópicos conservan álgebras sobre opéradas cofibrantes de conjuntos simpliciales cuando la aplicación natural

$$\mathrm{Map}((LX)^{\odot n}, LX) \longrightarrow \mathrm{Map}(X^{\odot n}, LX)$$

es una fibración trivial de conjuntos simpliciales para todo n, donde L es el funtor de localización y $\odot$ es el producto de la categoría monoidal. Este es el caso de la categoría de conjuntos simpliciales (en cuyo caso $\odot = \times$) y también de la categoría de espectros simétricos (en cuyo caso $\odot = \wedge$). Para la categoría de conjuntos simpliciales, obtenemos una nueva demostración de que las localizaciones homotópicas conservan espacios de lazos, y en el caso de la categoría de espectros simétricos, obtenemos que los funtores de localización conservan espectros anillo (estrictos) bajo ciertas condiciones de conectividad o conmutatividad con la suspensión. Estas condiciones son necesarias, ya que como hemos visto en el ejemplo 4.2.3, la sección de Postnikov de nivel cero del espectro anillo $K(n)$ de la teoría K de Morava no es un espectro anillo.

8.1. Categorías de modelos de opéradas

Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal simétrica y cerrada con unidad S y producto $\otimes$ (véase definición 1.4.2). La *categoría de colecciones* de objetos de $\mathcal{C}$, que denotaremos por $Coll(\mathcal{C})$ es la categoría cuyos objetos son $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(n)\}_{n\geq 0}$, donde cada $\mathcal{O}(n)$ es un objeto de $\mathcal{C}$ con una acción del grupo simétrico Σ_n. También puede verse $Coll(\mathcal{C})$ como la categoría producto $\prod_{n\geq 0} \mathcal{C}^{\Sigma_n}$, donde

$\mathcal{C}^{\Sigma_n}$ es la categoría formada por los mismos objetos de $\mathcal{C}$ dotados con una acción de Σ_n.

Definición 8.1.1. Una opérada $\mathcal{O}$ en $\mathcal{C}$ es un elemento de $Coll(\mathcal{C})$ junto con una unidad $S \longrightarrow \mathcal{O}(1)$ y una familia de aplicaciones de estructura, también llamadas productos de composición

$$\gamma_{k;n_1,\dots,n_k} \colon \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(n_k) \longrightarrow \mathcal{O}(n_1 + \cdots + n_k),$$

que son compatibles con la unidad, la acción de Σ_n y cumplen ciertas condiciones unitarias, de equivarianza y de asociatividad (véanse [May97a], [May97b], [MSS02]).

Un *morfismo de opéradas* $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ es un conjunto de morfismos $\mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}'(n)$ para cada $n \geq 0$, compatibles con los productos de composición y las unidades de $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ y la acción de Σ_n. Las opéradas junto con los morfismos de opéradas forman una categoría. Denotaremos por $Oper(\mathcal{C})$ la categoría de opéradas sobre $\mathcal{C}$.

Si en las definiciones anteriores olvidamos la acción de Σ_n y las condiciones de equivarianza, tenemos el concepto de *opérada sin acción*.

Ejemplo 8.1.2. La opérada $\mathcal{C}om$ se define como $\mathcal{C}om(n) = S$ para todo $n \geq 0$. La acción de Σ_n en $\mathcal{C}om(n)$ es trivial, la unidad es la identidad y los productos de composición para esta opérada son isomorfismos canónicos.

Ejemplo 8.1.3. La opérada $\mathcal{A}ss$ se define como $\mathcal{A}ss(n) = S[\Sigma_n]$, el coproducto de una copia de S por cada elemento del grupo simétrico Σ_n. La acción de Σ_n en $\mathcal{A}ss(n)$ es por composición, la unidad es la identidad y los productos de composición se definen por permutación.

Ejemplo 8.1.4. Dado un objeto X de $\mathcal{C}$, la opérada de endomorfismos End_X se define como $\mathrm{End}_X(n) = \mathrm{Hom}(X^{\otimes n}, X)$, donde $X^{\otimes n} = X \otimes \overset{n)}{\cdots} \otimes X$, $X^{\otimes 0} = S$ y $\mathrm{Hom}(-,-)$ es el Hom interno de la categoría monoidal, simétrica y cerrada $\mathcal{C}$. La unidad de la opérada es la inducida por la identidad en X. La acción de Σ_n sobre $\mathrm{End}_X(n)$ se define por composición con la acción de Σ_n en $X^{\otimes n}$, inducida por la estructura monoidal de $\mathcal{C}$. Los productos de composición

$$\gamma_{k;n_1,\dots,n_k} \colon \mathrm{End}_X(k) \otimes \mathrm{End}_X(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{End}_X(n_k) \longrightarrow \mathrm{End}_X(n_1 + \cdots + n_k)$$

se definen como

$$\gamma_{k;n_1,\dots,n_k}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_k) = \alpha \circ (\beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_k).$$

Si la categoría $\mathcal{C}$ sobre la que estamos definiendo las opéradas además, de ser monoidal, simétrica y cerrada, tiene una estructura de categoría de modelos que satisface el axioma del producto-*pushout*, diremos que $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos monoidal. El *axioma del producto-pushout* nos dice que si $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon U \longrightarrow V$ son cofibraciones, entonces el producto-*pushout* de f y g, es decir, la aplicación

$$X \otimes V \coprod_{X \otimes U} Y \otimes U \longrightarrow Y \otimes V \tag{8.1}$$

es una cofibración, que es trivial si f o g lo son. Cuando $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos monoidal, Berger y Moerdijk [BM03, §3] dotan a la categoría $Coll(\mathcal{C})$ de una estructura de categoría de modelos, y proporcionan condiciones bajo las cuales la categoría $Oper(\mathcal{C})$ tiene estructura de categoría de modelos, que además es cofibrantemente generada cuando $\mathcal{C}$ lo es. En esta estructura de modelos, las equivalencias débiles y las fibraciones se definen a cada nivel. Un morfismo de opéradas $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ es una equivalencia débil (fibración) si las aplicaciones

$$\mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}'(n)$$

son equivalencias débiles (fibraciones) para todo n. Las cofibraciones se definen de la manera usual a partir de las fibraciones y equivalencias débiles, utilizando las propiedades de elevación. Dada una opérada $\mathcal{O}$, un reemplazamiento cofibrante de $\mathcal{O}$ es una opérada cofibrante $\widehat{\mathcal{O}}$ junto con una aplicación de opéradas $\widehat{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathcal{O}$ que es una equivalencia débil.

Definición 8.1.5. Una opérada $\mathcal{O}$ de $Oper(\mathcal{C})$ se dice Σ-*cofibrante* si $U(\mathcal{O})$ es cofibrante en $Coll(\mathcal{C})$, donde $U\colon Oper(\mathcal{C}) \longrightarrow Coll(\mathcal{C})$ es el funtor olvido.

Todas las opéradas cofibrantes son Σ-cofibrantes [BM03, proposición 4.3]. La categoría de conjuntos simpliciales $s\mathcal{S}ets$ es una categoría de modelos monoidal que satisface las condiciones de [BM03, teorema 3.2]; por lo tanto, $Oper(s\mathcal{S}ets)$ es una categoría de modelos. Otros ejemplos de categorías cuyas categorías de opéradas son categorías de modelos son la categoría de espacios topológicos compactamente generados o la categoría de $\mathrm{Ch}(R)$ de complejos de cadenas de R-módulos, donde R es un anillo con unidad.

8.2. Álgebras sobre opéradas

Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal simétrica y cerrada.

Definición 8.2.1. Dada una opérada $\mathcal{O}$ en $\mathcal{C}$, un álgebra sobre $\mathcal{O}$ es un objeto A de $\mathcal{C}$ junto con un morfismo de opéradas

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{End}_A$$

donde End_A es la opérada de endomorfismos definida en el ejemplo 8.1.4.

Una estructura de álgebra sobre $\mathcal{O}$ en A, se puede definir también como un conjunto de aplicaciones de estructura

$$\mathcal{O}(n) \otimes A^{\otimes n} \longrightarrow A \quad \text{para todo } n \geq 0,$$

que verifica ciertas condiciones unitarias, de equivarianza y asociatividad [May97a], [May97b], [MSS02]. Las condiciones de equivarianza pueden codificarse de la siguiente manera. La biyección

$$\mathcal{C}(\mathcal{O}(n), \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A)) \cong \mathcal{C}(\mathcal{O}(n) \otimes A^{\otimes n}, A),$$

dada por (1.1) conserva la equivarianza. Si la categoría $\mathcal{C}$ tiene colímites finitos, podemos definir el producto de $\mathcal{O}(n)$ y $A^{\otimes n}$ sobre Σ_n como un coecualizador, del siguiente modo:

$$\mathcal{O}(n) \otimes_{\Sigma_n} A^{\otimes n} = \mathrm{coeq}_{\sigma \in \Sigma_n}\{\sigma^{-1} \otimes \sigma \colon \mathcal{O}(n) \otimes A^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{O}(n) \otimes A^{\otimes n}\}.$$

En estos términos, una estructura de álgebra sobre $\mathcal{O}$ en A es una familia de morfismos compatibles en $\mathcal{C}$,

$$\mathcal{O}(n) \otimes_{\Sigma_n} A^{\otimes n} \longrightarrow A.$$

Definición 8.2.2. Si A y B son dos álgebras sobre $\mathcal{O}$, un morfismo de álgebras sobre $\mathcal{O}$ entre A y B es una aplicación $f \colon A \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $n \geq 0$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(n) \otimes_{\Sigma_n} A^{\otimes n} \arrow[r] \arrow[d, "1 \otimes_{\Sigma_n} f^{\otimes n}"'] & A \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{O}(n) \otimes_{\Sigma_n} B^{\otimes n} \arrow[r] & B.
\end{tikzcd}$$

Denotaremos por $Alg_{\mathcal{O}}$ la categoría de álgebras sobre $\mathcal{O}$.

Ejemplo 8.2.3. Las álgebras sobre la opérada $\mathcal{A}ss$ son los monoides en la categoría $\mathcal{C}$ [May97b, ejemplo 1.1]. Las álgebras sobre $\mathcal{C}om$ corresponden a los monoides conmutativos en $\mathcal{C}$. Si consideramos $\mathcal{C}om$ como una opérada sin acción, entonces las álgebras sobre ella vuelven a ser los monoides en $\mathcal{C}$ [May97b, ejemplo 1.2].

A partir de ahora nos centraremos en la categoría $Oper(s\mathcal{S}ets)$ y todas las opéradas que utilizaremos serán opéradas simpliciales. En esta categoría, las opéradas tienen la propiedad de que la categoría de álgebras sobre una opérada cofibrante $\mathcal{O}$ tiene estructura de categoría de modelos. Esta estructura de modelos se obtiene a partir de la estructura de modelos de $s\mathcal{S}ets$ mediante la adjunción

$$F_{\mathcal{O}}\colon s\mathcal{S}ets \rightleftarrows Alg_{\mathcal{O}}\colon U,$$

donde U es el funtor olvido y $F_{\mathcal{O}}$ es el funtor libre definido como

$$F_{\mathcal{O}}(A) = \coprod_{n\geq 0} \mathcal{O}(n) \otimes_{\Sigma_n} A^{\otimes n}.$$

En una categoría de opéradas cualquiera $Oper(\mathcal{C})$, las opéradas con esta propiedad se llaman *opéradas admisibles*. En las categorías de opéradas en conjuntos simpliciales, espacios topológicos compactamente generados o complejos de cadenas de R-módulos, todas las opéradas cofibrantes son admisibles [BM03, observación 4.2].

El siguiente teorema [BM03, teorema 4.4] muestra que las equivalencias débiles entre opéradas cofibrantes proporcionan categoría de modelos equivalentes.

Teorema 8.2.4. *Dado un morfismo de opéradas $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ que sea una equivalencia débil y donde $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ sean opéradas Σ-cofibrantes, la adjunción dada por el cambio de base:*

$$\varphi_!\colon Alg_{\mathcal{O}} \rightleftarrows Alg_{\mathcal{O}'}\colon \varphi^*$$

es una equivalencia de Quillen entre las categorías de modelos de álgebras sobre $\mathcal{O}$ y álgebras sobre $\mathcal{O}'$. □

Dada una opérada $\mathcal{O}$ en $Oper(s\mathcal{S}ets)$, definimos la opérada $\mathcal{O}_\infty$ como una resolución Σ-cofibrante de $\mathcal{O}$, es decir $\mathcal{O}_\infty$ es Σ-cofibrante y tenemos un morfismo de opéradas $\mathcal{O}_\infty \longrightarrow \mathcal{O}$ que es una fibración trivial.

Definición 8.2.5. Sea $\mathcal{O}$ una opérada en $Oper(s\mathcal{S}ets)$. Definimos la *categoría de álgebras homotópicas sobre* $\mathcal{O}$ como la categoría de álgebras sobre $\mathcal{O}'$, donde $\mathcal{O}'$ es un reemplazamiento cofibrante de $\mathcal{O}$.

El teorema 8.2.4 implica que, dada una opérada $\mathcal{O}$ en $\mathit{Oper}(s\mathcal{S}ets)$, la categoría de álgebras sobre $\mathcal{O}_\infty$ es equivalente en el sentido de Quillen a la categoría de álgebras homotópicas sobre $\mathcal{O}$. En efecto, sea $\widehat{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathcal{O}$ un reemplazamiento cofibrante de $\mathcal{O}$. Como la aplicación $\mathcal{O}_\infty \longrightarrow \mathcal{O}$ es una fibración trivial, induce una equivalencia débil $\widehat{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathcal{O}_\infty$, ya que $\widehat{\mathcal{O}}$ es cofibrante. Como $\widehat{\mathcal{O}}$ es Σ-cofibrante (porque es cofibrante), aplicando el teorema 8.2.4 obtenemos que la categoría de álgebras sobre $\widehat{\mathcal{O}}$ es equivalente en el sentido de Quillen a la categoría de álgebras sobre $\mathcal{O}_\infty$.

Ejemplo 8.2.6. Sea $\mathcal{O} = \mathcal{A}ss$ en $\mathit{Oper}(s\mathcal{S}ets)$. Esta opérada es Σ-cofibrante [BM03, observación 4.6]. La opérada A_∞ se define como una resolución Σ-cofibrante de $\mathcal{A}ss$. En la categoría de conjuntos simpliciales, las álgebras sobre A_∞ son espacios con el mismo tipo de homotopía que un espacio de lazos, por lo tanto, cualquier espacio de lazos se puede 'rectificar' a un monoide, es decir, todo espacio A_∞ es del mismo tipo de homotopía que un monoide [BV73], [Sta63].

8.3. Localización de álgebras sobre opéradas

Sea $\mathcal{S}$ una categoría de modelos simplicial (véase definición 2.1.6) con una estructura monoidal compatible cuyo producto denotaremos con $\odot$, que satisface el axioma del producto-*pushout* (8.1). Denotaremos de la forma usual $\mathrm{Map}(X,Y)$ el conjunto simplicial de aplicaciones de X a Y en $\mathcal{S}$. Recordamos la definición de localización homotópica dada en la sección 2.3:

Definición 8.3.1. Una *localización homotópica* es un funtor $L\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ junto con una transformación natural $l\colon \mathrm{Id} \longrightarrow L$ que conserva equivalencias débiles, toma valores fibrantes y la aplicación $l_X\colon X \longrightarrow LX$ es una cofibración tal que para cada X que sea cofibrante y cada Y, el morfismo

$$\mathrm{Map}(LX, LY) \longrightarrow \mathrm{Map}(X, LY)$$

inducido por l_X es una equivalencia débil de conjuntos simpliciales.

Como hemos visto en el teorema 2.3.8, toda aplicación f en una categoría de modelos simplicial cofibrantemente generada, propia por la izquierda y localmente presentable da lugar a un funtor de localización homotópica

L_f. Este es el caso, por ejemplo, de la categoría de conjuntos simpliciales (en la cual $\odot = \times$) o la categoría de espectros simétricos (en la cual $\odot = \wedge$).

Dada una categoría de opéradas $Oper(\mathcal{C})$ sobre una categoría monoidal simétrica y cerrada $\mathcal{C}$, hemos considerado las álgebras sobre estas opéradas como objetos de $\mathcal{C}$. Ahora bien, toda categoría de modelos simplicial $\mathcal{S}$ está enriquecida sobre conjuntos simpliciales; por tanto, si trabajamos con la categoría $Oper(s\mathcal{S}ets)$, tiene sentido hablar de acciones de opéradas simpliciales y de álgebras sobre opéradas de $Oper(s\mathcal{S}ets)$ en la categoría $\mathcal{S}$. Así, si $\mathcal{O} \in Oper(s\mathcal{S}ets)$, un álgebra sobre $\mathcal{O}$ en $\mathcal{S}$ es un objeto X de $\mathcal{S}$ junto con un morfismo de opéradas

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{End}_X$$

donde End_X es la opérada de endomorfismos definida como

$$\mathrm{End}_X(n) = \mathrm{Map}(X^{\odot n}, X) \quad \text{para todo } n \geq 0,$$

con los productos de composición y la acción de Σ_n definidos análogamente al ejemplo 8.1.4. En este caso, $X^{\odot n} = X \odot \overset{(n}{\cdots} \odot X$ y $X^0 = S$ es la unidad de la estructura monoidal de $\mathcal{S}$. Observar que aunque las opéradas son opéradas de conjuntos simpliciales, las álgebras sobre estas opéradas son objetos de $\mathcal{S}$.

Utilizando la biyección (2.1) propia de la categoría de modelos simplicial $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}(\mathcal{O}(n) \otimes X^{\odot n}, X) \cong s\mathcal{S}ets(\mathcal{O}(n), \mathrm{Map}(X^{\odot n}, X)),$$

podemos ver que una estructura de álgebra sobre $\mathcal{O}$ en X puede definirse mediante una familia de morfismos en $\mathcal{S}$ de la forma

$$\mathcal{O}(n) \otimes A^{\odot n} \longrightarrow A$$

para cada $n \geq 0$.

Teorema 8.3.2. *Sea $\mathcal{O}$ una opérada cofibrante en conjuntos simpliciales y sea $\mathcal{S}$ una categoría de modelos simplicial y monoidal. Sea L un funtor de localización homotópica en $\mathcal{S}$. Supongamos que X es un objeto cofibrante de $\mathcal{S}$ y además un álgebra sobre $\mathcal{O}$, y que la aplicación natural*

$$\mathrm{Map}((LX)^{\odot n}, LX) \longrightarrow \mathrm{Map}(X^{\odot n}, LX)$$

es una equivalencia débil de conjuntos simpliciales para todo n. Entonces LX es un álgebra sobre $\mathcal{O}$ y la aplicación de localización $l\colon X \to LX$ es un morfismo de álgebras sobre $\mathcal{O}$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}rr(\mathcal{S})$ la *categoría de flechas* de $\mathcal{S}$. Los objetos de $\mathcal{A}rr(\mathcal{S})$ son las aplicaciones entre objetos de $\mathcal{S}$ y los morfismos entre dos aplicaciones son cuadrados conmutativos. La categoría $\mathcal{A}rr(\mathcal{S})$ es una categoría simplicial ya que $\mathcal{S}$ lo es. Sea $l\colon X \longrightarrow LX$ la aplicación de localización y consideremos la opérada de endomorfismos End_l de l en la categoría $\mathcal{A}rr(\mathcal{S})$. Esta opérada viene definida en cada n por el siguiente *pullback*:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{End}_l(n) \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & \mathrm{End}_{LX}(n) \arrow[d] \\ \mathrm{End}_X(n) \arrow[r, "(l_X)_*"] & \mathrm{Map}(X^{\odot n}, LX). \end{tikzcd}$$

Como la aplicación $l\colon X \longrightarrow LX$ es una cofibración por hipótesis, el axioma del producto-*pushout* en $\mathcal{S}$ nos dice que el producto

$$l^{\odot n}\colon X^{\odot n} \longrightarrow (LX)^{\odot n}$$

también es una cofibración y, de este modo, la aplicación vertical derecha

$$\mathrm{Map}((LX)^{\odot n}, LX) \longrightarrow \mathrm{Map}(X^{\odot n}, LX)$$

es una fibración trivial. Ahora bien, en el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{End}_l \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \mathrm{End}_X \end{tikzcd}$$

el morfismo α inducido por el *pullback* anterior es una fibración trivial de opéradas, porque es el *pullback* de una fibración trivial para cada n. Como $\mathcal{O}$ es cofibrante, existe una elevación $\mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{End}_l$, que componiendo con la aplicación $\mathrm{End}_l \longrightarrow \mathrm{End}_{LX}$ que también da el *pullback*, implica que LX es un álgebra sobre $\mathcal{O}$. La existencia de la elevación $\mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{End}_l$ implica que l es un morfismo de álgebras sobre $\mathcal{O}$. □

8.4. Aplicaciones

Consideremos la opérada $\mathcal{A}ss$ en la categoría $\mathcal{O}per(s\mathcal{S}ets)$ y las álgebras sobre esta opérada en la categoría de conjuntos simpliciales y en la categoría de espectros simétricos.

Conjuntos simpliciales y espacios de lazos

En la categoría de conjuntos simpliciales, las álgebras sobre $\mathcal{A}ss$ son los monoides estrictos en la categoría de conjuntos simpliciales. La opérada A_∞ se define como una resolución Σ-cofibrante de $\mathcal{A}ss$. Las álgebras sobre A_∞ son conjuntos simpliciales del mismo tipo de homotopía de espacios de lazos (ver ejemplo 8.2.6). La opérada A_∞ es cofibrante y la categoría de conjuntos simpliciales cumple las hipótesis del teorema 8.3.2, ya que el funtor de localización conmuta con productos finitos en esta categoría. Por lo tanto, la localización homotópica de un espacio de lazos es homotópicamente equivalente a un espacio de lazos y la aplicación de localización es una aplicación de espacios de lazos. Este hecho fue demostrado con métodos diferentes por Bousfield en [Bou96] y por Farjoun en [Far96, 3.A.3].

Espectros simétricos y espectros anillo

Sea ahora $\mathcal{S}$ la categoría de espectros simétricos. Igual que antes, sea A_∞ una resolución Σ-cofibrante de la opérada $\mathcal{A}ss$. Las álgebras sobre $\mathcal{A}ss$ en esta categoría son los espectros anillo (estrictos); por tanto, las álgebras sobre A_∞ son espectros simétricos homotópicamente equivalentes a espectros anillo. Dado un espectro anillo X, la aplicación

$$X \wedge \ldots \wedge X \longrightarrow LX \wedge \ldots \wedge LX,$$

que es una cofibración gracias al axioma del producto-*pushout*, induce una equivalencia débil de conjuntos simpliciales

$$\mathrm{Map}(LX \wedge \ldots \wedge LX, LX) \simeq \mathrm{Map}(X \wedge \ldots \wedge X, LX)$$

cuando el funtor L conmuta con la suspensión o cuando X y LX son ambos conectivos (ver teoremas 4.2.1 y 4.2.4). El teorema 8.3.2 nos dice que en estos casos la localización homotópica de un espectro anillo (estricto) es homotópicamente equivalente a un espectro anillo (estricto). La condición de conectividad es necesaria, ya que, como hemos visto en el ejemplo 4.2.3, la sección de Postnikov de nivel cero del espectro anillo $K(n)$ de la n-ésima teoría K de Morava no es un espectro anillo, ni siquiera un espectro anillo homotópico.

Bibliografía

[AR94] J. Adámek y J. Rosický, *Locally Presentable and Accessible Categories.* London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 189. Cambridge University Press, 1994.

[Ada61] J. F. Adams, The sphere, considered as an H-space mod p. *Quart. J. Math. Oxford. Ser.* (2) **12** (1961), pp. 52–60.

[Ada73] J. F. Adams, *Mathematical Lectures.* University of Chicago (1973).

[Ada74] J. F. Adams, *Stable Homotopy and Generalised Homology.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, London, 1974.

[AF74] F. W. Anderson y K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 13. Springer-Verlag, New York, 1974.

[BW85] M. Barr y C. Wells, *Toposes, Triples and Theories.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 278. Springer-Verlag, New York, 1985.

[Bas03] G. Bastardas, Localitzacions i complecions d'espais anesfèrics. Tesi doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 2003.

[Baz01] B. Badzioch, Recognition principle for generalized Eilenberg–Mac Lane spaces. *Cohomological Methods in Algebraic Topology (Barcelona, 1998)*, pp. 207–220, *Progress in Mathematics*, vol. 196. Birkhäuser, Basel, 2001.

[BM03] C. Berger e I. Moerdijk, Axiomatic homotopy theory for operads. *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), no. 4, pp. 805–831.

[Boa64] J. M. Boardman, Ph.D. Thesis, University of Cambridge, 1964.

[BV73] J. M. Boardman y R. M. Vogt, *Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 347. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1973.

[Bor94] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra. Basic Category Theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 50. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Bou74] A. K. Bousfield, Types of acyclicity. *J. Pure Appl. Algebra* **4** (1974), pp. 293–298.

[Bou77] A. K. Bousfield, Constructions of factorization systems in categories. *J. Pure Appl. Algebra* **9** (1976/77), no. 2, pp. 207–220.

[Bou75] A. K. Bousfield, The localization of spaces with respect to homology. *Topology* **14** (1975), no. 14, pp. 133–150.

[Bou79a] A. K. Bousfield, The localization of spectra with respect to homology. *Topology* **18** (1979), no. 18, pp. 257–281.

[Bou79b] A. K. Bousfield, The Boolean algebra of spectra. *Comment. Math. Helv.* **54** (1979), no. 3, pp. 368–377.

[Bou79c] A. K. Bousfield, Cohomological localization of spaces and spectra. *No publicado*, 1979.

[Bou82] A. K. Bousfield, On homology equivalences and homological localizations of spaces, *Amer. J. Math.* **104** (1982), pp. 1025–1042.

[Bou94] A. K. Bousfield, Localization and periodicity in unstable homotopy theory, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), pp. 831–873.

[Bou96] A. K. Bousfield, Unstable localization and periodicity. *Algebraic Topology: New Trends in Localization and Periodicity (Sant Feliu de Guíxols, 1994)*, pp. 33–50, *Progress in Mathematics*, vol. 136. Birkhäuser, Basel, 1996.

[Bou97] A. K. Bousfield, Homotopical localizations of spaces, *Amer. J. Math.* **119** (1997), pp. 1321–1354.

[BF78] A. K. Bousfield y E. M. Friedlander, Homotopy theory of Γ-spaces, spectra, and bisimplicial sets. *Geometric Applications of Homotopy Theory (Evanston, 1977)*, II, pp. 80–130, *Lecture Notes in Mathematics* vol. 658. Springer, Berlin, 1978.

[BK72a] A. K. Bousfield y D. M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localizations.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 304. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1972.

[BK72b] A. K. Bousfield y D. M. Kan, The core of a ring. *J. Pure Appl. Algebra* **2** (1972), pp. 73–81.

[Bro63] E. H. Brown, Jr., Cohomology theories. *Ann. of Math.* (2) **75** (1962), pp. 467–484; Correction: *Ann. of Math.* (2) **78** (1963), p. 201.

[Cas94] C. Casacuberta, Recent advances in unstable localization. *The Hilton Symposium 1993*, pp. 1–22, CRM Proceedings Lecture Notes, vol. 6. American Mathematical Society, Providence, 1994.

[Cas00] C. Casacuberta, On structures preserved by idempotent transformations of groups and homotopy types. *Crystallographic Groups and Their Generalizations (Kortrijk, 1999)*, pp. 39–68, *Contemporary Mathematics*, vol. 262. American Mathematical Society, Providence, 2000.

[CC04] C. Casacuberta y B. Chorny, Generators for homotopical localizations in model categories. En preparación.

[CG02] C. Casacuberta y J. J. Gutiérrez, Homotopical localizations of module spectra. Aceptado en *Trans. Amer. Math. Soc.*

[CGV04] C. Casacuberta, J. J. Gutiérrez y R. M. Vogt, Homotopical localization preserves algebras over certain operads. En preparación.

[CR97] C. Casacuberta y J. L. Rodríguez, On towers approximating homological localizations. *J. London Math. Soc.* (2) **56** (1997), no. 3, pp. 645–65.

[CRT00] C. Casacuberta, J. L. Rodríguez y J.-Y. Tai, Localizations of abelian Eilenberg–Mac Lane spaces of finite type. Prepublicación, 2000.

[CS01] C. Casacuberta y D. Scevenels, On the existence of group localizations under large-cardinal axioms. *RACSAM* **95** (2001), no. 2, pp. 163–170.

[CSS04] C. Casacuberta, D. Scevenels y J. H. Smith, Implications of large-cardinal principles in homotopical localization. Aceptado en *Adv. Math.*

[DHS88] E. S. Devinatz, M. J. Hopkins y J. H. Smith, Nilpotence and stable homotopy theory I. *Ann. of Math.* (2) **128** (1988), no. 2, pp. 207–241.

[DHKS04] W. G. Dwer, P. S. Hirschhorn, D. M. Kan y J. H. Smith, Homotopy Limit Functors on Model Categories and Homotopical Categories. Prepublicación, 2004.

[DMV87] M. Dugas, A. Mader y C. Vinsonhaler, Large E-rings exist. *J. Algebra* **108** (1987), pp. 88–101.

[DP01] W. G. Dwyer y J. H. Palmieri, Ohkawa's theorem: there is a set of Bousfield classes. *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), no. 3, pp. 881–886.

[EKMM97] A. D. Elmendorf, I. Kriz, M. A. Mandell y J. P. May, *Rings, Modules, and Algebras in Stable Homotopy Theory.* Mathematical Surveys and Monographs, 47. American Mathematical Society, Providence, 1997.

[Far96] E. Dror Farjoun, *Cellular Spaces, Null Spaces and Homotopy Localization.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.

[Fre37] H. Freudenthal, Über die Klassen der Sphärenabbildungen I. *Composito Math.* **5** (1937), pp. 299–314.

[GU71] P. Gabriel y F. Ulmer, *Lokal Präsentierbare Kategorien.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 221. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1971.

[GZ67] P. Gabriel y M. Zisman, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35 Springer-Verlag, New York, 1967.

[GM95] J. P. C. Greenlees y J. P. May, Completions in algebra and topology. *Handbook of Algebraic Topology*, pp. 255–276, North-Holland, Amsterdam, 1995.

[GNPR04] F. Guillén, V. Navarro, P. Pascual y A. Roig, Moduli spaces and formal operads. Prepublicación, 2004.

[Gut04a] J. J. Gutiérrez, Strict modules and homotopy modules in stable homotopy. Prepublicación, 2004.

[Gut04b] J. J. Gutiérrez, Homological localizations of Eilenberg–Mac Lane spectra. Prepublicación, 2004.

[HMR75] P. Hilton, G. Mislin y J. Roitberg, *Localization of Nilpotent Groups and Spaces.* North-Holland Mathematics Studies, vol. 15. American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1975.

[Hir03] P. S. Hirschhorn, *Model Categories and their Localizations.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99. American Mathematical Society, Providence, 2003.

[HS98] M. J. Hopkins y J. H. Smith, Nilpotence and stable homotopy theory II. *Ann. of Math.* (2) **148** (1998), no. 1, pp. 1–49.

[Hov95] M. Hovey, Cohomological Bousfield classes. *J. Pure Appl. Algebra* **103** (1995), no. 1, pp. 45–59.

[Hov99] M. Hovey, *Model Categories.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63. American Mathematical Society, Providence, 1999.

[HPS97] M. Hovey, J. H. Palmieri y N. P. Strickland, *Axiomatic Stable Homotopy Theory. Mem. Amer. Math. Soc.* **610** 1997.

[HSS00] M. Hovey, B. Shipley y J. H. Smith, Symmetric spectra. *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), no. 1, pp. 149–208.

[Kap69] I. Kaplansky, *Infinite Abelian Groups.* The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1969.

[Laa03] P. van der Laan, Operads —Hopf algebras and coloured Koszul duality. Ph.D. Thesis, University of Utrecht, 2003.

[Lew91] L. G. Lewis, Is there a convenient category of spectra? *J. Pure Appl. Algebra* **73** (1991), no. 3, pp. 233–246.

[Lim59] E. L. Lima, The Spanier-Whitehead duality in new homotopy categories. *Summa Brasil. Math.* **4** (1959), pp. 91–148.

[Mac67] S. Mac Lane, *Homology.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 114. Springer-Verlag, New York, 1967.

[Mac71] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 5. Springer-Verlag, New York, 1971.

[Mah67] M. Mahowald, The metastable homotopy of S^n. *Mem. Amer. Math. Soc.* **72** (1967).

[Man01] M. A. Mandell, E_∞-algebras and p-adic homotopy. *Topology* **40** (2001), pp. 43–94.

[Mar83] H. R. Margolis, *Spectra and the Steenrod Algebra.* North-Holland Mathematical Library, vol. 29. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam,1983.

[Mar96] M. Markl, Models for operads. *Comm. Algebra* **24** (1996), pp. 1471–1500.

[MSS02] M. Markl, S. Shnider y J. Stasheff, *Operads in Algebra, Topology and Physics.* Mathematical Surveys and Monographs, 96. American Mathematical Society, Providence, 2002.

[May72] J. P. May, *The Geometry of Iterated Loop Spaces.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 271. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1972.

[May97a] J. P. May, Definitions: operads, algebras and modules. *Operads: Proceedings of Renaissance Conference (Hartford, 1995)*, pp. 1–7, *Contemporary Mathematics*, vol. 202. American Mathematical Society, Providence, 1997.

[May97b] J. P. May, Operads, algebras and modules. *Operads: Proceedings of Renaissance Conference (Hartford, 1995)*, pp. 15–31, *Contemporary Mathematics*, vol. 202. American Mathematical Society, Providence, 1997.

[May98] J. P. May, Stable algebraic topology and stable topological algebra. *Bull. London Math. Soc.* **30** (1998), no. 3, pp. 225–234.

[Nee01] A. Neeman, *Triangulated Categories.* Annals of Mathematics Studies, vol. 148. Princeton University Press, Princeton, 2001.

[Pup62] D. Puppe, On the formal structure of stable homotopy theory. *Colloquium on Algebraic Topology*, pp. 65–71, Aarhus Universitet, Aarhus, 1962.

[Qui67] D. G. Quillen, *Homotopical Algebra.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 43. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1967.

[Qui69] D. G. Quillen, Rational homotopy theory. *Ann. of Math.* (2) **90** (1969), pp. 205–295.

[Rav84] D. C. Ravenel, Localization with respect to certain periodic homology theories. *Amer. J. Math.* **106** (1984), no. 2, pp. 351–414.

[Rav86] D. C. Ravenel, *Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres.* Pure and Applied Mathematics, vol. 121. Academic Press, Orlando, 1986.

[Rob87] A. Robinson, The extraordinary derived category. *Math. Z.* **96** (1987), no. 2, pp. 231–238.

[Rud98] Y. B. Rudyak, *On Thom Spectra, Orientability and Cobordism.* Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.

[Sch73] P. Schultz, The endomorphism ring of the additive group of a ring. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **15** (1973), pp. 60–69.

[Sch01] S. Schwede, S-modules and symmetric spectra. *Math. Ann.* **319** (2001), no. 3, pp. 517–532.

[SS00] S. Schwede y B. Shipley, Algebras and modules in monoidal model categories. *Proc. London Math. Soc.* **80** (2000), pp. 491-511.

[SS03] S. Schwede y B. Shipley, Stable model categories are categories of modules. *Topology* **42** (2003), no. 1, pp. 103–153.

[Ser53] J.-P. Serre, Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. *Ann. of Math.* (2) **58** (1953), pp. 258–294.

[SW53] E. H. Spanier y J. H. C. Whitehead, A first approximation to homotopy theory. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **39** (1953), pp. 655–660.

[Sta63] J. D. Stasheff, Homotopy associativity of H-spaces I and II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** (1963), pp. 275–312.

[Sul70] D. Sullivan, Geometric topology, Part I. Mimeographed notes, MIT, Cambridge, 1970.

[Sul74] D. Sullivan, The genetics of homotopy theory and the Adams conjecture. *Ann. of Math.* (2) **100** (1974), pp. 1–80.

[Swi75] R. M. Switzer, *Algebraic Topology —Homotopy and Homology.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 212. Springer-Verlag, New York, 1975.

[Ver77] J. L. Verdier, *Catégories Derivées.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 569. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1977.

[Wei94] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Whi62a] G. W. Whitehead, Generalized homology theories. *Trans. Amer. Math. Soc.* **102** (1962), pp 227–283.

[Whi62b] G. W. Whitehead. Some aspects of stable homotopy theory, *Proc. Internat. Congress of Mathematicians*, Stockholm (1962), pp. 502–506, Institute Mittag–Leffler, Djursholm, 1963.

Índice alfabético

Ω-espectro, 5
Σ-espectro, 4
λ-sucesión, 27
f-equivalencia, 30, 40
f-localización, 31, 40
álgebra
  sobre una mónada, 109
  sobre una opérada, 127

anillo
  rígido, 100
  sólido, 101
  semisimple, 113

categoría
  cofibrantemente generada, 24
  de S-módulos, 14
  de álgebras homotópicas, 128
  de colecciones, 124
  de Eilenberg–Moore, 66, 109
  de espectros módulo
    estrictos, 111
    homotópicos, 112
  de espectros simétricos, 12
  de flechas, 131
  de modelos, 22
    propia, 26
    simplicial, 25
  derivada, 112
  homotópica estable, 7, 19
  localmente presentable, 28
  monoidal simétrica, 17
    cerrada, 18
  triangulada, 16
cofibración de espectros, 8
cofibración trivial, 23
conjunto dirigido, 28
conmuta con la suspensión, 46
cuadrado aritmético, 76

dimensión proyectiva, 113

espectro, 4
  f-local, 40
  n-conexo, 7
  acíclico, 75
  anillo, 58
    estricto, 110
    rígido, 103
    sólido, 103
  conectivo, 7
  de Eilenberg–Mac Lane, 5
    reducido, 105
  de funciones, 10, 39
  de las esferas, 5
  de Moore, 11
  módulo, 59
    estricto, 111
  simétrico, 12
  suspensión, 4
estructura localizada, 21, 37

fibración trivial, 23
fórmula de Künneth, 11
funtor
  cohomológico, 17
  de f-localización, 31, 40
    cuasi-exacto, 49
  de nulificación, 50
  exacto, 16
  idempotente, 42
  representable, 17
  triangulado, 16

GEM estable, 67
grupo abeliano
  Ext-J-completo, 94
  de exponente finito, 93
  racional, 94
  reducido, 85, 105
  únicamente p-divisible, 79

localización
  cohomológica, 88
  de álgebras sobre opéradas, 130
  de anillos estrictos, 132
  de espectros anillo, 61, 65
  de espectros módulo, 61, 65
  de GEMs estables, 71
  de módulos estrictos, 121
  en conjuntos de primos, 52
  fibra a fibra, 48
  homológica, 74
  homotópica, 29, 129
  propiedades universales, 40
  smashing, 54, 86
  término de error, 70

mónada, 66, 108
morfismo
  de mónadas, 109
  de opéradas, 125
morfismo de álgebras
  sobre mónadas, 109
  sobre opéradas, 127

objeto
  f-local, 30
  fuertemente dualizable, 19
  pequeño, 27
  presentable, 28
opérada, 125
  Σ-cofibrante, 126
  admisible, 128
  de endomorfismos, 125

producto *smash*, 6, 9
propiedad de elevación, 23

recubridor conectivo, 40

sección de Postnikov, 7, 50
subcategoría localizante, 17
sucesión fibra-cofibra, 8

teorema de Hurewicz, 11
torre de Postnikov, 7
triángulo exacto, 8, 15